

# Séries numériques

*Séries numériques* vient en opposition à *Séries de fonctions* que vous verrez l'an prochain.

## 1 INTRODUCTION AUX SÉRIES

### 1.1 UNE SÉRIE EST QU'UNE LIMITE D'UN SOMME

Dans cette partie nous allons donner des résultats qui vous sont accessibles depuis longtemps, voire que vous avez déjà démontré en colle.

#### Définition 1 : Série, sommes partielles

Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle **série de terme général**  $u_n$ , la suite  $U \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , définie par  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Le complexe  $U_n$  est appelé la  $n$ -ième somme partielle de  $U$ .

**Notation** On note en général  $\sum u_n$  pour la série de terme général  $u_n$ .

#### En pratique, ce sont des suites

En fait, tout ce que l'on fait c'est étudier les sommes partielles. Calculer la limite, la croissance, la convergence, ... de la série  $\sum u_n$  n'est rien d'autre que d'étudier la limite, la croissance, la convergence de la suite  $\left( \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ce n'est donc qu'un cas particulier de suites, qui mérite notre attention.

La question de la théorie des séries est alors

*À quelle condition sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la série  $\sum u_n$  est-elle convergente ?*

La réponse est partiellement donnée dans ce chapitre ! Attention, elle n'est pas très intuitive.

Par exemple, il est clair que si la série  $\sum u_n$  converge, alors la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un certain  $l \in \mathbb{C}$ .

Mais alors  $u_n = U_n - U_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0$ , par linéarité de la limite. Donc

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $u_n$  converge vers 0.

On pourrait se dire que la réciproque est vraie, mais **c'est complètement faux** ! Il ne suffit pas que  $u \rightarrow 0$ .

On a déjà vu que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , mais que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , donc que la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge !

### 1.2 CE QUE VOUS SAVEZ DÉJÀ

#### Proposition 1 : Divergence grossière

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On dit que la série  $\sum u_n$  **diverge grossièrement** si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$ .

*Preuve.* C'est la contraposée de notre proposition intuitive "Si  $\sum u_n$  converge, alors  $u_n$  converge vers 0."  $\square$

**⚠ ATTENTION** On rappelle que la réciproque est **fausse** en général. S'il suffisait de montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  pour montrer que  $\sum u_n$  converge, ce chapitre n'existerait pas! On retient donc que

Une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 ne converge pas toujours.

### Proposition 2 : Convergence de série (dé)croissante

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

- Si  $u_n \geq 0$ , la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si elle est majorée.
- Si  $u_n \leq 0$ , la série  $\sum u_n$  converge si et seulement si elle est minorée.

$$Preuve. \quad u_n \geq 0 \implies \sum_{k=1}^n u_k \text{ croissante} \implies \begin{cases} \sum u_n \text{ non majorée} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty, \\ \sum u_n \text{ majorée} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k < +\infty, \end{cases}$$

d'après le théorème de convergence monotone.  $\square$

Voyons déjà tout ce que vous savez déjà faire à travers quelques exemples.

#### Exemple 1

Calculons par exemple, la somme de  $\sum \ln \left( 1 + \frac{2}{n(n+3)} \right)$ .

Notons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n := \ln \left( 1 + \frac{2}{n(n+3)} \right) = \ln \left( \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} \right) = \ln \left( \frac{n+2}{n} \right) - \ln \left( \frac{(n+1)+2}{(n+1)} \right)$ .

La somme est alors télescopique ! Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\sum_{k=1}^n u_k = \ln \left( \frac{3}{1} \right) - \ln \left( \frac{(n+1)+2}{(n+1)} \right)$ .

Comme  $\ln \left( \frac{(n+1)+2}{(n+1)} \right) \rightarrow 0$ , la série de terme général  $u_n$  est convergente de somme  $\ln 3$ .

#### Exemple 2

La série  $\sum 1/n$  diverge, car  $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . La preuve est utile à connaître.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ , or si la série  $\sum \frac{1}{n}$  était convergente de somme  $S$ , on aurait

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S - S = 0,$$

ce qui est absurde !

