INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Escuela de Negocios y Dirección

SUMARIO

ENyD

Área Contable

1. VALOR TEMPORAL DEL DINERO

En términos financieros el valor de una suma de dinero no es independiente del momento en que esta pueda cobrarse. Por el contrario, como depende del tiempo, tiene sentido el que la definamos como magnitud con dos dimensiones, capital y tiempo, por tanto, capital financiero será una cantidad de dinero Ct que se podrá cobrar en el tiempo t, o sea (Ct, t).

En correspondencia con ello se llama operación financiera a un intercambio de capitales financieros entre un sujeto activo y otro pasivo, con diferentes tiempos para hacerse efectivos.

EJEMPLO: El pagaré de El Corte Inglés.

Disponemos de un pagaré de El Corte Inglés de 6.000 € con vencimiento a 90 días.

Luego tenemos un capital financiero de (6000, 90). Podemos hacer una operación financiera con nuestro Banco si lo intercambiamos por (5925,0), con lo cual recibimos hoy 5925 € del Banco, y el Banco ya cobrará los 6.000 € a los 90 días.

En toda operación financiera aparece un sujeto activo que tiene capital con tiempo actual y lo intercambia con el sujeto pasivo que tiene capital con tiempo futuro.

En esquema podría ser:

	SUJETO PASIVO		SUJETO ACTIVO
HOY	Recibe	← (5925, 0)	Cede
FUTURO	Cede	(6000, 90) →	Recibe

Podemos preguntarnos por qué el Banco está dispuesto a darnos hoy 5925 a cambio de percibir 6000 dentro de 90 días. Porque percibirá 75 € de más, es lo que se llama

Interés de la operación.

¿Es mucho o poco? Como es una magnitud bruta no lo sabemos, tenemos que compararla con las dos dimensiones del capital financiero para hacernos una idea relativa (capital inicial y tiempo en años):

- ✓ Tanto efectivo = 75/5925 = 0,01266 o el 1,27 %
- ✓ Tanto nominal anual = 75. 365 / 5925. 90 o el 5,13 %

Este último concepto, el Tanto Nominal Anual, es muy importante, pues es la expresión más corriente del precio en las operaciones financieras y nos referiremos a él siempre que no indiquemos otra cosa.

Conviene darse cuenta que en la operación que hemos visto el tipo de interés estaba implícito, hemos tenido que calcularlo, mientras que en otras operaciones el tipo de interés es Explícito, pues aparece claramente mencionado en el contrato que sirve de base a la operación financiera.

2. CAPITALIZACIÓN SIMPLE Y COMPUESTA

Las operaciones de capitalización son aquellas en las que estamos interesados en averiguar qué capital recibirá en el tiempo t el sujeto activo que cede hoy un capital Co.

Como hemos visto antes el capital que recibirá será el inicial más el interés de la operación. La manera de calcular dicho interés tiene diversas modalidades, guiadas por la práctica, en función de las características de la operación y del mercado al que van dirigidas.

2.1. Capitalización a interés simple vencido:

Los intereses de la operación serán proporcionales al Capital inicial Co, al tiempo t en años y al Tanto nominal anual que se haya pactado, en tanto por uno (en adelante i), es decir:

$$\text{Intereses} = Co \cdot t \cdot i, \text{ Y de ahí:}$$

$$Ct = Co + \text{Intereses} = Co + Co \cdot t \cdot i = Co\,(1 + t \cdot i)$$

A la expresión $1 + t \cdot i$ se la llama Factor de capitalización a interés simple vencido. Se utiliza para calcular intereses de depósitos a plazo.

EJEMPLO: ¿Qué capital final recibirá un cliente que deposita 6000 € en una imposición a plazo a 182 días al tipo de interés nominal anual del 3,15%?

SOLUCIÓN:

Calcula el factor de capitalización: $1 + i.t = 1 + 0{,}0315 \cdot 182/365 = 1{,}0157$

Multiplica el capital inicial por dicho factor de capitalización: $Ct = 6000 \cdot 1{,}0157 = 6094{,}24$

O bien se puede hacer de forma directa:

$Ct = 6000 \cdot (1 + 0{,}0315 \cdot 182/365) = 6094{,}24$

Este método se usa en periodos de tiempo inferiores al año.

