

Rappels et compléments sur les fonctions réelles

1 GÉNÉRALITÉS

Définition 1 : Fonction réelle

Une fonction réelle est la donnée d'un ensemble de départ $X \subset \mathbb{R}$, et d'une manière d'associer à chaque $x \in X$ un unique élément de $\mathbb{R}$ noté $f(x)$. On note généralement

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définie sur X .

Définition 2 : Vocabulaire sur les fonctions

Pour tout $(x, y) \in X \times \mathbb{R}$, tel que $y = f(x)$, on dit que y est l'**image** de x par f et que x est un **antécédent** de y par f .

On dit que f est **bien définie** lorsque pour tout $x \in X$, $f(x)$ a un sens et appartient bien à F .

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est le plus grand ensemble de départ possible pour f . On peut le noter D_f . Tout réel $f(x)$ avec $x \in D_f$ est appelé une valeur de f .

Exemple 1

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) := \frac{\sqrt{-x}}{x+2}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est définie que pour $x \geq 0$ et que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ n'est définie que pour $x \neq -2$ seulement $f(x)$, alors

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 0] = \mathbb{R}_- \setminus \{-2\}.$$

Exemple 2

Déterminons l'ensemble de définition de la fonction f définie par l'expression

$$f(x) := \frac{\sqrt{-\cos(x/3)}}{\ln(\sin(x + \pi/2))}.$$

- **Condition pour la racine carrée.** $\sqrt{-\cos(x/3)}$ existe $\iff -\cos(x/3) \geq 0$, donc $\cos(\frac{x}{3}) \leq 0$.
Les solutions de $\cos \theta \leq 0$ sont $\theta \in [\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{3\pi}{2} + 2m\pi]$ pour $m \in \mathbb{Z}$. En remplaçant $\theta = \frac{x}{3}$, on obtient

$$x \in [\frac{3\pi}{2} + 6m\pi, \frac{9\pi}{2} + 6m\pi] \quad , \text{ avec } m \in \mathbb{Z}.$$

- **Condition pour le logarithme.**

$\ln(\sin(x + \pi/2))$ est défini et non nul si et seulement si $\sin(x + \frac{\pi}{2}) \in]0, 1[$. Or $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$. Les intervalles où $\cos x > 0$ sont

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} ,$$

et les points à exclure, où $\cos x = 1$, sont $x = 2k\pi$.

- **Intersection des deux conditions.**

On intersecte les deux ensembles périodiques. En remarquant la périodicité commune, période 6π liée à $\cos(x/3)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ on obtient à l'intérieur du segment $\left[\frac{3\pi}{2} + 6m\pi, \frac{9\pi}{2} + 6m\pi \right]$ les deux intervalles où $\cos x > 0$, à savoir

$$\left] \frac{3\pi}{2} + 6m\pi, \frac{5\pi}{2} + 6m\pi \right[\quad \text{et} \quad \left] \frac{7\pi}{2} + 6m\pi, \frac{9\pi}{2} + 6m\pi \right[.$$

Il faut en outre exclure tous les points $2k\pi$, car alors $\ln(\cos x) = \ln 1 = 0$ et on diviserait par 0. Donc l'ensemble de définition de f est

$$D_f = \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left] \frac{3\pi}{2} + 6m\pi, \frac{5\pi}{2} + 6m\pi \right[\cup \left] \frac{7\pi}{2} + 6m\pi, \frac{9\pi}{2} + 6m\pi \right[\right) \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Définition 3 : Image d'une fonction, restriction

Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour toute partie X de D_f , on appelle **image de X par f** , notée $f(X)$, l'ensemble

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

L'image de D_f tout entier est simplement appelée l'**image de f** .

Si $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$, on dit que g est la **restriction de f à X** et on la note $f|_X$.

Soit $Y \subset \mathbb{R}$ telle que $D_f \subset Y$. Si $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, telle que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = h(x)$, on dit que h est un **prolongement de f à Y** .

