

TD

Limites et fonctions continues

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □ _____

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 + 3 & \text{si } -3 \leq x \leq 1 \\ e^{x^3-1} + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □ _____

Donner un exemple de fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(]-1, 1[) = [-1, 1]$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □ _____

Donner un exemple de fonction continue $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f([0, +\infty[) = [0, 1[$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ _____

Démontrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 , alors $|f|$ est continue en x_0 .

Démontrer que la réciproque est fausse. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □ L'indicatrice de $\mathbb{Q}$ _____

Soit $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Montrer que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □ Une amélioration du TVI _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$. Montrer que f s'annule.

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □ Deux définitions _____

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées. ► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ □ □ On apprend à utiliser le TVI _____

Soit $f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $(g(a) - f(a))(g(b) - f(b)) \leq 0$.

Montrer qu'il existe x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □ Caractérisation séquentielle de la limite _____

Démontrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limites.

① $x \mapsto \sin(1/x)$ en 0 ;

② $x \mapsto \sin(\cos(x))$ en $+\infty$.

► Indication

► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 10 ■ □ □ Quelques limites rapides

Etudier les limites snivantes:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - e^x \quad \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor \quad \textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} \quad \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \sin x). \quad \textcircled{10} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\sqrt{x}} \quad \textcircled{7} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) \quad \textcircled{11} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(\ln x)$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi \cos(e^x)}{x^2 + 1} \quad \textcircled{8} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} \quad \textcircled{12} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Soit f une fonction réelle, définie et continue sur un intervalle I . On suppose que f n'est ni minorée, ni majorée. Montrer que f est surjective. ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x)$ est croissante et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ décroissante.

Montrer que f est continue.

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■ □ □

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □ Une idée classique

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, et admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée, et que f atteint au moins l'une de ses deux bornes. ► Indication

► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Soit $a_1, \dots, a_n \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a - a_k| = \frac{1}{2}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■ □ □

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie l en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

► Indication

► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □ Petit retour sur les suites

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ vérifiant $\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|$.

On considère la suite récurrente définie par

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}.$$

Montrer que u converge vers un point fixe de f .

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 19 ■ ■ □

① Montrer qu'une application continue d'un segment sur lui-même admet au moins un point fixe.

② Trouver des contre-exemples lorsque l'intervalle n'est pas fermé ou n'est pas borné.

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Montrer que $F : x \mapsto \sup_{t \in [0, x]} f(t)$ est aussi continue sur $[0, 1]$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ □ □

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Soit f une fonction réelle définie, continue sur I et telle que $\forall x \in I, (f(x))^2 = 1$.

Montrer que $\left[\forall x \in I, f(x) = 1 \right]$ ou $\left[\forall x \in I, f(x) = -1 \right]$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

① f admet une limite en $+\infty$.

② La suite $(f(n))$ admet une limite en $+\infty$.

Que se passe-t-il si on ne suppose plus que f est croissante? ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ ■

Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ ■ L'exercice de colle ultra-classique

Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ □

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) = f(1)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_0 \in [0, 1 - 1/n]$ tel que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{1}{n})$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ ■

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a) = f(b)$, avec $a < b$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in [0, \alpha], \exists x \in [a, b - \alpha], f(x + t) = f(x)$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ □

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x + 1) - f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ ► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ ■ □ Un équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant $f(2x) = f(x)$ pour tout x réel. ► Indication ► Correction

EXERCICE 29 ■ ■ ■ Une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 et en 1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2)$. Montrer que f est constante. ► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

On étudie ce qu'il se passe entre les points critiques, puis on regarde les limites à droite et à gauche.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

Faites un dessin !

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Faites un dessin !

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

On peut passer par la définition de continuité.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **L'indicatrice de $\mathbb{Q}$** _____

On utilise la densité de $\mathbb{Q}$ et la caractérisation séquentielle de la limite pour montrer que f n'a pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Une amélioration du TVI** _____

Il faudrait pouvoir utiliser le TVI sur un intervalle fermé borné...

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Deux définitions** _____

On écrit les définitions !