Observemos que en este método de capitalización el capital inicial siempre es el mismo, ya se trate de 6 meses o 6 años, lo cual es injusto pues a medida que se van generando los intereses es normal que se quiera disponer de ellos o bien acumularlos al propio capital.

2.2. Capitalización a interés compuesto

Para resolver esta injusticia que se hace más evidente para períodos superiores al año, se utiliza un método de capitalización que llamaremos capitalización a interés compuesto.

Aparece aquí un nuevo concepto que es el período de capitalización, es decir el período de tiempo que da derecho a acumular los intereses al capital, para producir más intereses. Dicho período es útil definirlo por la variable k que representa el número de veces que un año contiene al período, es decir:

- ✓ Un año contiene doce meses, por tanto k=12 para periodos mensuales de capitalización.
- ✓ Un año contiene cuatro trimestres, por tanto k= 4 para periodos trimestrales de capitalización.
- ✓ Un año contiene dos semestres, por tanto k= 2 para periodos semestrales de capitalización.

Supongamos una operación con capital inicial Co, a un tipo de interés nominal anual i , a n años, con factor de capitalización k. El número de períodos será como es natural k.n y veamos cómo podremos calcular el capital final Cn a los n años, o lo que es lo mismo, al final de los t = k . n periodos:

Veamos el capital al final del primer período: C1 = Co (1 + i. 1/k), pues el tiempo de un período es la inversa de k (un mes es 1/12 años, un trimestre es ¼ años etc.). Dicho capital será el inicial para el segundo período, y así acumulamos los intereses:

$$C2 = C1(1 + i/k) = Co (1 + i/k)(1+ i/k) = Co (1 + i/k)^2$$

Repitiendo el proceso llegaríamos a:

$$Cn = Co (1+ i / k)^{k.n}$$

Fórmula general para la capitalización compuesta.

De forma similar, al factor $(1 + i/k)^{k.n}$ se le llama factor de capitalización a interés compuesto y representa en que se habría convertido 1 € después de n años, capitalizando k veces al año y al tipo nominal anual de i (recordemos que i es en tanto por uno).

De esta fórmula se deriva, despejando el i una de las formulas fundamentales del cálculo financiero, pues se aplica en multitud de ocasiones, y es la siguiente:

$$I = \{ (Cn/Co)^{1/n.k} - 1\} . k$$

(Recordemos que exponentes fraccionarios equivalen a raíces)

EJEMPLO: Vamos a ver con algunos ejemplos la diferencia entre interés simple y compuesto y dentro de este último la importancia de distintos períodos de capitalización.

Veamos en que se convierten 100000 € al cabo de 5 años al tipo nominal anual del 5%:

Interés simple vencido: Cn = 100000 (1 + 0,05. 5) = 125000 €

Interés compuesto anual: (K =1): $Cn = 100000\ (1 + 0,05)^{5} = 127628,16$ €

Id. con periodo mensual (K =12): $Cn = 100000\ (1 + 0,05/12)^{5.12} = 128335,87$ €

Una derivación interesante de la capitalización compuesta es que con distintos periodos de capitalización se obtienes capitales finales diferentes, por tanto, se obtienen distintos tipos efectivos.

Se define el Tanto Efectivo Anual equivalente a un tanto nominal i con un periodo k determinado, al tipo nominal que en capitalización simple en un año conseguiría el mismo capital final que la capitalización compuesta con periodo k e interés i:

$$1 + TEA = (1 + i / k)^k$$

Y despejando:

$$TEA = (1 + i / k)^k - 1$$

Este concepto está en la base de otro parecido que es la TAE (o Tasa Anual Equivalente) de toda operación financiera definida en la circular 8/90 de 7 de septiembre del Banco de

España sobre transparencia de las operaciones y protección de la clientela. Lo veremos en breve.

3. DESCUENTO SIMPLE Y COMPUESTO

Al contrario que en la capitalización, en las operaciones de descuento o actualización estamos interesados en el capital inicial Co que sea equivalente a un capital final Cn conocido, tras un tiempo de n años y con un tipo nominal anual de i. Como ya hemos visto hay varios métodos de cálculo de los intereses y en función de ello habrá varias formas de descuento.

3.1. Descuento simple y comercial

Utilizando la fórmula de capitalización a interés simple vencido y despejando Co, tenemos:

$$Co = Cn / (1 + i \cdot n)$$

Y de ahí, despejando:

$$I = (Cn - Co) / Co \cdot n$$

Recordemos que n será el tiempo en años por lo que, si nos lo dan en días, habrá que dividir por 365 (año natural) o en algunos casos por 360 (año comercial, empleado por costumbre en las operaciones de descuento racional de Letras del Tesoro y en las operaciones de descuento comercial bancario).

