

Trigonométrie

Rappels et compléments

1 DÉFINITIONS DE cos, sin ET tan

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1

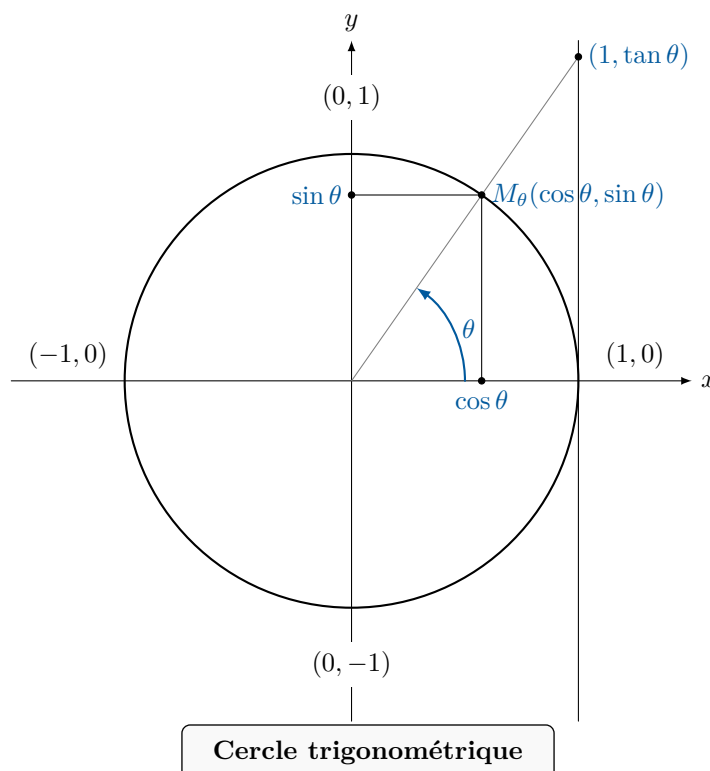
Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est le cercle centré en l'origine et de rayon 1, autrement dit a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. On a aussi

$$\mathcal{C} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi[\}$$

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, notons M_θ le point du cercle vérifiant :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$$

- Le cosinus de θ , noté $\cos(\theta)$, est l'abscisse du point M_θ ,
- Le sinus de θ , noté $\sin(\theta)$, est l'ordonnée du point M_θ ,
- Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour tout nombre $k \in \mathbb{Z}$, On définit la tangente de θ , noté $\tan(\theta)$, comme la distance algébrique du point $(1, 0)$ à l'intersection entre (OM_θ) et la perpendiculaire à l'axe des abscisse, passant par $(1, 0)$.



Vocabulaire : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x et y sont **congrus modulo 2π** et on note $x \equiv y[2\pi]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k\pi$.

2 FORMULES

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Comme un tour de cercle est de longueur 2π , $M_\theta = M_\theta + 2\pi$ et donc

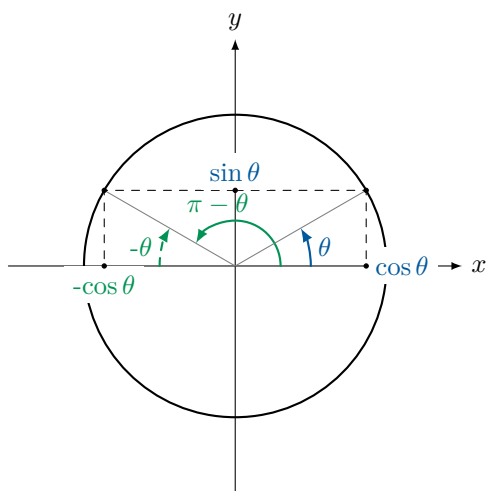
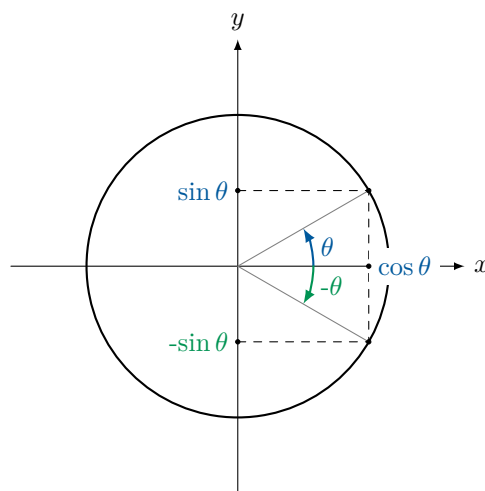
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