Exemple 3

- L'image de $\mathbb{R}_+$ par la fonction exponentielle est l'intervalle $[1, +\infty[$. L'image de $\mathbb{R}_-$ est $]0, 1]$.
- L'image de $\pi\mathbb{Z}$ par la fonction sinus est $\{0\}$, l'image de $[0, \pi]$ est $[0, 1]$, l'image de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $[-1, 1]$ et l'image de $[0, 2\pi]$ est aussi $[-1, 1]$.

⚠ ATTENTION Quand on dit "Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.", on dit que **f est à valeurs dans $\mathbb{R}$** si toute valeur de f est élément de $\mathbb{R}$, c'est à dire, si $\forall x \in X, f(x) \in \mathbb{R}$, ou encore de manière équivalente si $f(X) \subset \mathbb{R}$.

Opérations sur les fonctions

On fixe un ensemble de départ X et deux fonctions f et g définies sur X . Soit λ un réel. On définit respectivement $f + g$, λf et fg sur X par les expressions suivantes, pour tout $x \in E$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x) .$$

On dit que l'ensemble des fonctions est une *algèbre*. Si de plus, g ne s'annule pas sur E on définit

$$\left(\frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{g(x)} .$$

Si on suppose f à valeurs dans Y , on appelle composée de g et f la fonction $g \circ f$ définie pour tout $x \in X$ par

$$g \circ f(x) = g(f(x)) .$$

⚠ ATTENTION Est-il vrai qu'un produit de deux fonctions est nul si, et seulement si, l'une des deux fonctions est nulle?

Avant de répondre, il faut savoir ce qu'est "un produit de fonctions nul". C'est quand le produit des fonctions donne la fonction nulle, c'est à dire

$$\begin{aligned} 0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 , \end{aligned}$$

la fonction constante égale à 0. La réponse est alors **non** !

Prenons les fonctions $\mathbb{1}_{R_+}$ et $\mathbb{1}_{R_-}$, qui sont deux fonctions non nulles. Pourtant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathbb{1}_{R_+} \mathbb{1}_{R_-})(x) = \mathbb{1}_{R_+}(x) \mathbb{1}_{R_-}(x) = 0 .$$

On dit que la multiplication de fonctions, contrairement à la multiplication des nombres réels, n'est pas **intègre** : un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit ! On verra d'autres exemple de multiplications non intègres cette année.

⚠ ATTENTION La composition n'est pas commutative, ne confondez pas $g \circ f$ et $f \circ g$. Il arrive d'ailleurs souvent que l'une de ces fonctions soit définie sans que l'autre le soit. Par exemple, si f est la fonction $x \mapsto x^2$ et si g la fonction $x \mapsto x + 1$, alors $g \circ f$ est la fonction

$$x \mapsto x^2 + 1$$

et $f \circ g$ la fonction

$$x \mapsto (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 .$$

Définition 4 : Monotonie

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est strictement croissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) < f(y)$.
- On dit que f est décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est strictement décroissante si $\forall x, y \in X, x < y \implies f(x) > f(y)$.
- On dit que f est (resp. strictement) monotone si f est (resp. strictement) croissante ou décroissante.

Proposition 1 : Conservation des monotonies

Soient $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que la composition est possible, dans les cas où elle est écrite.

- Si f et g sont croissantes, alors $f + g$, et λf sont croissantes, pour tout $\lambda \geq 0$. Si $\lambda \leq 0$, alors λf est décroissante.
- Si f et g sont strictement croissantes, alors $f + g$, et λf sont strictement croissantes, pour tout $\lambda > 0$. Si $\lambda < 0$, alors λf est strictement décroissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de même sens de variation, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) croissante.
- Si f et g sont (resp. strictement) monotones de sens de variation opposés, alors $g \circ f$ est (resp. strictement) décroissante.

Preuve. On montre pour la somme de deux fonctions croissantes. Les autres démonstrations sont similaires. Soient $x, y \in X$ avec : $x \leq y$. Par hypothèse $f(x) \leq f(y)$ et $g(x) \leq g(y)$, donc par somme $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$. $\square$

Exemple 4

Dérivation inutiles.

