

Mecânica dos fluidos para físicos: Uma introdução

Frédérique Grassi

Versão preliminar de Junho 2019

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Uma breve perspectiva histórica	1
1.2	Conceito de fluido “usual”	2
1.2.1	Um pouco de nomenclatura	2
1.2.2	Fluidos vs. sólidos	3
1.2.3	Fluidos: gas vs. líquido	4
1.2.4	Discussão microscópica	4
1.3	Hipótese de meio contínuo	5
1.4	Forças que agem sobre um fluido	8
1.4.1	Forças volumétricas	8
1.4.2	Forças superficiais	8
1.4.3	Fluido perfeito	10
1.5	Alguns Resultados da Termodinâmica Clássica	10
1.5.1	Equação de estado	11
1.5.2	Diagrama PV, processos isotérmicos e processos adiabáticos	12
1.5.3	Potenciais termodinâmicos	14
1.6	Grandezas específicas	17
1.7	Exercícios	17
1.8	Respostas	20
2	EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS (PERFEITOS)	21
2.1	Grandezas que descrevem o movimento	21
2.1.1	Descrições de Euler e de Lagrange	21
2.1.2	Vizualizando escoamentos	22
2.2	Equação de Continuidade para a massa para um fluido qualquer:	26
2.2.1	Caso geral	26

2.2.2	Caso particular de um fluido incompressível . . .	29
2.3	Equação de Euler (equação do movimento de um fluido perfeito)	31
2.3.1	Caso geral	31
2.3.2	Caso particular de um fluido incompressível . . .	34
2.3.3	Caso particular de um escoamento homentrópico ($s = cste$)	34
2.4	Equação de Continuidade para a entropia de um fluido perfeito	35
2.5	Condições Iniciais e de Contorno:	37
2.6	Exercícios	38
2.7	Respostas	40
3	ESTÁTICA	43
3.1	Equações gerais:	43
3.2	Fluido incompressível sob ação da gravidade	44
3.2.1	Sem rotação	44
3.2.2	Com rotação	45
3.2.3	Consequências	47
3.2.4	Princípio de Arquimedes e Corpos flutuantes	56
3.3	Fluido compressível sob ação da gravidade (campo uniforme)	58
3.3.1	Fórmula barométrica	59
3.3.2	Atmosfera padrão	60
3.3.3	Atmosfera isotérmica	61
3.3.4	Atmosfera adiabática	62
3.3.5	Condição de ausência de convecção	62
3.3.6	Separação de uma mistura por sedimentação: . .	65
3.4	Fluido num campo gravitacional com simetria esférica	66
3.4.1	Equação de equilíbrio de uma estrêla	66
3.4.2	Exemplos	67
3.5	Exercícios	72
3.6	Respostas	80
4	ESCOAMENTOS ESTACIONÁRIOS	85
4.1	Equações fundamentais para escoamento estacionário	85
4.1.1	Equação de Continuidade da massa	85
4.1.2	Conservação da entropia	86

4.1.3	Equação de movimento	87
4.2	Consequências da equação de Bernoulli para fluido incompressível	91
4.2.1	Casos particulares	91
4.2.2	Aplicações	92
4.3	Consequências da equação de Bernoulli para fluido compressível	98
4.3.1	Tubo de seção variável	99
4.3.2	Gás ideal num processo adiabático reversível	99
4.4	Bibliografia	108
4.5	Respostas	108
5	VORTICIDADE	113
5.1	Escoamentos rotacionais e irrotacionais	113
5.1.1	O que mede o rotacional?	113
5.1.2	Exemplos concretos simplês	117
5.1.3	Linhas e tubos de vórtice	123
5.1.4	Equação de movimento para a vorticidade	123
5.2	Teorema da circulação de Kelvin	125
5.2.1	Definição da circulação	125
5.2.2	Enunciado do teorema de Kelvin	127
5.3	Teorema das linhas de vórtice de Helmholtz	128
5.3.1	Definição da intensidade de um tubo de vórtice	128
5.3.2	Enunciado do teorema de Helmholtz	128
5.3.3	Ligação com a conservação de momento angular	129
5.4	Exercícios	131
5.5	Referências	135
5.6	Dicas e respostas	135
6	ONDAS COMO MOVIMENTOS POTENCIAIS	139
6.1	Exemplos de critérios para a existência de movimentos potenciais	139
6.1.1	Passagem por um obstáculo	139
6.1.2	Movimento de oscilação num fluido	140
6.1.3	Outros exemplos	141
6.2	Potencial ϕ	142
6.2.1	Equações para o potencial	142
6.2.2	Condições de contorno para ϕ	143
6.2.3	Caso particular de um fluido com $\rho = \text{cte}$	144

6.3	Ondas do mar	144
6.3.1	Os tipos de onda de superfície	144
6.3.2	As ondas do mar como exemplo de movimento potencial	145
6.3.3	Condição de contorno na superfície	146
6.3.4	Cálculo do potencial e de \vec{v} para águas profundas . . .	148
6.3.5	Trajectoria de uma partícula do fluido para águas profundas	149
6.3.6	Velocidade de fase e velocidade de grupo para águas profundas	151
6.3.7	Ondas em águas pouco profundas	153
6.4	Ondas sonoras	155
6.4.1	Equações a satisfazer	155
6.4.2	Ondas planas	158
6.4.3	Aplicação a instrumentos de sopro	158
6.5	Exercícios	161
6.6	Referências	168
6.7	Dicas e respostas	169
7	ESCOAMENTOS POTENCIAIS INCOMPRESSÍVEIS EM 2 DIMENSÕES	175
7.1	Função de Corrente para fluido incompressível	175
7.2	Função de corrente e função potencial para escoamento potencial incompressível	177
7.2.1	Coordenadas cartesianas	177
7.2.2	Coordenadas polares	178
7.2.3	Fluxo axi-simétrico	178
7.2.4	Condições de contorno	179
7.2.5	Rede de escoamento	179
7.3	Escoamentos elementares	180
7.3.1	Escoamento retilinear uniforme	180
7.3.2	Escoamento radial	181
7.3.3	Escoamento circular	182
7.3.4	O dipolo	183
7.4	Combinação de escoamentos elementares	185
7.4.1	O meio-corpo	185
7.4.2	Corpo de Rankine	187
7.4.3	Cilindro parado num escoamento retílineo uniforme . .	188

7.4.4	Cilindro em rotação num escoamento retilíneo uniforme	189
7.5	O potencial complexo	192
7.5.1	O potencial complexo e sua derivada	192
7.5.2	Escoamento retilíneo uniforme	193
7.5.3	Escoamento radial	194
7.5.4	Escoamento circular	194
7.5.5	Dipolo	195
7.6	Transformação conforme	195
7.6.1	Porque a transformação conforme tem este nome	195
7.6.2	Exemplos de transformações conformes	196
7.7	Uso de transformação conforme para resolver problemas de escoamento	199
7.7.1	Método geral	199
7.7.2	Escoamento num canto a 90°	199
7.7.3	Cilindro num escoamento retilíneo uniforme	200
7.7.4	Escoamento em volta de uma asa	202
7.8	Exercícios	204
7.9	Referências	212
7.10	Dicas e respostas	213
8	FLUIDOS VISCOSOS	215
8.1	Equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis	215
8.1.1	Objetivo	215
8.1.2	Força devida à viscosidade num caso simples	216
8.1.3	Equação de Navier-Stokes para fluido incompressível	217
8.1.4	Condições de contorno	222
8.2	Aplicações	224
8.2.1	Escoamento estacionário entre duas placas que se movem com velocidade relativa (Couette plano)	224
8.2.2	Escoamento estacionário entre duas placas fixas com gradiente de pressão (Poiseuille plano)	226
8.3	Equação de Navier-Stokes para um fluido compressível	228
8.4	Dissipação de energia num fluido viscoso incompressível	229
8.5	Adimensionamento da equação de Navier-Stokes e número de Reynolds	230
8.6	Escoamento muito viscoso incompressível ao redor de uma esfera	232
8.7	Coefficiente de arrasto e coeficiente de sustentação	235
8.8	Camada-limite	236

8.8.1	Características	236
8.8.2	Descolamento da camada-limite	238
8.8.3	Vorticidade em volta de uma asa	240
8.9	Exercícios	242
8.10	Referências	251
8.11	Dicas e respostas	252
9	INSTABILIDADE E TURBULÊNCIA	253
9.1	Ideia geral da teoria de perturbações linear	253
9.2	Instabilidade de Kelvin-Helmholtz	255
9.3	Escoamento plano paralelo	258
9.3.1	Fluido perfeito	259
9.3.2	Caso viscoso	260
9.4	Transição do regime lamiar para a turbulência	262
9.4.1	Experimento de Reynolds	262
9.4.2	Situação atual	262
9.5	Médias no tempo	264
9.6	Equações para escoamento turbulento	264
9.6.1	Equação de continuidade	265
9.6.2	Equação de Navier-Stokes	265
9.7	Escoamento turbulento bidimensional com fronteira	266
9.8	Exercícios	271
9.9	Referências	274

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Uma breve perspectiva histórica

O objetivo desta seção é situar a época onde vários ramos da mecânica dos fluidos se desenvolveram bem como introduzir alguns dos nomes que encontraremos mais tarde. Muitos dos que se ilustraram não são citados e o leitor mais interessado neste aspecto histórico pode consultar livros como [1.1] ou pesquisar na internet.

Civilizações da Antiguidade (grosseiramente 500 AC) tinham conhecimentos empíricos de mecânica dos fluidos, por exemplo a respeito de sistemas de distribuição de água e de irrigação. De um ponto de visto mais conceitual, o primeiro passo no desenvolvimento da mecânica dos fluidos é atribuído ao científico grego Arquimedes (285-212 AC). Ele formulou o princípio do empuxo e o aplicou para determinar o teor de ouro da coroa do rei Hierão II ¹. É considerado o primeiro resultado da teoria dos fluidos em equilíbrio. Conhecimentos não progrediram muito até os trabalhos de Torricelli (1608-1647) e Pascal (1623-1662). Torricelli fez uma experiência famosa demonstrando a existência da pressão atmosférica e do vácuo e Pascal sistematizou estes resultados no seu livro “L'équilibre des liqueurs”. Com isto a *estática dos fluidos* era estabelecida.

A formulação da *dinâmica dos fluidos* iniciou com Euler (1707-1783) que escreveu a lei de movimento dos fluidos não viscosos. D.Bernouilli (1700-

¹A lenda de Arquimedes e sua banheira transbordando está sendo bastante questionada como irrealista e outros métodos que Arquimedes poderia ter empregados são pesquisados [1.2].

1782) contribuiu ao estudo deste tipo de fluido com teoremas a respeito da conservação de energia². O próximo avanço importante foi a inclusão dos efeitos da viscosidade por Navier (1785-1836), Stokes (1819-1904), Poiseuille (1799-1869) e outros, chegando em particular à formulação da equação de movimento para fluidos viscosos chamada equação de Navier-Stokes.

Em meados do século XIX, a mecânica dos fluidos avançou sobre várias novas frentes como a estabilidade dos fluidos e turbulência e o transporte de calor. Em particular Reynolds (1842-1912) estudou a passagem do regime liminar ao turbulento.

O início do século XX trouxe dois desenvolvimentos importantes: a teoria da asa baseada entre outros em trabalhos de Joukovski (1847-1921) e a teoria da camada limite de Prandtl (1875-1953) que clarifica as regiões num fluido onde efeitos viscosos importam ou não. Posteriormente, com a aparição dos computadores, o século XX se distinguiu pelo grande número e a variedade de áreas de pesquisa onde a mecânica dos fluidos encontrou aplicações: descrição de fenômenos naturais (ex. previsões sobre tempo ou ondas oceânicas), astrofísica e cosmologia (ex. acreção por um buraco negro, expansão do universo primordial), biologia (ex. sistema cardiovascular, propulsão animal), esportes (ex. trajetória de uma bola de futebol, vôo de uma asa delta) até mesmo física das partículas (expansão do plasma de quarks e gluons). Com certeza em nosso século, haverá novas áreas que se beneficiarão do uso da mecânica dos fluidos. Assim o objetivo deste curso é de dar as ferramentas que o estudante de física possa aplicar a qualquer campo de seu interesse, não cobrir um máximo de exemplos. Mesmo assim, com os exemplos que veremos, espero que ele se surpreenda e se encante.

1.2 Conceito de fluido “usual”

1.2.1 Um pouco de nomenclatura

Há uma grande quantidade de problemas de escoamento de fluidos encontrados na prática e é útil classificá-los.

A **mecânica** trata dos corpos estacionários ou em movimento sob a ação

²A família Bernoulli, originária da Suíça, produziu entre os séculos XVII e XVIII, oito famosos matemáticos. Alguns se ilustraram também em outros ramos das ciências, como é o caso de Daniel Bernoulli na mecânica dos fluidos. Eles brigaram terrivelmente entre si e sua vida faria uma boa novela (pelo menos para físicos e matemáticos).

de forças. O ramo da mecânica que envolve corpos estacionários é a **estática** e o que diz respeito a corpos em movimento é a **dinâmica**. A subcategoria da mecânica que descreve os fluidos é a **mecânica dos fluidos**, a qual se subdivide em **estática dos fluidos** e **dinâmica dos fluidos**. Além desta divisão, se o fluido for incompressível como a água, usamos a **hidrodinâmica**. Por outro lado, se a densidade do fluido muda de maneira significativa, utilizamos a **dinâmica dos gases**.

1.2.2 Fluidos vs. sólidos

Um corpo pode existir em três estados principalmente: sólido, líquido ou gasoso. Uma substância no estado líquido ou gasoso (não rarefeito) é um fluido.

Os fluidos não possuem forma própria, ao contrário dos sólidos. Um exemplo disto é mostrado na figura 1.1. Esta facilidade de deformação dos fluidos permite movimentos relativos entre suas partes e a mecânica dos fluidos é usada para descrever esses movimentos.

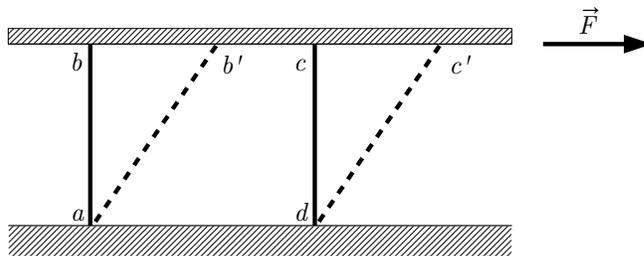


Figura 1.1: Diferença entre fluido e sólido. Uma substância fluida é colocada entre duas placas paralelas. A placa inferior é fixa e uma força é aplicada à placa superior. Um fluido (viscoso) gruda às paredes. Assim, ele se desloca com a de cima e fica parado com a de baixo. Um pedaço de fluido originalmente em a, b, c, d , escoou para novas posições como $ab'c'd$ e não volta mais à posição original quando a força para de agir. Um sólido não tem este comportamento. Se uma substância como borracha for colocada entre as placas, ela se deforma até um certo ângulo podendo voltar a sua forma inicial quando a força para de agir.

1.2.3 Fluidos: gas vs. líquido

A diferença mais importante entre líquidos e gases é a compressibilidade: os líquidos tem volume praticamente constante enquanto que os gases podem mudar de volume facilmente. Assim como ilustrado na fig. 1.2, uma certa quantidade de líquido ocupa um volume fixo, independente do tamanho do recipiente, e forma uma superfície livre se o volume do recipiente for maior do que o volume do líquido. O gás ocupa todo o volume do recipiente.

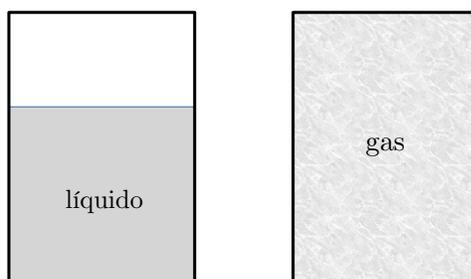


Figura 1.2: Diferença entre gas e líquido: um gas ocupa todo o volume disponível, não um líquido.

Como a palavra indica, um pedaço de fluido incompressível não muda de volume. Assim podemos definir um **fluido incompressível como um fluido de densidade de massa constante**: $\rho = \text{const.}$ (no espaço e no tempo). Pelo que foi mencionado acima, poderia-se pensar que líquidos são incompressíveis e gases compressíveis. Na realidade como veremos mais adiante, um gás com baixa velocidade pode ser considerado incompressível e em certas circunstâncias (como no estudo da propagação do som), um líquido deve ser considerado compressível. Portanto, a compressibilidade e a incompressibilidade correspondem muito mais a tratamentos teóricos distintos (associados a diferentes fenômenos) do que a estados distintos de um fluido.

1.2.4 Discussão microscópica

As características mencionadas acima de sólidos, líquidos e gases tem origem microscópica. Dois fatores determinam a fase: a força entre as moléculas e sua energia cinética.

A força entre moléculas é atrativa a grandes distâncias ($> r_0$) e repulsiva para pequenas distâncias ($< r_0$), a energia potencial de interação associada é mostrada na figura 1.3. A distância r_0 corresponde aproximadamente à distância entre moléculas no estado sólido ou líquido. Uma ordem de grandeza típica para r_0 é alguns angstroms (cf. exercício 1). Num gás em condições padrões de pressão e temperatura, a distância intermolecular média é muito maior do que r_0 por exemplo $10r_0$ (cf. exercício 1) e a interação entre as diferentes moléculas é pequena, o que dá origem à grande compressibilidade. Podemos **desprezar completamente a interação mútua e também tratar cada molécula como puntiforme – é a aproximação de gás ideal.**

Além de ter energia potencial, as moléculas estão sempre em movimento e tem energia cinética, geralmente crescendo com a temperatura. A alta temperatura, a energia cinética é maior do que $|U_0|$, a energia a fornecer para liberar uma molécula localizada à distância r_0 de outra (cf. figura 1.3), as moléculas podem escapar à atração intermolecular e se mover livremente, formando um gás ideal. Para baixa temperatura, a energia cinética pode ser muito menor do que $|U_0|$, as moléculas condensam na fase sólida ou líquida mantendo uma distância intermolecular de ordem r_0 . Num líquido, as moléculas tem certa liberdade de movimento. Num sólido, a ligação entre as moléculas é praticamente permanente, podendo dar origem a uma estrutura periódica.

1.3 Hipótese de meio contínuo

O conceito de fluido pode ser usado em situações menos óbvias do que para líquidos e gases assim vale a pena aprofundar o queremos dizer por “fluido”.

Quando tratamos uma substância como um fluido, temos em mente que ela pode ser considerada como um meio contínuo. Isto parece em contradição com o fato que ela é constituída de moléculas ou átomos, portanto apresenta uma estrutura descontínua. Ao descrever uma substância como um fluido, não consideramos o movimento de moléculas ou átomos individualmente. Substituímos um conjunto de moléculas ou átomos por um pequeno volume de matéria tal que possamos calcular quantidades como densidade de massa, temperatura ou velocidade fazendo uma média sobre partículas e que esta média seja constante³. A temperatura, densidade, velocidade, etc, num certo

³Num meio contínuo é implícito o fato que há equilíbrio térmico local.

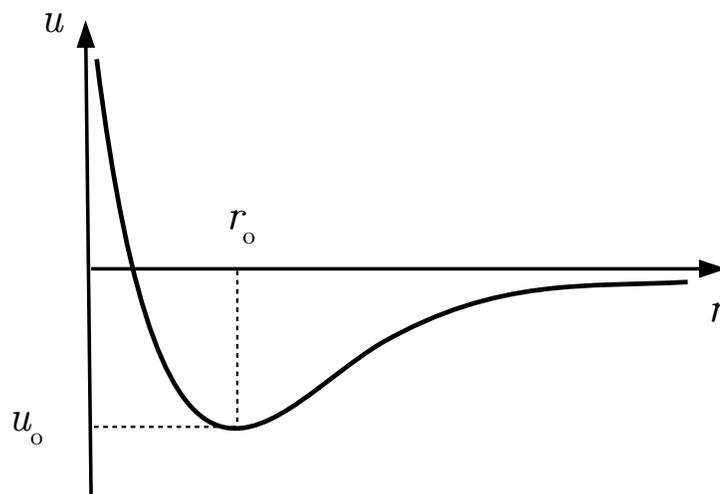


Figura 1.3: Variação da energia potencial entre moléculas separadas de r . A força é obtida com $\vec{F} = -dU/dr\hat{r}$ onde \hat{r} é um versor apontando de uma molécula para outra. Ela é atrativa para $r > r_0$ e repulsiva para $r < r_0$.

ponto do fluido terão o valor obtido para este pequeno volume.

Assim, o volume considerado tem que satisfazer as condições seguintes. (i) Ele deve ser grande o suficiente para conter um número elevado de partículas e permitir que a noção de média tenha sentido. Por exemplo considerando o ar, se pegarmos um volume tão pequeno que caberia uma molécula só, a densidade de massa varia muito (há ou não uma molécula no volume). (ii) O volume tem também que ser pequeno o suficiente para a média nele seja constante. Por exemplo considerando de novo o ar, se o volume for muito grande, a densidade de massa não seria constante pois sabemos que ela muda na atmosfera. (iii) Precisa também que a distância entre as partículas seja pequena o suficiente para que elas colidam e noções como temperatura façam sentido.

Exemplo (1.1)

Podemos tratar como um fluido o ar nas condições padrões $p = 1 \text{ atm}$ e $T = 273 \text{ K}$?

Solução: Consideremos $1\mu\text{m}^3$ de ar. Usando o fato que um mol de ar

ocupa 22,4 l, o número de moléculas contidas no volume é $\frac{6 \times 10^{23} \times 10^{-18}}{22.4 \times 10^{-3}} \simeq 2.7 \times 10^7$. Este número é grande e o volume pequeno, de modo que a densidade de massa deve ser constante. Podemos também calcular o livre caminho no ar nestas condições com $l \sim 1/(\sigma n)$ e $\sigma \sim \pi(2R)^2$ (estamos tratando as moléculas de ar como esferas duras de raio R que só colidem se a distância entre elas for menor que $2R$, ver por exemplo §11.6 da ref.[1.3]). Usando $n = \frac{6 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}}$ e $R = 0,15 \text{ nm}$, temos $l \sim 0,1 \mu\text{m}$. Assim as moléculas no pequeno volume colidem bastante para que a noção de temperatura (constante) por exemplo tenha sentido.

Uma maneira compacta de resumir estas condições e que pode ser útil é via o número de Knudsen

$$Kn = \frac{l}{L}. \quad (1.1)$$

onde l é o livre-caminho médio do meio e L uma dimensão característica do problema. O conceito de meio contínuo se aplica se $Kn \ll 1$.

Para verificar isto, escolhamos um volume cúbico pequeno de aresta a com $l \ll a \ll L$. Como l é o livre caminho médio, deve ser maior que a distância entre partículas de modo que no volume pequeno podemos ter muitas partículas. Além disto, a condição $l \ll a \ll L$ assegura que quantidades como a temperatura possam ser constantes dentro do volume pequeno.

Exemplo (1.2)

Podemos aplicar o conceito de fluido ao ar em volta de um satélite?

Solução: Não podemos. No ar rarefeito, há poucas colisões de modo que l é grande em relação a L uma dimensão característica do satélite.

Exemplo (1.3)

Suponha que esteja num helicóptero acima de um trecho de estrada de 1 km com carros. Quando poderia modelizar esta situação como um fluido?

Solução: Supomos que haja um engarrafamento e a distância entre carros seja 1m. Deve ser possível considerar um trechinho de estrada por exemplo de 50m com vários carros andando com uma certa velocidade média e tratar o conjunto de carros como um fluido. De fato vemos que $Kn \sim 10^{-3}$. Por outro lado se tiver somente 1 carro no trecho de 1 km, $Kn > 1$ e esta situação não será tratada como um fluido.

1.4 Forças que agem sobre um fluido

No próximo capítulo, estudaremos as equações de movimento para o fluido. Em vista disto, vamos discutir as forças que atuam sobre um fluido.

Consideremos um elemento de um fluido V delimitado por uma superfície S . Há dois tipos de forças que atuam sobre V :

1.4.1 Forças volumétricas

Existem forças (de longo alcance) que agem sobre todos os pontos do meio como a força gravitacional. Isto é também o caso das forças elétricas e magnéticas bem como das forças centrífugas (que parecem atuar em um elemento de massa quando seu movimento é estudado num referencial acelerado, veremos exemplos disto no capítulo 3).

Se tomarmos V suficientemente pequeno, podemos considerar os efeitos destas interações como uniformes sobre todo o volume V . Neste caso, elas são proporcionais a V , por isto são chamadas de forças volumétricas.

1.4.2 Forças superficiais

Há também forças (de curto alcance) devidas a moléculas vizinhas e, portanto, proporcionais à área da superfície S . Por isto, são chamadas de forças superficiais.

Consideremos primeiro um fluido em repouso. Sobre uma parte infinitesimal ΔS da superfície S , atua uma força $\Delta \vec{f}$ normal a ΔS (cf. fig. 1.4) tal que

$$\Delta \vec{f} = -p \Delta S \hat{n} \equiv -p \Delta \vec{S}. \quad (1.2)$$

onde o versor \hat{n} é normal a ΔS orientado para fora. O fator de proporcionalidade p é chamado de **pressão**.

Se o fluido considerado está em movimento, a força exercida sobre ΔS não é necessariamente normal à superfície. Pode existir um atrito interno entre as diferentes partes do fluido e também entre o fluido e o recipiente. Esta propriedade do fluido de provocar o atrito é ligada à *viscosidade* do fluido. Um exemplo de fluido com viscosidade baixa é a água, ela escoar facilmente num tubo. Um exemplo de fluido com viscosidade alta é o mel. Ele “gruda” nas paredes de um tubo. O efeito da viscosidade é ilustrado nas fig. 1.1 e 1.5.

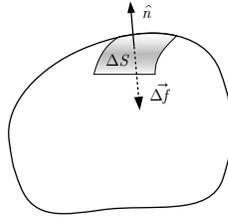


Figura 1.4: A força $\Delta\vec{f}$ sobre ΔS corresponde uma pressão (escalar) que satisfaz a eq. (1.2).

Na fig. 1.1 devido à viscosidade, o fluido em contato com a placa de cima passa a se deslocar com a velocidade desta. Na fig. 1.5 o fluido em contato com o balde passa a se deslocar com a velocidade (de rotação) deste⁴. Sem viscosidade, isto não aconteceria.

Este atrito só aparece se houver movimento e viscosidade. Assim a eq. (1.2) vale para fluidos em repouso viscosos ou não, bem como para fluidos sem viscosidade em movimento. A maneira de modificar a eq. (1.2) para fluidos viscosos em movimento será vista no capítulo 7.



Figura 1.5: Um balde cheio d'água posto em movimento de rotação acaba provocando o movimento da própria água devido a sua viscosidade.

⁴Talvez o leitor já tenha ouvido falar em outro contexto desta experiência, chamada de experiência do balde de Newton. Newton a introduziu para argumentar que existe um espaço absoluto, isto gerou uma ampla discussão, foi criticado por Mach e influenciou Einstein no desenvolvimento da teoria da relatividade geral (ver por exemplo o final do livro [1.4]).

1.4.3 Fluido perfeito

Á nível microscópico a viscosidade vem da troca de momento entre moléculas, então todos os fluidos devem ter viscosidade. Seu valor depende da substância, condições de temperatura, etc. Mais adiante veremos que quando escrevemos as equações de movimento, termos envolvendo a viscosidade podem ser desprezados em relação aos outros em certos casos. Em adição para problemas envolvendo obstáculos ou paredes, somente numa camada perto deles a viscosidade é importante. Assim é comum fazer a **aproximação de fluido perfeito**, i.e. **fluido de viscosidade nula**⁵ para estes problemas. Tem outras situações onde isto não poderá ser feito (por exemplo asa de avião).

Nos últimos anos, a questão de quão pequena pode ser a viscosidade recebeu certa atenção. Do ponto de visto teórico, especula-se (usando teorias ditas de supercordas) que existe um limite mínimo universal. Do ponto de visto experimental, os dois fluidos com menor viscosidade descobertos⁶ são os gases de átomos frios e o plasma de quarks e gluons, ver por ex. [1.5].

1.5 Alguns Resultados da Termodinâmica Clássica

Quando escrevermos as equações de movimento e conservação para um fluido no próximo capítulo, aparecerão termos dependendo da densidade de energia, pressão, densidade de entropia. Na termodinâmica clássica, estamos acostumados a tratar estados de equilíbrio de matéria uniforme, i.e. independentes do instante ou da posição. Na mecânica dos fluidos, estamos muitas vezes interessados em fluidos em movimento cujas propriedades variam tanto no espaço como no tempo. Embora pouco se conheça sobre a termodinâmica de estados não em equilíbrio, observa-se na prática para líquidos e gases (não rarefeitos) que os resultados para estados em equilíbrio valem aproximadamente também para estados não em equilíbrio encontrados no estudo dos fluidos. Isto é devido ao fato que o tempo para interações é muito pequeno.

Exemplo (1.4)

Como no exemplo (1.1) consideremos ar nas condições padrões $p = 1 \text{ atm} =$

⁵Cuidado para não confundir fluido perfeito as vezes chamado fluido ideal, com gás ideal as vezes chamado gás perfeito. Um tem viscosidade nula e o outro não tem interação (a não ser as colisões).

⁶Precisamente, é a viscosidade dividida pela densidade de partículas ou a densidade de entropia que é considerada.

1.5. ALGUNS RESULTADOS DA TERMODINÂMICA CLÁSSICA 11

$1,013 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2}$ e $T = 273 \text{ K}$. Qual é o intervalo de tempo médio entre colisões?

Solução: Da teoria cinética dos gases a velocidade quadrática média (ver por exemplo [1.3]) é: $v_{qm} = \sqrt{3p/\rho}$. Inserindo a densidade de massa $\rho_{ar} = 1,29 \text{ kg/m}^3$ obtemos $v_{qm} \sim 500 \text{ m/s}$. Usando o resultado para o livre-caminho médio l do exemplo (1.1), o tempo entre colisões é então em média $l/v_{qm} \sim 2 \times 10^{-10} \text{ s}$, o que é muito menor do que as outras escalas de tempo envolvidas nos escoamentos em geral.

1.5.1 Equação de estado

Uma pergunta natural de se fazer é como as quantidades densidade de massa ou volume, pressão, densidade de entropia, temperatura, etc, são relacionadas entre si.

Para um fluido simples como água ou ar, basta conhecer duas quantidades termodinâmicas, por exemplo a densidade de massa ρ e a temperatura T . As outras podem ser calculadas a partir destas, por exemplo a pressão p é função de ρ e T . A relação $p = g(\rho, T)$ ou $f(p, \rho, T) = 0$ se chama **equação de estado**. (Para sistemas mais complexos onde alguma quantidade como carga elétrica é conservada, precisa de mais que duas variáveis termodinâmicas para descrever um estado, uma variável a mais para cada quantidade conservada.)

Alguns exemplos de equação de estado simples são:

- $pV = nRT \Leftrightarrow p = \frac{R}{m} \rho T$ para um gas ideal, com $R = 8.3 \text{ J/(mol.K)}$, n número de moles e m a massa molar,
- $(p + a\rho^2)(\rho^{-1} - b) = RT$, chamada equação de Van der Waals, leva em conta volume das moléculas e atração num gas,
- $\rho = \rho_0$, em geral adequado para um líquido,
- $p = (p_0 + B)\frac{\rho^n}{\rho_0^n} - B$ com $n \sim 7$ e $B \sim 3 \times 10^8 \text{ N m}^{-2}$ para a água quando sua compressibilidade precisa ser levada em conta e T é mantida constante.

1.5.2 Diagrama PV, processos isotérmicos e processos adiabáticos

Processo isotérmico:

A equação de estado $f(p, V, T) = 0$ pode ser representada como uma superfície em um espaço de 3 dimensões, com coordenadas p , V , T . Porém é mais comum desenhar curvas em um espaço de 2 dimensões P e V , cada curva correspondendo ao comportamento do fluido a T constante. Num processo isotérmico, i.e. a T constante, o sistema se desloca sobre uma destas curvas.

Exemplo (1.5)

Para um mol de gás ideal, desenhar a curva que corresponde a um processo isotérmico a $T = 273$ K e $T = 400$ K.

Solução: Neste caso, $p = 2266J/V$ ou $p = 3320J/V$ (com V volume):

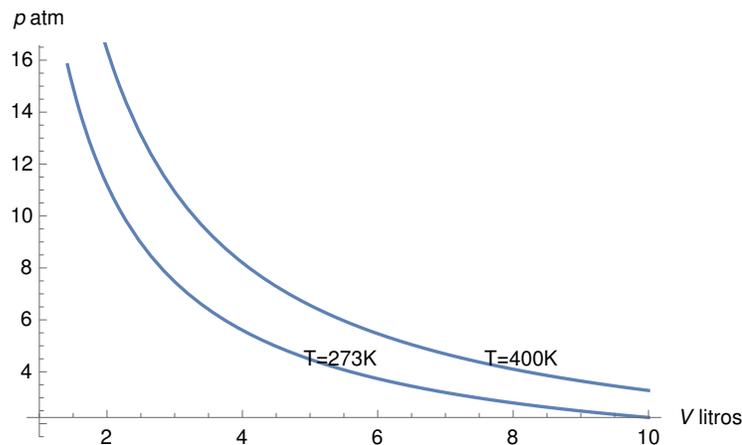


Figura 1.6: Processo isotérmico num gas ideal.

Processo adiabático:

A primeira lei da termodinâmica relaciona a variação da energia interna dU ao calor fornecido ao sistema δQ e o trabalho realizado pelo sistema δW :

1.5. ALGUNS RESULTADOS DA TERMODINÂMICA CLÁSSICA 13

$$dU = \delta Q - \delta W \quad (1.3)$$

onde usamos notações distintas, “d” ou “ δ ”, para quantidades que não dependem ou dependem do caminho percorrido.

Esta lei é uma generalização do princípio da conservação da energia para incluir o calor. Os termos δQ e δW são medidas de efeitos entre o sistema e o exterior ao passo que dU dá a variação de uma característica interna do sistema.

Para os sistemas que consideraremos o trabalho é devido à compressão ou expansão de modo que

$$\delta W = pdV \quad (1.4)$$

Num processo adiabático por definição

$$\delta Q = 0 \quad (1.5)$$

Notamos que num processo reversível à temperatura T ,

$$\delta Q = TdS \quad (1.6)$$

onde S é a entropia. Assim num processo adiabático reversível a entropia S não varia.

Exemplo (1.6)

a) Para um gás ideal num processo adiabático, mostrar que $pV^\gamma = cste$. Este resultado é importante e o usaremos mais vezes. $\gamma \equiv C_p/C_V$, C_p e C_V são as capacidades térmicas molares a p e V constantes respetivamente e são relacionadas por $C_p = C_V + R$ (ver por exemplo [1.3] Cap.9).

b) Para um mol de gás ideal monoatômico, desenhar a curva correspondendo a um processo adiabático passando pelo ponto de condições padrões de temperatura e pressão no diagrama PV do exemplo anterior.

Solução: a) Para um gás ideal, a variação de energia interna pode ser calculada a partir da variação de temperatura $dU = nC_V dT$. Podemos reescrever isto usando a equação de estado do gás ideal que implica $p dV + V dp = n R dT$, de modo que $dU = (C_V/R)(pdV + V dp)$. Até agora não usamos o fato que o processo é adiabático, fazemos isto agora. No caso adiabático a primeira lei se escreve: $dU = -pdV$. Combinando as duas expressões para dU : $\gamma dV/V + p/dp = 0$ de modo que $pV^\gamma = cste$.

b) Queremos desenhar $p = p_0(V_0/V)^\gamma$. Nas condições padrões de temperatura e pressão, $V_0 = 22,4l$ (basta inserir $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 Nm^{-2}$ e $T = 273K$ na equação de estado do gás ideal para verificar) e como o gás é monoatômico $\gamma = 5/3$.

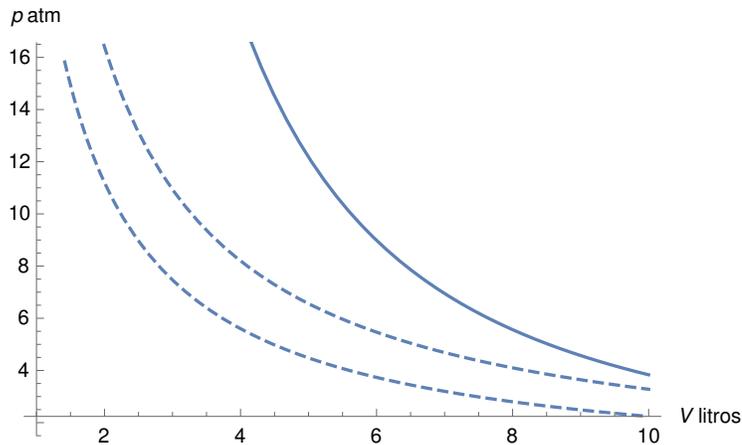


Figura 1.7: Processo adiabático num gás ideal (linha contínua) e processos isotérmicos do exemplo (1.5) (linhas tracejadas).

1.5.3 Potenciais termodinâmicos

Como dito acima para um sistema simples, basta conhecer duas quantidades como T e V para calcular as outras. Porém dependendo do problema, pode ser mais prático trabalhar com outras duas. Vamos ver como passar de um conjunto para outro.

Energia interna $U(S, V)$

Vimos que a energia interna satisfaz

$$dU = TdS - pdV. \quad (1.7)$$

Nesta expressão, U , T e p são considerados funções de S e V , isto é,

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \quad p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S. \quad (1.8)$$

1.5. ALGUNS RESULTADOS DA TERMODINÂMICA CLÁSSICA 15

Derivando mais uma vez, obtemos

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \quad (1.9)$$

ou,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V. \quad (1.10)$$

(Este último tipo de equação é chamado equação de Maxwell mas não tem nada a ver com as equações de mesmo nome no eletromagnetismo.)

Assim as variáveis naturais para a energia interna são S e V e podemos determinar T e p a partir das derivadas de $U(S, V)$ portanto, T e p também são funções de S e V . Uma função como $U(S, V)$, expressa em termos de duas variáveis quaisquer e cujo conhecimento permite a determinação de todas as outras grandezas termodinâmicas (no caso de U , T e p) é chamada de **potencial termodinâmico** (em sentido amplo). Como experimentalmente, não se varia S facilmente, costuma-se introduzir outros potenciais termodinâmicos dependendo de outras variáveis.

Para ter uma ideia mais intuitiva do que é a energia interna, notamos que num processo em que o volume permanece fixo, $dU = \delta Q$, isto é a variação da energia interna é igual ao calor fornecido.

Entalpia $H(S, p)$

Vamos construir uma função a partir de U de modo a substituir V por p , consideramos ⁷

$$H(S, p) = U + pV. \quad (1.11)$$

Temos

$$dH = dU + p dV + V dp = (T dS - p dV) + p dV + V dp = T dS + V dp, \quad (1.12)$$

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p, \quad V = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S, \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p. \quad (1.14)$$

Para ter uma ideia mais intuitiva do que é a entalpia, notamos que num processo em que a pressão é mantida constante, $dH = \delta Q$, isto é a variação da entalpia é igual ao calor fornecido.

⁷Em linguagem matemática, estamos fazendo uma transformação de Legendre.

Energia livre (de Helmholtz) $F(T, V)$

Agora no lugar de substituir V por p , queremos substituir S por T . Consideramos

$$F(T, V) = U - TS. \quad (1.15)$$

Temos

$$dF = d\epsilon - T dS - S dT = -p dV - S dT, \quad (1.16)$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T. \quad (1.18)$$

Para ter uma ideia mais intuitiva do que é a energia livre, notamos que num processo em que a temperatura é mantida fixa, $dF = -p dV$, isto é a variação de energia livre é igual ao trabalho mecânico realizado pelo exterior sobre o elemento do fluido.

Potencial termodinâmico (em sentido restrito) ou energia livre de Gibbs $\Phi(T, p)$

Para ter um potencial que dependa de T e p , consideremos a entalpia e substituímos S por T

$$\Phi(T, p) = H - TS. \quad (1.19)$$

Temos

$$d\Phi = dw - T dS - S dT = V dp - S dT, \quad (1.20)$$

$$V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T, \quad S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p, \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T. \quad (1.22)$$

Para Φ , não podemos dar um significado físico intuitivo e imediato (em termos de calor ou trabalho) como nos casos anteriores.

Qualquer um dos potenciais termodinâmicos U, H, F e Φ é função de duas das variáveis p, V, T e S e as duas restantes podem ser calculadas a partir deste potencial escolhido. Também, uma vez escolhido um, os outros

potenciais podem ser determinados. Portanto, *qualquer uma das variáveis* p, V, T, S, U, H, F e Φ *pode ser considerada como função de apenas duas delas*. A relação funcional entre qualquer uma delas com duas outras é chamada de *equação de estado*. Isto generaliza a definição vista anteriormente.

1.6 Grandezas específicas

Na mecânica dos fluidos, é comum usar grandezas específicas ou por unidade de massa. Por exemplo no lugar da energia interna U usamos $\epsilon = U/M$. A equação $dU = TdS - pdV$ se torna $d\epsilon = Tds - pdV_e$ com s entropia específica e $V_e = 1/\rho$ volume específico. Similarmente a equação para a entalpia $H = U + pV$ dá $w = \epsilon + pV_e$ e $dH = TdS + Vdp$ fornece $dw = Tds + V_e dp$, e assim por diante.

1.7 Exercícios

1. a) Faça uma estimativa da distância entre moléculas de água em condições padrões de pressão e temperatura.
b) Faça o mesmo para vapor de água.
2. Obter a forma da entropia $S(T)$ para um fluido incompressível de capacidade térmica C suposta constante entre T_0 e T . Porque a entropia depende de uma variável só?
3. Sabemos que a energia interna de um gás ideal é função da temperatura só mas pelo que vimos na última seção, ela também pode ser escrita como função de S e V . Derive uma expressão para $S(T, V)$ e deduza $U(S, V)$.
4. a) Calcule $S(p, V)$ para um gás ideal. Se o sistema foi submetido a um processo adiabático reversível, verifique que a entropia não muda.
b) Obter $p(S, V)$. Verificar usando a forma de $U(S, V)$ do exercício anterior, que $p = -(\partial U / \partial V)_S$.
5. Um mol de gás diatômico nas condições padrões de temperatura e pressão, dobra de volume a pressão constante e em seguida se esfria até a pressão atingir 0.75 atm a volume constante. Qual é a variação de entropia?
6. Qual é a temperatura de ar originalmente a 293K após estar comprimido rapidamente até 1/25 do seu volume original?

Bibliografia

- [1.1] O. Darrigol “World of Flow”, Oxford University Press, 2005.
- [1.2] Não se sabe exatamente como Arquimedes fez a experiência, para uma discussão interessante combinando física e história ver por exemplo R.A.Martins “Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos” Cad. Bras. Ens. Fs. 17 (2000) 115.
Outra leitura interessante (em inglês) é
<http://www.mcs.drexel.edu/~crrres/Archimedes/Crown/CrownIntro.html>
- [1.3] H.M.Nussenzveig “Física Básica” vol. 2, Ed. E.Blücher, 3a ed.
- [1.4] H.M.Nussenzveig “Física Básica” vol. 1, Ed. E.Blücher, 3a ed.
- [1.5] M. Riordan E W. A. Zajc “Os primeiros microssegundos” Scientific American Brasil 49 (2006).
T. Schäfer “Nearly perfect fluidity” Physics 2 (2009) 88 (texto um pouco mais desafiador e em inglês mas muito interessante).

1.8 Respostas

1. a) Cada molécula ocupa um volume $\sim (18 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3}) / (6 \cdot 10^{23}) m^3$ de modo que a distância entre elas é $\sim 3 \text{ \AA}$.
- b) Cada molécula ocupa um volume $\sim (22,4 \times 10^{-3}) / (6 \cdot 10^{23}) m^3$ de modo que a distância entre elas é $\sim 30 \text{ \AA}$.
2. Fornecemos calor num processo reversível: $dU = C dT = T dS$ de modo que $S = \ln(T/T_0)^C + S_0$. Não há dependência em V pois ρ é constante.
3. $dS = (dU + pdV)/T = nC_V dT/T + nRdV/V$ de modo que $S(T, V) = \ln[(T/T_0)^{nC_V} (V/V_0)^{nR} + S_0]$. A expressão para $U(T, V)$ é obtida usando $U = nC_V(T - T_0) + U_0$. Supondo $U_0 = nC_V T_0$, $U(T, V) = U_0 (V_0/V)^{R/C_V} e^{(S - S_0)/(nC_V)}$.
4. a) $dS = (dU + pdV)/T = nC_V(dV/V + dp/p) + nRdV/V = nC_V d \ln(pV^\gamma)$ de modo que $S(p, V) = nC_V d \ln[(pV^\gamma)/p_0 V_0^\gamma] + S_0$. Se o processo for adiabático reversível pV^γ é constante e $S(p, V) = S_0$ i.e a entropia não varia, como esperado.
- b) $p(S, V) = p_0 (V_0/V)^\gamma e^{(S - S_0)/(nC_V)}$, o que é igual a $-(\partial U / \partial V)_S$.
5. Usando a fórmula para $S(p, V)$ do exercício 5 para cada processo e somando os ΔS respectivos: $\Delta S_{tot} = (5/2)R \ln(2^{7/5} \times 0,75) \sim 14,2 J/K$.
6. O processo ocorre rapidamente então podemos supor que não há troca de calor i.e. o processo é adiabático: pV^γ é constante, ou usando a equação de estado, $TV^{\gamma-1}$ é constante assim $T = 293 \times 25^{2/5} \sim 1062 K$.

Capítulo 2

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS (PERFEITOS)

2.1 Grandezas que descrevem o movimento

2.1.1 Descrições de Euler e de Lagrange

Para a determinação completa do estado de movimento de um fluido, considerando um elemento ΔV do fluido, precisamos conhecer as seguintes grandezas (i) cinemáticas: a velocidade do fluido \vec{v} , que é um vetor i.e. um conjunto de três quantidades.

(ii) termodinâmicas: duas grandezas entre ρ (ou $V_e = 1/\rho$), p, T, ϵ, s, \dots , pois as demais podem ser obtidas a partir da equação de estado.

Para escrever as equações que governam o movimento de um pedaço de fluido, podemos usar um referencial fixo no espaço (descrição Euleriana) ou amarrado ao pedaço de fluido (descrição Lagrangiana). Na descrição Lagrangiana, seguimos o movimento de uma partícula de fluido como na mecânica clássica para um ponto. Na descrição Euleriana, olhamos o que acontece num volume de controle fixo através do qual o fluido escoia para dentro e para fora. Talvez o exemplo seguinte possa ajudar a esclarecer a diferença entre as duas descrições. Imaginamos um barco sobre um rio.

Um observador na margem, pode acompanhar o movimento do barco (por exemplo o barco passa perto de uma dada árvore num instante t_a , perto de uma casa em t_c). Alternativamente ele pode olhar pontos do rio e descrever o que passa por la (perto da árvore, não há nada de especial exceto em t_a , perto da casa não há nada de especial exceto em t_c).

Se usarmos coordenadas Eulerianas, as quantidades que calcularemos serão obtidas em vários pontos (x, y, z) do espaço, para tempos t . Por exemplo

$$\begin{cases} \vec{v} &= \vec{v}(x, y, z, t) \\ \rho &= \rho(x, y, z, t) \\ p &= p(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Por outro lado para coordenadas Lagrangianas, as quantidades dependem da posição inicial x_0, y_0, z_0 e do tempo t . Por exemplo

$$\begin{cases} \vec{v} &= \vec{v}(x_0, y_0, z_0; t) \\ \rho &= \rho(x_0, y_0, z_0; t) \\ p &= p(x_0, y_0, z_0; t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Queremos conhecer cinco grandezas (as componentes de \vec{v} e duas grandezas termodinâmicas). Em consequência, *necessitamos de 5 equações* (além da equação de estado para fixar o restante das grandezas termodinâmicas).

Um fluido é um sistema dinâmico e como tal deve satisfazer as leis de conservação da massa, momento linear e energia bem como entropia no caso perfeito¹. As equações procuradas surjem como consequências destas leis de conservação como veremos.

2.1.2 Vizualizando escoamentos

Definição de trajetórias e linhas de corrente

Podemos vizualizar um escoamento de duas maneiras: seguindo o percurso de um “pedaço” ou partícula de fluido conforme o tempo passa, ou olhando o movimento das várias partículas que constituem o fluido num instante dado.

No primeiro caso, observamos a trajetória de uma partícula de fluido, o caminho que ela percorre conforme o tempo passa. Para vizualizar uma trajetória no fluido, podemos imaginar introduzir uma gota de corante nele e depois tirar uma fotografia com tempo de exposição longo.

¹Outras leis de conservação (e.g. momento angular) serão consideradas mais adiante.

No segundo caso, olhamos linhas de corrente. Linhas de corrente são as linhas de “força” do campo de velocidade (de maneira análoga às linhas de campo para o campo elétrico ou magnético). São curvas tangentes em todos seus pontos ao campo de velocidade *num dado instante*. Para as materializar, podemos imaginar introduzir gotas de corante em diferentes pontos do fluido e depois tirar uma fotografia com tempo de exposição curto. Obteríamos pequenos segmentos de tinta proporcionais à velocidade e podemos adicionar neles um símbolo de seta orientado na direção do escoamento. Desenhando as tangentes a estes vetores velocidades, obtemos as linhas de corrente.

A figura 2.1 ilustra este método no caso do escoamento para a direita numa canalização cujo diâmetro diminui na região central.

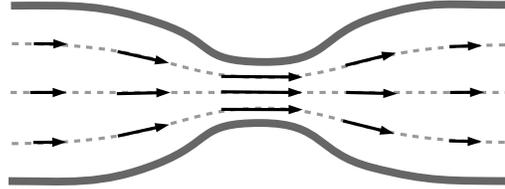


Figura 2.1: Num dado instante, o campo de velocidade (setas) e as linhas de corrente (tracejado)

Em geral o comportamento do fluido num dado instante não é similar ao que acontece em vários instantes de modo que linhas de corrente e trajetórias não precisam coincidir. Porém há um caso importante onde elas coincidem: o **escoamento estacionário onde** $\vec{v}(t, x, y, z) = \vec{v}(x, y, z)$. Estudaremos mais em detalhe este tipo de escoamento no capítulo IV.

Cálculo das linhas de corrente e trajetórias

Para calcular a equação das linhas de corrente, fixamos um tempo e escolhemos um vetor posição \vec{l} num certo ponto de uma linha de corrente. O vetor $d\vec{l}$ tangente à linha é paralelo a \vec{v} i.e. $d\vec{l} = \lambda\vec{v}(\vec{l}, t)$ ou de modo equivalente usando coordenadas cartesianas:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (2.3)$$

onde num ponto dado da linha de corrente no instante t , $d\vec{l} \equiv (dx, dy, dz)$ é a tangente e $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z)$ é a velocidade do fluido.

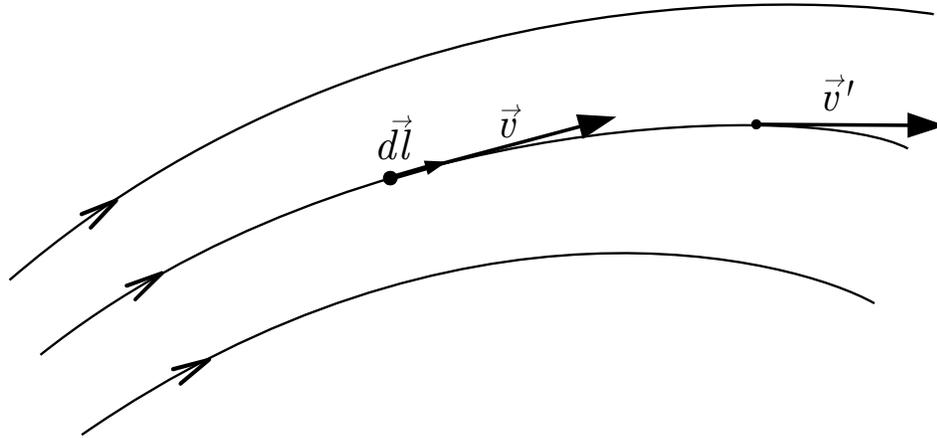


Figura 2.2: Visualização das linhas de corrente num instante dado.

A trajetória de uma partícula de fluido é o caminho que ela percorre conforme o tempo passa. As tangentes à uma trajetória dão as direções das velocidades do elemento do fluido em vários instantes. Assim integrando $d\vec{r}/dt = \vec{v}(\vec{r}, t)$, encontramos a equação da trajetória.

Exemplo (2.1)

Supomos a velocidade num fluido dada por $\vec{v} = (t, 1)$.

- Calcular a trajetória que passa por $(0, 0)$ em $t = 0$.
 - Calcular a linha de corrente no instante $t = 1$ e que intercepta $(0, 0)$.
-

Solução:

a) Precisamos resolver as equações

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t \\ \frac{dy}{dt} = 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

Usando o fato que $x(t = 0) = 0$ e $y(t = 0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} x(t) = t^2/2 \\ y(t) = t \end{cases} \quad (2.5)$$

Conforme o tempo passa, a partícula inicialmente em $(0, 0)$ se desloca sobre a parábola $x = y^2/2$.

b) Precisamos resolver

$$\frac{dx}{t} = dy \quad (2.6)$$

onde t é constante e vale 1. Obtemos como solução $x = y + cste$. Usando o fato que a curva deve interceptar o ponto $(x = 0, y = 0)$, temos $cste = 0$. No instante $t = 1$, a linha de corrente é a reta $x = y$.

Como a velocidade depende do tempo, não esperávamos que trajetória e linha de corrente coincidam.

Derivada material

Muitas vezes queremos olhar a evolução no tempo de uma quantidade ligada a um pedaço de fluido. Calculamos este tipo de derivada considerando uma grandeza escalar f referente ao elemento do fluido V (f pode ser uma função, uma das componentes de um vetor, de um tensor). Temos $f(x, y, z, t) = f(x(t), y(t), z(t), t)$ já que estamos seguindo a trajetória de um pedaço de fluido.

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right) dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde usamos $dx/dt = v_x$, etc.

Portanto,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f, \quad (2.8)$$

Em palavras, para o pedaço de fluido, f varia com o tempo porque num ponto fixo do espaço x, y, z ela pode mudar com o tempo e também porque o pedaço de fluido será transportado para $x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt$ num tempo dt , o ponto onde ele chega depende de dt .

Temos de maneira geral:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}). \quad (2.9)$$

A derivada calculada com a eq. 2.9 é chamada de derivada material ou as vezes derivada convectiva, substancial, Lagrangiana,... Ela conecta a taxa de

mudança de f seguindo a partícula a esquerda (descrição de Lagrange) com o que é medido em pontos fixos (descrição de Euler) a direita.

Exemplo (2.2)

Supomos um fluido onde a velocidade é dada por $\vec{v} = (ax, -ay)$ com a constante. Calcular a aceleração e a posição de uma partícula de fluido em t .

Solução:

É mais fácil usar a descrição de Lagrange. x, y dependem de t . Podemos derivar $v_x = dx/dt = ax$ e $v_y = dy/dt = -ay$, obtemos $d\vec{v}/dt = a^2(x, y) = a^2\vec{r}(t)$.

Na descrição de Euler, x, y são fixos, não dependem de t , então $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ mas podemos calcular $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (ax\partial/\partial x - ay\partial/\partial y)(ax, -ay) = (ax\partial/\partial x - ay\partial/\partial y)(ax), (ax\partial/\partial x - ay\partial/\partial y)(-ay) = a^2\vec{r}$. Usando a eq. (2.9), temos $d\vec{v}/dt = a^2\vec{r}$. Isto é, calculando corretamente a aceleração, as duas descrições dão o mesmo resultado.

Podemos integrar $dx/dt = ax$ e $dy/dt = -ay$ o que leva a $x(t) = x_0e^{at}$ e $y(t) = y_0e^{-at}$.

2.2 Equação de Continuidade para a massa para um fluido qualquer:

2.2.1 Caso geral

Discutiremos inicialmente a conservação da massa. Consideramos um volume arbitrário fixo completamente dentro do fluido. Vamos chamá-lo de V e a superfície que o delimita de S .

Calculamos a variação da massa no seu interior com o tempo de duas maneiras diferentes:

(i) Se a densidade em cada ponto é $\rho(x, y, z, t)$, a massa total dentro de V no instante t é $\int_V \rho dV$. Portanto a taxa de mudança com o tempo é dada por

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.10)$$

2.2. EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE PARA A MASSA PARA UM FLUIDO QUALQUER

(Usamos o fato que V é fixo.)

(ii) Por outro lado, devido à conservação da matéria, este aumento de massa só pode ser causado pelo fluxo através da superfície S . Se sobre um elemento de superfície dS , com a normal \vec{n} dirigida para fora do volume, a velocidade do fluido é \vec{v} e a densidade ρ , a quantidade de matéria que atravessa dS por unidade de tempo é $\rho\vec{v} \cdot \vec{n} dS (\equiv \rho\vec{v} \cdot d\vec{S})$ (cf. fig. 2.3).

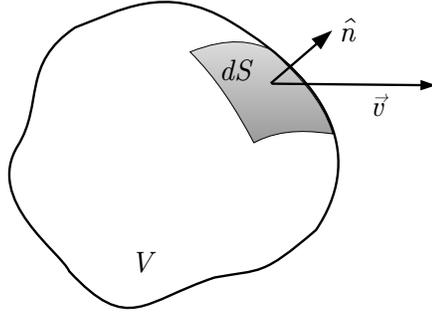


Figura 2.3: A matéria sai de dS . \vec{v} pode ser decomposto em parte perpendicular e parte paralela a dS . Somente a primeira parte corresponde a transporte de matéria através de dS .

A integral desta quantidade sobre toda a superfície S é a taxa de mudança total de massa contida em V por unidade de tempo:

$$\oint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (2.11)$$

Vamos igualar agora as duas expressões para a taxa de variação de massa, calculadas independentemente acima, colocando sinais apropriados (se a massa aumenta, \vec{v} é antiparalelo a \vec{n} e a eq. (2.11) precisa de um sinal negativo para ser uma quantidade positiva; se a massa diminui, \vec{v} é paralelo a \vec{n} e a eq. (2.11) precisa de um sinal negativo também para ser uma quantidade negativa) :

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) dV, \quad (2.12)$$

onde na última passagem foi usado o teorema de Gauss². Portanto,

²A partir de agora, usaremos muito resultados de análise vetorial de modo que recomendamos fortemente uma revisão sobre este assunto: por exemplo propriedades e teoremas

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (2.13)$$

Esta igualdade foi obtida, tomando-se um volume arbitrário V . Em particular, se o volume considerado for um volume infinitesimal $V \rightarrow 0$, temos

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right] V = 0 \quad (2.14)$$

ou seja

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.15)$$

Esta é a **Equação de Continuidade** (na forma diferencial) e constitui uma das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos. Ela expressa a conservação da matéria. O vetor $\vec{j} = \rho \vec{v}$ é a corrente de densidade de matéria: a direção e o sentido do vetor são os do movimento do fluido e de modo geral $\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ representa a quantidade de fluido que atravessa S por unidade de tempo. No curso de eletromagnetismo, encontra-se uma equação similar a (2.15) para a conservação de carga (cf. exercício 2.7).

Exemplo (2.3)

Na derivação acima, usamos um volume fixo no espaço, i.e. um referencial de Euler. Como fazer esta derivação para um volume em movimento com o fluido i.e. num referencial de Lagrange?

Solução: Consideramos um volume V pequeno de fluido delimitado pela superfície S e que contem uma massa fixa. Ao se deslocar durante o tempo, este volume muda de forma. Durante δt o volume aumenta de:

$$\delta V = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \delta t = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV \delta t \quad (2.16)$$

(Onde usamos o teorema de Gauss).

Como V é pequeno, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ é constante sobre ele. Temos então

$$\frac{1}{V} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho \right) \quad (2.17)$$

onde usamos o fato que a massa dentro de V é constante e a eq. (2.9).

sobre gradiente, divergência, rotacional §1.2 a 1.4 da referência [1.1] junto com §1.2 a 1.6 da referência [1.2].

2.2. EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE PARA A MASSA PARA UM FLUIDO QUALQUER

Recombinando os termos de (2.17), re-encontramos a equação de continuidade (2.15).

2.2.2 Caso particular de um fluido incompressível

Um caso interessante é o de um fluido incompressível i.e. cuja densidade não varia no espaço e no tempo: $\rho(x, y, z, t) = \rho$ (cste).

Inserindo $\rho = \text{cste}$ na eq. (2.15) temos imediatamente um resultado importante: **para um fluido incompressível a divergência do campo de velocidade deve ser nula, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.**

Uma maneira de visualizar este resultado é assim. Consideramos um volume V fixo no fluido delimitado por linhas de corrente (\equiv tubo de corrente) como na figura 2.4:

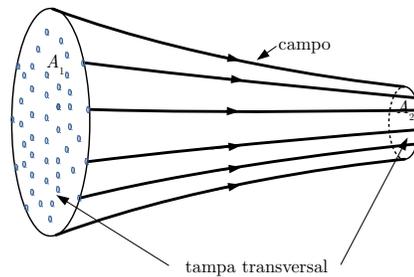


Figura 2.4: tubo de linhas de corrente.

Temos

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.18)$$

Decompomos a superfície S do tubo em tampas e corpo. Sobre o corpo do tubo: $\rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ pois $\vec{v} \perp d\vec{S}$. Para as tampas A_1 e A_2 supostas transversais e pequenas o suficiente para que ρ e \vec{v} sejam constantes sobre elas, devemos ter:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2. \quad (2.19)$$

A quantidade $A v$ é o volume de fluido atravessando uma seção transversal qualquer por unidade de tempo e se chama *vazão*. Ela é expresso em m^3/s . **A equação de continuidade para fluido incompressível é uma equação**

de constância da vazão Av . Em particular, a velocidade aumenta nos estrangulamentos para manter a vazão constante.

Exemplo (2.3)

Uma ilustração bonita da constância da vazão é a seguinte. Quando uma torneira é aberta pouco a pouco, forma-se um jato de água fino cujo raio diminui com a distância a torneira (e que ao final se rompe em gotas). A forma do jato de água pode ser calculada em função da velocidade v_0 e raio r_0 na saída da torneira. Como?

Solução: À uma distância h da torneira, o raio r e a velocidade do água satisfazem:

$$r^2 v = r_0^2 v_0. \quad (2.20)$$

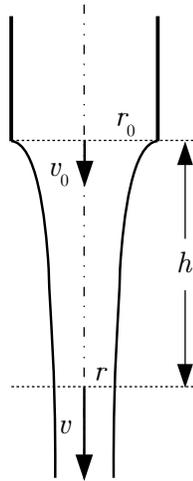


Figura 2.5: Escoamento estacionário de um fluxo incompressível por uma torneira.

Por outro lado a velocidade v é a velocidade atingida em queda livre de uma altura h (no caso estacionário). Isto é razoável mas será demonstrado no próximo capítulo. A fórmula de Torricelli fornece

$$v^2 = v_0^2 + 2gh \quad (2.21)$$

2.3. EQUAÇÃO DE EULER (EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO PERFEITO)

Combinando as duas equações anteriores, obtemos o raio do jato em função da distância à torneira:

$$r = r_0 \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh} \right)^{1/4} \quad (2.22)$$

Na referência [2.3], foi comparado o resultado analítico (2.22) com uma fotografia mostrando o jato. O acordo é ótimo.

Exemplo (2.4)

A constância da vazão tem muitas aplicações. Aqui esta outra. A seção transversal da aorta de uma pessoa normal em repouso é 3 cm^2 e a velocidade do sangue 30 cm/s . Um capilar típico tem diâmetro de $\sim 6 \mu\text{m}^2$ e velocidade sanguínea de $0,05 \text{ cm/s}$. Quantos capilares esta pessoa tem?

Solução: Chamamos $A_1 = 3 \text{ cm}^2$, $v_1 = 30 \text{ cm/s}$, $A_2 = \pi(3 \cdot 10^{-4})^2 \text{ cm}^2$ e $v_2 = 0,05 \text{ cm/s}$. O número n de capilares satisfaz $A_1 v_1 = n A_2 v_2$ de modo que $n \sim 6 \cdot 10^9$.

2.3 Equação de Euler (equação do movimento de um fluido perfeito)

2.3.1 Caso geral

Consideramos agora a conservação da quantidade de movimento. Neste caso, é mais conveniente escolhermos um certo volume V arbitrário de um fluido perfeito, movimentando-se sob ação de forças ao invés de um volume fixo no espaço como no caso anterior.

Vejamos então qual é a força externa total aplicada sobre V . Temos a força exercida pelas partes vizinhas (força superficial)

$$- \oint_S p d\vec{S} = - \int_V \vec{\nabla} p dV. \quad (2.23)$$

O sinal - vem do fato que temos uma força de pressão, i.e. atuando em sentido oposto a \vec{n} . Usamos aqui uma formulação do teorema de Gauss mas

que envolve gradientes³.

Podemos ter também uma força volumétrica, por exemplo a força gravitacional $\int_V \rho \vec{g} dV$.

A força total será a soma destes termos:

$$\int_V (-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) dV. \quad (2.24)$$

(Para um fluido perfeito, não tem forças ligadas ao deslizamento das camadas fluidas uma sobre outra.)

Devido à ação destas forças, cada elemento do fluido sofre uma aceleração $d\vec{v}/dt$ e a integral sobre V desta aceleração multiplicada pela densidade deve igualar (2.24). Isto é

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V (-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}) dV. \quad (2.25)$$

Como V é arbitrário, segue

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}. \quad (2.26)$$

Esta equação é uma **equação de movimento ou equação de Euler**. Em palavras, o elemento de volume de densidade de massa ρ é acelerado devido ao (negativo do) gradiente da pressão e à força gravitacional.