De plus, comme M_θ est un point du cercle, de rayon 1,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on a

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

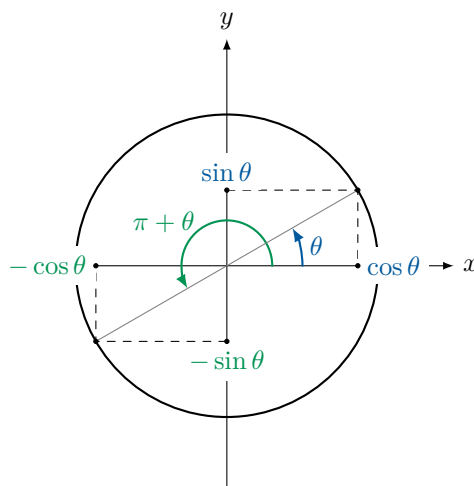


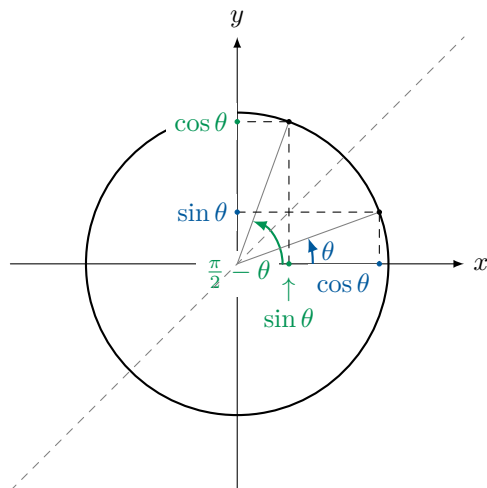
Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on a

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à l'origine, on a

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \theta) &= -\cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$





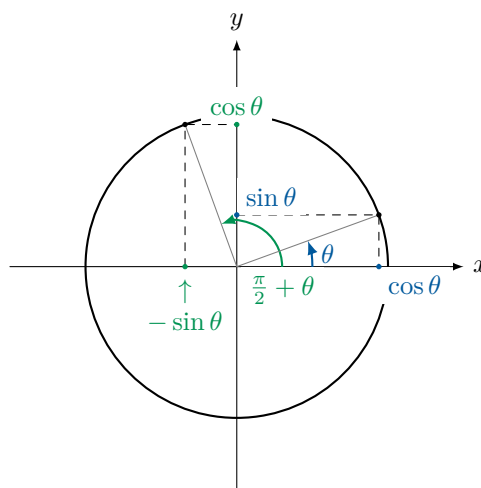
Par symétrie par rapport à la bissectrice des axes, on a

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) \\ \text{et} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\theta) \\ \text{et} \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

A vous d'expliquer pourquoi !



Vous devez aussi connaître les valeurs remarquables de sin et cos qui sont rappelées dans ce tableau et dans la figure en fin de chapitre !

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Proposition 1 : Formules d'addition

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

Preuve. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$$

et

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \\ &= -\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}. \end{aligned}$$

de telle sorte que le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est également un repère orthonormé.

Considérons alors M_{a+b} de coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{OM_{a+b}}$ et $\vec{u}$ font un angle respectifs de $a+b$ et a avec $\vec{i}$. Donc l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{a+b}}) = b$. Donc M_{a+b} a pour coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$

dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On a donc vectoriellement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_{a+b}} &= \cos(b)\vec{u} + \sin(b)\vec{v} \\ &= \cos(b)(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b)(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a))\vec{j}\end{aligned}$$

On obtient ainsi une autre expression des coordonnées du point M_{a+b} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Par unicité des coordonnées d'un point dans un repère, on déduit deux des quatre formules souhaitées :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Les deux autres s'obtiennent alors en appliquant les précédentes au couple $(a, -b)$, et en utilisant les propriétés de parité de $\sin$ et $\cos$. $\square$

Exemple 1

On peut essayer de trouver d'autres valeurs remarquables avec ces formules. Par exemple, en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, on peut obtenir les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

Proposition 2 : Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Preuve.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a),$$

et

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \cos(a)\sin(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$\square$

Formules de linéarisation

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, les formules d'addition permettent d'obtenir les formules suivantes, de transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, & \cos^2(a) &= \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, & \sin^2(a) &= \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},\end{aligned}$$

Point méthode : Dans la pratique, ces formules se retrouvent assez rapidement à partir des formules des Propositions 1 et 2. C'est toujours mieux de connaître ces formules par coeur.