#### Exemple 3

On se rappelle que les séries  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  et  $\sum \frac{1}{2^n}$  convergent. Arrivez vous le prouver de nouveau ?

**Exemple 4**

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . La série  $\sum q^n$  est la suite des sommes partielles  $S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .

Donc  $\left( \sum q^n \text{ converge si et seulement si } |q| < 1 \right)$  et dans ce cas  $\left( \sum q^n \rightarrow \frac{1}{1-q} \right)$ .

**Exemple 5**

Calculons la limite, si elle existe, de la série  $\sum kx^{k-1}$ ,  $x$  étant un nombre complexe quelconque. Vous savez déjà faire ce genre de calculs !

Pour  $x = 1$ , la série  $\sum k$  diverge grossièrement.

Pour  $x \neq 1$ , repartons de la formule de la somme d'une suite géométrique  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ .

Dérivons cette relation par rapport à la variable  $x$ . On obtient l'identité suivante sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  entre fonctions polynomiales

$$(1-x)^2 \sum_{k=1}^n kx^{k-1} = -(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1}).$$

Par conséquent, les deux polynômes sont égaux sur tout  $\mathbb{C}$ . En appliquant cette égalité en  $x$  un complexe de module strictement inférieur à 1 fixé, on obtient

$$\sum_{k=1}^n kq^{k-1} = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2}$$

Finalement, la série de terme général  $kq^{k-1}$  avec  $|q| < 1$  converge, par croissances comparées, et sa somme est  $\frac{1}{(1-q)^2}$ .

**Exemple 6**

Vous savez aussi, avec Taylor-Lagrange, montrer que les séries de "type DL", convergent !

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Calculons la limite, si elle existe, de la série de terme général  $\frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}$  est convergente de somme  $e^a$ . L'inégalité de Taylor-Lagrange entraîne que

$$\left| \cos(a) - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Comme le second membre tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , par croissances comparées, alors les sommes partielles considérées convergent vers  $\cos(a)$ .

On peut bien évidemment faire la même chose avec toutes les séries de ce type !

**Vocabulaire** Si  $\sum u_n$  converge,

- on appelle **somme de la série**  $\sum u_n$ , la limite de la suite  $\sum u_n$ ,
- on appelle  **$n$ -ième reste de la série**  $\sum u_n$

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a toujours  $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Proposition 3 : Lien suite et série télescopique**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et la série  $\sum u_n - u_{n-1}$  sont de même nature.

*Preuve.* Par télescopage, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$ . Par somme de limites, les deux suites sont de même nature.  $\square$

### Exemple 7

La série  $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$  diverge puisque la suite  $(\sqrt{n})$  diverge.

### Exemple 8

La série  $\sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$  converge, et sa somme vaut  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1$ .

### Exemple 9

D'après la proposition, la suite de terme général  $\ln(n+1)$ , et  $\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$  sont de même nature, or  $(\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$

diverge, donc  $\left( \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge.

Or pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ , donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$  ce qui prouve par minoration

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ , donc de nouveau, la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

## 1.3 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

### Proposition 4 : Opérations sur les séries

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Notons

- ①  $\sum u_n$  et  $\sum (\lambda u_n)$  sont même nature.
- ②  $\sum u_n \xrightarrow{+\infty} l_u \in \mathbb{C}$  et  $\sum v_n \xrightarrow{+\infty} l_v \in \mathbb{C} \implies \sum (u_n + v_n) \xrightarrow{+\infty} l_u + l_v$ .
- ③  $\sum u_n \xrightarrow{+\infty} l_u \in \mathbb{C}$  et  $\sum v_n$  diverge  $\implies \sum (u_n + v_n)$  diverge.
- ④  $\sum u_n \xrightarrow{+\infty} a + ib \iff \sum \operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow{+\infty} a$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow{+\infty} b$ , où  $a, b \in \mathbb{R}$ .

