

Une fonction continue partout mais dérivable nulle part

L'objet de ce problème est de construire une fonction définie sur $[0, 1]$ qui soit continue sur $[0, 1]$ et dérivable en aucun point de $[0, 1]$. On construit f comme la limite d'une suite de fonctions f_n définies sur $[0, 1]$. On définit f_n par récurrence :

- f_0 est la fonction définie par $f_0(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- f_1 est la fonction affine par morceau dont le graphe est constitué des segments reliant les points : $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3})$ et $(1, 1)$;
- Plus généralement, supposons f_n construite, et affine par morceau sur chaque intervalle $[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}]$. La fonction f_{n+1} est obtenu subdivisant ces intervalles en trois et en itérant la construction de f_1 : sur l'intervalle $[\frac{m}{3^n}, \frac{m+1}{3^n}]$, f_{n+1} est la fonction affine par morceaux dont le graphe est constitué des segments de droite reliant les points $(\frac{3m}{3^{n+1}}, f_n(\frac{3m}{3^{n+1}}))$, $(\frac{3m+1}{3^{n+1}}, f_n(\frac{3m+2}{3^{n+1}}))$, $(\frac{3m+2}{3^{n+1}}, f_n(\frac{3m+1}{3^{n+1}}))$ et $(\frac{3m+3}{3^{n+1}}, f_n(\frac{3m+3}{3^{n+1}}))$.

PARTIE A - PRÉLIMINAIRES

- ① Tracer dans un même repère les graphes de f_0, f_1, f_2 , et f_3 (un conseil : faites grand, sur une feuille à part)
- ② Le graphe de f_0 est constitué d'un segment de droite. On note $p_{0,1}$ sa pente. Le graphe de f_1 est constitué de trois segments de droite. On note $p_{1,1}, p_{1,2}$ et $p_{1,3}$ leurs pente. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est constitué de α_n segments de droite, et on note $p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n}$ leurs pentes.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut α_n ?
 - (b) Déterminer $p_{n,i}$ pour $n = 0, 1, 2, 3$, pour tout i pour lesquels cela a un sens.
 - (c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(p_{n+1,i})_{1 \leq i \leq \alpha_{n+1}}$ en fonction de la famille $(p_{n,i})_{1 \leq i \leq \alpha_n}$.
 - (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$ et $\max(p_{n,1}, \dots, p_{n,\alpha_n})$
 - (e) Quel est le signe de $p_{n,i}$?
- ③ Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \llbracket 0, 3^n - 1 \rrbracket$. On note $I_{n,k} = [\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$.
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $m \geq n$, $f_m(I_{n,k}) = f_n(I_{n,k})$.
 - (b) On suppose que $p_{n,k+1} \geq 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n+1,3k}$, et tout entier $m \geq n$, $f_m(x) \geq f_n(x)$.
Aider vous d'un dessin.
 - (c) On suppose que $p_{n,k+1} \geq 0$. Montrer que pour tout réel $x \in I_{n,k}$, et tout entier $m \geq n$,

$$f_m(x) - f_m\left(\frac{k}{3^n}\right) \geq \left(x - \frac{k}{3^n}\right) \frac{p_{n,k+1}}{3}.$$

Aider vous d'un dessin.

- (d) Modifier les énoncés des deux questions précédentes dans le cas où $p_{n,k+1}$ est négatif.

PARTIE B - LA FONCTION LIMITE

- ① **Existence de la fonction limite f .**
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$.
Discuter suivant l'appartenance de x aux intervalles $I_{n+1,3k}, I_{n+1,3k+1}$ et $I_{n+1,3k+2}$.
 - (b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (on admettra que si une série $\sum |a_n|$ converge, alors la série $\sum a_n$ converge également).
On note $f(x)$ sa limite. Cela définit une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (c) Que valent $f\left(\frac{k}{3}\right)$, pour $k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$? $f\left(\frac{k}{9}\right)$, pour $k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$? Plus généralement, exprimer $f\left(\frac{k}{3^n}\right)$ en fonction de f_n .

② **Continuité de f .**

- (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier n tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \varepsilon$. Désormais, dans la suite de cette partie, n désigne un tel entier.
- (b) Soit $x_0 \in [0, 1[$, et $\alpha = \lfloor 3^n x_0 \rfloor$. Justifier que $x_0 \in \left[\frac{\alpha}{3^n}, \frac{\alpha+1}{3^n}\right[= I_{n,\alpha}$.
- (c) Montrer que pour tout $m \geq n$, et pour tout $y \in I_{n,\alpha}$, $|f_m(x_0) - f(y)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. (On pourra considérer $f_m(I_{n,\alpha})$, pour $m \geq n$).
- (d) En déduire que f est continue en x_0 .
- (e) Que dire de la continuité de f en 1 ?

③ **Étude de la monotonie de f .**

Montrer qu'il n'existe aucun intervalle $I \subset [0, 1]$ sur lequel f est monotone. Autrement dit, f n'est nulle part monotone.

- ④ **Étude de la dérivabilité de f .** Soit $x \in]0, 1[$, et pour tout $n, \beta_n = \lceil 3^n x \rceil - 1$, c'est-à-dire l'unique entier tel que $\beta_n < 3^n x \leq x$. Soit $I_n(x) = I_{n,\beta_n}$. On note $p_n(x) = p_{n,\beta_n+1}$ la pente sur $I_n(x)$ de la fonction f_n , affine sur cet intervalle.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $p_n(x)$ et $p_{n+1}(x)$ sont de même signe, alors $p_{n+1}(x) = 2p_n(x)$.
- (b) **Premier cas.** Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x), n \geq n_0$, soient tous de même signe. En utilisant les résultats de la partie A, montrer que

$$\lim \left| \frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x} \right| = +\infty.$$

- (c) **Deuxième cas.** supposons qu'il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que les entiers $p_n(x), n \geq n_0$, soient tous de même signe. Montrer que $\frac{f\left(\frac{\beta_n}{3^n}\right) - f(x)}{\frac{\beta_n}{3^n} - x}$ n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- (d) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $[0, 1]$.

PARTIE C - RÉOLUTION DE L'ÉQUATION $f(x) = \frac{1}{2}$

- ① Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $k_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Déterminer $f\left(\frac{k_n - 1}{3^n}\right)$ et $f\left(\frac{k_n}{3^n}\right)$.
- ② Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une infinité de solutions. Pouvez-vous en donner une?