Il est inutile de dériver les fonctions suivantes pour connaître leurs sens de variation.

$x \mapsto x + e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \ln(1-x)$ est décroissante sur $] -\infty, 1[$, comme composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.

$x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme somme et composée de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

$x \mapsto \sqrt{x^2 + 5}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, comme somme et composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 5 : Fonction majorée/minorée/bornée

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \leq M$. Un tel réel M est appelé un majorant de f .
On dit aussi que f est majorée par M ou que M majore f .
- On dit que f est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in X, f(x) \geq m$. Un tel réel m est appelé un minorant de f .
On dit aussi que f est minorée par m ou que m minore f .
- On dit que f est **bornée** si f est à la fois majorée et minorée, c'est à dire, si : $\exists K \geq 0, \forall x \in X, |f(x)| \leq K$.

Définition 6 : Maximum/minimum d'une fonction

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in X$.

- On dit que f admet un **maximum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f et noté $\max_X f$ ou $\max_{x \in X} f(x)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si pour tout $x \in X$: $f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f et noté $\min_X f$ ou $\min_{x \in X} f(x)$.

⚠ ATTENTION Une fonction peut ne pas avoir de minimum et/ou de maximum. Comme par exemple le fonction

$$x \mapsto x.$$

⚠ ATTENTION Quand une fonction admet un maximum ou un minimum, il peut être atteint plusieurs fois, comme la fonction

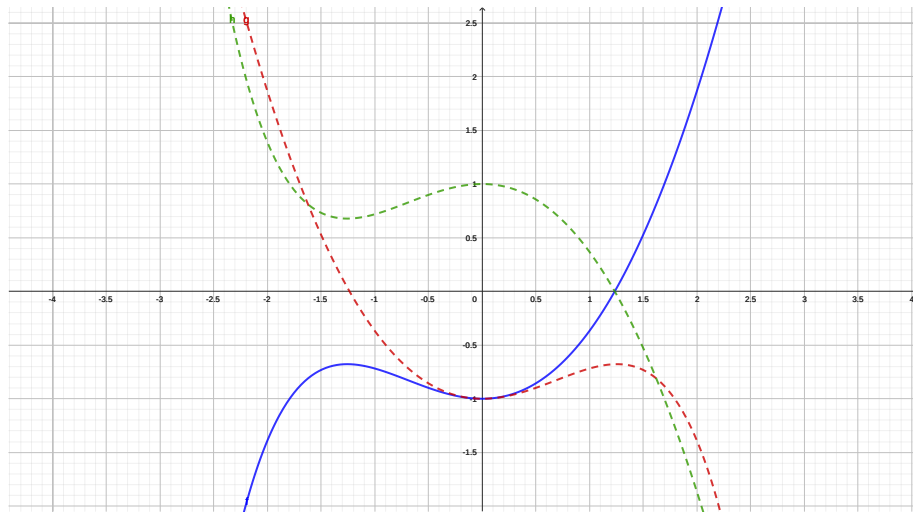
$$x \mapsto \sin x.$$

2 CAS PARTICULIERS DES TRANSFORMATIONS AFFINES DU GRAPHE

Dans cette partie, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. Les graphes ci-dessous sont représentés dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 SYMÉTRIES

Comment fait-on pour obtenir la fonction qui a un graphe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ? des abscisses ? Par exemple, quelles sont les expressions des fonctions du graphe vert et rouge ?



Proposition 2

- La fonction $x \mapsto -f(x)$ est définie sur D et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une symétrie par rapport à (Ox) .
- La fonction $x \mapsto f(-x)$ est définie sur $-D$, i.e. le symétrique de D par rapport à 0 , et son graphe s'obtient aussi à partir de celui de f par la même symétrie.

