

TD

TD - Primitives et EDL

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 1 ■ ■ □ Primitives

Calculer les primitives des fonctions suivantes. On précisera l'intervalle de définition.

- | | | |
|--|--|--|
| ① $x \mapsto \cos(7x) + \sqrt{2} \sin(x)$ | ⑪ $x \mapsto \frac{\ln(\ln(x))}{x}$ | ⑲ $x \mapsto x^2 \ln(x)$ |
| ② $x \mapsto -\frac{1}{x \ln(x)}$ | ⑫ $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 4x + 2}$ | ⑳ $x \mapsto \cos(x)e^x$ |
| ③ $x \mapsto 2e^{-x/2}$ | ⑬ $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{sh}(x)^2}$ | ㉑ $x \mapsto x \arctan(x)$ |
| ④ $x \mapsto \cos(\pi x + 4)e^{-x+1}$ | ⑭ $x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1}$ | ㉒ $x \mapsto \ln^2(x)$ |
| ⑤ $x \mapsto 2xe^{-x^2}$ | ⑮ $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)^2}$ | ㉓ $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ |
| ⑥ $x \mapsto \frac{2e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$ | ⑯ $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ | ㉔ $x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ |
| ⑦ $x \mapsto \frac{x^2}{1 + x^3}$ | ⑰ $x \mapsto \tan(x)$ | ㉕ $x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ |
| ⑧ $x \mapsto \sin(x)^2 \cos(x)^3$ | ⑱ $x \mapsto \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ | ㉖ $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x + x(\ln(x))^2}$ |
| ⑨ $\tan^2$ | | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ■ ■ □ Fonctions définies à partir d'une intégrale

Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées. On précisera les ensembles de définition.

- | | | |
|---|--|---|
| ① $x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ | ② $x \mapsto \int_0^x \sqrt{x-t} \sin(t) dt$ | ④ $x \mapsto \int_0^x f(t+x^2) dt,$
où $f: \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \mathbb{R}.$ |
| ③ $x \mapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt$ | | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ■ ■ □ Ordre 1

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes. On donnera l'ensemble de définition de la fonction solution.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ① $y' + 2y = -4$ | ⑪ $y' + y = e^{-x}$ |
| ② $2y' - 3y = 9$ | ⑫ $y' + 4y = 2 + e^{-4x} + \sin(x)$ |
| ③ $y' - y = x$ | ⑬ $y' + y = \sin(x)$ |
| ④ $y' + 2y = \cos(x)$ | ⑭ $y' - 3y = e^{3x} + e^x \sin(x)$ |
| ⑤ $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ | ⑮ $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$ |
| ⑥ $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$ | ⑯ $(x^2 + 1)y' + 2xy + 1 = 0$ |
| ⑦ $y' + y = xe^{-x}$ | ⑰ $(1 + e^x)y' + e^xy = 1 + e^x$ |
| ⑧ $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$ | ⑱ $\sqrt{1 - x^2}y' + y = 1$ |
| ⑨ $y' + y = e^x$ | ⑲ $y' - 2xy = -(2x - 1)e^x$ |
| ⑩ $y' - y = \sin^2(x)$ | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ■ ■ □ **Ordre 2** _____

Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que

① $y'' + y' - 2y = 10 \sin(x)$

④ $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \sin(x)$

② $y'' + y = \operatorname{sh}(x)$

⑤ $y'' - y = e^x \cos(2x)$

③ $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4$

⑥ $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos(2x)$

⑦ $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$

⑩ $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos x$

⑧ $y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$

⑪ $y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos(x) + 7e^{-x} \sin x - 4e^x \sin(2x)$

⑨ $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"EXERCICE 5 ■ □ □ _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\cos^n(t) + \sin^n(t)} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(t)}{\cos^n(t) + \sin^n(t)} dt$$

① Calculer $I_n + J_n$.

② En utilisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - t$ dans I_n , montrer que $I_n = J_n$.

③ En déduire la valeur de I_n et J_n .

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □ **Raccordements** _____

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes. On donnera l'ensemble de définition de la fonction solution.