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **On apprend à utiliser le TVI** _____

TVI sur $g - f$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 **Caractérisation séquentielle de la limite** _____

On utilise la caractérisation séquentielle de la limite.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 Quelques limites rapides

On tentera de justifier proprement.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

On utilise le TVI sur un intervalle bien choisi.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Il faut utiliser le théorème de la limite monotone.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On étudie la continuité aux points de jonction en regardant la limite à droite et à gauche.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 Une idée classique

On sépare $\mathbb{R}^+$ en un intervalle fermé et un intervalle où on peut majorer f , grâce à sa convergence.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Toujours la même idée. Posons $g : x \mapsto f(x) - x$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

L'existence d'un réel dans un intervalle ressemble fortement à un théorème bien connu. La seule question est "Sur quelle fonction doit on l'appliquer ?". Souvenez vous comment on résout une équation.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Par l'absurde, on suppose que f prend deux valeurs distinctes, et on prend un ε assez petit dans la définition de limite, pour arriver à une contradiction.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 Petit retour sur les suites

On se rappelle comment on étudie une suite récurrente. On a pas peur !

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

Poser $g : x \mapsto f(x) - x$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Par l'absurde, on suppose que f prend les valeurs 1 et -1. On peut alors utiliser un théorème bien connu de la continuité.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

Un sens est immédiat, l'autre nécessite la croissance.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24 L'exercice de colle ultra-classique

f est continue donc ne peut pas "sauter" d'un entier à un autre.
Absurde + TVI.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

Existence d'un réel = TVI !

Montrer le pour $n = 2$, puis 3, ... Pour comprendre ce qu'il se passe.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

Faites un dessin pour essayer de comprendre ce que l'on essaie de montrer.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27

On utilise les définitions de limites. Il faut trouver un moyen de faire apparaître la limite connue.

On pourra montrer qu'on peut se ramener au cas $l = 0$, en considérant la fonction $g : x \mapsto f(x) - lx$.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28 Un équation fonctionnelle

Construire une suite de réels qui ont la même image par f et prendre la limite.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 29 Une équation fonctionnelle

On pourra étudier la parité de f .

Construisez une suite de réels qui tendent vers 1 mais qui ont toujours la même image par f .

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

Correction de l'EXERCICE 2

La fonction $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ convient.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

Correction de l'EXERCICE 3

La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ convient.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

Correction de l'EXERCICE 4

On va vérifier par la définition que $|f|$ est continue en x_0 . Pour cela, soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0 , il existe $\eta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \eta$, alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Mais, par l'inégalité triangulaire,

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ainsi, $|f|$ est continue en x_0 . On aurait pu aussi utiliser que $|f| = |\cdot| \circ f$, et utiliser le fait que la composée de deux fonctions continues est continue. La réciproque est fausse. Considérons par exemple f définie par $f(x) = -1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$. Alors f n'est pas continue en 0. En revanche, $|f| = 1$ est une fonction constante, et donc $|f|$ est continue.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

Correction de l'EXERCICE 5 L'indicatrice de $\mathbb{Q}$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

Il existe une suite (u_n) de nombre rationnels et une suite (v_n) de nombres irrationnels telles que $u_n, v_n \rightarrow a$.

On a $f(u_n) = 1 \rightarrow 1$ et $f(v_n) = 0 \rightarrow 0$ donc f n'a pas de limite en a et est donc discontinue en a .

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6 Une amélioration du TVI

Puisque $\lim_{-\infty} f = -1$, f prend des valeurs négatives, puisque $\lim_{+\infty} f = 1$, f prend des valeurs positives. Pour montrer cela, il suffit de prendre $\varepsilon = 1/2$ dans chaque définition. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre ces valeurs, f s'annule.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7 Deux définitions

Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$. Pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(g(x))| \leq M$ donc $f \circ g$ est bornée.

Puisque la fonction g est continue sur le segment $[-M; M]$, elle y est bornée par un certain M' . Pour tout $x \in \mathbb{R}, |g(f(x))| \leq M'$ car $f(x) \in [-M; M]$ ainsi $g \circ f$ est bornée.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8 On apprend à utiliser le TVI

La fonction $g - f$ est continue sur $[a, b]$ et sa valeur en a est du signe opposé à sa valeur en b , d'après l'inégalité donnée en hypothèse.

Le théorème des valeurs intermédiaires conclut.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9 Caractérisation séquentielle de la limite

$$\sin\left(\frac{1}{1/(\pi n)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{1}{1/(2\pi n + \pi/2)}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc par caractérisation séquentielle de la limite, $\sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

$$\sin(\cos(2\pi n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(1) \quad \text{et} \quad \sin(\cos(2\pi n + \pi)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(-1),$$

donc par caractérisation séquentielle de la limite, $\sin(\cos(x))$ n'a pas de limite en $+\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 10 Quelques limites rapides

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - e^x = -\infty$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} = 1$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\sqrt{x}} = 0$

④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi \cos(e^x)}{x^2 + 1} = 0$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor = 1$

⑥ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \sin x) = +\infty$

⑦ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = +\infty$

⑧ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}} = 1$

⑨ $\lim_{x \rightarrow 0^+} |\ln x|^{\frac{1}{\ln x}} = 1$

⑩ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

⑪ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin(\ln x) = 0$

⑫ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \lfloor x \rfloor = 0$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Soit $y \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe une image de f supérieure et une inférieure à y . En utilisant le TVI sur l'intervalle trouvé, il existe $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = y$.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Par croissance de f , $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) < \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Par décroissance de $x \mapsto f(x)/x$, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(a)}{a} \leq \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{x}$.