2.2 TRANSLATIONS

Définition 7 : Translation d'un ensemble

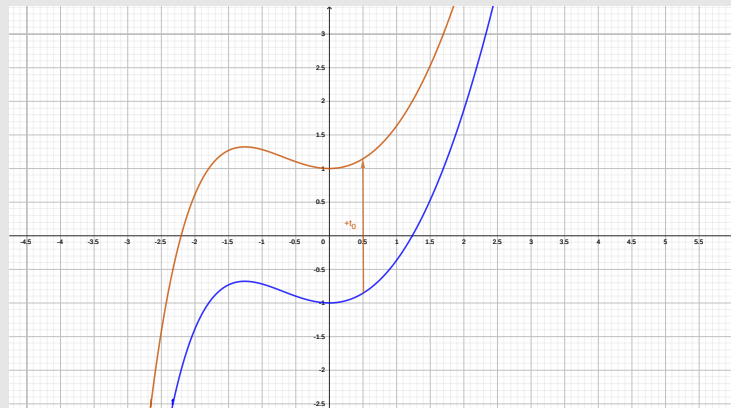
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. On appelle l'ensemble translaté de A par t et on note $A + t$ l'ensemble

$$A + t := \{a + t \mid a \in A\} .$$

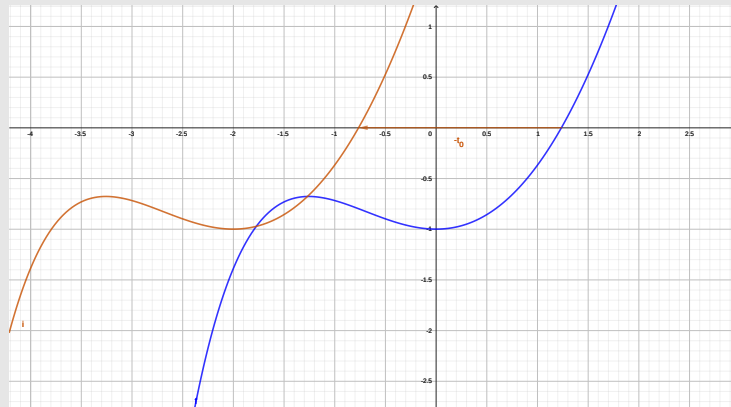
Proposition 3

Soit $f : X \rightarrow Y$, une fonction. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

- La fonction $x \mapsto f(x) + t_0$ est définie sur X et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $t_0\vec{j}$.



- La fonction $x \mapsto f(x + t_0)$ est définie sur $X - t_0$, l'ensemble X translaté du vecteur $-t_0\vec{i}$, et son graphe s'obtient à partir de celui de f par une translation de vecteur $-t_0\vec{i}$.

**2.3 CONTRACTIONS, DILATATIONS****Définition 8 : Homothétie**

On rappelle qu'une **homothétie de centre O et de rapport k** est la transformation h du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ qui laisse le point O invariant et telle que, pour tout point M distinct de O :

- Les points O, M et $f(M)$ sont alignés;
- On a l'égalité

$$\frac{Of(M)}{OM} = k$$

En fonction du rapport k , si

- $|k| > 1$, est un **agrandissement** ou une **dilatation** de rapport $|k|$;
- $|k| < 1$, est une **réduction** ou une **contraction** de rapport $|k|$.

2.4 GRAPHE INCHANGÉ PAR TRANSFORMATION DU PLAN

Définition 9 : Parité/imparité

On suppose X symétrique par rapport à 0, c'est à dire que $\forall x \in X, -x \in X$.

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- ① On dit que f est **paire** si $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- ② On dit que f est **impaire** si $\forall x \in X, f(-x) = -f(x)$, c'est à dire, si le graphe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ paire ou impaire sur X tout entier, une étude sur $X \cap \mathbb{R}_+$ suffit.

Définition 10 : Périodicité

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique, c'est à dire que

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad x - T \in D$$

Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **T -périodique** ou périodique de période T si $\forall x \in X, f(x+T) = f(x)$. Le réel T est alors appelé une période de f .

