

TD

Espérance et variance

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □

On considère une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{2}$. Déterminer la loi de X . ► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □ Somme de Bernoulli dépendantes

Une urne contient N boules dont b blanches. On en tire simultanément n , avec $1 \leq n \leq N$, et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues. Déterminer l'espérance de X . ► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\mathbb{E}(Z)} = \mathbb{E}(\bar{Z})$. ► Indication
► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes vérifiant $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$.

① Calculer l'espérance de X_k .

② On pose $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

En calculant de deux façons l'espérance de Y_n , déterminer $p_n = \mathbb{P}(Y_n = 1)$.

③ Quelle est la limite de p_n quand $n \rightarrow +\infty$.

► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 5 ■ □ □

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi. Calculer $\mathbb{E}(|X - Y|)$

① Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, ② Si $X \sim \mathcal{U}([1, n])$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, n]$ telle que

$$\forall k \in [1, n] \quad \mathbb{P}(X = k) = \lambda k.$$

Déterminer $\lambda, \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Soient X et Y deux variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p \in]0, 1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

① Déterminer la loi du couple (U, V) .

② Déterminer la covariance de U et V .

③ U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ □ □

Soit X une variable aléatoire binomiale de taille n et de paramètre $p \in]0, 1[$.

Calculer l'espérance de la variable $Y = \frac{1}{X+1}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □

Une variable aléatoire X suit une loi du binôme de paramètre p et de taille n .

Établir pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$. ► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 10 ■ □ □

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Définissons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_k l'événement

"au moins k événements parmi $A_1, \dots, A_n$ sont réalisés".

Montrer, en calculant l'espérance de la variable $X = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$, que $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Montrer que deux événements sont indépendants si, et seulement si, leurs fonctions indicatrices définissent des variables aléatoires indépendantes. ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$.

Montrer que $\mathbb{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. On expliquera pourquoi $(X-a)(X-b) \leq 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Un étudiant résout un QCM constitué de n questions offrant chacune quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre celle-ci. Dans ce cas il produit la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu «au hasard».

- ① Reconnaître la loi de $Z = X + Y$.
- ② Calculer espérance et variance de Z .

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ ■

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, ne prenant que des valeurs strictement positives. Pour $1 \leq k \leq n$, calculer $\mathbb{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n} \right)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

- ① Déterminer la loi de X_1 .
- ② Calculer les variances de X_1, X_2 et de $X_1 + X_2$.
- ③ En déduire la covariance de X_1 et X_2 .

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ indépendante de $(X_1, \dots, X_n)$.

Déterminer l'espérance et la variance de la variable $S_N = X_1 + \dots + X_N$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■ □ □

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . Tirons une poignée de boules et notons X la somme des valeurs des boules extraites.

Déterminer l'espérance de X . ► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ (A) ■

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que les variables $X - Y$ et X sont indépendantes et les variables $X - Y$ et Y sont indépendantes.

Montrer que la variable $X - Y$ est constante. ► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ ■

Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$, de loi donnée par $\mathbb{P}(X_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_{i,j} = -1) = \frac{1}{2}$.

Déterminer l'espérance du déterminant de la matrice $M = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■■■ Fonction génératrice

Si X est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k \in X(\omega)} t^k \mathbb{P}(X = k)$$

La fonction polynomiale g_X est appelée fonction génératrice de X .

- ① Montrer que la loi de X est entièrement déterminée par la fonction g_X .
- ② Montrer que, si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes telles que $X_1(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X_2(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors

$$g_{X_1+X_2} = g_{X_1}g_{X_2}$$
- ③ Déterminer la fonction génératrice d'une variable suivant une loi binomiale. Retrouver ainsi le fait que si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale.

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■■■ Promenade aléatoire dans $\mathbb{N}$

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes de même loi définie par $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$.

- ① Pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Calculer l'espérance et la variance de S_n .
- ② Pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note Y_n la variable aléatoire égale au plus petit entier $k \geq 1$ tel que $S_k \geq n$. On pose $Y_0 = 0$.
 - 2.a Montrer que, pour $n \geq 1$, l'ensemble des valeurs prises par Y_n est inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - 2.b Montrer que, pour $n \geq 2$ et pour entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$$

- 2.c Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

- 2.d Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Déterminer alors u_n , puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n .