Exemplo (2.5)

Na derivação acima, usamos um volume de fluido em movimento devido às forças, i.e. um referencial de Lagrange. Como fazer esta derivação para um volume fixo no espaço i.e. num referencial de Euler?

Solução: Agora o volume V é fixo no espaço. $\int_V \rho v_i dV$ é a componente i do vetor momento (aqui i vale 1,2,3 representando x,y,z). Sua variação no tempo é dada por:

$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV \quad (2.27)$$

³Usamos $\vec{F} = f\vec{a}$ com f uma função e \vec{a} um vetor constante. $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{a} \cdot \oint_S f d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \vec{a} \cdot \int_V \vec{\nabla} f dV \Rightarrow \oint_S f d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} f dV$. Existe um resultado similar para rotacional, ver por exemplo §1.11 da referência [2.4]).

2.3. EQUAÇÃO DE EULER (EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE UM FLUIDO PERFEITO)

(Estamos usando um raciocínio similar ao das eq. (2.10) e (2.11) com o escalar ρv_i no lugar de ρ .)

Esta variação tem várias causas. Há entrada ou saída de momento. O fluxo da componente i de momento através S é

$$- \oint_S \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (2.28)$$

Há também força devido à pressão sobre dS_i e à componente i da gravidade:

$$- \oint_S p dS_i + \int_V \rho g_i dV \quad (2.29)$$

Juntando temos:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV &= - \oint_S \rho v_i \vec{v} \cdot d\vec{S} - \oint_S p dS_i + \int_V \rho g_i dV \\ &= \int_V [\rho g_i - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij})] dV \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e usamos o teorema de Gauss (usual e para gradiente) bem como $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \sum_j \partial F_j / \partial x_j$ em coordenadas cartesianas.

Como V é arbitrário:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = \rho g_i \quad (2.31)$$

Usando a equação de continuidade (2.15), temos:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g_i \quad (2.32)$$

ou vetorialmente:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \quad (2.33)$$

Usando a eq. (2.9), vemos que esta formulação é equivalente à equação (2.26).

Precisa estar cuidadoso com a quantidade $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$, trata-se de um operador. Ele deve ser calculado primeiro e depois aplicado a \vec{v} . Em geral $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \neq \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ cf. exercício 2.

2.3.2 Caso particular de um fluido incompressível

Nesse caso, a equação de Euler pode ser reescrita

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\left[\left(\frac{p}{\rho}\right) + gz\right] \quad (2.34)$$

Veremos muitas vezes a vantagem de só ter um gradiente no termo mais a direita. Por enquanto vemos uma consequência.

Usando

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2, \quad (2.35)$$

obtemos

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 = -\vec{\nabla}\left[\left(\frac{p}{\rho}\right) + gz\right]. \quad (2.36)$$

Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos os membros (usando $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}f = 0$) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \times [\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})]. \quad (2.37)$$

Esta forma da equação de Euler só envolve a velocidade.

2.3.3 Caso particular de um escoamento homentrópico ($s = cste$)

Um movimento é chamado **homentrópico** quando $s = cste$, i.e. s não depende da posição e tempo⁴, da mesma maneira que ρ é constante num fluido incompressível. Na próxima seção, discutimos em que situação isto pode acontecer.

Nesse caso, a equação de Euler pode ser reescrita em termos de entalpia. Lembramos que (cf. §1.6)

$$w(s, p) = \epsilon + pV_e, \quad (V_e = \frac{1}{\rho}) \quad (2.38)$$

$$dw = d\epsilon + p dV_e + V_e dp = (T ds - p dV_e) + p dV_e + V_e dp = T ds + \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.39)$$

⁴Estou seguindo a definição de Batchelor [2.5], Kambe [2.6] “Elementary Fluid Dynamics”, que é diferente da de Landau & Lifshitz [2.7].

2.4. EQUAÇÃO DE CONTINUIDADE PARA A ENTROPIA DE UM FLUIDO PERFEITO

Como $s = cste$, temos $dw = (1/\rho)dp$. No caso particular onde queremos comparar a diferença de estado de várias partículas de fluido, as diferenciais totais podem ser expressas em função das variáveis espaciais i.e. $(\vec{\nabla}w - (1/\rho)\vec{\nabla}p) \cdot d\vec{r} = 0$ para $d\vec{r}$ qualquer de modo que

$$\vec{\nabla}w = \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}p. \quad (2.40)$$

Portanto a equação de Euler se re-escreve,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(w + gz). \quad (2.41)$$

De novo conseguimos escrever o termo mais a direita como um gradiente só.

Podemos também escrever uma equação do tipo 2.37.

2.4 Equação de Continuidade para a entropia de um fluido perfeito

Consideramos um fluido perfeito i.e. desprovido de viscosidade (e sem condução térmica no seu interior) num processo reversível. Nesse caso, não tem troca de calor, o movimento é adiabático $\delta Q = 0$ e como é reversível $\delta Q = Tds$ de modo que $ds = 0$. Um processo deste tipo, adiabático e reversível, é chamado de **isentrópico**⁵.

Cada elemento do fluido executa o seu movimento sem mudar a sua entropia específica, assim:

$$\frac{ds}{dt} = 0, \quad (2.42)$$

onde $s = s(x, y, z, t)$ é a entropia específica.

Usando a eq. (2.9), podemos reescrever

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}s = 0, \quad (2.43)$$

Isto significa que um pedaço de fluido se desloca mantendo sua entropia específica constante mas se olharmos o fluido em vários pontos do espaço e/ou em vários instantes, a entropia específica pode mudar.

⁵Podem existir processos adiabáticos não reversíveis num fluido, por exemplo quando há uma onda de choque.

No caso particular onde inicialmente a entropia é distribuída uniformemente no espaço, se o movimento é adiabático reversível, a entropia continuará uniforme conforme o tempo passa. Este movimento é homentrópico.

Podemos considerar a densidade de entropia (entropia por unidade de volume) ρs , temos

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} = \rho \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s - s \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = -\vec{\nabla}(\rho s \vec{v}) \quad , \quad (2.44)$$

onde usamos a eq. de continuidade para a massa. (2.15) e a eq. de conservação de entropia específica (2.43).

Temos então

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0, \quad (2.45)$$

onde $\rho s \vec{v}$ é a densidade de corrente de entropia.

Esta equação é uma equação de continuidade para a densidade de entropia ρs , da mesma maneira que obtivemos uma equação de continuidade para a densidade de massa ρ .

A tabela seguinte resume nossos resultados. Temos 5 equações obtidas a partir da consideração da conservação de massa, momento (3 componentes) e entropia. Isto já é suficiente para determinar a evolução de um fluido perfeito. A conservação de energia é discutida no exercício 8.

	equação geral	caso particular
conservação da dens. de massa	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0$ fluido qualquer (<i>cont.p/massa</i>)	$A_1 v_1 = A_2 v_2$ incompress.
equação do movimento	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}$ fluido perfeito (<i>Euler</i>)	$\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{v})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}))$ perfeito +incompress. ou homentrópico
conservação da dens. de entr.	$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho s \vec{v}) = 0$ fluido perfeito (<i>cont. p/entr.</i>)	

Além disto:

$$d/dt = \partial/\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$$

2.5 Condições Iniciais e de Contorno:

Temos 5 grandezas (\vec{v} e duas grandezas termodinâmicas) e 5 equações. Estas equações no caso geral envolvem derivadas parciais de primeira ordem mas são complicadas pois são acopladas e contem termos não lineares (como $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$). Para resolve-las precisam ser fixadas condições iniciais e/ou de contorno. Estas dependem do problema, podemos ter:

(i) *Condições iniciais*, i.e. para $t = 0$,

$$\begin{cases} \vec{v}_0 \equiv \vec{v}(x, y, z, t = 0) \\ p_0 \equiv p(x, y, z, t = 0) \\ \rho_0 \equiv \rho(x, y, z, t = 0) \end{cases} \quad (2.46)$$

ou duas outras grandezas termodinâmicas no lugar de p_0 e ρ_0 .

(ii) *Condições de contorno*:

a) *Paredes*: Se uma parede de separação está em repouso, na sua superfície, chamando \vec{n} sua normal, devemos ter $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$, pois caso contrário, haveria uma penetração do fluido dentro da parede ou formação de vácuo junto à parede. Assim \vec{v} tem que ser tangencial à superfície.

Similarmente, se a parede do recipiente estiver em movimento, devemos ter $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{parede} \cdot \vec{n}$, isto é a velocidade normal do fluido é igual à velocidade normal da parede.

b) *Superfície de separação entre dois fluidos não miscíveis*: Devemos ter

$$\begin{cases} p_1 = p_2, \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}. \end{cases} \quad (2.47)$$

c) *Condições no infinito*: Se tiver um obstáculo, longe dele $p(t, |\vec{r}| \rightarrow \infty) = p_\infty$ e $\vec{v}(t, |\vec{r}| \rightarrow \infty) = \vec{v}_\infty$ onde p_∞ e \vec{v}_∞ são dados do problema.

2.6 Exercícios

1. Dois riachos se juntam para formar um rio. Um dos riachos tem largura de 8,2 m, profundidade de 3,4 m e correnteza de velocidade 2,3 m/s. O outro riacho tem largura de 6,8 m, profundidade de 3,2 m e correnteza de velocidade 2,6 m/s. A largura do rio é 10,5 m e a velocidade da correnteza é 2,9 m/s. Qual é sua profundidade?
2. Escrever explicitamente a expressão de $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ e $\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ para $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$.
3. Consideremos um fluido com velocidade de escoamento $\vec{v} = (xt, -y, 0)$ e supomos o tempo inicial $t_0 = 0$.
 - a) Calcular a trajetória e aceleração de um elemento de fluido na descrição Lagrangiana.
 - b) Calcular a aceleração de um elemento de fluido na descrição Euleriana.
4. Um escoamento tem velocidade $\vec{v} = \sqrt{2gy} \hat{y}$. Calcular a aceleração de um elemento de fluido na descrição de Lagrange e na de Euler. Que tipo de movimento esta sendo descrito?
5. Repetir o 4 com $\vec{v} = R\omega \hat{\phi}$ com R e $\omega = d\phi/dt$ constantes e (r, ϕ) coordenadas polares.
6. Com computador: um fluido tem movimento unidimensional com $v_x = -x$. Considerar um elemento de fluido em $x_0 = 1m$ em $t_0 = 0s$.
 - a) Calcular analiticamente a trajetória deste elemento de fluido.
 - b) Calcular numericamente a trajetória deste elemento de fluido e comparar com o a).
7. No caso de um fluido composto de partículas com carga elétrica, derivar a equação de continuidade adicional.
8. a) Escrever a equação de conservação de energia para um volume V em movimento na ausência de forças externas.
 - b) Mesma pergunta usando um volume fixo. Comparar. O caso com forças externas pode ser encontrado em [2.8] §1.4.4 ou [2.6] §3.4.2.
9. Escrever as 5 equações que vimos na forma de Lagrange (isto é só podem aparecer derivadas em x_0 e t). Isto é um problema “famoso”, cf. [2.7] §2 , [2.6] §3.5.

Bibliografia

- [2.1] D.J. Griffiths “Introduction to electrodynamics”, Prentice Hall, 3d ed., 1999.
- [2.2] A.R. Paterson “A first course in Fluid Dynamics”, Cambridge University Press, 1983.
- [2.3] V.Grubelnik & M.Marhl, American journal of Physics 73 (2005) 415.
- [2.4] G. Arfken “Mathematical Methods for Physicists”, Academic Press, 2nd ed. 1970.
- [2.5] G.K. Batchelor “An Introduction to Fluid Mechanics”, Cambridge University Press, 1967.
- [2.6] T. Kambe “Elementary Fluid Mechanics”, World Scientific, 2007.
- [2.7] L.D.Landau & E.M.Lifshitz “Fluid Mechanics”, Pergamon Press, 2nd ed., 1987.

2.7 Respostas

1. Profundidade = $(8, 2 \times 3, 4 \times 2, 3 + 6, 8 \times 3, 2 \times 2, 6) / (10, 5 \times 2, 9) \sim 4 m$.
2. $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x + v_z \partial_z v_x)\hat{x} + (v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y + v_z \partial_z v_y)\hat{y} + (v_x \partial_x v_z + v_y \partial_y v_z + v_z \partial_z v_z)\hat{z}$ e $\vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = (v_x \partial_x v_x + v_x \partial_y v_y + v_x \partial_z v_z)\hat{x} + (v_y \partial_x v_x + v_y \partial_y v_y + v_y \partial_z v_z)\hat{y} + (v_z \partial_x v_x + v_z \partial_y v_y + v_z \partial_z v_z)\hat{z}$. Observar que estas equações são diferentes em geral.
3. a) $dx/dt = xt \Rightarrow \ln(x/x_0) = t^2/2$ e $dy/dt = -y \Rightarrow \ln(y/y_0) = -t$, combinando $[\ln(y/y_0)]^2 = \ln(x^2/x_0^2)$. $d^2x/dt^2 = x(t^2 + 1)$ e $d^2y/dt^2 = y$
b) $dv_x/dt = \partial v_x/\partial t + (v_x \partial_x + v_y \partial_y)(v_x) = x + (xt \partial_x - y \partial_y)(xt) = x(1 + t^2)$ e $dv_y/dt = \partial v_y/\partial t + (v_x \partial_x + v_y \partial_y)(v_y) = 0 + (xt \partial_x - y \partial_y)(-y) = y$, ambos estão em acordo com o a).
4. $d\vec{v}/dt = \sqrt{2g} d\sqrt{y}/dt \hat{y} = \sqrt{2g} 1/2 dy/dt / \sqrt{y} \hat{y} = g \hat{y} \partial \vec{v}/\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0 + (\sqrt{2gy} \partial_y)(\sqrt{2gy} \hat{y}) = 2g \sqrt{y} d\sqrt{y}/dy \hat{y} = g \hat{y}$. Escoamento com aceleração constante (e.g. num campo gravitacional).
5. $d\vec{v}/dt = R\omega d\hat{\phi}/dt = R\omega d\hat{\phi}/d\phi d\phi/dt = R\omega^2(-\hat{r})$ (onde usamos $d\hat{\phi}/d\phi = -\hat{r}$). $\partial \vec{v}/\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0 + R\omega \hat{\phi} \cdot [\hat{r} \partial/\partial r + \phi \partial/(R\partial\phi)](R\omega \hat{\phi}) = R\omega^2 \partial/\partial \phi(\hat{\phi}) R\omega^2(-\hat{r})$. Escoamento circular com velocidade angular constante.
6. a) $dx/dt = -x$ com $x(t=0) = 1 \Rightarrow x = e^{-t}$.
b) Pode-se resolver numericamente $dx/dt = -x$ usando o método de Euler ou uma forma melhorada.
7. Chamando ρ_e a densidade de carga elétrica, o mesmo raciocínio do que na §2.2.1 leva a $\partial \rho_e/\partial t + \vec{\nabla} \cdot (\rho_e \vec{v}) = 0$.
8. a) Para um fluido perfeito $d\epsilon = -pdV_e = (p/\rho^2)d\rho$ Para uma partícula de fluido em movimento $d\epsilon/dt = (p/\rho^2)d\rho/dt = -p/\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$. A conservação de energia tem uma forma simples num referencial de Lagrange. b) Num volume fixo V , a variação no tempo da energia total é

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\epsilon + \frac{1}{2}v^2)] dV. \quad (2.48)$$

Esta mudança ocorre pois tem fluxo de energia e trabalho feito pelas forças de pressão. De modo que (2.48) é igual a

$$-\oint_S [\rho(\epsilon + \frac{1}{2}v^2)] \vec{v} \cdot d\vec{S} - \oint_S p \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\int_V \vec{\nabla} \cdot [\rho(w + \frac{1}{2}v^2)] dV \quad (2.49)$$

então

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\epsilon + \frac{1}{2}v^2)] + \vec{\nabla} \cdot [\rho(w + \frac{1}{2}v^2)] \vec{v} = 0. \quad (2.50)$$

O fato de ter a entalpia ρw e não só $\rho\epsilon$ no segundo termo vem do trabalho das forças de pressão. Esta formulação num referencial de Euler clarifica como prossegue a conservação de energia.

Podemos re-escrever:

$$\begin{aligned}
& (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) + (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) \vec{\nabla} \rho \vec{v} + \rho \vec{v} \vec{\nabla} (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p \\
& = (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) (\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \rho \vec{v}) + \rho [\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\epsilon + \frac{1}{2}v^2)] + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (-\rho \frac{d\vec{v}}{dt}) \\
& = \rho \frac{d}{dt} (\epsilon + \frac{1}{2}v^2) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + (-\frac{\rho}{2} \frac{dv^2}{dt}) \\
& = \rho \frac{d}{dt} \epsilon + p \vec{\nabla} \cdot \vec{v},
\end{aligned} \tag{2.51}$$

i.e. as formulações do a) e do b) são equivalentes.

9. A conservação da massa de uma partícula de fluido dá $M = \rho_0 dx_0 = \rho(t, x_0) dx(t, x_0)$ ou $\rho_0 = \rho(\partial x(t, x_0)/\partial x_0)_t$.

A eq. de Euler $dv/dt = -(1/\rho) dp/dx$ se escreve $(\partial v(t, x_0)/\partial t)_{x_0} = -(1/\rho_0)(\partial x(t, x_0)/\partial x_0)_t \partial p/\partial x = -(1/\rho_0)(\partial p/\partial x_0)_t$.

A eq. de conservação de entropia $ds/dt = 0$ se escreve $(\partial s(t, x_0)/\partial t)_{x_0} = 0$.

Capítulo 3

ESTÁTICA

3.1 Equações gerais:

Consideremos neste capítulo diferentes problemas, que envolvem fluidos em repouso. A ideia é primeiro entender o estado de equilíbrio para depois, em outros capítulos, estudar o estado de movimento. Temos então $\vec{v} = 0$ e as equações do Cap.2 se simplificam bastante.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \longrightarrow \rho = \rho(x, y, z), \\ \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0 & \longrightarrow s = s(x, y, z), \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} & \longrightarrow \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

isto é, a densidade de massa ρ , a densidade específica de entropia s , a densidade de entropia ρs e todas as grandezas termodinâmicas são funções somente das coordenadas (constantes em t) e a equação de Euler se reduz a equação

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}, \quad (3.2)$$

que descreve o *equilíbrio mecânico* de um fluido: a força devida ao gradiente de pressão $-\vec{\nabla} p$ equilibra a força devida à gravidade, $\rho \vec{g}$.

É interessante observar que esta equação vale também para fluidos viscosos, pois pela própria natureza (atritos) os efeitos da viscosidade aparecem somente quando o fluido está em movimento.

Na ausência de gravidade, a condição de equilíbrio se reduz a $\vec{\nabla} p = 0$, i.e. a pressão é a mesma em todo o fluido.

Apesar das fórmulas da hidrostática serem muito simples, suas consequências não sempre são muito intuitivas e merecem reflexões como veremos a seguir.

3.2 Fluido incompressível sob ação da gravidade

3.2.1 Sem rotação

Suponhamos

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \text{ (constante)} \\ \vec{g} = -g\hat{k} \end{cases} \quad (3.3)$$

Podemos imaginar, por exemplo, uma coluna de água como na fig. 3.1.

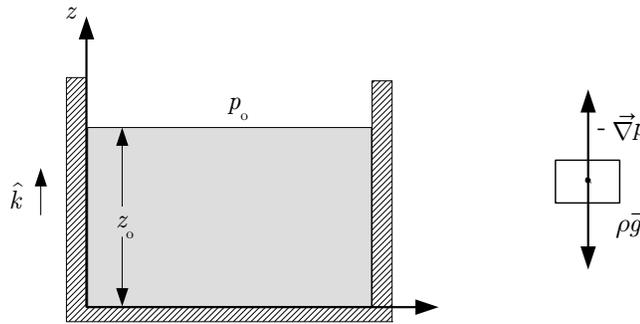


Figura 3.1: Fluido incompressível em equilíbrio sob ação da gravidade.

Na figura 3.1, p_0 é a pressão atmosférica, isto é, ela vem da coluna de ar que pesa sobre nós. Ela atua sobre a superfície do líquido, localizada em $z = z_0$,

Exemplo (3.1)

Se eu estender minha palma para baixo, sobre o dorso da mão, qual é a força que sinto?

Solução: Sinto uma pressão de $1atm \sim 10^5 N/m^2 = 10N/cm^2$, i.e. o peso de uma massa de 1kg sobre cada cm^2 . Usando $120 cm^2$ para a superfície da minha mão, tenho o efeito de 120 kg sobre o dorso dela. Como consigo segurar isto sem que minha mão caia? A pressão atua em todas as direções e perpendicularmente às superfícies de modo que há também uma força para cima sobre a palma da minha mão.

Precisamos resolver

$$\vec{\nabla}p = -\rho_0 g \vec{k} \quad (3.4)$$

Temos

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \longrightarrow p(x, y, z) = p(z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g & \longrightarrow p(z) = -\rho_0 g z + \text{const.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Como em $z = z_0$, $p = p_0$, temos para a constante de integração

$$\text{const.} = p_0 + \rho_0 g z_0 \quad (3.6)$$

e

$$p(z) = p_0 + \rho_0 g(z_0 - z) \quad (3.7)$$

De modo que num ponto dentro do líquido, a pressão é a pressão atmosférica mais a pressão devido a coluna de líquido acima do ponto. É a lei de Stevin.

Chamamos de superfície livre, a superfície do líquido em contato com o ar. Ela é obtida resolvendo $p(z) = p_0$, i.e. é o plano $z = z_0$. Similarmente, uma superfície de pressão constante $p_f > p_0$ abaixo da superfície livre é um plano horizontal dado por $z = z_0 - (p_f - p_0)/(\rho_0 g)$.

3.2.2 Com rotação

O problema de um fluido incompressível em rotação uniforme num campo gravitacional (cf. fig. 3.2) também pode ser resolvido relativamente facilmente indo para o referencial de repouso.

Após alguns instantes de o recipiente començar a girar, o líquido passa a girar rigidamente com o recipiente. Consideremos um referencial S' que se move com o recipiente, de modo que o líquido está em repouso.

Em S' , além da força da gravidade (por unidade de volume), $\rho \vec{g}$, atua a força centrífuga¹ (por unidade de volume), $\rho \omega^2 r \hat{r}$.

$$\vec{\nabla}p = \rho_0 \vec{g} + \rho_0 \omega^2 r \hat{r} \quad (3.8)$$

com²

$$\vec{\nabla}p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{z} \quad (3.9)$$

¹Caso precise rever este conceito, pode-se consultar por exemplo o capítulo 13 de [3.1].

²Agora precisaremos usar o gradiente em coordenadas cilíndricas. Se tiver dúvidas veja as revisões recomendadas na nota de rodapé 2 do capítulo anterior.

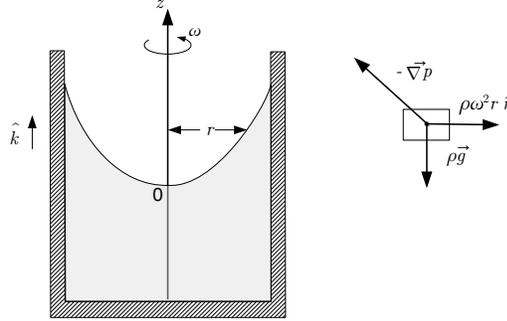


Figura 3.2: Fluido incompressível em rotação uniforme num campo gravitacional.

Esta equação diferencial significa que no referencial S' , um volume infinitesimal de fluido está em equilíbrio com o negativo do gradiente de pressão se opondo a gravidade e a força centrífuga.

A solução é em coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0 & \longrightarrow p = p(r, z) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g & \longrightarrow p = -\rho_0 g z + c(r) \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r & \longrightarrow p = p_0 - \rho_0 g z + \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 r^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

onde supomos $p = p_0$ no ponto O , i.e. em $z = r = 0$.

A equação da superfície livre da água ($p = p_0$) é $z = \omega^2 r^2 / (2g)$, i.e. é um parabolóide de revolução (cf. figura). As superfícies de pressão constante $p_f > p_0$ são também paraboloides $z = \omega^2 r^2 / (2g) - (p_f - p_0) / (\rho_0 g)$

Exemplo (3.2)

Resolver o problema de um fluido em rotação uniforme no referencial do laboratório.

Solução: Temos $\vec{v} = r\omega\hat{\phi}$ de modo que $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = (v_r\hat{r} + v_\phi\hat{\phi} + v_z\hat{z})(\hat{r}\partial_r + \hat{\phi}\partial_\phi + \hat{z}\partial_z) = v_r\partial_r + \frac{v_\phi}{r}\partial_\phi + v_z\partial_z = \omega\partial_\phi$ e $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = r\omega^2\partial_\phi\hat{\phi} = -r\omega^2\hat{r}$. Com isto a equação de Euler se torna $-r\omega^2\hat{r} = -\vec{\nabla}p/\rho_0 + \vec{g}$. Isto é exatamente a mesma equação (3.8) que resolvemos anteriormente, podemos resolvê-la da mesma maneira, obtendo como solução a eq. (3.10).

Num referencial fixo no laboratório, não tem a força centrífuga $+\rho_0 r \omega^2 \hat{r}$ representada na fig. 3.2. O negativo do gradiente de pressão se decompõe em parte que se opõe à gravidade e parte que constitui a força centrípeta $-\rho_0 r \omega^2 \hat{r}$.

As fotos embaixo mostram a superfície livre de um líquido parado e em rotação angular constante.



Figura 3.3: Crédito: fotos feitas no museo Catavento de São Paulo.

Os mesmos métodos (mudar para o referencial de repouso ou considerar um referencial fixo no laboratório) podem ser usados para resolver o problema de aceleração linear uniforme (cf. exercício 2).

3.2.3 Consequências

Princípio de Pascal e prensa hidráulica

Pela lei de Stevin dada em (3.7), a diferença de pressão entre dois pontos de um líquido incompressível em equilíbrio depende apenas do desnível entre

esses pontos³. Assim, **se produzirmos uma variação de pressão num ponto do líquido em equilíbrio, essa variação se transmite a todo o líquido (Princípio de Pascal)**. É isto que usamos cada dia quando apoiamos sobre nosso tubo de pasta dental em alguma ponto e vemos a pasta sair pela abertura. Este princípio é atrás do funcionamento da prensa hidráulica, macaco hidráulico, etc, conforme veremos agora.

Na figura 3.4, consideremos um recipiente contendo um líquido e fechado por um pistão. A medida que o pistão é empurrado para dentro, a pressão aumenta em todo o fluido do mesmo valor. A força de pressão dado pela eq. (1.2) é perpendicular à parede.

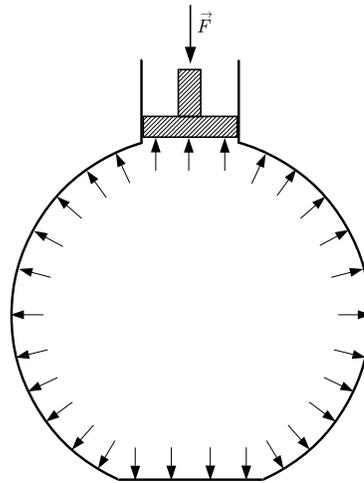


Figura 3.4: Uma força aplicada ao pistão leva a um aumento de pressão com o mesmo valor em todo o fluido. No desenho o efeito da gravidade ($\rho g \times altura$) é suposto muito menor do que a força aplicada no pistão de modo que as setas representando a força de pressão tem todas o mesmo comprimento.

Agora podemos ver o princípio de funcionamento da prensa hidráulica. Na fig. 3.5, uma força para baixo \vec{F}_1 é aplicada no lado esquerdo resultando numa força para cima \vec{F}_2 no lado direito. Para manter o sistema em equilíbrio, uma força $-\vec{F}_2$ é exercida do lado direito. \vec{F}_1 e $-\vec{F}_2$ causam um aumento de pressão em relação à pressão atmosférica p_0 . No equilíbrio, cada força tem

³Uma outra maneira de enxergar isto, é que no caso de aplicar uma pressão maior e chegar ao equilíbrio, temos que resolver 3.5 simplesmente com p_0 maior.

que produzir o mesmo aumento de pressão senão o fluido iria se movimentar. Igualando os aumentos de pressão temos:

$$F_1/A_1 = F_2/A_2 \quad (3.11)$$

de modo que $F_2 = (A_2/A_1) F_1$. Assim a força aplicada sobre A_1 pode ser pequena e resultar numa força grande sobre A_2 .

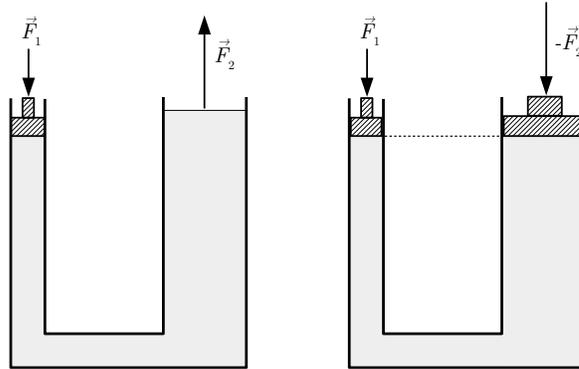


Figura 3.5: Uma força pequena aplicada para baixo à esquerda pelo pistão de área menor resulta numa força grande para cima no pistão de área maior à direita. (Os dois pistões não precisam ficar na mesma altura para ter equilíbrio, cf. exercício 6.)

As fotos (3.6) ilustram o que foi explicado acima: duas seringas de diâmetro diferente são ligadas por um tubo, o dispositivo é enchido de água com o ar removido. No equilíbrio a massa sobre a seringa de diâmetro pequeno é menor do que sobre a seringa de diâmetro grande.

Vasos comunicantes e manômetro

Se um recipiente é formado de diversos ramos comunicantes (cf. fig. 3.7 esquerda), a superfície livre está localizada numa mesma altura h em todos os ramos e fica à pressão atmosférica p_0 . A pressão em qualquer ponto no plano a altura z é $p = p_0 + \rho g(h - z)$. Se em dois ramos de um tubo em U temos dois líquidos de densidades diferentes, que não se misturam, eles subiram a alturas diferentes nos ramos (cf. fig. 3.7 direita). Para pontos sobre o plano pontilhado inferior, temos $p = p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$ i.e. $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$.

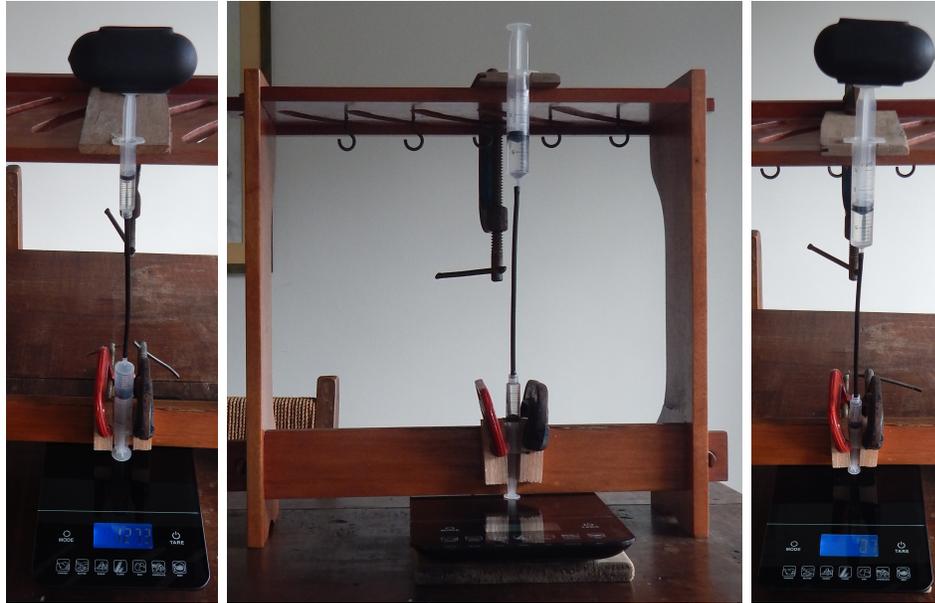


Figura 3.6: Um exemplo prático (caseiro) do arranjo sugerido na fig. 3.5. No centro o arranjo todo, à esquerda com o cilindro menor em cima e o maior em baixo (configuração de prensa hidráulica) e à direita com o maior em cima e o menor em baixo, configuração invertida. À esquerda a leitura da balança é 1267g e à direita 87g, o que mostra o ganho de força.

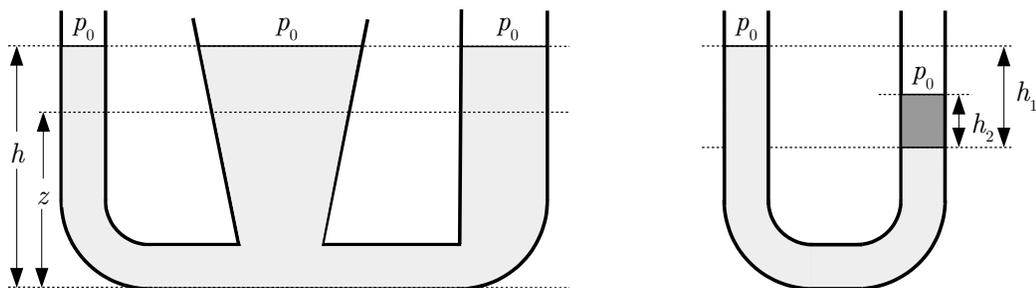


Figura 3.7: Vasos comunicantes.

Exemplo (3.3)

Manômetros são aparelhos para medir a pressão em relação à pressão atmosférica. Existem muitos tipos de manômetro: com tubo aberto, reservatório, tubo inclinado, etc.

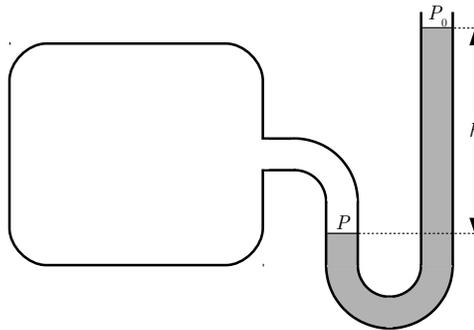


Figura 3.8: Exemplo de manômetro

Como obter a pressão desconhecida p na fig. 3.8?

Solução: No desenho $p > p_0$. Supondo que a densidade do líquido no tubo é ρ , podemos medir h a altura de fluido acima do plano onde a pressão é p e obter o valor de p com $p = p_0 + \rho gh$.

Paradoxo hidrostático

Na figura 3.9, três recipientes abertos em cima com formas diferentes e *mesma base* são cheios de líquido até *uma mesma altura*. Como eles tem mesma altura de líquido, a pressão nas suas bases é a mesma. A força F_b correspondendo à esta pressão sobre a base do recipiente é então a mesma ($F_b = \text{pressão} \times \text{superfície da base}$). Porém se estes recipientes fossem colocados sobre uma balança, leríamos pesos diferentes. Como isto é possível? Isto é o paradoxo hidrostático descoberto por Pascal.

No caso do recipiente cilíndrico, o peso do líquido é exatamente igual à força de pressão \vec{F}_b exercida pelo líquido sobre a base. As paredes rígidas do recipiente transmitem esta força ao prato da balança.

No recipiente em forma de funil, o líquido exerce uma força para baixo sobre as paredes. Esta força e \vec{F}_b são transmitidas ao prato da balança que indica um peso maior como deve.

No recipiente em forma de cone, o líquido exerce uma força para cima sobre as paredes. Esta força e \vec{F}_b são transmitidas ao prato da balança que indica um peso menor como deve.

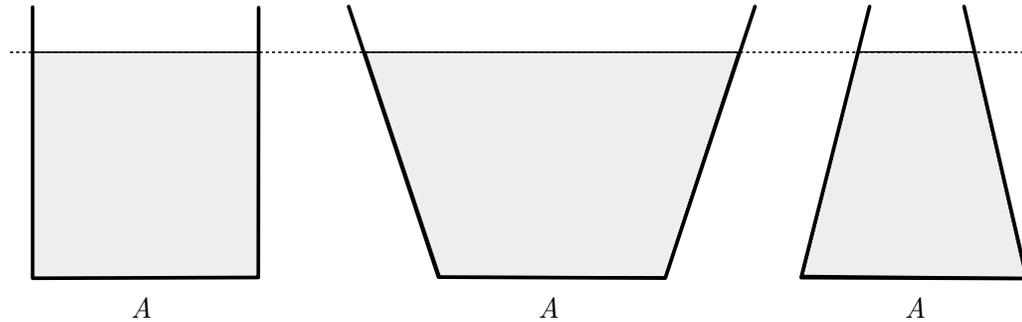


Figura 3.9: O paradoxo hidrostático: o peso do líquido no recipiente em forma de funil (no centro) é maior do que o do cilindro e o peso no recipiente em forma de cone (a direita) é menor do que o do cilindro mas a pressão sobre a base é a mesma nos três casos.

Exemplo (3.4)

Na figura 3.10, consideremos três recipientes do mesmo tipo do que na figura 3.9 mas de geometria mais simples. Calcular explicitamente as forças exercidas sobre os recipientes e verificar que são iguais ao peso.

Solução: Como a atmosfera terrestre atua como um banho que afeta da mesma forma a mesa, balança, recipientes e líquido, não a levamos em conta (mas com cuidado isto pode ser feito). Para o recipiente cilíndrico, a força sobre a base devida a pressão é $F_b = \rho g h_1 A_1$. O peso do líquido pode ser escrito $F_g = \rho g h_1 A_1$ por tanto iguala F_b .

Para o recipiente em “funil”, tem forças de pressão sobre a base do recipiente e sobre a superfície anular A_2 de modo que a força total de pressão é $F_p = \rho g h_1 A_1 + \rho g h_2 A_2$. O peso do fluido pode ser escrito $F_g = \rho g h_1 A_1 + \rho g h_2 A_2$ por tanto iguala F_p .

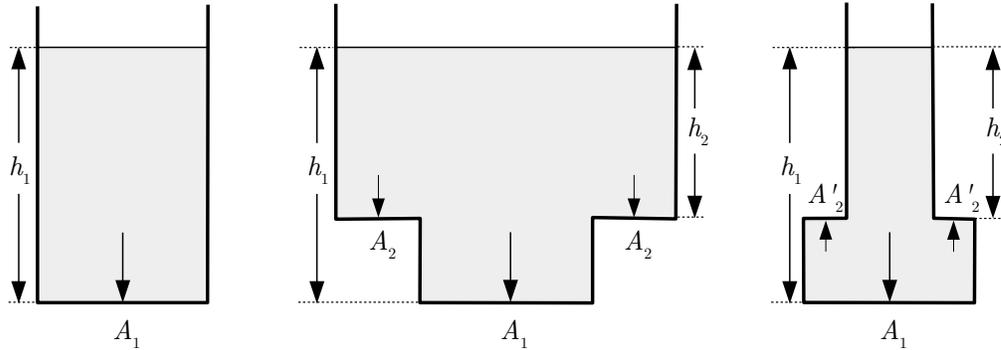


Figura 3.10: As setas indicam as forças devida à pressão.

Para o recipiente em “cone”, tem forças de pressão sobre a base do recipiente e sobre a superfície anular A_2 mas esta última é para cima de modo que a força total de pressão é $F_p = \rho g h_1 A_1' - \rho g h_2 A_2'$. O peso do fluido pode ser escrito $F_g = \rho g h_1 A_1' - \rho g h_2 A_2'$ por tanto iguala F_p .

Seringa, bomba de sucção e barômetro

Uma aplicação da lei de Stevin (3.7) é calcular a profundidade máxima de um poço do qual uma bomba de sucção consegue puxar a água. Primeiro podemos experimentar com uma seringa cuja extremidade (a da agulha) é inserida num copo de água inicialmente com o pistão abaixado (pode deixar um pouco de ar). Quando o pistão é puxado para cima, líquido sobe no corpo da seringa até uma altura h . Isto significa que a pressão atmosférica p_0 empura a água para dentro e a pressão p_{topo} no topo do líquido no corpo da seringa é menor. Podemos calcular que

$$p_{topo} = p_0 - \rho g h. \quad (3.12)$$

O mesmo fenômeno pode ser observado quando sugamos um líquido com um canudo. Podemos até equilibrar o líquido no canudo, tirando sua extremidade da bebida, confirmando que a diferença de pressão se opõe ao peso.

O mesmo princípio é aplicado numa bomba de sucção. Podemos calcular a altura máxima da coluna de água que uma bomba consegue sugar.



Figura 3.11: Ilustração do fenômeno de sucção com uma seringa.

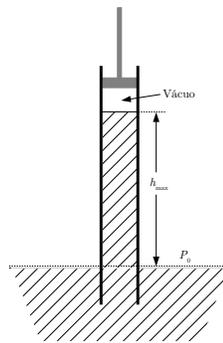


Figura 3.12: Bomba de sucção.

Na coluna, a pressão diminui até chegar no mínimo à pressão do vácuo, i.e. zero⁴ como mostrado na fig. 3.12. Substituindo $p_{topo} = 0$ na eq. 3.12, obtemos para a altura máxima h_{max}

$$h_{max} = \frac{p_0}{\rho_0 g} . \quad (3.13)$$

Ao nível do mar, com $p_0 = p_{atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ e $\rho_0 = 1 \text{ kg/l}$ obtemos

$$h_{max} \simeq 10.3 \text{ m}. \quad (3.14)$$

Isto é a altura máxima até a qual uma bomba pode elevar água usando unicamente sucção.

Na internet, pode-se encontrar vídeos de pessoas tentando sugar um líquido com canudo gigante a partir de um ponto muito elevado. Agora vimos que há um limite, da ordem de 10 metros, em quão alto podem subir. Porém tem uma possibilidade de vencer este limite que talvez você possa sugerir após ler este texto com cuidado⁵.

Podemos também tentar calcular a altura máxima até a qual a atmosfera terrestre pode se elevar. A fórmula anterior para a atmosfera, dá $h_{\text{máx}} \simeq 8 \text{ km}$ (com $\rho_{ar} \sim 1,3 \text{ kg/m}^3$). Esta estimativa da espessura da atmosfera, no entanto, é muito grosseira, pois sabemos que a densidade do ar não é constante e, de fato, experimentalmente $h_{\text{máx}} \gg 8 \text{ km}$. Voltamos à questão da atmosfera terrestre na próxima seção.

Exemplo (3.5)

O barômetro de mercúrio é usado para medir a pressão atmosférica. O dispositivo é mostrado na fig. 3.13.

Como funciona?

Solução: O princípio é o mesmo da bomba de sucção. Usa-se mercúrio no lugar da água. A altura da coluna dá a pressão atmosférica: $p_0 = gh\rho_{Hg}$. Usando $\rho_{Hg} = 13,6 \text{ kg/m}^3$, obtemos uma altura de $\sim 76 \text{ cm}$.

Vários outros exemplos podem ser encontrados nos exercícios.

⁴Na realidade, um vácuo total não pode ser criado pois quando a pressão decresce, o ponto de ebulição da água é abaixado e uma camada de vapor aparece na bomba.

⁵Se necessário consultar a ref. [3.2]

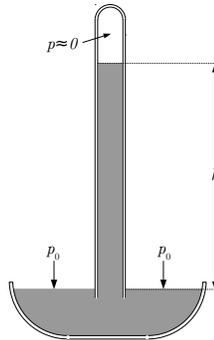


Figura 3.13: Barômetro de mercúrio.

3.2.4 Princípio de Arquimedes e Corpos flutuantes

Os resultados anteriores permitem também estudar corpos flutuantes:

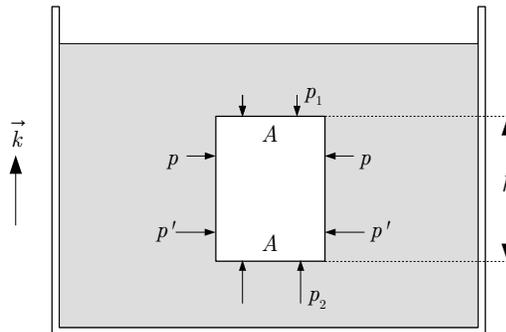


Figura 3.14: Empuxo sobre um corpo imerso.

Primeiro, verificamos o Princípio de Arquimedes: **o empuxo tem módulo igual ao do peso do fluido deslocado**. Na figura 3.14, as forças sobre o corpo nas laterais se cancelam mas na vertical, a força para cima é maior do que a para baixo, isto é o chamado empuxo. Ele vale

$$E = p_2 A - p_1 A = \rho_{liq} g h A = m_{liq} g \quad (3.15)$$

conforme esperávamos.

Notamos que a equação anterior é uma maneira de re-escrever nossa equação de equilíbrio (3.2):

$$\frac{p_2 - p_1}{h} = \rho_{liq}g \Rightarrow \vec{\nabla}p = \rho_{liq}\vec{g}. \quad (3.16)$$

Num corpo flutuante em equilíbrio como na fig. 3.14, o empuxo e o peso do corpo se cancelam. Se o empuxo for menor do que o peso, o corpo afunda. Se o empuxo for maior, o corpo sobe até deslocar menos água e ter equilíbrio entre empuxo e peso.

Um outro problema interessante é a estabilidade de corpos flutuantes ou submersos. A discussão a seguir pode ser aplicada a barcos, submarinos, balões de ar quente. Para fixar as ideias, consideramos barcos.

O ponto onde se aplica o empuxo é o centro de gravidade do fluido deslocado. Num barco, este ponto é chamado centro de carena. O centro de gravidade do barco G e seu centro de carena C ficam numa vertical no equilíbrio (cf. fig.3.15 e 3.16 a esquerda) mas isto não garante a estabilidade.

Se o barco for inclinado, a porção de barco imersa muda e o centro de carena também. Aparece um torque restaurador como na fig. 3.15 no caso de pequena inclinação ou não restaurador como na fig. 3.16⁶.

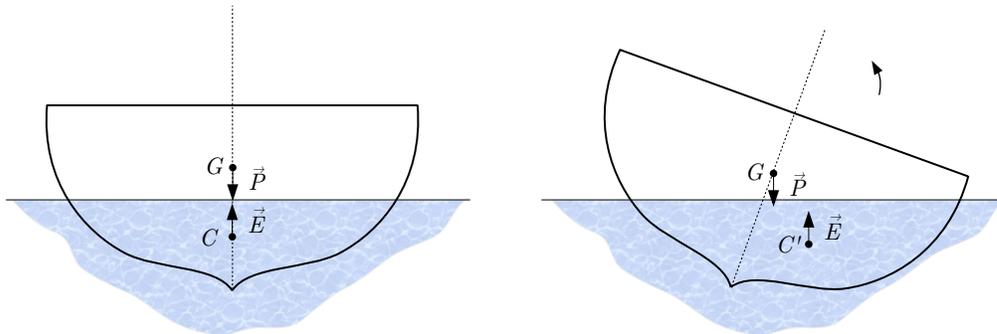


Figura 3.15: Esquerda: centro de carena onde se aplica o empuxo C e centro de gravidade do barco G não coincidem necessariamente (o barco é visto de trás ou de frente). Direita: torque restaurador para pequena inclinação.

Existem várias maneiras de planejar um barco mais estável. 1) Nas fig. 3.15 e 3.16, vemos que o maior a distância entre G e C' , o maior o torque

⁶Para cálculos mais detalhados ver por exemplo o cap. 2 da ref. [3.3].

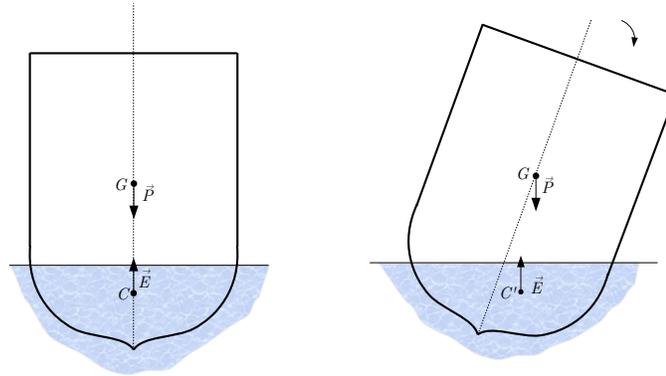


Figura 3.16: Esquerda: centro de carena onde se aplica o empuxo C e centro de gravidade do barco G no equilíbrio. Direita: torque não restaurador.

(restaurador ou não). É interessante então ter um barco mais largo como ilustrado na fig. 3.17 para evitar que ele capote (mas se capotar vai ser difícil fazer ele de-capotar). Intuitivamente sabemos que é mais fácil entrar num barco bem largo do que numa canoa estreita. 2) Na fig. 3.15, percebemos que se G for mais baixo, o torque restaurador é maior. Para manter G baixo, é melhor que não todo mundo se levante junto num barco pequeno, que os objetos pesados sejam armazenados o mais baixo possível, etc. Similarmente para melhorar sua estabilidade, os veleiros oceânicos tem quilha (apêndice preso no fundo do casco) pesada. Isto permite que eles voltem à posição normal após capotar 180° , devido à ação das ondas (não digo que seja muito agradável). Eles podem até mesmo ter quilha basculante que permite mudar a posição de G durante a navegação. Isto é ilustrado nas fig. 3.17. Sabemos do papel da posição de G intuitivamente: se nosso barco se inclinar, subemos sobre a borda mais elevada para equilibra-o.

3.3 Fluido compressível sob ação da gravidade (campo uniforme)

Passamos agora ao estudo do equilíbrio de fluidos compressíveis. Nesta seção, temos mais particularmente em mente o tratamento da atmosfera em *equilíbrio mecânico* (sem ventos). Este tipo de modelização para a atmosfera terrestre é útil por exemplo para construtores de aviões, pode ser

3.3. FLUIDO COMPRESSÍVEL SOB AÇÃO DA GRAVIDADE (CAMPO UNIFORME) 5

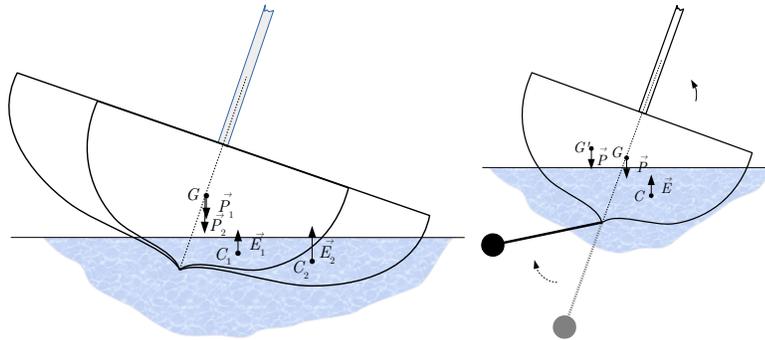


Figura 3.17: Aumentando a estabilidade de um barco com popa mais larga (esquerda) ou quilha basculante (direita).

aplicado a atmosfera de outros planetas, tem aplicações como a sedimentação, etc.

3.3.1 Fórmula barométrica

A equação de equilíbrio mecânico num campo uniforme de gravitação vertical é

$$\vec{\nabla}p = -\rho g \vec{k}. \quad (3.17)$$

Temos $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$, então

$$p = p(z) \quad (3.18)$$

e

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (3.19)$$

Com isto, como p só depende de z , ρ também

$$\rho = \rho(z). \quad (3.20)$$

Como p e ρ determinam univocamente todas as grandezas termodinâmicas, segue que

$$T = T(z) \quad (3.21)$$

isto é, numa atmosfera em equilíbrio mecânico (parado), todas as grandezas dependem somente da altitude. Por exemplo, se a temperatura varia no sentido horizontal, necessariamente há vento.

As considerações acima valem de maneira geral mas para integrar a eq. (3.19), precisamos dar alguma informação adicional sobre ρ , por exemplo a equação de estado. *Supomos que o ar é um gas ideal i.e. $p = R/mT \rho$ e estudamos vários casos.*

Substituindo ρ em função de p e T em (3.19), temos

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{R} \frac{dz}{T(z)}, \quad (3.22)$$

ou, integrando,

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mg}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T(z)}\right). \quad (3.23)$$

Esta equação é chamada *fórmula barométrica*. Vê-se que conhecida a temperatura como função da altitude z , podemos determinar $p = p(z)$.

3.3.2 Atmosfera padrão

Esta modelização foi introduzida na década de 1920 para servir como padrão ao fazer comparações por exemplo entre performances de aviões e seus equipamentos. Nesta modelização, a atmosfera terrestre é dividida em camadas dentro das quais o gradiente de T é constante. Assim

$$T = az + b \quad (3.24)$$

e pode-se integrar a eq. (3.23). Se $a \neq 0$ (se $a = 0$ ver próxima sub-seção),

$$p = p_i \left(\frac{az + b}{az_i + b}\right)^{-\frac{mg}{aR}}. \quad (3.25)$$

Devido ao expoente, esta variação da pressão com a altitude é diferente da lei de Stevin dentro de um fluido incompressível. De fato com a lei de gas ideal ρ varia como

$$\rho = \rho_i \left(\frac{az + b}{az_i + b}\right)^{-\frac{mg}{aR}-1}. \quad (3.26)$$

Aplicamos isto à camada mais perto da terra e indo até 11km, a troposfera. Usamos para a temperatura e a pressão em $z_i = 0m$: $b \equiv 15^\circ C$, $p_i = 1,013310^5 N/m^2$ bem como o gradiente $a = -6,5 K/km$. Com isto obtemos o primeiro segmento da figura 3.18. Outros trechos com $a \neq 0$ podem ser tratados da mesma maneira.

3.3. FLUIDO COMPRESSÍVEL SOB AÇÃO DA GRAVIDADE (CAMPO UNIFORME)6

3.3.3 Atmosfera isotérmica

Se $a = 0$,

$$T = \text{const.}, \quad (3.27)$$

podemos re-escrever a eq. (3.23):

$$p = p_i \exp\left[-\frac{mg}{RT}(z - z_i)\right]. \quad (3.28)$$

com $p(z_i) \equiv p_i$. p_i é ajustada para reproduzir a pressão numa certa altura z_i (cf. fig. 3.18). p decresce exponencialmente com a altitude z , o que é muito diferente da lei de Stevin..

Temos usando a lei de gas ideal

$$\rho = \rho_i \exp\left[-\frac{mg}{RT}(z - z_i)\right]. \quad (3.29)$$

Este tratamento pode ser usado para a cama da estratosfera de 11 a 20 km, o segundo segmento da fig. 3.18.

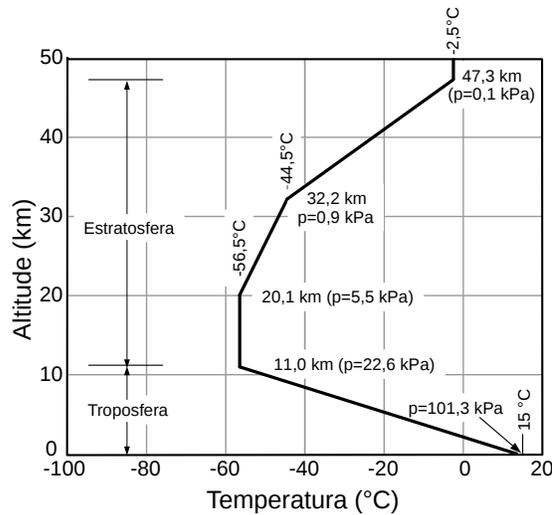


Figura 3.18: A atmosfera padrão internacional (ISA) fornece valores médios de temperatura e pressão para várias altitudes. É publicada pela International Standardization Organization (ISO).

3.3.4 Atmosfera adiabática

Na troposfera, podemos supor que o movimento de um volume de ar é adiabático (o ar não é um bom condutor de calor). Para um gas ideal, isto implica que $pV^\gamma = cste$ com $\gamma = C_P/C_V$ (cf. cap. I).

Com $p^{1/\gamma}V = p^{1/\gamma}/\rho = p_0^{1/\gamma}/\rho_0$ (p_0 e ρ_0 medidas em $z_0 = 0$ (p_0 e ρ_0 medidas em $z = 0$)), podemos escrever ρ em função de p e substituir em (3.19), obtemos:

$$\frac{dp}{p^{1/\gamma}} = d\frac{\gamma}{\gamma-1}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -g\rho_0 p_0^{-1/\gamma} dz \quad (3.30)$$

que pode ser integrado (é comum introduzir a altura H onde $p(H) = 0$):

$$p(z) = \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g\rho_0 H}{p_0^{1/\gamma}} \left(1 - \frac{z}{H}\right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.31)$$

e re-escrito

$$p = p_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (3.32)$$

pois $p(0) \equiv p_0$. Em consequência $H = \gamma/(\gamma-1) \times p_0/(g\rho_0)$. Como $p(H) = 0$, este modelo se aplica para $0 \leq z < H$ e p decresce com z .

Temos também

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.33)$$

e

$$T = T_0 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (3.34)$$

Vemos que a temperatura decresce linearmente com a altitude como na atmosfera padrão mas os expoentes de p e ρ são diferentes. Usando $T_0 = 15^\circ C$, $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 N/m^2$, $\rho_0 = 1,23 kg/m^3$, $\gamma = 7/5 = 1,40$, podemos calcular $H = 29,5 km$ e o gradiente $dT/dz = -T_0/H = -9,8 K/km \sim -10^\circ C/km$. Este gradiente é diferente daquele da atmosfera padrão onde $dT/dz \sim -6^\circ C/km$.

3.3.5 Condição de ausência de convecção

Um fluido pode estar em equilíbrio mecânico i.e. a equação (3.19) é satisfeita sem que este seja estável. Se parte do ar for em contacto com um corpo quente, esta parte aquece e se expande. Sendo menos denso que o ar mais

3.3. FLUIDO COMPRESSÍVEL SOB AÇÃO DA GRAVIDADE (CAMPO UNIFORME) 63

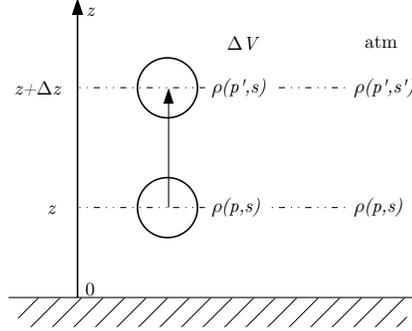


Figura 3.19: Movimento ascensional de ΔV .

frio vizinho, ela sobe. Pode-se derivar *uma condição para não haver este movimento de convecção*.

Consideremos um elemento ΔV do fluido situado a altura z (cf. fig. 3.19) onde a pressão, a entropia específica e a densidade de massa são respectivamente p , s e $\rho = \rho(p, s)$. A uma altura maior $z' = z + \Delta z$, a atmosfera tem pressão p' , entropia específica s' e densidade de massa $\rho' = \rho(p', s')$. Suponhamos que o elemento do fluido tente subir, ele sentirá uma pressão menor $p' < p$, mas a sua entropia permanecerá constante $= s$, pois não haverá tempo suficiente para trocar calor (movimento adiabático). O empuxo em $z + \Delta z$, $\rho(p', s')g\Delta V$ deve ser maior do que o peso de ΔV chegando neste ponto $\rho(p', s)g\Delta V$. Assim o movimento é possível somente se

$$\rho(p', s') > \rho(p', s) \text{ para } \Delta z > 0. \quad (3.35)$$

Em palavras: para que ΔV sobe até z' , ele precisa ter densidade de massa menor do que aquela do fluido em z' (uma condição bastante natural).

No caso contrário, o elemento ΔV sentirá uma força no sentido contrário que não permitirá o seu movimento. A *condição de estabilidade do equilíbrio* (que impede o movimento ascensional) é, então,

$$\rho(p', s') < \rho(p', s) \text{ para } \Delta z > 0. \quad (3.36)$$

Expandemos $\rho(p', s')$ em torno de $\rho(p', s)$:

$$\rho(p', s') = \rho(p', s) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_{p'} \frac{ds}{dz} \Delta z. \quad (3.37)$$

Substituindo em 3.36, vem

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_{p'} \frac{ds}{dz} < 0 . \quad (3.38)$$

Consideremos $\rho = \rho(T, p)$

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \frac{T}{c_p} \quad (3.39)$$

onde a última passagem segue da definição do *calor específico a pressão constante* c_p : $\delta Q = c_p dT = T ds$.

Portanto, a condição de ausência de convecção 3.36 se escreve

$$\frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_{p'} \frac{ds}{dz} < 0 \quad (3.40)$$

ou, como em geral $(\partial\rho/\partial T)_p < 0$ (um corpo expande ao aquecer-se),

$$\frac{ds}{dz} > 0. \quad (3.41)$$

Esta é a condição de estabilidade do equilíbrio mecânico. É interessante reescrever esta condição em termos de grandezas facilmente medidas. Consideremos $s = s(T, p)$ e usamos $\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V_e}{\partial T}\right)_p$ (cf. cap. I §5.3) e $\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T}$ (cf. acima)

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial V_e}{\partial T}\right)_p \frac{dp}{dz} > 0 . \quad (3.42)$$

ou, com $dp/dz = -g\rho$ e $V_e = 1/\rho$,

$$\frac{dT}{dz} > \frac{T}{c_p} \frac{g}{\rho} \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p . \quad (3.43)$$

Podemos fazer uma estimativa para a atmosfera, tratando-a como um gás perfeito,

$$\rho = \frac{m}{R} \frac{p}{T} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = -\frac{\rho}{T} \quad (3.44)$$

3.3. FLUIDO COMPRESSÍVEL SOB AÇÃO DA GRAVIDADE (CAMPO UNIFORME) 63

Portanto a condição de estabilidade se reduz, neste caso, a

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_p}. \quad (3.45)$$

A condição (3.45) limita o quão negativo pode ser o gradiente de T, i.e. o quanto T decresce com a altitude. Se ela for satisfeita, não há movimento de convecção.

Na atmosfera padrão sabemos que $dT/dz = -6^{\circ}C/km$. Por outro lado tratando o ar seco com um gás ideal $-g/c_p = -10^{\circ}C/km$ (onde usamos $c_p = (7/2)R/m$). Isto significa que para ar seco, não há convecção. Uma consequência é que poluintes por exemplo não podem se dispersar (uma condição comum no inverno seco paulistano).

Em contraste, o ar úmido tem calor específico maior do que o seco e pode não satisfazer (3.45) permitindo que haja convecção: a presença do ar úmido é essencial para o aparecimento de corrente ascendente de ar.

3.3.6 Separação de uma mistura por sedimentação:

Uma aplicação do que calculamos para a atmosfera é a separação de uma mistura de gases por sedimentação. Consideremos uma mistura de gases a *temperatura constante*. Por exemplo, dois gases 1 e 2 com massas moleculares m_1 e m_2 , respectivamente. Temos

$$\begin{cases} \rho(z) &= \rho_1(z) + \rho_2(z), \\ p(z) &= p_1(z) + p_2(z) \end{cases}, \quad (p_1, p_2 \text{ são pressões parciais}). \quad (3.46)$$

Temos, sob ação da gravidade e supondo $p_i = (R/m_i)\rho_i T$,

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dz} &= -\rho_1 g \longrightarrow p_1 = p_{10} \exp\left[-\frac{m_1 g}{RT}(z - z_0)\right], \\ \frac{dp_2}{dz} &= -\rho_2 g \longrightarrow p_2 = p_{20} \exp\left[-\frac{m_2 g}{RT}(z - z_0)\right]. \end{cases} \quad (3.47)$$

Portanto

$$\begin{cases} \rho_1 &= \rho_{10} \exp\left[-\frac{m_1 g}{RT}(z - z_0)\right], \\ \rho_2 &= \rho_{20} \exp\left[-\frac{m_2 g}{RT}(z - z_0)\right]. \end{cases} \quad (3.48)$$

Vê-se que a distribuição cai exponencialmente com m_i . Assim o gás com maior massa molecular se concentra na parte inferior, ao passo que o mais leve fica na parte superior, como realmente acontece, por exemplo, na atmosfera.

Uma aplicação tecnológica do que vimos é o uso de centrífugador (que aumenta artificialmente a “força gravitacional” ou melhor a força volumétrica) para separar dois gases de massas moleculares diferentes (por exemplo isótopos de urânio).

3.4 Fluido num campo gravitacional com simetria esférica

3.4.1 Equação de equilíbrio de uma estrêla

Consideremos uma grande massa fluida cuja coesão é devida à atração gravitacional. Suposemos a massa esfericamente simétrica. Tipicamente esta massa seria uma estrela. Para escrever a equação de equilíbrio hidrostático, consideremos uma massa infinitesimal $dm' = \rho dAdr$.

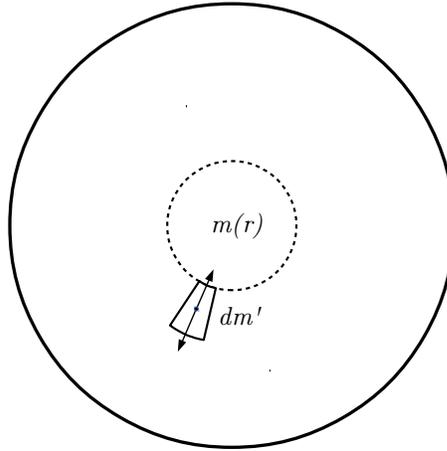


Figura 3.20: Equilíbrio de um volume infinitesimal de fluido dentro de uma estrela.

Ela está submetida a uma força gravitacional que a puxa para o centro devido à $m(r) = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$, massa contida até o raio r dentro da estrela⁷

⁷Ver por exemplo a ref. [3.1].