On conclut par produit de limites.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Par opérations sur des fonctions continues, f est continue sur chaque $I_k =]k; k+1[$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à étudier la continuité en $a \in \mathbb{Z}$.

Quand $x \rightarrow a^+ : f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \rightarrow a = f(a)$ car $E(x) \rightarrow a$.

Quand $x \rightarrow a^- : f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \rightarrow a - 1 + 1 = a = f(a)$ car $\lfloor x \rfloor \rightarrow a - 1$.

Par continuité à droite et à gauche, f est continue en a . Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14 Une idée classique

Par convergence de f vers $l \in \mathbb{R}$, il existe un $x_0 \in \mathbb{R}_+$, tel que, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \in [l - 1, l + 1]$.

f étant continue sur l'intervalle $[0, x_0]$, la fonction est bornée et atteint ses bornes. Ce qui prouve tous les résultats d'un coup, après une disjonction de cas sur la comparaison de ces bornes avec $l + 1$ et $l - 1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

g est décroissante et, $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (il y a une disjonction de cas sur la limite de f à faire).

En se ramenant à un segment dont l'image des extrémités est de signe opposé, on applique le TVI qui montre que g s'annule, ce qui prouve le résultat.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

La fonction $x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x - a_k| - \frac{1}{2}$ est continue, comme somme de fonctions continues.

Elle vaut $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{2}$ en 0 et $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ en 1.

Les deux images sont opposées, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 a un antécédent par cette fonction, ce qui montre le résultat voulu.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

Notons T la période de f . Soit a et b dans $\mathbb{R}$. Supposons $f(a) > f(b)$. Comme f converge vers l , il existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \geq x_0$,

$$l \in \left] f(x) - \frac{f(a) - f(b)}{2}, f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{2} \right[.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $a + nT \geq x_0$ et $b + nT \geq x_0$. Alors on obtient

$$l \in \left] f(a) - \frac{f(a)-f(b)}{2}, f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{2} \right[\text{ et } l \in \left] f(b) - \frac{f(a)-f(b)}{2}, f(b) + \frac{f(a)-f(b)}{2} \right[,$$

ce qui, après calculs, est absurde, donc $f(a) = f(b)$ et f est constante.

↪ retour à l'EXERCICE 17

Correction de l'EXERCICE 18 Petit retour sur les suites

On montre, grâce à l'inégalité que la fonction $x \mapsto \frac{x+f(x)}{2}$ itératrice de u est croissante, donc u est monotone. La suite étant bornée, elle converge vers une point fixe de f .

↪ retour à l'EXERCICE 18

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 19

Fixons $[a, b]$ cet intervalle fermé.

- ① $g(a) \geq 0$, $g(b) \leq 0$. et g est une fonction continue comme somme de fonctions continues.
Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[a, b]$, tel que $g(c) = 0$, soit tel que $f(c) = c$.
- ② Supposons que l'intervalle soit $[a, b]$. On ne peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. La fonction constante égale à b fournit un contre-exemple.
Supposons que l'intervalle soit $[a, +\infty[$. La fonction $x \mapsto x + 1$ fournit un contre-exemple.

↪ retour à l'EXERCICE 19

Correction de l'EXERCICE 20

↪ retour à l'EXERCICE 20

Correction de l'EXERCICE 21

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \in \{-1; 1\}$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset \{-1; 1\}$. Par l'absurde, on suppose que $f(\mathbb{R}) = \{-1; 1\}$, puis on arrive à une contradiction en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle formé par un des antécédents de 1 et un des antécédents de -1 . On en déduit que $f(\mathbb{R})$ ne peut pas être égal à $\{-1; 1\}$, ce qui donne le résultat.