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■■■ Inégalité de Bernstein

Soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre (n, p) et $x > 0$. On pose $q = 1 - p$.

- ① Soit $\lambda > 0$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)})}{e^{n\lambda x}}$$

- ② Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda(S_n - np)}) = (pe^{\lambda q} + qe^{-\lambda p})^n$.

- ③ Montrer que, pour tout réel t , $e^t \leq e^{t^2} + t$. En déduire :

$$\mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{n(\lambda^2 - \lambda x)} \text{ puis } \mathbb{P}(S_n - np \geq nx) \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

- ④ Expliquer comment on démontrerait de la même façon que :

$$\mathbb{P}(S_n - np \leq -nx) \leq e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

En déduire l'inégalité de Bernstein

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq x\right) \leq 2e^{-\frac{nx^2}{4}}$$

Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

► Indication ► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Poser une valeur pour chaque probabilité définissant la loi et mettre en équation avec les hypothèses disponibles. *Ne pas oublier que la somme des probabilités vaut 1.*

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 Somme de Bernoulli dépendantes

Fixer X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ème boule blanche fait partie des n boules tirées et 0 sinon.

Quel est le lien entre X et les X_i ? Est plus facile de calculer l'espérance de X_i ?

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Il s'agit juste d'un jeu d'écriture des définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

On peut calculer l'espérance par la définition de l'espérance ou par la définition de Y_n . On oublie pas que la somme des proba vaut 1 !

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Espérance d'une fonction → On ne réfléchit pas ! Formule de transfert !

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Du déjà vu. Il suffit d'écrire les définitions !

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Application directe des définitions. On peut mettre les valeurs des probabilités dans un tableau.

Il suffit de trouver une contre-exemple pour l'indépendance.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Calcul direct par formule de transfert.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Application directe de l'inégalité de Markov.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Calculer l'espérance de 2 manières différentes. On pourra faire un lien entre $(X \geq k)$ et B_k «<» ;

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Juste un jeu d'écritures et de définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

On utilisera $(X - a)(X - b) \leq 0$ dans la formule de Koenig-Huygens.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

Expliciter la loi de X et la loi de Y sachant X . Avec ces lois on peut calculer la loi de Z .

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Par linéarité, il suffit de calculer l'espérance des $Y_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_n}$, dont on peut montrer qu'elles ont toutes la même loi.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

X_1 ressemble fortement à n expériences réussite/échec.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

On calcule la loi avec la formule des probabilités totales, puis l'espérance avec la définition, et la variance avec la formule de Koenig Huygens.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Comment écrire X en fonction des événements A_k «la boule de numéro k est tirée» ?

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Variable aléatoire constante $\Leftrightarrow$ Variance nulle.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

On utilise directement la formule du déterminant avec les mineurs et on fait fonctionner les indépendances !

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20 **Fonction génératrice**

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21 **Promenade aléatoire dans $\mathbb{N}$**

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22 **Inégalité de Bernstein**

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

Calculons $p_0 = \mathbb{P}(X = 0)$, $p_1 = \mathbb{P}(X = 1)$ et $p_2 = \mathbb{P}(X = 2)$. $\triangleright$ Par définition de la loi de X , on a $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. $\triangleright$ Par définition de l'espérance de X , on a $p_1 + 2p_2 = 1$. $\triangleright$ Enfin, par définition de la variance, $\mathbb{E}(X^2) = \mathbf{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{3}{2}$ donc on a $p_1 + 4p_2 = \frac{3}{2}$. En résolvant ce système, on obtient $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$ et enfin $p_0 = \frac{1}{4}$. On reconnaît la loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{1}{2}$.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 Somme de Bernoulli dépendantes

On choisit comme espace probabilisé l'ensemble des parties à n éléments de l'ensemble des boules, muni de la probabilité uniforme. On numérote (mentalement) les boules blanches et, pour $1 \leq i \leq b$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i -ème boule blanche fait partie des n boules tirées et 0 sinon. Son espérance est