EJEMPLO: Tenemos una Letra del tesoro de Nominal 1000 € con vencimiento dentro de 182 días. El mercado ofrece un tipo de interés del 2,25 % para ese plazo. Calculemos por cuanto se cotizaría dicha letra:

$$Co = 1000 / (1 + 0{,}0225 \cdot 182/360) = 988{,}75$$

Ahora observamos que la misma letra al pasar 20 días se cotiza a 990 €. ¿Qué le ha pasado al tipo de interés?

$$I = (1000 - 990) / 990 \cdot 162/360 = 0{,}022446 \text{ o sea el } 2{,}24\ \%$$

Ha disminuido ligeramente.

La fórmula anterior se la llama descuento simple o racional, pues es el descuento que se deriva lógicamente de los conceptos financieros ya mencionados, que el capital inicial

Co produce intereses a una tasa i. Ya lo hemos visto, en descuento de Letras del Tesoro.

Pero la práctica bancaria ha impuesto tradicionalmente el descuento comercial o bancario que se diferencia del anterior en que los intereses se calculan al tipo i sobre el capital final Cn, que es el que aparece en el importe nominal de los efectos que se llevan al descuento, y ello hace que:

$$\text{Intereses} = Cn\ (1 + i\ .\ n),$$

$$\text{Cantidad a abonar} = Cn - \text{Intereses} = Cn - Cn(1+i.n) = Cn(1-i.n)$$

O sea:

$$Co = Cn\ (1 - i\ .\ n)$$

Obsérvese la diferencia con la anterior del Descuento Racional. En la práctica solo se utiliza en operaciones de descuento de efectos por entidades bancarias.

EJEMPLO: Retomemos el caso inicial del pagaré del Corte Inglés de 6000 €. El banco nos ha dado 5925€ y el vencimiento era a 90 días, falta calcular a que tipo i nos lo ha descontado.

5925 = 6000 (1 – i . 90/360), y despejando la i nos sale i = 0,05.

A este tipo de interés que aplicamos sobre el capital final le llamaremos Interés simple anticipado. Veamos su relación con el tipo de interés vencido tradicional aplicado sobre el capital inicial.

Teniendo un capital inicial 5925 y un capital final 6000 a los 90 días. ¿Cuál habría sido el tipo i si la operación la hubiéramos hecho a descuento racional?

$$I = (6000 - 5925) / 5925 \cdot 90/360 = 0,050632$$

Como vemos es ligeramente mayor.

Si además el Banco nos hubiera cobrado una comisión del 0,5% del nominal, el Co a recibir habría sido menor:

$$Co = 5925 - 0,005 \cdot 6000 = 5895 \text{ €}$$

Y el tipo de interés efectivo a descuento racional:

$$I = (6000 - 5895) / 5895 \cdot 90/360 = 0,0712468$$

Lo que produce una diferencia considerable.

3.2. Descuento a interés compuesto

De manera análoga tomamos la fórmula de capitalización a interés compuesto y despejamos el Co:

$$Co = Cn / (1 + i/k)^{n.k}$$

O con capitalización anual:

$$Co = Cn / (1 + i)^{n}$$

Observemos que la expresión:

$$1/ (1 + i)^{n}$$

Llamada Factor de actualización a interés compuesto

Esta expresión es la más utilizada para traer valores futuros al momento presente, sabiendo la tasa a la que el mercado descuenta para los distintos plazos aplicables.

EJEMPLO: Vamos a aplicar lo anterior a valorar la siguiente operación financiera, que nos han propuesto. Nos proponen entregarnos tres pagarés con vencimientos a 1, 2 y 3 años de 100000€ cada uno como pago por la compra de un terreno que valoramos en 300000€.

Nos podemos preguntar: ¿Es mucho lo que perdemos con el cambio?

El valor actual de lo que nos entregan seria la suma del valor actual de cada uno de los pagarés. Supongamos que el mercado nos da hoy (tipos spot) los tipos de interés para los plazos indicados, y son 3,50 a 1 año, 3,65 a 2 años y 3,80 a tres años.