Pas besoin d'étudier une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est T -périodique sur X tout entier, une étude sur une période suffit, par exemple $X \cap [0, T[$.

⚠ ATTENTION Une fonction périodique ne possède jamais qu'une seule période. Tout multiple entier d'une période T est encore une période : $2T, 3T, 4T \dots$

Voilà pourquoi on ne parle jamais de « la » période, mais toujours d'une période. Certaines fonctions possèdent en revanche une plus petite période, mais pas toutes. On peut montrer que toute fonction continue non constante périodique possède une plus petite période. Les fonctions sinus et cosinus admettent par exemple 2π pour plus petite période. Certaines fonctions admettent au contraire tout réel strictement positif pour période et n'en ont donc pas de plus petite. C'est le cas des fonctions constantes et de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Proposition 4 : Opérations sur les fonctions périodiques

Soit $T > 0$. On suppose que X est T -périodique. Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions T -périodiques.

- ① Les fonctions $f + g$ et $f \times g$ sont aussi T -périodiques, ainsi que $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas.
- ② Pour tout $\omega > 0$, la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ est $\frac{T}{\omega}$ -périodique sur l'ensemble dilaté/contracté $\frac{1}{\omega}X$.

Exemple 5

Par exemple, si $\omega = 2$, le graphe de la fonction $x \mapsto f(2x)$ s'obtient à partir de celui de f par une contraction horizontale de facteur 2. Si f est T -périodique, rien d'étonnant du coup à ce que $x \mapsto f(2x)$ soit $\frac{T}{2}$ -périodique.

Preuve.

- ① Concernant $f + g$, pour tout $x \in X$: $(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- ② Notons g la fonction $x \mapsto f(\omega x)$ définie en tout point x pour lequel $\omega x \in X$, c'est à dire, sur $\frac{1}{\omega}X$. Pour tout $x \in \frac{1}{\omega}X$: $g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = g(x)$.

□

3 LIMITES D'UNE FONCTION

On donnera la définition de limite plus tard. Les démonstrations, ne sont pas vraiment faisables sans celle-ci.

Notations de limite : Pour $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on peut noter le fait que f a une limite l en a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_a f = l$$

$$\text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l \quad \text{ou} \quad f \xrightarrow{a} l$$

Théorème 1 : Unicité de la limite

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X .

- ① Si f possède une limite en a , cette limite est unique.
- ② Si f est définie en a et possède une limite en a , alors : $\lim_a f = f(a)$.

On écrit $\lim_{a^+}$ pour $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}}$ et $\lim_{a^-}$ pour $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}}$.

3.1 OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

On dit que a est adhérent à une partie X de $\mathbb{R}$, s'il "colle" X . Par exemple, 1, $\sqrt{2}$, 3 et $+\infty$ sont adhérents à $[1, +\infty[$. On verra la définition exacte plus tard.

On pose $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Proposition 5

Soient X, Y deux parties de $\mathbb{R}$. Soient $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : Y \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X , $b \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à Y et $c, c' \in \mathbb{R}$. Prenons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- ① Si $\lim_a f = c$ et $\lim_a g = c'$, alors $\lim_a (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda c + \mu c'$.
- ② Si $\lim_a f = c$ et $\lim_a g = c'$, alors $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = cc'$.
- ③ Si $\lim_a f = c$ et $\lim_a g = c'$ et si $c' \neq 0$, alors $\lim_a (f/g)(x) = c/c'$.
- ④ Si $\lim_a f = b$ et si $\lim_b h = c$, alors $\lim_a h \circ f = c$.

⚠ ATTENTION Dans la proposition ci-dessus les limites de type

$$\infty/\infty, 0/0, 0 \times \infty, +\infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

sont à traiter au cas par cas. Il faut comparer les vitesses avec lesquelles les limites sont atteintes.

Exemple 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^{-2x} + 1}{(e^{-x} + 1)^2} = 0$$

Par composition des trois limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 + 1}{(y + 1)^2} = 1$ et $\lim_{z \rightarrow 1} \ln z = 0$.