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$$

En effet, le nombre total de tirages est $\binom{N}{n}$ et le nombre de cas favorables est $\binom{N-1}{n-1}$, car on tire la i -ème boule blanche accompagnée de $n-1$ autres boules (prises parmi les $N-1$ boules restantes). Il est clair que $X = \sum_{i=1}^b X_i$. On en déduit, par linéarité

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^b \mathbb{E}(X_i) = \frac{nb}{N}$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Si l'ensemble des valeurs prises par Z est E , alors l'ensemble des valeurs prises par $\bar{Z}$ est $\{\bar{z} \mid z \in E\}$ et pour tout $z \in E$, on a $\mathbb{P}(\bar{Z} = \bar{z}) = \mathbb{P}(Z = z)$. On en déduit

$$\mathbb{E}(\bar{Z}) = \sum_{z \in E} \bar{z} \mathbb{P}(\bar{Z} = \bar{z}) = \sum_{z \in E} \bar{z} \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z \in E} z \mathbb{P}(Z = z) = \overline{\mathbb{E}(Z)},$$

car $\mathbb{P}(Z = z)$ est réel pour tout $z \in E$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{P}(X_k = 1) - \mathbb{P}(X_k = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1$$

$$\textcircled{2} \quad \text{On a d'une part} \quad \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) \stackrel{\text{indép}}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \prod_{k=1}^n 2p - 1 = (2p - 1)^n,$$

et d'autre part $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{P}(Y_n = 1) - \mathbb{P}(Y_n = -1) = \mathbb{P}(Y_n = 1) - 1 + \mathbb{P}(Y_n = 1) = 2p_n - 1.$

$$\text{On obtient donc} \quad p_n = \frac{1 + (2p - 1)^n}{2}.$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Par encadrement,} \quad p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/2.$$

↩ retour à l'EXERCICE 4

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 5

$\textcircled{1}$ Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, on a, en appliquant la formule de transfert à la variable (X, Y) et à la fonction $f : (x, y) \mapsto |x - y|$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X - Y|) &= \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} |i - j| \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} |i - j| \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = j) = 2p(1 - p) \end{aligned}$$

car les seuls termes non nuls correspondent à $(i, j) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.

$\textcircled{2}$ Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, on a, toujours avec la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(|X - Y|) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |i - j| \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{n^2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |i - j|.$$

On a ensuite :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |i-j| = 2 \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i < j}} |i-j| = 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) = 2 \sum_{j=2}^n \sum_{k=1}^{j-1} k = \sum_{j=1}^n j(j-1).$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}(|X - Y|) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n^2 - 1}{3n}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

De $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^n k = \lambda \frac{n(n+1)}{2} = 1$, on tire $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.
On obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^n k^2 = \lambda \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}.$$

On calcule ensuite $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^n k^3 = \lambda \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$.

On en déduit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} = \frac{n^2 + n - 2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

- ① On a $U(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, $V(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Pour tout $(k, \ell) \in \{0, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\}$, on obtient, par indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = k, V = \ell) &= \mathbb{P}\left(X = \frac{k+\ell}{2}, Y = \frac{k-\ell}{2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X = \frac{k+\ell}{2}\right) \mathbb{P}\left(Y = \frac{k-\ell}{2}\right). \end{aligned}$$

Cette probabilité est nulle si k et ℓ n'ont pas la même parité. On représente la loi conjointe et les lois marginales dans un tableau. Pour simplifier, on pose $q = 1 - p$.

$U \setminus V$	-1	0	1	loi de U
0	0	q^2	0	q^2
1	pq	0	pq	$2pq$
2	0	p^2	0	p^2
loi de V	pq	$p^2 + q^2$	pq	

- ② On obtient $\mathbb{E}(U) = 2p$, $\mathbb{E}(V) = 0$ et $\mathbb{E}(UV) = -pq + pq = 0$ (tous les autres termes sont nuls). On en déduit $\text{Cov}(U, V) = 0$.
- ③ Manifestement, les variables U et V ne sont pas indépendantes. On a, par exemple

$$\mathbb{P}(U = 0)\mathbb{P}(V = 1) = pq^3 \neq 0 = \mathbb{P}(U = 0, V = 1)$$

Mais, d'après la question 2, elles sont décorrélées. La décorrélation n'est pas une condition suffisante d'indépendance.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