Calculemos:

$$Co = 100000 / (1+0,035) + 100000 / (1+0,0365)^{2} + 100000 / (1+0,0380)^{3} = 279113,93$$

Y así ya estamos en condiciones de ver si es mucho o poco de acuerdo con la idea que nos hubiéramos hecho.

4. TIPOS DE INTERÉS SPOT Y FORMARD

Analicemos los tipos de interés de mercado que publica la AIAF: Tipos medios al cierre de Mercado del dia 28/02/201X.

Madrid, 28 de Febrero de 201X (AIAF 15:55:49) Los tipos medios negociados en la sesión de hoy son los siguientes:

Plazo	Tipo medio
1 mes	3,840
2 meses	3,920
3 meses	3,950
6 meses	4,060
9 meses	4,130
12 meses	4,190
18 meses	4,210
3 años	4,140
5 años	4,190
10 años>	4,390

Servicio de noticias AIAF Mercado de Renta Fija

Podemos preguntarnos que significa que los tipos “spot” o de contado que vemos en el cuadro anterior, sean los que son, y qué expectativas tiene el mercado sobre los tipos de interés que regirán en el futuro para los distintos plazos. Tomando la hipótesis de que el mercado es perfecto y racional, es decir que toda la información sobre el futuro está contenida en los precios actuales, podemos plantear la siguiente equivalencia de capitales:

1 euro invertido hoy a plazo de 3 años al tipo que ofrece el mercado, o sea 4,140%, deberá darnos un capital final igual al que se conseguiría invirtiendo ese mismo euro a 18 meses al tipo de 4,210 y cuando venza invertir de nuevo el capital final otros 18 meses más al tipo “forward” que en el futuro exista para 18 meses de plazo. Aplicamos interés compuesto,

$$(1 + 0{,}04140)^{3} = (1 + 0{,}04210)^{1,5} . (1 + f)^{1,5},$$

y de aquí despejamos el tipo forward f que llamaremos tipo forward dentro de 1,5 años para 1,5 años más. (f = 0,0407 o 4,07%)

Observemos que si el tipo a tres años es menor que el tipo a 18 meses es porque se espera que a los 18 meses los tipos bajen, y así sale el tipo forward que como se ve es menor.

Pero para plazos dentro del año la costumbre es aplicar interés simple vencido aunque el esquema de equivalencia de capitales es el mismo, así pues:

$$(1 + 0{,}04190 \ . \ 12/12) = (1 + 0{,}04130 \ . \ 9/12) \ . \ (1 + f \ . \ 3/12)$$

$$(\ f = 0{,}042387 \text{ o } 4{,}24\%)$$

Obsérvese que en este caso el tiempo lo hemos puesto en años, 1 año = 12/12

9 meses = 9/12 de año, 1 año – 9 meses = 3/12 de año. Aquí vemos que el mercado espera que dentro de nueve meses los tipos subirán ligeramente.

5. RENTABILIDAD

La Idea de rentabilidad hace referencia a la relación que existe entre el rendimiento obtenido por una inversión y el capital invertido en ella. Dependerá por tanto de la forma de cálculo de los intereses generados, de la forma de cobro de los mismos, de si se reinvierten los intereses explícitos o no, etc. Una primera aproximación nos da dos formas de ver el problema:

5.1. Rentabilidad Nominal y efectiva.

Dependiendo de si adoptamos la expresión del interés simple o compuesto para calcularla, partiendo de la forma más simple de inversión que sería invertir hoy un capital Co para obtener dentro de n años un capital final Cn.

5.1.1. Rentabilidad Nominal.

Tomamos la fórmula conocida de la expresión del interés simple vencido:

$$I = (Cn - Co) / Co \,.\, n$$

Aplicable a la rentabilidad de letras o pagarés a corto plazo.

5.1.2. Rentabilidad Efectiva.

Tomamos la fórmula del interés compuesto con capitalización anual:

$$I = (Cn / Co)^{1/n} - 1 \,,$$

Esta fórmula es aplicable en general para plazos de inversión superiores al año, fondos de inversión etc.

5.2. Rentabilidad simple anual.

Utilizamos la fórmula de rentabilidad nominal y la ampliamos para el caso de que haya además cobros o pagos adicionales en la vida de la inversión, aunque suponemos que todos esos flujos intermedios se llevan al final de la inversión, así pues:

$$RS = \{(Cn + d - g) - Co\} / Co \,.\, n$$

Co = capital invertido al inicio de la operación

Cn = capital obtenido al final de la operación

d = Suma de todos los flujos percibidos, intereses, dividendos, primas etc…

g = Suma de todos los gastos asociados a la operación, comisiones, etc

n = número de años de la operación.