*Preuve.* Ce sont les mêmes propriétés de la limite de suites, appliquées aux séries !  $\square$

### ⚠ ATTENTION On n'invente pas !

- Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent toutes les deux, **on ne peut rien dire en général** de  $\sum (u_n + v_n)$ .  
Proposons deux exemples de conclusion différentes :
  - $\triangleright \sum n$  et  $\sum 1$  divergent grossièrement, et la série  $\sum n + \sum 1 = \sum (n+1)$  aussi,
  - $\triangleright \sum n$  et  $\sum -(n + \frac{1}{2^n})$  divergent grossièrement, mais la série  $\sum n + \sum -(n + \frac{1}{2^n}) = -\sum \frac{1}{2^n}$  converge.
- Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, **on ne peut rien dire en général** de la série  $\sum u_n v_n$ .  
Proposons deux exemples de conclusion différentes :
  - $\triangleright \sum \frac{1}{2^n}$  et  $\sum \frac{1}{2^n}$  convergent, et la série  $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum \frac{1}{2^{2n}}$  aussi
  - $\triangleright \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge (nous le verrons un peu plus loin), mais  $\sum \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Exemple 10**

Comme  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente et  $\sum \frac{1}{2^n}$  est convergente, alors la série  $\sum \frac{2^n + n}{n2^n}$  diverge.

**2 UN EXEMPLE : LES SÉRIES ALTERNÉES**

Hors programme en MPSI, au programme en deuxième année, mais on peut dire que vous y êtes un peu.

**Définition 2 : Série alternée**

On appelle série alternée toute série de la forme  $\sum (-1)^n a_n$  avec  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de signe constant.

**Proposition 5 : Critère de convergence des séries alternées**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  décroissante de limite nulle. La série alternée  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

*Preuve.* Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ .

L'idée est de montrer que les suites  $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Si c'est le cas, elles sont convergentes de même limite, d'après le théorème des suites adjacentes, et donc la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge d'après le théorème des suites extraites. D'abord,  $A_{2n+1} - A_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{2(n+1)} - A_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ .

Donc la suite  $(A_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{2(n+1)+1} - A_{2n+1} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$ .

Donc la suite  $(A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

En fait, on obtient même une majoration du reste  $R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$  de la série. Il est de signe de  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|R_n| \leq \left| u_{n+1} - \sum_{k=n+2}^{+\infty} |u_{k+1} - u_k| \right| \leq |u_{n+1}|,$$

par inégalité triangulaire.  $\square$

**Série de Riemann alternée**

Cela montre déjà que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 0$ . Ce résultat est très utile en pratique ! Par exemple pour montrer que  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge, comme on l'a supposé dans le paragraphe précédent !

**Exemple 11**

$\sum \frac{(-1)^n}{e^{-\cos(n)} n}$  converge, car  $\frac{1}{e^{-\cos(n)} n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**3 UNE NOUVELLE NOTION : LA CONVERGENCE ABSOLUE****Définition 3 : Convergence absolue**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On dit que la série  $\sum u_n$  est **absolument convergente** ou qu'elle **converge absolument** si  $\sum |u_n|$  converge.

**Exemple 12**

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{2^n}$  converge absolument, car la série  $\sum \frac{1}{2^n}$  converge.

La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  ne converge pas absolument, car la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge, pourtant  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  converge.

**Proposition 6 : Convergence absolue  $\Rightarrow$  convergence**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .  $\sum u_n$  converge absolument  $\implies \sum u_n$  converge.

**Méthode**

Là est le premier intérêt de la notion. Parfois c'est plus simple de montrer qu'une suite est absolument convergente, que de montrer qu'elle est convergente.

Quand on aura des critères sur les séries à termes positifs, ce sera d'autant plus utile !

*Preuve.* Supposons  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .  $\sum u_n$  converge absolument  $\implies \sum |u_n|$  converge.

Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n^+ := \frac{|u_n| + u_n}{2}$  et  $u_n^- := \frac{|u_n| - u_n}{2}$ , puis  $S_n^+ := \sum_{k=0}^n u_k^+$  et  $S_n^- := \sum_{k=0}^n u_k^-$ .