① $y' - \frac{2}{t}y = t^2$

⑥ $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$

② $ty' - 2y = t^3$

⑦ $y' \cos^2 x - y = e^{\tan x}$

③ $t^2 y' - y = 0$

⑧ $xy' \ln(x) - y = 2x^2 \ln^2(x)$, sur $]0, 1[$

④ $(1-t)y' - y = t$

⑨ $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$

⑤ $(x \ln x)y' - y = -\frac{1 + \ln x}{x}$

sur $]1, +\infty[$, puis sur $]0, +\infty[$

⑩ $y' - \frac{y}{x} = x^2$

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □ **Oral INP** _____

On considère les deux équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} 2xy' - 3y = 0 & (H) \\ 2xy' - 3y = \sqrt{x} & (E) \end{cases}$$

- ① Résoudre l'équation (H) sur $]0, +\infty[$.
- ② Résoudre l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
- ③ L'équation (E) admet-elle des solutions sur $[0, +\infty[$?

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □ Changement de variables

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- ① $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en posant $t = e^x$.
- ② $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0$ en posant $t = \sin x$.
- ③ $x^2 y'' + y = 0$ en posant $t = \ln x$.
- ④ $(1 - x^2) y'' - xy' + y = 0$ sur $] -1, 1[$.
- ⑤ $(1 + e^x) y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$ en posant $z(x) = (1 + e^x)y(x)$.
- ⑥ $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$, en posant $z = xy$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ (A) ■

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(-x).$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé selon l'axe Oz est régi par le système différentiel, en la variable t , suivant

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ ■ Oral Centrale

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation différentielle (non linéaire) (E) suivante :

$$xf' - |1 - f| = 1$$

- ① Résoudre l'équation différentielle $xy' - y = 0$.
- ② Soit f une solution de (E) . Démontrer que f est strictement croissante.
- ③ On suppose que f est minorée par 1. Déterminer la forme de f , puis obtenir une contradiction.
- ④ On suppose que f est majorée par 1. Déterminer la forme de f , puis obtenir une contradiction.
- ⑤ En déduire qu'il existe un unique $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = 1$.
- ⑥ Déterminer toutes les solutions de (E) .

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ ■

Trouver les fonctions f continues vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x f(x-t) \cos t \, dt = 1$.

► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Primitives** _____

- | | |
|--|--|
| <p>① Primitive directe</p> <p>② Primitive directe</p> <p>③ Primitive directe</p> <p>④ Double IPP</p> <p>⑤ Primitive directe</p> <p>⑥ Primitive directe</p> <p>⑦ Primitive directe</p> <p>⑧ Linéarisation</p> <p>⑨ Primitive directe avec force</p> <p>⑩ Double IPP</p> <p>⑪ Changement de variable $t = \ln x$, ou IPP</p> <p>⑫ Décomposition en éléments simples</p> <p>⑬ Changement de variable $t = \text{th}x$</p> <p>⑭ Primitive directe avec force</p> | <p>⑮ Changement de variable $t = \cos x$</p> <p>⑯ Décomposition en éléments simples</p> <p>⑰ Primitive directe</p> <p>⑱ Décomposition en éléments simples, puis arctan</p> <p>⑲ IPP</p> <p>⑳ Double IPP</p> <p>㉑ IPP</p> <p>㉒ IPP</p> <p>㉓ IPP ou Changement de variable $x = \cos \theta$</p> <p>㉔ IPP</p> <p>㉕ Primitive directe ou Changement de variable $t = \exp x$</p> <p>㉖ Primitive directe ou Changement de variable $t = \ln x$</p> |
|--|--|

↩ retour à l'EXERCICE 1

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 **Fonctions définies à partir d'une intégrale** _____

On utilise le théorème fondamental de l'analyse.

On fait les changement de variable pour ne plus avoir la variable x dans l'intégrande !

↩ retour à l'EXERCICE 2

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 **Ordre 1** _____

Méthode de variation de la constante, si nécessaire.