EJEMPLO: Hemos comprado 100 acciones de Endesa a 34,15€, con unos gastos totales de compra de 5 €. Posteriormente hemos cobrado el dividendo de 1,00 € por acción, y 0,15 € por prima de asistencia a la junta. Finalmente, a los 145 dias de la compra las vendemos a 38,75 con unos gastos de venta de 3€. Calcular la rentabilidad simple obtenida:

RS = {(100 *38,75) - (100*34,15) + 100*(1,00+0,15) - (5 + 3)} / 3415 * 365/145 = 0,4179 o sea un 41,79 %

Como vemos la rentabilidad simple no tiene en cuenta cuando se cobran o pagan los flujos intermedios pues se supone que todos ellos van al final de la operación.

Para evitar este problema tenemos otras expresiones de rentabilidad, que vamos a ver a continuación.

5.3. Tasa Anual Equivalente (TAE).

Será el tipo efectivo anual que resulte tomando además la influencia de los gastos de la operación al principio o al final.

Sea una operación que no tenga flujos intermedios:

$$TAE = \{(Cn-g) / (Co-c)\}^{1/n} - 1 ,$$

siendo g y c los gastos y comisiones aplicables al final yal principio de la operación.

Si la operación tiene capitalización con frecuencia superior a la anual, k , se utiliza la fórmula del TEA vista con anterioridad, en ausencia de gastos y comisiones:

$$TEA = (1 + i /k)^{k}$$

Por tanto, TAE = TEA si no hay gastos.

EJEMPLO: Cuál será la TAE de una imposición a plazo a 1 año, al 3% nominal anual, con abono de intereses trimestrales. En esta operación no suele haber ningún tipo de gasto o comisión adicional, por tanto:

TAE = TEA = (1 + 0,03 / 4) - 1 = 0,030339 o sea el 3,034 %

Si la operación tiene flujos intermedios de cobros y pagos .El cálculo correcto de la TAE exige el conocimiento de la siguiente definición de rentabilidad, la TIR.

5.4. Tasa Interna de Rentabilidad (TIR).

la podemos definir como aquel tipo de interés anual que iguala los valores actuales de la corriente de cobros y pagos derivadas de la inversión. En general se puede plantear la siguiente ecuación:

$$P1 / (1+TIR)^{t1} + P2 / (1 + TIR)^{t2} + ... = C1 / (1 + TIR)^{T1} + C2 (1 + TIR)^{T2} + ...,$$

Donde:

P1,P2,... son los pagos de la operación y t1, t2, ... Los tiempos en años hasta cada pago

C1, C2,.. Son los cobros de la operación y T1, T2, ... los tiempos en años hasta cada cobro.

En la ecuación anterior la incógnita a averiguar es la TIR, y es un problema que en algunas ocasiones presenta dificultades. En general se resuelve a base de prueba y error o con una calculadora financiera o programa informático adecuado.

Observemos que una hipótesis implícita en el cálculo de la TIR es que los flujos intermedios se reinvierten a la misma TIR.

Una vez averiguada la TIR se puede pasar a la TAE con las fórmulas anteriores, tomando el valor de la TIR hallada como el tipo nominal anual para calcular el tipo efectivo.

5.5. Tasa de rentabilidad efectiva (TRE).

El supuesto de que cuando haya flujos intermedios se pueden invertir al mismo tipo de la TIR, no se da en general, por lo que si queremos hacernos una idea de la rentabilidad efectiva que hemos conseguido con nuestra inversión habrá que tener en cuenta a que tasa real hemos podido invertir los flujos intermedios.

EJEMPLO: Compra de acciones Endesa con esta nueva perspectiva.

Inversión inicial: 100 a 34,15 menos 5 de gastos ....3420 €

Cobro dividendo 1€ a los 25 días, son 100 € que los deposito en mi cuenta al 3% durante 120 días, generándome 100 . 120/365 . 0,03 = 0,99 €

Cobro prima de 0,15€ a los 70 días, son 15 € igualmente depositados al 3% durante 75 días Generándome 15 . 75/145 . 0,03 = 0,09 €

Venta a los 145 días obteniendo 3875 menos 3 de gastos = 3872.