Puisque $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$,

l'espérance de Y est donnée par $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \binom{n+1}{k+1} &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}, \text{ donc } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{(n+1)-k} \\ &= \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}. \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

Rappelons

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ et } \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Considérons la variable aléatoire

$$Y = X - np = X - \mathbb{E}(X)$$

Par l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(|Y| \geq na) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{na}$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}(|Y|)}{n\varepsilon}$$

Or $\mathbb{E}(|Y|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ avec $\mathbb{E}(Y^2) = V(X) = np(1-p)$ donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 10

Commençons déjà par remarquer que par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

Calculons la loi de X de sorte à obtenir une seconde expression de son espérance. La variable X prend pour valeurs les entiers entre 0 et n (puisque chaque indicatrice ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1). Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X \geq k) = \mathbb{P}(B_k)$.

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k(\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(B_k) - \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(B_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(B_k) - \sum_{k=1}^n (k-1)\mathbb{P}(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Soient A, B deux évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Supposons les fonctions indicatrices 1_A et 1_B indépendantes. On a

$$\mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1) = \mathbb{P}(1_A = 1) \mathbb{P}(1_B = 1)$$

ce qui se relit

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Inversement, supposons les évènements A et B indépendants. On sait qu'alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B}) \text{ et } \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(\bar{A})\mathbb{P}(\bar{B}) \end{aligned}$$

Ceci se relit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 1) &= \mathbb{P}(1_A = 1) \mathbb{P}(1_B = 1), \\ \mathbb{P}(1_A = 0, 1_B = 1) &= \mathbb{P}(1_A = 0) \mathbb{P}(1_B = 1), \\ \mathbb{P}(1_A = 1, 1_B = 0) &= \mathbb{P}(1_A = 1) \mathbb{P}(1_B = 0) \text{ et} \\ \mathbb{P}(1_A = 0, 1_B = 0) &= \mathbb{P}(1_A = 0) \mathbb{P}(1_B = 0) \end{aligned}$$

On en déduit que les variables aléatoires 1_A et 1_B sont indépendantes.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Comme X est à valeurs dans $[a, b]$, on a $(X-a)(X-b) \leq 0$, et donc $X^2 \leq (a+b)X - ab$. Par croissance et linéarité de l'espérance, on en déduit $\mathbb{E}(X^2) \leq (a+b)\mathbb{E}(X) - ab$ et donc, en utilisant la formule de Koenig-Huygens

$$\begin{aligned} V(X) &\leq (a+b)\mathbb{E}(X) - ab - \mathbb{E}(X)^2 = -\left(\mathbb{E}(X) - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - ab \\ &= -\left(\mathbb{E}(X) - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

On a donc $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Compte tenu de l'expérience modélisée, on peut affirmer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

De plus, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, si l'événement $(X = k)$ est réalisé, il y a $n - k$ questions pour lesquelles l'étudiant répond au hasard avec une probabilité $1/4$ de réussir

$$\mathbb{P}(Y = j \mid X = k) = \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j} \quad \text{avec } j \in \llbracket 0; n-k \rrbracket$$

- ① La variable Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'événement $(Z = k)$ peut être décomposé en la réunion disjointe des événements

$$(X = j, Y = k - j) \text{ avec } j \in \{0, 1, \dots, k\}$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(X = j, Y = k - j)$$
 Par probabilité composées

$$\mathbb{P}(X = j, Y = k - j) = \mathbb{P}(Y = k - j \mid X = j) \mathbb{P}(X = j)$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{j=0}^k \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-j} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Or

$$\binom{n-j}{k-j} \binom{n}{j} = \frac{n!}{(k-j)!(n-k)!j!} = \binom{k}{j} \binom{n}{k}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{4}(1-p)\right)^{k-j} p^j$$

Par la formule du binôme

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}(1-p) + p\right)^k$$

On simplifie

$$\mathbb{P}(Z = k) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \text{ avec } q = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}p$$