↩ retour à l'EXERCICE 3

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **Ordre 2** _____

Méthode de variation de la constante.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Raccordements** _____

On étudie l'équation différentielle sur chaque intervalle où l'équation est définie, puis on teste le raccordement.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Oral INP** _____

On étudie l'équation différentielle sur chaque intervalle où l'équation est définie, puis on teste le raccordement.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Changement de variables** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

Il faudrait faire vérifier à f une équation différentielle que l'on sait résoudre. Peut-on dériver ?

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

Quelle équation différentielle vérifie u ?

On la résout, puis on en déduit les valeurs de x' et y' .

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

Il faudrait faire vérifier à f une équation différentielle que l'on sait résoudre. Peut on dériver ?

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 **Oral Centrale** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

On doit d'abord montrer que f est dérivable, pour pouvoir dériver l'expression. Pour cela, posez $u = x - t$, pour ne plus avoir de x dans l'intégrande. Trouvez ensuite une équation différentielle vérifiée par f .

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Corrections

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 1 Primitives

Soit $C \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{1} \int \cos(7x) + \sqrt{2} \sin(x) dx = \frac{1}{7} \sin(7x) - \sqrt{2} \cos(x) + C$$

$$\textcircled{2} \int -\frac{dx}{x \ln(x)} = \int -\frac{1/x}{\ln(x)} dx = \ln |\ln(x)| + C$$

$$\textcircled{3} \int 2e^{-x/2} dx = -4e^{-x/2} + C$$

$$\textcircled{4} \int \cos(\pi x + 4)e^{-x+1} dx = \frac{-\cos(\pi x + 4)e^{-x+1} + \pi \sin(\pi x + 4)e^{-x+1}}{\pi^2 + 1} + C, \text{ par double IPP}$$

$$\textcircled{5} \int 2xe^{-x^2} dx = -e^{-x^2} + C$$

$$\textcircled{6} \int \frac{2e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = 2 \int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}} dx = 2 \arcsin(e^x) + C$$

$$\textcircled{7} \int \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \ln(1+x^3) + C$$

$$\textcircled{8} \int \sin(x)^2 \cos(x)^3 dx = \frac{1}{16} \int -\cos(5x) - \cos(3x) + 2\cos(x) dx = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} - \sin(5x) - \frac{1}{3} \sin(3x) + 2\sin(x) \right) + C$$

$$\textcircled{9} \int \tan^2(x) dx = \int \tan^2(x) + 1 dx - \int dx = \tan(x) - x + C$$

$$\textcircled{10} \int \cos(x) \operatorname{ch}(x) dx = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(x) \sin(x) + \cos(x) \operatorname{sh}(x)) + C, \text{ par double IPP}$$

$$\textcircled{11} \int \frac{\ln(\ln(x))}{x} = \ln(x) \ln |\ln(x)| - \ln(x) + C$$

$$\textcircled{12} \int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx = \int \frac{1}{(x - \sqrt{2} + 2)(x + \sqrt{2} + 2)} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{1}{(x - \sqrt{2} + 2)} - \frac{1}{(x + \sqrt{2} + 2)} dx = \frac{\ln |-x + \sqrt{2} - 2| - \ln |x + \sqrt{2} + 2|}{2\sqrt{2}} + C$$

$$\textcircled{13} \int \frac{1}{\operatorname{sh}(x)^2} dx = - \int \frac{1/\operatorname{ch}^2(x)}{\operatorname{th}^2(x)} dx = -\frac{1}{\operatorname{th}(x)} + C$$

$$\textcircled{14} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{4}{3} \int \frac{1}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1} dx = \frac{2 \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C$$

$$\textcircled{15} \int^x \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(x)^2} dx = - \int^x \frac{2 \cos(x)(-\sin(x) dx)}{1 + \cos(x)^2} = - \int^{\cos(x)} \frac{t dt}{1 + t^2} = -\ln(1 + \cos^2(x)) + C$$

$$\textcircled{16} \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} dx = \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C$$

$$\textcircled{17} \int \tan(x) dx = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln |\cos(x)| + C$$

