

SEMAINE DU 8/6 AU 14/6

ESPACES PREHILBERTIENS RÉELS

- ① **Premières définitions.** Produit scalaire, Espace préhilbertien, espace euclidien, Norme définie à partir d'un produit scalaire, Définition de distance à partir d'une norme, *Les définitions de norme et distance ne sont pas explicitement au programme et ne sont donc pas exigibles*, orthogonalité entre deux vecteurs, entre deux parties, Famille orthogonale/orthonormale, Orthogonal d'une partie.
- ② **Propriétés du produit scalaire (et de la norme associée).** Inégalité de Cauchy-Schwartz, Inégalités triangulaires pour la norme, Identités remarquables et de polarisation du produit scalaire, Théorème de Pythagore.
- ③ **Propriétés de l'orthogonalité.** Structure d'espace vectoriel de $F^\perp$, $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$, $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$ et $A \subset A^{\perp\perp}$, $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$, F et $F^\perp$ sont en somme directe, Si F est de dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$ et $F^{\perp\perp} = F$.
Si E est de dimension finie, $H^\perp$ est une droite, Isomorphisme entre E et E^* .
- ④ **Algorithme de Gram-Schmidt.** A savoir faire en pratique quelque soit le produit scalaire, Existence de base orthonormée en dimension finie.
- ⑤ **Projections orthogonales et distances.** Définitions de projection et symétrie orthogonales, Formule du projeté dans une base orthonormée, Définition de distance à un espace vectoriel,
Si $\dim F < +\infty$, $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$,
Distance à un hyperplan dans un espace euclidien.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Preuve de la formule du projeté dans une base orthonormée.
- ② Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$
- ③ Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - (at^2 + bt + c))^2 dt$
- ④ Preuve de Cauchy-Schwartz et de l'inégalité triangulaire.