3.2 THÉORÈMES

Théorème 2

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $m : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : X \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à X et $\ell \in \mathbb{R}$.

① **Théorème d'encadrement**

Si $\lim_a m = \lim_a M = \ell$ et si $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = \ell.$$

② **Théorème de minoration**

Si $\lim_a m = +\infty$ et si $f(x) \geq m(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = +\infty.$$

③ **Théorème de majoration**

Si $\lim_a M = -\infty$ et si $f(x) \leq M(x)$ au voisinage de a , alors

$$\lim_a f \text{ existe et } \lim_a f = -\infty.$$

Exemple 7

① **Exemple pour le théorème d'encadrement.**

Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On sait que pour tout $x \neq 0$,

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

② **Exemple pour le théorème de minoration.**

Soit $f(x) = e^x$ et $m(x) = x^2$ sur $]0, +\infty[$. On a $e^x \geq x^2$ pour x assez grand, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Donc par le théorème de minoration :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

③ **Exemple pour le théorème de majoration.**

Soit $f(x) = -e^x$ et $M(x) = -x^2$ sur $]0, +\infty[$. On a $-e^x \leq -x^2$ pour $x > 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$. Donc par le théorème de majoration :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty.$$

Théorème 3 : Théorème de la limite monotone

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

- ① La limite $\lim_{a^+} f$ existe et est finie. Autrement dit, $f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.
- ② Pour tout $c \in]a, b[$, $\lim_{c^-} f$ et $\lim_{c^+} f$ existent et sont finies. Autrement dit

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) .$$

- ③ La limite $\lim_b f$ existe et est soit finie, soit égale à $+\infty$.

Corollaire 3.1

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction réelle. Soit $a \in \overline{R}$, adhérent à X .

- Si f est **croissante**, **non majorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty ,$$

- Si f est **croissante**, **majorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ est finie ,}$$

- Si f est **décroissante**, **non minorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty ,$$

- Si f est **décroissante**, **minorée** dans un voisinage de a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ est finie ,}$$

Exemple 8

- ① Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1]$. f est décroissante, non minorée dans un voisinage de 0^+ . Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty .$$

- ② Soit $f(x) = \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$. La fonction est croissante et non majorée. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty .$$

⚠ ATTENTION Aucun théorème ne dit que, comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante et minorée par 0, donc , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4 CONTINUITÉ

Définition 11 : Continuité en un point

Soit f une application réelle définie sur une partie non vide X de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de X . On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset X$ (On dit aussi que a est intérieur à X).

On dit que f est **continue au point a** si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

On dit que f est **continue à droite (respectivement à gauche) au point a** , s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $[a, a + \alpha[\subset X$ (resp. $]a - \alpha, a] \subset X$) et tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (\text{respectivement} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

Définition 12 : Continuité sur une partie de $\mathbb{R}$

Une application réelle f est dite continue sur

- un **intervalle ouvert** $I =]a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ si f est continue en tout point de I .
- un **intervalle** $J = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ si f est continue à droite en a et f est continue en tout point de $]a, b[$.
- un **intervalle** $K =]a, b]$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ si f est continue à gauche en b et f est continue en tout point de $]a, b[$.
- un **segment** $[a, b]$, $a < b$, si f est continue en tout point de l'intervalle $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Exemple 9

Montrer les propositions suivantes.

- ① Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- ② Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ③ La fonction $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- ④ La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6

La somme et le produit de deux applications continues, f et g , en un point a sont continues au point a . Si de plus f ne s'annule pas dans un voisinage de a , alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit f une application réelle définie sur I et telle que $f(I) \subset J$. Soit g une application réelle définie sur J . Soient a un point de I et $b = f(a)$. Si f est continue en a et g est continue en $b = f(a)$, alors l'application composée $g \circ f$ est continue au point a .

Exemple 10

La fonction $x \mapsto \exp(1 + x^2 - \ln(x))$ est continue sur $]0, +\infty[$, comme composée de sommes de fonctions continues.