$$\textcircled{18} \int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2 + 4}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx + \int \frac{2}{x^2 - 2x + 5} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$$

$$\textcircled{19} \int x^2 \ln(x) dx = \frac{1}{9} x^3 (3 \ln(x) - 1) + C, \text{ par IPP}$$

$$\textcircled{20} \int \cos(x) e^x dx = \frac{1}{2} (\sin(x) + \cos(x)) + C, \text{ par double IPP}$$

$$\textcircled{21} \int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2} ((x^2 + 1) \arctan(x) - x) + C, \text{ par IPP}$$

$$\textcircled{22} \int \ln^2(x) dx = \int 1 \times \ln^2(x) dx = x (\ln^2(x) - 2 \ln(x) + 2), \text{ par IPP}$$

$$\textcircled{23} \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)), \text{ par IPP}$$

$$\textcircled{24} \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} - 2 \log(\sqrt{x} + 1) + C, \text{ par IPP}$$

$$\textcircled{25} \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x(e^x + 1 - 1)}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= e^x - \ln(e^x + 1) + C$$

$$\textcircled{26} \int \frac{\ln(x)}{x + x(\ln(x))^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \ln(x)/x}{1 + (\ln(x))^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 + (\ln(x))^2) + C$$

↪ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 Fonctions définies à partir d'une intégrale —

- ① La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive F , donc l'intégrale est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = F(2x) - F(-x)$, est donc l'expression d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

- ② Même méthode, mais il faut sortir le x de cette intégrande ! On remarque d'abord que pour tout $x < 0$ et pour tout $t \in [x, 0]$, $\sqrt{x-t}$ n'est pas définie, et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \sqrt{x-t} \sin(t) dt$ n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$. Par changement de

variable, $\begin{cases} y = x - t \\ dy = -dt \end{cases}$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{x-t} \sin(t) dt &= \int_0^x \sqrt{y} \sin(x-y) dy \\ &= \int_0^x \sqrt{y} \sin(x) \cos(y) dy - \int_0^x \sqrt{y} \sin(y) \cos(x) dy \\ &= \sin(x) \int_0^x \sqrt{y} \cos(y) dy - \cos(x) \int_0^x \sqrt{y} \sin(y) dy. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser la même méthode que ① pour trouver la dérivée de cette expression, qui dépendra de la primitive par dérivée d'un produit.

- ③ Aucun problème de définition, car t ne peut pas prendre la valeur 0.

Pour $x = 0$, on a $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt = \ln(2)$ et on pose, pour $x \neq 0$, $\begin{cases} y = xt \\ dy = x dt \end{cases}$,

et on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt = \int_{x\pi}^{2x\pi} \frac{\cos(y)}{y} dy = F(2x\pi) - F(x\pi),$$

où F est une primitive de la fonction continue $y \mapsto \frac{\cos(y)}{y}$.

En dérivant l'expression, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\cos(2\pi x) - \cos(\pi x)}{x}.$$

On peut vérifier que cette fonction est bien prolongeable par continuité en 0.

- ④ Les mêmes méthodes donnent que

- La fonction est définie sur $\mathbb{R}$.
- Changement de variable $\begin{cases} y = t + x^2 \\ dt = dy \end{cases}$
- La dérivée est $x \mapsto (2x + 1)f(x + x^2) - 2xf(x^2)$.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3 Ordre 1

Pour la rédaction, voir le cours.

- ① $y(x) = C e^{-2x} - 2, \quad D = \mathbb{R}.$
- ② $y(x) = C e^{\frac{3}{2}x} - 3, \quad D = \mathbb{R}.$
- ③ $y(x) = C e^x - x - 1, \quad D = \mathbb{R}.$
- ④ $y(x) = \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + C e^{-2x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑤ $y(x) = \frac{2}{7}x^3 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{16}{7}x - \frac{23}{7} + C e^{-\frac{2}{7}x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑥ $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{2} + C e^{-2x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑦ $y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x} + C e^{-x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑧ $y(x) = -\frac{1}{5} \cos x - \frac{4}{5} \sin x + C e^{2x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑨ $y(x) = \frac{1}{2}e^x + C e^{-x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑩ $y(x) = C e^x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑪ $y(x) = x e^{-x} + C e^{-x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑫ $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x e^{-4x} + \frac{4 \sin x - \cos x}{17} + C e^{-4x}, \quad D = \mathbb{R}.$
- ⑬ $y(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C e^{-x}, \quad D = \mathbb{R}.$