On voit aussi parfois ces formules (et elle son parfois utiles) sous la forme

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right), \end{cases}$$

mais ce sont les mêmes formules !

Exemple 2

Montrons que $\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$, pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $a = \frac{x}{2^k}$ on réécrit la formule $\cos \left(\frac{x}{2^k} \right) = \frac{\sin \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2^k} \right)}$ valable tant que $\sin \left(\frac{x}{2^k} \right) \neq 0$.

Maintenant multiplions ces identités pour $k = 1, 2, \dots, n$. Cela nous donne

$$\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{x}{2^k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2^k} \right)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2^2} \right) \cdots \sin \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2^2} \right) \cdots \sin \left(\frac{x}{2^n} \right)}.$$

Tous les facteurs intermédiaires $\sin(x/2), \sin(x/2^2), \dots, \sin(x/2^{n-1})$ se simplifient, et il reste donc

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \left(\frac{x}{2^n} \right)}.$$

3 FONCTION TANGENTE

Proposition 3

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Preuve. On reprend la figure du cercle trigonométrique dans le paragraphe ???. Les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par $(\cos \theta, 0)$ et $(1, 0)$ sont parallèles. L'axe des abscisses et la droite (OM_θ) sont sécantes en O et coupent les deux droites parallèles en 2 points respectivement $(\cos \theta, 0)$ et $(1, 0)$ et M_θ et $(1, \tan \theta)$. D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{1},$$

d'où la proposition. On remarque que $\cos \theta$ est bien non nul pour tout $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. $\square$

Il suffit d'utiliser les formules de cos et sin pour obtenir les résultats suivants.

Proposition 4

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$.

On peut aussi compléter notre tableau de valeurs :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 5

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Preuve.

On reprend les notations de l'énoncé.

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}},$$

en factorisant par $\cos(a)\cos(b)$ au numérateur et au dénominateur. La deuxième formule se retrouve en remplaçant b par $-b$. $\square$

Exemple 3

Cherchons la valeur de $t := \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Grâce à la formule juste démontrée, on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{2t}{1 - t^2}$, d'où $2t = 1 - t^2 \implies t^2 + 2t - 1 = 0$.

Le calcul de discriminant nous donne alors $t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t > 0$, donc $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On peut même en déduire facilement les valeurs de $\cos$ et $\sin$. Tout d'abord, par définition de $\tan$,

$$\sin \frac{\pi}{8} = \tan \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{\pi}{8}.$$

On a bien sûr $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$, d'où, en remplaçant, $((\sqrt{2} - 1)^2 + 1) \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$, et donc

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{16 - 8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Comme $\pi/8 \in [0, \pi/2]$, $\cos > 0$, on obtient $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$, puis $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

On peut trouver des centaines de formules. On remarque que le plus important est de savoir comment retrouver les formules que l'on a besoin. L'exemple suivant, qui servira lors des changements de variables dans les intégrales, nous montre que l'on peut toujours trouver les formules. Il suffit de s'entraîner à utiliser les formules de bases.

Exemple 4

Essayons d'exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $t = \tan(x/2)$.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) &= \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

4.1 ÉQUATIONS

On cherche à savoir comment résoudre les équations (ou inéquations) de la forme, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{1}{2},$$

⚠ ATTENTION La solution à l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ n'est pas $x = \frac{\pi}{3}$. Il y a plusieurs autres solutions comme $x = -\frac{\pi}{3}$.

Exemple 5

Reprenons notre équation $\cos x = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Un réel x est solution si, et seulement si, le point M_x a pour abscisse $\frac{1}{2}$. Les points M_x associés sont donc les points d'intersection entre le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, ce qui correspond aux deux points $M_{\frac{\pi}{3}}$ et $M_{-\frac{\pi}{3}}$. On sait de plus que :

$$M_{x_1} = M_{x_2} \iff x_1 \equiv x_2[2\pi]$$

On en déduit que x est solution si, et seulement si, $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cette proposition n'est pas à apprendre par coeur. Vous pouvez raisonner comme l'exemple précédent pour chaque équation. La preuve se fait comme l'exemple.