En fait,  $(S_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$  sont respectivement la somme des termes positifs et négatifs de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc 
$$\begin{cases} S_n^+ - S_n^- = \sum_{k=0}^n u_k, \\ S_n^+ + S_n^- = \sum_{k=0}^n |u_k|. \end{cases}$$

Les séries  $(S_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$  sont à termes positifs, donc sont croissantes. De plus,  $S_n^\pm \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ , qui est le terme général d'une

suite convergente, donc bornée. Donc  $(S_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$  sont majorées.

D'après le théorème de convergence monotone  $(S_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes, et donc par linéarité de la limite,  $\sum u_n$  est convergente.

Montrons le alors pour  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .

On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\sum_{k=0}^n |\operatorname{Re}(u_k)| = \sum_{k=0}^n \left| \frac{u_k + \overline{u_k}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=0}^n |u_k| + \sum_{k=0}^n |\overline{u_k}| \right] = \sum_{k=0}^n |u_k|.$$

Donc, comme ci-dessus,  $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$  est croissante et majorée, donc convergente. On procède de même pour  $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ . Comme ce sont des suites réelles absolument convergentes, elles convergent, et donc  $\sum u_n$  converge.  $\square$

**⚠ ATTENTION** La réciproque est évidemment fausse. Pensez à  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

D'ailleurs on a un nom pour les suites qui convergent, mais pas absolument : **semi-convergente**.

**Exemple 13**

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{2^n + 1}$  est convergente. En effet,  $\forall n \geq 1$ ,  $\left| \frac{e^{in}}{2^n + 1} \right| = \frac{1}{2^n + 1}$  et la convergence de la série  $\sum \frac{1}{2^n + 1}$

assure que la série de terme général  $\frac{e^{in}}{n^2}$  est absolument convergente, donc convergente.

**Inégalité triangulaire pour des séries absolument convergentes**

On peut toujours avoir une estimation de la somme d'une série absolument convergente à partir de la somme de la série des valeurs absolues de ses termes. Si  $\sum u_n$  une série absolument convergente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité

triangulaire donne  $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ . En passant à la limite, et parce que  $\sum |u_n|$  converge,  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

Il peut être difficile de calculer la somme d'une série absolument convergente, même si on connaît la somme de  $\sum |u_n|$ .

## 4 CAS DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

**⚠ ATTENTION** Dans ce paragraphe, les termes sont supposés à termes positifs. Bien sûr, si les termes sont négatifs, il suffit de considérer  $-\sum u_n$  pour les mêmes résultats. L'hypothèse de positivité est vite oubliée, mais elle est **indispensable** aux résultats suivants.

### 4.1 COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE

#### Méthode générale

L'idée est de réutiliser la somme de Riemann, ou méthode des rectangles, que vous connaissez déjà !

#### Proposition 7

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissante. Alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_0^n f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(t) dt.$$

En particulier,  $\sum f(n)$  et  $(\int_0^n f(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$  sont de même nature.

#### Comment faire une comparaison série-intégrale en pratique ?

En pratique, vous ne pouvez pas utiliser le résultat directement, mais le redémontrer pour chaque exemple. Supposons que l'on veuille montrer que  $\sum f(n)$  converge, où  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissante.

Par décroissance, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $t \in [k, k+1]$ ,  $f(k) \geq f(t) \geq f(k+1)$ . Ainsi, en intégrant, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t) dt \geq f(k+1).$$

En utilisant chaque inégalité indépendamment, on a alors  $\int_{k-1}^k f(t) dt \geq f(k) \geq \int_k^{k+1} f(t) dt$ .

Il suffit alors de sommer et d'utiliser la relation de Chasles

$$\int_0^n f(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt \geq \sum_{k=1}^n f(k) \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_1^{n+1} f(t) dt.$$

On a donc équivalence entre la nature de  $\sum f(n)$  et  $(\int_0^n f(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$

En fait, on peut avoir mieux. Parfois, calculer les intégrales peut nous permettre alors de trouver la somme de la série par le théorème d'encadrement. Inversement, si on connaît la somme, on peut connaître la limite des intégrales.

Un bon exercice peut être de redémontrer tout cela pour  $f$  négative et croissante.

#### Exemple 14

La série  $\sum \sqrt{n}$  diverge grossièrement. Mais quel est son équivalent simple ? On va utiliser la comparaison série intégrale pour le calculer.