3.4. FLUIDO NUM CAMPO GRAVITACIONAL COM SIMETRIA ESFÉRICA 67

$$\vec{F}_G = -\frac{Gm(r)dm'}{r^2}\hat{r} \quad (3.49)$$

e isto é contrabalançado pela força líquida devida a pressão que aponta para fora (cf. fig. 3.20)

$$\vec{F}_P = -[p(r+dr) - p(r)]dA\hat{r} = -\frac{dp}{dr}drdA\hat{r} \quad (3.50)$$

(com $dp/dr < 0$) daí

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (3.51)$$

Esta equação generaliza (3.19).

Podemos multiplicar por r^2/ρ a equação anterior, a derivar e usar (cf. a expressão para $m(r)$)

$$dm/dr = \rho 4\pi r^2 \quad (3.52)$$

para obter

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (3.53)$$

Com isto, nos nos livramos de m e temos só ρ .

3.4.2 Exemplos

Estrela de densidade de massa constante

Para obter o comportamento da temperatura, densidade de massa, pressão numa estrela, temos que resolver as eq. (3.52) e (3.53) junto com equações para levar em conta o transporte de energia e a produção de energia. Porém para ter ordens de grandeza, podemos simplificar e considerar uma estrela de densidade de massa constante ρ_0 . Neste caso a integração das eq. (3.52) e (3.53) dá a massa total

$$M = \frac{4\pi}{3} R_s^3 \rho_0 \quad (3.54)$$

e a pressão diminuindo com o raio

$$p(r) = \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 (R_s^2 - r^2) \quad (3.55)$$

onde R_s é o raio da estrela i.e. até a superfície onde a pressão cai para zero.

Exemplo (3.6)

Fazer uma estimativa da temperatura central do sol supondo que ele tem densidade de massa constante e é só constituído de hidrogênio.

Solução: A equação de estado para gas ideal fornece

$$p_c = \frac{R}{m_H} \rho_0 T_c \quad (3.56)$$

A pressão no centro pode ser re-escrita como

$$p_c = p(r = 0) = \frac{GM}{2R_s} \rho_0. \quad (3.57)$$

Combinando temos

$$T_c = \frac{GM}{2R_s} \frac{m_H}{R} \quad (3.58)$$

Usando $M \sim 2 \cdot 10^{30} kg$ e $R_s \sim 10^9 m$ bem como $m_H \sim 10^{-3} kg/mol$ temos $T_c \sim 10^7 K$. O valor estimado com tratamento mais preciso é $1,57 \cdot 10^7 K$. Apesar do modelo que usamos ser muito rudimentário (em realidade o hidrogênio é ionizado, portanto tem eletrons, há também hélio ionizado e mais eletrons, a densidade de massa não é constante, etc), ele captura a física importante, i.e. a pressão de um gas ideal que se opõe a gravidade.

Exemplo (3.7)

Na estimativa anterior, foi suposto que toda a pressão vinha do hidrogênio e que este se comportava como um gas ideal onde a pressão vem das colisões entre partículas. Porém deve haver também pressão de radiação, devida à colisões entre fótons e matéria. Mostrar que esta última pode ser desprezada no centro do sol.

Solução: $p_{rad} = aT_c^4/3$ com a constante de radiação $a = 4\sigma_{Stefan-Boltzmann}/c$ e $p_H = \frac{R}{m_H} \rho_0 T_c$ assim $p_{rad}/p_H = m_H a / (3R) \times T_c^3 / \rho_0 < 1$.

Estrela anã branca e estrela de neutrons

As estrelas como o sol se mantem brilhando devido à fusões nucleares (hidrogênio transformado em hélio, este eventualmente em carbono etc). Quando isto não é mais possível, elas acabam se transformando em estrela anã branca, estrela de neutrons ou buraco negro, dependendo da sua massa. Anãs brancas e estrelas de neutrons são objetos fascinantes: sua temperatura é baixa (não há mais fusão nuclear) e nelas, a pressão que consegue se opor à gravidade não é nem pressão de radiação nem de um gas ideal usual como no sol. Estas estrelas são muito densas e é um fenomeno quântico que se torna importante: as anãs brancas contem um gas de electrons e as estrelas de neutrons um gas de neutrons. Eletrons e neutrons são fermions. Numa estrela densa, eles ficam muito perto um do outro mas o princípio de Pauli impede que eles estajam no mesmo estado quântico, em particular de mais baixa energia. Isto lhes força a ter uma certa quantidade de momento e causa uma pressão, chamada de pressão de Fermi ou de degenerescência. É esta pressão que se opõe a gravidade.

Uma anã branca é o que nosso sol se tornará quando ele terá consumido todo seu “combustível” nuclear. Sirius, a estrela mais brilhante do céu noturno, é de fato um sistema binário com uma estrela de duas vezes a massa do sol, Sirius A, e uma companheira pequeninha⁸, Sirius B, que é uma anã branca. Tipicamente uma anã branca tem massa do ordem da do sol, $2 \cdot 10^{30} kg$ mas raio comparável ao da terra, 6000 km. Por tanto sua densidade de massa é muito maior do que a da terra e da ordem de alguns $10^9 kgm^{-3}$.

Estrelas de neutrons são mais densas ainda, tendo massa de 1,4 a 3 massas solares com raio de 10 km, i.e. densidade de massa de alguns $10^{17} kgm^{-3}$. Sua existência foi postulada por L.Landau, provavelmente antes mesmo da descoberta do neutron por J.Chadwick em 1932 [3.4]. Elas podem estar em rotação rápida e emitir radiação eletromagnética colimatada num feixe, como um farol marítimo, sendo então chamadas de pulsares. Assim a primeira evidência observacional de que existem estrelas de neutrons foi a descoberta dos pulsares por Jocelyn Bell Burnell⁹ em 1967. O primeiro pulsar relacionado a uma supernova foi descoberto em 1968 na nebulosa do Caranguejo. Esta nebulosa é a sobra de uma supernova muito conhecida pois sua luz ficou

⁸A existência desta companheira foi sugerida por Bessel -aquele das funções- após analisar dados astronômicos de Sirius em 1844 e descoberta em 1862 por A.Clark.

⁹Seu orientador A.Hewish foi agraciado por um prêmio Nobel por isto e não ela, gerando uma certa controversa.

visível até mesmo de dia em 1054 seguindo escritos chineses.

Para prever massa e raio de uma anã branca estrela, as equações (3.52) e (3.53) devem ser resolvidas usando uma equação de estado que é complexa [3.5] e supondo alguma condição inicial (densidade central). Porém de novo, para obter ordens de grandeza podemos supor a estrela composta só de um gas de Fermi de elétrons com equação de estado $p_{deg} \propto \rho^{5/3}$ para gas não-relativístico ($v < c$) e $p_{deg} \propto \rho^{4/3}$ para gas relativístico ($v \sim c$).

Para equações de estado deste tipo, as equações (3.52) e (3.53) podem ser resolvidas analiticamente ou semi-analiticamente (ver por exemplo exercício 22 e §3.3 em [3.5]). No caso $p_{deg} \propto \rho^{5/3}$, a massa da anã branca e seu raio satisfazem $M R^3 = \text{constante}$. Isto significa que o mais massiva a estrela, o menor seu raio e o maior sua densidade de massa. A medida que a densidade aumenta, o gas fica mais relativístico e a equação de estado fica do tipo $p_{deg} \propto \rho^{4/3}$. Neste caso, a massa da estrela é independente do raio e tem um valor limite chamada de massa de Chandrasekhar, da ordem de 1,4 massa solar. Não pode existe anãs brancas maior do que isto.

Para estrelas de neutrons, devido à seus pequenos raios e grandes massas, a versão vindo da relatividade geral da eq. (3.53) tem que ser usada. O leitor curioso pode achar mais detalhes a um nível de (pós) graduação em [3.6]. Estas estrelas viraram manchetes de jornais em 2017 com a primeira detecção de ondas gravitacionais em conjunto com ondas eletromagnéticas vindo de un sistema binário de estrelas de neutrons fusionando. Dois anos antes, ondas gravitacionais tinham sido detectadas pela primeira vez (de maneira direta) oriundo da fusão de dois buracos negros. Weiss, Barish e Thorne receberam o prêmio Nobel de 2017 por esta descoberta.

3.4. FLUIDO NUM CAMPO GRAVITACIONAL COM SIMETRIA ESFÉRICA 71

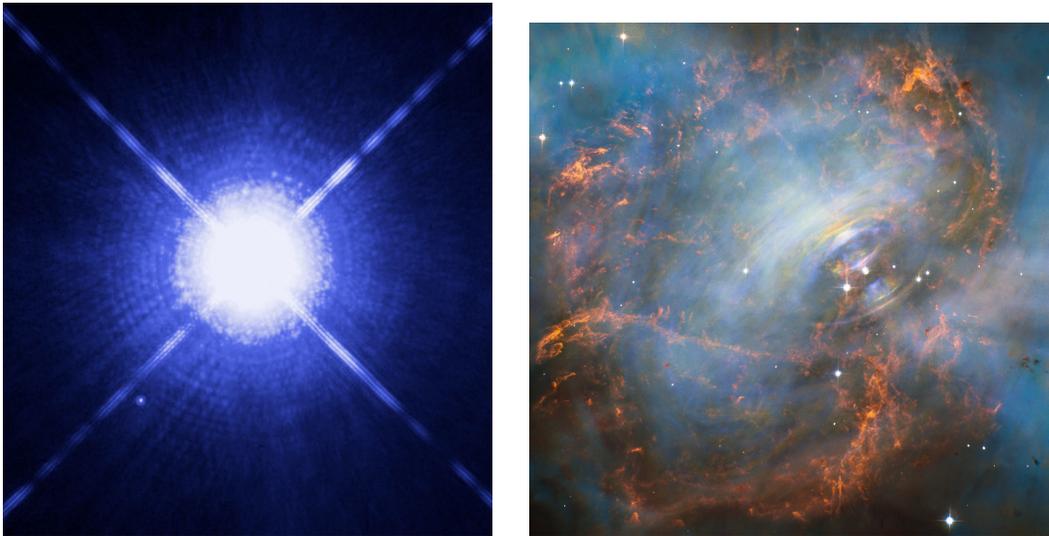
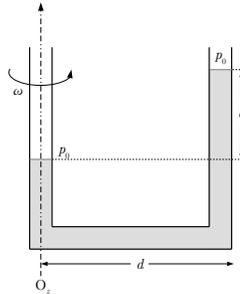


Figura 3.21: Esquerda: Imagem obtida em 2003 com o Hubble telescope mostrando Sirius A e sua pequeninha companheira, a anã branca Sirius B (pontinho embaixo a esquerda). Crédito: NASA, ESA, H. Bond (STScI), and M. Barstow (University of Leicester) no link www.spacetelescope.org/images/heic0516a/ . Direita: Imagem obtida em 2016 com o Hubble telescope mostrando o centro da nebulosa do Caranguejo e seu pulsar (a mais a direita do grupo de duas estrelas mais brilhantes no centro da imagem) Crédito: NASA, ESA, J. Hester (ASU), M. Weisskopf (NASA / MSFC) no link [/www.spacetelescope.org/images/heic1614a/](http://www.spacetelescope.org/images/heic1614a/)

3.5 Exercícios

1. Um tubo em U contendo líquido é colocado em rotação em torno de um de seus ramos com velocidade angular $\omega = 10 \text{ rad/s}$. A distância d entre os dois ramos é 30 cm. A pressão aplicada é a mesma nos dois ramos. Qual é a diferença de altura h entre os dois ramos?

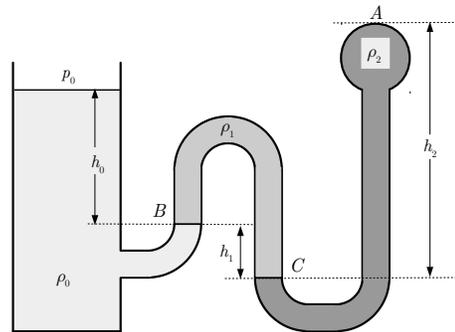


2. Suponha que um tanque de base $l \times L$ com $l < L$ cheio até a altura h e o líquido que ele contém tenham aceleração linear constante $\vec{a} = a\hat{x}$ com $a > 0$. O campo gravitacional é dado por $\vec{g} = -g\hat{z}$. Calcular a equação da superfície livre. Para evitar que o líquido transborde, é melhor colocar o lado l ou o lado L paralelo à direção do movimento?

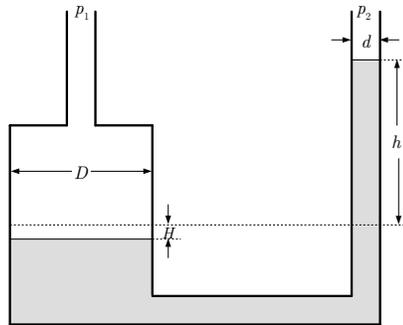
3. a) Um tambor de raio a contendo um gás de massa molar m e temperatura T é posto em movimento de rotação em torno do seu eixo vertical com velocidade angular ω constante. Após um certo intervalo de tempo, todo o gás no interior também estará em movimento com a mesma velocidade angular. Calcular $p(z, r)$.

b) Substituir o gás pelo ar (21% de O_2 e 79% de N_2 a 300 K) e usar $a = 1 \text{ m}$ e $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$. Qual é a diferença de pressão entre o eixo de rotação e a borda em $r = a$? (verificar que os termos em z são desprezíveis).

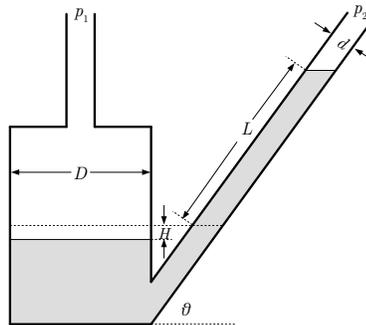
4. No sistema da figura, determine a pressão p_A no ponto A em função das quantidades mostradas.



5. a) No manômetro de reservatório da figura, calcule a diferença de pressão $p_1 - p_2$ entre dois ramos em função da densidade ρ do fluido, dos diâmetros d e D , e da altura h de elevação do fluido no tubo, relativamente ao nível de equilíbrio (linha tracejada) que o fluido ocupa quando $p_1 = p_2$. (Não usar H).



b) Mesma pergunta para o manômetro de tubo inclinado da figura.



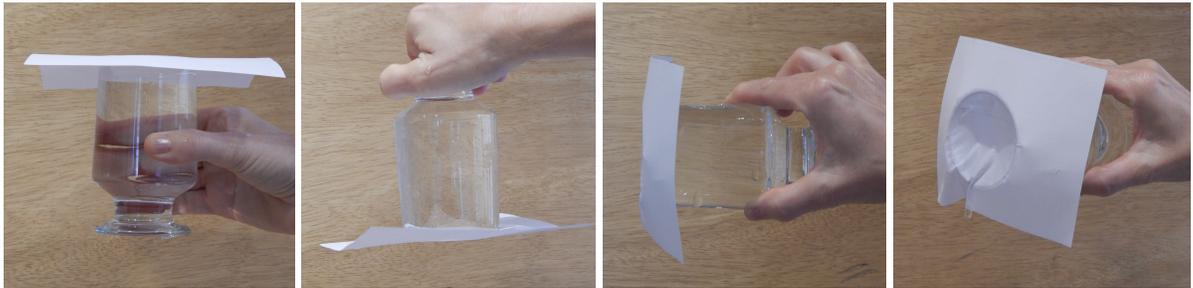
Este tipo de manômetro é utilizado para medir pequenas diferenças de pressão. Para uma dada diferença de pressão, como pode-se aumentar o comprimento

L que é justamente o que é lido?

6. Calcular h_1 e h_2 da prensa hidráulica da figura, supondo que há uma massa $m_1 = 0,75kg$ no pistão 1 da esquerda, uma massa desprezível no pistão 1 da direita, os raios dos tubos verticais são $r_1 = 5cm$, $r_2 = 10cm$ e a altura de equilíbrio $h_0 = 20cm$.



7. Uma experiência famosa é a seguinte. Um copo de água é enchido até a borda e uma tampa de cartolina colocada encima. Em seguida o copo é invertido mantendo a tampa com uma mão. Finalmente retira-se a mão da tampa. A tampa fica no seu lugar e a água não cai. Porquê? Verificar que a água também não cai se o copo é girado de 90° .



8. O mergulhador cartesiano, ou ludião, é um aparato simples frequentemente apresentado em demonstrações de ciências. O ludião, na sua versão mais despojada, é um cilindro fechado numa extremidade (pode ser uma caneta bic com cola numa extremidade para tampá-la) e com um peso para servir de lastro na extremidade aberta (por exemplo uma aruela). Ele é inserido numa garrafa pet cheia de água, ajustando a quantidade de ar nele para que ele flutue perto da superfície. A garrafa é fechada com sua tampa. Ao se apertar a garrafa, observa-se que o ludião desce. Porquê?



9. Suponha que Arquimedes tivesse verificado que colocando a coroa do rei Herão dentro de uma banheira cheia de água até a borda 0,5 l transbordavam e uma força de 49 N era necessária para suspender a coroa dentro da água. Sabendo que a densidade de ouro é $19,3 \text{ g/cm}^3$ e da prata $10,5 \text{ g/cm}^3$, que conclusão Arquimedes teria tirado?

10. a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água em torno de 0°C . Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera?

b) Se tivermos água salgada e cubo de gelo de água salgada, muda a resposta?

c) Se tivermos Se tivermos água salgada e cubo de gelo de água normal, muda a resposta? Fazer uma conta quantitativa supondo para a água salgada $\rho_{as} = 1,05 \text{ g/cm}^3$.

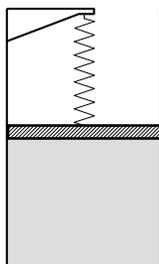
d) Porquê o derretimento do gelo da Antártica ou Groenlândia é um problema?

11. Este problema é um clássico e existe em várias versões. Um barquinho flutua numa piscina, dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível de água da piscina sobe, desce ou não se altera?

12. Podemos estimar a estabilidade de uma embarcação fazendo-a balançar.

Se ela oscilar rapidamente, é sinal que ela é muito estável?

13. Um gás está contido em um dispositivo vertical pistão-cilindro (sem atrito). O pistão tem massa $m_P = 5 \text{ kg}$ e uma seção transversal de 10 cm^2 . Uma mola comprimida acima do pistão exerce uma força de 50 N sobre ele. Determina a pressão dentro do cilindro.



14. Um copo de 13 cm altura é abaixado na água, a partir da superfície, até que seu fundo fique a 20 cm de profundidade. Qual é a altura h de ar dentro do copo? Faça a experiência para checar a ordem de grandeza do seu resultado.
15. Um recipiente fechado de altura h e seção quadrada A contém ar à pressão atmosférica. Ele flutua verticalmente, com uma altura k dentro da água (i.e. $h - k$ fora). Ferrugem provoca a aparição de um pequeno furo na base imersa e água penetra lentamente. Mostre que o recipiente flutua em equilíbrio quando a água nele atinge a altura $hk/(H + k)$ onde H é a altura de água num barômetro de água.
16. O oxigênio é um gás perigoso quando ele é respirado em pressão (parcial) elevada demais (hiperoxia) ou baixa demais (hipóxia). O objetivo deste exercício é estudar os limites que um mergulhador ou um alpinista nunca deveriam ultrapassar.

O ar é aproximadamente composto de 80% de nitrogênio e 20% de oxigênio. A pressão parcial de um gás é a pressão que o gás teria se ele ocupasse sozinho o volume da mistura (lei de Dalton). Assim a pressão parcial do oxigênio no ar é $pp_{O_2} = p \times \% O_2$, por exemplo no nível do mar (usando o bar como unidade de pressão $p_0 \sim 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$): $pp_{O_2} \sim 1 \times 0,2 = 0,2 \text{ bar}$.

Os livros de medicina indicam:

$pp_{O_2} > 1,6 \text{ bar} \rightarrow$ risco de hiperoxia

$pp_{O_2} < 0,1 \text{ bar} \rightarrow$ risco de hipóxia.

a) Caso do mergulhador com garrafa de ar comprimido:

O mergulhador usa um aparelho chamado regulador que abaixa a pressão do ar comprimido da garrafa até a pressão ambiente. Assim o mergulhador respira ar à pressão ambiente (a qual aumenta com a profundidade). Calcular a profundidade máxima até a qual o mergulhador pode descer sem risco de hiperoxia. A água será considerada incompressível.

b) Caso do alpinista:

Mostrar que $p(z) = p_{atm}[1 - (z/H)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ com $H = \gamma/(\gamma - 1) \times p_{atm}/(g\rho_{atm})$ na atmosfera adiabática. Calcular a altitude máxima que o alpinista pode alcançar sem risco de hipóxia.

17. Devido a variação de temperatura, pressão e salinidade, a densidade ρ da água do mar aumenta com a profundidade segundo a lei $\rho = \rho_0 + c h$ onde ρ_0 é a densidade na superfície e c uma constante positiva e h a profundidade. Calcule a pressão a uma profundidade h .

18. Calcular a temperatura em função da altitude para uma atmosfera de densidade de massa constante. Esta atmosfera é estável?

19. Um balão atmosférico é tal que, se for inflado a um raio r_{max} , ele explode. Ele é inflado a um raio $r (< r_{max})$ com um gás mais leve que o ar e é solto. Supor a atmosfera isotérmica.

a) Mostre que, se o balão subir devagar até ele se estourar, a altitude máxima atingida será dada por $\sim 3[RT/(mg)]Ln(r_{max}/r)$.

b) Se o balão sobe rapidamente, qual deve ser a altitude atingida pelo balão antes de estourar?

20. a) Obtenha uma expressão para a pressão no centro de uma estrela esférica de raio R_s cuja densidade a distância r do centro é $\rho = \rho_c(1 - \beta r^2)$. Comparar com a solução para uma estrela de densidade uniforme ρ_c .

b) Calcular a massa total.

Comparar com a solução para uma estrela de densidade uniforme ρ_c .

21. Anã branca politrópica:

Supomos que a equação de estado é do tipo $p = K\rho^\gamma$ e o índice politrópico n é definido por $\gamma = 1 + 1/n$. Introduzemos as variáveis adimensionadas θ e ξ definidas por: $\rho = \rho_c\theta^n$ e $r = \alpha\xi$ onde ρ_c é a densidade central e

$$\alpha = \sqrt{(n+1)K/(4\pi G\rho_c^{(n-1)/n})}.$$

a) Mostrar que a eq. (3.53) se re-escreve (equação de Lane-Emden)

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n$$

e as condições de contorno são $\theta(\xi = 0) = 1$ e $d\theta/d\xi(\xi = 0) = 0$.

b) Para $n < 5$, θ decresce. Chamamos ξ_1 o primeiro zero. Calcular R e M .

c) A equação de Lane-Emden tem solução analítica para alguns valores de n , em particular $n = 1$. Verificar neste caso que $\theta(\xi) = \text{sen}(\xi)/\xi$ é solução e dar o valor de ξ_1 . Calcular R e M . Calcular ρ_c e K usando o fato que Sirius B tem massa $\sim M_\odot$ e raio $\sim R_\oplus$.

d) Verificar sua resposta calculando a solução de (3.53) e (3.52) numericamente.

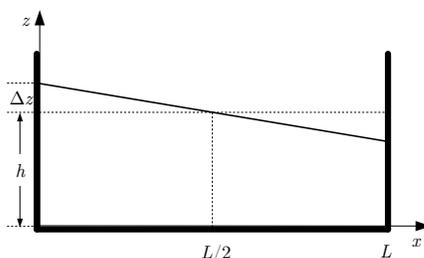
Bibliografía

- [3.1] H.M.Nussenzveig ,“Física básica” vol.1, Ed. Blücher, 3a ed. (1996).
- [3.2] M.B. Partensky, The Physics Teacher 40 (2002) 106.
- [3.3] F. M. White, “Fluids” McGraw-Hill, 4a. ed. (1999).
- [3.4] D.G.Yakovlev, P.Haensel, G.Baym, C.J.Pethick “Lev Landau and the conception of neutron stars” Physics Uspekhi 56 (2013) 289, arXiv:2012.0682
- [3.5] S.L.Shapiro & S.A.Teukolsky “Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars” Wiley & Sons (1983).
- [3.6] A.Reisenegger& F.S.Zepeda “Order-of-magnitude physics of neutron stars” European Physical Journal A 52 (2016), arXiv:1511.08813

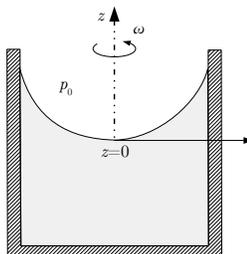
3.6 Respostas

1. $0 = -\vec{\nabla}p/\rho + \vec{g} + r\omega^2\hat{r} \Rightarrow p(z, r) = -\rho gz + \rho\omega^2 r^2/2 + cste$ $p(H, 0) = p(H + h, d) = p_0 \Rightarrow h = \omega^2 d^2/(2g) = 46 \text{ cm}$.

2. Supomos o lado L paralelo a Ox . $0 = -\vec{\nabla}p/\rho + \vec{g} - \vec{a} \Rightarrow p(z, x) = -\rho gz - \rho ax + cst$. Para calcular cst , observar que $p(h, L/2) = p_0$ de modo que $p(z, x) = -\rho g(z - h) - \rho a(x - L/2) + p_0$. A superfície livre é dada por $z = -(a/g)(x - L/2) + h$. Para ter Δz menor, colocar o lado de comprimento l paralelo a Ox .



3. a) $0 = -\vec{\nabla}p/\rho + \vec{g} + r\omega^2\hat{r} \Rightarrow p(z, r) = p_0 \exp[-mgz/(RT) + m r^2 \omega^2/(2RT)]$.
b) $\Delta p \sim (0, 21 m_{O_2} + 0, 79 m_{N_2}) p_0 a^2 \omega^2/(2RT) \sim 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$.



4. $p_C = p_A + \rho_2 g h_2 = p_B + \rho g h_1 = (p_0 + \rho_0 g h_0) + \rho g h_1 \Rightarrow p_A = p_0 + \rho_0 g h_0 + \rho_1 g h_1 - \rho_2 g h_2$

5. a) $p_1 - p_2 = \rho g (H + h)$ com $d^2 h = D^2 H \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g h (1 + d^2/D^2)$.

b) $p_1 - p_2 = \rho g (H + L \sin \theta)$ com $d^2 L = D^2 H \Rightarrow p_1 - p_2 = \rho g L (\sin \theta + d^2/D^2)$.
Diminuir θ ou d^2/D^2 .

6. Temos $p_0 + \rho g h_1 + m_1 g/(\pi r_1^2) = p_0 + \rho g h_2$ e $(h_0 - h_1)r_1^2 = (h_2 - h_0)r_2^2$. Resolvendo para h_1 e h_2 e inserindo os valores do enunciado, temos $h_1 = 0,124 \text{ m}$ e $h_2 = 0,219 \text{ m}$.

7. Na posição vertical, não se pode dizer simplesmente que o peso da água sobre a tampa de cartolina ($\rho g h A \sim 10^3 A$ com A área) é equilibrada pela

força devida à pressão atmosférica ($\sim 10^5 A$). Tem um fator 100 de diferença. Para entender o que acontece, é mais fácil fazer a análise na posição “girada de 90° ” e considerar o que acontece na horizontal: a força devida à pressão atmosférica atua sobre a cartolina para a direita e sobre o fundo do copo para a esquerda. É uma compressão.

8. Ao apertar a garrafa, o aumento de pressão se transmite em todo o líquido da garrafa (princípio de Pascal). A água sobe no ludião e sua bolha de ar fica comprimida. O volume de água deslocada pelo ludião com bolha diminui então o empuxo também (princípio de Arquimedes). Com isto o peso do ludião com bolha lhe puxa para baixo.

9. Escrevendo “empuxo+força=peso” temos $\rho = 49/(0.5g) + 1 = 11g/cm^3$ de modo que $\rho_{silver} < \rho \ll \rho_{ouro}$.

10. a) Escrevendo “empuxo=peso” temos $\rho_{agua}vg = \rho_{gelo}Vg$ com v volume imerso do cubo e V volume total do cubo. O peso do gelo não muda quando derrete, ele fica com densidade ρ_{agua} e então volume v . Assim o nível de líquido no copo não muda.

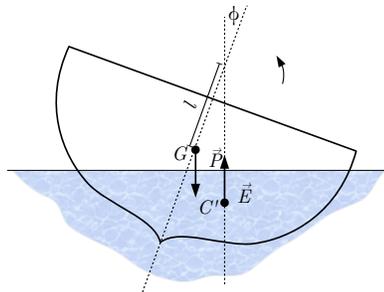
b) Cf. a).

c) $\rho_{agua\ salgada}v' = \rho_{gelo}V = \rho_{agua}v$. Como $\rho_{agua\ salgada} > \rho_{agua}$, $v' < v$ e o nível de líquido no copo sobe. O efeito é pequeno $(v - v')/v = 5\%$.

d) É gelo terrestre (não flutuante). Ao derreter enche mais os oceanos.

11. Não vou estragar seu prazer e dar a resposta.

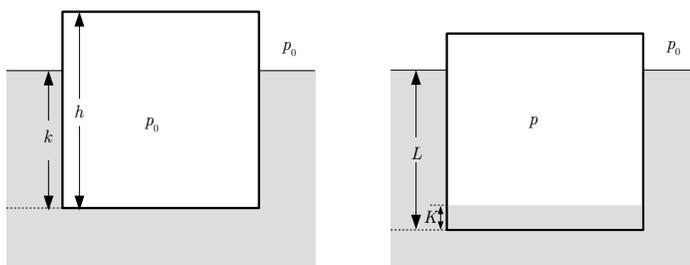
12. Supomos pequeno ϕ , o ângulo de inclinação em relação à vertical. Chamamos I o momento de inercia. O torque é: $-I d^2\phi/dt^2 \sim l\phi P$ (o centro de oscilação fica verticalmente acima do centro de carena). O barco tem um movimento de oscilação com a frequência angular $\omega = \sqrt{lP/I}$. Se o barco oscila mais rapidamente (é desconfortável) mas ele é mais estável (torque maior).



13. $p = p_0 + 5 \times g/(10 \times 10^{-4}) + 50/(10 \times 10^{-4}) \sim 2p_0$

14. $p = p_0 + \rho_{\text{ág}}g(h + 0, 2)$ e $p = p_0 0, 13/h$. Combinando e resolvendo uma equação de segundo grau: $h \sim 12, 6 \text{ cm}$. A água sobe pouco.

15. Inicialmente “peso=empuxo” fornece $mg = \rho g k A$ com m peso do recipiente. Quando a água tem penetrado, a pressão dentro satisfaz $p = p_0 V_0/V = p_0 h/(h - K) = p_0 + \rho g(L - K)$ e “peso=empuxo” fornece $mg = \rho g A(L - K)$. Podemos substituir mg por sua expressão obtida inicialmente de modo que $L - K = k$. Assim $p = p_0 h/(h - K) = p_0 + \rho g k$. Usando $p_0 = \rho g H$ obtemos $K = hk/(H + k)$.



16. a) $p p O_2 = (p_0 + \rho g h_{\text{max}}) 0, 2 = 1, 6 10^5 \text{ N/m} \Rightarrow h_{\text{max}} \sim 70 \text{ m}$.

b) Cf. §3.3.4. $p p O_2 = p \times 0, 2 = 0, 1 10^5 \text{ N/m}^2 \Rightarrow p = 0, 5 10^5 \text{ N/m}^2 = p_{\text{atm}} [1 - (z_{\text{max}}/H)]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ com $p_{\text{atm}} = 1, 013 10^5 \text{ N/m}^2$, $\rho_{\text{atm}} = 1, 23 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 1, 4$. Temos então $H = 29, 5 \text{ km}$ e $z_{\text{max}} = 5400 \text{ m}$.

17. Supondo z nulo na superfície, $h = -z$. Integrando $dp/dz = -g\rho$, temos $p(z) = p_0 + g\rho_0 h + gc/2h^2$, i.e. tem um termo novo em relação à lei de Stevin.

18. Temos $dp/dz = -g\rho_0$. Usando $p = (R/m)T\rho_0$, temos $dT/dz = -gm/R$ e $T = T_0 - (gm/R)z$. Usando $m = 28, 96 \text{ g/mol}$, $dT/dz \sim -34 \text{ K/km}$. Por outro lado, para ar seco $c_P = 7/2 R/m$ e $-g/c_P = -10 \text{ K/km}$. A condição de estabilidade não é satisfeita.

19. a) Inicialmente, a temperatura no balão é a da atmosfera, T_0 . Se o balão sobe rápido, a temperatura dentro não muda e a pressão dentro satisfaz $pV = cst$ de modo que quando o balão estoura $p = p_0 (r/r_{\text{max}})^3$.

Na atmosfera isotérmica, a pressão diminui como $p = p_0 \exp[-mg/(RT)z]$ e o volume do balão aumenta. Igualando as expressões para a pressão (desprezando tensão de superfície), temos $z_{\text{max}} = [RT/(mg)] 3 \text{Ln}(r_{\text{max}}/r)$.

b) Se o balão sobe devagar, podemos supor que sua pressão se ajusta adiabaticamente $pV^\gamma = cst$ de modo que quando o balão estoura $p = p_0 (r/r_{\text{max}})^{3\gamma}$. Na atmosfera isotérmica, isto ocorre para $z_{\text{max}} = [RT/(mg)] 3\gamma \text{Ln}(r_{\text{max}}/r)$.

20. a) Integramos uma primeira vez a eq. (3.53) com $\rho(r) = \rho_c(1 - \beta r^2)$, obtemos $dp/dr = -4\pi G\rho_c^2(r/3 - 8/15 \beta r^3 + \beta^2/5r^5)$ (usamos $dp/dr(r =$

0) = 0 pois p é máxima em $r=0$). Integramos outra vez, obtemos $p = 4\pi G\rho_c^2[(R_s^2-r^2)/6-2/15\beta(R_s^4-r^4)+\beta^2/30(R_s^6-r^6)]$ (usamos $p(r = R_s) = 0$). Fazendo $\beta = 0$ re-encontramos a pressão da estrela de densidade de massa constante da §3.4.2.

b) Integramos (3.52) com $\rho(r) = \rho_c(1 - \beta r^2)$, obtemos $M \equiv m(r = R_s) = 4\pi\rho_c(R_s^3/3 - \beta R_s^5/5)$. Fazendo $\beta = 0$ re-encontramos a massa da estrela de densidade de massa constante da §3.4.2.

21. a) Basta substituir com cuidado para obter a eq. de Lane-Emden. $\rho(r = 0) = \rho_c\theta(0)^n = \rho_c \Rightarrow \theta(0) = 1$. ρ e p são máxima no centro e decrescem com r de modo que $d\theta/d\xi(\xi = 0) = 0$

b) $R = \alpha\xi_1$. $M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr = 4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi = -4\pi\alpha^3\rho_c \int_0^{\xi_1} (d/d\xi)(\xi^2 d\theta/d\xi) d\xi = -4\pi\alpha^3\rho_c \xi_1^2 d\theta/d\xi(\xi_1)$ (onde foi usada a eq. Lane-Emden para obter a penúltima expressão).

c) Basta substituir a expressão dada para θ . $\xi_1 = \pi$. $R = \sqrt{K\pi/(2G)}$ e $M = \sqrt{2\pi}(K/G)^{3/2}\rho_c$. $K \sim 10^3 kg^{-1}m^5s^{-2}$ e $\rho_c \sim 10^{10} kg/m^3$.

d) Pode-se integrar numericamente (3.52) e (3.53) com as condições iniciais $m(0) = 0$ e $\rho(0) = \rho_c$. Pára-se a integração para um raio R (que é o raio da estrela) tal que $\rho(R) \sim 0$.

Capítulo 4

ESCOAMENTOS ESTACIONÁRIOS

Neste capítulo consideramos um fluido em movimento estacionário. Como já definido na §2.1.2, neste caso $\vec{v}(t, x, y, z) = \vec{v}(x, y, z)$. O fluido passa por um ponto dado sempre com a mesma velocidade, mas esta velocidade pode variar de ponto para ponto. O escoamento de água a baixa velocidade numa canalização ligada a um grande reservatório é, com boa aproximação, estacionário. As grandezas termodinâmicas também permanecem constantes no tempo. Por exemplo, $\rho(t, x, y, z) = \rho(x, y, z)$, $s(t, x, y, z) = s(x, y, z)$, ... Lembramos também que no caso estacionário, linhas de corrente e trajetórias coincidem.

4.1 Equações fundamentais para escoamento estacionário

4.1.1 Equação de Continuidade da massa

Temos $\partial\rho/\partial t = 0$ e, portanto, a equação de continuidade da massa (2.15) se reduz a

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (4.1)$$

O mesmo tipo de raciocínio do que na §2.2.2 leva a

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (4.2)$$

$\rho A v$ é a massa atravessando uma seção transversal de tubo qualquer por unidade tempo. **A equação de continuidade da massa para o escoamento estacionário é uma equação de constância para $\rho A v$** , fluxo de massa por unidade de tempo através da seção transversal do tubo.

Para um fluido compressível, se a área do tubo for mantida constante, a densidade varia com o inverso da velocidade. Este resultado pode ser aplicado ao escoamento estacionário de carros na estrada: em regiões onde a velocidade diminui (por exemplo perto de um radar), a densidade de carros tende a aumentar.

4.1.2 Conservação da entropia

Para um fluido perfeito, vimos que ρs obedece uma equação de continuidade (2.45). Como temos $\partial \rho s / \partial t = 0$, a equação de continuidade da entropia (2.45) se reduz a

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho s \vec{v}) = 0. \quad (4.3)$$

De novo, o mesmo tipo de raciocínio do que na §2.2.2 leva a

$$\rho_1 s_1 A_1 v_1 = \rho_2 s_2 A_2 v_2 \quad (4.4)$$

$\rho s A v$ é a entropia atravessando uma seção transversal de tubo por unidade tempo. **A equação de continuidade da entropia para o escoamento estacionário é uma equação de constância para $\rho s A v$** , fluxo de entropia por unidade de tempo através da seção transversal do tubo.

Podemos também estudar diretamente a entropia (específica) s , partindo da equação de conservação (2.43). Nesse caso, como $\partial s / \partial t = 0$, temos

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0. \quad (4.5)$$

De modo geral, **quando temos $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = 0$ para escoamento estacionário**, podemos escolher um vetor $d\vec{l}$ tangente à linha de corrente num ponto, ele é paralelo a \vec{v} neste ponto. Podemos também decompor $\vec{\nabla} f$ em $(\partial f / \partial l) \hat{l}$ mais termos ortogonais. Assim $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = v \partial f / \partial l$, o que implica $\partial f / \partial l = 0$ i.e. **f não muda ao longo da linha de corrente (e no tempo).**

Chamamos filete um tubo de corrente de seção transversal tão pequena que as grandezas tais como p, ρ, s, v sejam constantes sobre ela. **Assim concluímos que a entropia específica é constante ao longo de um filete.**

4.1.3 Equação de movimento

Caso particular de um fluido incompressível

Consideremos agora a equação de Euler. Como $\partial \vec{v} / \partial t = 0$, ela se reduz a

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g}. \quad (4.6)$$

Usando a identidade

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2, \quad (4.7)$$

podemos re-escrever o primeiro membro da equação (4.6). Escrevemos também $\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$. Temos

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{\nabla}(gz). \quad (4.8)$$

Multiplicando cada termo desta equação por \vec{v} , segue

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0. \quad (4.9)$$

Obtemos então a equação de Bernoulli para o caso incompressível:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cste \text{ sobre um filete.} \quad (4.10)$$

Exemplo (4.1)

Consideramos um pedaço de tubo de corrente delimitado pelas tampas A_1 e A_2 conforme mostrado na figura. Após um certo tempo, o pedaço de fluido mudou de posição: a tampa A_1 se desloca de Δx_1 e a tampa A_2 de Δx_2 . Como derivar a equação de Bernoulli a partir da conservação de energia?

Solução: Queremos escrever uma equação do tipo $K_i + U_i + W_{i \rightarrow f} = K_f + U_f$. Como o escoamento é estacionário, as condições na parte cinza do fluido são as mesmas. Precisamos só levar em conta o que aconteceu no fluido hachurado que se deslocou de Δx_1 e o que se deslocou de Δx_2 . A equação de conservação de energia fica da forma

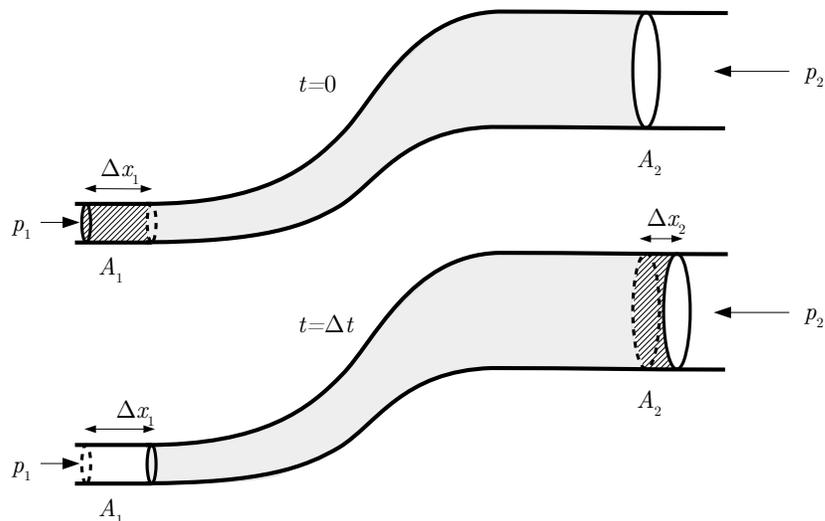


Figura 4.1: Derivação da equação de Bernoulli analisando o balanço de energia num pedaço de tubo de corrente.

$$\frac{1}{2}Mv_1^2 + Mgy_1 + W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}Mv_2^2 + Mgy_2 \quad (4.11)$$

com $M = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_2 \Delta x_2$ (conservação de massa).

O trabalho das forças de pressão *sobre* o pedaço de fluido é $W_{1 \rightarrow 2} = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2$ (o fluido fora e a esquerda de A_1 empura o fluido, o fluido fora e a direita de A_2 resiste ao seu movimento). Obtemos então:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + gy_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + gy_2 + \frac{p_2}{\rho}. \quad (4.12)$$

O fato de poder resolver um problema considerando a equação de movimento/Euler ou usando a conservação da energia é similar a o que encontramos na mecânica usual por exemplo lançando um projétil.

Caso geral

A diferença entre o caso geral e o caso incompressível é que no lugar de (4.9), chegamos a:

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) + \vec{v} \cdot \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p = 0. \quad (4.13)$$

O último termo desta equação em $\vec{\nabla} p / \rho$ pode ser re-escrito. Um fluido em movimento é um sistema para o qual as leis da termodinâmica se aplicam. Em particular temos $dw = T ds + (1/\rho) dp$ de modo que $\vec{\nabla} p / \rho = \vec{\nabla} w - T \vec{\nabla} s$

Então

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) - T \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0. \quad (4.14)$$

Mas, como o movimento é estacionário, da conservação da entropia segue $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0$, assim

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + w + gz \right) = 0 \quad (4.15)$$

ou seja, temos a equação de Bernoulli generalizada:

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = cste \text{ sobre um filete.} \quad (4.16)$$

A equação de Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1700-1782), (4.16), vale para um filete num escoamento estacionário de fluido perfeito. A forma (4.10) vale para um filete num escoamento estacionário de fluido perfeito incompressível. Dizemos que são formas fracas da equação de Bernoulli. É natural se perguntar em qual caso, (4.16) ou (4.10) valem não só para linhas de corrente mas todo o espaço, o que chamamos de forma forte da equação de Bernoulli.

Exemplo (4.2)

Mostrar que se o fluido for incompressível, (4.10) é consequência de (4.16).

Solução: Vimos que $w = \epsilon + p/\rho$ na §1.6 de modo que a eq. (4.16) pode ser escrita $\frac{v^2}{2} + (\epsilon + p/\rho) + gz = cste$ sobre um filete.. Observamos que $d\epsilon/dt = T ds/dt - p d(1/\rho)/dt = 0$ devido à conservação de entropia específica e incompressibilidade do fluido. Como o escoamento é estacionário, $d\epsilon/dt = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \epsilon = 0$ assim ϵ é constante sobre um filete. Em consequência $\frac{v^2}{2} + p/\rho + gz$ também tem que ser constante sobre um filete.

Forma forte da equação de Bernoulli no espaço todo

Se $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$, o movimento é chamado de **irrotacional**. A equação (4.8) se escreve, então,

$$\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} p = 0. \quad (4.17)$$

Vejamos agora vários casos onde esta equação pode ser reduzida a um gradiente só.

Vemos imediatamente que se o fluido for incompressível, $\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + p/\rho + gz \right) = 0$ e podemos integrar sem a restrição sobre o caminho de integração. Assim teremos

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cste \quad \text{irrot.+incompr.} \quad (4.18)$$

em todo o interior do fluido.

No caso de um escoamento homentrópico ($s = cste$), $dw = Tds + 1/\rho dp = 1/\rho dp$ e $\vec{\nabla} w = (1/\rho) \vec{\nabla} p$ de modo que

$$\frac{v^2}{2} + w + gz = cste \quad \text{irrot.+homent.} \quad (4.19)$$

em todo o interior do fluido.

Um fluido é dito barométrico se $p = p(\rho)$ ou equivalentemente $\rho = \rho(p)$. Já conhecemos vários exemplos de fluidos barométricos: escoamento isotérmico $p = p(\rho, T) = p(\rho)$, escoamento homentrópico $p = p(\rho, s) = p(\rho)$, escoamento adiabático de um gas ideal $p = K\rho^\gamma$. No caso barométrico temos por exemplo:

$$\frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x'} dx' = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (4.20)$$

Mais geralmente

$$\frac{1}{\rho(p)} \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (4.21)$$

Assim obtemos

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz = cste \quad \text{irrot.+barom.} \quad (4.22)$$

em todo o interior do fluido.

A tabela seguinte resume o que vimos sobre a equação de Bernoulli.

4.2. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

esc. estac. fluido perfeito	fluido qualquer $\frac{v^2}{2} + w + gz =$ <i>cte/filete</i>	incompressível $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz =$ <i>cte/filete</i>	
	caso irrot. +incompress. $\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz =$ <i>cte</i>	caso irrot. +homentr. $\frac{v^2}{2} + w + gz =$ <i>cte</i>	caso irrot. + barometr. $\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz =$ <i>cte</i>

4.2 Consequências da equação de Bernoulli para fluido incompressível

4.2.1 Casos particulares

Alguns casos particulares da equação de Bernoulli para fluido incompressível são mencionados a seguir. Precisamos nos restringir a uma região onde o papel da viscosidade é desprezível (basicamente não perto de parede e obstáculo, ver capítulo VII), i.e. o fluido é perfeito. Estes casos particulares valem sobre um filete ou em o todo espaço se o escoamento for irrotacional.

Fluido em repouso:

$$p_2 = p_1 + \rho g (z_1 - z_2) \quad (4.23)$$

Isto é a lei de Stevin: a pressão no interior de um fluido aumenta linearmente com a profundidade para um fluido incompressível num campo gravitacional. Resumidamente "p_{fundo} = p + ρgh". Nós havíamos encontrado este resultado diretamente resolvendo a equação de Euler no caso de velocidade nula no capítulo III.

Fluido com $z = cste$:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (4.24)$$

Isto é a fórmula do efeito Venturi (que discutiremos mais a seguir). Em palavras: se tiver um gradiente de pressão, terá aceleração ou desaleração (como esperado).

Fluido submetido a pressão constante $p_1 = p_2$

$$v^2 = v_0^2 + 2gh \quad (4.25)$$

onde v é a velocidade em um ponto à distância h abaixo de um ponto com velocidade v_0 . É o mesmo resultado que se obtém resolvendo a equação $\ddot{z} = -g$ para o movimento de queda livre. Isto é a fórmula de Torricelli. Nós a usamos para resolver o problema de escoamento por uma torneira no capítulo II.

4.2.2 Aplicações

A equação de Bernoulli e seus casos particulares tem muitas aplicações práticas tais como medidores de velocidade, efeito Venturi, escoamento por um orifício.

Efeito Venturi e medidor Venturi

Consideremos um tubo com um estrangulamento como mostrado na figura 4.2.

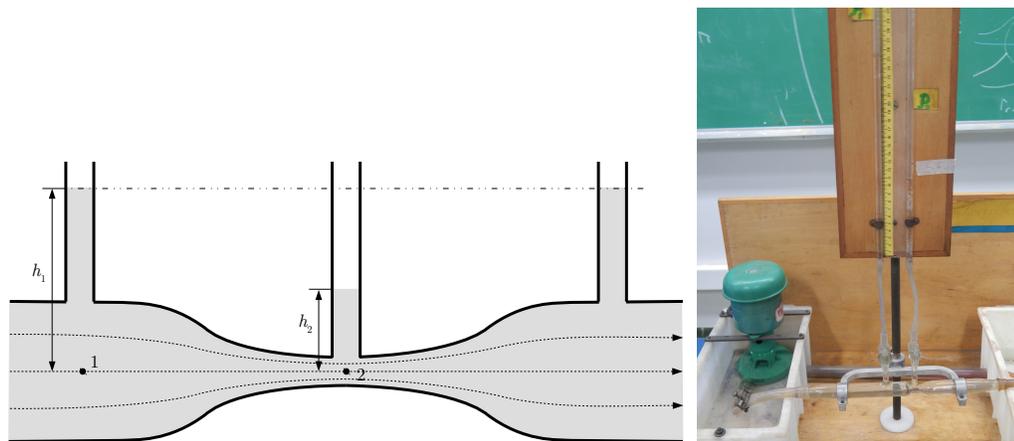


Figura 4.2: Princípio de funcionamento do medidor Venturi: a velocidade é maior e a pressão menor no estrangulamento (esquerda). Fóto do aparelho ilustrando o efeito Venturi (Crédito: foto tomada no laboratório de demonstrações do Instituto de Física da USP).

4.2. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

Temos constância da vazão:

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad (4.26)$$

com A_1 seção vertical passando pelo ponto 1 e A_2 por 2. Assim, $v_2 > v_1$, i.e. como sabemos, a velocidade aumenta num estrangulamento para fluidos incompressíveis.

Como (para pontos num mesmo z)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = cste \quad (4.27)$$

temos $p_2 < p_1$. (Pode-se ver que na equação anterior o valor “*cste*” é o mesmo para todos os filetes de modo que ela vale no espaço todo.) Resumindo em palavras: **como o fluido é incompressível, a velocidade precisa ser maior no estrangulamento. Para ter esta aceleração, deve haver um gradiente de pressão i.e. a pressão é menor no estrangulamento.**

O fato de num estrangulamento, a velocidade ser maior e a pressão menor, é chamado efeito Venturi. Observe bem como isto se traduz na figura 4.2 pela altura de fluido nos tubos verticais.

A pressão nos pontos 1 e 2 satisfaz:

$$p_1 - p_2 = (p_0 + \rho g h_1) - (p_0 + \rho g h_2) = \rho g h \quad (4.28)$$

onde h é a diferença de altura.

As três equações anteriores podem ser combinadas para obter v_1 em função das características do sistema A_1 e A_2 e da medida de h :

$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2}} \quad (4.29)$$

Isto é usado no medidor Venturi, um estrangulamento que se introduz numa tubulação para medir a velocidade de um fluido (ou sua vazão).

Efeito Venturi no dia-a-dia

Podemos facilmente fazer experiências ilustrando o efeito Venturi. Por exemplo seguramos duas folhas de papel verticalmente, com um pequeno espaço entre elas. Se soprarmos entre elas, elas não se afastam uma da outra como talvez se esperaria, elas grudam uma na outra pois com o ar (incompressível

nestas baixas velocidades) circulando entre elas, a pressão diminuiu. Outra experiência simples consiste em soprar numa bobina de linha coberta por um pedaço de papel na outra extremidade. O papel não cai como talvez poderia-se esperar, ele gruda na bobina (ver exercício 4.10).

Outra experiência mais delicada de explicar mas que ilustra uma situação interessante é a seguinte. Seguramos uma folha pela borda e soprmos horizontalmente sobre a face de cima como na fig. 4.3: a folha se levanta. Isto significa que deve haver uma pressão maior debaixo da folha e menor encima, o gradiente $-\vec{\nabla}p$ levanta a folha. A questão é entender como este gradiente aparece. Neste caso não há um afunelamento do ar num certo espaço com acima, i.e. não é estritamente um efeito Venturi.

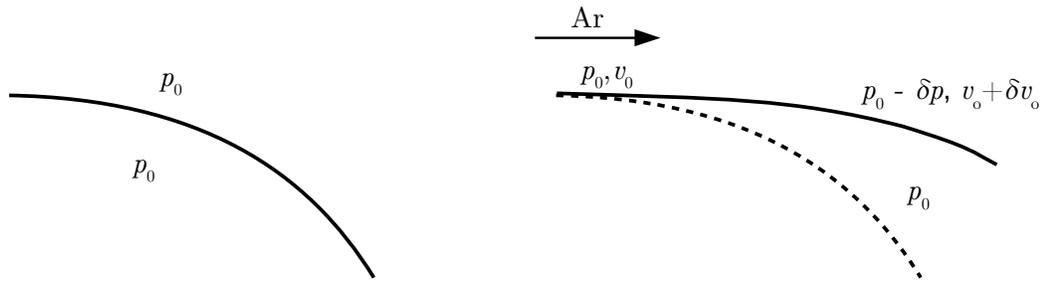


Figura 4.3: A experiência da folha de papel (que não envolve estritamente o efeito Venturi, cf. texto).

O ar em movimento que circula encima da folha (que tem curvatura para baixo) tende a continuar reto. Ao fazer isto, ele arrasta ar que estava abaixo dele perto da folha (devido à viscosidade). Isto abaixa a pressão acima da folha e tem duas consequências. Primeiro, o ar que circula encima da folha encontra uma região de pressão menor então acelera. Segundo, como a pressão do ar na face superior do papel diminuiu e a pressão do ar embaixo não mudou, a folha é levantada.

Na vida de todo dia, há numerosos exemplos do efeito Venturi. Quando um caminhão comprido passa perto de um carro, as linhas de corrente do ar são estranguladas como na fig. 4.2, a pressão entre os veículos é reduzida e o motorista do carro tem a impressão que seu carro está sendo sugado pelo caminhão. Outro caso é a arteriosclerose: placas se formam sobre as paredes internas das artérias, ocasionando uma baixa de pressão e podendo até fechar momentaneamente uma artéria.

4.2. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

Tubo de Pitot

É um aparelho que usa a diferença de pressão para medir velocidade de avião, barco, etc.

De modo geral, para medir pressão ou velocidade num fluido em movimento, é necessário introduzir nele algum instrumento de medida, que geralmente perturba o escoamento. Consideremos um objeto colocado na correnteza de um fluido. Sobre sua superfície, sempre aparecem pontos onde $\vec{v} = 0$, chamados de **pontos de estagnação**. Chamemos p_e a pressão num tal ponto.

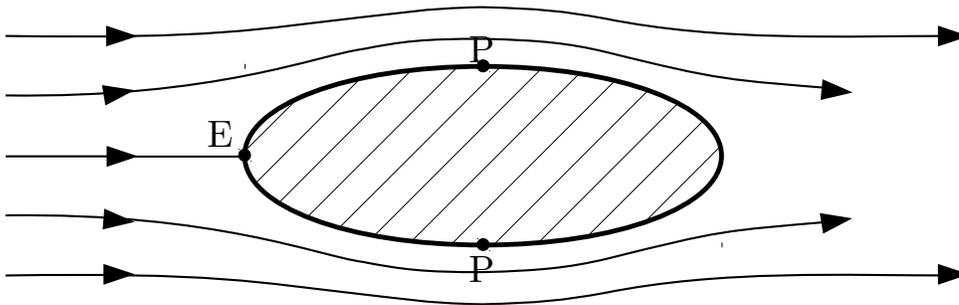


Figura 4.4: No ponto E a velocidade do fluido é nula, é um ponto de estagnação.

Para um ponto P perto da face superior ou inferior do objeto onde o escoamento não é perturbado, a pressão p e a velocidade do fluido v satisfazem:

$$p_e = p + \frac{\rho v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(p_e - p)}{\rho}}. \quad (4.30)$$

(Estamos supondo as dimensões do objeto pequenas de modo que $z = cste$ na equação de Bernoulli e podemos usar a fórmula (4.24).) Aquí também todos os filetes tem o mesmo valor de “ $cste$ ”.

Acoplando ao corpo um aparelho para medir $p_e - p$ (por exemplo um manômetro como no capítulo III), obtemos um tubo de Pitot como mostrado na figura 4.5.

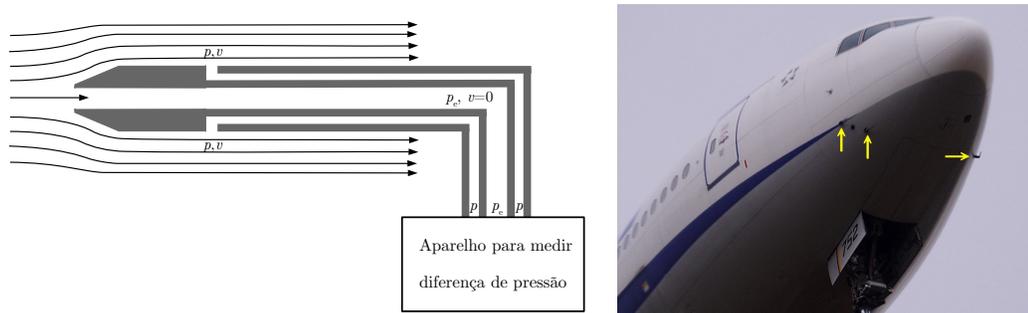


Figura 4.5: Corte transversal de um tubo de Pitot (esquerda) e foto de tubos de Pitot num Boeing 777 (Crédito: Creative Commons/Cassiopeia sweet).

Escoamento por um orifício

Consideramos o escoamento de um fluido incompressível saindo de um tonel com um pequeno tubo num lado. Chamamos $A(h)$ a seção transversal do fluido no tonel e a a do tubo. Supomos $A \gg a$. Como o orifício de saída é pequeno, o escoamento pode ser considerado estacionário¹.

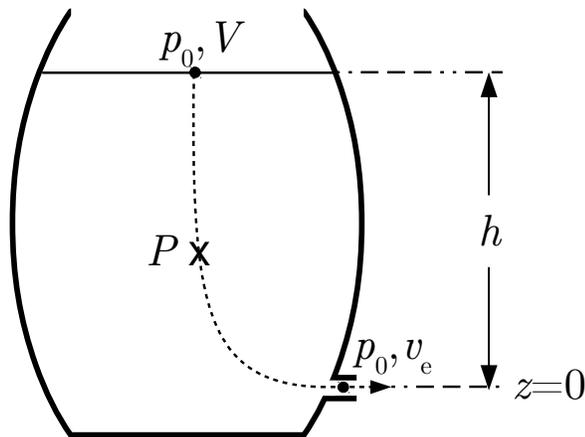


Figura 4.6: Escoamento de um fluido incompressível por um orifício pequeno.

As linhas de corrente iniciam na superfície com pressão igual à da atmos-

¹Supomos o tubo não muito estreito nem comprido de modo que a viscosidade pode ser ignorada.

4.2. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

fera p_0 , velocidade V e numa altura h em relação a $z = 0$. Ao sair pelo tubo, de novo a pressão é p_0 e a velocidade tem um valor v .

Temos:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gh = \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} \quad (4.31)$$
$$A(h)V = av$$

Podemos re-escrever isto como:

$$v = \sqrt{2gh + V^2} \quad (4.32)$$
$$v = \frac{A(h)}{a}V$$

Observamos que para escrever a equação de Bernoulli podemos utilizar um outro ponto da linha de corrente, por exemplo P . Temos $V^2/2 + p_P/\rho + gh_P = v^2/2 + p_0/\rho$. Como $p_P = p_0 + \rho g(h - h_P)$, obtemos de novo $V^2/2 + p_0/\rho + gh = v^2/2 + p_0/\rho$.

No caso estacionário: $h = cste$ e $V = -dh/dt = 0$, de modo que $v = \sqrt{2gh}$.

No caso quase estacionário, podemos escrever: $\sqrt{2gh + V^2} = (A/a)V$ o que leva a: $V = \sqrt{2gh/(-1 + A^2/a^2)} \sim (a/A)\sqrt{2gh}$ (onde usamos $A \gg a$). Usando $V = -dh/dt$, e supondo $A(h) = A$,² obtemos $h(t) = [-(a/A)\sqrt{g/2t} + \sqrt{h_0}]^2$ onde $h(t=0) \equiv h_0$. Podemos calcular o tempo para esvaziar o tonel: $h = 0$ para $t = (A/a)\sqrt{2h_0/g}$.

Exemplo (4.3)

A velocidade de saída do fluido depende da geometria do orifício. O caso que tratamos acima corresponde ao lado esquerdo da figura 4.7: as linhas de corrente são paralelas ao sair do tubo. No caso a direita, o diâmetro do jato que sai é menor do que o do orifício, este fenômeno é chamado “vena contracta” e vem da impossibilidade das linhas de corrente fazer uma curva a 90° . Calcular o coeficiente de contração a_c/a onde a_c é a seção transversal na menor parte da “vena contracta”.

Solução: Podemos desprezar a gravitação. Supomos o orifício fechado. Seja $p = p_0 + \rho gh$ a pressão ao nível do orifício. O fluido é submetido a diversas forças que se cancelam, por exemplo uma força pA devido à parede do lado oposto ao orifício e $-pA$ pela parede do orifício fechado.

²Um caso com $A(h)$ não constante é considerado no exercício 4.10.

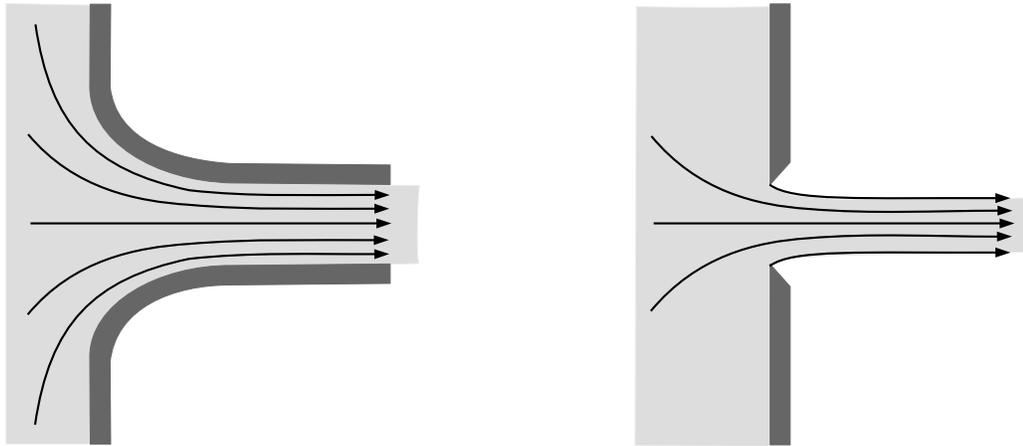


Figura 4.7: Formato das linhas de corrente dependendo da geometria do orifício. Esquerda: não há contração do jato em relação ao orifício. Direita: o diâmetro do jato é menor do que o do orifício.

Agora consideramos que o orifício aberto. O fato das linhas de corrente não serem paralelas ao sair indica que há um gradiente de pressão transversal atuando sobre elas e a pressão varia de uma para outra, então a velocidade também. Aproximadamente $p = p_0 + \rho gh$ é a pressão do jato antes de sair pelo orifício e o raciocínio anterior leva a $v = \sqrt{2gh}$ sua velocidade. Como a pressão do outro lado do orifício é p_0 , o jato é submetido a uma força horizontal $(p - p_0)a = \rho gha$. Por outro lado, esta força é também a taxa de emissão de momento emitido horizontalmente: $(\rho v \delta t a_c) \times v / \delta t = \rho v^2 a_c = \rho 2gh a_c$. Vemos então que $a_c/a \sim 0,5$.

4.3 Consequências da equação de Bernoulli para fluido compressível

Vemos agora como a compressibilidade pode modificar os resultados vistos anteriormente.

4.3. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO COMPRESSÍVEL

4.3.1 Tubo de seção variável

Supomos um escoamento num tubo que muda de seção muito devagar de modo que possamos considerar o problema em uma dimensão. A conservação de massa para um fluido compressível $\rho(x)v(x)A(x) = cste$ leva a resultados interessantes. Temos

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (4.33)$$

A equação de Euler (para $z = cste$) fornece

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (4.34)$$

Introduzemos também a velocidade do som (que será estudada mais em detalhe no capítulo VI)

$$c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho_s}} \quad (4.35)$$

onde a derivativa é calculada para s fixo. A equação de Euler pode ser re-escrita:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v^2}{c_s^2} \frac{dv}{v} \quad (4.36)$$

e eliminando ρ na equação de continuidade (4.33) temos

$$\frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1} \quad (4.37)$$

onde $Ma \equiv |v|/c_s$ é chamado número de Mach.

Vemos com isto que se $Ma < 1$, temos um comportamento similar ao de um fluido incompressível: se A decresce ($dA < 0$), v cresce ($dv > 0$) e se A cresce, v decresce. Por outro lado $Ma > 1$, o oposto acontece: A decresce ($dA < 0$), v decresce ($dv < 0$) e se A cresce, v cresce.

4.3.2 Gás ideal num processo adiabático reversível

Nós nos restringimos agora a um gás ideal num processo adiabático reversível.