Capital final obtenido = 3872 + 100 + 0,99 + 15 + 0,09 = 3988,08

TRE = (3988,08 / 3.420)^(365/145) - 1 = 0,4722

O sea el 47,22 % que como vemos es mayor que la rentabilidad simple obtenida antes, pues es un cálculo más ajustado y realista teniendo en cuenta el momento de cada cobro o pago y la reinversión de los flujos intermedios.

5.6. Tasa de rentabilidad geométrica.

Aplicable si tenemos distintas rentabilidades simples de los periodos intermedios. Supongamos que en un periodo empezamos con C1 y terminamos con C2, la rentabilidad simple seria (C2 – C1) /C1 y operando:

$$RS1 = C2/C1 - 1 \text{ y también } 1+RS1 = C2/C1$$

igualmente 1 + RS2 = C3/C2 y así sucesivamente, con lo que, si calculamos la media geométrica de dichas rentabilidades, por ejemplo, para tres períodos, tendremos:

$$\mathbf{TRG = \{(1+ RS1) . (1+ RS2) . (1 + RS3)\}^{1/3} - 1 = (C2/C1 . C3/C2 . C4/C3)^{1/3} - 1 = (C4/C1)^{1/3} - 1}$$

Observamos que es la fórmula de la rentabilidad efectiva, tan importante en cálculo financiero y que no es más que la expresión de qué tipo de interés implícito hay en una operación en la que partiendo de un capital inicial C1 hemos llegado a C4 tras tres años, por ello, a efectos prácticos si nos piden la tasa de rentabilidad geométrica la podemos calcular con la fórmula habitual de la rentabilidad efectiva.

EJEMPLO:

Invertimos 10000 euros en la compra de participaciones de un fondo de inversión a 15€, Nos hemos ido fijando en qué valor tenían las participaciones en los distintos años y así año 0 =15, año1 = 18, año2 =16, año3 = 20, podríamos calcular las rentabilidades parciales de los distintos años RS1=0,2 RS2= -0,11 y RS3= 0,25 y luego efectuar la media geométrica:

$$TRG = \{(1+0,2) \cdot (1 - 0,1111) \cdot (1 + 0,25)\}^{1/3} - 1 = 0,1006$$

Pero es más rápido ir directamente a la fórmula de la TRE, pues sabemos que es equivalente:

$$TRE = (20/15)^{1/3} - 1 = 0,1006$$

Otros conceptos de rentabilidad

Para completar los conceptos anteriores hablamos de rentabilidad real para tener en cuenta la inflación, y la forma de hacerlo sería descontando la tasa de inflación de la TRE obtenida. Por ejemplo, si en el ejercicio anterior hemos obtenido una rentabilidad efectiva del 10,06 % pero en esos tres años ha habido una tasa media de inflación del 3%, concluiríamos que la tasa real de rentabilidad ha sido del 7,06 %.

Otro concepto frecuentemente utilizado es la rentabilidad financiero-fiscal, que para un determinado inversor de un producto con ventajas fiscales sería la rentabilidad que debería ofrecer otro producto alternativo sin ventajas, para que, después de impuestos, ambos llegaran al mismo capital final. Aunque la nueva legislación del impuesto de la Renta ha simplificado las ventajas fiscales vamos a aplicar el concepto a calcular la rentabilidad financiero fiscal de los dividendos frente a un producto alternativo como sería un depósito a plazo.

Supongamos que no superamos el límite de 1500 euros que tiene de ventaja los dividendos. En ese caso el capital final que tendríamos invirtiendo en acciones sería:

Co (1 + D) ya que no tendría ningún coste fiscal. Si invertimos en un depósito a plazo con rentabilidad R, el capital final será:

Co (1+ R - 0,18 . R) pues el depósito paga un 18% de impuestos. Para que ambos sean iguales se deberá cumplir que, 1 + D = 1 + R(1- 0,18) y de ahí despejando:

R = D/0,82, y así, unos dividendos del 4% sobre el valor efectivo de la acción equivaldrían a un depósito que nos diera r = 4/ 0,82 = 4,88 %.

6. CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

La rentabilidad que se puede obtener con los distintos activos financieros existentes en el mercado puede ser entendida desde el punto de vista matemático como una variable estadística, ya que, en general, tenemos conocimiento histórico de la ocurrencia de distintas rentabilidades en varios momentos del pasado.