Par croissance de la fonction racine carrée, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\int_{k-1}^k \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt$ , donc, en sommant sur  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\int_0^n \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} n^{3/2} \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{k} \leq \frac{2}{3} (n+1)^{3/2} = \int_1^{n+1} \sqrt{t} dt.$$

On a alors par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n \sqrt{k}}{\frac{2}{3} n^{3/2}} = 1$ , donc  $\sum_{k=0}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{3/2}$ .

## Application aux séries de Riemann

**Proposition 8 : Critère de convergence des séries de Riemann**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , dite **série de Riemann**, converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

*Preuve.* C'est la même idée que précédemment. Nous ne traitons pas le cas  $\alpha = 1$ , qui correspond à la série harmonique, divergente.

**Cas  $\alpha < 1$ .** On utilise la proposition précédente avec la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  pour obtenir

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ qui donne en additionnant avec la relation de Chasles,}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1)$$

d'où la divergence de la série, d'après le théorème de minoration.

**Cas  $\alpha > 1$ .** Avec la même fonction, on utilise cette fois-ci la majoration correspondante.

$$\text{Pour tout } n \geq 1, \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha}. \text{ En sommant, on obtient pour } n \geq 1, 1 + \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1) \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

Or  $1 + \frac{1}{1-\alpha} ((n+1)^{1-\alpha} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1}$ . Donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée donc convergente.

□

**Exemple 15**

Soit  $\beta \geq 0$ . Cherchons à connaître la convergence de la série de terme général  $\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ .

D'abord, la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$  admet la primitive  $x \mapsto \frac{1}{1-\beta} (\ln x)^{1-\beta}$  pour  $\beta \neq 1$  et  $x \mapsto \ln(\ln(x))$  sinon. Donc

- Si  $\beta \geq 1$ ,  $\int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \frac{1}{1-\beta} (\ln n)^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} (\ln 2)^{1-\beta} \geq \sum_{k=3}^n f(k) \geq 0$ , d'où d'après le théorème d'encadrement,  $\sum f(n)$  converge.
- Si  $\beta = 1$ ,  $\sum_{k=2}^n f(k) \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) = \int_2^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)} dx$ , d'après le théorème de minoration,  $\sum f(n)$  diverge.
- Si  $\beta < 1$ , quand  $\sum_{k=2}^n f(k) \geq \frac{1}{1-\beta} (\ln(n+1))^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} (\ln 2)^{1-\beta} = \int_2^{n+1} \frac{1}{x(\ln x)} dx$ , d'après le théorème de minoration,  $\sum f(n)$  diverge.

Ce résultat, hors programme, est appelé *Critère de convergence des séries de Bertrand*.

## 4.2 COMPARAISON DE SÉRIES À TERMES POSITIFS

**Proposition 9 : Comparaison par des inégalités entre les termes**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $0 \leq u_n \leq v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- ① Si la série  $\sum v_n$  converge, la série  $\sum u_n$  converge aussi.
- ② Si la série  $\sum u_n$  diverge, la série  $\sum v_n$  diverge aussi.

*Preuve.* Remarquons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^n v_k$  et que  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont croissantes.

- ① Si la série  $\sum v_n$  converge, alors elle est majorée, donc la série  $\sum u_n$  est majorée. D'après le théorème de la limite monotone,  $\sum u_n$  converge.



② Si la série  $\sum u_n$  diverge, d'après le théorème de la limite monotone  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$

Ainsi, d'après le théorème de minoration,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = +\infty$ , donc la série  $\sum v_n$  diverge.

□

### Exemple 16

Donnons la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{3n+1}{n(n^2+2n+3)}$ . La série est à termes positifs.

Comme  $\frac{3n+1}{n(n^2+2n+3)} \leq \frac{3n+3}{n^3+n^2} = \frac{3}{n^2}$ , et que la série  $\sum \frac{3}{n^2}$  est une série de Riemann convergente, alors  $\sum_{n \geq 1} \frac{3n+1}{n(n^2+2n+3)}$  converge.