Equação de Bernoulli

Podemos calcular a entalpia. Temos

$$p = K\rho^\gamma \quad \text{com } \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1. \quad (4.38)$$

Sobre um filete $ds = 0$ de modo que $dw = (1/\rho)dp = \gamma/(\gamma - 1)d(p/\rho)$ e

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (4.39)$$

Portanto, inserindo na (4.16) vem

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + gz = \text{cste/filete}. \quad (4.40)$$

Tubo de Pitot

Usando (4.40) com o dispositivo da fig. 4.5, temos

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_e}{\rho_e} - \frac{p}{\rho} \right)} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_e}{\rho_e} \left[1 - \left(\frac{p}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (4.41)$$

(Todos os filetes tem o mesmo valor de “cste“.)

Precisamos conhecer p , p_0 e ρ_0 para usar esta fórmula.

Escoamento por um orifício

Consideremos um gás que escapa de um recipiente através de um pequeno orifício.

Calculamos v_e em função de p , p_0 e ρ_0 . O mesmo cálculo do que para tubo de Pitot leva à velocidade de escape

$$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_0}{m} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} . \quad (4.42)$$

(Todos os filetes tem o mesmo valor de “cste“.)

Nesta equação, vemos que aumentando a pressão interna p_0 do tanque podemos aumentar a velocidade de escape v_e , mas existe um valor limite

$$v_m = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{m} T_0} , \quad (4.43)$$

4.3. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO COMPRESSÍVEL

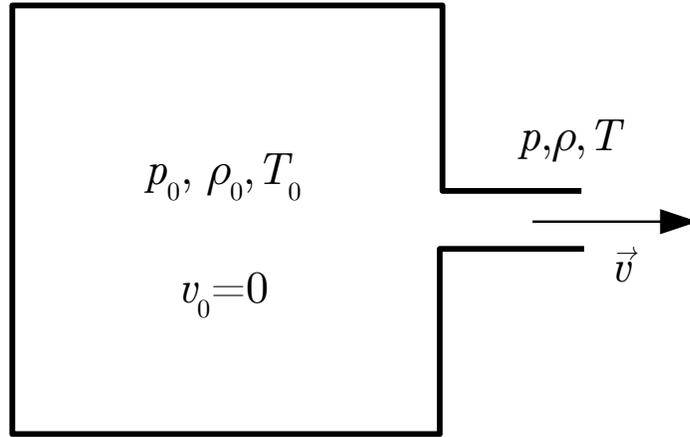


Figura 4.8: Escapamento de um gás idela por um orifício.

que depende somente da temperatura interna. Isto é, por mais que aumente a pressão interna p_0 , a velocidade de escape não poderá ultrapassar o valor limite v_m e para aumentar v_m será necessário aumentar a temperatura.

Esta diferença de comportamento do gás, quando comparado com um fluido incompressível (onde a velocidade de escape $\sqrt{2gh}$ cresce sem limite se h cresce), é devida ao trabalho adicional que ele realiza para se expandir ($d\epsilon = -pdV \neq 0$).

Exemplo (4.4)

Calcular ρ em função de ρ_0 e Ma e discutir quando o gas deve ser considerado compressível.

Solução:

Temos $c_s^2 = \gamma p / \rho$. A equação de Bernouilli 4.40 pode ser escrita

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} = \frac{c_s^2}{\gamma - 1} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma - 1} \quad (4.44)$$

daí

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(\frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 + 1 \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \quad (4.45)$$

Vemos que se $Ma \ll 1$ i.e. $v \ll c_s$, o gas pode ser considerado incompressível neste escoamento (e como esperado, v_e depende só da diferença de

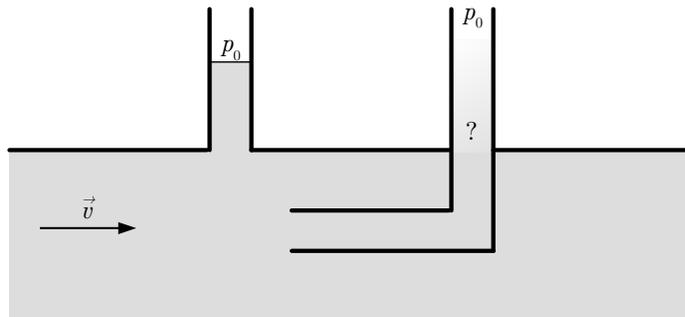
pressão $p_0 - p$).

O leitor interessado em ir além deste texto e estudar mais em detalhe o escoamento de gases a alta velocidade pode consultar por exemplo a referência [4.1] capítulo XIV.

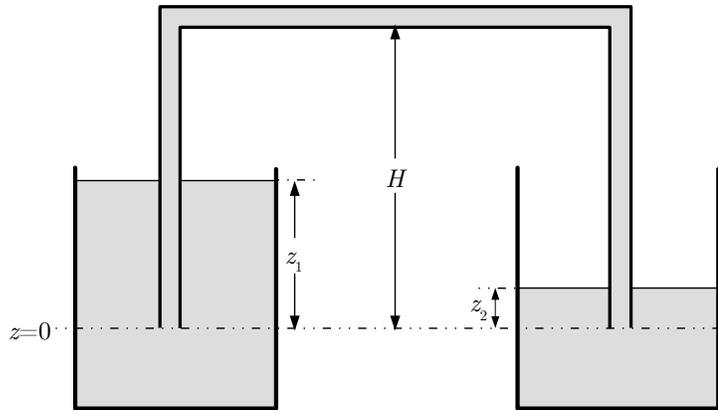
4.3. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO COMPRESSÍVEL

Exercícios

1. Um fluido tem como campo de velocidade $\vec{v} = (y^2, 3y - 3)$. O escoamento é estacionário? O fluido é incompressível?
2. O objetivo deste exercício é aprofundar nossa derivação da equação de Bernoulli a partir da de Euler. Para simplificar, desprezamos a gravidade, supomos o fluido incompressível e trabalhamos em 2 dimensões. Chamar s a distância ao longo das linhas de corrente e n a distância perpendicular as linhas de corrente. Escrever as duas componentes da equação de movimento, nas direções s e n , e interpreta-las. [Usar o fato que para este tipo de coordenadas, $\partial\hat{s}/\partial s = -\hat{n}/R$ com R o raio de curvatura local da linha de corrente.] O que acontece se o raio de curvatura vai para o infinito?
3. Considerar um escoamento isotérmico de um gas ideal. Derivar a equação de Bernoulli, a fórmula da velocidade medida com um tubo de Pitot e a velocidade de escoamento por um orifício.
4. Dois tubinhos, um retilíneo e o outro com um cotovelo estão imersos num fluido como na figura. Se o fluido for parado ($\vec{v} = 0$) comparar as alturas nos tubos?. Mesma pergunta se o fluido for em movimento.



5. Um estudante de mecânica dos fluidos foi à praia de carro durante a semana da Pátria. Infelizmente preocupado com provas, listas, etc, ele esqueceu de encher o tanque de combustível e ficou em pana seca. Contudo, uma boa alma lhe deu gasolina num recipiente cilíndrico de raio R , cheio até o topo ($z = h$) bem como uma mangueira de raio r para sifonar o fluido. Supor $R \gg r$.



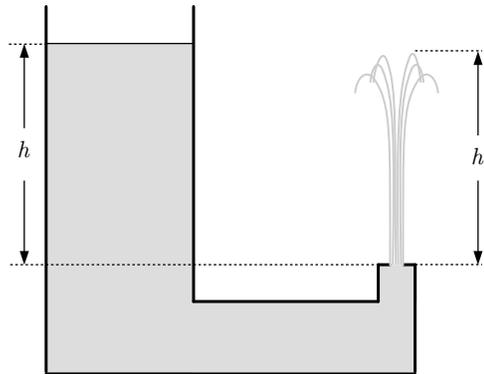
Supor o escoamento estacionário e calcular a velocidade do fluido na mangueira. Calcular a pressão na parte horizontal da mangueira de modo a poder comparar com a pressão atmosférica p_0 . Na configuração da figura, quando o fluido para de circular na mangueira? É melhor abaixar ou levantar o recipiente de esquerda para o fluido circular por mais tempo?



6.

a) Calcular a altura h' e velocidade de saída da água do chafariz a direita da figura em função de h .

4.3. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO COMPRESSÍVEL



b) Tampar a extremidade de um tubo com filme plástico e segurar o filme com um elástico. Fazer um buraco no plástico com um palito de dente. Realizar a experiência na figura da direita. A equação entre h e h' é satisfeita? Comentar. Calcular a pressão da água ao sair pelo buraco.

7. Um experimentador negligente deixou a válvula de um tanque de hélio ligeiramente aberta durante um fim de semana. O gás, inicialmente a pressão de 200 atm, escapou lentamente e isotermicamente a 20°C .

- Qual foi a velocidade de escape inicial?
- Mesma pergunta se o processo for adiabático.
- Nos dois casos, qual foi a mudança em entropia que 1 kg do gás (que restou no interior do recipiente) sofreu?

8. Uma piscina grande, de profundidade L está cheia d'água. Através de um tubo pequeno localizado a $h < L$ da superfície da água perto do fundo, ela está sendo esvaziada lentamente.



a) Explicar porquê todos os filetes tem o mesmo valor da constante na fórmula de Bernoulli.

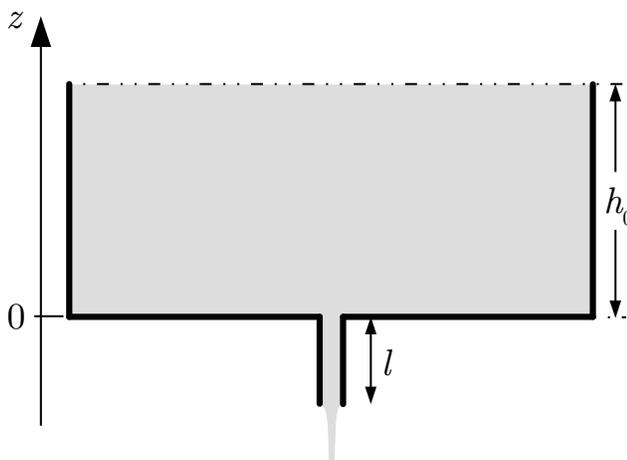
Qual é a velocidade no jato d'água perto do orifício?

b) Mostrar que as equações do movimento no jato são $dv_x/dt = 0$ e $dv_y/dt = -g$ e integra-las.

A que distância máxima D da parede o jato de água saindo pelo orifício irá atingir o chão?

Qual deve ser o valor de h para que o valor de D seja o maior possível e qual é este valor de D ?

9. Um reservatório de água de área A como na figura está sendo esvaziado através de um tubo de seção transversal a adaptado ao fundo do mesmo.



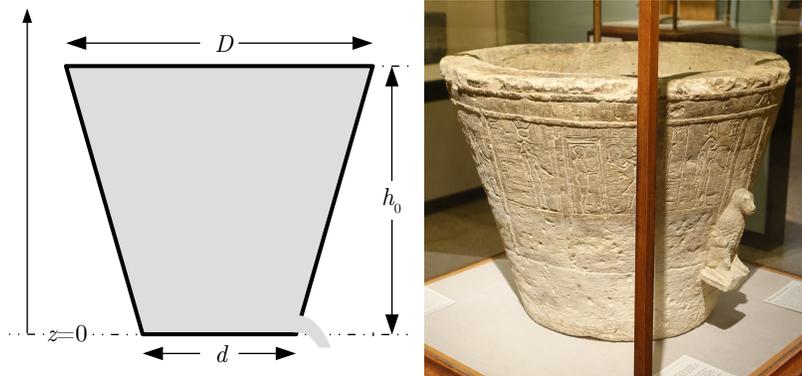
a) Calcule a velocidade de escape.

Faça uma estimativa do tempo gasto para o esvaziamento.

b) O que aconteceria se houvesse um pequeno furo na metade do comprimento do tubo.

10. A clepsidra, ou relógio de água, é um dos sistemas para medir tempo mais antigo. Consiste num vaso com um furo perto do fundo. Era enchido de água e uma escala indicava o tempo dependendo do nível de água. Supomos que ela tenha a forma de um tronco de cone circular de altura $h = 22$ cm, diâmetro da base maior $D = 30$ cm e da base menor $d = 16$ cm. O furo tem diâmetro $\delta = 2$ mm.

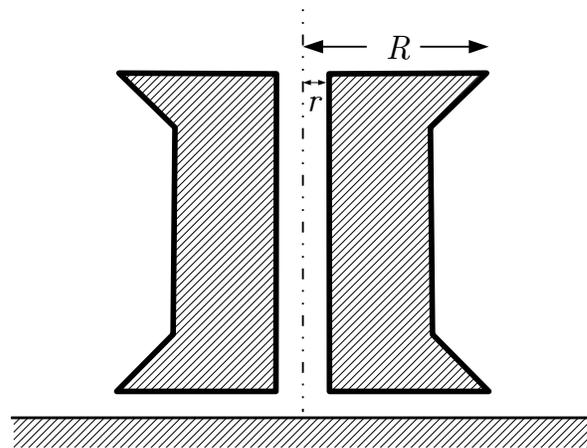
4.3. CONSEQUÊNCIAS DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI PARA FLUIDO COMPRESSÍVEL



Clepsidra egípcia da época de Ptolemeu II, 285-246 a.C., Oriental Institute Museum, University of Chicago. Crédito: Wikicommons/Daderot

- a) calcule a velocidade inicial de descida do nível da água se a clepsidra é totalmente cheia de água. Mesma pergunta após o nível ter baixado de metade.
- b) Que forma deveria ter a superfície lateral (de revolução) para que o nível da água baixasse uniformemente?

11. Segura-se um pedaço de papel com um dedo na parte inferior de um carretel de raio R , contendo um pequeno orifício de raio r (ver a figura 4.5). Em seguida assopra-se da extremidade superior do orifício. O ar em contato com o papel sai de baixo da bobina com velocidade v_0 .



O que acontece com o papel ao retirar o dedo e soltá-lo? Faça uma estimativa da força que atua sobre o cartão.

12. Uma bola de ping-pong pode ser equilibrada de maneira bastante estável sobre um jato de ar, como na figura.



Explique por que a bola pode ficar suspensa no ar. Porquê este equilíbrio é estável se a posição da bola mudar em relação ao jato?

4.4 Bibliografia

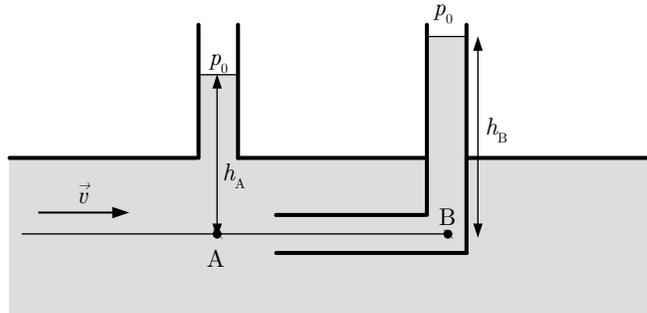
[4.1] A.R.Paterson “A first course in Fluid Dynamics”, Cambridge 1983.

4.5 Respostas

1. \vec{v} não depende de t então o movimento é estacionário. $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 3$ então o fluido não é incompressível.
2. A equação de Euler $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} v = -\vec{\nabla}(p/\rho)$ se re-escreve $v\partial v/\partial s = -\partial(p/\rho)/\partial s$ e $-\rho v^2/R = -\partial p/\partial s$. A primeira equação fornece $p/\rho + v^2/2 = cste$ sobre a linha de corrente como esperado. A segunda mostra como a pressão varia de linha de corrente para linha de corrente. Se o raio de curvatura vai para o infinito, as linhas de corrente são retas, a pressão não varia de linha de corrente para linha de corrente.
3. Refazemos o raciocínio da §4.1.3 at e obter a eq. (4.13). Temos agora $(1/\rho)\vec{\nabla} p = (R/m)T(\vec{\nabla}\rho)/\rho = (R/m)T\vec{\nabla} \ln \rho$ de modo que $v^2/2 + (R/m)T \ln \rho +$

$gz = cste/filete$. Para o tubo de Pitot $v = \sqrt{2(R/m)T \ln(\rho/\rho_0)}$. Mesmo resultado para o escoamento por um orifício. (Em geral, escoamentos isotérmicos não são modelados como fluidos perfeitos.)

4. Escolhemos um ponto na superfície do recipiente de esquerda, de velocidade V , pressão p_0 e $z = z_1$ e um ponto na saída do tubo no recipiente de direita, de velocidade v , pressão $p_0 + \rho g z_2$ e $z = 0$. Temos $p_0/\rho + V^2/2 + g z_1 = (p_0 + \rho g z_2)/\rho + v^2/2$. Além disto, por conservação da massa $R^2 V = r^2 v$. Obtemos assim: $v = \sqrt{2gd/(1 - r^4/R^4)} \sim \sqrt{2gd}$. Consideramos um ponto no alto da mangueira com pressão p_H , velocidade v e $z = H$. Temos $p_H/\rho + v^2 + gH = (p_0 + \rho g z_2)/\rho + v^2/2$ assim $p_H = (p_0 + \rho g(z_2 - H)) < p_0$ como esperado para sucção.



5.

6. Sobre uma linha de corrente, escolhemos um ponto na superfície com pressão p_0 , velocidade V , e $z = h$ e um ponto na saída do tubo a direita com pressão p_0 , velocidade v , e $z = 0$. Temos $p_0 + \rho gh = p_0 + 1/2 \rho v^2$ de modo que $v = \sqrt{2gh}$. Para um ponto acima do jato a direita temos: pressão p_0 , velocidade 0, e $z = h'$ e $p_0 + 1/2 \rho v^2 = p_0 + \rho gh'$ de modo que $h' = h$.

Ao fazer a experiência $h' < h$. Isto acontece porquê há perda de energia devido entre outro a viscosidade. Se o buraco é aumentado, h' fica mais perto de h . Supondo $h = 30 \text{ cm}$, $p = p_0 + \rho gh$, $p_0 \sim 10^5 \text{ N/m}^2$ e $\rho gh \sim 3000 \text{ N/m}^2$.

7. a) $v = \sqrt{2(R/m)T \ln(\rho_0/\rho)}$ (cf. exercício 3) pode ser re-escrito $v = \sqrt{2(R/m)T \ln(p_0/p)} = \sqrt{2 \cdot 8,314 \ln 200 / (410^{-3})} = 2,5 \text{ km/s}$.

b) $v = \sqrt{2\gamma/(\gamma - 1)(RT_0/m)(1 - (p/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma})}$. Aquí $\gamma = 5/3$ de modo que $v \sim 1,7 \text{ km/s}$.

c) No exercício 4 do Cap. I, aprendemos a escrever $S(p, V)$ para um gas ideal. Podemos proceder da mesma maneira para obter $s(T, P)$: $de = Tds - pdV_e =$

$c_V dT \Rightarrow s(T, p) - s(T_0, p_0) = \ln[(T/T_0)^{c_V} (p/p_0)^{R/m}]$. No caso do exercício:
 $S(T_0, p) - S(T_0, p_0) = \ln(p/p_0)^{R/m} \times massa = 1, 110^4 J/K$.

8.

a) As linhas de corrente iniciam na superfície com pressão p_0 , velocidade quasi nula V e $z = 0$ de modo que elas tem todas o mesmo valor de $cste$ na equação de Bernoulli. Ao sair, um ponto numa linha de corrente tem pressão p_0 , velocidade v e $z = -h$. Como a superfície da piscina é muito maior do que a seção do tubo obtemos combinando as equações de Bernoulli e de conservação de massa $v \sim \sqrt{2gh}$.

b) A pressão no jato é p_0 e a velocidade muda por causa do campo gravitacional. Assim $dv_x/dt = 0$ e $dv_z/dt = -g$ o que leva a $v_x = v (= \sqrt{2gh})$ e $x = vt$, $v_z = -gt$ e $z = -gt^2/2 - h$. Para $z = -L$, temos $t = \sqrt{2(L-h)/g}$. Substituindo t obtemos $x = D = 2\sqrt{h(L-h)}$. $dD/dh = (L-2h)/\sqrt{h(L-h)} = 0 \Rightarrow h = L/2$ e $D = L$.

9.

a) Temos $p_0/\rho + V^2/2 + gh = p_0/\rho + v^2/2 - gl$ e $AV = av$ de modo que $v = \sqrt{2g(h+l)/(1-a^2/A^2)} \sim \sqrt{2g(h+l)}$.

b) $V = -dh/dt = a/A\sqrt{2g(h+l)/(1-a^2/A^2)} \sim a/A\sqrt{2g(h+l)}$. Como isto $dt = -(A/a)\sqrt{2/g}dh/\sqrt{h+l}$ $t = (A/a)\sqrt{2/g}(-\sqrt{l} + \sqrt{h_0+l})$ com $h(t=0) = h_0$.

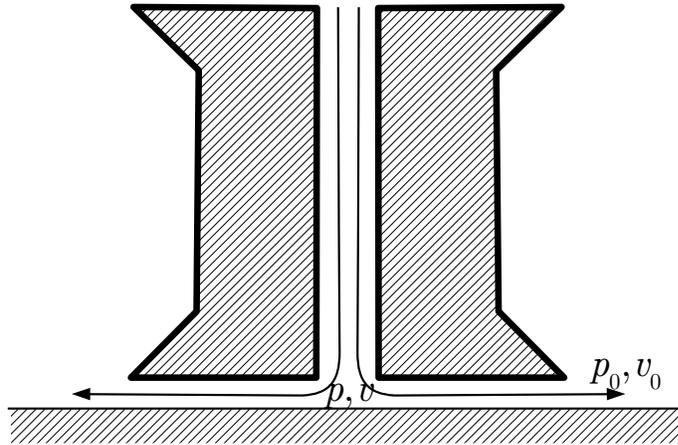
c) $p_{l/2}/\rho + v^2/2 - gl/2 = p_0/\rho + v^2/2 - gl \Rightarrow p_{l/2} = p_0 - gh/2 < p_0$: entra ar.

10.

a) $p_0/\rho + V^2/2 + gh = p_0/\rho + v^2/2$ e $D^2V = \delta^2v$ de modo que $v = \sqrt{2gh/(1-\delta^2/D^2)} \sim \sqrt{2gh}$ e $V = (\delta^2/D^2)v = 0,09$ mm/s. $p_0/\rho + V'^2/2 + gh/2 = p_0/\rho + v'^2/2$ e $D'^2V' = \delta^2v'$ com $D' = (D+d)/2$ de modo que $v' = \sqrt{gh/(1-\delta^2/D'^2)} \sim \sqrt{gh}$ e $V' = (\delta^2/D'^2)v' = 0,11$ mm/s.

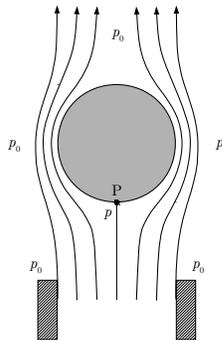
b) Queremos $V' = -dz/dt = (\delta^2/D'^2)v' = (\delta^2/D'^2)\sqrt{2gz} = cste = V$ i.e. $z(D') = [V^2/(2g\delta^4)]D'^4$.

11. Temos $p/\rho + v^2/2 = p_0/\rho + v_0^2/2$ e $vr^2 = v_0R^2$ de modo que $p = p_0 + \rho v_0^2(1 - R^4/r^4) < p_0$. A força é $(p_0 - p)\pi R^2$, orientada para cima.



Corte transversal da bobina.

12. A pressão é a pressão atmosférica p_0 de cada lado do jato perto da saída bem como dentro do jato (onde as linhas de corrente de ar são paralelas). A pressão é também p_0 de cada lado do jato após ele se separar³. Precisamos verificar que a pressão no ponto P é menor que p_0 para poder ter uma força que se opõe ao peso da bola. De fato P é um ponto de estagnação de modo que $p = p_0 + \rho v^2/2$ e $p < p_0$.



Na configuração da figura, $v_e < v_d$ (como representado pelas linhas de corrente respetivamente mais e menos espaçadas) de modo que $p_e > p_d$. A força devida a este gradiente de pressão tende a fazer voltar a bola para dentro do jato.

³Além disto, há formação de uma região com turbilhões atrás da bola com pressão aproximadamente p_0 , cf. capítulo VII.

Capítulo 5

VORTICIDADE

Vimos que uma consideração da conservação de energia para os fluidos perfeitos nos conduziu a um importante resultado, o teorema de Bernoulli. Analogamente, neste capítulo, veremos que a conservação do momento angular em fluidos perfeitos conduz a resultados interessantes, em particular o *teorema de Kelvin* (William Thomson, lord Kelvin, 1824-1907) e o *teorema de Helmholtz* (Hermann von Helmholtz, 1821-1894). Primeiro precisamos introduzir algumas definições.

5.1 Escoamentos rotacionais e irrotacionais

Na mecânica dos fluidos, o rotacional da velocidade, $\vec{\nabla} \times \vec{v} \equiv \vec{\Omega}$, é uma quantidade que tem um papel importante e tem nome próprio: “vorticidade”.

5.1.1 O que mede o rotacional?

Em capítulos anteriores, encontramos a quantidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, ou divergência do campo \vec{v} . A divergência de um campo mede o quanto ele se espalha. Na figura abaixo, tenderíamos a pensar que o escoamento de esquerda tem divergência nula enquanto o de direita teria divergência não nula.

Na realidade, para o escoamento de direita temos que estar mais cuidadoso como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo (5.1)

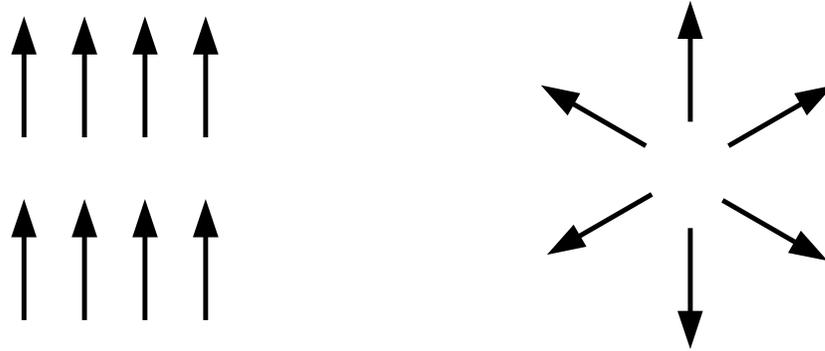


Figura 5.1: Esquerda: campo vectorial de divergência nula. Direita: a divergência pode ou não ser nula.

a) Consideremos o campo vectorial $x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$. Esboça-lo e calcular sua divergência.

b) Mesma pergunta com $(1/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$.

Solução:

a)

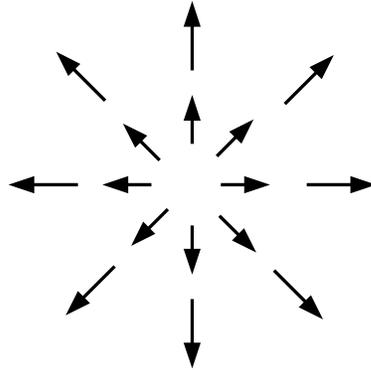


Figura 5.2: Exemplo de campo vectorial de divergência não nula.

Temos

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \quad (5.1)$$

b)

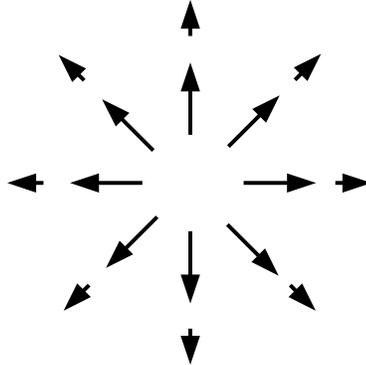


Figura 5.3: Exemplo de campo vectorial de divergência nula.

Temos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial x} + \frac{\partial y/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial y} + \frac{\partial z/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{\partial z} \\ &= \frac{3(x^2+y^2+z^2)-3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Usando coordenadas esféricas, vemos que os dois campos acima são radiais i.e. do tipo $\vec{V} = V_r(r, \theta, \phi)\hat{r}$. A divergência fica $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = (1/r^2)(\partial(r^2 V_r)/\partial r)$. Vemos assim que este tipo de campo tem divergência não nula a não ser que a dependência em r de V_r seja em $1/r^2$ (o que é o caso do campo do b)).

No caso do rotacional, temos uma situação similar. O rotacional mede o quanto a matéria gira localmente. O fato de girar localmente implica o seguinte: imaginamos colocar no escoamento uma pequena roda com pás como na fig. 5.4. Em seguida tentamos determinar se a roda permanece com a mesma orientação ou gira (marcamos um dos pás para facilitar).

Na figura 5.1.1, tenderíamos a pensar que o escoamento de esquerda tem rotacional nulo enquanto que o de direita poderia ter rotacional não nulo.

De novo, para o escoamento de direita temos que estar cuidadoso como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo (5.2)

Consideremos campos como os da figura a direita na fig. 5.1.1: $\vec{V} = V_\phi(r)\hat{\phi}$.

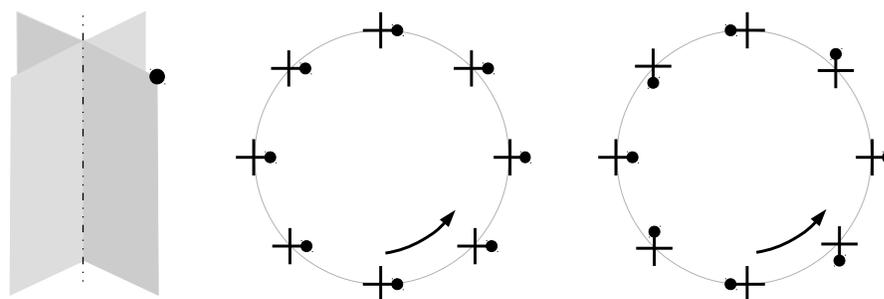


Figura 5.4: Se a roda de pás inserida no escoamento girar, o rotacional tem componente não nula perpendicular à folha.

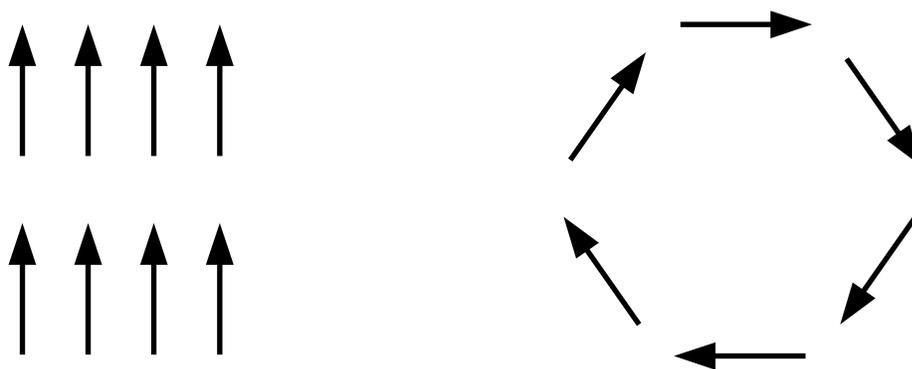


Figura 5.5: Esquerda: campo vectorial com componente do rotacional perpendicular à folha nula. Direita: esta componente pode ser não nula.

a) Supor $V_\phi(r) = ar$. Esboçar o campo de velocidade e e calcular seu rotacional.

b) Mesma pergunta para $V_\phi(r) = a/r$.

Solução:

a)

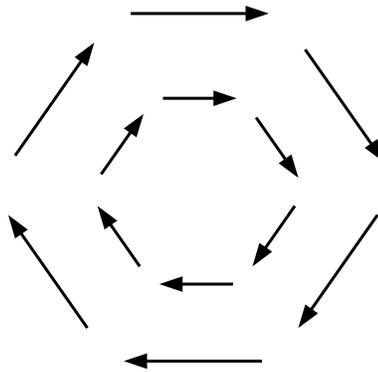


Figura 5.6: Exemplo de campo vectorial com rotacional não nula.

Temos (usando coordenadas polares ou cilíndricas)

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} = 2a \quad (5.3)$$

b)

Temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} = 0 \quad (5.4)$$

Olhando os esboços dos casos a) e b), vemos que a regra da roda não teria sido óbvia de usar para prever se o rotacional seria nulo ou não. Estes campos são do tipo $\vec{V} = V_\phi(r)\hat{\phi}$. O rotacional fica $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r V_\phi}{\partial r} \hat{z}$. Vemos assim que este tipo de campo tem rotacional não nulo a não ser que a dependência em r de $V_\phi(r)$ seja em $1/r$ (o que é o caso do campo do b)).

5.1.2 Exemplos concretos simplês

Rotação com velocidade angular constante ou de corpo rígido

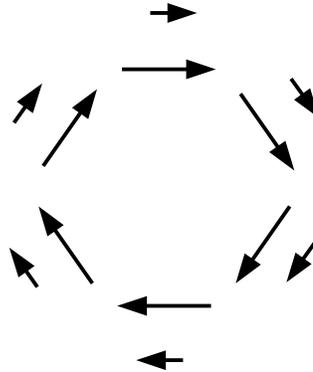


Figura 5.7: Exemplo de campo vectorial com rotacional nulo.

Consideremos um recipiente contendo um líquido em rotação uniforme com velocidade angular ω (cf. fig. 5.8):

$$\vec{v} = \omega r \hat{\phi}. \quad (5.5)$$

As linhas de corrente são circulares. A vorticidade é $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = 2\omega \hat{z}$, i.e. perpendicular à folha.

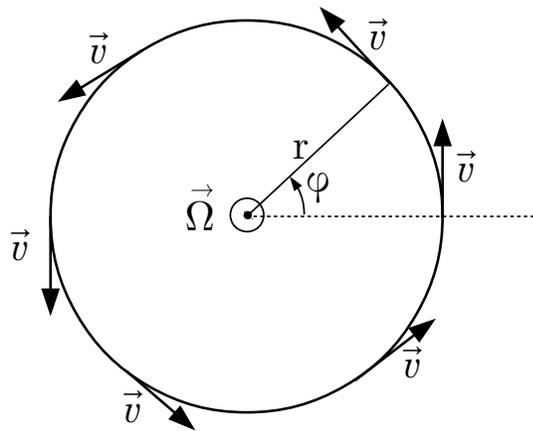


Figura 5.8: Movimento de corpo rígido $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$.

Este tipo de rotação já foi encontrado no capítulo III. Vimos que podia ser tratado como um problema de estática introduzindo uma força inercial

$\rho\omega^2 r\hat{r}$, ou alternativamente de dinâmica (exemplo 3.2). Em ambos casos (claro), a solução da equação de Euler leva a $p(r, z) = p_0 - \rho gz + (1/2)\rho\omega^2 r^2$ e a superfície livre é uma parabolóide dada por $z = \omega^2 r^2 / (2g)$, i.e. a altura do fluido z cresce como r^2 .

Rotação tipo redemoinho

Consideremos agora outro escoamento com linhas de correntes circulares e $|\vec{v}|$ função só de r , (de modo que $\vec{v} = v(r)\hat{\phi}$):

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (5.6)$$

Neste caso, temos $\vec{\Omega} = 0$.

A figura embaixo 5.9 mostra uma realização prática deste tipo de escoamento: um líquido escapa de um recipiente por uma tampa no fundo. Forma-se um redemoinho (similar ao de uma banheira que se esvazia) em que a velocidade aumenta à medida que se aproxima do eixo.

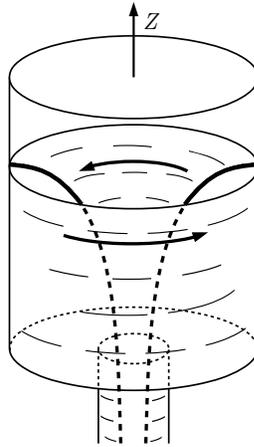


Figura 5.9: Exemplo de movimento do tipo redemoinho. Na foto, duas garrafas pets, sendo uma sem fundo, são juntadas pelas tampas - coladas e furadas. Despejamos água na de cima e damos um pequeno movimento de rotação nela.

Exemplo (5.3)

Calcular a forma da superfície livre deste escoamento supondo o fluido incompressível.

Solução:

Para um fluido incompressível, usando o fato que o escoamento é irrotacional, podemos usar a fórmula de Bernoulli no espaço todo (exceto $r=0$). Obtemos:

$$p/\rho + gz + \Gamma^2/(4\pi^2 r^2) = cste \quad (5.7)$$

A superfície livre assume uma forma afunilada que podemos determinar usando $p = p_0$ (pressão atmosférica) constante nela. Temos

$$z + \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} = cste' \quad (5.8)$$

daí

$$z = cste' - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2}. \quad (5.9)$$

O líquido ocupa a região externa ao funil centrado no eixo excluindo a singularidade em $r = 0$. A altura do fluido z decresce como $-1/r^2$.

Vórtice de Rankine

Este escoamento é uma combinação dos dois anteriores. Ele é definido por

$$\vec{v} = \begin{cases} \omega r \hat{\phi} & \text{se } r \leq R \\ \Gamma/(2\pi r) \hat{\phi} & \text{se } r \geq R \end{cases} \quad (5.10)$$

Exemplo (5.4)

Em março de 2004, o ciclone Catarina atingiu a região sul do Brasil. Foi o primeiro ciclone tropical a ser registrado oficialmente no Atlântico Sul. No pico de intensidade (28 de março), ventos de 160 km/h teriam sido alcançados.

Um ciclone tropical origina sobre águas tropicais quentes, é um sistema de nuvens compacto circular. Ventos fortes circulam em volta de uma região central calma de baixa pressão, chamada o olho do ciclone. Para ter uma ideia das escalas envolvidas, num ciclone intenso (furacão), os ventos aumentam em intensidade do centro do ciclone até atingir seu máximo acima de 100 km/h na “parede” do olho, localizada a uns 15-30 km do centro e diminuem para raios maiores (até uns 150 km). O objetivo deste exemplo é apresentar um

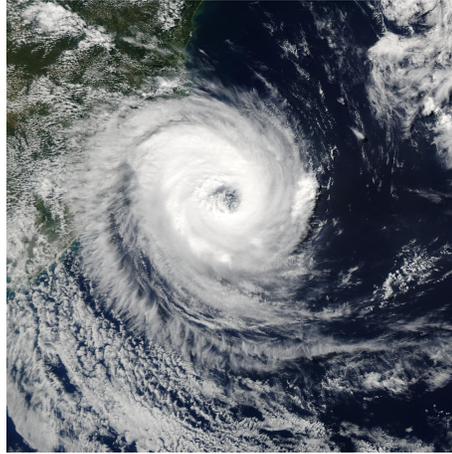


Figura 5.10: Furacão Catarina perto da costa brasileira. Crédito: J. Schmaltz, MODIS Land Rapid Response Team at NASA GSFC.

modelo simplês para este fenômeno (um modelo um pouco mais elaborado é apresentado no exercício 8).

Modelizamos um ciclone por um escoamento perfeito incompressível do tipo vórtice de Rankine.

a) Calcular Γ impondo a continuidade da velocidade. Plotar $v(r)$. Qual é a forma das trajetórias do vento?

b) Desprezando a gravidade, obter $p(r)$ e plotar esta função. Calcular o valor mínimo da pressão no caso do furacão Catarina.

Solução:

a) Precisamos ter $\omega R = \Gamma/(2\pi R)$ i.e. $\Gamma = \omega 2\pi R^2$.

v não depende de t , de modo que trajetórias e linhas de corrente coincidem e são círculos.

b) Temos $d\vec{v}/dt = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = (v/r \partial_\phi)(v(r) \hat{\phi}) = -v^2/r \hat{r}$ e $d\vec{v}/dt = -\vec{\nabla} p/\rho = -1/\rho \partial p/\partial r \hat{r}$. Integrando e usando $p(\infty) = p_{atm}$ bem como a continuidade de p temos $p(r) = \rho \omega^2 r^2/2 + p_{atm} - \rho \omega^2 R^2$ se $r \leq R$ e $p(r) = \rho \omega^2 R^2/(2r^2) + p_{atm}$ se $r \geq R$.

Usando $v_{max} = v(R) = R\omega = 160 \text{ km/h}$ obtemos $p_{min} = p(r=0) = p_{atm} - \rho \omega^2 R^2 \sim 10^5 - 1 \times (160 \cdot 10^3/3600)^2 \sim 0,98 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

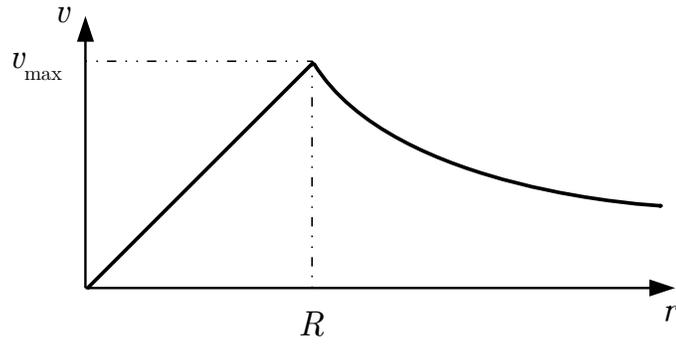


Figura 5.11: Velocidade do vórtice de Rankine.

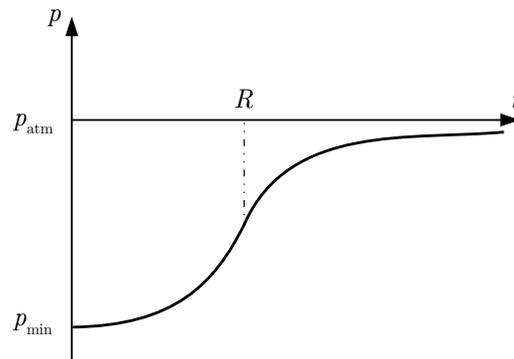


Figura 5.12: Pressão do vórtice de Rankine.

5.1.3 Linhas e tubos de vórtice

Analogamente à linha de corrente, podemos definir uma **linha de vórtice** ou **vortex** como sendo uma linha tangente a $\vec{\Omega}$ em todos os pontos num dado instante. Similarmente também sua equação pode ser obtida com $d\vec{l}/ds = \vec{\Omega}$. Por exemplo para a rotação de corpo rígido $\vec{v} = \omega r \hat{\theta}$, as linhas de corrente são círculos de raio r . Como $\vec{\Omega} = 2\omega \hat{z}$, as linhas de vórtice são linhas paralelas a Oz .

Da mesma maneira que tubos de corrente, podemos também considerar **tubos de vórtice** formados de linhas de vórtice.

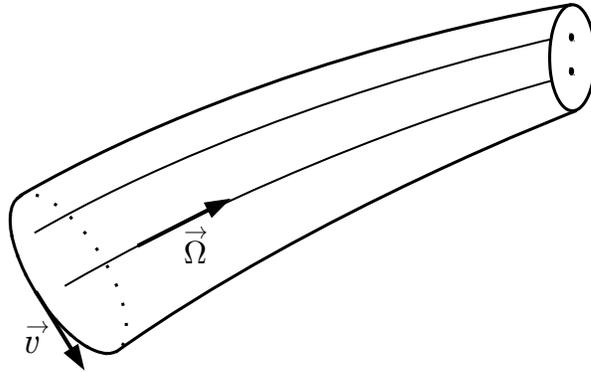


Figura 5.13: Tubo de vórtice.

Anéis de fumaça são as vezes produzidos por chaminês, vulcanos, fumantes. Este tipo de anéis também pode ser produzido no laboratório como mostrado na figura 5.14. Golfinhos e certas baleias são capazes de produzir anéis de ar. Pode-se encontrar vários filmes sobre isto na internet. O artigo [1] apresenta uma explicação interessante de como eles fazem, tipos de bolha, física envovida.

Outro exemplo de tubo de vórtice são os tornados. A configuração do tubo é mostrada na figura 5.15.

5.1.4 Equação de movimento para a vorticidade

Para um fluido incompressível, usando

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2, \quad (5.11)$$

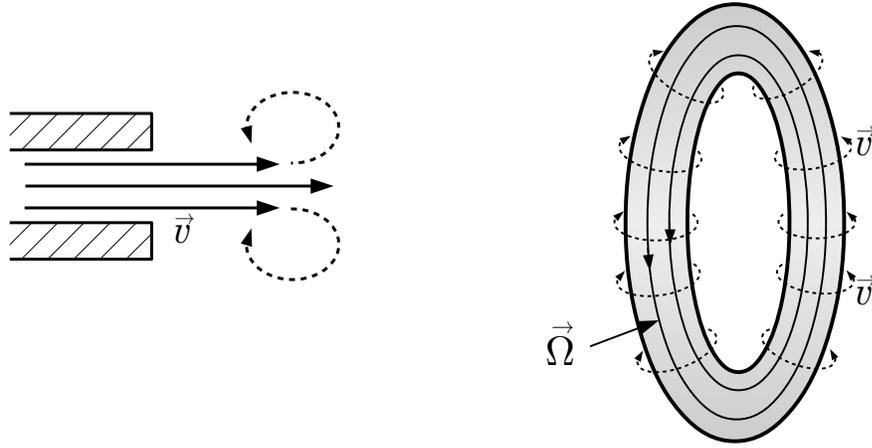


Figura 5.14: Mecanismo para formação de tubo de vórtices: devido à viscosidade, a velocidade diminui nas bordas do jato saindo da abertura, o que gera um movimento de rotação. Demonstração. Uma garrafa pet é na metade e esta extremidade é coberta por um pedaço de bexiga. Em seguida introduz-se fumaça com um bastão de incenso aceso. Finalmente bate-se na parte coberta por bexiga para ver anéis escapando.

a equação de Euler pode ser re-escrita

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right). \quad (5.12)$$

Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos lados, temos

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0. \quad (5.13)$$

Vemos que esta equação só envolve $\vec{\Omega}$ e \vec{v} . Usando a igualdade

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \quad (5.14)$$

podemos re-escrever 5.13 na forma de uma equação de movimento para $\vec{\Omega}$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \quad (5.15)$$

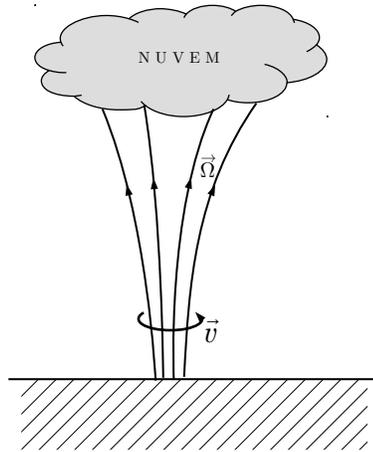


Figura 5.15: Outro exemplo do tubo de vórtice: um tornado.

5.2 Teorema da circulação de Kelvin

5.2.1 Definição da circulação

Uma grandeza importante para caracterizar um escoamento é a circulação da velocidade. A *circulação* Γ ao longo de uma curva fechada orientada C é definido como:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (5.16)$$

onde \vec{v} é a velocidade do fluido e $d\vec{l}$ o elemento de linha ao longo de C , orientado no sentido positivo do percurso, cf. fig. 5.16. Para calcular a circulação só importa a componente da velocidade ao longo do caminho.

Exemplo (5.5)

a) Calcular a circulação sobre um círculo centrado em O para um escoamento com rotação ao redor de O do tipo a) corpo rígido, b) redemoinho.

Solução:

a) Temos $\vec{v} = \omega r \hat{\phi}$ e $d\vec{l} = r d\phi \hat{\phi}$. Assim $\Gamma_{circ} = vr \oint_L d\phi = vr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi r^2 \omega$.

b) Temos $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \hat{\phi}$ e $d\vec{l} = r d\phi \hat{\phi}$. Assim $\Gamma_{circ} = vr \oint_L d\phi = vr \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi vr = \Gamma$. Neste caso, a circulação sobre qualquer círculo centrado em O

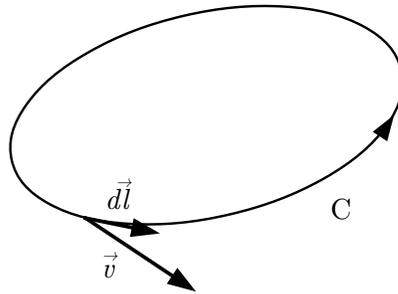


Figura 5.16: Caminho C para o cálculo da circulação.

vale Γ qualquer que seja o raio do círculo.

Exemplo (5.6)

a) Calcular a circulação sobre o circuito ABCDA da figura 5.17 para um escoamento com rotação ao redor de O do tipo a) corpo rígido, b) redemoinho.

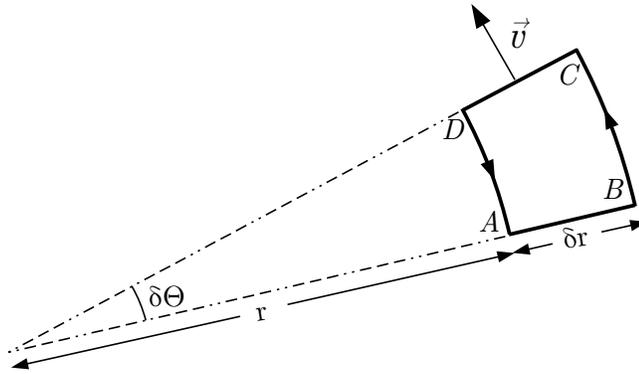


Figura 5.17: Caminho ABCDA.

Solução:

a) $\Gamma_{ABCD A} = \oint_{ABCD A} \vec{v} \cdot d\vec{l}$. Como \vec{v} é perpendicular a AB e DC, a contribuição destes trechos à integral é nula.

$$\Gamma_{ABCD A} = -\int_{\delta\theta}^0 v(r)r d\theta + \int_0^{\delta\theta} v(r + \delta r)(r + \delta r) d\theta = -\omega r^2 \delta\theta + \omega(r + \delta r)^2 \delta\theta = \omega \delta\theta (2r\delta r + \delta r^2).$$

b) similarmente $\Gamma_{ABCD} = -\int_{\delta\theta}^0 v(r)r d\theta + \int_0^{\delta\theta} v(r + \delta r)(r + \delta r) d\theta = \Gamma/(2\pi)(-\delta\theta + \delta\theta) = 0$.

5.2.2 Enunciado do teorema de Kelvin

O enunciado do teorema pode ser dado da seguinte maneira: “Num fluido perfeito,

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = 0 \quad (5.17)$$

onde C é uma curva constituída sempre das mesmas partículas, portanto acompanhando o movimento do fluido”. Em palavras: se seguirmos as partículas que formam o circuito C , a circulação Γ_C é sempre a mesma. Isto vale se o fluido for de densidade uniforme ($\rho = cste$) ou barométrico ($p = p(\rho)$, cf. §4.1.3).

Demostramos este teorema. Num dado instante t ,

$$\Gamma_C = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l}. \quad (5.18)$$

No instante $t + dt$, o caminho C se deslocou para uma nova posição, podendo se deformar.

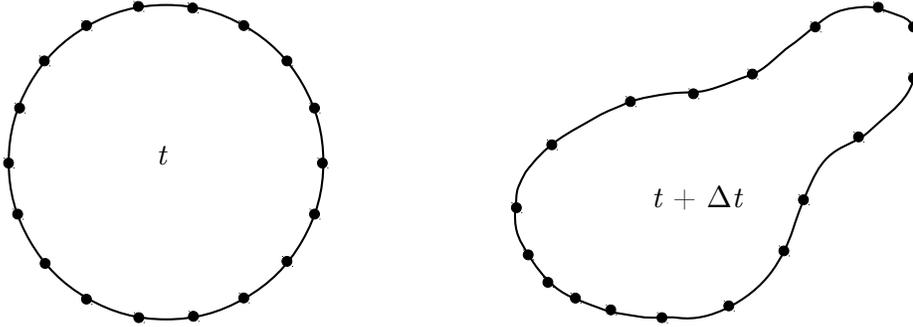


Figura 5.18: Caminho formado de partículas em t e $t + dt$.

Introduzemos uma parametrização s de C , de modo que $\vec{l} = \vec{l}(s, t)$ Temos

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{v} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{l}}{dt} \right) ds \quad (5.19)$$

Usamos o fato que para fluido incompressível ou barométrico, $d\vec{v}/dt = -(1/\rho)\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}gz = -\vec{\nabla}f$. Em adição, como o circuito é formado de partículas de fluido, $d\vec{l}/dt = \vec{v}$. Temos

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_L \vec{\nabla} f d\vec{l} + \oint_L \vec{\nabla} (v^2/2) d\vec{l} \quad (5.20)$$

Ambos termos a direita são nulos de modo que

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (5.21)$$

5.3 Teorema das linhas de vórtice de Helmholtz

5.3.1 Definição da intensidade de um tubo de vórtice

Podemos relacionar a circulação com a vorticidade usando o teorema de Stokes¹.

Consideramos C_S formado por partículas de fluido. Temos

$$\Gamma = \oint_{C_S} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot \vec{dS} = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{dS} \quad (5.22)$$

A quantidade $\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{dS}$ é chamada **intensidade do tubo de vortex**, ela coincide com a circulação. Sabemos que ela **não muda com o tempo** se valem as condições onde o teorema de Kelvin se aplica.

5.3.2 Enunciado do teorema de Helmholtz

O teorema dá regras sobre o movimento de linhas de vórtice.

(i) A intensidade de um tubo de vórtice é constante ao longo do tubo. Isto implica que os tubos de vórtice são fechados ou acabam nas fronteiras do fluido.

(ii) Um tubo de vórtice (ou linha de vórtice) se movimenta com o fluido i.e. sempre é formado das mesmas partículas.

¹Isto não pode ser feito no caso do redemoinho quando a circulação é calculada em volta de um círculo centrado em O pois a velocidade e seu rotacional não são definidos em $r=0$.

5.3. TEOREMA DAS LINHAS DE VÓRTICE DE HELMHOLTZ¹²⁹

(iii) A intensidade de um tubo de vórtice se mantém constante durante o movimento. Em particular um movimento inicialmente irrotacional permanece irrotacional.

Para verificar o (i), basta observar que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} = 0$ pois é a divergência de um rotacional. Assim como vimos nas seções 2.2.2 e 4.1.2, considerando um pedaço de tubo de vórtice limitado pelas tampas A_1 e A_2 , temos: $\int_{A_1} \vec{\Omega} d\vec{S} = \int_{A_2} \vec{\Omega} d\vec{S}$ (que se reduz a $A_1\Omega_1 = A_2\Omega_2$ para tampas transversais pequenas). Tubos de vórtice tem que ser fechados como num anel de fumaça ou ar, ou acabar nas fronteiras do fluido como num tornado.

A demonstração do (ii) usa o teorema de Kelvin. Consideremos um pedaço de tubo de vórtice e um circuito sobre o corpo do tubo. A circulação ao redor deste circuito é nula ($\vec{\Omega} \perp d\vec{S}$). A medida que o fluido se movimenta, a circulação sobre este circuito ligado às partículas do fluido permanece nula i.e. não há fluxo de vorticidade através da superfície delimitada pelo circuito. Isto vale para qualquer circuito da parede assim não há fluxo de vorticidade para fora ou dentro das paredes do tubo. Um raciocínio similar pode ser feito para um circuito sobre a tampa do tubo: a circulação sobre este circuito ligado às partículas do fluido permanece com o mesmo valor. O fluido que forma o tubo de vórtice (ou linha de vórtice, que é o limite de um tubo muito pequeno) continua dentro conforme o tempo passa. Se colorimos as partículas de fluido formando um tubo de vorticidade, quando o fluido se desloca, estas partículas com cor indicarão a nova posição do tubo. Quando observamos o deslocamento de um anel de fumaça ou ar, testemunhamos isto (cf. exercício 10).

O (iii) já foi visto na §5.3.1.

5.3.3 Ligação com a conservação de momento angular

Nas demonstrações acima, não fizemos menção explícita da conservação de momento angular. Ela vem embutida na equação de Euler, válida somente para os fluidos perfeitos, e onde não existe força tangencial. Nesta seção mostramos como usa-la explicitamente num caso particular (fluido perfeito de densidade uniforme com rotação de corpo rígido) para obter a parte (iii) do teorema de Helmholtz.

Consideremos, num instante t , um pequeno cilindro de fluido de volume como mostrado na figura 5.19 a esquerda.

Tomemos a base ΔS perpendicular a $\vec{\Omega}$. Devido ao escoamento, este

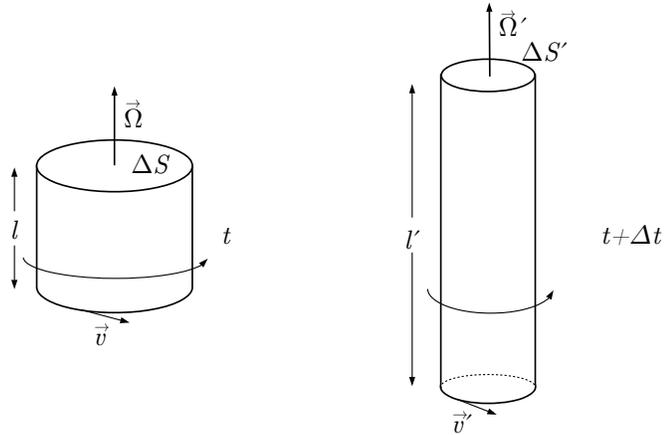


Figura 5.19: No escoamento rotacional, um elemento do fluido incompressível gira com centro num ponto, conservando seu momento angular em relação a este ponto enquanto ele é transportado.

cilindro vai-se encontrar, no instante $t + \Delta t$, num outro ponto (figura lado direito) e, em geral, deformado porém conservando o volume pois $\rho = \text{const.}$ e a conservação da massa implica em $l\Delta S = l'\Delta S'$.

Como o fluido é perfeito, não há nenhuma força tangencial agindo sobre a superfície do volume, nem torque externo, portanto o seu momento angular deve permanecer constante ($\sum \vec{\tau}_{ext} = d\vec{M}/dt$). Calculemos então o momento angular no instante t e depois em $t + \Delta t$ e igualemos entre si (supondo rotação de corpo rígido para fixar as ideias)

$$M = \left| \int \vec{r} \times \rho \vec{v} dV \right| = \rho l \int_0^R r(\omega r) 2\pi r dr = 2\pi\omega\rho l \frac{R^4}{4} = \omega\rho l R^2 \frac{\Delta S}{2} \quad (5.23)$$

no instante t . No instante $t + \Delta t$, temos analogamente

$$M' = \omega' \rho l' R'^2 \frac{\Delta S'}{2}. \quad (5.24)$$

Portanto, igualando $M = M'$ e, lembrando que $l\Delta S = l'\Delta S'$, segue

$$\Omega \Delta S = \Omega' \Delta S', \quad (5.25)$$

isto é, o movimento é tal que o produto da vorticidade e a área da seção reta de um tubo de vórtice, a intensidade, permanece constante.

Em adição, vemos que se o tubo fica mais alongado, ele tem que ser mais estreito (para conservar a massa) e girar mais rápido (para satisfazer a eq. 5.25).

Exemplo (5.7)

Supor um fluido perfeito incompressível com vorticidade $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Usando a equação (5.15) mostrar diretamente que o alongamento do tubo de vórtice leva a um aumento da vorticidade.

Solução:

Na direção z , a eq. (5.15) leva a

$$\frac{d\Omega}{dt} = \Omega \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (5.26)$$

Se alongarmos na direção z um pedaço de tubo de vórtice, $\partial v_z / \partial z > 0$, de modo que $d\Omega / dt > 0$.

Este resultado pode ser generalizado facilmente para anéis cf. §5.3 da ref. [2].

Para rever alguns dos assuntos deste capítulo (e alguns novos) de maneira intuitiva e lúdica, recomendo a leitura de [3]. Para quem quiser se aprofundar mais no assunto dos fluidos com vorticidade (em particular superfluidos), sugiro a leitura do livro de Kambe [4].

5.4 Exercícios

1. Revisão sobre coordenadas cilíndricas

Para calcular o gradiente, divergência e rotacional em coordenadas cilíndricas, pode-se transformar $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} em coordenadas cilíndricas. Um método alternativo mais rápido é usar o operador

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

No cálculo das derivadas, precisa-se levar em conta:

$\partial \hat{\rho} / \partial \phi = \hat{\phi}$ e $\partial \hat{\phi} / \partial \phi = -\hat{\rho}$. a) Calcular $\vec{\nabla} f$.

b) Calcular $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

c) Calcular $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

d) Verificar que se pode escrever $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ como $\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial \rho & \partial/\partial \phi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$.

2.

Um escoamento tem velocidade dada em coordenadas polares por $\vec{v} = f(r, t)\hat{\phi}$.

a) Calcular $1/2 \vec{\nabla} v^2$ e $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$.

b) Calcular a aceleração e interpretar os dois termos $\partial \vec{v} / \partial t$ e $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$.

3. Revisão sobre coordenadas esféricas

Repetir o 1, usando $\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\phi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\theta} \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$. No c), usar

$$\frac{1}{r^2 \sin \phi} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & r \sin \phi \hat{\theta} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \phi & \partial/\partial \theta \\ A_r & rA_\phi & r \sin \phi A_\theta \end{vmatrix}$$

4.

Determine as linhas de corrente e de vorticidade dos seguintes escoamentos:

a) $\vec{v} = (-Cy, Cx, 0)$ e

b) $\vec{v} = (-Cy/r^2, Cx/r^2, 0)$, $r^2 = x^2 + y^2$,

onde C é uma constante. Calcule $|\vec{v}|$ e comentar sobre o que representa a constante C nos dois casos.

5.

Considere um campo de velocidade $\vec{v} = (ky, 0, 0)$ com k constante.

a) Calcule a circulação ao redor de um círculo de raio R como uma integral de linha.

b) Mesma pergunta mas usando uma integral de superfície.

6.

Considere um fluido incompressível.

a) Para o escoamento de tipo redemoinho (velocidade $\propto 1/r$), num plano horizontal, escreva uma equação para dp/dr . Obtenha p como função de r a partir desta equação (supondo o fluido incompressível). Este resultado obtido era esperado?

b) Repete o cálculo para a rotação de corpo rígido (velocidade $\propto r$).

7.

Derive uma equação do tipo de 5.13 no caso compressível homentrópico.

8.

Considere um circuito C de partículas de um fluido perfeito, dado pela expressão seguinte em $t=0$

$$\vec{l} = (A \cos s, A \sin s, 0), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Cada valor de s corresponde à uma partícula de C . Posteriormente $C(t)$ è

dado por

$$\vec{l} = (A \cos s + A \alpha t \sin s, A \sin s, 0), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

Calcular a velocidade $\vec{v}(s, t)$ das partículas. Calcular a circulação $\Gamma_{C(t)}$. Nesta expressão, verifique que o integrando depende de t mas a integral não depende de t . Isto lhe surpreende?

9.

Um tornado pode ser modelizado por um escoamento de velocidade $\vec{V}(t, r, z) = u(t, r, z)\hat{r} + v(t, r, z)\hat{\phi} + w(t, r, z)\hat{z}$ com vorticidade $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \Omega(t, r, z)\hat{z}$.

a) Mostrar que v e Ω só dependem de r e t e que $\partial u / \partial z = \partial w / \partial r$.

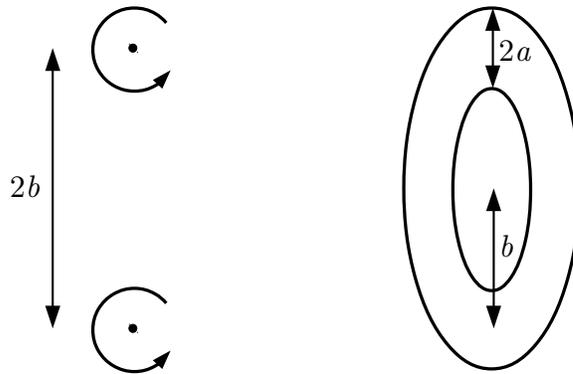
b) Use a equação da vorticidade para mostrar que u só depende de r e t e w só depende de z e t .

c) Para um fluido incompressível, mostrar que $\partial u / \partial r = -\partial w / \partial z$ e calcular u e w com os vínculos: $u(r=0) = 0$, $w(z=0) = 0$ e $w(z=H) = W$.

d) No caso estacionário, calcular $v(r)$ e $\Omega(r)$. A solução obtida para v e Ω é razoável para todos os valores de r ?

10.

Na experiência onde fumaça escapa de um recipiente com abertura circular, observa-se que os anéis de fumaça se deslocam e mantêm sua forma por algum tempo antes de se deformar e parar. O objetivo do exercício é de entender isto qualitativamente.



a) Um anel de fumaça consiste de um tubo de vorticidade estreito envolto por um escoamento irrotacional e fechado sobre si mesmo. Assim para entender seu movimento, consideremos um conjunto de dois redemoinhos afastados de uma distância $2b$ e com velocidades de rotação opostas

$\vec{v}(r) = \pm\Gamma/(2\pi r)\hat{\theta}$. Mostrar que eles se deslocam como um conjunto com velocidade $U = \Gamma/(4\pi b)$.

Para um tubo de vórtices de seção reta circular de raio a , pode-se mostrar (§3.4.3.4 de [6], §7.6.2 de [4]) que

$$U = \frac{\Gamma}{4\pi b} \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{1}{4} \right)$$

b) Tratando a fumaça num anel como um fluido incompressível, explique porquê que os anéis inicialmente se deslocam mantendo sua forma.

c) Devido á viscosidade a equação de movimento para vorticidade da §5.1.4 se torna $\partial\vec{\Omega}/\partial t + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\eta/\rho)\nabla^2\vec{\Omega}$, onde η é viscosidade de cisalhamento (cf. Cap. VIII) e $\nu \equiv \eta/\rho$. No caso de um redemoinho e fluido incompressível, isto se reduz² à equação de difusão: $\partial\Omega/\partial t = \nu(1/r)\partial(r\partial\Omega/\partial r)/\partial r$. Verique que $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Gamma/(4\pi\nu t)\exp(-r^2/(4\nu t))\hat{z}$ é solução e calcule a velocidade correspondente. O que deve acontecer com o anel conforme o tempo passa?