$$\textcircled{14} \quad y(x) = x e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C e^{3x}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{15} \quad y(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) + C e^{-x}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{16} \quad y(x) = \frac{C - x}{x^2 + 1}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{17} \quad y(x) = 1 + \frac{C}{1 + e^x}, \quad D = \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{18} \quad y(x) = 1 + \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad D =]-1, 1[.$$

$$\textcircled{19} \quad y(x) = e^{x^2} (x e^{-x} + C), \quad D = \mathbb{R}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 Ordre 2

On rédige les réponses comme suit :

(E_H) : Équation homogène

Pol. Car. : Polynôme caractéristique

Racines : (r_1, r_2)

y_h = Solutions de l'équation homogène (on notera λ et μ deux réels)

Forme de la solution particulière :

y_p = Solution particulière

① **(E_H)** : $y'' + y' - 2y = 0$

Pol. Car. : $r^2 + r - 2 = 0$

Racines : $(-2, 1)$

y_h = $\lambda e^{-2x} + \mu e^x$

Forme de la solution particulière : $y_p = a \sin x + b \cos x$

y_p = $-2 \sin x - 4 \cos x$

② **(E_H)** : $y'' + y = 0$

Pol. Car. : $r^2 + 1 = 0$

Racines : $\pm i$

y_h = $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$

Forme de la solution particulière : $\alpha e^{-x} + \mu e^x$

y_p = $\frac{1}{2} \operatorname{sh}(x)$

Rédaction. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ de racines $\pm i$. La solution générale homogène est donc $y_H(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Pour $y_p(x) := \frac{1}{2} \operatorname{sh}(x)$, on a $y_p'' + y_p = \operatorname{sh}(x)$, donc y_p est solution particulière de l'équation complète.

La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(x) + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

③ **(E_H)** : $y'' - 4y' + 4y = 0$

Pol. Car. : $(r - 2)^2 = 0$

Racines : 2 (double)

y_h = $(\lambda + \mu x)e^{2x}$

Forme de la solution particulière : $y_p = ax^2 e^{2x} + b$

y_p = $\frac{1}{2}x^2 e^{2x} + 1$

④ **(E_H)** : $y'' + 3y' + 2y = 0$

Pol. Car. : $(r + 1)(r + 2) = 0$

Racines : $(-1, -2)$

y_h = $\lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$

Forme de la solution particulière : $y_p = e^{-x}(a \cos x + b \sin x)$ ou

$y_p = \operatorname{Im}(\alpha e^{-x+ix})$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$

y_p = $-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

⑤ **(E_H)** : $y'' - y = 0$

Pol. Car. : $r^2 - 1 = 0$

Racines : $(-1, 1)$

y_h = $\lambda e^{-x} + \mu e^x$

Forme de la solution particulière : $y_p = e^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$

y_p = $\frac{1}{8}e^x(-\cos 2x + \sin 2x)$

⑥ **(E_H)** : $y'' - 2y' + 5y = 0$

Pol. Car. : $r^2 - 2r + 5 = 0$

Racines : $1 \pm 2i$

y_h = $e^x(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$

Forme de la solution particulière : $y_p = xe^x(a \cos 2x + b \sin 2x)$

y_p = $\frac{1}{4}xe^x \sin 2x$

⑦ **(E_H)** : $y'' - 4y' + 3y = 0$

Pol. Car. : $(r - 1)(r - 3) = 0$

Racines : $(1, 3)$

y_h = $\lambda e^x + \mu e^{3x}$

Forme de la solution particulière : $y_p = (ax + b)e^{-x}$

y_p = $-\frac{1}{16}(4x + 5)e^{-x}$

Rédaction. On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$, dont les racines sont 1 et 3. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{3x}$.