↪ retour à l'EXERCICE 21

Correction de l'EXERCICE 22

L'implication ① $\implies$ ② est valable sans supposer que la fonction est croissante, et utilise simplement la définition des limites. Si on note $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $x \geq A$. En particulier, posons N un nombre entier plus grand que A . Alors pour tout $n \geq N \geq A$, on a $|f(n) - \ell| < \varepsilon$, et donc la suite $(f(n))$ converge vers ℓ . Réciproquement, supposons ② et prouvons ①. Comme la suite $(f(n))$ est convergente, elle est majorée : il existe

$M \in \mathbb{R}$ tel que $f(n) \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et posons n un nombre entier plus grand que x . Alors, puisque f est croissante, on a

$$f(x) \leq f(n) \leq M$$

et donc la fonction f est majorée. Or, puisque f est croissante, alors f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si f est majorée. Donc f admet une limite en $+\infty$.

Si f n'est pas supposée croissante, comme nous l'avons remarqué, $(1) \Rightarrow (2)$ reste valable. En revanche $(2) \Rightarrow (1)$ devient faux. On peut par exemple considérer la fonction $f(x) = \sin(2\pi x)$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$, mais pour laquelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 0$.

↩ retour à l'EXERCICE 22

Correction de l'EXERCICE 23

La suite (u_n) avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$ converge vers 0 donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ existe dans $\mathbb{R}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

Pour $n \geq \lfloor x \rfloor$ on a $n+1 \geq x$ donc $u_{n+1} \leq u_n$. Pour $n < \lfloor x \rfloor$ on a $n+1 \leq x$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.

↩ retour à l'EXERCICE 23

Correction de l'EXERCICE 24 L'exercice de colle ultra-classique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continue.

Par l'absurde, si f n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Soit y un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc f n'est pas à valeurs entières. Absurde.

↩ retour à l'EXERCICE 24

Correction de l'EXERCICE 25

La fonction $\varphi : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ est continue, comme somme de composées d'applications continues. Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Alors φ ne peut ni prendre des valeurs strictement positives, ni strictement négatives. Elle doit donc prendre des valeurs positives et négatives et donc s'annule.

↩ retour à l'EXERCICE 25

Correction de l'EXERCICE 26

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc y admet un minimum et un maximum. La fonction f n'étant pas constante, on peut supposer, quitte à considérer $-f$, que le maximum est atteint en $c \in]a, b[$. Posons alors

$$\alpha = \min\{c - a, b - c\} > 0$$

de sorte que $[c - \alpha, c + \alpha] \subset [a, b]$. Soit $t \in [0, \alpha]$. La fonction $g : x \mapsto f(x + t) - f(x)$ est définie et continue sur l'intervalle $\{c - t; c\}$. On a $g(c - t) \geq 0$ et $g(c) \leq 0$ car f est maximale en c . Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que g s'annule et qu'il existe donc $x \in [a; b - \alpha]$ tel que $f(x + \ell) = f(x)$.

↩ retour à l'EXERCICE 26

Correction de l'EXERCICE 27

Quitte à considérer la fonction $x \mapsto f(x) - \ell x$, on peut supposer $\ell = 0$ ce que nous ferons pour la suite.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f(x + 1) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout réel $x \geq A$. Soit $x \geq A$ et l'entier $n = \lfloor x - A \rfloor$ tel que $x - n \in [A; A + 1]$. On peut écrire par télescopage

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x - k) - f(x - k - 1)) + 3f(x - n).$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|f(x - k) - f(x - k - 1)|}_{\leq \varepsilon} + \frac{|f(x - n)|}{x} \leq \frac{n\varepsilon}{x} + \frac{|f(x - n)|}{x}.$$

Puisque la fonction f est continue sur le segment, $[A; A + 1]$, elle y est bornée par un certain réel M . Sachant de plus $n \leq x$, on écrit

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \varepsilon + \frac{M}{x}.$$

Le terme M/x étant de limite nulle quand x tend vers $+\infty$, on peut introduire un réel A' strictement positif pour lequel $M/x \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq A'$.

On a alors, pour tout réel $x \geq \max(A, A')$,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq 2\varepsilon$$

On peut conclure que $f(x)/x$ est de limite nulle quand x croît vers $+\infty$.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28 Un équation fonctionnelle

Par récurrence immédiate, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc par continuité de f et unicité de la limite, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) = f(x)$.

Donc f est constante.

La synthèse est immédiate.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29 Une équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)$$

donc f est paire. Pour tout $x > 0$, $x^{1/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ donc $f(x^{1/2^n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(1)$ par continuité de f en 1. Or

$$f(x^{1/2^n}) = f(x^{1/2^{n-1}}) = \dots = f(x)$$

donc $f(x) = f(1)$ pour tout $x > 0$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par parité. De plus $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(1)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)