11.

Pode-se fazer uma analogia com o magnetismo para fluido incompressível com vorticidade. Ela é resumida na tabela abaixo³.

Magnetismo	Mec. Flu. (fluido incompressível)
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j}$	$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\Omega}$
Conhecendo \vec{j} , podemos obter \vec{B} ?	Conhecendo $\vec{\Omega}$, podemos obter \vec{v} ?
Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ ($c/I = \int \vec{j} dS$)	Ampère: $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \Gamma$ ($c/\Gamma = \int \vec{\Omega} dS$)
Biot-Savart: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ $\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV$	Biot-Savart: $d\vec{v} = \frac{1}{4\pi} \Gamma \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ $\vec{v} = \int \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\Omega}(\vec{r}') \times \hat{r}}{r^2} dV$

a) Um vórtice linear (não confundir com linha de vorticidade⁴) é um tubo de vorticidade Ω contraído até ficar uma linha mantendo sua intensidade,

²O laplaciano de um vetor será discutido no Cap. VIII.

³Para uma demonstração sobre a lei de Biot-Savart para fluido e detalhes sobre as condições de aplicabilidade ver §7.1.2 em [4].

⁴Se você pensa que é complicado, em inglês è pior: “line vortex” e “vortex line” respetivamente.

i.e. circulação Γ . Calcular a velocidade produzida por um vórtice linear de circulação Γ ao longo do eixo z de duas maneiras.

b) Calcular a velocidade a uma distância z de um vortice circular i.e. vórtice linear de circulação Γ dobrado num círculo de raio a .

5.5 Referências

[1] K. Matern et al. “Ring bubbles of dolphins”, Scientific American august (1996) 82.

[2] D.J. Acheson “Elementary Fluid Mechanics”, Oxford University Press, 1990.

[3] E. Huggins “Smoke Ring Physics” Physics Teacher 49 (2011) 488.

[4] T. Kambe “Elementary Fluid Mechanics”, World Scientific, 2007.

[5] A.R. Paterson “A first course in fluid dynamics”, Cambridge University Press (1983).

[6] M. Rieutord “Fluid Dynamics”, Springer (2015).

[7] D. J. Griffiths “Introduction to Electrodynamics”, Prentice-Hall (1999) (3a ed.)

5.6 Dicas e respostas

1. Se precisar, ver a §6 do capítulo 1 em [5]. Verifique suas respostas num formulário confiável.

2. a) $(1/2)\vec{\nabla}v^2 = f(\partial f/\partial r)\hat{r}$. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = (1/r)[\partial(rf)/\partial r]\hat{z}$. $(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -[f(\partial f/\partial r) + f^2/r]\hat{r}$. b) $d\vec{v}/dt = (\partial\vec{v}/\partial t) + (1/2)\vec{\nabla}v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = (\partial f/\partial t)\hat{\phi} - (f/r^2)\hat{r}$. O primeiro termo é a aceleração tangencial e o segundo a aceleração radial para o movimento circular. Como alternativa, poderíamos ter calculado diretamente $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ e $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$.

3. É um pouco trabalhoso mas dá para proceder como no 1. Se precisar, ver as dicas para resolver o exercício 8 do capítulo 1 em [5]. Verifique suas respostas num formulário confiável.

4. a) Resolvemos $dx/v_x = dy/v_y \Leftrightarrow dx/y = dy/dx \Leftrightarrow x^2 + y^2 = cste$: as linhas de corrente são círculos. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2C\hat{z}$. As linhas de vorticidade são retas paralelas ao eixo Oz . $|\vec{v}| = Cr$, i.e. o movimento é uma rotação de corpo rígido com velocidade angular C .

b) Resolvemos $dx/v_x = dy/v_y \Leftrightarrow -dx/y = dy/x \Leftrightarrow x^2 + y^2 = cste$: as linhas

de correnet são círculos. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Não há linhas de vorticidade. $|\vec{v}| = C/r$, i.e. o movimento é uma rotação de tipo redemoinho. C é relacionado com a circulação $\Gamma_{circ} = \oint_{circ} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint (C/r) r d\phi = C2\pi$.

5.

a) $\Gamma_{circ} = \oint_{circ} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} ky\hat{x} \cdot R d\phi \hat{\phi} = -kR^2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2\phi d\phi = -kR^2\pi$ onde usamos $y = R\text{sen}\phi$ e $\hat{x} = \cos\phi\hat{r} - \text{sen}\phi\hat{\phi}$.

b) $\int_{disco} \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (-k\hat{z})(r dr d\phi \hat{z}) = -kR^2\pi = \Gamma_{circ}$ como esperado.

6

a) Temos $\vec{v} = \Gamma/(2\pi r)\hat{\phi}$. Este escoamento é estacionário e de rotacional nulo, o fluido é incompressível, de modo que a equação de Euler se reduz a: $d\vec{v}/dt = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = (1/2)\vec{\nabla}v^2 = -\vec{\nabla}(p/\rho) \Leftrightarrow d(p/\rho + v^2/2)/dr = 0 \Leftrightarrow p/\rho + v^2/2 = \text{cte}$, i.e. obtemos um equação do tipo “Bernouilli no espaço todo” como esperado. Integrando e usando $v(r = \infty) = 0$, obtemos $p(r) = -\rho\Gamma^2/(8\pi^2r^2 + p(\infty))$.

b) Temos $\vec{v} = \omega r\hat{\phi}$. Este escoamento é estacionário e de rotacional NÃO nulo, o fluido é incompressível. Temos $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = r\omega(1/r)\partial(r\omega\hat{\phi})/\partial\phi = -r\omega^2\hat{r}$. A equação de Euler se reduz a: $dp/dr = r\omega^2\rho$. Obtemos $p(r) = (1/2)r^2\omega^2\rho + p(0)$. Não é do tipo “Bernouilli no espaço todo”, o que não precisa ser o caso já que o escoamento não é irrotacional.

7 A derivação é bastante similar à da §5.1.4. Com $dw = dp/\rho$ para escoamento homentrópico, a equação de Euler pode ser re-escrita $\partial\vec{v}/\partial t + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla}(v^2/2 + w + gz)$. Aplicando $\vec{\nabla} \times$ a ambos lados, temos $\partial\vec{\Omega}/\partial t + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0$. O segundo termo pode ser re-escrito e obtemos $d\vec{\Omega}/dt = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{\Omega} + (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. Usando a equação de continuidade para ρ vem $d(\vec{\Omega}/\rho)/dt = (1/\rho)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$.

8 $\vec{v} = (\partial\vec{l}/\partial t)|_s = (A\alpha \text{sen } s, 0, 0)$. $\Gamma_{C(t)} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{v} \cdot (\partial\vec{l}/\partial s)|_t ds = \int_0^{2\pi} (A\alpha \text{sen } s\hat{x})(-A \text{sen } s + A \alpha \text{cos } s)\hat{x} ds = -\alpha A^2\pi$. A circulação não pode depender de t para um circuito formado sempre pelas mesmas partículas. Observar que o circuito é um círculo que se deforma com o tempo.

9 a) $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = (-\partial v/\partial z)\hat{r} + (\partial u/\partial z - \partial w/\partial r)\hat{\phi} + (1/r)[\partial(rv)/\partial r]$ só tem componente na direção z de modo que $v(t, r, z) = v(t, r)$, $\partial u/\partial z = \partial w/\partial r$, $\Omega(t, r, z) = (1/r)[\partial(rv)/\partial r] = \Omega(t, r)$.

b) $(\partial\vec{\Omega}/\partial t) + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{\Omega} = (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$. Isto implica $(\partial\Omega/\partial t)\hat{z} + (u\partial/\partial r)(\Omega(t, r)\hat{z}) = (\Omega\partial/\partial z)(u\hat{r} + v\hat{\phi} + w\hat{z})$ de modo que $(\partial\Omega/\partial t + (u\partial/\partial r)(\Omega(t, r) = \Omega(\partial w/\partial z)$, $u(t, r, z) = u(t, r)$, $w(t, r, z) = w(t, z)$ (usamos $\partial u/\partial z = \partial w/\partial r$).

c) $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow (1/r)(\partial ru/\partial r) = -(\partial w/\partial z) = K$. Obtemos $u =$

$(-W/2H)r$ e $w = (W/H)z$.

d) Usando o b), temos $u \partial \Omega / \partial r = \Omega \partial w / \partial z$. Usando o c), obtemos $\Omega = C/r^2$. Usando o a), temos $\Omega = (1/r)[\partial(rv)/\partial r]$ e obtemos $v = C \ln r/r + k/r$. Ambos Ω e v divergem para $r \rightarrow 0$.

10 a) Um dado redemoinho induz um escoamento de velocidade $\Gamma/(4\pi b)$ na posição (temporária do outro). Como resultado o conjunto se desloca com velocidade $\Gamma/(4\pi b)$ para a direita.

b) Isto é resultado do teorema de Helmholtz: se colorirmos as partículas de fluido sobre um tubo de vorticidade (o que a fumaça faz), elas se deslocam com o fluido marcando a nova posição do tubo e a intensidade do tubo de vorticidade $\Omega \Delta S$ se mantém constante no movimento.

c) $\partial \Omega / \partial t = -\Omega/t + r^2/(4\nu t^2)\Omega = \nu(1/r)\partial(r\partial \Omega / \partial r)/\partial r$. $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \Omega \hat{z} \Leftrightarrow \partial(rv)/\partial r = \Omega r$. Integrando e usando $v(r, t=0) = \Gamma/(2\pi r)$ temos $v = \Gamma/(2\pi r)[1 - \exp(-r^2/(4\nu t))]$. Para r grandes, precisamente $r \gg \sqrt{4\nu t}$, a velocidade e vorticidade não são afetadas. Para r pequenos, $r \ll \sqrt{4\nu t}$, a velocidade é linear em r i.e. um movimento de corpo rígido: $v = \Gamma/(8\pi\nu t)r$, o movimento não é mais irrotacional mas $\Omega \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Similarmente para o anel de fumaça, a vorticidade difusa para fora da região $r \sim 0$.

11 a) A derivação se faz como para calcular o campo magnético de um fio reto infinito de corrente I ao longo de Oz usando a lei de Ampère como no exemplo 5.7 de [7]. Substituindo $\mu_0 I$ por Γ , obtem-se $\vec{v} = \Gamma/(2\pi r)\hat{\phi}$. Pode-se ver que o vórtice linear é um redemoinho extendido em 3 dimensões. A derivação pode ser feita também com a lei de Biot-Savart como no exemplo 5.5 de [7].

b) A derivação pode ser feita também com a lei de Biot-Savart como no exemplo 5.6 de [7]. Obtem-se $\vec{v} = (\Gamma/2)a^2/(a^2 + z^2)^{3/2}\hat{z}$.

Capítulo 6

ONDAS COMO MOVIMENTOS POTENCIAIS

No capítulo anterior, estudamos movimentos rotacionais e irrotacionais. Neste capítulo, aprofundamos o caso irrotacional. Consideremos um fluido com $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Na eletrostática vemos que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ implica que podemos escrever $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, com ϕ = potencial eletrostático. Similarmente na mecânica dos fluidos, podemos introduzir uma função escalar ϕ tal que

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi \quad (6.1)$$

Por esta razão, o movimento irrotacional é também chamado de movimento potencial. A vantagem deste tipo de movimento é que o estudo de um campo escalar é em geral mais simples do que o estudo de um campo vetorial.

6.1 Exemplos de critérios para a existência de movimentos potenciais

Nesta seção discutimos casos onde o movimento pode ser considerado potencial.

6.1.1 Passagem por um obstáculo

Conforme vimos na capítulo anterior, se um fluido perfeito estiver inicialmente em movimento potencial, ele continuará assim para sempre. Na rea-

lidade nenhum fluido é rigorosamente perfeito. Quando um fluido passa por um obstáculo, a viscosidade e o atrito com o obstáculo provocam o aparecimento de turbilhões atrás dele como veremos no Cap.VIII. Mas excetuando a região muito próxima ou atrás do obstáculo, o movimento é aproximadamente potencial.

6.1.2 Movimento de oscilação num fluido

A ideia neste caso é observar que em certas condições $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ pode ser muito menor que os outros termos da equação de Euler e assim desprezado.

Consideremos um objeto de dimensão característica $\sim l$, mergulhado num fluido e executando um movimento de oscilação de amplitude $a \ll l$ com velocidade $\sim u$.

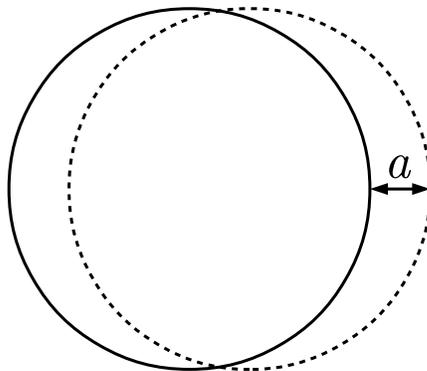


Figura 6.1: Amplitude de oscilação de um objeto.

Desprezando o termo da interação gravitacional e supondo que o movimento seja homentrópico (onde $dw = dp/\rho$)¹, a equação de Euler se escreve

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}w. \quad (6.2)$$

Vamos fazer uma estimativa da ordem de grandeza dos termos que contém \vec{v} .

¹A demonstração pode ser feita em outros casos: fluido de densidade constante, fluido bariotrópico.

6.1. EXEMPLOS DE CRITÉRIOS PARA A EXISTÊNCIA DE MOVIMENTOS POTENCIAIS 141

Esperamos que a velocidade do fluido v seja da ordem de u e que ela varie sobre distâncias $\sim l$. Portanto,

$$|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}| \sim \frac{u^2}{l} . \quad (6.3)$$

Por outro lado, o tempo característico para mudanças é o período de oscilação τ , i.e. deve ser da ordem de a/u . Assim,

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{u^2}{a} . \quad (6.4)$$

Comparando os dois termos e levando em conta que $a \ll l$, temos

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \gg |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}| . \quad (6.5)$$

Portanto, podemos desprezar o termo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ em comparação a $\partial \vec{v} / \partial t$ na equação de Euler. Temos, então,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \simeq -\vec{\nabla} w . \quad (6.6)$$

Calculando o rotacional do 1º e do 2º membros desta equação, vem

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \simeq 0 \quad (6.7)$$

de modo que

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \simeq \text{const.} \quad (6.8)$$

Fazendo a média no tempo, $\langle \vec{\nabla} \times \vec{v} \rangle = \text{const} = \vec{\nabla} \times \langle \vec{v} \rangle = 0$ (para um movimento oscilatório $\langle \vec{v} \rangle = 0$). Portanto, $\vec{\nabla} \times \vec{v} \simeq 0$.

Assim, o movimento de um fluido perfeito com um objeto oscilando imerso com $a \ll l$ é aproximadamente irrotacional.

6.1.3 Outros exemplos

A seguir veremos que as ondas do mar e as ondas sonoras também podem ser consideradas movimentos potenciais.

6.2 Potencial ϕ

6.2.1 Equações para o potencial

Vamos obter agora duas equações para o potencial de velocidade ϕ .

Consideremos inicialmente a equação de Euler

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} \quad (6.9)$$

e usemos

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}v^2 \quad (6.10)$$

Vamos também supor o movimento homentrópico de modo que² $\vec{\nabla}p/\rho = \vec{\nabla}w$ e escrever $\vec{g} = -\vec{\nabla}(gz)$. Temos, então,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left[\frac{v^2}{2} + w + gz\right] = 0. \quad (6.11)$$

Substituindo $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ temos

$$\vec{\nabla}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2} + w + gz\right] = 0. \quad (6.12)$$

Esta equação pode ser integrada dando

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}\phi)^2}{2} + w + gz = f(t). \quad (6.13)$$

É a forma da equação de Euler para ϕ .

A função $f(t)$ que aparece no 2º membro é uma função arbitrária de t e pode ser escolhida igual a 0. Suponhamos que temos achado a solução ϕ de (6.13). Consideremos

$$\tilde{\phi} = \phi + \int_a^t f(t') dt'. \quad (6.14)$$

Temos $\vec{v} = \vec{\nabla}\tilde{\phi}$ de modo que $\tilde{\phi}$ satisfaz uma equação do tipo (6.13)

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}\tilde{\phi})^2}{2} + w + gz = f(t) \quad (6.15)$$

²De novo, podemos fazer esta derivação no caso de fluido de densidade constante ou barotrópico.

Substituindo por (6.14) obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} \phi)^2}{2} + w + gz = 0 \quad (6.16)$$

que é a equação de Euler/Bernoulli generalizada para escoamento irrotacional homentrópico, nossa primeira equação.

Havíamos visto que, para um movimento estacionário homentrópico irrotacional, o teorema de Bernoulli $\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{cte}$ num filete podia ser generalizado para $\frac{v^2}{2} + w + gz = \text{cte}$. Este resultado segue também da equação (6.13), pois para um fluxo estacionário, podemos escolher ϕ independente de t e $f(t) = \text{cte}$. Nesse sentido, a nova equação (6.16) é uma generalização ainda maior do teorema de Bernoulli, valendo no caso não-estacionário.

Vamos agora obter a outra equação para ϕ . Substituindo $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$ na equação de continuidade, temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} \phi) = 0 \quad (6.17)$$

que é a equação da continuidade para escoamento irrotacional.

Para um movimento homentrópico $p(\rho, s) = p(\rho)$. Portanto as duas equações acima podem ser consideradas como equações acopladas para as incógnitas³ ϕ e p .

6.2.2 Condições de contorno para ϕ

Sobre as paredes de um obstáculo (em repouso), devemos ter

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (6.18)$$

ou, em termos de ϕ , e decompondo $\vec{\nabla} \phi$ em parte paralela a \vec{n} e parte perpendicular a \vec{n}

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (6.19)$$

onde a derivada é calculada na direção da normal à superfície.

No caso em que a parede está em movimento, condições similares devem ser satisfeitas em relação ao referencial de repouso da parede.

³Isto também é o caso para um fluido de densidade uniforme ou barotrópico.

6.2.3 Caso particular de um fluido com $\rho = \text{cte}$

No caso de movimento potencial de um fluido com $\rho = \text{cte}$ temos⁴:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Uma vez obtida \vec{v} , usamos a equação de Euler para obter p .

Este sistema de equações é exatamente o mesmo encontrado na eletrostática no vácuo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

ou na magnetostática no vácuo

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Portanto, podemos usar os mesmos métodos usados lá para resolver os problemas de movimentos irrotacionais de um fluido incompressível.

Em particular, podemos introduzir a função potencial, cuja existência é garantida pela segunda das equações 6.20, e substituir na primeira, obtendo a equação de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (6.23)$$

6.3 Ondas do mar

Esta seção apresenta um exemplo de aplicação das ideias desenvolvidas na seção anterior.

6.3.1 Os tipos de onda de superfície

A superfície livre de um líquido em equilíbrio no campo de gravitação terrestre é plana. As ondas se propagando nesta superfície podem ser classificadas segundo o mecanismo que as gerou, a força que tende a atenuá-las e seu período.

⁴Mais geralmente poderíamos supor simplesmente $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ o que é equivalente a $d\rho/dt = 0$ (devido à equação de continuidade).

Por exemplo:

- As menores ondas (ex. ondinhas num poço), com comprimento não maior do que uns centímetros, tem período menor que uns décimos de segundo. Elas são geradas por um pequeno sopro de vento e como são pequenas, a tensão superficial atua como força restauradora principal. São chamadas ondas capilares.
- As ondas mais comuns, as ondas de gravidade, tem período entre 1 e 30 s. Elas são geradas pela ação do vento soprando na superfície da água (energia e momento são transferidos pelo vento à água) e são restauradas pela gravidade.
- Ondas com período maior que 5 minutos tem comprimento de onda grande. Elas são geradas por intensos temporais e terremotos. São restauradas pela gravidade.
- As ondas de maré com período de 12 ou 24 horas tem grande comprimento de onda. Elas são geradas pela ação do Sol e da Lua, são restauradas pela gravidade e a força de Coriolis.

Neste capítulo, estudaremos as ondas de gravidade.

6.3.2 As ondas do mar como exemplo de movimento potencial

Vamos considerar ondas cuja amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento de onda:

$$a \ll \lambda. \quad (6.24)$$

Vamos mostrar que na equação de Euler $|\partial\vec{v}/\partial t| \gg |(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}|$. A ordem de grandeza do termo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ pode ser estimada como segue. Durante o período τ de oscilação de uma partícula de fluido, ela percorre um trajeto da ordem de a de modo que sua velocidade é em ordem de grandeza $v \sim a/\tau$. Esta velocidade varia substancialmente (por exemplo ela pode se inverter) sobre distâncias da ordem do comprimento de onda, de modo que

$$|\vec{\nabla}v| \sim \frac{v}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau} \right), \quad (6.25)$$

e

$$|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}| \sim v|\vec{\nabla}v| \sim \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\tau}\right)^2 . \quad (6.26)$$

(De fato os dois termos $|\vec{\nabla}v^2/2|$ e $|(\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}|$ são de ordem $1/\lambda (a/\tau)^2$). A velocidade varia substancialmente para tempos da ordem do período de modo que

$$\left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| \sim \frac{v}{\tau} \sim \frac{a}{\tau^2} . \quad (6.27)$$

Levando em conta (6.24), vemos que

$$|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}| \ll \left| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right| . \quad (6.28)$$

Podemos, portanto, aproximar a equação de Euler por

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g}. \quad (6.29)$$

Raciocinando como na seção 6.1, obtemos $\vec{\nabla} \times \vec{v} \sim 0$. Assim o movimento das ondas do mar com $a \ll \lambda$ pode ser tratado como potencial.

Para movimento potencial com $\rho = \text{const.}$, ϕ satisfaz uma equação de Laplace portanto,

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (6.30)$$

Isto é nossa 2ª equação. A velocidade \vec{v} é obtida resolvendo esta equação.

6.3.3 Condição de contorno na superfície

Para resolver a equação (6.30), precisamos estabelecer as condições de contorno. Para simplificar a discussão, consideremos uma *superfície ilimitada* nas direções x e y , um movimento independente de y , e uma *profundidade infinita*. Outros casos como ondas no caso de profundidade finita e ondas num fluido limitado por um recipiente são tratados nos exercícios. Na superfície livre, a pressão é constante e igual à pressão atmosférica.

Da equação de Euler (6.29), vem

$$\frac{\partial \vec{\nabla} \phi}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}(gz) \quad (6.31)$$

e portanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = 0. \quad (6.32)$$

(Já vimos que a função arbitrária $f(t)$ que deveria aparecer à direita pode ser tomada igual a 0).

Chamamos de $\zeta(x; t)$ a altura da superfície em relação à posição de equilíbrio $z = 0$ como mostrado na figura 6.2.

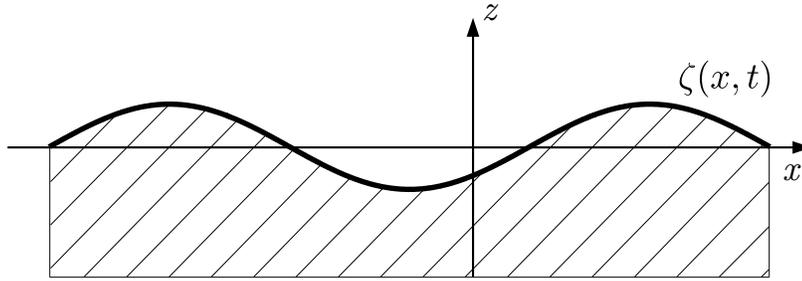


Figura 6.2: Movimento da superfície do mar em relação à posição de equilíbrio $z = 0$.

Temos, para a superfície,

$$p_0 = -\rho g \zeta - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} \quad (6.33)$$

ou redefinindo o potencial $\phi \rightarrow \phi - \frac{p_0}{\rho} t$ o que não altera \vec{v}

$$g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (6.34)$$

Lembrando que $v_z = \partial \phi / \partial z$, temos⁵

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \simeq v_z \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=\zeta}. \quad (6.35)$$

⁵A relação não é exata pois se ζ varia, a água tem velocidade com componentes nas direções x e z . Temos na superfície $z - \zeta(x; t) = 0$ de modo que $d/dt(z - \zeta(x; t)) = 0$. Usando $d/dt = \partial/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla$ e $\vec{v} = (u, 0, w)$ temos $w - \partial \zeta / \partial t - u \partial \zeta / \partial x = 0$. Como para pequena amplitude, devemos ter u pequena, chegamos a $w = \partial \phi / \partial z \Big|_{z=\zeta} \sim \partial \zeta / \partial t$.

Derivando a penúltima equação em relação ao tempo e usando a última, vem

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=\zeta} = 0. \quad (6.36)$$

Como ζ é muito pequeno, por hipótese, podemos ainda aproximar

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0. \quad (6.37)$$

Esta equação representa a condição de contorno na superfície livre e constitui, juntamente com a equação de Laplace e uma equação de contorno no fundo, $\partial\phi/\partial z_{\text{fundo}} = 0$, o sistema de equações que determinam o movimento numa onda de gravidade.

6.3.4 Cálculo do potencial e de \vec{v} para águas profundas

Vamos supor que haja uma onda plana propagando-se na direção Ox e procuramos uma solução da forma

$$\phi(x, y, z; t) = \cos(kx - \omega t) f(z) . \quad (6.38)$$

Substituindo ϕ na equação de Laplace, vem

$$-k^2 f(z) + \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = 0 , \quad (6.39)$$

que pode ser facilmente integrada e dá

$$f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} . \quad (6.40)$$

Como queremos que $v_z \equiv \partial\phi/\partial z$ seja finito para $z \rightarrow -\infty$, segue que $B = 0$, isto é

$$\phi(x, y, z; t) = A \cos(kx - \omega t) e^{kz} . \quad (6.41)$$

Substituindo agora este ϕ na equação para a superfície (6.37), temos

$$\omega = \sqrt{gk}. \quad (6.42)$$

A menos da amplitude A , o potencial ϕ está agora completamente determinado. A onda que nos vemos é dada por

$$\zeta \sim -(1/g)\partial\phi/\partial t|_{z=0} = -(A\omega/g)\text{sen}(kx - \omega t) \sim -a\text{sen}(kx - \omega t)$$

A quantidade física é a e $A = a\omega/k$.

A velocidade é dada por $\vec{\nabla}\phi$.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -Ake^{kz}\text{sen}(kx - \omega t) \ , \\ v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \ , \\ v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = Ake^{kz}\text{cos}(kx - \omega t) \ . \end{array} \right. \quad (6.43)$$

Podemos usar estas equações para obter as trajetórias das partículas de fluido.

6.3.5 Trajetória de uma partícula do fluido para águas profundas

Já que o movimento é independente de y para a onda que estamos considerando, vamos designar com $(X(t), Z(t))$ as coordenadas de uma partícula do fluido. Neste caso, (X_0, Z_0) correspondem às coordenadas da mesma partícula em equilíbrio. Escrevemos $X(t) = X_0 + \delta X$ e $Z(t) = Z_0 + \delta Z$ com δX e δZ pequenos. Inserimos estas expressões em (6.43) e conservamos os termos dominantes ($\exp(kZ) = \exp(kZ_0)\exp(k\delta Z) \sim \exp(kZ_0)$, $\text{sen}(kX - \omega t) = \text{sen}(kX_0 - \omega t)\text{cos}(k\delta X) - \text{cos}(kX_0 - \omega t)\text{sen}(k\delta X) \sim \text{sen}(kX_0 - \omega t)$, etc)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = -Ake^{kZ_0}\text{sen}(kX_0 - \omega t) \ , \\ \frac{dZ}{dt} = Ake^{kZ_0}\text{cos}(kX_0 - \omega t) \ . \end{array} \right. \quad (6.44)$$

Integrando estas equações, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} X = X_0 - \frac{Ak}{\omega}e^{kZ_0}\text{cos}(kX_0 - \omega t) \ , \\ Z = Z_0 - \frac{Ak}{\omega}e^{kZ_0}\text{sen}(kX_0 - \omega t) \ . \end{array} \right. \quad (6.45)$$

Observamos que **uma partícula de fluido percorre um círculo de raio $Ak/\omega e^{kZ_0}$ ao redor de sua posição de equilíbrio (X_0, Z_0) , o raio decresce exponencialmente com a profundidade ($Z_0 < 0$)**. A velocidade de partícula de fluido $(dX/dt, dZ/dt)$ tem módulo $Ak e^{kZ_0}$. Vemos que

devido ao fator exponencial (com z negativo), o efeito da onda se faz sentir só até uma profundidade da ordem do comprimento de onda λ ($k = 2\pi/\lambda$). Isto pode ser percebido por quem mergulha por exemplo com garrafa de ar: o mergulhador pode ficar enjoado na superfície e se sentir muito melhor no fundo.

A figura 6.3 ilustra os movimentos de partículas de fluido. A parte esquerda é obtida com $t = 0$ e $Z_0 = 0$. Neste caso $dX/dt = -Aksen(kX_0)$, $dZ/dt = Ak \cos(kX_0)$, $X = X_0 - (Ak/\omega) \cos(kX_0)$, $Z = -(Ak/\omega) \text{sen}(kX_0)$. A parte direita corresponde a uma partícula de fluido com posição de equilíbrio $X_0 = 0$, $Z_0 = 0$, observada em $t = 0, \pi/(2\omega), \pi/(\omega), 3\pi/(2\omega)$ e usando $dX/dt = Aksen(\omega t)$, $dZ/dt = Ak \cos(\omega t)$, $X = -(Ak/\omega) \cos(\omega t)$, $Z = (Ak/\omega) \text{sen}(\omega t)$.

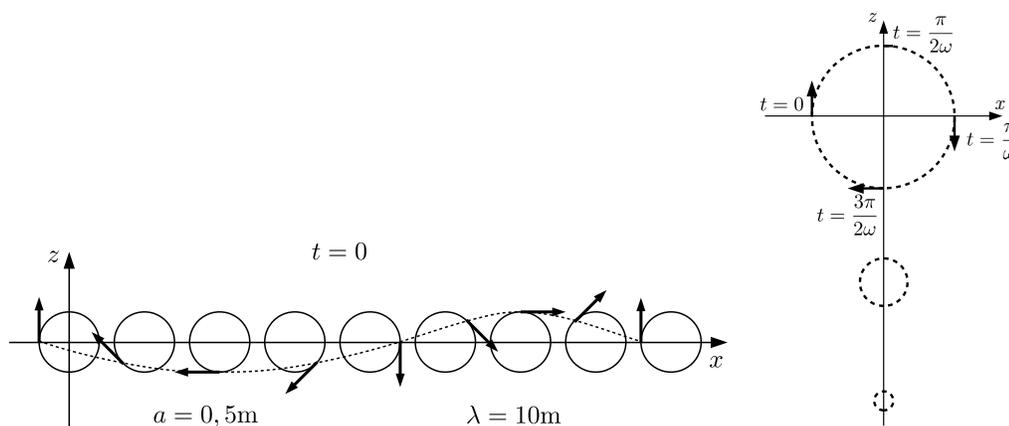


Figura 6.3: “Foto” da onda num momento dado e trajetória circular de uma partícula de fluido. As setas representam a velocidade.

Como exemplos práticos, podemos observar que objetos na superfície do mar descrevem círculos com o balanço do mar (cf. figura 6.4). Além disto, para uma onda se aproximando da praia, podemos sentir, nas cristas, uma velocidade que nos leva para a praia, e nos cavados, uma velocidade que nos afasta da praia. Isto pode ser aproveitado para avançar contra a próxima onda.

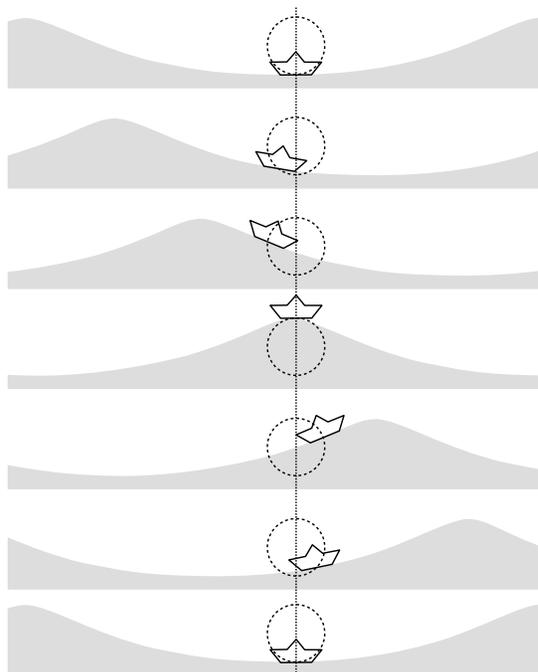


Figura 6.4: “Fotos” de um barquinho de papel sobre o mar em vários instantes. (Isto é o efeito dominante mas existem outros [6.2].)

6.3.6 Velocidade de fase e velocidade de grupo para águas profundas

O deslocamento com o tempo de um ponto de fase constante $kx - \omega t$ (ex. crista) se faz com velocidade $dx/dt = \omega/k \equiv v_f$.

Da relação (6.42), podemos calcular

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (6.46)$$

A relação (6.46) mostra que as ondas de gravidade apresentam dispersão, isto é, a velocidade de fase depende do comprimento de onda λ ($k = 2\pi/\lambda$). **As ondas de maiores λ são as mais rápidas.** A existência da dispersão pode ser observada na prática, jogando-se uma pedra numa lagoa num dia sem ventos. Quando a pedra cai, ondas de vários λ são geradas, mas elas se organizam rapidamente e as de maior λ (e v_f) são as mais externas.

As ondas criadas tem vários λ e podem se combinar em pacotes. (As vezes no mar, observamos uma série de ondas com cristas altas, seguida por um “calmo” e de novo uma série de ondas com cristas altas.) Quando combinamos 2 ondas na superfície com $k \pm \delta k$ e $\omega \pm \delta\omega$, obtemos $\zeta(x, t) = 2a \text{sen}(kx - \omega t) \cos(\delta kx - \delta\omega t)$. O segundo termo à direita, em cosseno, é o envelope do pacote e viaja com velocidade $\delta\omega/\delta k \sim d\omega/dk$ que não precisa coincidir com v_f .

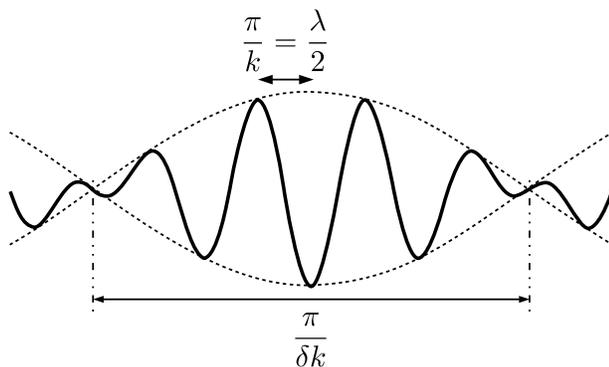


Figura 6.5: Pacote de onda

De fato a velocidade de grupo é

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_f}{2}. \tag{6.47}$$

Como as ondas individuais tem velocidade v_f maior do que a do pacote, elas parecem nascer atras e atravessá-lo.

Pode-se mostrar que v_g é a velocidade de deslocamento da energia, tendo assim uma importância física grande (cf. exercício 3).

Exemplo (6.1)

No mar (e mesmo perto da costa desde que $\lambda \ll h$ com h profundidade), contando o tempo entre duas cristas sucessivas τ , podemos obter o comprimento de onda e a velocidade de fase. Como?

Suponha que encontrou um periodo $\tau = 1 s$, quais são o comprimento de onda e velocidade de fase?

Solução:

A partir da equação (6.42) temos

$$\lambda = 2\pi/k = 2\pi g/\omega^2 = [g/(2\pi)]\tau^2 \sim 1.6\tau^2. \quad (6.48)$$

Usando (6.42) em (6.46)

$$v_f = \sqrt{g/k} = g/\omega = g/(2\pi)\tau \sim 1.6\tau \quad (6.49)$$

Assim, se observamos ondas de período $\tau = 1$ s, seu comprimento de onda é 1,6 m e velocidade 1,6 m/s.

Exemplo (6.2)

No mar ou perto de um litoral, a chegada de ondas de grandes τ (i.e. λ) seguidas por ondas de τ (i.e. λ) cada vez menor assinala a vinda de um temporal. Se no mar uma tempestade gerar ondas de período 30 s a uma distância de 4000 km do litoral, quando será sentido seu efeito?

Solução:

A velocidade de fase para $\tau = 30$ s é $v_f \sim 48$ m/s = 173 km/h, as ondas com esta velocidade de fase podem viajar 4000 km em 24 horas. Como a velocidade de grupo é $v_g = 86$ km/h, os efeitos devastadores do temporal demoram mais para atingir o litoral.

6.3.7 Ondas em águas pouco fundas

Consideremos agora o caso onde $\lambda > h$ com h a profundidade mas ainda $a \ll \lambda$ (para ter um movimento potencial). Este caso é bastante parecido com o anterior como vemos no (importante) exercício 1. As trajetórias são elípticas e as velocidades de fase e de grupo coincidem (de modo que uma onda pode se propagar sem dispersão). Precisamente

$$v_f = v_g = \sqrt{gh} \quad (6.50)$$

Experiências em canais mostram que esta relação é bem obedecida.

Em consequência desta relação, ao se aproximar da praia, várias coisas acontecem:

- A velocidade v_f de uma onda diminui pois h diminui.
- Como o período não muda e $v_f = \omega\lambda/(2\pi)$ diminui, o comprimento de onda diminui.
- Como a velocidade diminui, a energia cinética decresce e a energia potencial aumenta para manter a energia transportada pela onda constante. Esta energia é proporcional a $\lambda \times a^2$ com a a amplitude da onda (cf. exercício 3). Assim a tem que aumentar já que λ decresce. (Este aumento de a é o que torna os tsunamis perigosos cf. exercício 5).

Exemplo (6.3)

Porquê as ondas chegando numa praia (com inclinação gradual) parecem sempre ter suas cristas paralelas à praia?

Solução:

A parte da linha de crista mais perto da praia tem sua velocidade reduzida mais cedo, assim o fundo raso provoca uma refração da onda do mar parecido com a mudança de direção da luz ao atravessar um meio (de índice de refração diferente).

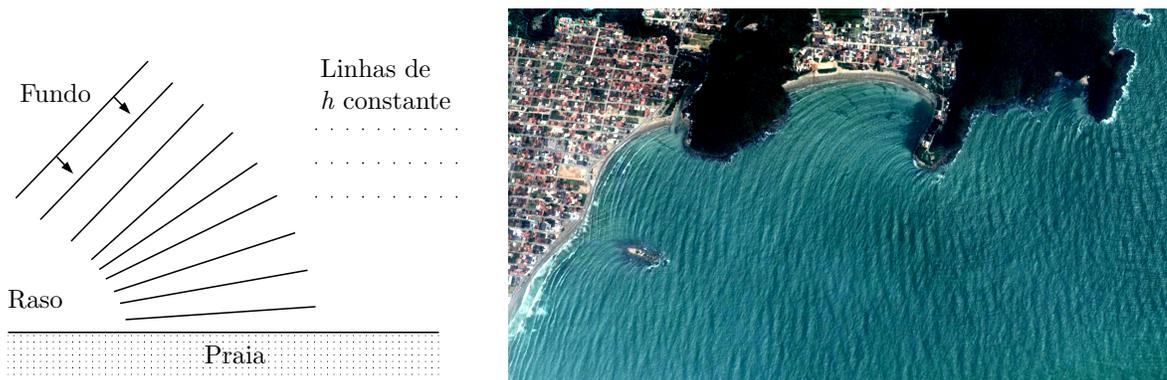


Figura 6.6: A foto do litoral de Gravató, ao Norte de Itajaí, SC, extraída de Google Earth (30/04/2019), mostra o efeito do fundo (exemplo 6.3) e de obstáculos (exercício 6) sobre as ondas do mar.

6.4 Ondas sonoras

Pode-se usar também o método de potencial para estudar ondas sonoras.

6.4.1 Equações a satisfazer

O som é uma perturbação da pressão que se desloca via uma onda com uma certa velocidade (ver mais adiante). A seguir consideremos pequenas perturbações se propagando numa região uniforme de ar inicialmente em repouso. Se a perturbação for uma oscilação de pequena amplitude, a velocidade do fluido deve ser pequena e raciocinando como na seção anterior, o termo em $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$ na equação de Euler pode ser desprezado.

Vamos partir da equação de Euler e da equação de continuidade

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \sim -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \end{array} \right. , \quad (6.51)$$

onde o termo $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ foi desprezado e o termo \vec{g} não é importante. Ao contrário do caso das ondas de gravidade, neste problema não podemos tomar $\rho = \text{cte}$. Entretanto, como estamos considerando pequenas oscilações, podemos introduzir uma outra aproximação que simplifica o problema. Temos que no equilíbrio

$$\langle \vec{v} \rangle = 0 \quad , \quad \langle p \rangle = p_0 \quad \text{e} \quad \langle \rho \rangle = \rho_0 \quad . \quad (6.52)$$

Então p e ρ podem ser expressas como

$$\left\{ \begin{array}{l} p = p_0 + \Delta p \quad , \quad \Delta p \ll p_0 \quad , \\ \rho = \rho_0 + \Delta \rho \quad , \quad \Delta \rho \ll \rho_0 \quad , \\ v \text{ pequena.} \end{array} \right. \quad (6.53)$$

de modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \simeq \frac{\vec{\nabla}(\Delta p)}{\rho_0} \quad , \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\Delta \rho \vec{v}) \simeq \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad . \end{array} \right. \quad (6.54)$$

Com esta aproximação, as equações (6.51) se reduzem a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\vec{\nabla}(\Delta p)}{\rho_0} , \\ \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 . \end{array} \right. \quad (6.55)$$

Ainda com o mesmo raciocínio da seção anterior, o movimento é irrotacional e podemos introduzir um potencial ϕ tal que $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$. Em seguida, vamos relacionar $\Delta\rho$ com Δp , considerando que $\Delta s = 0$ (no caso contrário, haverá dissipação de energia e, em consequência, amortecimento da onda). Considerando $p = p(\rho, s)$,

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \Delta \rho . \quad (6.56)$$

Portanto (6.55) se re-escrevem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\Delta p}{\rho_0} \right) = 0, \\ \frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_0 \vec{\nabla}^2 \phi = 0 . \end{array} \right. \quad (6.57)$$

A primeira equação leva a $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\Delta p}{\rho_0} = f(t) = 0$ de modo que

$$\Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} . \quad (6.58)$$

Substituindo na segunda equação, obtemos a equação de onda

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 , \quad (6.59)$$

com a velocidade de propagação

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} . \quad (6.60)$$

Vemos, portanto, que as pequenas oscilações se propagam como ondas de velocidade c_0 . Esta velocidade é pequena se $(\partial p / \partial \rho)_s$ for pequeno, ou $(\partial \rho / \partial p)_s$ grande.

Exemplo (6.4)

Qual é a velocidade de propagação do som no ar?

Solução:

Supomos um processo adiabático de modo que $p = \rho^\gamma$, e $T = 20^\circ \text{ C}$ assim

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{m} T} \quad (6.61)$$

Substituindo $\gamma = 1,4$; $m = 0,029 \text{ kg}$; $R = 8.834 \text{ J/mol K}$, obtém-se $c_0 \sim 350 \text{ m/s}$.

Exemplo (6.5)

Qual é velocidade de propagação do som num fluido com $\rho = \text{cte}$

Solução: Neste caso $\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_s \rightarrow 0$ e $c_0 \rightarrow \infty$. O fluido sendo incapaz de se comprimir, qualquer perturbação é transmitida instantaneamente a pontos distantes (como num sólido).

Da equação para ϕ , podemos obter uma para \vec{v} , aplicando o operador $\vec{\nabla}$ a (6.59)

$$\nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (6.62)$$

Como $\Delta p = -\rho_0(\partial \phi / \partial t)$ e $p = p_0 + \Delta p$, derivando (6.59) em relação ao tempo, vem

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (6.63)$$

e, como $\Delta p = (\partial p / \partial \rho)_s \Delta \rho$ e $\rho = \rho_0 + \Delta \rho$,

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0. \quad (6.64)$$

Isto é, todas as grandezas satisfazem a mesma equação das ondas.

6.4.2 Ondas planas

Vamos estudar, em particular, movimentos que dependem de uma variável espacial só:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (6.65)$$

A solução geral desta equação é

$$\phi = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) \quad , \quad (6.66)$$

onde f_1 e f_2 são funções arbitrárias, representando ondas se propagando no sentido positivo de x e no negativo, respectivamente. Consideremos, por exemplo, o primeiro termo

$$\phi = f_1(x - c_0 t) \quad . \quad (6.67)$$

Calculemos $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$. Como ϕ depende somente de x e t ,

$$\vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{t} \quad (6.68)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \\ v_y = 0 \quad , \\ v_z = 0 \quad , \end{array} \right. \quad (6.69)$$

isto é, **a onda sonora é longitudinal.**

6.4.3 Aplicação a instrumentos de sopro

Alguns aspectos simples destes podem ser descritos com nosso enfoque. Como modelo, consideramos o movimento de uma coluna de ar unidimensional com extremidades em $x = 0$ e $x = l$.

(i) *Flauta transversal*

Consideramos que é um tubo aberto nas duas extremidades então alí a pressão tem que ser a pressão atmosférica. As equações a satisfazer são

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \text{ em } x = 0 \text{ e } x = l \end{array} \right. \quad (6.70)$$

Pode-se verificar que as soluções são do tipo

$$\phi_n = A_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \cos \left(\frac{n\pi c_0 t}{l} + \alpha_n \right) \quad (6.71)$$

i.e. ondas estacionárias com $k_n = n\pi/l$. Como $\omega_n = k_n c_0$ e $f_n = \omega_n/(2\pi)$

$$f_n = c_0 n / (2l) \quad (6.72)$$

Vemos que o modo fundamental ocorre para $n = 1$ com $f_1 = c_0/(2l)$. O estado de $n = 2$ (obtido com o mesmo comprimento da coluna l i.e. sem mexer os dedos nos buracos mas um sopro um pouco diferente) tem $f_2 = 2f_1$ i.e. fica uma oitava acima. Lembramos que as notas da escala cromática são espaçadas em frequência assim:

Nota	dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
$f_{\text{nota}}/f_{\text{do}}$	1	1,1225	1,2600	1,3348	1,4983	1,6818	1,8877	2

A nota lá de referência usual tem frequência 440 Hz.

As notas de frequências intermediárias entre f_1 e f_2 são obtidas mudando l (o que seria abrindo/fechando buracos numa flauta usual).

Exemplo (6.6)

Calcular por exemplo o comprimento da uma flauta transversal de nota mais baixa dó.

Solução:

Encontramos primeiro a frequência deste dó: $f_1 = 440/1.6818$ Hz.

Usando $f_1 = c_0/(2l)$ segue então $l = 66,3$ cm o que é basicamente o comprimento de uma flauta transversal real. (Na prática, não é exatamente o comprimento inteiro da flauta que importa e há pequenas correções de extremidades a fazer [6.3,6.4].)

(ii) Clarineta

Outro instrumento que pode ser tratado de maneira similar à flauta é a clarineta. A diferença é que podemos considerar que ela tem uma extremidade fechada na parte da boca.

As equações a satisfazer são

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \text{ em } x = l \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \text{ em } x = 0 \end{cases} \quad (6.73)$$

Pode-se verificar que as soluções são do tipo

$$\phi_n = M_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi c_0 t}{2l} + \beta_n\right) \quad (6.74)$$

i.e. ondas estacionárias com $k_n = (2n+1)\pi/(2l)$, daí

$$f_n = c_0(2n+1)/(4l) \quad (6.75)$$

Vemos que o modo fundamental ocorre para $n = 0$ com $f_0 = c_0/(4l)$. O estado de $n = 1$ tem $f_1 = 3f_0$ i.e. não fica uma oitava acima.

Exemplo (6.7)

Calcular por exemplo o comprimento de uma clarineta em si bemol que tem como fundamental a nota ré de frequência 146,8 Hz (uma oitava abaixo do ré da tabela).

Solução: Temos $f_0 = 146,8 \text{ Hz} = c_0/(4l)$ Isto dá $l = 59 \text{ cm}$, também perto do valor real (e com as mesmas ressalvas do que para a flauta). O primeiro harmônico fica em $3f_0 = 440 \text{ Hz}$, i.e. é o lá.

6.5 Exercícios

1. Ondas em águas rasas

Considere uma onda plana de frequência angular ω sobre a superfície de um lago cuja profundidade é h . Supomos que $a \ll \lambda$ onde a é a amplitude da onda e λ seu comprimento de onda.

- Quais são as equações que o potencial ϕ deve satisfazer?
- Supor $\phi(x, y, z, t) = \cos(kx - \omega t)f(z)$. Mostrar que o potencial $\phi(x, y, z, t) = Be^{-kh} \cosh[k(z + h)] \cos(kx - \omega t)$ e $\omega^2 = gk \tanh(kh)$. Verificar que se $h \rightarrow \infty$, estas equações tem sua forma para águas profundas.
- Calcular as velocidades de fase v_f e de grupo v_g . Verificar que para $h \rightarrow \infty$, estas equações tem sua forma para águas profundas. Mostrar que se $h \ll \lambda$, $v_g = v_f = \sqrt{gh}$.
- Calcular a forma da superfície $\zeta(x, y, z, t)$.
- Obter as trajetória das partículas de fluido e mostrar que são elípticas.

2. Ondas num tanque retangular

Consideremos um líquido com profundidade h num tanque retangular de lados a e b .

- Quais são as equações que o potencial ϕ deve satisfazer?
- Usando a separação de variáveis $\phi(x, y, z, t) = F(x)G(y)H(z)T(t)$, mostrar que $\phi(x, y, z, t) = A \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b) \cosh[k(z + h)] \cos \omega t$ (onda estacionária), $\omega_{m,n}^2 = gk \tanh(kh)$ e $k^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ (frequências angulares próprias).
- Suponha que um líquido num prato retangular comece a oscilar no modo mais baixo. Quais seriam a frequência angular e forma da superfície (se $a > b$)?

3. Energia numa onda

Mostrar que para uma onda plana como na §6.3.4 a densidade de energia por área horizontal é $(1/2)\rho g a^2$.

4. Fluxo de energia numa onda

- a) Mostrar que o fluxo de energia por area horizontal é $(1/2)\rho g a^2 \omega / k$.
- b) Verificar que a energia é transportada na velocidade de grupo.

5. Tsunami [6.5,6.6]

Num tsunami o comprimento de onda é grande, por exemplo $\lambda \gg h$, de modo que uma onda de tsunami pode ser tratada como onda em águas rasas.

- a) Considere que o tsunami apareça para $h_1 = 4000$ m. Qual é sua velocidade? Mesma pergunta quando ele chega em $h_2 = 10$ m. Uma pessoa nadando ou correndo consegue escapar?
- b) Considere que em $h_1 = 4000$ m, $\lambda_1 = 100$ km. Qual é o tempo (= período) para que a onda percorra λ_1 ? Qual é λ_2 em h_2 e o tempo (= período) para que a onda percorra λ_2 ?
- c) Em analogia com o exercício 3, a energia na superfície $\lambda \Delta y$ é $E = (1/2)\rho g a^2 \lambda \Delta y$ [6.2]. Mostrar que amplitude e profundidade em dois lugares são relacionadas por $a_2/a_1 = (h_1/h_2)^{0.25}$. Se $a_1 = 1$ m para $h_1 = 4000$ m, qual é a_2 em $h_2 = 10$ m?

6. Ondas em volta de uma ilha

Esboçar as linhas de cristas de onda perto de uma ilha circular com contornos de profundidade constantes circulares em volta.

7. Sóliton

Em 1844, Russel seguiu a cavalo por vários quilómetros ao longo de um canal, uma onda que não “se desfazia”, um sóliton. O estudo teórico destes sólitons foi feito em 1895 por Korteweg e de Vries. Os tsunamis e ondas monstruosas (“rogue waves”) também podem ser descritos com este formalismo. Sólitons tem aplicações em várias áreas da física: ótica (fibras), modelos efetivos para a interação forte (skyrmions), condensados de Bose-Einstein (de gás atômico diluído), etc.

Tratemos a água como um fluido perfeito, de densidade constante e consideremos um escoamento potencial (=irrotacional) bidimensional.

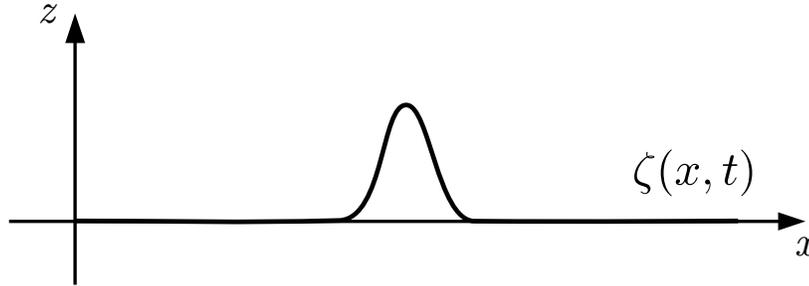


Figura 6.7: Sóliton

a) Mostrar que a função potencial ϕ satisfaz a equação seguinte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right) + gz = c(t)$$

onde $c(t)$ é alguma função de t .

Esta equação (usando as condições de contorno e a hipótese de que a amplitude da onda seja bem menor que a profundidade, a qual é bem menor que extensão espacial da onda) pode ser re-escrita para o caso do soliton (equação de Korteweg-de Vries ou KdV):

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + 6F \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} = 0$$

com $F = \zeta/h$, $\xi = x/x_0$, $\tau = t/t_0$ onde x_0 e t_0 são respectivamente um comprimento e um tempo. ζ é a superfície da água e h a profundidade média (cf. figura 6.7).

b) Para entender as soluções consideremos primeiro a equação

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + v \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

Verificar que esta equação admite soluções do tipo $f(\xi - v\tau)$ (que se propagam então para os x positivos com velocidade v).

Consideremos agora a equação (de Burgers):

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + F \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

No lugar de ter um pulso que não se deforme como na primeira equação, como se propaga o pulso da segunda equação (Burgers)?

c) Agora consideremos a equação

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} = 0$$

Mostrar que esta equação admite soluções do tipo $A e^{i(k\xi - \omega\tau)}$ se k e ω satisfazem uma certa equação.

Calcular a velocidade de fase ω/k . A onda apresenta dispersão?

A existência de soluções de tipo sóliton vem do equilíbrio dos efeitos descritos em b) e c).

8. Tubo de órgão cilíndrico

O teclado de um órgão tem 5 oitavas i.e. $5 \times 12 + 1$ notas (12 é o número de semi-tons de dó a si), cada nota correspondendo a um tubo. Um conjunto de 61 tubos serve a produzir um tipo de som. Para ter acessos a outros tipos, há também outros conjuntos de 61. Os tubos podem ser de vários tipos: duas extremidades abertas, uma só, seção cilíndrica, quadrada, podem ser feitos de vários materiais, etc. Pode ter vários teclados, inclusive acionados pelos pés.

Um tubo de órgão cilíndrico tem dois harmônicos sucessivos com frequências 1372 and 1764 Hz.

- O tubo tem as duas extremidades abertas ou uma aberta e outra fechada?
- Quais são estes dois harmônicos?
- Qual é o comprimento deste tubo?

9. Tubo de órgão de seção quadrada

Um tubo de órgão tem seção quadrada de lado a e comprimento $20a$, ele é aberto nas 2 extremidades.



Figura 6.8: Orgão de armário, Biblioteca Brasileira-USP, 2017

- a) Escrever o potencial que satisfaz as condições de contorno para este problema.
- b) Calcular as primeiras 21 frequências possíveis e explicar a que elas correspondem fisicamente.

10. Fagote e oboé

Uma onda sonora no ar obedece às equações seguintes:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \\ \Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases}$$

O fagote e o oboé são dois instrumentos cuja coluna de ar é um cone. Eles podem ser modelizados como tendo extremidades abertas em r_1 e r_2 [6.7].

- a) Usando o fato que um cone é um pedaço de esfera (cf. figura 6.9), escreva a equação de onda satisfeita por ϕ e as condições de contorno a obedecer.
- b) Verifique que a função seguinte é uma solução do item a) se uma certa relação a determinar é satisfeita:

$$\phi(r, t) = A \frac{\text{sen}(k(r - r_1))}{kr} \cos(\omega t)$$



Figura 6.9: Esquerda: Oboé Yamaha. (Crédito Yamaha Corp.). Direita: aproximação do oboé.

Obter uma equação para as frequências possíveis.

- c) Calcular a frequência da nota mais baixa de um fagote de 250 cm.

11. Nota de uma garrafa

No fim do dia, está conversando com seus amigos. Um deles sopra numa garrafa de coca e sua vizinha, uma música, comenta que ele fez praticamente um lá sustenido (233 Hz), abaixo do lá de referência. Você, aluno/a de mecânica dos fluidos, pensa imediatamente em aplicar seus conhecimentos para entender isto.

- a) Aproxime a garrafa por um cilindro de comprimento $L = 18,5$ cm (fechado numa extremidade e aberto na outra) e suponha o movimento do ar nela unidimensional. Uma onda sonora no ar obedece às equações seguintes:

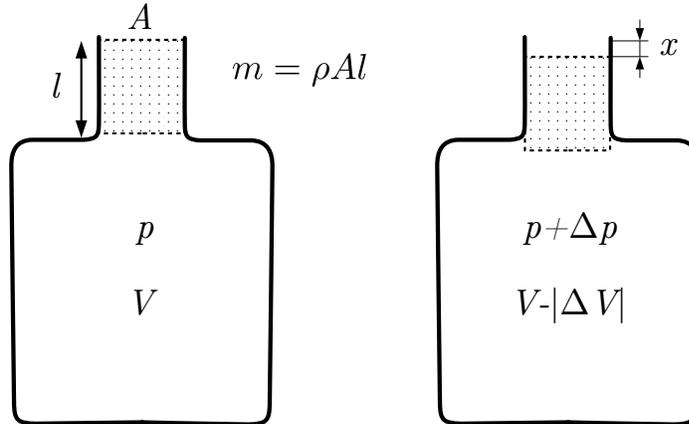
$$\begin{cases} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{v} = \vec{\nabla} \phi \\ \Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \end{cases}$$

Supor $\phi(x, t) = A \cos(kx) \cos(\omega t)$.

Calcule a frequência mais baixa que deve ouvir. A velocidade do som no ar é $c_s = 350$ m/s

- b) Como você não ficou muito satisfeito com sua resposta anterior, vai usar outro modelo. Cavidades com ar tem uma frequência de ressonância específica chamada de frequência de Helmholtz. (Isto é usado para fazer instrumentos de música). Vamos calcular esta frequência.

Consideremos o movimento do ar contido na parte estreita da garrafa (gargalo) de seção A . Quando soprarmos, ele se desloca para dentro de x , a pressão do ar dentro aumenta de Δp e seu volume decresce de $\Delta V = -Ax$.



- Supondo o movimento adiabático e o ar um gás ideal, mostrar que $\Delta p = -\gamma p \Delta V / V$.
- Calcular a aceleração d^2x/dt^2 da massa de ar na parte estreita $m = \rho Al$ sob efeito da força $\Delta p A$. Verificar que esta massa de ar efetua um movimento de oscilação.
- Mostre que a frequência da oscilação é $f = c_s / (2\pi) \sqrt{A / (Vl)}$ onde usamos para um gás ideal $c_s^2 = \gamma p / \rho$. Isto é a frequência de Helmholtz. Calcule aproximadamente seu valor usando $V = 225 \text{ cm}^3$, $l = 4,45 \text{ cm}$, $A = 2,2 \text{ cm}^2$. (Estas dimensões correspondem a uma garrafa de coca tradicional).

6.6 Referências

- [6.1] A.R.Paterson “A first course in fluid dynamics”, Cambridge U.Press, 1997.
- [6.2] P.K.Kundu, I.M.Cohen, D.R.Dowling “Fluid Mechanics”, Academic Press 2015 (6a ed.).
- [6.3] D.R. Lapp “The physics of music and musical instruments”, free e-book, 2003.
- [6.4] N.H.Fletcher & T.D.Rossing “The Physics of Musical Instruments”, Springer, 2010.
- [6.5] G.Margaritondo “Explaining the physics of tsunamis to undergraduate and non-physics students”, Eur. J.Phys. 26(2005) 401.
- [6.6] F.L.Silveira e M.C. Varriale “Propagação das ondas marítimas e dos tsunamis”, Caderno Brasileiro de Ensino de Física 22 (2005) 190.
- [6.7] R. D. Ayers, L. J. Eliason, D.Mahgerefteh “The conical bore in musical acoustics”, Am. J. Phys. 53 (1985) 528.

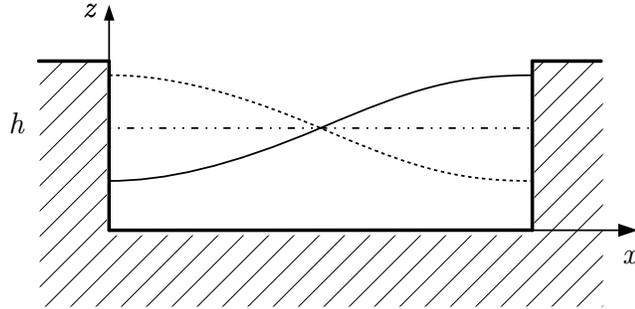
6.7 Dicas e respostas

Exercício 1.

- a) $\nabla^2\phi = 0$, $(\partial\phi/\partial z + 1/g\partial^2\phi/\partial t^2)_{z=0} = 0$, $v_z(z = -h) = \partial\phi/\partial z_{z=-h} = 0$.
- b) $k^2f + f'' = 0 \Rightarrow f = \alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz)$.
 $v_z(z = -h) = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \exp(-2kh)$ e $\phi = B \exp(-kh) \cosh[k(z + h)] \cos(kx - \omega t)$ com $B = 2\alpha$.
 $(\partial\phi/\partial z + 1/g\partial^2\phi/\partial t^2)_{z=0} = 0 \Rightarrow \omega^2 = gk \tanh(kh)$.
 Para $h \rightarrow \infty$, $\phi = \alpha \exp(kz) \cos(kx - \omega t)$ e $\omega^2 = kg$.
- c) $v_f = dx/dt = \omega/k = \sqrt{g \tanh(kh)/k}$ e $v_g = d\omega/dk = v_f/2 [1 + 2kh/\sinh(2kh)]$.
 Para $h \rightarrow \infty$, $v_f = \sqrt{g/k}$ e $v_g = v_f/2$.
 Se $h \ll \lambda$, $kh \ll 1$, $v_f \sim \sqrt{kh}$ e $v_g \sim \sqrt{kh}$.
- d) $v_x = -Bk \exp(-kh) \cosh[k(z + h)] \sin(kx - \omega t)$,
 $v_z = Bk \exp(-kh) \cosh[k(z + h)] \cos(kx - \omega t)$,
 $X = X_0 - (Bk/\omega) \cosh[k(Z_0 + h)] \cos(kX_0 - \omega t)$,
 $Z = Z_0 - (Bk/\omega) \sinh[k(Z_0 + h)] \sin(kX_0 - \omega t)$.
 Assim $(X - X_0)^2/\{(Bk/\omega)^2 \exp(-2kh) \cosh^2[k(Z_0 + h)]\} + (Z - Z_0)^2/\{(Bk/\omega)^2 \exp(-2kh) \sinh^2[k(Z_0 + h)]\} = 1$, estas trajetórias elípticas tem eixos cada vez menores à medida que a profundidade aumenta $z \rightarrow -h$. Para $h \rightarrow \infty$, são círculos de raio $\alpha k/\omega$.

Exercício 2.

- a) $\nabla^2\phi = 0$, $(\partial\phi/\partial z + 1/g\partial^2\phi/\partial t^2)_{z=0} = 0$,
 $v_z(z = -h) = \partial\phi/\partial z_{z=-h} = 0$,
 $\partial\phi/\partial x_{x=0,a} = 0$, $\partial\phi/\partial y_{x=0,b} = 0$.
- b) $\nabla^2\phi = 0 \Rightarrow \partial^2F/\partial x^2, \partial^2G/\partial y^2, \partial^2H/\partial z^2$ constantes. As condições de contorno nas bordas e fundo sugerem escolher $\partial^2F/\partial x^2 = -p^2$, $\partial^2G/\partial y^2 = -q^2$, $\partial^2H/\partial z^2 = k^2 = p^2 + q^2$. Com $\partial\phi/\partial x_{x=0,a} = 0$, $\partial\phi/\partial y_{x=0,b} = 0$, $p = m\pi/a$ e $q = n\pi/b$. Com a condição na superfície $\omega^2 = gk \tanh(kh)$.
- c) Como $a > b$, a menor frequência possível é $\omega_{1,0}$ e a forma da superfície é $\zeta(x, y, t) = -(1/g)\partial\phi/\partial t_{z=0} = (\omega A/g) \cos(\pi x/a) \cosh(\pi h/a) \sin \omega t$.



Exercício 3. Para a energia cinética por área horizontal $1/2\rho \int_{-\infty}^0 (Ak)^2 \exp(2kz) dz = 1/4\rho g a^2$ (com $\zeta \sim 0$). Para a energia potencial por área horizontal $1/2\rho \int_0^{\zeta} g z dz = 1/2\rho g \zeta^2$. Em média num ciclo, $\langle \zeta^2 \rangle = \langle a^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) \rangle = a^2/2$ de modo que a energia potencial média por área horizontal fica $1/4\rho g a^2$ e energia total média por área horizontal $1/2\rho g a^2$.