Brouillon. Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$. En dérivant, on trouve

$$y'(x) = (-ax + (-b + a))e^{-x}, y''(x) = (ax + (b - 2a))e^{-x}$$

et donc a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b - 6a = 1 \end{cases}$$

On résout ce système, et on trouve qu'une solution particulière est donnée par $y_p(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$.

En posant $y_p(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x}$, on remarque que

$$y_p'' - 4y_p' + 3y_p = (2x + 1)e^{-x},$$

donc les solutions de l'équation avec second membre sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{16}\right)e^{-x} + \lambda e^x + \mu e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

⑧ **(E_H)** : $y'' - 4y' + 3y = 0$

Pol. Car. : $(r - 1)(r - 3) = 0$

Racines : $(1, 3)$

y_h = $\lambda e^x + \mu e^{3x}$

Forme de la solution particulière : $y_p = x(ax + b)e^x$

y_p = $-\frac{1}{2}x(x + 2)e^x$

⑨ **(E_H)** : $y'' - 2y' + y = 0$

Pol. Car. : $(r - 1)^2 = 0$

Racines : 1 (double)

y_h = $(\lambda + \mu x)e^x$

Forme de la solution particulière : $y_p = x^2(ax^2 + bx + c)e^x + de^{3x}$

y_p = $\frac{1}{12}x^2(x^2 + 6)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$

⑩ **(E_H)** : $y'' - 4y' + 3y = 0$

Pol. Car. : $(r - 1)(r - 3) = 0$

Racines : $(1, 3)$

y_h = $\lambda e^x + \mu e^{3x}$

Forme de la solution particulière : $y_p = x^2(ax + b)e^x + e^{2x}(c \cos x + d \sin x)$

y_p = $-\left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\right)e^x + \left(-\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)e^{2x}$

⑪ **(E_H)** : $y'' - 2y' + 5y = 0$

Pol. Car. : $r^2 - 2r + 5 = 0$

Racines : $1 \pm 2i$

y_h = $e^x(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x)$

Forme de la solution particulière : $y_p = e^{-x}(a \cos x + b \sin x) + xe^x(c \cos 2x + d \sin 2x)$

y_p = $e^{-x} \sin(x) + xe^x \cos(2x)$

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 5[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)Correction de l'EXERCICE 6 Raccordements

①

②

③

④

⑤

- ⑥ On commence par résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_H = C \exp(-2 \ln(x)) = \frac{C}{x^2}$, avec $C \in \mathbb{R}$.
 Une solution particulière de (E) (par exemple en utilisant la méthode de variation de la constante) est $y_p = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}$ et donc les solutions de l'équation sont les fonctions $y = \frac{C + x - \arctan(x)}{x^2}$. On vérifie que cette fonction est aussi solution sur $] -\infty, 0[$. Posons alors, pour $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$,

$$y = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{C_2 + x - \arctan(x)}{x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Le raccordement en 0 de la solution est impossible, car la limite est $+\infty$.
 Il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

⑦

⑧

⑨

⑩

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)Correction de l'EXERCICE 7 Oral INP[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)Correction de l'EXERCICE 8 Changement de variables[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)Correction de l'EXERCICE 9

Analyse. Prenons f solution. Alors comme composition d'une fonction dérivable et d'une fonction linéaire $x \mapsto -x$, f' est dérivable. On peut alors dériver dans l'équation pour obtenir

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

donc $f'' + f = 0$ et on résout l'équation différentielle qui donne,

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, f = a \sin + b \cos.$$

Synthèse. En remplaçant dans l'équation on obtient $a = b$ et donc $f = a(\cos + \sin)$.
 Les solutions sont les

$$a(\cos + \sin), \quad a \in \mathbb{R}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)Correction de l'EXERCICE 10