El cálculo de medidas estadísticas sobre dichas series nos aporta un cierto grado de conocimiento sobre su comportamiento pasado y podemos predecir con una cierta probabilidad en el corto plazo su comportamiento futuro.

Desde otro punto de vista, también es posible acudir a estimaciones del propio gestor, sobre diferentes escenarios posibles en el futuro a los que asociaría diferentes probabilidades de ocurrencia y diferentes rentabilidades según el escenario.

6.1. Media y Esperanza Matemática

Son medidas que nos informan de la tendencia central de un conjunto de datos medidos en diferentes momentos de tiempo de una variable estadística, como la rentabilidad. La primera que vamos a considerar es la media aritmética:

Sea un conjunto de rentabilidades trimestrales observadas del bbva durante un año: 1º trim 2,05; 2º trim 1,06; 3º trim 8,09 y 4º trim 12,67

La media de las rentabilidades o rentabilidad media trimestral del BBVA será:

Rbbva = (2,05+1,06+8,09+12,67) / 4 = 5,97

En general se llama media aritmética de un conjunto de datos X1... a Xn a la expresión:

$$\bar{x} = (X1 + X2 + \ldots\ldots + Xn) / n$$

Como hemos apuntado antes, también podemos abordar el tema a base de las previsiones del analista o gestor sobre el futuro. Por ejemplo, supongamos que los 10 mejores analistas financieros consultados prevén la revalorización del índice IBEX 35 para el año 2007 de la siguiente forma:

Hay 4 pesimistas que prevén solo un 3% anual, hay 3 más normales que prevén un 7% anual y hay 3 más optimistas que prevén alcanzar el 12%. Podríamos pues asignar al escenario pesimista una probabilidad de 4 entre 10 o sea el 0,4, igualmente al escenario normal el 0,3 y al escenario optimista también el 0,3. Ahora podemos aplicar el concepto estadístico de esperanza matemática que se define como:

$$E(x) = p1 \,.\, x1 + p2 \,.\, x2 + \ldots\ldots + pn \,.\, xn$$

O sea, la suma de los productos de cada ocurrencia de la variable aleatoria x por su probabilidad de ocurrencia p, recordando además que la suma de todos los p1 a pn tiene que ser forzosamente 1 por tratarse de probabilidades, que cubren a priori todo el campo posible de actuación.

Aplicándolo al caso tenemos:

E(x) = 0,4 . 3 + 0,3 . 7 + 0,3 . 12 = 6,9 , que vendría a ser la rentabilidad media esperada por el consenso de los mejores analistas para el IBEX 35 en el año 2007.

Ahora bien, ambas medidas centrales nos informan de donde se sitúa el centro de gravedad de los datos, pero no nos informan del grado de dispersión de los datos, en torno a dicho centro, lo cual constituye el riesgo en términos financieros, que no es otra cosa que la posibilidad de que la rentabilidad de nuestra inversión se desvíe de lo esperado. Para medir dicho grado de dispersión tenemos las variables estadísticas que veremos a continuación.

6.2. Varianza y Desviación Típica

La varianza y su raíz cuadrada, la desviación típica son las medidas estadísticas más utilizadas para valorar el grado de dispersión en torno a la media o a la esperanza matemática, según el caso. Una primera ocurrencia podría ser sumar las desviaciones de cada dato respecto a su media, pero esto siempre nos daría 0 por la propia definición de la media que se sitúa en el centro de los datos, lo cual daría lugar a diferencias positivas y negativas que se compensarían entre sí. La solución para este problema pasa por elevar al cuadrado las diferencias, convirtiéndolas así siempre en positivas:

Se llama varianza de una serie de datos a la media de los cuadrados de las diferencias de cada dato con su media aritmética, o sea:

$$s^2 = \{ (x1 - \bar{x})^2 + (x2 - \bar{x})^2 + ... + (xn - \bar{x})^2 \} / n$$

Notemos que, para evitar la anulación de unas desviaciones con otras, hemos tenido que elevar al cuadrado dichas desviaciones. Ello hace que la magnitud resultante no pueda compararse con los datos y su media, por ello se crea otra magnitud la desviación típica, que se define como la raíz cuadrada de la varianza, es decir:

$$s = (s^2)^{½} = [\{ (x1 - \bar{x})^2 + (x2 - \bar{x})^2 + ... + (xn - \bar{x})^2 \} / n]^{1/2}$$

Dicho valor se identifica con el riesgo o volatilidad de la variable aleatoria considerada.