Exercício 4.

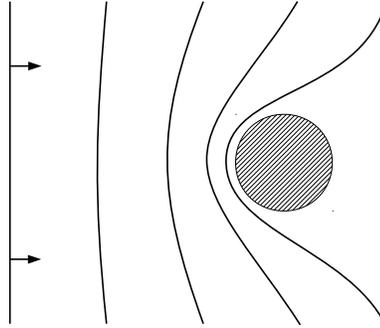
- O fluxo de energia através de uma superfície vertical em $x = \text{cte}$ de largura Δy e altura $-\infty$ a 0 é a taxa de trabalho $\int_{-\infty}^0 p v_x \Delta y dz$. Com a equação de Bernoulli generalizada, $p = -\rho \partial \phi / \partial t - \rho g z$ e $v_x = \partial \phi / \partial x$. O fluxo de energia por unidade de comprimento na direção y é em média num ciclo $1/4\rho g a^2 \omega / k$.
- Comparando com o resultado do exercício 3, vemos que a velocidade de transporte da energia é $\omega / k = v_g$.

Exercício 5.

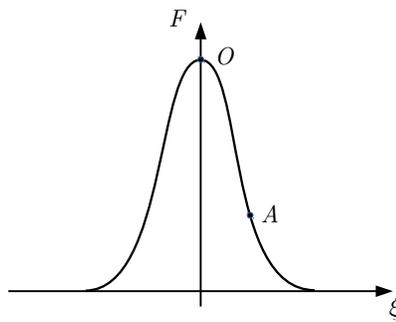
- $v_f = \sqrt{gh}$. Para $h = 4000$ m, $v_f \sim 200$ m/s ~ 713 km/h e para $h = 10$ m, $v_f \sim 10$ m/s ~ 36 km/h, isto é rápido demais para uma pessoa correndo ou nadando escapar.
- $t_1 = \lambda_1 / v_{f1} \sim 500$ s ~ 8 min. $v_{fi} = \sqrt{gh_i} = \omega 2\pi / \lambda_i$ (ω não muda) de modo que $\lambda_2 = \lambda_1 v_{f2} / v_{f1} \sim 5$ km mas $t_2 = t_1$ (pois ω não muda).
- E conservada $\Rightarrow \lambda_1 a_1^2 = \lambda_2 a_2^2$. $v_f = \sqrt{gh} = \omega 2\pi / \lambda \Rightarrow \lambda_1 / \sqrt{h_1} = \lambda_2 / \sqrt{h_2}$. Combinando: $(h_1 / h_2)^{0.25} = a_2 / a_1$. $a_2 \sim 4,5$ m.

Exercício 6.

Como $v_f = \sqrt{gh}$, a velocidade das linhas de crista diminui perto da ilha. Como os contornos de h constante são circulares em volta da ilha, esta diminuição de velocidade é maior para a parte de uma linha de crista perto da ilha:

**Exercício 7.**

a) Fazer o raciocínio da seção 6.2.1 com $\rho = \text{cte}$.



b) $y \sim \xi - v\tau$. $\partial F/\partial\tau = dF/dy \partial y/\partial\tau = -v dF/dy$. $\partial F/\partial\xi = dF/dy$. Com isto $\partial F/\partial\tau + v\partial F/\partial\xi = 0$.

$F(\xi)$ em O é maior do $F(\xi)$ em A , assim é como ter v maior em O do em A . Isto tende a localizar mais (deixar mais estreito) o pulso.

c) $-i\omega A \exp[i(k\xi - \omega\tau)] + (ik)^3 A \exp[i(k\xi - \omega\tau)] = -i(\omega + k^3) A \exp[i(k\xi - \omega\tau)]$. $\omega = -k^3$. $v_f = -k^2$. Tem dispersão.

Exercício 8.

- a) Se tiver duas extremidades abertas, $f_n = nc_0/(2l)$ e $f_n/(f_{n+1} - f_n) = n$. Se tiver uma extremidade aberta e uma fechada $f_n = (n + 1/2)c_0/(2l)$ e $f_n/(f_{n+1} - f_n) = n + 1/2$ (cf. flauta e clarinete). Aqui $f_n/(f_{n+1} - f_n) = 3.5$ de modo que tem uma extremidade aberta e uma fechada.
- b) f_3 e f_4 .
- c) $l = 3.5 c_0/(2 f_3) \sim 45$ cm.

Exercício 9.

- a) A equação a resolver é $\nabla^2 \phi - (1/c_0^2) \partial^2 \phi / \partial t^2 = 0$ com $v_x = \partial \phi / \partial x = 0$ em $x = 0, a$, $v_y = \partial \phi / \partial y = 0$ em $y = 0, a$, $\Delta p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t = 0$ em $z = 0, 20a$. Isto sugere procurar ϕ na forma

$$\phi(x, y, z, t) = A \cos(n\pi x/a) \cos(m\pi y/a) \sin(p\pi/(20a) \cos(\omega t)).$$
Devemos ter $\omega^2 = c_0^2 [(n\pi/a)^2 + (m\pi/a)^2 + (p\pi/(20a))^2]$.
- b) Temos modos longitudinais com frequência angular crescente: $n = m = 0$, $p = 1$, $\omega = c_0\pi/(20a)$, $n = m = 0$, $p = 2$, $\omega = c_0 2\pi/(20a)$, ... $n = m = 0$, $p = 19$ e com $\omega = c_0 19\pi/(20a)$. O modo transversal $n = m = 0$, $p = 20$ e os dois modos transversais $n = 1$, $m = 0$, $p = 0$ e $n = 0$, $m = 1$, $p = 0$ tem mesma frequência angular $\omega = c_0\pi/(a)$. A 21ª frequência angular ocorre para $n = 1$, $m = 0$, $p = 1$ e $n = 0$, $m = 1$, $p = 1$ e vale $\omega = c_0\pi/(a) \sqrt{401/400}$.

Exercício 10.

- a) $\nabla^2 \phi - (1/c_0^2) \partial^2 \phi / \partial t^2 = 0$ com $\Delta p = -\rho_0 \partial \phi / \partial t = (1/r^2) \partial / \partial r (r^2 \partial \phi / \partial r) - (1/c_0^2) \partial^2 \phi / \partial t^2 = 0$ em $r = r_1, r_2$.
- b) Após fazer as derivações em r , $\nabla^2 \phi = -k^2 \phi$ enquanto $(1/c_0^2) \partial^2 \phi / \partial t^2 = -\omega^2/c_0^2$. Devemos ter então $\omega = k c_0$.
 $\Delta p = \rho_0 A \omega \sin [k(r - r_1)/r] \sin(\omega t)$ vale 0 em $r = r_1$ e se $kL = n\pi \Leftrightarrow f_n = c_0/(2L)n$ vale 0 em $r = r_2$. (O limite $r_1 \rightarrow 0$ é discutido em [6.7].)
- c) $f = c/(2L) \sim 70$ Hz.

Exercício 11.

- a) $k^2 - \omega^2/c_s^2 = 0$. $v_x(x=0) = \partial\phi/\partial x_{x=0} = -Ak \text{ sen}(kx) \cos(\omega t) = 0$.
 $\Delta p(z=L) = -\rho \partial\phi/\partial t_L = \rho A\omega \cos(kx) \text{ sen}(\omega t) = 0 \Rightarrow f_n = (2n+1)c_s/(4L)$. $f_0 = c_s/(4l) \sim 470$ Hz.
- b) $p = CV^{-\gamma} \Rightarrow dp = -\gamma p dV/V$. $\Delta p > 0 \Rightarrow \Delta V = -Ax$ (se $x > 0$).
 $d^2x/dt^2 = -\Delta p A/m = \gamma p/V(-Ax)A/(\rho Al) = -\omega^2 x$ com $\omega^2 = c_s^2 A/(Vl)$
e $f = \omega/(2\pi) \sim 260$ Hz

Capítulo 7

ESCOAMENTOS POTENCIAIS INCOMPRESSÍVEIS EM 2 DIMENSÕES

Consideramos agora escoamentos que são ambos potenciais, como no capítulo anterior, e incompressíveis. Estaremos particularmente interessados em escoamentos com obstáculos. Em 2 dimensões, é possível calcular sua velocidade com várias técnicas (superposição de escoamentos simplês, transformação conforme bem como as mais tradicionais soluções por separação de variáveis da equação de Laplace e método das imagens). Uma vez conhecida a velocidade pode-se calcular a pressão e forças, o que leva a resultados interessantes como o paradoxo de d'Alembert e o efeito Magnus.

7.1 Função de Corrente para fluido incompressível

Consideremos um escoamento incompressível. A equação de continuidade se reduz a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (7.1)$$

Isto é, em coordenadas cartesianas em 2 dimensões,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.2)$$

Introduzimos uma função $\psi(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (7.3)$$

a equação (7.2) seja automaticamente satisfeita.

Vemos que então em função de ψ (verifique)

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{\nabla} \psi \times \hat{z}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{v} = -\nabla^2 \psi \hat{z} \end{cases} \quad (7.4)$$

Para entender melhor o que é esta nova função ψ escrevemos que sobre as linhas de corrente (pois \vec{v} é paralelo a $d\vec{l}$):

$$v_y dx - v_x dy = 0 \quad (7.5)$$

Substituindo com (7.3), obtemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0 \quad (7.6)$$

Isto significa que as linhas de ψ constante são linhas de corrente. ψ é chamada de função de corrente e pode-se ver que ela será prática de usar para visualizar escoamentos.

Uma outra interpretação de ψ é a seguinte. Consideremos agora dois pontos A e B no plano xy (estamos supondo $\vec{v} = (v_x, v_y)$). Calculamos Q , o fluxo de massa por unidade de altura do fluido através de uma fita de altura δz ligando os dois pontos A e B .

Vemos no desenho 7.1 que $d\vec{l} = (dx, dy) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\hat{n} = \cos(\theta - \pi/2), \sin(\theta - \pi/2) = (dy, -dx)$, $dS = dl dz$ de modo que

$$Q = \frac{1}{\delta z} \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_A^B \vec{v} \cdot \hat{n} dl = \rho \int_A^B (-v_y dx + v_x dy) = \rho \int_A^B d\psi = \rho(\psi_B - \psi_A). \quad (7.7)$$

Assim Q , o fluxo de massa por unidade de altura, é proporcional à variação de ψ entre A e B , não dependendo do caminho.

7.2. FUNÇÃO DE CORRENTE E FUNÇÃO POTENCIAL PARA ESCOAMENTO POTENCIAL

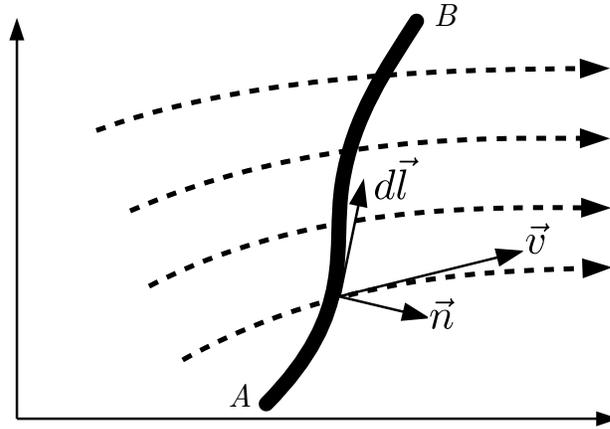


Figura 7.1: Caminho para o cálculo do fluxo de massa por unidade de altura.

7.2 Função de corrente e função potencial para escoamento potencial incompressível

Consideremos daqui para frente um escoamento potencial incompressível.

7.2.1 Coordenadas cartesianas

Primeiro observamos que $\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\nabla^2 \psi \hat{z} = 0$ implica

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (7.8)$$

Além disto deve existir uma função ϕ (cf. cap.VI) tal que

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad (7.9)$$

Observamos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ implica

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (7.10)$$

Assim, para um fluido incompressível e irrotacional, temos:

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \quad (7.11)$$

além de $\nabla^2\phi = 0$, $\nabla^2\psi = 0$ e $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$. (Esta última igualdade segue de (7.11)).

7.2.2 Coordenadas polares

Similarmente, considerando um escoamento potencial incompressível em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\vec{v}(r, \theta) &= \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} \\ &= \vec{\nabla}\psi \times \hat{z} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta}\right) \times \hat{z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{\theta}.\end{aligned}\tag{7.12}$$

Usando

$$\vec{v}(r, \theta) = v_r(r, \theta)\hat{r} + v_\theta(r, \theta)\hat{\theta}\tag{7.13}$$

temos

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \\ v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \end{cases}\tag{7.14}$$

além de $\nabla^2\phi = 0$, $\nabla^2\psi = 0$ e $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$.

7.2.3 Fluxo axi-simétrico

Problemas envolvendo fluxo axi-simétrico ($\vec{v}(r, z) = v_r(r, z)\hat{r} + v_z(r, z)\hat{z}$) também podem ser tratados com os métodos deste capítulo (a função de corrente, chamada de Stokes, tem que ser definida (cf. [7.2] e [7.3])).

Em resumo, as fórmulas importantes vistas até aqui são:

7.2. FUNÇÃO DE CORRENTE E FUNÇÃO POTENCIAL PARA ESCOAMENTO POTENCIAL

Escoamento incompressível irrotacional	
$\vec{v} = \vec{\nabla}\psi \times \hat{z}$	$\vec{v} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}, -\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)$
$\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\nabla^2\psi \hat{z}$	$\vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, -\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)$
$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$	$\vec{v} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \nabla^2\phi$	$\vec{v} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \right)$

7.2.4 Condições de contorno

Em geral queremos resolver as equações de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, $\nabla^2\psi = 0$ com um objeto fixo num fluido (ou o que é equivalente, um fluido parado com um objeto em movimento). O tipo de condições de contorno que usamos são então¹ $\hat{n} \cdot \vec{v}_{\text{superf.}} = 0$. Decompondo $\vec{v}_{\text{superf.}} = v_s \hat{s} + v_n \hat{n}$, devemos ter $v_n = 0$, i.e. $\partial\phi/\partial n = 0$ ou $\partial\psi/\partial s = 0$. Além disto, longe do objeto a velocidade e pressão devem ser as do fluido não perturbado.

7.2.5 Rede de escoamento

Uma rede de escoamento é um conjunto de linhas $\phi = \text{constante}$ (chamadas equipotenciais) e de linhas de corrente $\psi = \text{constante}$, regularmente espaçadas de Δc . Como vimos, elas se cruzam a ângulo reto ($\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$).

A velocidade v_s segundo uma direção s é dada por

$$v_s = \frac{\partial\phi}{\partial s} \sim \frac{\Delta c}{\Delta s} \quad (7.15)$$

ou

$$v_s = \frac{\partial\psi}{\partial n} \sim \frac{\Delta c}{\Delta n} \quad (7.16)$$

Assim, nas regiões onde as linhas da rede convergem (Δs e Δn pequenas), a velocidade é maior.

A seguir, estudamos vários tipos de rede de escoamento simples e combinações (somadas) que permitem tratar problemas mais complicados. A razão

¹Isto é, condições do tipo Neumann ou Dirichlet, [7.1].

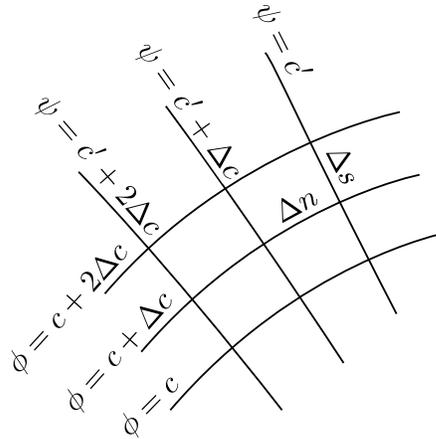


Figura 7.2: Linhas de corrente $\psi = \text{cte}$ e equipotenciais $\phi = \text{cte}$.

pela qual podemos somar soluções é que combinações lineares de soluções de $\nabla^2\phi = 0$ e $\nabla^2\psi = 0$ também são soluções. Precisa ser cuidadoso para que as condições de contorno obedecidas pela combinação linear sejam as que queremos.

7.3 escoamentos elementares

7.3.1 escoamento retilinear uniforme

Supomos $\vec{v} = U\hat{x} + V\hat{y}$.

Podemos resolver $U = \partial\phi/\partial x$ e $V = \partial\phi/\partial y$, obtemos²

$$\phi = Ux + Vy. \quad (7.17)$$

Similarmente, $U = \partial\psi/\partial y$ e $V = -\partial\psi/\partial x$ pode ser integrado e leva a

$$\psi = -Vx + Uy. \quad (7.18)$$

As linhas de corrente são retas paralelas com inclinação V/U (como esperado), figura 7.3.

²Adicionar uma constante de integração não muda \vec{v} e não é necessário.

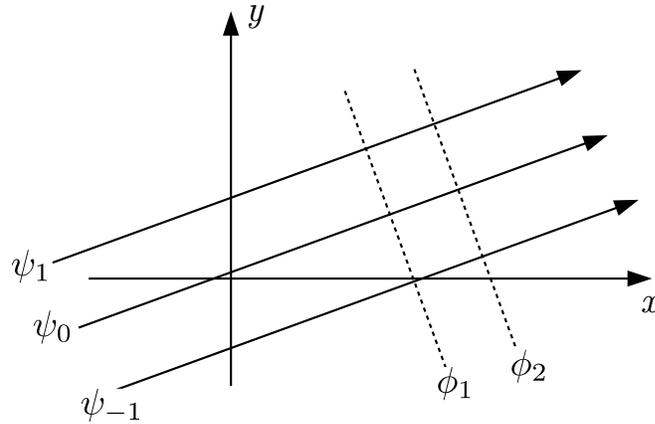


Figura 7.3: Linhas de corrente para escoamento retilinear uniforme. O índice indica o valor de $\psi = \text{cte}$.

7.3.2 Escoamento radial

Supomos $\vec{v}(r, \theta) = v(r)\hat{r}$ (velocidade radial, dependendo só de r). Como queremos $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = (1/r) \partial(rv(r))/\partial r = 0$, devemos escolher $v(r) = A/r$.

Podemos resolver

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = A/r, \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (7.19)$$

e

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = A/r, \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \end{cases} \quad (7.20)$$

Obtemos

$$\phi = A \ln r \quad (7.21)$$

e

$$\psi = A\theta \quad (7.22)$$

Observamos que para um caminho circular, $Q = \rho(\psi_{2\pi} - \psi_0) = \rho A 2\pi$ de modo que é comum re-escrever $A = \pm q/2\pi$. Com isto

$$\phi = \pm \frac{q}{2\pi} \ln r \quad \psi = \pm \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (7.23)$$

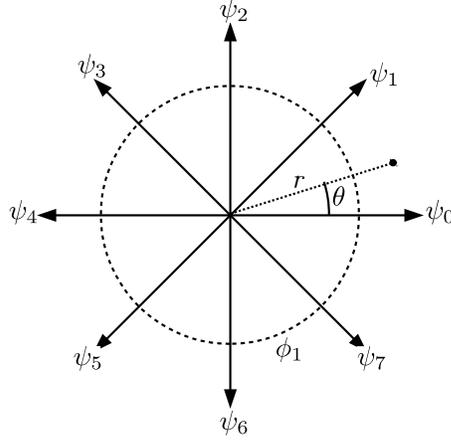


Figura 7.4: Linhas de corrente de uma fonte.

Para o sinal mais, as linhas de corrente são radiais orientadas para fora e dizemos que é uma fonte. Para o sinal menos, as linhas de corrente são radiais orientadas para dentro e dizemos que é um sorvedouro.

7.3.3 Escoamento circular

Supomos $\vec{v}(r, \theta) = v(r)\hat{\theta}$. Como queremos $\vec{\nabla} \times \vec{v} = (1/r) \partial(rv(r))/\partial r \hat{z} = 0$, devemos escolher $v(r) = A/r$ (que é definido para $r \neq 0$).

Podemos resolver

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = A/r. \end{cases} \quad (7.24)$$

e

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = A/r. \end{cases} \quad (7.25)$$

Como a circulação sobre um caminho é $\Gamma = \oint \vec{v} \odot d\vec{l} = A2\pi$, costuma-se escolher $A = \pm\Gamma/2\pi$, de modo que

$$\phi = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \ln r \quad \psi = \mp \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (7.26)$$

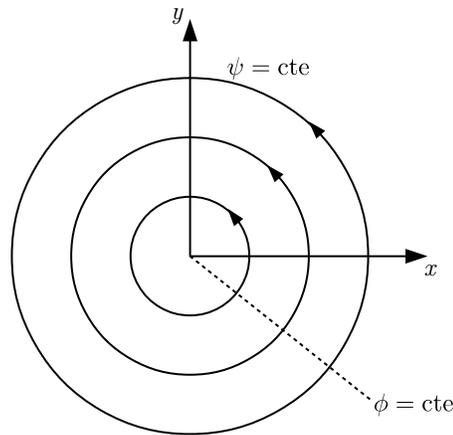


Figura 7.5: Linhas de corrente de um escoamento circular irrotacional.

Para sinal mais, as linhas de corrente são radiais orientadas no sentido anti-horário e para sinal menos, horário.

7.3.4 O dipolo

Outro escoamento elementar útil é o devido a uma fonte e um sorvedouro próximos (de mesmo valor de q), o que é chamado de dipolo.

Consideremos então

$$\psi = -q/(2\pi)(\theta_1 - \theta_2) \quad (7.27)$$

e

$$\phi = -q/(2\pi)(\ln r_1 - \ln r_2) \quad (7.28)$$

Se a distância $2a$ entre fonte e sorvedouro é pequena, como na fig. 7.6, pode-se mostrar que

$$\psi = -\frac{qa \operatorname{sen} \theta}{\pi r} = -\frac{qa}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (7.29)$$

$$\phi = \frac{qa \cos \theta}{\pi r} = \frac{qa}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (7.30)$$

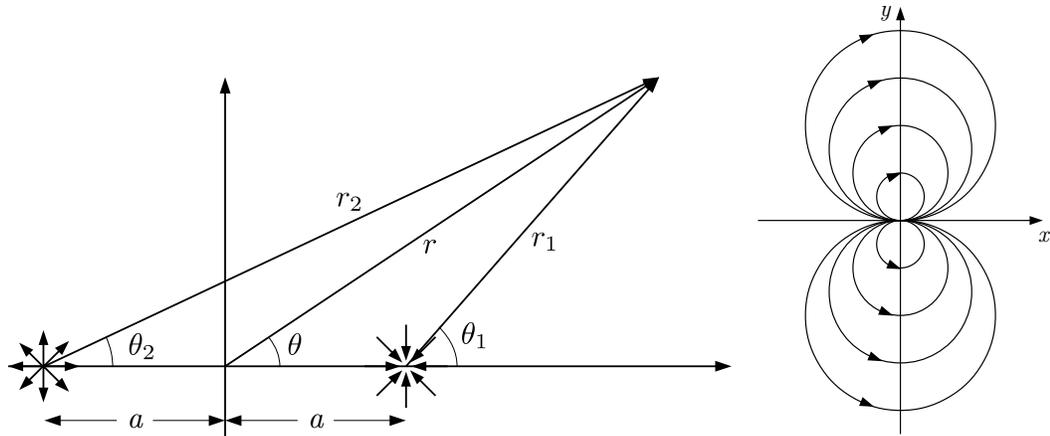


Figura 7.6: Esquerda: geometria da fonte e sorvedouro de mesma intensidade ao longo de Ox e separados de $2a$. Direita: linhas de corrente para dipolo ($a \rightarrow 0$). O fluxo é sempre da fonte para o sorvedouro.

Exemplo (7.1)

Verificar as equações (7.29), (7.30).

Solução:

Temos $\tan(-2\pi\psi/q) = \theta_1 - \theta_2$. Pela figura 7.6,

$$\begin{aligned}\tan \theta_1 &= r \operatorname{sen} \theta / (r \cos \theta - a) & \text{e} \\ \tan \theta_2 &= r \operatorname{sen} \theta / (r \cos \theta + a),\end{aligned}$$

assim

$$\psi = -q/(2\pi) \tan^{-1}[2a \operatorname{sen} \theta / (r^2 - a^2)].$$

Se a for pequeno,

$$\begin{aligned}\psi &= -q/(2\pi) 2a \operatorname{sen} \theta / (r^2 - a^2) \\ &= -(qa/\pi) \operatorname{sen} \theta / r.\end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}\phi &= q/(2\pi) [\ln \sqrt{(r \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \theta - a)^2} - \ln \sqrt{(r \operatorname{sen} \theta)^2 + (r \cos \theta + a)^2}] \\ &= q/(2\pi) [\ln r^2 (1 - 2a \cos \theta / r + a^2 / r^2) - \ln r^2 (1 + 2a \cos \theta / r + a^2 / r^2)]\end{aligned}$$

que é igual a $(qa/\pi) \cos \theta/r$ em primeira ordem em a .

Exemplo (7.2)

Mostrar que as linhas de corrente são círculos como na figura 7.6.

Solução:

Usando (7.29), se $\psi \neq 0$, vem $x^2 + (y + d)^2 = d^2$ onde $d = qa/(\pi\psi)$. São círculos passando por $(0, 0)$ e $(0, -2d)$. Estes círculos estão abaixo de Ox se $\psi > 0$ e acima se $\psi < 0$. Se $\psi = 0$, a linha de corrente é o eixo Ox ($y = 0$).

Em resumo os escoamentos elementares que vimos são os seguintes:

Fluido incompressível irrotacional			
<i>Esc. retilíneo</i>	<i>Esc. radial</i>	<i>Esc. circular</i>	<i>Dipolo sobre Ox</i>
$\vec{v} = U\hat{x} + V\hat{y}$	$\vec{v} = \pm q/(2\pi r)\hat{r}$	$\vec{v} = \pm(\Gamma/(2\pi r))\hat{\theta}$	$\vec{v} = (-qa/\pi)(1/r^2) \times (\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$
$\psi = Uy - Vx$	$\psi = \pm q/(2\pi)\theta$	$\psi = \mp(\Gamma/(2\pi))\ln r$	$\psi = (-qa/\pi)\sin\theta/r$
$\phi = Ux + Vy$	$\phi = \pm q/(2\pi)\ln r$	$\phi = \pm(\Gamma/(2\pi))\theta$	$\phi = (qa/\pi)\cos\theta/r$

7.4 Combinação de escoamentos elementares

7.4.1 O meio-corpo

Fazemos a combinação de um fluxo retilíneo uniforme ao longo do eixo x no sentido dos x positivos e uma fonte localizada num x negativo como na figura 7.7.

$$\psi = Ur \sin \theta + \frac{q}{2\pi}\theta. \quad (7.31)$$

Deve haver algum ponto, chamado ponto de estagnação, onde a velocidade da fonte cancela exatamente a do escoamento uniforme. Este ponto é interessante pois fica na fronteira com um possível obstáculo. Procuremos sua localização. A velocidade do fluido é $v_r = (1/r) \partial\psi/\partial\theta = U \cos \theta + q/(2\pi r)$,

$v_\theta = -\partial\psi/\partial r = -U\text{sen } \theta$. O ponto de estagnação, de velocidade nula, está localizado em $r = b = q/(2\pi U)$, $\theta = \pi$ (usando $q > 0$).

Uma linha de corrente qualquer pode ser suposta uma fronteira sólida: por definição a velocidade é tangente a ela (não tem componente perpendicular a ela) e as linhas de corrente não se cruzam. Assim a linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação é particularmente interessante pois pode representar o caso de um objeto parado mergulhado num fluido em movimento.

A linha de corrente que passa pelo ponto de estagnação em nosso caso satisfaz $\psi = q/2 = Ur \text{sen } \theta + q\theta/(2\pi)$. Isto pode ser re-escrito em termo de b :

$$r = \frac{b(\pi - \theta)}{\text{sen } \theta}. \quad (7.32)$$

Esta linha de corrente e outras são representadas na figura 7.7. A linha passando pelo ponto de estagnação é mais grossa e delimita uma região cinza que pode ser a fronteira de um objeto sólido, chamado meio-corpo. Podemos

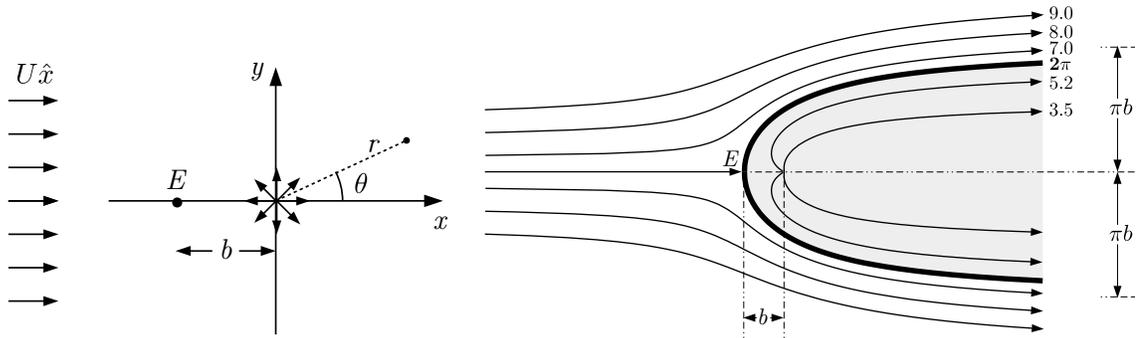


Figura 7.7: Esquerda: geometria da combinação escoamento retilinear uniforme+fonte. Direita linhas de corrente resultantes, com aquela que passa pelo ponto de estagnação E mais grossa. Os valores de ψ/U estão indicados à direita. As culvas foram calculadas com $U = 1$ e $q = 4\pi$, ou seja, $b = 2$

calcular a espessura deste corpo. Re-escrevemos (7.32) como $y = b(\pi - \theta)$ e procuramos o limite a jusante, para $\theta = 0$ ou 2π . Obtemos $\pm b\pi$ daí a espessura $2b\pi$.

Podemos também calcular a pressão em qualquer ponto do espaço usando

a equação de Bernouilli.

$$p(r, \theta) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{2}v(r, \theta)^2 \quad (7.33)$$

com

$$v(r, \theta)^2 = [U \cos \theta + q/(2\pi r)]^2 + (U \sin \theta)^2 = U^2 \left[1 + 2\frac{b}{r} \cos \theta + \frac{b^2}{r^2} \right]. \quad (7.34)$$

7.4.2 Corpo de Rankine

O objeto anterior é semi-infinito. Agora queremos obter um objeto finito. Experimentamos colocar um sorvedouro em $x = b$ no eixo dos x positivos.

$$\psi = U r \sin \theta - \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = U r \sin \theta - \frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2a r \sin \theta}{r^2 - a^2} \right). \quad (7.35)$$

(A última igualdade foi derivada anteriormente para o dipolo.)

Há dois pontos de estagnação localizados em $\theta = 0$ e π . Eles estão localizados sobre a linha de corrente $\psi = 0$, que delimita uma região cinza ovalada que pode ser a fronteira de um objeto sólido, chamado corpo de Rankine, mostrada na figura 7.8.

As dimensões deste objeto são $2L$ ao longo do eixo x e $2l$ ao longo do eixo y . L pode ser calculado com $v_r(r = L, \theta = \pi) = 0 = -U + (q/\pi)a/(L^2 - a^2)$ (verifique) de modo que $L = \sqrt{a^2 + qa/(U\pi)}$. l é obtido colocando $\theta = \pm\pi/2$ na expressão de ψ e usando $\psi = 0$. l é a solução da equação $l = (l^2 - a^2)/(2a) \tan(2\pi Ul/q)$ (verifique).

Exemplo (7.3)

Como fica a forma do corpo de Rankine quando Ua/q diminui?

Solução:

Temos

$$L/a = \sqrt{q/(\pi Ua) + 1} \rightarrow \sqrt{q/(\pi Ua)}$$

e

$$l/a = (1/2)(l^2/a^2 - 1) \tan(2\pi Ua/q l/a) \rightarrow \sqrt{q/(\pi Ua)}.$$

O corpo fica mais redondo. Isto sugere tentar usar para um cilindro num escoamento retilinear uniforme uma fonte e um sorvedouro muito perto um do outro, i.e., um dipolo num escoamento retilinear uniforme.

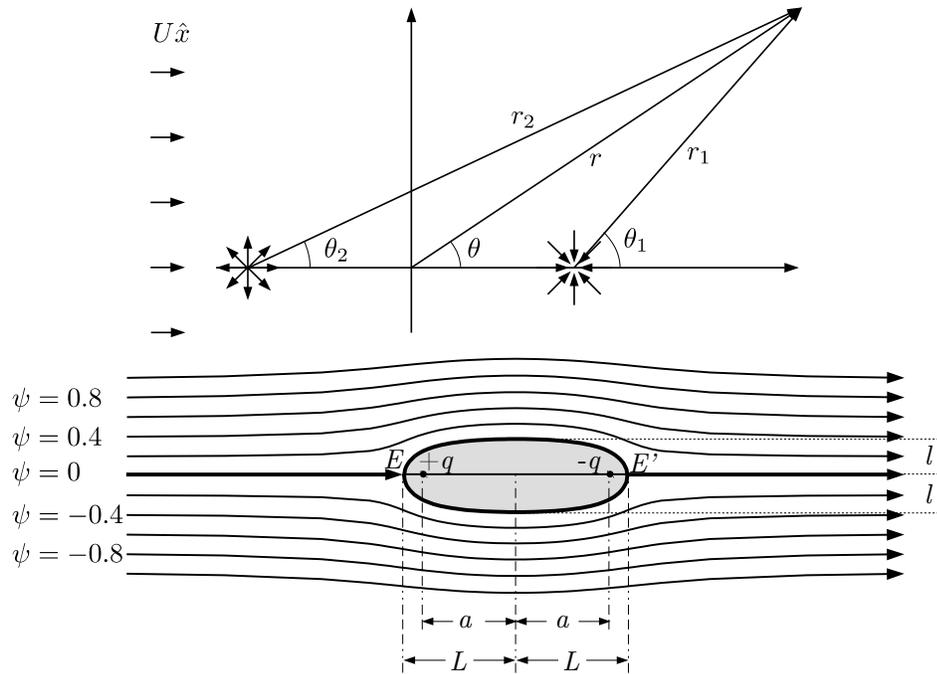


Figura 7.8: Em cima: geometria da combinação escoamento retilinear uniforme+fonte+sorvedouro. Em baixo: linhas de corrente resultantes, com aquela que passa pelos pontos de estagnação E e E' mais grossa. As linhas foram calculadas com $a = 1$, $q = 1$, $U = 1$ para vários valores de $-1 \leq \psi \leq +1$

7.4.3 Cilindro parado num escoamento retílineo uniforme

Supomos o cilindro de raio R . Conforme sugerido no exemplo (7.3), usamos

$$\psi = Ur \sin \theta - \frac{K \sin \theta}{r}. \quad (7.36)$$

Precisamos que ψ seja constante sobre a superfície de raio R , i.e. $U - K/R^2 = 0$. Podemos re-escrever

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta. \quad (7.37)$$

Temos

$$\begin{cases} v_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \theta, \\ v_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \text{sen } \theta. \end{cases} \quad (7.38)$$

A velocidade radial é nula sobre o cilindro e a velocidade tangencial vale $v_\theta = -2U \text{sen } \theta$. A velocidade é máxima em $\pm\pi/2$ e vale $2U$ em módulo.

Podemos calcular a pressão sobre o cilindro com $p_{atm} + 1/2 \rho U^2 = p_{cil} + 1/2 \rho (2U \text{sen } \theta)^2$. Obtemos $p_{cil} = p_{atm} + 1/2 \rho U^2 (1 - 4 \text{sen }^2 \theta)$.

Podemos calcular as forças sobre o cilindro por unidade de comprimento nas direções x e y :

$$\begin{cases} F_x = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \cos \theta R d\theta = 0, \\ F_y = - \int_0^{2\pi} p_{cil} \text{sen } \theta R d\theta = 0. \end{cases} \quad (7.39)$$

(Usamos $\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen }^2 \theta \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen }^3 \theta d\theta = 0$.) F_x é paralela ao escoamento e chamada força de arrasto. F_y é perpendicular ao escoamento e chamada força de sustentação. Ambas são nulas quando calculadas com a teoria da função de corrente ou potencial. Sabemos que corpos num escoamento sofrem arrasto então chegamos a uma contradição. Esta contradição é chamada de **Paradoxo de d'Alembert**, que foi quem primeiro a notou no século XVIII. Ela foi resolvida mais tarde quando o papel da viscosidade foi melhor entendido. Hoje sabemos que a teoria da função de corrente ou potencial para fluido perfeito se aplica fora de uma camada fina em contacto com o obstáculo e fora da esteira dele.

7.4.4 Cilindro em rotação num escoamento retilíneo uniforme

Estamos prontos agora a estudar um problema que pode parecer a priori complicado: um cilindro em rotação num escoamento retilíneo uniforme. Simplesmente adicionamos um escoamento circular à função de corrente de corrente do cilindro num escoamento retilíneo uniforme.

$$\psi(r, \theta) = \psi = Ur\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \text{sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (7.40)$$

Observamos que a linha de corrente ψ é constante sobre a superfície de raio R então pode representar um cilindro. Sobre esta superfície $v_r(R, \theta) = 0$

e $v_\theta(R, \theta) = -2U \sin\theta - \Gamma/(2\pi R)$. Os pontos de estagnação satisfazem $v_\theta(R, \theta_E) = 0$ i.e. $\sin\theta_E = -\Gamma/(4\pi UR)$. Se $\Gamma = 0$, eles são localizados em 0 ou π . Se $\Gamma < 4\pi UR$, eles são sobre a superfície. Se $\Gamma = 4\pi UR$, tem um único ponto de estagnação e ele é sobre a superfície. Se $\Gamma > 4\pi UR$, o ponto de estagnação desgruda da superfície. Isto é mostrado na figura 7.9.

Podemos proceder como antes para calcular as forças (por unidade de comprimento) de arrasto e sustentação sobre o cilindro. A pressão é

$$p(R, \theta) = p_{atm} + 1/2 \rho U^2 [1 - 4\sin^2\theta - 2\Gamma \sin\theta/(\pi RU) - \Gamma^2/(4\pi^2 R^2 U^2)]$$

e

$$F_x = 0, \quad F_y = \rho U \Gamma.$$

De novo a força de arrasto é nula mas aparece uma força de sustentação que atua para levantar o cilindro³. Podemos entender sua origem olhando a figura 7.9. Em pontos acima do cilindro, as velocidades do escoamento retilinear e de rotação tem mesmo sentido e se somam em magnitude, ao passo que embaixo se subtraem. Em consequência, a pressão acima é menor do que embaixo e aparece um empuxo dinâmico para cima, a força de sustentação. Este efeito de força sobre um objeto em rotação num escoamento uniforme, foi estudado experimentalmente por Magnus em 1853 e é chamado efeito Magnus.

O efeito Magnus tem um papel importante em esportes com bola (tênis, pingue-pongue, futebol). O filme neste link mostra um gol famoso de Roberto Carlos, usando o efeito Magnus:

www.youtube.com/watch?gl=FR&hl=fr&v=W5XpXU8TBoo&feature

Ele chuta a bola imprimindo-lhe uma rotação anti-horária, de modo que a parte esquerda da bola está com velocidade no mesmo sentido que o fluxo de ar que passa pela bola e então com pressão menor. (Cuidado: o fluxo de ar tem sentido oposta a direção de translação da bola). A pressão maior do lado direito faz com que a bola faça uma curva para a esquerda⁴. Isto também é o tema de um dos exercícios.

Um barco, o Buckau, usando o efeito Magnus para se deslocar, foi desenvolvido por Flettner e atravessou o Atlântico em 1926. Este barco tinha dois rotores cilíndricos verticais em rotação. Na época, a ideia acabou sendo

³Uma das integrais em θ não é nula: $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$.

⁴Algumas referências sobre Física e Futebol são [7.4-7.6].

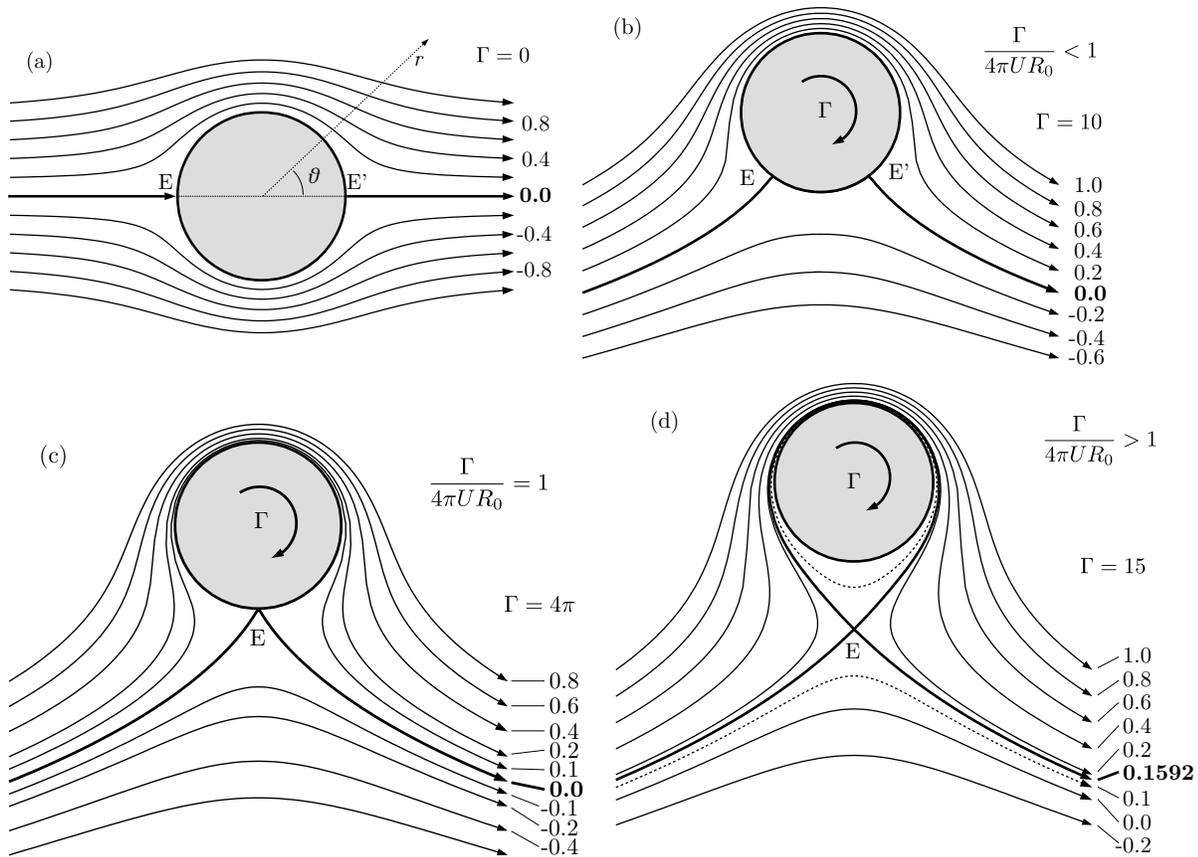


Figura 7.9: Cilindro parado num escoamento retilíneo uniforme, sem e com rotação, para 3 regimes de rotação. As curvas foram calculadas pela equação (7.40) com $U = 1$, $R = 1$. O valor de Γ está indicado nas figuras assim como o valor de ψ para cada linha de corrente traçada. A linha mais espessa contém o ponto de estagnação E .

abandonada pois motores convencionais eram mais eficientes. Hoje em dia, com a crescente preocupação em economizar energia e diminuir a poluição, a ideia foi retomada. Em particular o fabricante alemão Enercom lançou seu novo barco a rotor E-Ship1 em 2008, ele é usado para o transporte de componentes de turbinas eólicas. Os rotores ajudam a propulsão a diesel captando energia do vento (figura 7.10). Hoje várias companhias tem navios equipados com rotores.

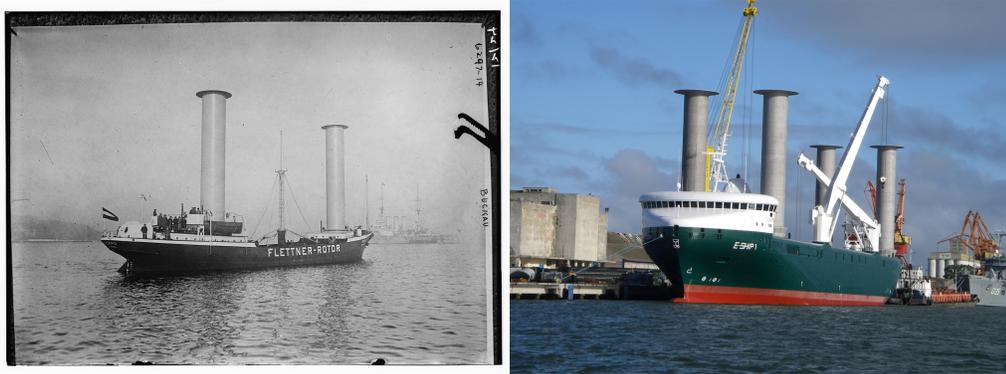


Figura 7.10: Barcos Buckau (foto da Library of Congress) à esquerda e E-Ship1 no porto de Rio Grande a direita (foto própria).

7.5 O potencial complexo

7.5.1 O potencial complexo e sua derivada

Podemos combinar os potenciais ϕ e ψ que estudamos na seção anterior num potencial só, chamado **potencial complexo**

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (7.41)$$

onde $z = x + iy$. Às vezes é mais prático escrever $z = re^{i\theta}$ com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(y/x)$. w transforma uma variável complexa numa variável complexa e é chamada função complexa.

Uma função complexa qualquer $f(z)$ que é derivável é chamada função complexa analítica. A maneira de calcular a derivada no espaço dos z deve

ser independente da direção que se usa (e.g. ao longo do eixo x , ao longo do eixo iy , etc) e isto impõe um vínculo forte às partes real e imaginária de f : elas tem que satisfazer as condições de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}. \quad (7.42)$$

Reciprocamente se as partes real e imaginária de uma função complexa são contínuas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann, ela é analítica.

Com as definições que usamos para os potenciais ϕ e ψ , vemos que o potencial complexo w é uma função complexa analítica. A derivada de w , chamada velocidade complexa, pode ser calculada como

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &= v_x - i v_y \\ &= v e^{-i\theta_v}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Vemos que:

$$\begin{cases} v_x = \operatorname{Re} \frac{dw}{dz} \\ v_y = -\operatorname{Im} \frac{dw}{dz} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} v = \left| \frac{dw}{dz} \right| \\ \theta_v = -\arg \frac{dw}{dz} \end{cases} \quad (7.44)$$

A seguir damos alguns exemplos de potenciais complexos.

7.5.2 Escoamento retilíneo uniforme

O potencial complexo mais simples é

$$\omega(z) = Cz \quad (7.45)$$

com $C = |C|e^{-i\alpha}$, uma constante complexa arbitrária.

Temos

$$\phi = (|C| \cos \alpha)x + (|C| \sin \alpha)y, \quad \psi = (|C| \cos \alpha)y - (|C| \sin \alpha)x. \quad (7.46)$$

Isto significa que w é o potencial complexo para escoamento retilíneo uniforme de velocidade $\sqrt{U^2 + V^2} = |C|$ e inclinação $\tan^{-1}(V/U) = \alpha$ da velocidade em relação a Ox .

Exemplo (7.4)

Calcular a velocidade complexa.

Solução:

$$dw/dz = C = |C| \exp(-i\alpha) = v_x - iv_y$$

de modo que $v_x = |C| \cos \alpha$ e $v_y = |C| \sin \alpha$, como esperado para escoamento retilíneo uniforme de velocidade $|C|$ e inclinação α .

7.5.3 Escoamento radial

Consideremos agora o potencial

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln z, \quad (7.47)$$

Usando $z = re^{i\theta}$, temos

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (7.48)$$

Isto significa que w é o potencial complexo para uma fonte (§7.3.2).

7.5.4 Escoamento circular

Um potencial parecido ao anterior é

$$w(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad (7.49)$$

Temos

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r. \quad (7.50)$$

Isto é o potencial complexo do escoamento circular (7.3.3).

7.5.5 Dipolo

Usando

$$w(z) = \frac{qa}{\pi} \frac{1}{z}, \quad (7.51)$$

temos

$$\phi = \frac{qa}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}, \quad \psi = -\frac{qa}{\pi} \frac{\sen \theta}{r}. \quad (7.52)$$

Isto é o potencial complexo do dipolo (§7.3.4).

Temos uma tabela similar à da §7.3.

Fluido incompressível irrotacional			
<i>Escoamento retilíneo</i>	<i>Escoamento radial</i>	<i>Escoamento circular</i>	<i>Dipolo sobre Ox</i>
$w = Cz$	$w = \pm \frac{q}{2\pi} \ln z$	$w = \frac{\mp i\Gamma}{2\pi} \ln z$	$w = \frac{qa}{\pi} \frac{1}{z}$

7.6 Transformação conforme

7.6.1 Porque a transformação conforme tem este nome

A técnica de transformação conforme (da teoria de variáveis complexas) pode ser usada para transformar um problema com escoamento complicado num mais simples (e vice-versa).

Consideramos uma função $f(z) = Z$. Ela mapeia uma região no plano $z = (x, y)$ em outra no plano $f(z) = Z = (X, Y)$. Se ela for analítica, ela preserva ângulos entre curvas, isto é, dois segmentos pequenos com um certo ângulo no plano z são mapeados em dois segmentos pequenos no plano $f(z) = Z$ com mesmo ângulo. Pode ser verificado assim. Sejam duas curvas C_z e C'_z no espaço dos z , elas são transformadas em C_Z e C'_Z no espaço dos Z . Chamamos δz , $\delta z'$, δZ , $\delta Z'$, pequenos segmentos destas curvas como mostrado na figura 7.11. Temos

$$\delta Z = \frac{dZ}{dz} \delta z \quad e \quad \delta Z' = \frac{dZ}{dz} \delta z'. \quad (7.53)$$

dZ/dz tem o mesmo valor nas duas equações pois a derivada de Z não depende da direção para obtê-la. Para obter δZ e $\delta Z'$, δz e $\delta z'$ são girados do

mesmo ângulo, $\arg(dZ/dz)$, o que demonstra que a forma de uma pequena figura (por exemplo um pequeno retângulo) no plano z é preservada no plano Z (daí o nome mapeamento conforme).

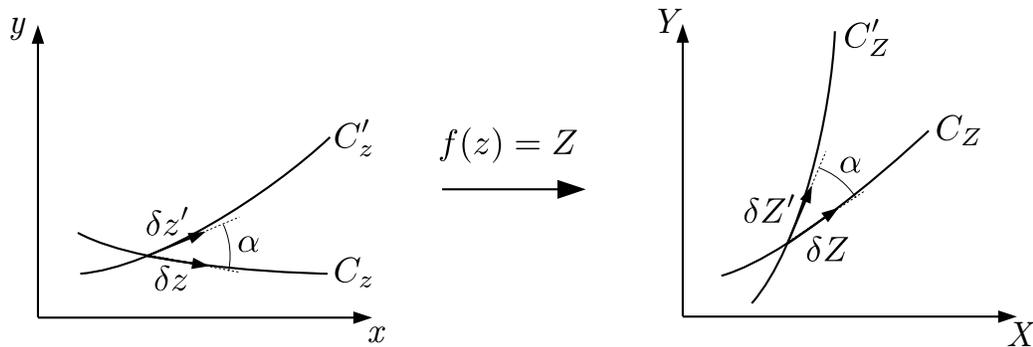


Figura 7.11: Preservação do ângulo entre curvas por uma transformação conforme ao passar do espaço dos z ao dos Z .

7.6.2 Exemplos de transformações conformes

Exemplo (7.5)

Como se transformam retas $x = \text{cte}$ e $y = \text{cte}$ por $f(z) = \cos z$?

Solução:

Podemos escrever

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos z \\ &= (e^{iz} + e^{-iz})/2 \\ &= (e^{ix-y} + e^{-ix+y})/2 \\ &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x. \end{aligned}$$

Assim $X = \cosh y \cos x$ e $Y = -\sinh y \sin x$.

Eliminando x temos

$$X^2 / \cosh^2 y + Y^2 / \sinh^2 y = 1.$$

As curvas de $y = \text{cte}$ são transformadas em elipses com focos em $(-1,0)$ e $(+1,0)$.

Similarmente eliminando y temos

$$X^2/\cos^2 x - Y^2/\sin^2 x = 1.$$

As curvas com $x = \text{cte}$ se tornam hipérbolas com focos em $(-1,0)$ e $(+1,0)$.

Estas curvas no plano Z formam um sistema de curvas ortogonais como esperado (figura 7.12).

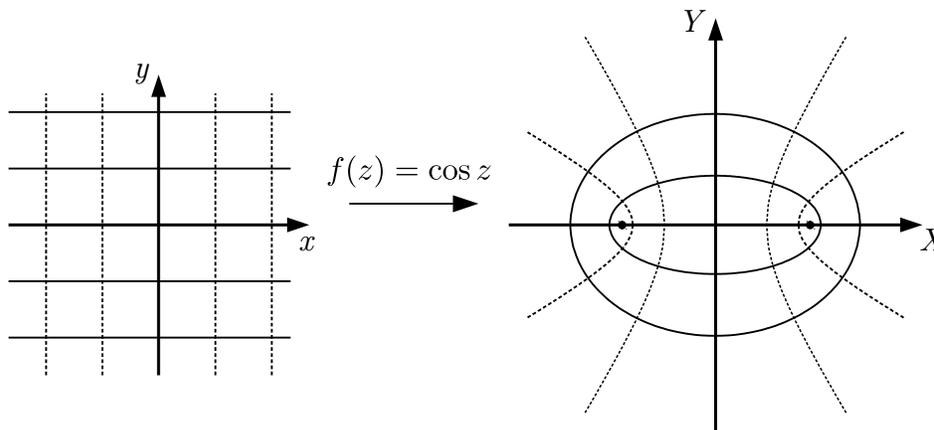


Figura 7.12: Retas $x = \pm 0.5$, $x = \pm 1.0$, $y = \pm 0.5$ e $y = \pm 1.0$ se transformando em elipses e hipérbolas com $f(z) = \cos z$. (Observar como se mantêm os ângulos entre curvas solidas e pontilhadas ao passar da esquerda a direita).

Exemplo (7.6)

Como se transformam hipérbolas por $f(z) = a z^2$?

Solução:

Hipérbolas no plano z são dadas por $x^2 - y^2 = \text{cte}$ e $xy = \text{cte}$.

Temos $f(z) = a(x^2 - y^2) + 2iaxy$ de modo que via f elas se transformam em $X = a(x^2 - y^2) = \text{cte}$ e $Y = 2axy = \text{cte}$. Isto é, as hipérbolas se transformaram em retas, como mostrado na figura 7.13.

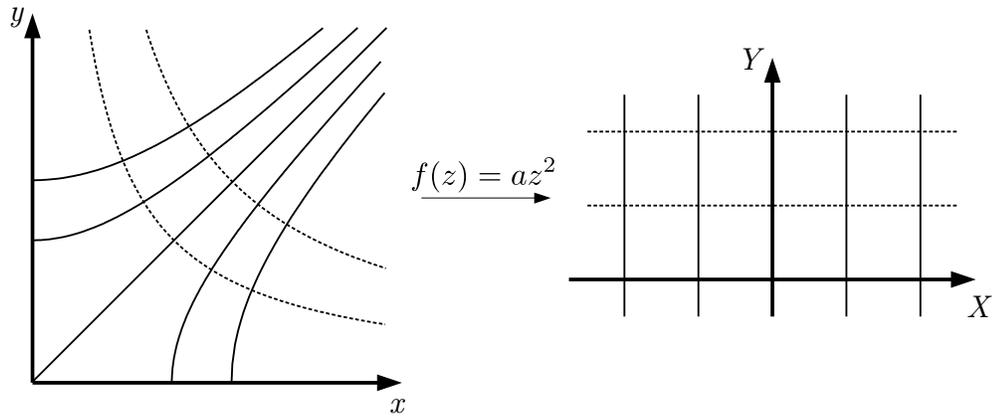


Figura 7.13: Hipérboles se transformando em retas com $f(z) = az^2$.

Exemplo (7.7)

Como se transforma um círculo de raio R_0 por $f(z) = (z + R_0^2/z)$ (transformação de Joukowski ou Zhukhovsky)?

Solução:

Temos $f(z = R_0 e^{i\theta}) = 2R_0 \cos \theta$. Para θ de 0 a π , $f(z)$ descreve o segmento do eixo X de $2R_0$ a $-2R_0$. Para θ de π a 2π , $f(z)$ descreve o segmento do eixo X de $-2R_0$ a $2R_0$. Isto é, o círculo se transformou em segmento de reta de comprimento $4R_0$, como mostrado na figura 7.14

Em adição verificamos que a região fora do círculo se transforma no espaço $Y \leq 0$ exceto o segmento. Se $r \neq R_0$, $f(z) = (r + R_0^2/r) \cos \theta + i(r - R_0^2/r) \sin \theta$ tem parte imaginária a não ser que $\theta = 0$ ou π . Para este caso observamos que $(r - R_0)^2 > 0 \Leftrightarrow r + R_0^2/r > 2R_0$, de modo que pontos com $r > R_0$ e $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$) são transformados no eixo X com $X > 2R_0$ (resp. $X < -2R_0$).

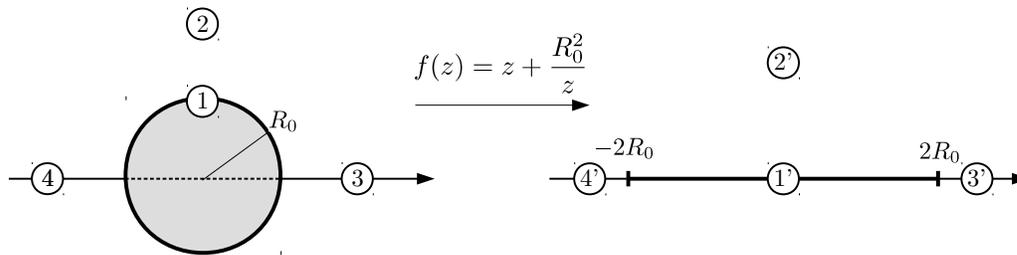


Figura 7.14: Círculo de raio R_0 se transformando em segmento com $f(z) = z + R_0^2/z$.

7.7 Uso de transformação conforme para resolver problemas de escoamento

7.7.1 Método geral

Suponhamos um escoamento com potencial complexo $w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ conhecido e que tenhamos uma função analítica $f(z) = Z$ inversa de $F(Z) = z$, **A função $W(Z) = w(F(Z))$ é analítica e é um potencial complexo no espaço Z .** Isto é, escrevendo $W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$, temos $\partial\Phi/\partial X = \partial\Psi/\partial Y$ e $\partial\Phi/\partial Y = -\partial\Psi/\partial X$.

Observamos que como $W(Z) = w(F(Z))$, segue $\text{Im}W(Z) = \text{Im}w(F(Z))$ e uma linha de corrente $\psi = C$ se transforma numa linha de corrente $\Psi = C$, figura 7.15. Em particular uma fronteira sólida, que obrigatoriamente é uma linha de corrente no plano z se transforma numa linha de corrente que pode ser considerada uma fronteira sólida no plano Z .

Mostramos como aplicar este método em alguns casos a seguir.

7.7.2 Escoamento num canto a 90°

Tentemos mapear este problema com um escoamento $w(z) = Uz$ (i.e. retilíneo uniforme ao longo do eixo x) limitado por uma parede “horizontal” (i.e. $y = 0$) como mostrado na figura 7.16. Aplicamos o mapeamento

$$Z \rightarrow Z^2 \tag{7.54}$$

que podemos escrever $Z = Re^{i\Theta} \rightarrow z = Z^2 = R^2 e^{i2\Theta}$. O semi-eixo X positivo ($Z = R$) é transformado no semi-eixo dos x positivo ($x = R^2$,

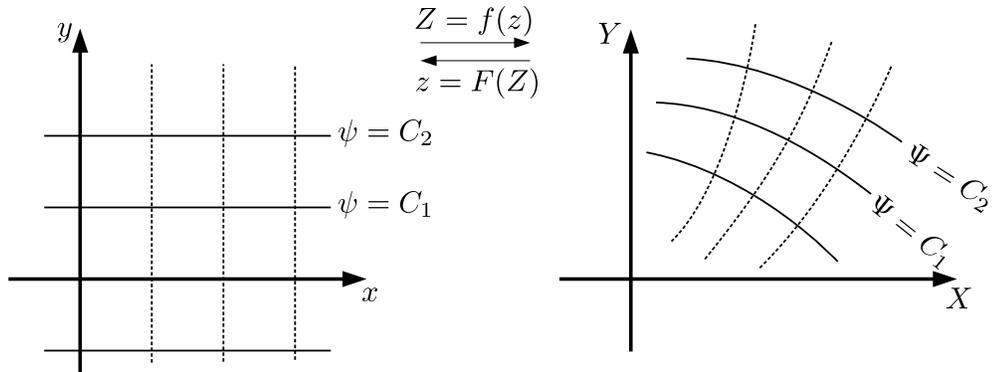


Figura 7.15: Rede de escoamento do potencial $w(z)$ no plano z transformada em rede de escoamento do potencial $W(Z)$ no plano Z , via a transformação conforme f .

$\theta = 2\Theta = 0$). O semi-eixo Y positivo ($Z = iR$) é transformado no semi-eixo dos x negativos ($z = -R^2$). Conseguimos mapear o problema do escoamento num canto a 90° no problema de escoamento retilíneo uniforme ao longo do eixo x . Com isto podemos calcular seu potencial complexo

$$W(Z) = w(F(Z)) = w(Z^2) = UZ^2 = U(X^2 - Y^2) + i2UXY \quad (7.55)$$

i.e. $\Phi = U(X^2 - Y^2)$ e $\Psi = 2UXY$. Vemos que as linhas de corrente que eram retas ao longo do eixo x são transformadas em hipérbolas retangulares como mostrado na figura 7.16.

Mais geralmente, o mapeamento $Z \rightarrow z^k$ permite tratar problemas de escoamento em cunha de qualquer ângulo.

7.7.3 Cilindro num escoamento retilíneo uniforme

Tentemos mapear este problema com um escoamento $w(z) = Uz$ (i.e. retilíneo uniforme ao longo do eixo x) limitado por uma parede “horizontal” (i.e. $y = 0$) como mostrado na figura 7.17.

Por simetria só precisamos considerar a metade do cilindro e a região $Y \geq 0$ fora dele⁵. Esta região pode ser mapeada no semi-plano $y \geq 0$ da

⁵Não usamos a região $Y > 0$ dentro do cilindro, que é desnecessária e levaria a pontos de Z mapeados no mesmo ponto de z .

7.7. USO DE TRANSFORMAÇÃO CONFORME PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ESCOAMENTO

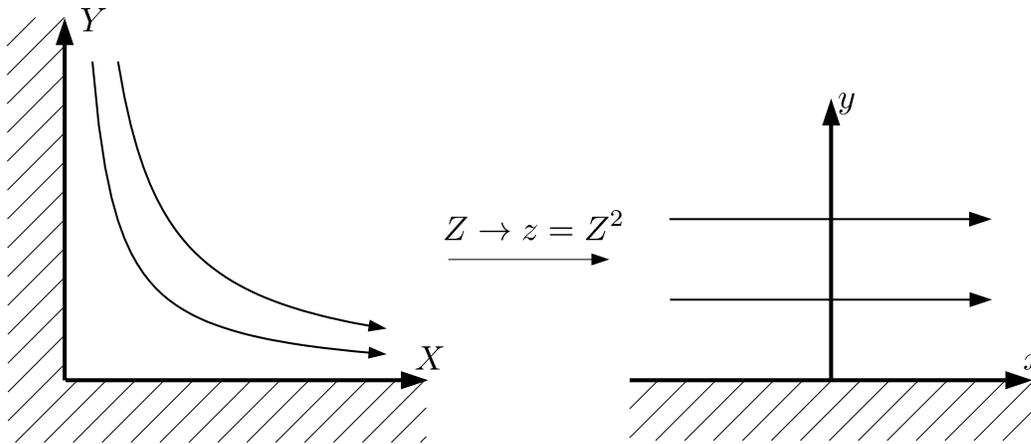


Figura 7.16: Mapeamento $Z \rightarrow z = Z^2$ para o problema do canto.

figura 7.14, usando a transformação de Joukowski (para um cilindro de raio R_0) como nos já vimos.

$$Z \rightarrow z = Z + \frac{R_0^2}{Z} = R e^{i\Theta} + \frac{R_0^2}{R} e^{-i\Theta} \quad (7.56)$$

Assim o potencial complexo do cilindro pode ser calculado:

$$W(Z) = w(F(Z)) = w\left(Z + \frac{R_0^2}{Z}\right) = U\left(Z + \frac{R_0^2}{Z}\right) = U\left[R e^{i\Theta} + \left(\frac{R_0^2}{R}\right) e^{-i\Theta}\right] \quad (7.57)$$

de modo que $\Psi = (R - R_0^2/R) \sin \Theta$. Isto é de fato o que havíamos encontrado anteriormente com método de superposição e que pode ser encontrado por

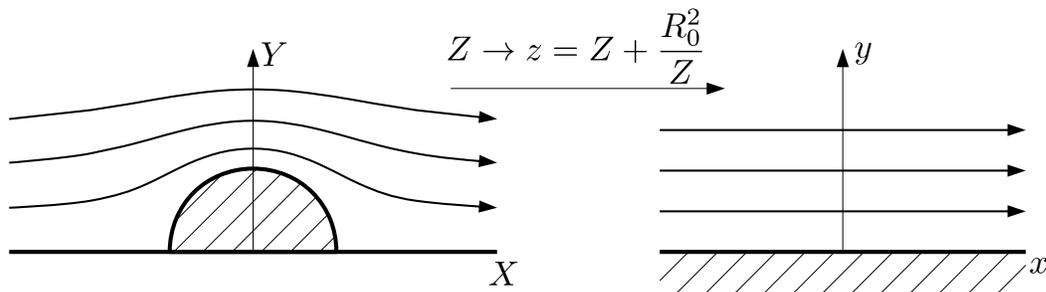


Figura 7.17: Cilindro num escoamento retilíneo uniforme.

separação de variáveis (cf. exercícios). Mas aqui a solução é de uma linha só (eq. (7.57)).