On a

$$u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u.$$

Par conséquent, u est de la forme $t \mapsto C e^{-i\omega t}$ avec $C \in \mathbb{C}$. En notant $C = A e^{i\varphi}$, sous forme trigonométrique, avec $A \geq 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{cases} x' = A \cos(-\omega t + \varphi) \\ y' = A \sin(-\omega t + \varphi) \\ z'' = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x = -\frac{A}{\omega} \sin(-\omega t + \varphi) + \alpha \\ y = \frac{A}{\omega} \cos(-\omega t + \varphi) + \beta \\ z = \gamma t + \delta \end{cases}$$

avec $A, \varphi, \alpha, \beta, \gamma$ et $\delta \in \mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Analyse. Prenons f solution du problème. On remarque que si f s'annule en un point, alors $f = 0$, qui est bien solution. On suppose donc que f ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

Maintenant en prenant $x = y = 0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 1$.

De plus en dérivant par rapport à y dans l'équation on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) = f(x)f'(y)$$

Posons $a := f'(0)$. En particulier en prenant $y = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a \cdot f(x)$. Donc

$$\exists C \in \mathbb{R}, \quad f : x \mapsto Ce^{ax},$$

mais comme $f(0) = 1$ on obtient $C = 1$ et $f : x \mapsto e^{ax}$

Synthèse. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax}$ vérifie bien l'équation étudiée puisqu'elle est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad e^{a(x+y)} = e^{ax}e^{ay}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions est $\{x \mapsto e^{ax} \mid a \in \mathbb{R}\}$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12 Oral Centrale

- ① Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'on peut écrire, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $y' - \frac{1}{x}y = 0$. Ces solutions sont les fonctions

$$x \mapsto C \exp\left(\int_0^x \frac{1}{t} dt\right) = Cx$$

ce qu'on aurait pu observer directement bien sûr.

- ② L'équation (E) entraîne que $f' \geq 1$ et donc que f est strictement croissante.

- ③ Si $f \geq 1$ sur $]0, +\infty[$, alors f vérifie

$$xf' - (f - 1) = 1 \iff xf' - f = 0.$$

Autrement dit, f est solution de l'équation $xy' - y = 0$ dont on a vu que les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Cx$. En particulier, on obtiendrait qu'au voisinage de 0, f est inférieure stricte à 1, une contradiction.

- ④ Cette fois, si $f \leq 1$ sur $]0, +\infty[$, alors f vérifie

$$xf' - (1 - f) = 1 \iff xf' + f = 2.$$

Il est facile de voir que les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto 2 + \frac{C}{x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. Cette fois, la limite en $+\infty$ contredit $f \leq 1$.

- ⑤ C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes et du théorème des valeurs intermédiaires.

- ⑥ Soit f une solution de (E). Alors il existe $x_0 > 0$ tel que $f(x_0) = 1$. Par croissance de f , on sait que $f \geq 1$ sur $[x_0, +\infty[$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Cx$ pour $x \geq x_0$. De $f(x_0) = 1$, on trouve $C = 1/x_0$. De même, on sait que $f \leq 1$ sur $]0, x_0[$ et donc qu'il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2 + \frac{D}{x}$ si $x \in]0, x_0[$. De $f(x_0) = 1$, on trouve $D = -x_0$. Ainsi, si f est solution de l'équation, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{x_0}{x} & \text{si } x < x_0 \\ \frac{x}{x_0} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ (le recollement est bien de classe $\mathcal{C}^1$ en x_0) et sont solution de (E).

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Grâce au changement de variables $u = x - t$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \cos x \int_0^x f(u) \cos u \, du + \sin x \int_0^x f(u) \sin u \, du.$$

On voit alors que f est dérivable par opérations sur des fonctions dérivables (on utilise ici le théorème fondamentale de l'analyse. On dérive et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = f(x) - \sin x \int_0^x f(u) \cos u \, du + \cos x \int_0^x f(u) \sin u \, du.$$

Donc f' est dérivable pour les mêmes raisons, et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve $f''(x) = f'(x) - f(x) + 1$, ce qui nous donne une EDL d'ordre 2. On aura remarqué que $f(0) = f'(0) = 1$.

On résout cette équation et on trouve que l'unique fonction solution est

$$x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x .$$

↩ retour à l'EXERCICE 13