Théorème 4 : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction réelle, continue sur un segment $[a, b]$, $a < b$ de $\mathbb{R}$. Soit λ un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

Exemple 11

On considère la fonction $f(x) = x^3 - x - 1$.

- La fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
- On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$.
- Par le **théorème des valeurs intermédiaires**, il existe donc un réel $c \in (1, 2)$ tel que

$$f(c) = 0.$$

Autrement dit, l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une solution unique dans $(1, 2)$.

Corollaire 6.1

L'image d'un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, par une application continue est un intervalle.

⚠ ATTENTION La réciproque est fausse !

On considère l'application f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f(x) = 2x, \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = x, \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

f est discontinue au point $\frac{1}{2}$ et $f([0, 1]) = [0, 1]$.

Théorème 5

Soient $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Alors

- ① f est bornée sur $[a, b]$.
- ② f atteint ses bornes sur $[a, b]$.

Exemple 12

Montrons que la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{x \ln x}{x^2 + e^x}$ possède un minimum sur $]0, 1]$.

On pourrait sans doute étudier les variations de f , mais on préfère éviter les calculs. Prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, f est continue donc possède un minimum sur le segment $[0, 1]$, d'après le théorème précédent. Ce minimum est en fait atteint sur $]0, 1]$ car f est strictement négative sur $]0, 1[$ et $f(0) = 0$.

5 DÉRIVABILITÉ

Définition 13 : Dérivabilité, Nombre dérivé, fonction dérivée

Soit $a \in X$. On dit que f est **dérivable en a** (respectivement à **gauche** ou à **droite**) si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{existe et est finie.}$$

$$\left(\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

Cette limite est alors appelée le **nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$ (respectivement nombre dérivé à **gauche** noté $f'_g(a)$ ou à **droite** noté $f'_d(a)$).

On dit que f est **dérivable sur X** si f est dérivable en tout point de X . La fonction $x \mapsto f'(x)$ est alors appelée la **dérivée de f** . On note $\mathcal{D}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 13

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Cherchons la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ en a .

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, \quad \frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1} \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = na^{n-1}.$$

Donc la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$.

Une fonction dérivable est continue

Si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Comme $x - a \rightarrow 0$, et $f'(a) \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0$. Donc f est continue en a .

Exemple 14

Mais il existe des fonctions continues non dérivables.

- La fonction valeur absolue $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1.$$

Comme les limites à gauche et à droite sont différentes, la limite du taux d'accroissement $\frac{|x| - |0|}{x - 0}$ en 0 n'existe pas, donc $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, car $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Fonctions usuelles C^∞

Les fonctions suivantes sont indéfiniment dérivables:

- Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$,
- Les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition,
- La fonction exp sur $\mathbb{R}$,
- La fonction ln sur $\mathbb{R}$,
- Les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$,
- La fonction $x \mapsto x^\alpha$, où $\alpha \in]0, 1[$, sur leur ensemble de définition privé de 0.

Proposition 7 : Tangente à la courbe

Si la fonction f est dérivable en a , sa courbe admet au point d'abscisse a une tangente qui a pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite infinie en a , alors la courbe admet une tangente verticale en a .

Proposition 8 : Combinaison linéaire, produit et quotient

Soient $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables en $a \in X$. Les opérations suivantes conservent la dérivabilité.

- **Combinaisons linéaires** $\forall x \in X$, et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)'(x) = \lambda f'(x) + g'(x)$,
- **Produit** $\forall x \in X$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- **Inverse** $\forall x \in X$ tel que $f(x) \neq 0$, $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$,
- **Quotient** $\forall x \in X$ tel que $g(x) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$,
- **Composition** $\forall x \in X$ tel que g soit dérivable au point $y = f(x)$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$,
- **Réciproque** Si $f : X \xrightarrow{\text{bijective}} Y$ et si $f'(x) \neq 0$ alors $\forall x \in X$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Proposition 9

Soit f une application dérivable sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$.

- ① f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I .
- ② f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I .