7.7.4 Escoamento em volta de uma asa

Um dos escoamentos potenciais mais importantes que pode ser obtido com transformação conforme é o do aerofólio de Joukowski ou asa.

Como o cilindro pode ser deformado em segmento ou elipse (cf. exercício), parece um bom candidato para o mapeamento. Sabemos que para o cilindro num escoamento retilíneo uniforme no infinito $U\hat{x}$ o potencial mais geral é

$$w(z'') = U\left(z'' + \frac{R_0^2}{z''}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z''. \quad (7.58)$$

Introduzimos uma inclinação no ângulo de chegada do escoamento retilíneo uniforme sobre o cilindro

$$z'' \rightarrow z' = z'' e^{i\alpha} \quad w(z') = U\left(z' e^{-i\alpha} + \frac{R_0^2 e^{i\alpha}}{z'}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z' e^{i\alpha}). \quad (7.59)$$

Deslocamos o centro do cilindro de modo que ele fique em $z = -b$, i.e fazemos

$$z' \rightarrow z = z' - b \quad w(z) = U\left[(z+b)e^{-i\alpha} + \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{(z+b)}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln[(z+b)e^{i\alpha}] \quad (7.60)$$

Finalmente fazemos a transformação de Joukowski com $a = R_0 - b$

$$z \rightarrow Z = z + \frac{a^2}{z} = f(z) \Leftrightarrow z = Z/2 + \sqrt{\frac{Z^2}{4} - a^2} = F(Z). \quad (7.61)$$

Verificamos a forma na qual o cilindro foi transformado. Usando $z = z'' e^{i\alpha} - b$ e a equação (7.61)

$$Z = -b + (a+b)e^{i(\alpha+\theta)} + \frac{a^2}{-b + (a+b)e^{i(\alpha+\theta)}}, \quad (7.62)$$

Isto é a um aerofólio como mostrado na figura 7.18.

Para calcular $W(Z) = w(F(Z))$ para a asa, basta substituir (7.61) em (7.60). Podemos também obter a velocidade complexa:

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dw(z)}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{U \left[e^{-i\alpha} - \frac{(a+b)^2 e^{i\alpha}}{(z+b)^2} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z+b}}{\left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)}. \quad (7.63)$$

7.7. USO DE TRANSFORMAÇÃO CONFORME PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ESCOAMENTO

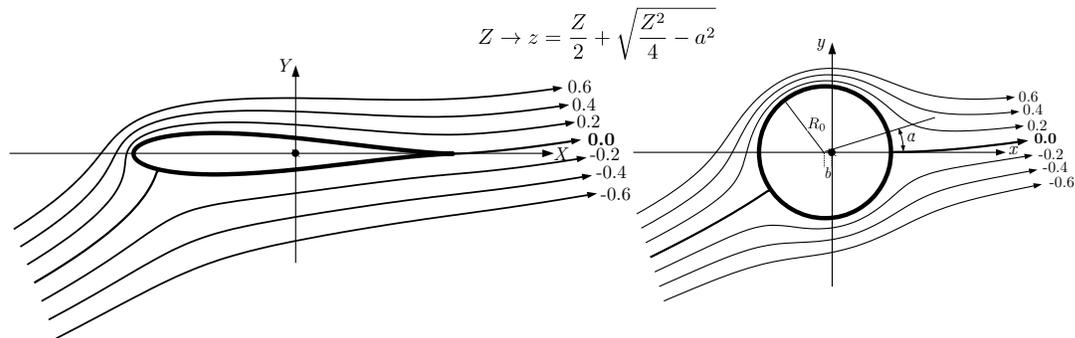


Figura 7.18: Mapeamento de um aerofólio num cilindro. As linhas foram calculadas com $\alpha = 0.3$, $U = 1$, $R_0 = 1$, $b = 0.1$ (logo $a = 0.9$) e $\Gamma = -4\pi UR_0 \text{sen } \alpha = 3.714$. O valor de ψ está indicado nas respectivas linhas

Para não ter um infinito em $z = a$ ($Z = 2a$), o numerador tem que ser nulo⁶ para este z , i.e.

$$\Gamma = -4\pi U(a + b)\text{sen } \alpha. \quad (7.64)$$

Obtemos então para a força de sustentação (por unidade de comprimento, cf. §7.4.4)

$$F_y = 4\pi\rho U^2(a + b)\text{sen } \alpha. \quad (7.65)$$

Para α pequeno, o acordo com dados é bom ([7.7], [7.8]) e esta teoria teve um papel muito importante no desenvolvimento da aerodinâmica. Talvez isto possa lhe reconfortar após o problema do Paradoxo de d'Alembert...

⁶ $z = -a$ corresponde a um ponto dentro da asa então não é um problema.

7.8 Exercícios

1. Revisão sobre equação de Laplace em coordenadas polares

Em coordenadas polares a equação de Laplace toma a forma:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0.$$

Por separação de variável, obtemos a solução geral

$$\phi(r, \theta) = \text{cte} + A_0 \ln r + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n r^n + A'_n r^{-n}) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{n=\infty} (B_n r^n + B'_n r^{-n}) \sin n\theta.$$

Consideremos o escoamento de um fluido perfeito incompressível e homogêneo, de massa volumétrica ρ , em volta de um cilindro imóvel de raio a e eixo Oz perpendicular ao escoamento principal. À grande distância do cilindro, a velocidade do fluido é uniforme $\vec{u} = u(t)\hat{x}$. O escoamento é irrotacional. A gravidade é desprezível.

- Mostrar que nestas condições deve existir um potencial $\phi(t, \vec{r})$ tal que $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ e ϕ satisfaz a equação de Laplace.
- Mostrar que a equação de Bernoulli pode ser escrita na forma:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + \rho \frac{v^2}{2} = f(t).$$

- Uma solução da equação de Laplace se escreve

$$A(t)r \cos \theta + B(t) \ln \left(\frac{r}{a} \right) + D(t) \left(\frac{\cos \theta}{r} \right).$$

Calcular as componentes do campo de velocidade em coordenadas polares. Quais devem ser os valores de A, B e D?

- No caso estacionário, calcular a pressão exercida pelo fluido sobre a superfície do cilindro e a força resultante da pressão, por unidade de comprimento (*Paradoxo de D'Alembert*).

2. Revisão sobre equação de Laplace em coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas a equação de Laplace com simetria axial toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Por separação de variável, a solução geral pode ser obtida como combinação linear das soluções

$$r^n P_n(\cos \theta) \quad e \quad r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta)$$

onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e as funções de Legendre são polinômios, por exemplo

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

Coloca-se uma esfera parada de raio A num fluido perfeito incompressível em movimento uniforme com velocidade \vec{v}_0 paralela a Oz e pressão p_0 , resultando num escoamento estacionário e irrotacional.

a) Verificar que o potencial do problema pode ser da forma

$$\phi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r^2} \right) \cos \theta \quad .$$

b) Determinar a distribuição de velocidade em todos os pontos.

c) Determinar a pressão em todos os pontos.

d) Calcular a força que atua sobre a esfera (*Paradoxo de D'Alembert*).

3. Método de imagens: fonte perto de uma parede

Problemas onde se deve calcular o escoamento para uma configuração de fontes, sorvedouros e vortices com nenhuma linha de corrente atravessando uma superfície podem ser tratados substituindo a superfície por imagens adequadas. Na prática, para conseguir calcular, a superfície é plana (ou constituída de vários planos), cilíndrica ou esférica.

Considerar uma fonte em $z = (0, +b)$ e um plano em $y = 0$. Substituir o plano por uma outra fonte similar à primeira localizada em $(0, -b)$. Mostrar que para este problema

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y-b}{x} + \tan^{-1} \frac{y+b}{x} \right] = \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2yx}{x^2 + b^2 - y^2}$$

e que é a solução do problema fonte+plano.

4. Método de imagens: fonte num canto

Considerar uma fonte em (a, b) e um canto formada pelos eixos x positivo e y positivo. Calcular a função corrente.

5. Método de imagens: fonte perto de um cilindro

Considerar uma fonte em $z = (a, 0)$ e um cilindro centrado em $(0, 0)$. Mostrar que

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{Q}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{y}{x-a} + \tan^{-1} \frac{y}{x - \frac{R^2}{a}} - \tan^{-1} \frac{y}{x} \right] \\ &= \frac{Q}{2\pi} \tan^{-1} \left[\frac{y(x^2 + y^2 - \frac{R^2}{a})}{x(x-a)(x - \frac{R^2}{a}) + y^2(x - \frac{R^2}{a} - a)} \right] \end{aligned}$$

é a solução do problema.

6. Cálculo da função de corrente

O perfil de velocidade de um jato estreito bidimensional satisfaz $\vec{V} = u(x, y)\hat{x} + v(x, y)\hat{y}$ com $u(x, y) = U\beta x^{-1/3} \text{sech}^2(\alpha y x^{-2/3})$ com $x \neq 0$ e α, β, U constantes. Calcular ψ (supondo $\psi = 0$ se $y = 0$) e $v(x, y)$

7. Cálculo de linhas de corrente

Desenhar as linhas de corrente (inclusive a orientação) da função de corrente $\psi = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$. Que tipo de escoamento isto pode modelizar?

8. Um escoamento por superposição: fonte+redemoinho

Desenhar as linhas de corrente de um escoamento que corresponde a um escoamento circular irrotacional horário com um escoamento radial para fora. Obtemos um escoamento em espiral:

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)}(q\theta + \Gamma \ln r)$$

9. Meio corpo

No escoamento ao redor de um meio corpo, a velocidade do escoamento retilíneo é $v_0 = 0.5$ m/s e $q = 2$ m²/s (cf. fig. 7.7). Determine a velocidade do fluido e sua direção (ângulo em relação a Ox) em $r = 1.0$ m $\theta = 120^\circ$.

10. Corpo de Rankine

Uma fonte com $q = 10$ m²/s em (1,0) e um sorvedouro com mesmo q em (-1,0) são combinados com um fluxo retilíneo uniforme, de velocidade 25 m/s, na direção $-Ox$.

- Mostrar que $\psi = -25y + (5/\pi)(\tan^{-1}(y/(x-1)) - \tan^{-1}(y/(x+1)))$.
- Determine o tamanho do corpo de Rankine obtido (distância entre os dois pontos de estagnação sobre Ox , pertencendo a um certo ψ_S e distância entre os dois pontos sobre este ψ_S de velocidade paralela a Ox).
- Determine a diferença de pressão (em função de ρ) entre o ponto (1,1) e um ponto longe no escoamento retilíneo.

11. Cilindro num escoamento retilíneo uniforme

Um cilindro de diâmetro 40 mm está imerso num escoamento retilíneo de velocidade 1.0 m/s. Determine as componentes radial e normal da velocidade no ponto $r = 50$ mm e $\theta = 135^\circ$. Determine a distribuição de pressão com r , ao longo do eixo Oy .

12. O gol de Roberto Carlos

Este gol famoso ilustra o papel da força de Magnus de forma muito bonita como já comentado. Neste exercício queremos estimar o desvio da bola devido à rotação.

- Consideremos um cilindro de raio r e comprimento l girando num escoamento retilíneo uniforme com velocidade angular ω . Mostrar que a força de sustentação $\vec{F} = 2\pi\rho_{ar}r^2l\omega U\hat{y}$ (Oy é na direção perpendicular ao escoamento).
- Consideremos uma esfera como um empilhamento de cilindros de altura dl e raio $r = R\sin\theta$. Mostrar que a força sobre um pedaço de esfera de comprimento $dl = R\sin\theta d\theta$ é $dF = 2\pi\rho U\omega R^3\sin^3\theta d\theta$ e a resultante é $8\pi/3\rho_{ar}R^3\omega U = (1/6) \times \rho_{ar} \times D_{bola}^3 \times f_{rot} \times v_{bola}$. A formula usada para bolas de futebol tem um fator numérico um pouco diferente: $F = 1.23 \times \rho_{ar} \times D_{bola}^3 \times f_{rot} \times v_{bola}$ [7.5].

- c) Calcular a aceleração a usando $\rho_{ar} = 1,20 \text{ kg / m}^3$, $D_{bola} = 0,22 \text{ m}$, $f_{rot} = 10/\text{s}$, $v_{bola} = 25 \text{ m/s}$, $m_{bola} = 0,430 \text{ kg}$.
Supondo que a diferença entre trajetória reta e curva seja $at^2/2$, calcular esta distancia para um tempo de vôo da bola de 1s. (Dá para entender a supresa dos jogadores e espectadores?)

13. Um veleiro com rotor de Flettner

Consideremos um cilindro de raio a e comprimento b em rotação num escoamento de ar uniforme no infinito (perpendicular ao eixo). Desprezamos a gravidade. Tratemos o ar como um fluido perfeito e incompressível assim podemos usar a função de corrente:

$$\psi(r, \theta) = (U_\infty - \frac{\lambda}{r^2})r \text{sen } \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

- a) Calcular a velocidade e verificar que ela satisfaz as condições de contorno para uma certa escolha de λ . Verifique que o movimento é irrotacional.
b) Mostre que a pressão sobre a superfície do cilindro é

$$p(a, \theta) = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left[1 - \left(2 \text{sen} \theta - \frac{\Gamma}{U_\infty 2\pi a} \right)^2 \right]$$

Mostre que a força sobre o cilindro tem componente $D = 0$ na direção paralela ao escoamento (Paradoxo de d'Alembert) e $L = \rho_{ar}\Gamma U_\infty b$ na direção perpendicular (efeito Magnus).

- c) A ideia de aproveitar o efeito Magnus para deslocar-se teve impacto grande. A foto abaixo, 7.19, mostra um veleiro adaptado por Lt. Joseph Kiernan e W. Hastings, estudantes em arquitetura naval no MIT, logo após a chegada do Buckau aos EUA em 1925. O veleiro usa para propulsão um cilindro de 1m de diametro e 3m de altura girando a 360 r/min graças a um motor de 5hp [7.9].
Qual é o melhor ângulo do vento em relação ao barco?
Com vento de 25km/h, qual seria a força de sustentação sobre o rotor? (Na prática o valor é menor devido à viscosidade mas ainda substancial [7.10]).

14. Potenciais complexos

Que tipo de escoamentos representam as expressões seguintes?

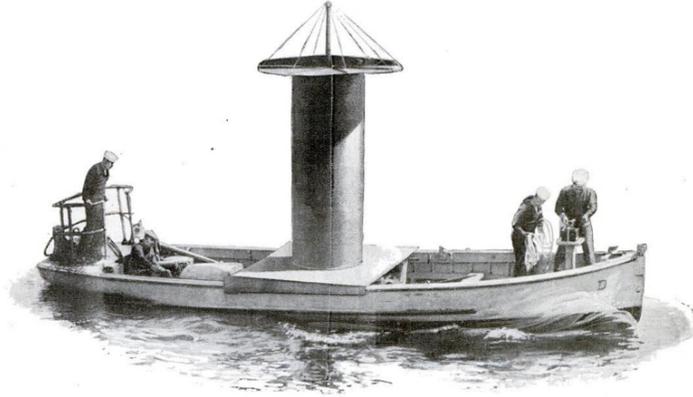


Figura 7.19: Veleiro adaptado por Lt. Joseph Kiernan e W. Hastings utilizando o efeito Magnus

- a) $w(z) = V(z + a^2/z)$ com V, a reais.
- b) $w(z) = C \ln(z - \epsilon)$ com C, ϵ reais.
- c) $w(z) = C \ln[(z - \epsilon)/(z + \epsilon)]$ com C, ϵ reais.
- d) $w(z) = V(z + a^2/z) - iC \ln(z/a)$ com V, C, a reais.

15. Potencial complexo a identificar

Estudamos no plano complexo $z = x + iy$ o potencial complexo $f(z) = \phi + i\psi = Vz + [q/(2\pi)] \ln z$.

- a) Podemos considerar este escoamento como superposição de outros dois. Quais?
- b) Mostrar que $\psi = q/2$ tem um ponto de estagnação. Desenhar esta curva toda. (Em particular ela tem uma parte em U que se estende até o infinito.)
- c) Argumentar que se pode substituir a linha $\psi = q/2$ por uma parede sólida da mesma forma sem modificar o escoamento.

16. Potencial complexo a identificar

Considere o potencial complexo $\omega(z)$ definido pela função inversa $z = \omega + e^\omega$.

- Desenhe as linhas de corrente $\psi = 0$ e $\psi = \pm\pi$.
- Mostre que, para $\phi \ll -1$ e $-\pi < \psi < \pi$, o potencial tende a $\omega(z) \simeq z$, isto é, neste limite ele corresponde a um escoamento uniforme.
- Mostre que, para $\phi \gg 1$ e $-\pi < \psi < \pi$, o escoamento tende ao proveniente de uma fonte puntiforme.
- Baseado nos resultados obtidos nos itens anteriores, diga o que poderia representar esse escoamento?

17. Escoamento por um canto

Uma corrente estacionária bidimensional de um certo fluido perfeito de densidade ρ segue ao longo de uma parede até atingir um canto (ver a figura 7.20). O escoamento é suposto potencial incompressível.

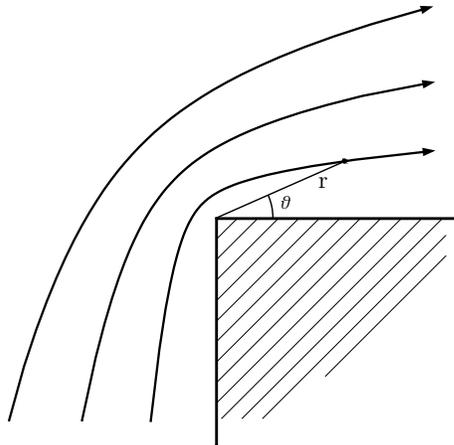


Figura 7.20: Exercício 17 - Escoamento por uma cunha

- Escreva o potencial complexo para este problema.
- Determine o módulo da velocidade.

c) Calcule a pressão exercida sobre a cunha.

18. Outro escoamento, por uma placa

Mesmas perguntas do que o exercício 17 com a figura 7.21

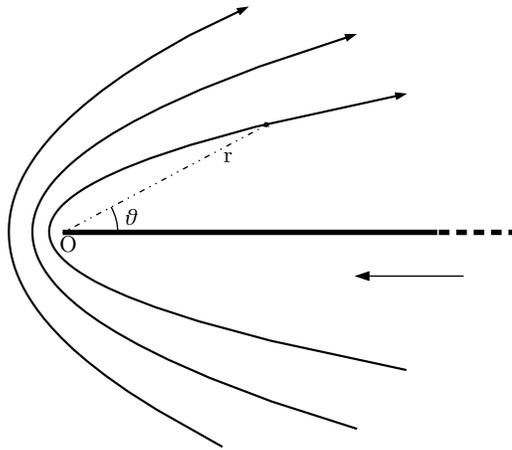


Figura 7.21: Exercício 18 - Escoamento por uma placa

19. Escoamento inclinado sobre uma placa

a) Mostre que o potencial seguinte descreve um escoamento retilíneo uniforme inclinado sobre um círculo de raio a no plano z e indique qual é o ângulo de inclinação:

$$w(z) = U(z e^{-i\alpha} + \frac{a^2 e^{i\alpha}}{z})$$

com α real.

b) Mostre que com a transformação de Joukowski $z \rightarrow z + R_0^2/R$ o círculo se transforma numa placa de comprimento $4a$ inclinada.

c) Para $\alpha = \pi/2$, mostre que o escoamento da placa é

$$W(Z) = -iU(z - \frac{a^2}{z}) \quad \text{com } Z = -i(z + \frac{a^2}{z})$$

20. Transformação de Joukowski de um círculo em elipse

Como se transforma um círculo de raio $R > R_0$ com $z \rightarrow z + R_0^2/R$?

7.9 Referências

- [7.1] G.J.Pert “Introductory Fluid Mechanics for Physicists and Mathematicians” Wiley, 2013.
- [7.2] A.R.Paterson “A first course in fluid dynamics”, Cambridge U.Press, 1997.
- [7.3] P.K.Kundu, I.M.Cohen, D.R.Dowling “Fluid Mechanics”, Academic Press 2015 (6a ed.).
- [7.4] T.Asai, A.Akatsuka and S.Haake, Physics World junho (1998) p.25
- [7.5] G.Ireson Physics Education (2001) p.10
- [7.6] C.E.Aguiar & G.Rubini Braz.Rev.Fis. 26 (2004) 306
- [7.7] G.K.Batchelor “An introduction to fluid mechanics” Cambridge 1970
- [7.8] D.K.Acheson “Elementary Fluid Dynamics” Oxford University Press 1990
- [7.9] Popular Science “America’s first rotor boat” Setembro 1925
- [7.10] F.M.White “Fluid mechanics” McGraw-Hill 1999 (4a ed.)

7.10 Dicas e respostas

8. $\psi = \frac{1}{2\pi}(q\theta + \Gamma \ln r)$

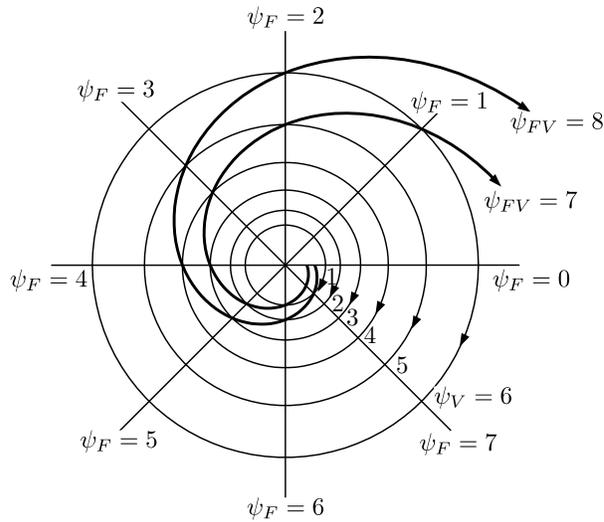


Figura 7.22: Exercício 8 - Combinação de um escoamento circular irrotacional e um radial. Curvas calculadas com $q = 8$, $\Gamma = 20$.

12.

- b) Mostrar que $F_y = \rho U \Gamma$ (cf. §7.4.4) e $\Gamma = \oint_{circ.} \vec{v} \odot d\vec{l} = R^2 \omega 2\pi$.
- c) Calcular a com F/m . O desvio da bola em relação a uma reta seria da ordem de 4,6m.

17.

- a) Proceder como na §7.7, precisará resolver $z = r e^{i\pi} = R^k e^{ik3\pi/2}$.
- b) Calcular dW/dZ .
- c) Usar a eq. de Bernouilli.

Capítulo 8

FLUIDOS VISCOSOS

Estudamos até aqui movimentos de fluidos perfeitos e obtivemos resultados interessantes, verificados aproximadamente por diversos fluidos. No entanto, encontramos também problemas. O paradoxo de D'Alembert é um exemplo. Um outro exemplo é o teorema de Thomson (sobre a circulação) que, se fosse válido rigorosamente, não nos permitiria compreender o aparecimento de redemoinhos numa correnteza junto a obstáculos.

Um fluido perfeito não tem viscosidade: dois filetes de fluido podem deslizar um do lado do outro com velocidades diferentes sem interagir. Num fluido real, por causa da agitação molecular de origem térmica, há colisões entre as moléculas dos dois filetes e então troca progressiva de momento. A viscosidade é um coeficiente que mede esta difusão da quantidade de movimento. Assim um fluido real opõe resistência ao deslizamento relativo de camadas adjacentes e esta resistência depende da viscosidade do fluido.

8.1 Equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis

8.1.1 Objetivo

Para tratar fluidos viscosos, temos que incorporar um termo novo na equação do movimento ou equação de Euler. Lembramos que, para a derivar, tínhamos considerado um pedaço de fluido e escrito a soma das forças atuando sobre ele devido à pressão, gravitação, etc. O termo novo, a força de viscosidade (específica), é uma força de superfície pois vem do atrito que as

camadas adjacentes ao volume de prova exerçam sobre ele:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\vec{f}_{visc}}{\rho} \quad (8.1)$$

Além desta equação, o fluido deve obedecer à equação de continuidade para massa, pois a massa continua conservada. Por enquanto suporemos o fluido incompressível de modo que ele simplesmente satisfaz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (8.2)$$

Por outro lado, a entropia não será conservada em princípio, assim a equação de continuidade para entropia não deve ser imposta. As equações (8.1) e (8.2) formam um conjunto de 4 equações para as 4 incógnitas p e \vec{v} .

O problema é escrever \vec{f}_{visc} de maneira explícita. Começemos por um exemplo simples.

8.1.2 Força devida à viscosidade num caso simples

Quando estudamos escoamentos potenciais, por exemplo um cilindro num escoamento retilíneo uniforme, o fluido tinha uma velocidade tangencial na superfície do cilindro (só a componente normal era nula). Mas sempre existem forças de coesão e experimentalmente, apesar de não ser óbvio, a velocidade de um fluido real é exatamente zero na superfície de um sólido. É por isto por exemplo que sempre tem uma camada de pó nas pás de um ventilador e que gruda nele mesmo quando quando o ventilador funciona. Por isto também que para enxaguar louça ensaboada, não é suficiente passar ela na água.

A condição de contorno sobre uma placa fixa, era, para um fluido perfeito: $\vec{v}_{\perp} = 0$. **Para um fluido real, temos que impor $\vec{v}_{\perp} = 0$ e $\vec{v}_{\parallel} = 0$ (esta última equação é chamada de condição de não-eskorregamento ou “no slip”), ou de maneira compacta $\vec{v}_{superf.} = 0$.** Se a placa estiver em movimento, o fluido tem que se movimentar com mesma velocidade.

Vamos supor que tenhamos duas placas paralelas com água entre elas, deixamos uma placa parada e deslizamos a outra com velocidade v_0 pequena. Se medirmos a força necessária para manter a placa em movimento, encontramos que ela é proporcional a v_0/d , onde d é o espaçamento entre as placas. Precisamente, a tensão F/A (força por unidade de superfície) é

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d} \quad (8.3)$$

8.1. EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS 217

onde η é chamada coeficiente de viscosidade de cisalhamento ou dinâmica e é uma constante (a temperatura e pressão fixas).

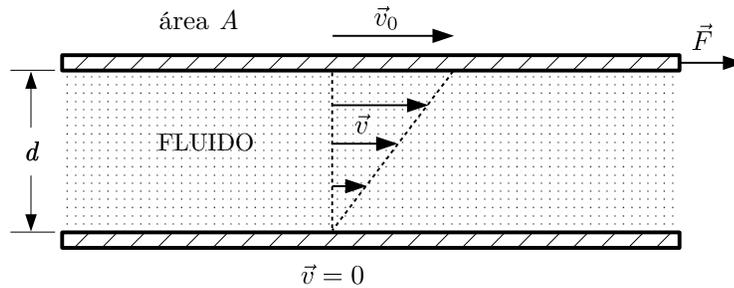


Figura 8.1: Escoamento de um fluido real entre placas com velocidade relativa. Observar que sobre a placa parada a velocidade do fluido é nula e sobre a placa com velocidade v_0 , a velocidade do fluido é v_0 .

De modo geral, não só a placa desliza sobre a camada superior do fluido, mas cada camada desliza sobre a camada inferior adjacente. Assim para um pedaço de fluido de espessura perpendicular ao escoamento Δy e superfície paralela ao escoamento ΔA (cf. fig. 8.2), podemos escrever para a força de cisalhamento atuando sobre ele:

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (8.4)$$

Esta equação descreve como o fluido reage a uma tensão $\Delta F/\Delta A$. Um fluido que obedece uma relação como (8.4) é chamado fluido Newtoniano.

8.1.3 Equação de Navier-Stokes para fluido incompressível

Agora passemos ao caso geral de um elemento de fluido cúbico como na figura 8.3. Procuramos não \vec{f}_{visc} diretamente mas a força superficial $\vec{f} = -\vec{\nabla}p + \vec{f}_{visc}$.

Sobre cada face atua uma tensão \vec{T}_i . A força resultante das tensões atu-

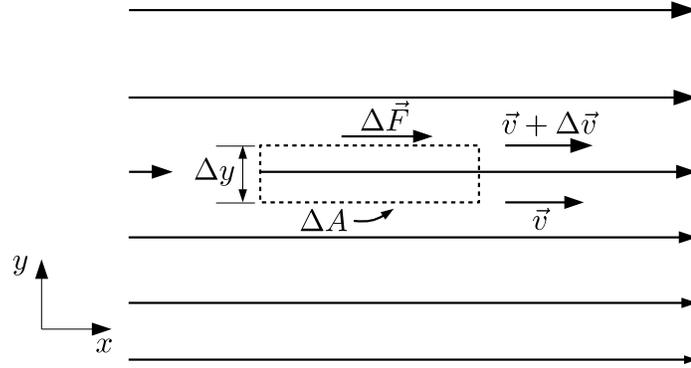


Figura 8.2: Movimento de um pedaço de fluido entre placas com velocidade relativa.

ando sobre as seis faces é:

$$\begin{aligned}
 \vec{f}\delta V &= \left[\left(\vec{T}_1 + \frac{\partial \vec{T}_1}{\partial x_1} \delta x_1 \right) - \vec{T}_1 \right] \delta x_2 \delta x_3 \\
 &+ \left[\left(\vec{T}_2 + \frac{\partial \vec{T}_2}{\partial x_2} \delta x_2 \right) - \vec{T}_2 \right] \delta x_1 \delta x_3 \\
 &+ \left[\left(\vec{T}_3 + \frac{\partial \vec{T}_3}{\partial x_3} \delta x_3 \right) - \vec{T}_3 \right] \delta x_1 \delta x_2 \\
 &= \left[\frac{\partial \vec{T}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{T}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{T}_3}{\partial x_3} \right] \delta V
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

A componente i de \vec{f} tem contribuições das 3 tensões \vec{T}_j . Introduzimos a notação seguinte para as componente i das tensões \vec{T}_j :

$$(T_j)_i \equiv \sigma_{ij} \tag{8.6}$$

A componente i de \vec{f} então pode ser escrita como

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{8.7}$$

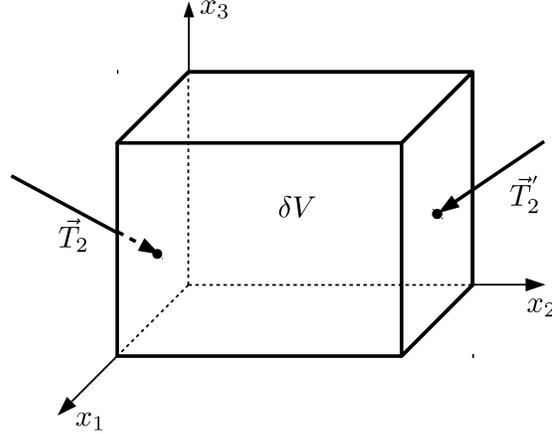


Figura 8.3: Tensões (forças por unidade de superfície) sobre as faces de um cubo de fluido.

No caso de fluido ideal, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (i.e. as tensões nas faces são devidas à pressão nas faces). Isto nos leva a re-escrever

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij} \quad (8.8)$$

com $\sigma'_{ij} = 0$ se $\eta = 0$. σ_{ij} é chamado tensor de tensões. Usando propriedades do fluido é possível encontrar a forma de σ'_{ij} .

Seguindo a seção anterior, os σ'_{ij} devem envolver combinações lineares de termos em $\partial v_k / \partial x_l$, a forma mais geral seria

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l} \alpha_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \quad (8.9)$$

O movimento relativo de dois pontos vizinhos num fluido pode ser escrito como soma do movimento devido à deformação e à rotação. Somente a deformação pura dissipa energia e deve dar origem a \vec{f}_{visc} . Podemos escrever

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} - \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (8.10)$$

Nesta equação, a parte de rotação é a anti-simétrica¹ e a parte de deformação

¹Se um fluido gira como um corpo rígido, $v_i = (\vec{\omega} \times \vec{r})_i = (\omega_j x_k - \omega_k x_j)$, daí $\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i = -\omega_k + \omega_k = 0$.

que nos interessa a simétrica, de modo que devemos ter:

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji} = \sum_{k,l} \alpha_{ijkl} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) \quad (8.11)$$

Finalmente, o fluido é isotrópico, então σ'_{ij} não deve depender da direção e o tensor de ordem 4 α_{ijkl} também não, isto implica que ele é da forma $\alpha_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \gamma (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \eta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$. No último termo usamos o fato que devemos ter $\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$. (O argumento de isotropia é implícito ao escrever $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$ no repouso.)

Assim

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.12)$$

Para fluido incompressível, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = 0$ de modo que chegamos à fórmula final

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.13)$$

Em coordenadas cartesianas

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} & \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} & \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Em coordenadas cilíndricas

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} & \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\ \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) & 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) \\ \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) & \eta \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right) & 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Juntando (8.7), (8.8) e (8.13)

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \sum_j \left[-\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial^2 x_j}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

(Usamos $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.) Observamos que

$$\vec{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \vec{v}. \quad (8.17)$$

Com isto podemos re-escrever a equação do movimento como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v}. \quad (8.18)$$

Esta equação é a equação de Navier-Stokes para fluido incompressível.

O termo $\nabla^2 \vec{v}$ merece cuidado: $\nabla^2 \vec{v} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ é o Laplaciano do vetor \vec{v} e não de uma função².

Em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.19)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 v_x \hat{x} + \nabla^2 v_y \hat{y} + \nabla^2 v_z \hat{z} = & + \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \hat{x} \\ & + \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] \hat{y} \\ & + \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \hat{z}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.21)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} = & \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] \hat{r} \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] \hat{\theta} \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \hat{z}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Podemos fazer várias observações sobre (8.18).

²Observar que $\nabla^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \neq \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ em geral.

- Ambas a equação de Euler e a de Navier-Stokes tem termos não lineares em $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$. Isto significa que não podemos usar o teorema de superposição para obter soluções (nem o de unicidade).
- A ordem das derivadas espaciais na equação de Euler é 1 (cf. $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$, $\vec{\nabla}p$, etc). Na equação de Navier-Stokes esta ordem é 2 devido ao termo $\nabla^2\vec{v}$. Isto a torna mais difícil de resolver. Outra consequência desta ordem 2 é que precisa de mais condições de contorno para resolver a equação de Navier-Stokes do que a de Euler.
- Na equação de Navier-Stokes, o coeficiente de viscosidade η aparece dividido pela densidade ρ . Do ponto de vista cinemático, o que caracteriza um fluido viscoso é mais a razão $\eta/\rho \equiv \nu$ chamada de viscosidade cinemática, do que η propriamente. A tabela seguinte dá os valores de η e ν de alguns fluidos mais comuns. Por esta tabela vemos que o ar é o menos viscoso dos três

	$\eta(\text{g/s}\cdot\text{cm})$	$\nu(\text{cm}^2/\text{s})$
água	0.010	0.010
ar	1.8×10^{-4}	0.150
mercúrio	0.0156	0.0012

fluidos considerados e o mercúrio o mais. Entretanto, sob o ponto de vista cinemático, o ar é o mais viscoso e o mercúrio o menos. Isto significa, por exemplo, que é muito mais fácil observar turbulências no ar do que na água ou no mercúrio.

- A equação de movimento da vorticidade $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$, usando o raciocínio da §5.1.4 fica

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{\Omega}. \quad (8.23)$$

8.1.4 Condições de contorno

As condições de contorno são importantes para ter uma solução adequada. Aquí discutiremos as mais comuns. Precisamos de duas condições de contorno para cada direção de \vec{v} .

8.1. EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS 223

(i) Condição de não-escorregamento

Como já discutido, para um fluido real, a condição de contorno para \vec{v}_{fluido} sobre uma superfície parada é $\vec{v}_{fluido} = 0$. Mais geralmente $\vec{v}_{fluido} = \vec{v}_{parede}$. Para dois fluidos não miscíveis, devemos ter $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

(ii) Condições de equilíbrio na interface

A força que age sobre a superfície do volume dV pode ser calculada.

$$dF_i = (f_{int})_i dV = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \stackrel{Gauss}{=} \sum_j \sigma_{ij} dS_j = -p dS_i + \sum_j \sigma'_{ij} dS_j \quad (8.24)$$

onde $dS_j = n_j dS$ (com normal apontando para fora). O primeiro termo é a pressão, sempre existente, e o segundo termo a força de atrito devido à viscosidade.

Quando temos dois fluidos por exemplo, as forças que o fluido 2 exerce sobre o fluido 1 devem cancelar as do fluido 1 sobre o 2. No exemplo da figura 8.4, na interface (plana) $\vec{d}S_x = 0$ e $\vec{d}S_y = dx dz \hat{y}$ e $\vec{v} = v \hat{x}$ de modo que as forças sobre o fluido 1 são

$$\begin{aligned} dF_x &= -pdS_x + \sigma'_{xx} dS_x + \sigma'_{xy} dS_y = \sigma'_{xy} dS_y, \\ dF_y &= -pdS_y + \sigma'_{yx} dS_x + \sigma'_{yy} dS_y = -pdS_y. \end{aligned} \quad (8.25)$$

e as forças sobre o fluido 2 são opostas.

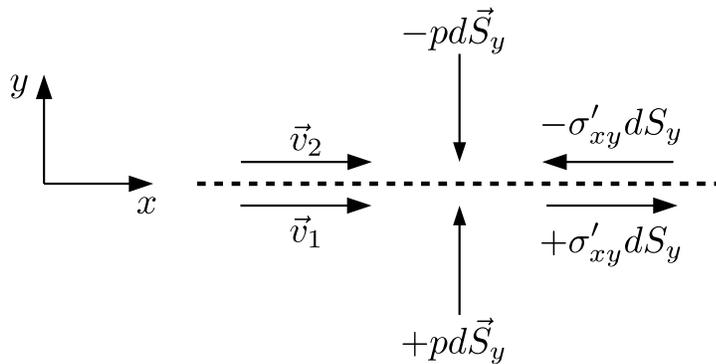


Figura 8.4: Exemplo de condições numa interface

(iii) *Condições no infinito*

Por exemplo para um objeto num escoamento retilíneo uniforme, longe do objeto a velocidade do fluido deve voltar a ser a do escoamento retilíneo uniforme.

8.2 Aplicações

8.2.1 Escoamento estacionário entre duas placas que se movem com velocidade relativa (Couette plano)

Voltemos ao problema da §8.1.2. Temos duas placas com velocidade relativa $v_0\hat{x}$. Desprezemos o campo gravitacional e impomos $p = \text{cte}$. Estudemos o problema estacionário.

A velocidade do fluido também é ao longo de Ox : $\vec{v} = v_x(x, y, z)\hat{x}$. Por simetria v_x não pode depender de z . Como o fluido é incompressível, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial v_x / \partial x = 0$ i.e. v_x não depende de x . Assim

$$\vec{v} = v_x(y)\hat{x}. \quad (8.26)$$

Temos

$$\begin{aligned} \partial \vec{v} / \partial t &= 0, \\ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= (v_x \partial_x)(v_x(y)\hat{x}) = 0, \\ \vec{\nabla} p &= 0 \quad \text{e} \\ \nabla^2 \vec{v} &= \nabla^2 v_x \hat{x} = (d^2 v_x / dy^2) \hat{x} \end{aligned}$$

. A equação de Navier-Stokes se reduz à

$$\frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad (8.27)$$

daí a solução $v_x(y) = ay + b$. Usando as condições de contorno $v_x(0) = 0$ e $v_x(d) = v_0$:

$$v_x(y) = \frac{v_0}{d} y \quad (8.28)$$

Assim a velocidade aumenta linearmente com y .

É interessante calcular as forças sobre o fluido em $y = 0$ e $y = d$. Usamos (8.24) com $\vec{d}S_x = \vec{d}S_z = 0$ e $\vec{d}S_y(h) = dx dz \hat{y}$ e $\vec{d}S_y(0) = -dx dz \hat{y}$ e todos os σ' são nulos exceto $\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \eta \partial v_x / \partial y = v_0 \eta / d$.

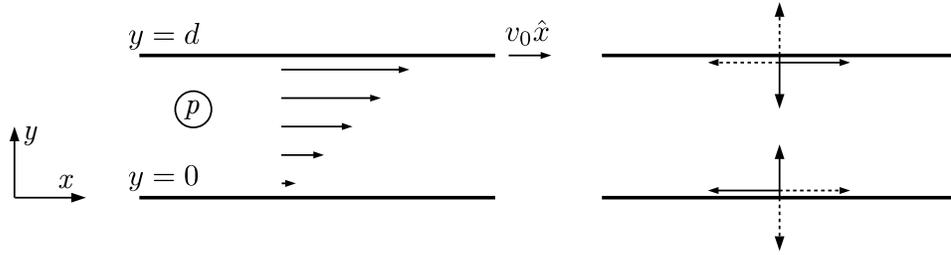


Figura 8.5: Esquerda: perfil de velocidade no caso de um fluido entre placas com velocidade relativa mas pressão constante. Direita: forças das interfaces sobre o fluido (linha contínua) e do fluido sobre as interfaces (linha pontilhada). Em cada interface as somas são iguais a zero. Além disto a soma das forças sobre o fluido é nula (ele não é acelerado.)

Na direção y :

$$F_y(y = d) = - \int p dS_y + \int \sigma'_{yx} dS_x = -pA \quad (8.29)$$

e $F_y(y = 0) = pA$ (pois \vec{dS} aponta em sentido oposto).

Na direção x :

$$F_x(y = d) = \int \sigma'_{xy} dS_y = v_0 A \eta / d \quad (8.30)$$

e $F_x(y = 0) = -v_0 A \eta / d$ (pois \vec{dS} aponta em sentido oposto).

Na direção z :

$$F_z(y = d) = 0 = F_z(y = 0) \quad (8.31)$$

Na interface $y = d$, o fluido é submetido à força $-pA\hat{y} + (v_0 A \eta / d)\hat{x}$ e responde com força oposta. Na interface $y = 0$, o fluido é submetido à força $pA\hat{y} - (v_0 A \eta / d)\hat{x}$ e responde com força oposta.

Além disto, a soma das forças que atuam sobre o fluido é nula como esperado pois o fluido não é acelerado.

8.2.2 Escoamento estacionário entre duas placas fixas com gradiente de pressão (Poiseuille plano)

Agora supomos que as placas estão paradas e que a pressão nas extremidades é diferente, valendo p_1 em $x = -l/2$, e um valor menor p_2 em $x = l/2$, de modo que se estabelece um escoamento. Desprezamos o campo gravitacional.

A velocidade do fluido do fluido é ao longo de Ox : $\vec{v} = v_x(x, y, z)\hat{x}$. Por simetria v_x não pode depender de z . Como o fluido é incompressível, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial v_x / \partial x = 0$ i.e. v_x não depende de x . Assim

$$\vec{v} = v_x(y)\hat{x}. \quad (8.32)$$

e como no caso anterior $\partial \vec{v} / \partial t = 0$, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ e $\nabla^2 \vec{v} = (d^2 v_x / dy^2)\hat{x}$. Mas agora $\vec{\nabla} p \neq 0$.

A equação de Navier-Stokes se escreve

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

Vemos que p só depende de x enquanto $\frac{d^2 v_x}{dy^2}$ só depende de y , então

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = C \\ \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} = C \end{cases} \quad (8.34)$$

Podemos resolver

$$p = Cx + c. \quad (8.35)$$

Usando as condições de contorno $C = (p_2 - p_1)/l$ e $c = (p_2 + p_1)/2$ de modo que

$$p = \frac{p_2 - p_1}{l}x + \frac{p_2 + p_1}{2}. \quad (8.36)$$

Temos também

$$v_x(y) = C \frac{y^2}{2\eta} + ay + b. \quad (8.37)$$

Usando as condições de contorno e o valor de C já determinado

$$v_x(y) = \frac{p_2 - p_1}{l2\eta} y(y - h). \quad (8.38)$$

v_x cresce parabolicamente, atingindo seu valor máximo entre as placas em $y = h/2$.

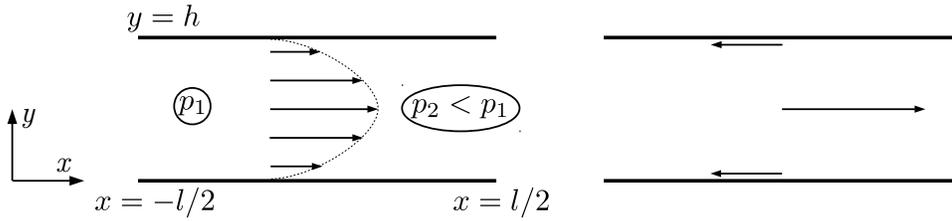


Figura 8.6: Esquerda: perfil de velocidade no caso de um fluido entre placas paradas mas com diferença de pressão. Direita: forças das interfaces sobre o fluido (na direção x), a soma das forças sobre o fluido é nula (ele não é acelerado.)

As forças sobre o fluido podem ser calculadas. Para as paredes $\vec{dS}_x = \vec{dS}_z = 0$ e $\vec{dS}_y(h) = dx dz \hat{y}$. Todos os σ' são nulos exceto $\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = [(p_2 - p_1)/l](y - h/2)$. Supomos que z varia de $-L/2$ a $L/2$.

Na direção x :

$$F_x(h) = \int \sigma'_{xy} dS_y = (p_2 - p_1)Lh/2 \quad (8.39)$$

e $F_x(0) = (p_2 - p_1)Lh/2$. A força total sobre o fluido na direção x devido ao cisalhamento é $(p_2 - p_1)Lh\hat{x}$ o que equilibra a força devida à diferença de pressão $-\vec{\nabla}pV = [(p_1 - p_2)/l]hlL\hat{x} = -(p_2 - p_1)Lh\hat{x}$.

Na direção y (integrando em x):

$$F_y(y = h) = - \int p dS_y = -(p_1 + p_2)lL/2 \quad (8.40)$$

(onde a integral em x tem que ser feita com cuidado) e $F_y(y = 0) = (p_1 + p_2)lL/2$.

Na direção z :

$$F_z(y = h) = F_z(y = 0) = 0 \quad (8.41)$$

A força total sobre o fluido é nula como esperado para um fluido não acelerado.

8.3 Equação de Navier-Stokes para um fluido compressível

Para estender o que fizemos para o caso de um fluido compressível voltamos à equação (8.12)

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_k \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (8.42)$$

É comum re-escrever esta equação como

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \\ &= \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \zeta \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (8.43)$$

i.e. $\lambda = \zeta - (2/3)\eta$.

Usando $f_i = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$, a equação de Navier-Stokes se torna

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} \\ &\quad + \frac{\eta}{\rho} \left(\sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \sum_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{2}{3} \sum_{jk} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\zeta}{\rho} \sum_{jk} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j \partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \left(\sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{\zeta}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (8.44)$$

ou numa forma mais compacta e re-introduzindo a gravidade

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \frac{(\zeta + \frac{1}{3}\eta)}{\rho} \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{g}. \quad (8.45)$$

ζ é a viscosidade de volume, ligada à resistência em mudar de volume, ela é nula para gases monoatômico, não é nula para o ar. Tradicionalmente é

importante na acústica e pode ser importante para o plasma de quarks e gluons.

A seguir consideremos somente fluidos incompressíveis (não tem o termo em $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ e nem ζ). O coeficiente de viscosidade que sobra, η , corresponde ao coeficiente de difusão do momento. É graças a esta viscosidade de cisalhamento que o movimento de uma camada de fluido pode induzir um movimento nas camadas vizinhas. Este coeficiente depende da temperatura. Com temperatura crescente, ele diminui para um líquido e aumenta para um gas.

8.4 Dissipação de energia num fluido viscoso incompressível

A ocorrência de viscosidade leva à dissipação de energia, que no final é transformada em calor. Faremos o cálculo sem a gravidade.

Considerando um volume V do fluido fixo, delimitado por uma superfície fechada S (como no Cap.2), a variação da energia cinética com o tempo pode ser escrita

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{\rho}{2} \int_V \frac{\partial v^2}{\partial t} dV = \rho \int_V \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV \quad . \quad (8.46)$$

Substituindo $\partial \vec{v} / \partial t$ com o auxílio da equação de Navier-Stokes e lembrando que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, podemos reescrever a função integrada como

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \vec{v} \cdot (\vec{\nabla}^2 \vec{v}) \\ &= -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right] + \frac{\eta}{\rho} \sum_{i,k} v_i \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\eta}{\rho} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\eta}{\rho} \sum_{i,k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\eta v_i}{\rho} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\eta}{2\rho} \left(\sum_{i,k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad . \end{aligned} \quad (8.47)$$

para passar da 1^a a 2^a linha, usamos $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = (1/2) \vec{\nabla} (\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v}$ de modo que $\vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^2 / 2$ e $\vec{\nabla} \cdot v = \sum_k \partial v_k / \partial x_k = 0$. Na 3^a linha, usamos $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$ já que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ e a regra da cadeia. Na 4^a linha, usamos o fato que $\sum_{i,k} (\partial v_i / \partial x_k)^2 = \sum_{i,k} (\partial v_k / \partial x_i)^2$.

Portanto,

$$\frac{dE_c}{dt} = - \int \vec{\nabla} \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] dV + \sum_{i,k} \int \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\eta v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right] dV - \sum_{i,k} \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV . \quad (8.48)$$

Usando agora o teorema de Gauss, chegamos finalmente a

$$\frac{dE_c}{dt} = - \oint_S \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \cdot d\vec{S} + \sum_{i,k} \oint \eta v_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dS_k - \sum_{i,k} \frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV . \quad (8.49)$$

Os dois primeiros termos desta expressão representam a variação da energia cinética do fluido devido ao transporte direto (através da superfície S) e o último termo é devido à dissipação. Em particular, se $S \rightarrow \infty$, os dois primeiros termos tendem a 0 (no referencial em que o fluido está em repouso a grandes distâncias). (Se existirem superfícies sólidas, as duas primeiras integrais serão nulas sobre elas, pois $\vec{v} = 0$ lá). Portanto, a variação da energia cinética de todo o fluido é

$$\frac{dE_c}{dt} = - \frac{\eta}{2} \sum_{i,k} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV . \quad (8.50)$$

O sinal menos é porque há dissipação de energia. dE_c/dt é nulo se todos os $\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i$ são nulos, i.e. não há deformação.

8.5 Adimensionamento da equação de Navier-Stokes e número de Reynolds

A equação de Navier-Stokes para um fluido incompressível se escreve:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ &= \frac{-\vec{\nabla} p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (8.51)$$

O termo $\partial \vec{v}/\partial t$ é chamado termo instacionário e o termo $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ inercial. Na segunda linha, os termos são devidos respectivamente às forças de pressão, de volume e viscosas. Esta equação está escrita por unidade de massa e queremos torná-la adimensional.

8.5. ADIMENSIONAMENTO DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES E NÚMERO DE REYNOLDS

Introduzimos:

$t = t'T$, $x_i = x'_i L$, $v = v'V_0$, $p = p'P_0$ e $\vec{g} = \vec{g}'G$, onde as letras maiúsculas correspondem a quantidades dimensionais fixas e as letras com linha a variáveis adimensionais. A equação de Navier-Stokes se re-escreve:

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{V_0^2}{L} (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\frac{P_0}{L} \frac{\vec{\nabla}' p'}{\rho} + G \vec{g}' + \frac{\eta}{\rho} \frac{V_0}{L^2} \nabla'^2 \vec{v}' \quad (8.52)$$

ou fazendo aparecer o coeficiente unidade na frente do termo inercial:

$$\frac{L}{V_0 T} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\frac{P_0}{V_0^2} \frac{\vec{\nabla}' p'}{\rho} + \frac{LG}{V_0^2} \vec{g}' + \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{V_0 L} \nabla'^2 \vec{v}' \quad (8.53)$$

Muitos problemas que consideraremos envolvem um fluido escoando sobre um obstáculo. Assim consideremos o caso de um objeto de dimensão L (perpendicular à velocidade) deslocando-se com velocidade V_0 num fluido em repouso. L e V_0 são as únicas escalas do problema. Não tem escala independente de tempo ou pressão. Supomos também que a gravidade não é importante. Podemos construir $T = L/V_0$ e $P_0 = \rho V_0^2$. Obtemos a equação adimensional:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}' = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{v}' \quad (8.54)$$

onde definimos o número de Reynolds

$$Re \equiv \frac{\rho V_0 L}{\eta} \quad (8.55)$$

A grande vantagem desta equação adimensional é a seguinte: quando a resolvemos para um valor de Re dado, todos os problemas que tem o mesmo Re tem a mesma solução. Isto é a ideia atrás dos testes de arrasto em tunel de vento com modelo reduzido (cf. exercícios).

O número de Reynolds apareceu como a razão entre termo inercial e termo viscoso

$$Re = \frac{\|(\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{v}'\|}{\|\eta/\rho \nabla'^2 \vec{v}'\|} = \frac{V_0^2/L}{\eta/\rho V_0/L^2} = \frac{\rho V_0 L}{\eta} \quad (8.56)$$

Assim podemos distinguir vários regimes:

- No caso $Re \rightarrow 0$, os efeitos viscosos dominam. O escoamento é laminar (elementos de fluido vizinhos permanecem vizinhos).

- No caso $Re \rightarrow \infty$, os efeitos inerciais dominam, o escoamento vira turbulento ($\vec{v}(t, x, y, z)$ varia aleatoriamente.)
- Para valores intermediários, (entre 1 e 2000), as forças de inercia são preponderantes mas o escoamento permanece laminar. Eventualmente pode-se desprezar os termos de viscosidade.

Alguns valores de número de Reynolds são:

- uma paramécia nadando na água $Re \sim 10^{-2}$
- uma gota chuva caindo no ar $Re \sim 1000$
- o arrasto de um pedestre $Re \sim 4 \times 30\,000$
- o arrasto de um carro $Re \sim 4 \times 10^6$
- o arrasto de um avião $Re \sim 2 \times 10^8$.

Este tipo de raciocínio (usando o número de Reynolds e a equação de Navier-Stokes adimensional) pode ser aplicado a problemas onde aparecem uma escala de pressão P_0 ou tempo T , efeitos de gravidade, vários tamanhos. Alguns outros números podem ser introduzidos (Strouhal, Froude, Euler) nestes casos.

8.6 Escoamento muito viscoso incompressível ao redor de uma esfera

Para um fluido passando por um obstáculo, existem dois regimes: longe onde o escoamento não é perturbado e a viscosidade não é importante e perto, onde o momento pode se difundir devido à viscosidade. A região perto do obstáculo é chamada camada-limite e precisa ser tratada com a equação de Navier-Stokes. A região fora pode ser tratada como um fluido perfeito. Nesta seção consideramos a região perto de um obstáculo.

Chama-se escoamento paralelo um escoamento unidirecional e invariante ao longo do escoamento ($\vec{v} = (v_x(y), 0, 0)$ ou $\vec{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$). Os escoamentos de Couette e de Poiseuille são deste tipo. Neste caso, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. A equação de Navier-Stokes só tem termos lineares $\vec{\nabla} p$ e $\vec{\nabla}^2 \vec{v}$ (eventualmente \vec{g}) e fica relativamente simples de resolver.

Existe um outro caso interessante onde podemos resolver esta equação de Navier-Stokes, um escoamento estacionário com obstáculo esférico e número de Reynolds pequeno. O termo inercial $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$

pode ser desprezado e a equação a resolver fica:

$$0 = \frac{-\vec{\nabla}p}{\rho} + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\vec{v} \quad (8.57)$$

Esta equação é chamada equação de Stokes.

Consideraremos o caso onde o obstaculo é uma esfera de raio R e o escoamento tem velocidade $\vec{U} = U\hat{x}$. Vamos mostrar que a força de atrito é

$$\vec{F} = 6\pi\eta R\vec{U} \quad (8.58)$$

Esta força é chamada força de Stokes.

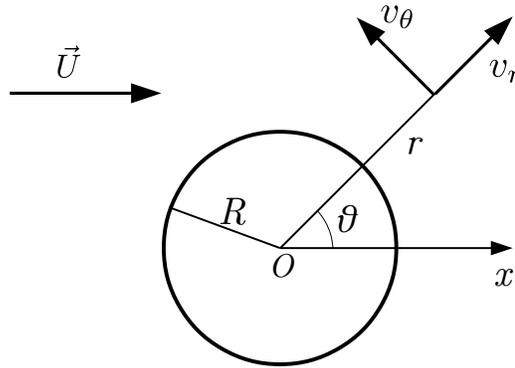


Figura 8.7: Escoamento axi-simétrico ao redor de uma esfera.

Supomos o escoamento incompressível, estacionário e axisimétrico ao redor de Ox (desprezamos a gravidade):

$$\vec{v} = v_r(r, \theta)\hat{r} + v_\theta(r, \theta)\hat{\theta}. \quad (8.59)$$

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, pode-se introduzir a função de Stokes que faz um papel similar à função de corrente. Ela pode ser calculada em coordenadas esféricas e é da forma (cf. §7.2 de [8.1] por exemplo)

$$\Psi = (A/r + Br^2 + Cr)\text{sen}^2\theta \quad (8.60)$$

A, B, C constantes a determinar com as condições de contorno.

As componentes da velocidade são:

$$\begin{aligned} v_r(r, \theta) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} (A/r + Br^2 + Cr) 2 \cos \theta \\ v_\theta &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} (-A/r^2 + 2Br + C) \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.61)$$

As condições de contorno são $\vec{v}(R, \theta) = 0$ e $\vec{v} = U\hat{x} = U \cos \theta \hat{r} - U \sin \theta \hat{\theta}$ (fig. 8.7) se $r \rightarrow \infty$. A condição no infinito leva a $B = U/2$ e as na superfície a $A = UR^3/4$ e $C = -3UR/4$. Assim

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) \\ v_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) \\ v_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} + \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (8.62)$$

Com a equação de Stokes na forma $\vec{\nabla} p = \eta \nabla^2 \vec{v} = \eta [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})) = -\eta \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$ (cf. nota de rodapé na §8.1.3), pode-se obter a pressão (cf. por exemplo §7.2 de [8.1])

$$p(r, \theta) = p_\infty - \frac{3\eta UR}{2} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (8.63)$$

A força ao longo de Ox é (cf. fig. 8.8)

$$dF_x = dF_r \cos \theta - dF_\theta \sin \theta = \sigma_{rr} dS_r \cos \theta - \sigma_{r\theta} dS_r \sin \theta \quad (8.64)$$

A partir de \vec{v} e p pode-se calcular para $r = R$ as componentes necessárias do tensor $\sigma_{i,j}$ e obter (as fórmulas em coordenadas esféricas para os $\sigma_{i,j}$ podem ser encontradas no apêndice A de [8.1]):

$$\begin{aligned} \sigma'_{rr} &= 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \\ \sigma'_{r\theta} &= \sigma'_{\theta r} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = -\frac{3\eta U}{2R} \sin \theta. \end{aligned} \quad (8.65)$$

Com isto obtemos

$$dF_x = \left(-p_\infty \cos \theta + \frac{3\eta U}{2R} \right) dS_r. \quad (8.66)$$

8.7. COEFICIENTE DE ARRASTO E COEFICIENTE DE SUSTENTAÇÃO 235

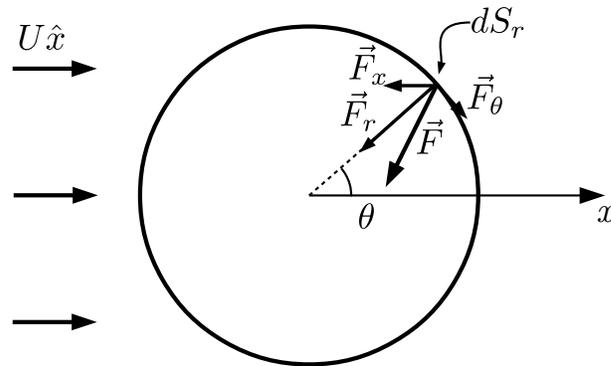


Figura 8.8: Decomposição da força sobre um elemento de superfície dS_r .

Usando $dS_r = R^2 \sin \theta d\phi$ e integrando

$$F_x = 6\pi\eta RU, \quad (8.67)$$

como anunciado.

A existência desta força vindo da viscosidade resolve o paradoxo de d'Alembert. Pode-se verificar também que a força transversal de sustentação é nula como esperado para este caso axisimétrico.

No curso de Física Experimental, vocês talvez ouviram falar desta força de Stokes, numa experiência de queda de uma esfera num tubo com óleo. Procurava-se obter a velocidade limite v_L da esfera quando ela está em equilíbrio sob os efeitos da força de peso, do empuxo devido aos gradientes de pressão e à força de atrito viscoso ou força de Stokes. A previsão teórica para v_L (vezes uma correção para levar em conta que o diâmetro do tubo é finito) é que ela varie com o raio da esfera ao quadrado. Ela tem muitas outras aplicações, por exemplo em esportes com bola (cf. exercícios).

8.7 Coeficiente de arrasto e coeficiente de sustentação

Para qualquer número de Reynolds, o coeficiente de arrasto de um objeto de seção S num escoamento de velocidade \vec{u} , é definido a partir da força de

arrasto F_A :

$$C_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho u^2 S} \quad (8.68)$$

Para uma esfera e um número de Reynolds pequeno, usando a expressão de Stokes, temos

$$C_A = 24/Re. \quad (8.69)$$

Experimentalmente, esta expressão vale até $Re \sim 1$. Existem outras fórmulas aproximadas para outros intervalos de Re .

É comum introduzir também o coeficiente de sustentação

$$C_S = \frac{F_S}{\frac{1}{2}\rho u^2 S} \quad (8.70)$$

onde F_S é a força de sustentação do tipo Magnus que vimos para objetos em rotação e a que vimos para aerofólios.

8.8 Camada-limite

8.8.1 Características

Um grande avanço na mecânica dos fluidos foi feito em 1904 por Prandtl. Ele concebeu a ideia de camada-limite, região fina sobre um objeto num escoamento, onde a viscosidade é importante. Podemos obter uma ordem de grandeza desta espessura no caso de escoamento $U(x)$ de um fluido incompressível sobre uma placa em duas dimensões da seguinte maneira.

As equações a resolver são

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.71)$$

v_x e v_y mudam mais rapidamente na direção perpendicular ao escoamento y , do que na direção paralela x por causa da condição de não escorregamento. Seja U_0 um valor típico de v_x e suponhamos que v_x mude de U_0 sobre uma distância L . Chamemos δ a espessura da camada.

Fazemos a hipótese

$$\left\| \frac{\partial v_x}{\partial y} \right\| = \frac{U_0}{\delta} \gg \left\| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\| = \frac{U_0}{L}, \quad (8.72)$$

isto significa

$$\delta \ll L. \quad (8.73)$$

Uma outra consequência é

$$\left\| \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right\| = \frac{U_0}{\delta^2} \gg \left\| \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right\| = \frac{U_0}{L^2}, \quad (8.74)$$

Usando a última equação em (8.71)

$$\left\| \frac{\partial v_y}{\partial y} \right\| = \left\| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\| = \frac{U_0}{L} \quad (8.75)$$

em consequência v_y que vale 0 sobre a placa deve atingir um valor aproximado de $U_0\delta/L$ na camada. Assim v_y é **muito menor que** v_x (pois este tem valor típico U_0).

Inserindo os valores aproximados de $U_0\delta/L$ para v_y e U_0 para v_x nas duas primeiras equações em (8.71), vemos que $-(1/\rho)\partial p/\partial x$ varia como $1/\delta^2$ e $-(1/\rho)\partial p/\partial y$ como $1/\delta$, de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (8.76)$$

Em primeira aproximação, $p(x, y) = p(x)$. Assim já que p é uniforme ao longo da espessura, ela tem o valor da região de fluido perfeito imediatamente fora da camada (por continuidade).

Os resultados que encontramos são resumidos na figura 8.9

Juntando (8.74), os fatos que $v_y \ll v_x$ e $p = p(x)$, as equações a resolver (8.71) se simplificam

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.77)$$

A espessura da camada pode ser estimada. Na primeira equação, o termo de viscosidade à direita é de ordem $(\eta/\rho)U_0/\delta^2$. Ele deve ser comparável aos

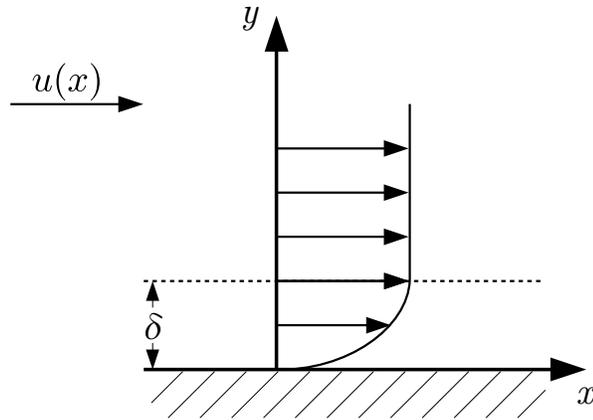


Figura 8.9: Placa num escoamento $U(x)$: na camada-limite $v_y \sim 0$, $p(x, y) \sim p_{\text{perfeito}}(x, y = \delta)$.

termos não lineares à esquerda³ que são ambos de ordem U_0^2/L . Obtemos então

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{1}{Re}}. \quad (8.78)$$

A hipótese de camada fina (8.73) vale se o número de Reynolds for grande.