Proposition 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos a = \cos b \iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b[2\pi])$$

$$\sin a = \sin b \iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b[2\pi])$$

Si de plus $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b[\pi].$$

Exemple 6

Essayons de résoudre l'équation $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. À l'aide du cercle trigonométrique, on voit qu'un réel θ est solution si, et seulement si :

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Or, on a :

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \iff 2\theta \equiv 0[2\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi]$$

et

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \iff 2\theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \iff \theta \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$$

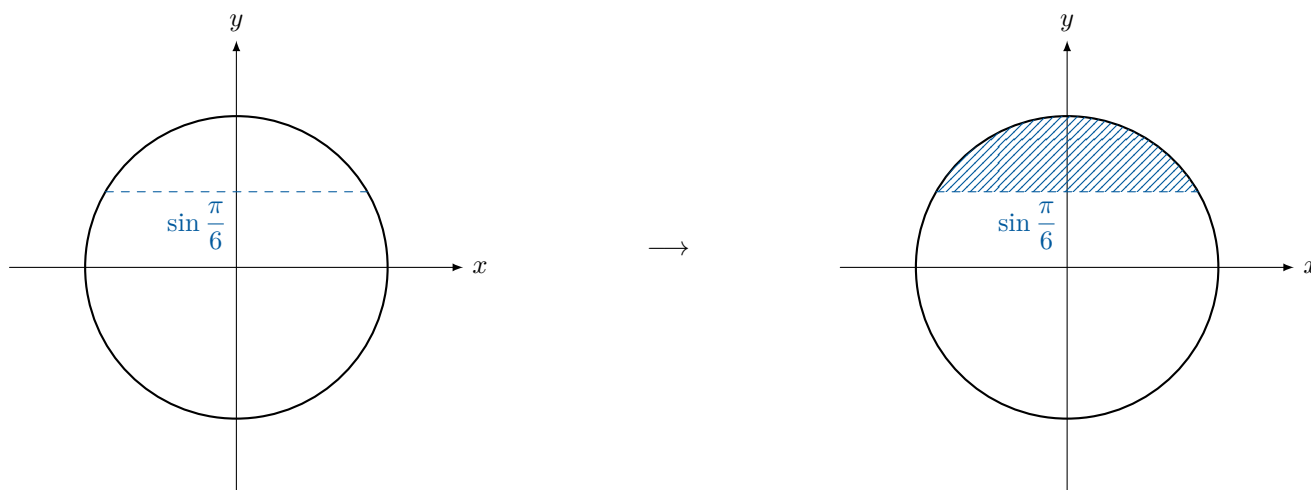
Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.2 CAS DES INÉQUATIONS

Quand on a une inéquation comme $\sin x \geq \frac{1}{2}$, on résout d'abord l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ et on cherche la solution de l'équation sur le cercle trigonométrique.

Les solutions de cette équation sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Posons les sur le cercle. Ensuite, on résout l'équation graphiquement, en regardant où sont les angles avec un sinus supérieur à $\frac{1}{2}$.



Les solutions de l'inéquation, entre 0 et 2π sont dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$. Pour les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut ajouter tous

les intervalles qui sont décalés de 2π , depuis celui ci, soit

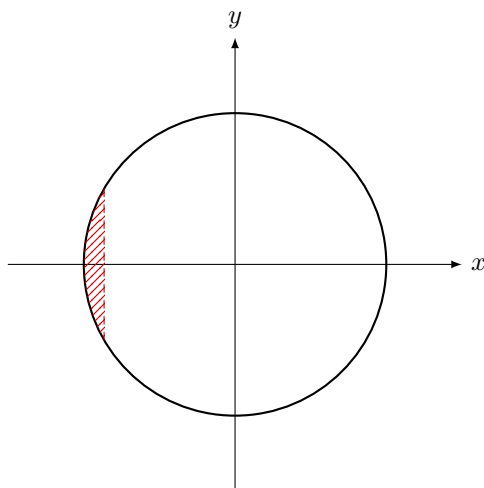
$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