### Exemple 17

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs convergente. Montrons que  $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$  est aussi convergente.

Cela ne vient pas d'une règle générale que l'on invente ! En fait, c'est un cas très particulier.

Puisque  $2ab \leq a^2 + b^2$  on a  $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$  or  $\sum u_n$  et  $\sum u_{n+1}$  convergent donc, par comparaison de séries à termes positifs,  $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$  converge.

### Proposition 10 : Comparaison par des équivalents entre les termes

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On suppose que ces suites sont positives, et que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .

Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont alors de même nature.

**⚠ ATTENTION Conte-exemple** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ .

La série  $\sum u_n$  est convergente, d'après le théorème des séries alternées.

Comme somme d'une série convergente et de la série harmonique divergente, la série  $\sum v_n$  diverge.

Pourtant,  $v_n \sim u_n$  puisque  $\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

**Qu'a-t-on raté ?**

*Preuve.* Supposons que la série  $\sum u_n$  converge, la série  $\sum v_n$  converge aussi. Sans perte de généralité, supposons que  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.

Par définition de l'équivalence entre deux suites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$ , donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $1 - \varepsilon < \frac{v_n}{u_n} < 1 + \varepsilon$  à partir d'un certain rang, d'où  $0 \leq v_n \leq (1 + \varepsilon)u_n$ . D'après la proposition précédente, si la série  $\sum u_n$  converge, la série  $\sum v_n$  converge aussi.

Les autres cas découlent par symétrie de l'équivalence. □

### Exemple 18

Donnons la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \left( \tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$ . La série est à termes positifs.

On a  $\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o(1/n^3)$ .

Donc  $\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$ , et  $\sum n^{-3}$  est une série de Riemann convergente, donc  $\sum_{n \geq 1} \left( \tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right)$  converge.

**Exemple 19**

Cela nous donne aussi une nouvelle preuve plus rapide de la divergence de la série harmonique.

La suite  $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge, donc la série  $\sum (\ln(n+1) - \ln n) = \sum \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  également. Comme cette série est à termes positifs et  $\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ , la série  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

**Proposition 11 : Comparaison par des grands O**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est positive, que  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  et que la série  $\sum v_n$  converge. Dans ces conditions, la série  $\sum u_n$  converge absolument.

**⚠ ATTENTION** Le critère de positivité n'est pas superflu ! On a

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ converge, } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} \text{ diverge et pourtant } \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} ;$$

*Preuve.* Par définition de la dominance de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  sur  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , il existe un rang  $N$  et un réel  $K > 0$  tels que pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n| \leq K |v_n|$ . Par comparaison par des inégalités (Proposition 9),  $\sum u_n$  converge.  $\square$

**En pratique**

Rappelons que si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ , alors  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ , donc on peut appliquer la proposition.

Par exemple, comme la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge pour tout  $\alpha > 1$ , on peut écrire

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$  pour un certain  $\alpha > 1$ , la série  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge.

ce qui peut être utile en pratique.

**Exemple 20**

Donnons la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$ . La série est à termes positifs.

On a  $\frac{\ln n}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\frac{\ln n}{n^2 + 1} \underset{+\infty}{=} o(n^{-3/2})$ , et  $\sum n^{-3/2}$  et une série de Riemann convergente, donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$  converge.

**Exemple 21**

Donnons la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$ . La série est à termes positifs.

On a  $e^{-\sqrt{n}} n^7 = \exp(7 \ln(n) - \sqrt{n}) \xrightarrow{+\infty} 0$ , par croissances comparées.

Donc  $e^{-\sqrt{n}} \underset{+\infty}{=} o(n^{-7})$ , et  $\sum n^{-7}$  et une série de Riemann convergente, donc  $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$  converge.

**Exemple 22**

Donnons la nature de la série  $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ . La série est à termes positifs.

On a  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp(-n^2 \ln(1 + 1/n)) \underset{+\infty}{=} \exp(-n + o(n))$ .

Donc  $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{+\infty}{=} o(n^{-22})$ , et  $\sum n^{-22}$  est une série de Riemann convergente, donc  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  converge.