As equações (8.77) podem ser resolvidas semi-analiticamente para placa plana num escoamento retilíneo uniforme ao longo de Ox como mostrado nas §8.3 da ref.[8.1] e 10.3 de [8.3]. A solução, chamada solução de Blasius, concorda bem com dados experimentais no regime laminar com número de Reynolds grande.

8.8.2 Descolamento da camada-limite

Quando a velocidade aumenta, a camada-limite pode se desgrudar do objeto, um pouco como um carro que passa em alta velocidade voa acima de uma lombada.

A figura 8.10 resume o que acontece para um cilindro num escoamento cuja velocidade aumenta.

³O termo de pressão não é crucial, por exemplo num escoamento retilíneo uniforme ao longo de Ox , p é constante.

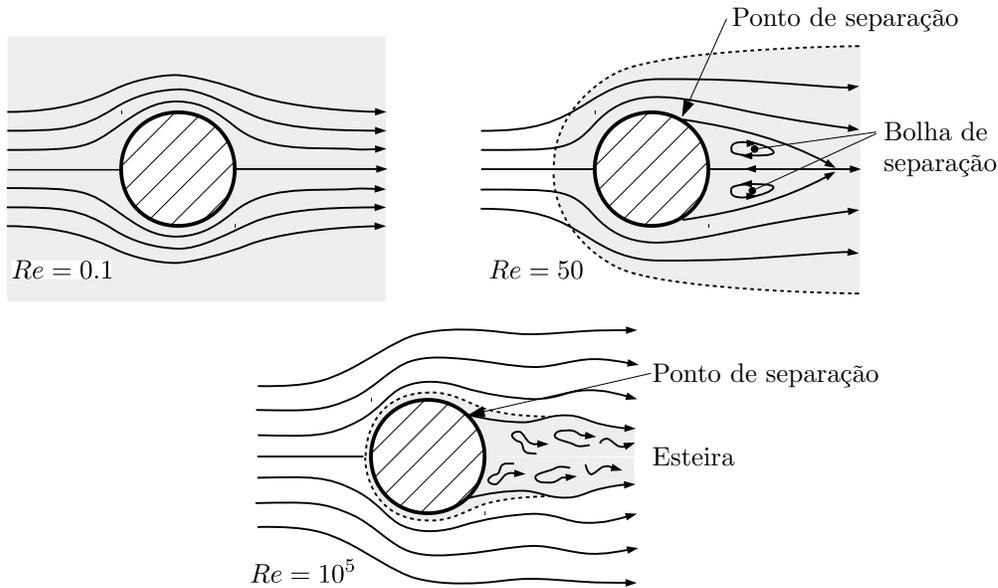


Figura 8.10: Fenômeno de separação da camada-limite. A região onde a viscosidade importa está indicada em cinza.

- Inicialmente, a baixa velocidade, isto é pequeno Re , o termo inercial na equação de Navier-Stokes é desprezível e a região onde a viscosidade importa é muito grande. As linhas de corrente são simétricas na frente e na parte posterior do cilindro.
- Quando a velocidade aumenta, surge uma camada-limite com pequena extensão a montante do cilindro e grande a jusante. Esta região a jusante é chamada esteira. Outro fenômeno importante é a separação quando o fluido não consegue mais manter sua trajetória curva ao redor do cilindro. O resultado é a formação de uma bolha de fluido atrás do cilindro (onde o movimento é em parte contrário ao do escoamento fora da bolha).
- Quando a velocidade aumenta ainda mais, a camada-limite fica mais fina e tem turbulência na esteira.

Podemos entender melhor o fenômeno de separação da camada-limite. Nos calculamos a velocidade e a pressão na ausência de viscosidade para um

cilindro num escoamento retílineo uniforme na seção 7.4.3. Nossa solução está representada na figura 8.11

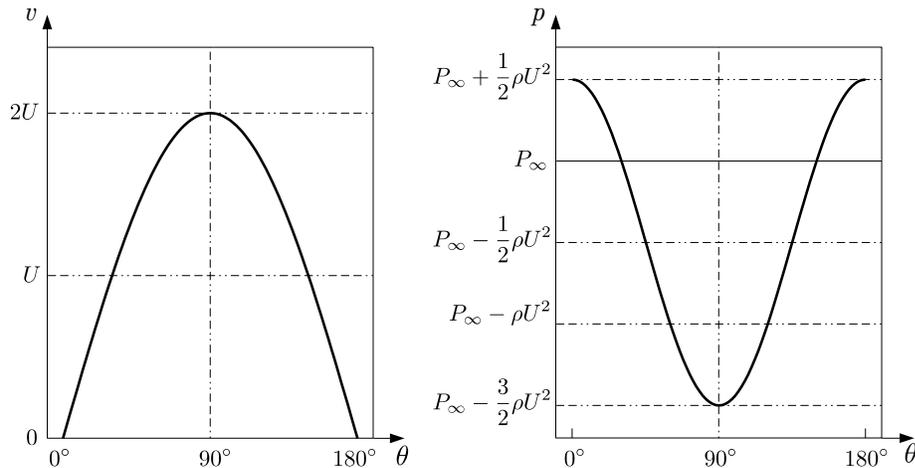


Figura 8.11: Velocidade e pressão na superfície de um cilindro num escoamento retílineo uniforme sem viscosidade.

Na camada-limite a pressão é a do fluido fora da camada, i.e sem efeito de viscosidade e tal como mostrado na figura 8.11. Ao passar de A a B na figura 8.12, uma partícula de fluido encontra um (negativo do) gradiente de pressão favorável que ajuda o movimento mas ela sofre perda de energia devido à viscosidade. Em B, ela encontra um (negativo do) gradiente de pressão desfavorável que dificulta o movimento. Se a partícula de fluido não tiver energia suficiente, ela não pode continuar sua trajetória curva até C e isto causa o descolamento da camada-limite.

8.8.3 Vorticidade em volta de uma asa

No capítulo anterior, nos vimos que se tiver vorticidade em volta de um aerofólio num escoamento, haveria sustentação mas a origem desta vorticidade não tinha sido esclarecida. Em particular num fluido perfeito, ela não poderia aparecer. Quando um avião é posto em movimento, aparece um vórtice anti-horário: o equivalente da figura 8.10 do cilindro para o caso da asa, é mostrado na figura 8.13. Este vórtice é varrido pelo escoamento principal (perpendicular à folha) deixando um vórtice horário (e sustentação) na asa.

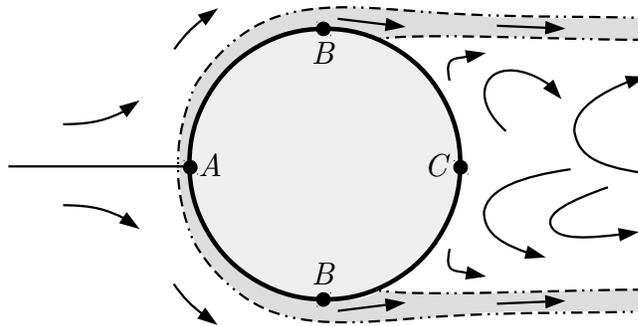


Figura 8.12: Descolamento da camada-limite.

Isto acontece porque fora da camada-limite, o fluido é perfeito e a circulação deve ser nula (teorema de Kelvin) de modo que para compensar a perda de um vórtice deve aparecer outro em sentido oposto.

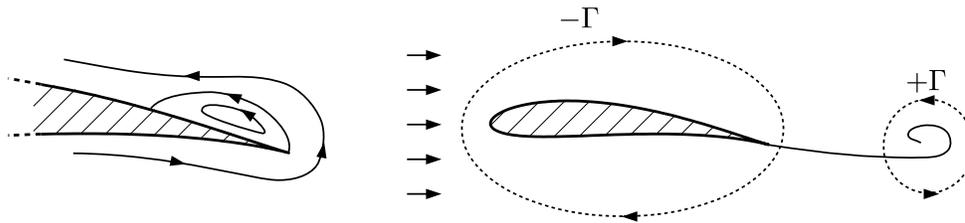


Figura 8.13: Aparição de vorticidade em volta de uma asa.

8.9 Exercícios

1. Escoamento de Couette plano

Um fluido incompressível de viscosidade η é localizado entre duas placas infinitas, espaçadas de $2d$. A placa de cima tem velocidade $V\hat{x}$ e a de baixo $-V\hat{x}$. (A gravidade é desprezada e a pressão constante.)

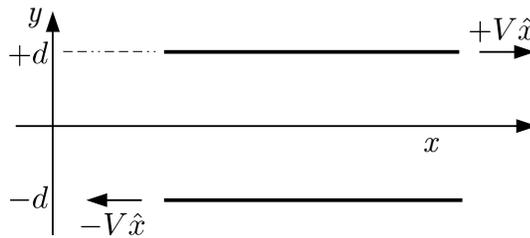


Figura 8.14: Exercício 1.

- Calcular a velocidade do fluido.
- Fazer um esboço das forças atuando sobre o fluido e as calcular.

2. Escoamento de Couette cilíndrico - 1

Consideremos um escoamento estacionário entre dois cilindros de comprimento l . (A gravidade é desprezada.)

$$\vec{v} = V(r)\hat{\theta} \text{ com } V(a) = a\Omega \text{ e } V(b) = 0 \quad .$$

Usando coordenadas cilíndricas:

- Calcular a velocidade.
- Calcular o torque sobre cada cilindro.

3. Escoamento de Couette cilíndrico - 2

Resolver o mesmo problema do que o exercício **2**, em coordenadas cartesianas

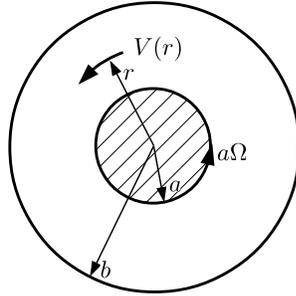


Figura 8.15: Exercício 2.

4. Escoamento de Couette cilíndrico - 3

Considere um cilindro de comprimento infinito em movimento de rotação constante (velocidade angular ω) dentro de um líquido viscoso.

- a) Usando um raciocínio análogo ao caso de escoamentos unidirecionais, mostre que, neste caso, $\vec{v}(r, \phi, z) = v_\phi(r)\hat{\phi}$ e a equação de Navier-Stokes se escreve

$$\begin{cases} \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right), \\ 0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Lembre-se de que $(\partial \hat{r})/(\partial \phi) = \hat{\phi}$ e $(\partial \hat{\phi})/(\partial \phi) = -\hat{r}$ (\hat{r} e $\hat{\phi}$ são versores).

- b) Usando a simetria do problema e as equações do item a), conclua que $p = p(r)$ e a segunda equação se reduz a

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2} = 0.$$

- c) Determine a distribuição de velocidade, procurando soluções da equação acima na forma r^n e a pressão.
- d) Determine o torque por unidade de comprimento necessário para manter o cilindro em rotação constante.

5. Escoamento de Poiseuille cilíndrico

Num tubo de seção circular de raio R e comprimento l , supor um escoamento $\vec{v} = v(r)\hat{z}$, nulo em $r = R$, com gradiente de pressão $G = (p_0 - p_1)/l$. (A gravidade é desprezada.)

- Escrever a equação de Navier-Stokes. (Calcular $\nabla^2\vec{v}$ em coordenadas cilíndricas usando o truque dado no texto.)
- Calcular a pressão.
- Calcular a velocidade do fluido.

6. Escoamento sobre um plano inclinado

Um líquido viscoso (de densidade ρ e viscosidade η) escorre sob ação da gravidade sobre um plano inclinado com ângulo α em relação à horizontal. Supor a espessura do fluido constante igual a d e que o escoamento esteja no regime estacionário.

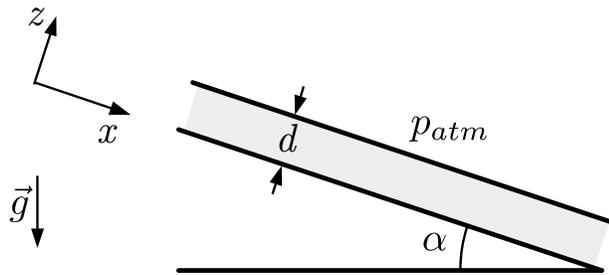


Figura 8.16: Exercício 6.

- Mostre que $\vec{v} = v(z)\hat{x}$, $p = p(z)$ e escreva as equações do movimento em coordenadas cartesianas.
- Quais são as condições de contorno?
- Determine a distribuição de pressão.
- Determine a distribuição de velocidade.
- Calcule a força de atrito por unidade de área exercida sobre o plano inclinado.

- f) Qual é a resultante de todas as forças que agem sobre um volume do fluido com $\Delta x = \Delta y = 1$ e delimitados pelo plano inclinado e pela superfície livre. Calcule explicitamente.

7. Escoamento da água e do mel

O objetivo deste exercício é comparar o escoamento estacionário sob efeito da gravidade da água e do mel. Na figura, \hat{z} e \vec{g} apontam no mesmo sentido. $\vec{v} = v(z)\hat{z}$. Para a água, a densidade é $\sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a viscosidade \sim

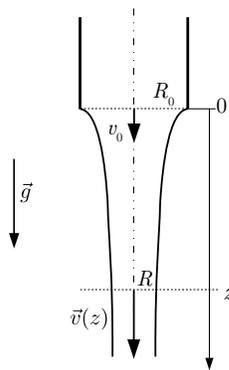


Figura 8.17: Exercício 7.

$10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Para o mel, a densidade é $\sim 10^3 \text{ kg/m}^3$ e a viscosidade $\sim 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Ambos são considerados incompressíveis.

- a) Para a água, usaremos a equação de Euler (porquê?). Mostrar que a velocidade satisfaz (supor o escoamento irrotacional e a pressão constante no fluido):

$$\frac{dv^2}{dz} = 2g$$

Obter $v(z)$ supondo que $v(z=0) = v_0$. Usando a constância da vazão, obter $R(z)$.

- b) Para o mel, usaremos a equação de Navier-Stokes (porquê?). Mostrar que a velocidade satisfaz (supor que o termo de viscosidade domina o termo de aceleração e a pressão constante no fluido):

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{\rho}{\eta}g$$

Obter $v(z)$ supondo que $v(z = 0) = v_0$ e $dv/dz(z = 0) = \alpha$. Usando a constância da vazão, obter $R(z)$.

8. Adimensionamento

O arrasto aerodinâmico de um novo automóvel de esporte deve ser testado a uma velocidade de 75,0 km/h em ar com temperatura de 25°C. Os engenheiros automotivos criaram um modelo em escala um para cinco do automóvel para testá-lo em tunel de vento. É inverno e o ar no túnel de vento está a 5°C.

Determine a velocidade do vento que os engenheiros devem colocar no túnel de vento para atingir a similaridade entre o modelo e o protótipo.

Para o ar à pressão atmosférica e $T=25^\circ\text{C}$, $\rho = 1,184 \text{ kg/m}^3$ e $\eta = 1,849 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$. Da mesma forma a $T=5^\circ\text{C}$, $\rho = 1,269 \text{ kg/m}^3$ e $\eta = 1,754 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$.

9. Escalas

Usando argumentos de similitude, explicar porque

- as crianças andam descalças sobre pedrinhas mais facilmente do que adultos.
- não tem animal maior do que 50 metros na terra.

10. Número de Reynolds para uma torneira

Vimos na aula que acima de um certo número de Reynolds, os escoamentos passam de laminar a turbulento. Para determinar este número de maneira caseira [8.5], pode se proceder como descrito neste exercício.

Duas pessoas deixam a água escorrer de uma torneira de 0,8cm de raio, aberta o suficiente para que bolinhas de ar comecem a se agitar nos limites do escoamento. Elas contam que em 10s, sai 450 ml de água. Calcular o número de Reynolds deste escoamento (a viscosidade da água é 0,001 N s m^{-2} e pode-se usar o raio da torneira como dimensão característica apesar do que o diametro também seria uma escolha possível [8.5]).

11. Lei de Stokes

Uma partícula de 1 mm de diâmetro e densidade $1.1 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ cai livremente do repouso em óleo de densidade $0.9 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ e viscosidade 0.03 N s m^{-2} .

- Supondo que a lei de Stokes se aplica, obter $v(t)$.

- b) Quanto tempo a partícula leva para atingir 0.99 % de sua velocidade limite? Qual é o número de Reynolds correspondendo a esta velocidade limite?

12. Arrasto de uma bola de futebol

Para que chutar uma bola forte?

O coeficiente de arrasto de uma esfera lisa em função do número de Reynolds é mostrado na figura:

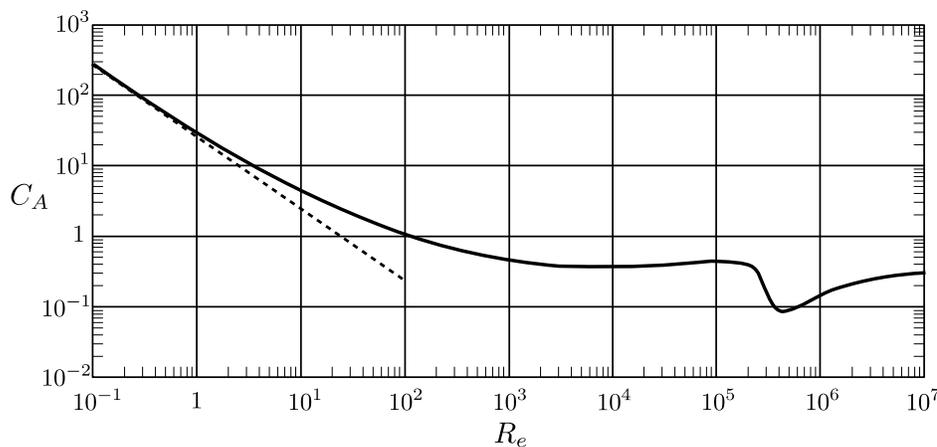


Figura 8.18: Exercício 12.

- a) A partir da força de Stokes, mostrar que o coeficiente de arrasto pode ser escrito como $24/Re$. Até qual valor de Re vale esta expressão segundo a figura?
- b) Como varia C_A para Re entre 10^3 e $3 \cdot 10^5$? Como varia a força de arrasto com a velocidade?
- c) Calcular o número de Reynolds de uma bola de futebol (diâmetro 22 cm) de velocidade 25m/s, no ar ($\eta = 18,2 \cdot 10^{-6} \text{ N s/m}^2$, $\rho = 1,20 \text{ kg/m}^{-3}$ a 20°ircC e 1 atm). Segundo a figura, o que acontece com o coeficiente de arrasto para este valor de Re ? Esta crise do arrasto, indesejável para um avião é utilizável no futebol?

13. Arrasto de uma bola de futebol

Consideremos uma bola de futebol em movimento retilinear uniforme com velocidade $-\vec{u}$ num fluido viscoso suposto incompressível, o ar. Este problema é equivalente a considerar o escoamento do ar com velocidade \vec{u} no infinito ao redor da bola. Utilize a figura 8.19

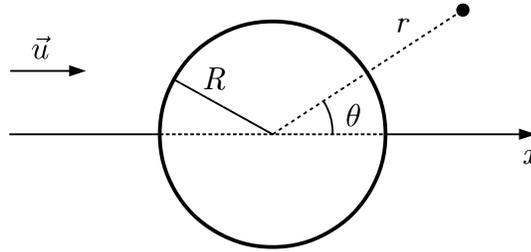


Figura 8.19: Exercício 13.

- a) Explicar porque para número de Reynolds Re pequeno, a equação satisfeita por este escoamento é: $-\frac{\nabla^2 p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} = 0$
- b) Pode-se mostrar (não é preciso fazê-lo!) que a velocidade tem componentes (desprezando a gravidade)

$$u_r(r, \theta) = u \cos \theta \left(1 - \frac{3R}{2r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right)$$

e

$$u_\theta(r, \theta) = -u \sin \theta \left(1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} \right),$$

a pressão é

$$p(r, \theta) = P_{atm} - \frac{3\eta u R}{2} \frac{\cos \theta}{r^2},$$

e sobre a esfera

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = -p$$

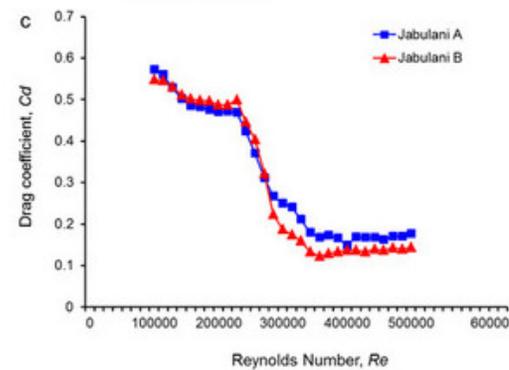
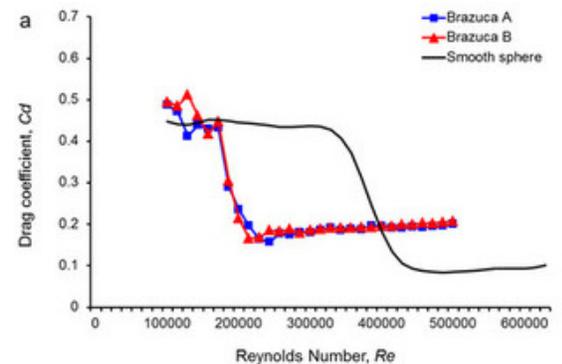
e

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = -3\eta/(2R)u \sin \theta$$

(os outros σ 's são nulos).

Usando estas informações: (i) verificar que p e \vec{v} satisfazem as condições de contorno desejadas; (ii) mostrar que a força de arrasto é dada pela fórmula de Stokes: $F_{Arrasto} = F_x = 6\pi\eta Ru$ (para Re pequeno).
 [Dicas: $dF_x = dF_r \cos \theta - dF_\theta \sin \theta$, $dS_R = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$.]

- c) Para Re qualquer, costuma-se escrever $F_{Arrasto} = C_A \times (\frac{1}{2}\rho u^2 \pi R^2)$. Os gráficos abaixo (ver [8.6]) mostram o coeficiente de arrasto C_A em função de Re obtido em simulações com túnel de vento para a bola usada na Copa do Mundo de 2014 no Brasil, a Brazuca, na copa de 2010 na Africa do Sul, a Jabulani, e uma esfera lisa.



Calcular Re quando $u = 60\text{km/h}$. (Usar $2R = 22\text{ cm}$, $\rho \sim 1\text{kg/m}^3$, $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}\text{kg/m.s}$)

Para este valor, calcular (aproximadamente) a força de atrito da Brazuca, Jabulani e esfera lisa.

Se a bola for chutada com esta velocidade, qual da Brazuca, Jabulani e esfera lisa manterá a maior velocidade?

14. Arrasto de um barco

Um barco está alinhado com um vento de $v_v = 50$ km/h e numa corrente (perpendicular ao vento) de $v_c = 1$ km/h. As dimensões do barco são largura $B=3$ m , altura fora da água $H=1,5$ m, altura na água $D=1$ m e comprimento na linha de água $L=8$ m.

- a) Estes escoamentos são turbulentos?
- b) Mostre que as forças de arrasto atuando sobre o barco são da forma $F_v \sim 1,2v_v^2 BH$ e $F_c \sim 1000v_c^2 LD$ e calcule-as.

Procure os coeficientes ρ , η que voce precisa na lista de exercícios e utilize como coeficiente de arrasto (muito aproximado) o de um paralelepípedo ~ 2 (qual seria a maneira rigorosa de calcular estes coeficientes?).

8.10 Referências

- [8.1] D.J. Acheson “Elementary Fluid Mechanics” Oxford University Press 1990.
- [8.2] A.R.Paterson “A first course in Fluid Mechanics” Cambridge 1983.
- [8.3] P.K. Kundu, I.M.Cohen & D.R.Dowling “Fluid Mechanics” Academic Press 2015 (6a Ed.)
- [8.4] Feynman, “Lectures on Physics”, V.II, Addison-Wesley 1964.
- [8.5] V.Thomsen “Estimating the Reynolds number in the kitchen sink”
The Physics Teacher 31 (1993) 410.
- [8.6] S.Hong & T.Asai, Scientific Reports 4, Article number: 5068)

8.11 Dicas e respostas

4. Escoamento de Couette cilíndrico - 3

- a) $\partial \vec{v} / \partial t = 0$, $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -(v_\theta^2 / r) \hat{r}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{\nabla} p = (\partial p / \partial r) \hat{r} + (1/r)(\partial p / \partial \theta) \hat{\theta}$,
 $\nabla^2 \vec{v} = [d^2 v_\theta / dr^2 + (1/r) dv_\theta / dr - v_\theta / r^2] \hat{\theta}$ (usando a eq. (8.22))
- b) Por simetria $p(r, z, \theta) = p(r)$.
- c) Obtemos $(n-1)(n+1) = 0$ daí a solução geral $v_\theta(r) = A/r + Br$. Com as condições de contorno de velocidade nula no infinito e valendo $R\omega$ na superfície $v_\theta = R^2\omega/r$. Obtemos $p(r) = p_{atm} - \rho R^4\omega^2 / (2r^2)$
- d) $\vec{d}F_\theta = \sigma'_{r\theta}(-dS_r) \hat{\theta} = \eta r d(rv_\theta/r) / dr (-rd\theta dz) \hat{\theta} = 2\eta\omega r d\theta dz \Leftarrow F_\theta(r = R) = 4\pi\eta\omega Rl$ (usando (8.15)) e $\tau/l = RF_\theta(r = R)/l = 4\pi\eta R^2$ (anti-horário).

12. Arrasto de uma bola de futebol

- a) Usar $F_A = 6\pi R\eta U$, a definição de C_A e a de Re com $L = 2R$. Vale até $Re \sim 1$ (ver linha tracejada).
- b) $C_A = \text{cte}$ e $F = C_A \times (1/2)\rho U^2 S \propto U^2$.
- c) $Re \sim 3,54 \cdot 10^5$.
 C_A decresce rápido neste regime. A bola sofre menos atrito e se desloca mais rápido.

Capítulo 9

INSTABILIDADE E TURBULÊNCIA

9.1 Ideia geral da teoria de perturbações linear

Um fenômeno físico que seria permitido pois satisfaz as leis de conservação não necessariamente existe pois pode não ser estável se pequenas perturbações são efetuadas. Na mecânica dos fluidos, como nós vimos no capítulo anterior para um cilindro, experimentalmente, à grande número de Reynolds, um escoamento pode cessar de ser laminar e se tornar turbulento. É interessante então estudar em quais condições um escoamento vira instável. Nos nos limitaremos ao caso de pequenas perturbações e teoria linear que apesar de suas limitações¹

A ideia geral da teoria de perturbações linear é a seguinte. Consideramos um escoamento estacionário incompressível e fazemos uma pequena perturbação:

$$\begin{cases} \vec{v}_0 & \rightarrow \vec{v}_0 + \delta\vec{v} = \vec{v} \\ p_0 & \rightarrow p_0 + \delta p = p \\ \rho_0 & \rightarrow \rho_0 \end{cases} \quad (9.1)$$

¹O fato de não estar estável sob pequenas perturbações não comprova que um escoamento vai entrar num regime turbulento. O fato estar estável sob pequenas perturbações não impede instabilidade para grandes perturbações. leva a resultados interessantes.



Figura 9.1: Esquerda: o fluido escoa em camadas, por exemplo, de maneira organizada. Sabendo o valor da velocidade num t , sabe-se o valor para $> t$. Direita: O fluido escoa de maneira desorganizada. Além de uma direção geral de escoamento, observamos flutuações de velocidade ao acaso.

A equação de movimento muda da maneira seguinte

$$(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v}_0 + \vec{g} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \quad (9.2)$$

Subtraindo e conservando os termos de perturbação lineares obtemos

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \delta \vec{v} + (\delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_0 = -\frac{\vec{\nabla} \delta p}{\rho_0} + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \delta \vec{v} \quad (9.3)$$

Procuramos uma solução da forma

$$\delta \vec{v}(\vec{x}, t, \alpha) = e^{(\alpha_r + i\alpha_i)t} \vec{v}(\vec{x}, \alpha) \quad (9.4)$$

e expressões similares para p .

Substituindo em 9.60 e impondo condições de contorno, obtem-se valores possíveis (discretas ou contínuas) para α .

Se $\alpha_r < 0$: a perturbação decai exponencialmente com o tempo
 \rightarrow escoamento estável.

Se $\alpha_r = 0$: escoamento com estabilidade neutra

Se $\alpha_r > 0$: a perturbação cresce exponencialmente com o tempo
 → escoamento instável.

Vamos aplicar este esquema em alguns exemplos.

9.2 Instabilidade de Kelvin-Helmholtz

Consideramos uma camada espessa de fluido de densidade de massa ρ_2 , velocidade retilinear uniforme U_2 por cima de outra camada espessa com densidade de massa ρ_1 e velocidade retilinear uniforme U_1 em duas dimensões. Ambos fluidos são supostos perfeitos. Chamamos $\zeta(x, t)$ sua interface.

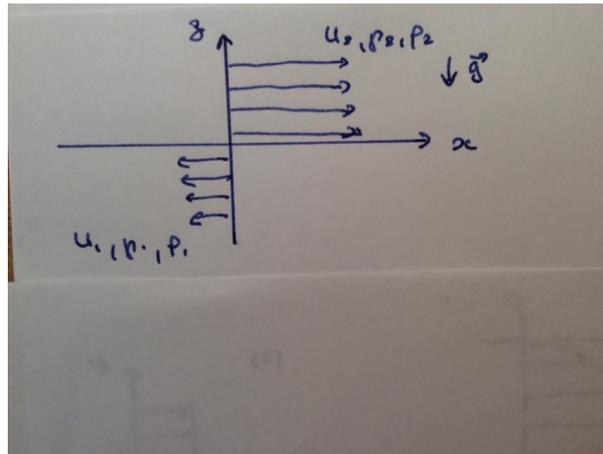


Figura 9.2: Duas camadas de fluidos perfeitos incompressíveis com densidade de massa e velocidade retilinear uniforme distintas em equilíbrio.

Perturbamos a interface. Seguindo o teorema de Kelvin, após a perturbação, o escoamento em cada fluido que era irrotacional permanece irrotacional. Podemos introduzir potenciais.

No caso não perturbado, são:

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= U_1 x & \text{se } z < 0, \\ \Phi_{02} &= U_2 x & \text{se } z > 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Escrevemos os potenciais após a perturbação na forma:

$$\Phi_1 = U_1 x + \phi_1 \quad \Phi_2 = U_2 x + \phi_2. \quad (9.6)$$

Como os fluidos 1 e 2 são incompressíveis: $\nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \phi_2 = 0$

A interface entre as duas regiões 1 e 2 se deforma e fica dada por $z = \zeta(x, t)$. Temos²

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - \zeta(x, t)) = 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(z - \zeta) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})(z - \zeta) \\ &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}(-\zeta) + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Dai:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(U_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \quad (9.8)$$

e conservando só os termos lineares:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} U_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (9.9)$$

Re-escrevemos agora as equações de Bernoulli na interface:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(U_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2 + g\zeta + \frac{p_{0i} + \delta p_{0i}}{\rho_i} = \text{cste}_i = \frac{1}{2} U_i^2 + \frac{p_{0i}}{\rho_i}, \quad (9.10)$$

onde cste_i é determinada usando o fato que o resultado deve valer em $z = 0$ quando não há perturbação. Na interface $p_{01} + \delta p_1 = p_{02} + \delta p_2$. Substituindo isto na equação 9.10 e conservando os termos lineares

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\zeta \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\zeta \right) \quad (9.11)$$

Procuramos a solução das duas equações (9.9) e da equação (9.11) na forma:

$$\begin{aligned} \zeta &= A e^{i(kx - \omega t)} \\ \phi_i &= f_i(z) e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \quad (9.12)$$

Como ambos ϕ_i satisfazem a equação de Laplace obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} = k^2 \phi_i \quad (9.13)$$

e

$$f_i(z) \propto e^{kz} \text{ e } e^{-kz} \quad (9.14)$$

²Estas equações podem também ser derivadas como uma condição de contorno, a igualdade das componentes normais a interface para fluidos e própria interface, cf. [9.1, 9.2].

A perturbação da interface não deve ser sentida longe dela assim:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= B_1 e^{kz} e^{i(kx - \omega t)} \\ \phi_2 &= B_2 e^{-kz} e^{i(kx - \omega t)}\end{aligned}\quad (9.15)$$

Substituindo em (9.9) e (9.11)

$$\begin{aligned}-i\omega A + U_1 k A &= k B_1 \\ -i\omega A + U_2 k A &= -k B_2 \\ \rho_1(-i\omega B_1 + iU_1 k B_1 + gA) &= \rho_2(-i\omega B_2 + iU_2 k B_2 + gA)\end{aligned}\quad (9.16)$$

Obtemos

$$\begin{aligned}B_1 &= iA(U_1 - \frac{g}{k}) \\ B_2 &= -iA(U_2 - \frac{g}{k}) \\ \omega^2(\rho_1 + \rho_2) - 2\omega k(\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2) + k^2(\rho_1 U_1^2 + \rho_2 U_2^2) + (\rho_2 - \rho_1)kg &= 0\end{aligned}\quad (9.17)$$

Esta última equação quadrática em ω admite como soluções

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left[\frac{g}{k} \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2) - \frac{\rho_1 \rho_2 (U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}} \right]^{1/2}\quad (9.18)$$

Temos instabilidade³ se $Im \omega > 0$. Na prática temos que olhar o sinal do termo entre colchetes quadrados.

Alguns particulares são interessantes de discutir:

- Se $U_1 = U_2 = 0$

$$\frac{\omega}{k} = \pm \left[\frac{g}{k} \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{(\rho_1 + \rho_2)} \right]^{1/2}\quad (9.19)$$

Tem estabilidade neutra se $\rho_1 > \rho_2$ (fluido pesado por baixo).

- Se $U_1 \neq U_2$, para perturbações de $\lambda = 2\pi/k$ pequenas, sempre haverá instabilidade. Na prática, para ter um critério mais preciso, precisaria levar em conta a tensão de superfície e a viscosidade [9.1]. Esta instabilidade chamada de instabilidade de Kelvin-Helmholtz é bastante comum na atmosfera e nos oceanos. Ela pode ser criada no laboratório com dois fluidos de densidades levemente diferentes (um deles com corante) num longo tubo horizontal que é levemente inclinado como

³Podemos escrever $e^{-i\omega t}$ na forma $e^{\alpha_r + i\alpha_i t}$.

mostrado na figura 9.3. O link seguinte mostra a experiência de maneira bastante espectacular:

www.youtube.com/watch?v=UbAfvcaYr00

Ela pode ser observada por exemplo em nuvens cf. figura 9.4.

- Se $U_1 \neq U_2$ e $\rho_1 = \rho_2$, sempre tem instabilidade qualquer que seja o valor de λ .

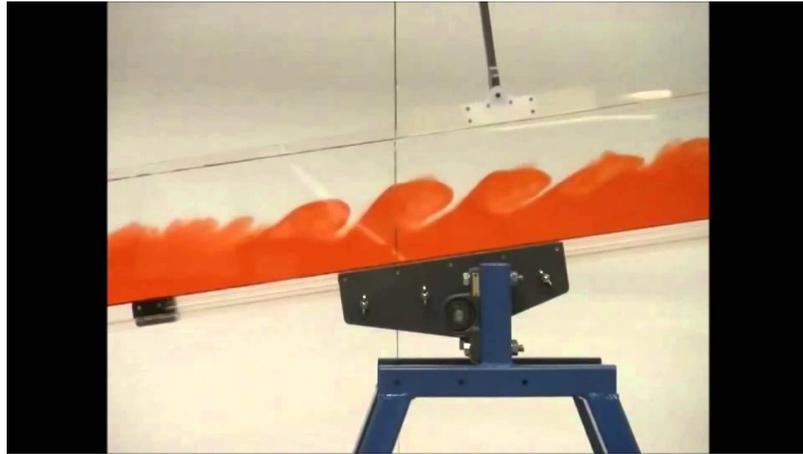


Figura 9.3: Demonstração na laboratório da instabilidade de Kelvin-Helmholtz com dois fluidos de densidades levemente diferentes.

9.3 Escoamento plano paralelo

Estudamos agora a questão da estabilidade num caso mais geral, onde a velocidade ainda é ao longo do plano Ox mas ela é contínua. Não incluímos a gravidade. Continuamos supondo o escoamento incompressível em duas dimensões:

$$\vec{v}_0 = (U(y), 0) \quad \text{se} \quad -b < y < b \quad (9.20)$$

Estudamos perturbações como na primeira seção .

Como $\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 + \delta\vec{v}) = 0 = \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} = 0$ podemos introduzir a função de corrente para $\delta\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \delta v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \delta v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.21)$$



Figura 9.4: forma ondulada de nuvem com instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Crédito: Climatempo/Aline Tochio.

9.3.1 Fluido perfeito

A equação (9.60) para $\delta\vec{v}$ fica:

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta\vec{v}_x}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\delta v_x}{\partial x} + \delta v_y\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta p}{\partial x} \\ \frac{\partial\delta\vec{v}_y}{\partial t} + U(y)\frac{\partial\delta v_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\delta p}{\partial y} \end{cases} \quad (9.22)$$

Eliminamos δp aplicando respectivamente $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ e subtraindo, bem como introduzindo a função de corrente

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y)\frac{\partial}{\partial x}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{\nabla^2} \psi - \frac{d^2U}{dy^2} \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (9.23)$$

As condições de contorno são $\delta v_y = 0 = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ em $y = \pm b$

Procuramos as soluções na forma

$$\psi = \tilde{\psi}(k, y, \omega)e^{ikx - i\omega t} \quad (9.24)$$

Substituindo em (9.23), obtemos a equação de estabilidade de Rayleigh:

$$\left(U - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} - k^2\tilde{\psi}\right) - \frac{d^2U}{dy^2}\tilde{\psi} = 0 \quad (9.25)$$

As condições de contorno são $\tilde{\psi} = 0$ em $y = \pm b$.

Introduzamos $\frac{\omega}{k} \equiv C = C_R + iC_i$. Assim $\psi = \tilde{\psi}(k, y, \omega)e^{ikx}e^{-ikC_R t}e^{kC_i t}$, temos estabilidade se $C_i < 0$ e instabilidade se $C_i > 0$.

Para resolver esta equação precisaríamos conhecer $U(y)$ mas existe vários teoremas interessante que podemos usar. Aqui estão dois.

- Pode-se mostrar [9.1,9.2] que se o escoamento for instável, $U(y)$ tem um ponto de inflexão (teorema do ponto de inflexão de Rayleigh). Ter um ponto de inflexão é uma condição necessária para instabilidade.
- Pode-se mostrar [9.1,9.2] uma condição necessária mais forte: se o escoamento for instável, em algum ponto $(U - U_{infl})U''$ é negativa (teorema de Fjortoft).

A figura ?? mostra alguns exemplos de aplicação .

9.3.2 Caso viscoso

Esboçamos só a generalização do caso anterior para incluir a viscosidade A equação (9.23) (na forma adimensional) tem um termo a mais:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U(y)\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi - \frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2\nabla^2\psi \quad (9.26)$$

Uma análise similar à anterior leva à equação (adimensionada) de Orr-Sommerfeld [9.1]:

$$(U - C)\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi} - \frac{d^2U}{dy^2}\tilde{\psi} - \frac{1}{ikRe}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)\tilde{\psi} = 0 \quad (9.27)$$

onde usamos $L = b$ e $V = \max U(y)$ para obter $Re = \frac{V\rho L}{\eta}$. Vemos que $Re \rightarrow 0$, reencontramos a equação de Rayleigh. As condições de contorno são $\tilde{\psi} = 0$ e $\frac{d\tilde{\psi}}{dy} = 0$ nas placas.

Precisamos então resolver uma equação do tipo

$$F(k, C; kRe) = 0 \quad (9.28)$$

Estamos interessados em valores de k e Re para os quais $C_i > 0$. Tipicamente existe Re_{crit} tal que **para $Re > Re_{crit}$ temos instabilidade.**

Por exemplo [9.2]:

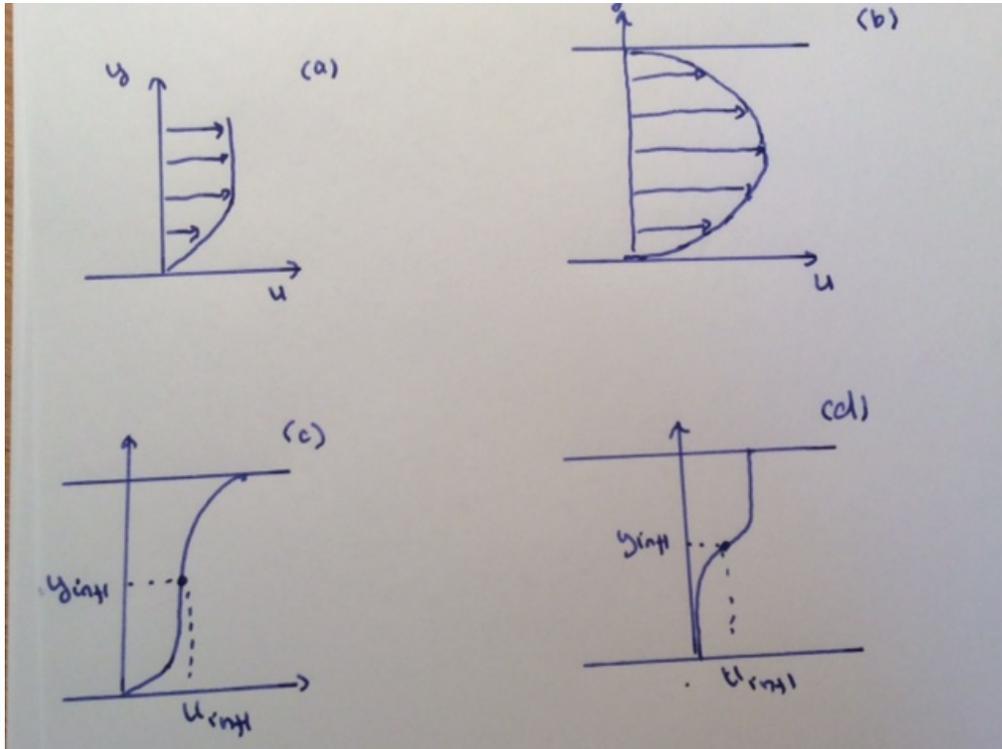


Figura 9.5: Os escoamentos de Blasius (a) e Poiseuille (b) não tem ponto de inflexão (onde a curva atravessa sua tangente) e são estável (dentro da aproximação de fluido perfeito). O escoamento c) satisfaz o critério de Rayleigh mas não de Fjortoft (tem $(U - U_{infl})U'' > 0$ (cuidado com a orientação dos eixos). O escoamento d) satisfaz ambos os critérios de Rayleigh e Fjortoft e pode ser instável.

- Para escoamento de Couette, $Re_{\text{crit}} = \infty$. Isto é em contradição com observação e pode ser devido à necessidade de considerar perturbação grandes.
- Para escoamento de Poiseuille $Re_{\text{crit}} \sim 5800$. Na análise de fluido perfeito, tínhamos encontrado que este escoamento seria estável. Pode-se ver o **papel da viscosidade na instabilidade**. Cálculos mais precisos estão em bom acordo com o valor experimental $Re_{\text{crit}} \sim 2500$.

9.4 Transição do regime lamiar para a turbulência

Fluidos turbulentos são comuns em nosso volta, em torneiras, rios, ondas chegando na praia, nuvens, fumaça,... Neles a velocidade e a pressão mudam rapidamente no espaço e tempo, de maneira irregular (mas contínua).

9.4.1 Experimento de Reynolds

O primeiro estudo da passagem de escoamento laminar para turbulento é geralmente creditado a Reynolds. Em 1883, ele fez a experiência famosa seguinte: em água num tubo circular, ele introduzia um filete de tinta e aumentava a velocidade do escoamento (de Poiseuille) como mostrado na figura 9.6.

Assim ele observou a transição de laminar para turbulento e percebeu que dependia de $\frac{\rho VL}{\eta}$. No seu caso, a saída do laminar acontecia para $Re > 2000$ mas dependia muito de condições como ter paredes lisas.

9.4.2 Situação atual

Hoje acredita-se que fluidos turbulentos são descritos pela equação de Navier-Stokes e que a solução contínua desta equação, que corresponde ao fluxo laminar, vira instável devido a pequenas flutuações no escoamento (que são presentes na vida real).

A turbulência vem de um excesso de energia cinética local que vence o efeito de atenuação que a viscosidade proporciona. Assim a turbulência é comum em fluidos de baixa viscosidade. Em geral aparecem vórtices num

9.4. TRANSIÇÃO DO REGIME LAMINAR PARA A TURBULÊNCIA 263

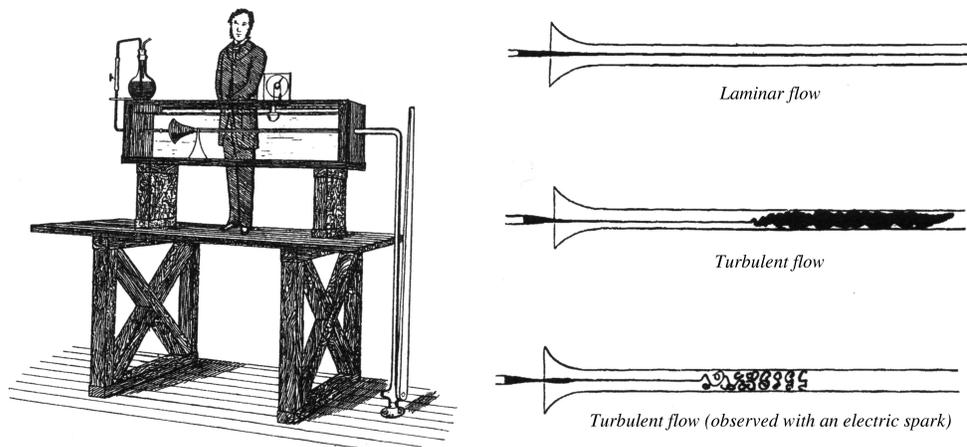


Figura 9.6: Experimento de Reynolds: a esquerda, o equipamento (ainda conservado na Universidade Manchester, a direita, um exemplo de resultado no seu artigo. Crédito: domínio público.

fluxo turbulento, eles interagem entre si, o arrasto aumenta e a perda de energia também.

A descrição completa da turbulência é um problema não resolvido da física. Nas palavras de Feynman (§3-9 [9.3]) “there is a physical problem that is common to many fields, that is very old, and that has not been solved. It is not the problem of finding new fundamental particles, but something left over from a long time ago - over a hundred years. Nobody in physics has really been able to analyze it mathematically satisfactorily in spite of its importance to the sister sciences. It is the analysis of circulating or turbulent fluids.

Circula também a história seguinte sobre Heisenberg. Ao ser indagado sobre o que perguntaria a Deus quando o encontrar: “Quando entrarei Deus, eu lhe farei duas perguntas: Porquê a relatividade? E porquê a turbulência? Eu acredito realmente que ele terá uma resposta para a primeira pergunta.” Existe uma outra versão desta história envolvendo H.Lamb (especialista de mecânica dos fluidos).

Como entender a equação de Navier-Stokes (particularmente a existência de solução suave em três dimensões) é considerado um primeiro passo para melhorar nosso entendimento da turbulência, o Clay Mathematics Institute selecionou isto como sendo um dos sete “Millennium Prize problems” (com

um prêmio de 1 milhão de dólares a ganhar).

9.5 Médias no tempo

Até onde sabemos, a equação de Navier-Stokes vale para escoamento turbulento. O problema é que nem com computador conseguimos extrair $\vec{v}(x, y, z, t)$ para Re grandes. Por isto, a análise padrão da turbulência é separar as flutuações do valor médio no tempo.

O valor médio no tempo é definido por

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_0^T v_i dt \quad i = x, y, z \quad (9.29)$$

onde T é um tempo maior do que a escala de variação de v_i .

Com isto escrevemos:

$$v_i = \bar{v}_i + v'_i, \quad (9.30)$$

onde \bar{v}_i não depende de t e $\bar{v}'_i = 0$ (o que pode ser visto fazendo a média no tempo de cada lado da equação (9.30)). Por outro lado em geral $\overline{v'_i v'_j} \neq 0$ e $\overline{v'_i p'} \neq 0$.

Algumas propriedades úteis são:

- $\overline{f'} = 0$,
- $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$,
- $\overline{f\bar{g}} = \bar{f}\bar{g}$,
- $\Rightarrow \overline{f'g} = 0$,
- $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$,
- $\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}$,
- $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}$,
- $\overline{f f ds} = \bar{f} ds$.

9.6 Equações para escoamento turbulento

Aplicamos a ideia da decomposição (9.30) no caso de um fluido incompressível.

9.6.1 Equação de continuidade

Inserindo (9.30) na equação de continuidade obtem-se

$$\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (9.31)$$

Fazendo a média no tempo, vem:

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \sum_j \frac{\partial v'_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Isto é, ambos o valor médio e as flutuações satisfazem a mesma equação do que o fluxo laminar.

9.6.2 Equação de Navier-Stokes

Temos

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + p\vec{g} + \eta \nabla^2 \vec{v} \quad (9.33)$$

ou para a componente i , inserindo a decomposição (9.30)

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i + v'_i}{\partial t} + \sum_j (\bar{v}_j + v'_j) \cdot \frac{\partial \bar{v}_i + v'_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p + p'}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{v}_i + v'_i) \quad (9.34)$$

Fazendo a média no tempo e lembrando $\bar{v}' = 0$, obtemos

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \overline{\sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \eta \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \bar{v}_i \quad (9.35)$$

Levando em conta $\bar{v}'_j = 0$ e a equação de continuidade para a parte que flutua, podemos re-escrever o segundo termo

$$\begin{aligned} \overline{\sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}} &= \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \sum_j \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \\ &= \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \sum_j \overline{v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j}} \\ &= \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \sum_j \overline{\frac{\partial v'_j v'_i}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (9.36)$$

de modo que

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{v}_i}{dt} &= \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + g_i + \frac{\eta}{\rho} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \bar{v}_i - \sum_j \frac{\partial \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_j}\end{aligned}\quad (9.37)$$

Isto é, a quantidade média \bar{v}_i satisfaz uma equação de Navier=Stokes com termo adicional.

Subtraindo (9.37) de (9.35) obtem-se uma equação para parte que flutua v'_i

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + \sum_j \bar{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \sum_j v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \sum_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_j^2} + \sum \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j} - v'_i v'_j)\quad (9.38)$$

O último termo ilustra o problema para determinar v'_i : precisamos conhecer as médias no tempo $\overline{v'_i v'_j}$. Poderíamos escrever uma equação para $dv'_i v'_j/dt$ mas apareceriam termos em $\overline{v'_i v'_j v'_k}$, Isto é chamado problema de "closure". Na seção a seguir mostramos como estimar o termo $\overline{v'_i v'_j}$ num exemplo.

9.7 Escoamento turbulento bidimensional com fronteira

Consideramos o caso de um escoamento turbulento bidimensional que seja em média da forma $\vec{v} = (u(y), 0)$, onde não conhecemos a forma precisa de $u(y)$. Pode ser por exemplo um escoamento turbulento entre placas planas e que estamos observando longe das extremidades, i.e. do tipo Poiseuille ou Couette. Pode ser também uma camada viscosa de um escoamento ao longo de uma placa.

Intruduzemos a notação $\vec{v} = (u, v)$ e supomos que os u' e v' flutuam só na direção y

As equações (9.38) para u e v ficam

$$\begin{cases} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{d}{dy} (\overline{u' v'}) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{d}{dy} \overline{v'^2}\end{cases}\quad (9.39)$$

Podemos integrar a segunda equação

$$\bar{p} + \rho \overline{v'^2} = p_0(x)\quad (9.40)$$

e inserir na primeira

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2u}{dy^2} - \frac{d}{dy}(\overline{u'v'}) \quad (9.41)$$

Sobre a parede a velocidade é nula em cada instante:

$$\bar{u}=0, \bar{v}=0 \quad u' = 0, v' = 0 \quad \Rightarrow \overline{u'v'} = 0, \overline{v'^2} = 0 \quad (9.42)$$

Integrando (9.41) da posição da parede $-h$ até um certo y temos:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx}(y+h) + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{du}{dy} - \frac{du}{dy} \Big|_{-h} \right) - (\overline{u'v'} - 0) \quad (9.43)$$

Introduzimos a velocidade

$$u_*^2 \equiv \frac{\eta}{\rho} \frac{du}{dy} \Big|_{-h} \quad (9.44)$$

Na equação (9.43), consideremos o ponto que seria no meio das placas, i.e. fazemos $y = 0$. Usamos $\frac{du}{dy} \Big|_0 = 0$ (i.e. em média a velocidade é máxima em $y = 0$) e como em média a velocidade é simétrica em relação a $y = 0$, $\bar{u}' = 0$, $\bar{v}' = 0$, $\overline{u'v'} = 0$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} h - u_*^2 \quad (9.45)$$

Podemos interpretar u_*^2 como basicamente, a derivada de $p_0(x)$. Com isto, re-escrevemos (eq:pres) para um y qualquer:

$$0 = u_*^2 \frac{y}{h} + \frac{\eta}{\rho} \frac{du}{dy} - \overline{u'v'} \quad (9.46)$$

Mudamos de variável de modo que a parede seja localizada em $y_1 = 0$

$$y_1 \equiv y + h \quad (9.47)$$

e assim

$$0 = -u_*^2 \left(1 - \frac{y_1}{h} \right) + \frac{\eta}{\rho} \frac{du}{dy_1} - \overline{u'v'} \quad (9.48)$$

Esta equação acopla a velocidade média (via sua derivada) e $\overline{u'v'}$, o equilíbrio entre os dois depende de y_1 .

Tem 3 regiões num escoamento perto de uma parede

- Perto da parede, a viscosidade domina
- Longe da parede, os termo de turbulência dominam
- Entre as duas, os dois efeitos são importantes

Consideremos cada região.

- *Camada externa*

A escala de tamanho para a camada externa é h , re-escrevemos 9.48 na forma

$$0 = -1 + \frac{y_1}{h} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{du/u_*}{dy/h} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \quad (9.49)$$

onde $\mathcal{R}e = \frac{\rho u_* h}{\eta}$

$\mathcal{R}e$ deve ser grande, de modo que

$$0 = -1 + \frac{y_1}{h} + \frac{1}{\mathcal{R}e} \frac{du/u_*}{dy/h} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \quad (9.50)$$

com $\mathcal{R}e = \frac{\rho u_* h}{\eta}$, g de em geral,

$$\Rightarrow \quad 0 = -1 + \frac{y_1}{h} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \quad (9.51)$$

Com isto,

$$\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \text{ varia linearmente com } \frac{y_1}{h} \quad (9.52)$$

isto é conseguimos obter uma informação sobre o termo ligado à turbulência. Experimentalmente, esta linearidade com y_1/h é bem satisfeita.

O valor médio u sumiu da equação mas dimensionalmente espera-se:

$$\frac{U_0 - u}{u_*} = F\left(\frac{y_1}{h}\right) \quad (9.53)$$

Esta equação é chamada lei de desvio de velocidade (“velocity-defect law”): a velocidade (média) u é reduzida em relação a do escoamento retilíneo uniforme $U_0 \hat{x}$ e isto depende da velocidade de atrito u_* e de uma função de y_1/h .

• *Camada interna*

Esperamos que a viscosidade perto da parede importa e podemos construir uma escala re-escrevendo 9.48

$$0 = -1 + \frac{y_1 u_*}{\eta/\rho} \frac{1}{\mathcal{R}e} + \frac{du/u_*}{d(y_1 u_* \rho/\eta)} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \quad (9.54)$$

Aparece uma distância adimensionada

$$y^+ = \frac{\rho u_* y_1}{\eta} \quad (9.55)$$

a ser comparada com $\mathcal{R}e = \frac{\rho u_* h}{\eta}$, bem como uma velocidade adimensional

$$u_+ = \frac{u}{u_*}. \quad (9.56)$$

de modo que re-escrevemos

$$0 = -1 + \frac{y_+}{\mathcal{R}e} + \frac{du_+}{dy_+} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} \quad (9.57)$$

Para $\mathcal{R}e$ grande i.e. perto da parede ($y_1 \ll h$), temos

$$0 = -1 + \frac{du_+}{dy_+} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2}. \quad (9.58)$$

Assim perto da parede, u_+ e $\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2}$ só dependem de y_+ , isto é,

$$\begin{aligned} u_+ &= f(y_+) \\ \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} &= g(y_+) \end{aligned} \quad (9.59)$$

A equação para u é chamada de lei de parede (“law of the wall”). Como no caso anterior, conseguimos uma informação sobre o termo ligado à turbulência e sobre a forma da velocidade média u . Experimentalmente $\overline{u'v'}/u_*^2$ em função de y_+ é constante sobre boa parte da camada interna.

No caso de um escoamento de Poiseuille com viscosidade e virando turbulento, perto da parede espera-se $u = \sigma/\eta y$ com $\sigma = -dp/dx = \rho u_*^2/y$, assim $u = \rho u_*^2/\eta(y/h)$ e

$$u_+ = y_+, \quad (9.60)$$

i.e. a relação entre u_+ e y_+ é linear.

• *Região de superposição*

Na região de superposição as duas formas de $\frac{u}{u_*}$ devem concordar:

$$\frac{u}{u_*} = f(y_+) = -F(\xi) + \frac{U_0}{u_*} \quad (9.61)$$

onde denotamos $\xi = y_1/h$. derivando ambos lado em y_+ e multiplicando por y_1 , obtemos

$$y_+ \frac{df}{dy_+} = -\xi \frac{dF}{d\xi}. \quad (9.62)$$

O lado esquerdo depende só de y_+ e o direito de ξ , então devem ser iguais a uma constante denotada por $1/\kappa$.

Obtemos então

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_*} &= f(y_+) &= \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B \\ \frac{u-U_0}{u_*} &= -F(\xi) &= -\frac{1}{\kappa} \ln \xi + A. \end{aligned} \quad (9.63)$$

As equações (9.63) valem de modo geral para escoamento com parede. Uma ou outra destas equações dá a velocidade média na região de superposição como uma lei logarítmica. Para uma grande variedade de escoamentos turbulentos com parede encontra-se um bom acordo experimental com $k \sim 0.4$ e $B \sim 4$ or 5 e $A \sim 1$. Isto é um resultado muito importante no estudo da turbulência e é ilustrado na figura 9.7.

Com este exemplo, vemos que a decomposição das quantidades como velocidade e pressão em parte média mais flutuações permite entender escoamentos com parede de maneira surpreendentemente boa.

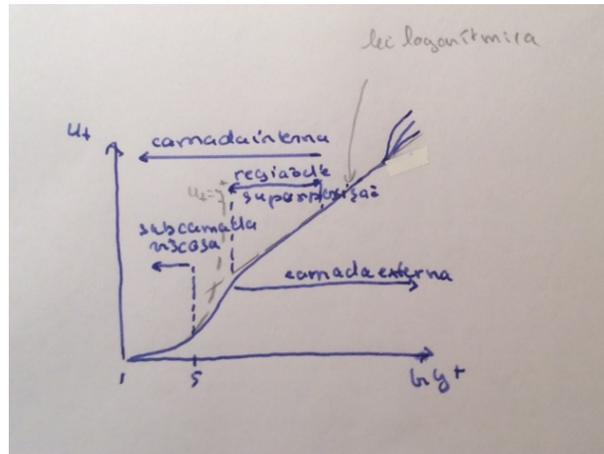
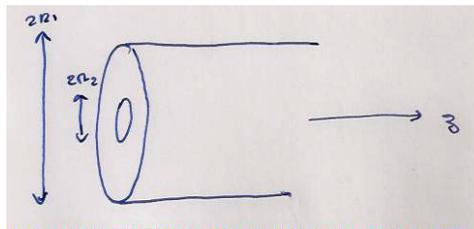


Figura 9.7: Verificação experimental das leis para as várias regiões (9.60), (9.53) e (9.63): a linha sólida indica os dados, e as linhas traçadas previsões. As deviações na camada externa é porquê ela depende diretamente de ξ e não y_+ . (Notar que a escala horizontal é logarítmica).

9.8 Exercícios

1. Instabilidade em escoamento de Poiseuille

Um fluido incompressível circula entre dois cilindros respectivamente de raio r_1 para o externo e r_2 para o interno, devido a uma diferença de pressão. O escoamento é estacionário, incompressível, viscoso. A gravidade é desprezada. A velocidade é da forma $\vec{v} = v(r)\hat{z}$.



a) Sem fazer cálculos, indique qual deve ser o comportamento qualitativo de $p(z)$ e $v(r)$? (Explicar)

b) Resolver a equação de Navier-Stokes para obter a velocidade e a pressão. [Dica: Mostre que $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = 0$.] Use as notações: L para o compri-

mento dos cilindros, p_i em $z = 0$ e p_f em $z = L$ para as pressões aplicadas, com $p_i > p_f$.

c) Verificar que a força de cisalhamento sobre as paredes equilibra a força devida à diferença de pressão.

d) Suponha que a pressão e a velocidade sejam perturbadas:

$$p(z) \longrightarrow p(z) + \delta p(\theta, z, t) \text{ e } \vec{v}(r) \longrightarrow \vec{v}(r) + \delta \vec{v}(\theta, z, t).$$

Escreva a equação que é satisfeita por estas quantidades perturbadas em ordem 1 em δp e $\delta \vec{v}$.

Shapiro, Shtilman e Tumin, estudaram este problema [9.4]. Eles suporam que as componentes da velocidade e a pressão tinham adquirido perturbações proporcionais a

$$e^{i(m\theta + n\frac{2\pi}{L}z - \omega t)}.$$

Após inserir isto na equação que voce calculou acima, eles a resolveram numericamente. Para $Re = 20000$ e $m = 1$, eles obtiveram o resultado abaixo para a quantidade complexa ω . O que você pode concluir sobre a estabilidade do escoamento?

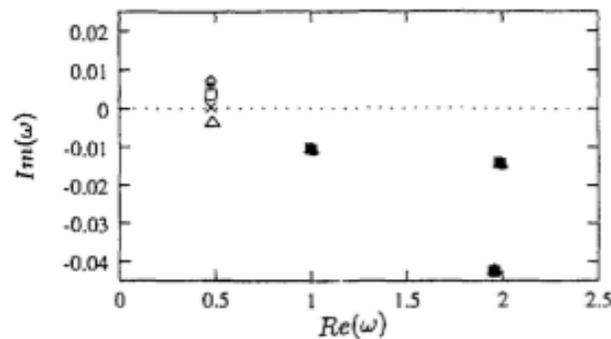
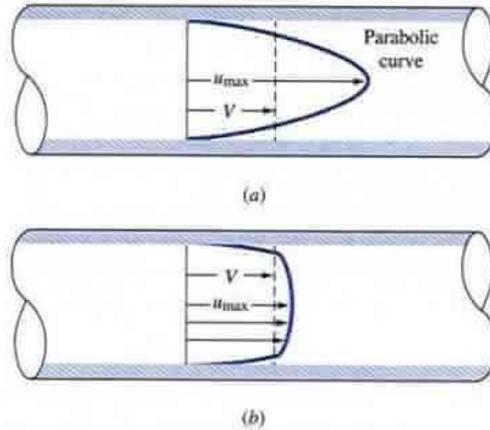


Fig. 1 Eigenvalues in the complex plane ω . \diamond $-r_2/r_1 = 0.9$, $+$ $-r_2/r_1 = 0.8$, \square $-r_2/r_1 = 0.7$, \times $-r_2/r_1 = 0.06$, \triangle $-r_2/r_1 = 0.5$.

2. Escoamentos de Poiseuille laminar e turbulento

O objetivo deste exercício é entender a diferença entre o perfil de velocidade para fluxos laminar e turbulento num tubo circular mostrado na figura abaixo.



Supor o tubo de seção circular de raio R e comprimento l , com escoamento $\vec{u} = u(r)\hat{z}$, nulo em $r = R$, devido a um gradiente de pressão $G = -(p_0 - p_1)/l$ ($p_0 > p_1$). (A gravitação é desprezada.)

a) Escrever a equação de Navier-Stokes a resolver para este caso.

b) Calcular a pressão e a velocidade do fluido (no regime laminar).

Calcular a velocidade V média sobre a área do tubo ($V = 1/(\pi R^2) \int_0^R u(r)(2\pi)rdr$) e mostrar $V/u_{max} = 0.5$ com u_{max} valor máximo de $u(r)$.

c) No caso do escoamento turbulento, a velocidade $u(r)$ obedece

$$\frac{\overline{u(r)}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{(R-r)u_*}{\eta/\rho} \right] + B$$

onde a barra horizontal indica uma média sobre o tempo adequada para regime turbulento, κ e B são constantes e u_* é uma velocidade característica. Calcular a velocidade V média sobre a área do tubo e $\overline{u_{max}}$ o valor máximo de $\overline{u(r)}$.

Numericamente pode-se mostrar $V/\overline{u_{max}} \sim 0.8 - 0.9$. Com isto podemos entender a figura inicial?

9.9 Referências

- [9.1] F.M. White “Viscous fluid mechanics” McGraw Hill 2006 (3a ed.)
- [9.2] P.K.Kundu, I.M.Cohen e D.R.Dowling “Fluid Mechanics” Academic Press 2015 (6a ed.)
- [9.3] R.Feynman “Lectures in Physics” vol.I
- [9.] I.Shapiro, L.Shtilman & A.Tumin “On linear and nonlinear stability of coaxial pipe flow” Physics of Fluids 11 (1999) 2984.