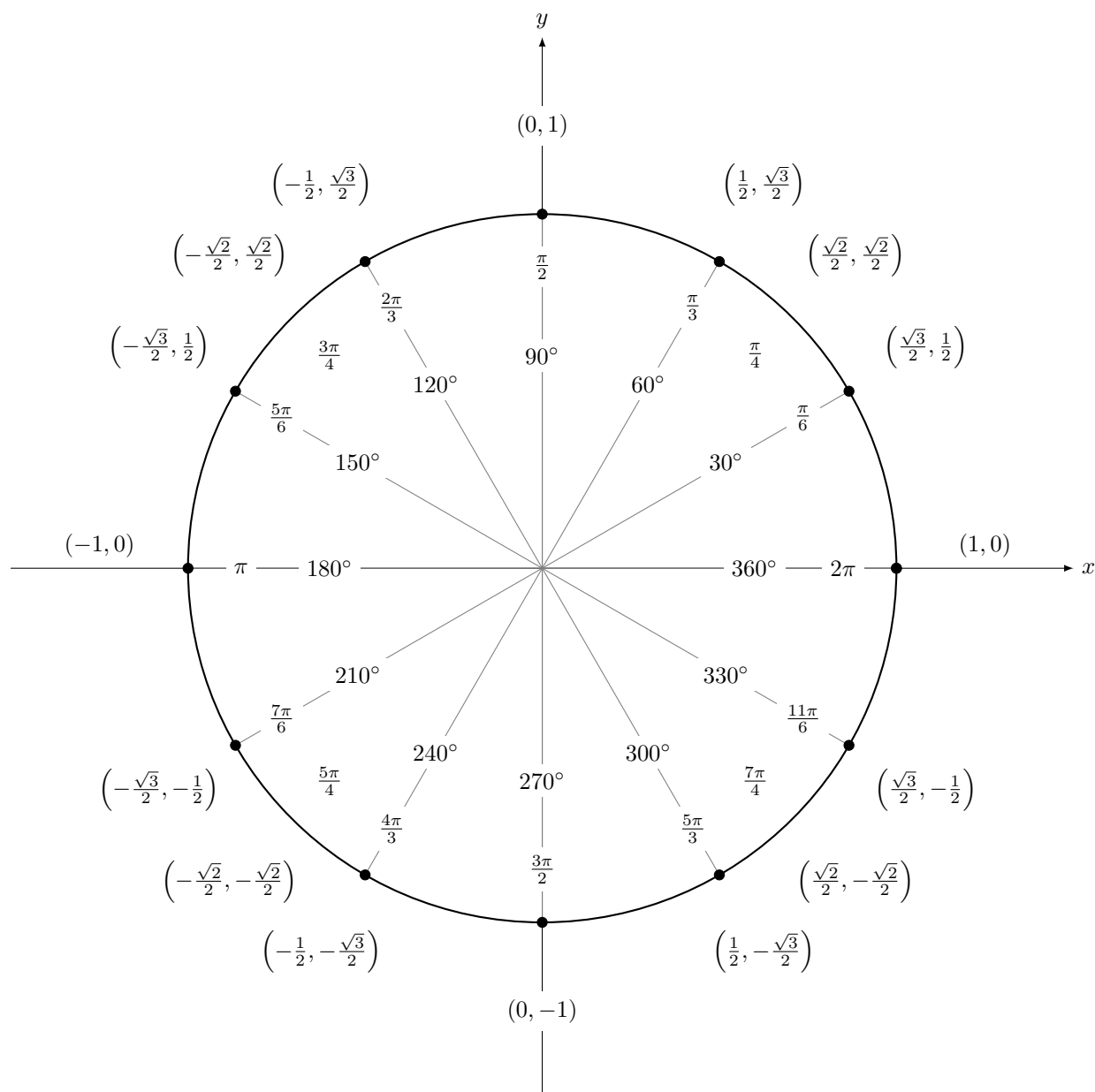
⚠ ATTENTION On fait bien attention que l'intervalle proposé a bien un sens.

Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, dans l'intervalle $] -\pi, \pi]$ ne sont pas l'intervalle

$$\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right], \text{ qui n'a}$$

aucun sens, mais plutôt $\left] -\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$.





Rappels des valeurs remarquables pour sin et cos