EJEMPLO: Un activo financiero tiene una rentabilidad esperada para el próximo año del 12% y la desviación típica observada es del 6.

Tratemos de responder a las preguntas siguientes:

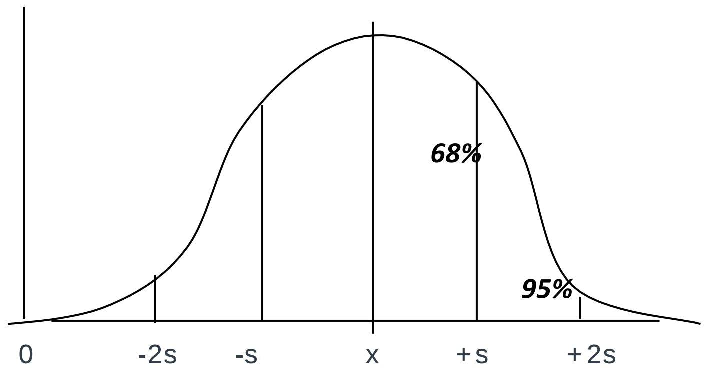
- ✓ ¿Qué probabilidad tenemos de perder dinero con dicha inversión?, perder dinero sería obtener rentabilidad negativa, es decir inferior a 0.

  Observemos que 12-2.6 = 0, es decir que 0 sería la media menos dos desviaciones típicas. Como dentro del intervalo de media menos dos y más dos desviaciones hay el 95%, fuera debe quedar el 5%, repartido entre 2,5% a cada lado, por tanto la probabilidad de que la rentabilidad sea menor que 0 es del 2,5%.

- ✓ ¿Qué probabilidad tenemos de superar el 18% de rentabilidad?, de nuevo veamos que el 18 es la media más una desviación. En el intervalo de media más/ menos una desviación hay el 68%, por tanto, fuera queda el 32%, repartido en el 16% a cada lado, por tanto, la probabilidad buscada será del 16%.

- ✓ Suponiendo que la desviación típica fuera del 7, ¿Qué probabilidad habría entonces de perder dinero? Ahora el problema es que la media menos dos desviaciones nos da -2 y la media menos una desviación es 5. Como 0 es superior a -2 y menor que 5 la probabilidad de perder dinero estará en un intervalo. Será mayor que el 2,5% (menos dos desviaciones), pero menor que el 16% (menos una desviación).

Con un gráfico de la forma de la curva de Gauss podemos orientarnos mejor



6.3. Covarianza

Hasta ahora nos habíamos ocupado de series de datos referidas a una variable aleatoria. Pero en la práctica en muchas ocasiones estamos interesados en relacionar dos variables. Por ejemplo, las cotizaciones de una acción, Repsol, con la evolución de un índice de referencia, el IBEX 35. En ese caso tendremos dos series de datos, cada una de las cuales tendrá su propia media, sean las series xi e yi, definiremos la covarianza entre las variables x e y como la media de los productos de las desviaciones de cada variable con su media.

Matemáticamente:

$$COVxy = \{ (x1 - \bar{x}) \cdot (y1 - \bar{y}) + (x2 - \bar{x}) \cdot (y2 - \bar{y}) + \ldots + (xn - \bar{x}) \cdot (yn - \bar{y}) \} / n$$

Si la covarianza es positiva ambas variables se mueven en el mismo sentido; si es negativa ambas variables se mueven en sentido contrario; si fuera 0 querrá decir que no hay ninguna relación o interdependencia entre ambas variables.

La covarianza es una magnitud absoluta, pero para hacerla relativa la dividimos por el producto de las desviaciones típicas de las dos series de datos Sx y Sy, con ello tendremos el coeficiente de correlación entre x e y, y cuyo valor estará normalizado entre -1 y +1.

Coef. Correlación xy = COV xy / Sx . Sy

En este caso si el coeficiente de correlación es 1 hay correlación perfecta y positiva entre las dos series. Si es -1 hay correlación perfecta pero negativa y ambas series se mueven de forma proporcional pero inversa, si una sube la otra baja en la misma proporción. Si fuera 0 es que no hay correlación, y se puede decir que las series son independientes.