- ② On a alors

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{(3p+1)n}{4} \text{ et } V(Z) = \frac{3n(3p+1)(1-p)}{16}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

Comme les variables aléatoires sont à valeurs strictement positives, le quotient est bien défini et c'est une variable aléatoire. Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right) = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1 + \dots + X_n}\right).$$

Montrons que toutes les espérances qui interviennent dans la somme sont égales. Il suffit pour cela de montrer que les variables $Y_i = \frac{X_i}{X_1 + \dots + X_n}$ ont même loi. Si f est l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ définie par $f(t_1, \dots, t_n) = \frac{t_1}{t_1 + \dots + t_n}$, on a :

$$Y_i = \underbrace{f(X_i, X_2, \dots, X_1, \dots, X_n)}_{X_1 \text{ à la } i\text{-ème place}} = f(Z_i) \text{ avec } Z_i = (X_i, X_2, \dots, X_1, \dots, X_n)$$

Il suffit donc de montrer que toutes les variables Z_i ont même loi. On conclura alors que toutes les variables Y_i ont même loi. Soit E l'ensemble des valeurs prises par X_1 et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_i = (x_1, \dots, x_n)) &= \mathbb{P}(X_i = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2) \dots \mathbb{P}(X_1 = x_i) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = x_1) \mathbb{P}(X_2 = x_2) \dots \mathbb{P}(X_i = x_i) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_1 = (x_1, \dots, x_n)), \end{aligned}$$

car X_1 et X_i ont même loi. Ainsi, Z_i a même loi que Z_1 . On a donc $\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right) = k\mathbb{E}(Y_1)$. Mais pour $k = n$, le quotient vaut 1, donc $n\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et, finalement, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Chacune des n voitures a la probabilité $p = 1/3$ de choisir le premier péage. Dès lors, la variable aléatoire X_1 peut se comprendre comme étant le nombre de succès dans une série de n épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p de réussir. La variable X_1 suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 1/3$.

- ② $V(X_1) = np(1-p) = 2n/9$ et $V(X_2) = 2n/9$ car X_1, X_2, X_3 suivent les mêmes lois. Puisque $X_1 + X_2 = n - X_3$, $V(X_1 + X_2) = V(n - X_3) = V(X_3) = 2n/9$. Sachant

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2\text{Cov}(X_1, X_2) + V(X_2)$$

on obtient

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = -n/9$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Commençons par utiliser la formule des probabilités totales. Pour tout x ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_N = x) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_N = x \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = x \mid N = k) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = x) \mathbb{P}(N = k) \end{aligned}$$

en utilisant que les variables S_k et N sont indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_N) &= \sum_x x \mathbb{P}(S_N = x) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_x x \mathbb{P}(S_k = x) \mathbb{P}(N = k) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(S_k) \mathbb{P}(N = k) \end{aligned}$$

Or, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(S_k) = k\mathbb{E}(X_1)$,

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N).$$

Après calculs, on obtient en utilisant l'indépendance :

$$\mathbb{E}(S_N^2) = \sum_{k=0}^n \left(k\mathbf{V}(X_1) + k^2\mathbb{E}(X_1)^2 \right) \mathbb{P}(N = k) = \mathbb{E}(N)\mathbf{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbb{E}(N^2)$$

En conclusion, $\mathbf{V}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbf{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbf{V}(N)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

Notons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, A_k l'événement «la boule de numéro k est tirée». La variable X est alors égale à $X = \sum_{k=1}^n k \mathbb{1}_{A_k}$.

Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(A_k)$.

D'après l'hypothèse d'uniformité, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{2}{n}$ pour tout k donc $\mathbb{E}(X) = n + 1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Montrons que la variance de $X - Y$ est nulle.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X - Y) &= \mathbb{E}((X - Y)^2) - (\mathbb{E}(X - Y))^2 \\ &= \mathbb{E}((X - Y)(X - Y)) - (\mathbb{E}(X - Y))^2 \\ &= \mathbb{E}((X - Y)X) - \mathbb{E}((X - Y)Y) - (\mathbb{E}(X - Y))^2 \\ &= \mathbb{E}(X - Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X - Y)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(X - Y))^2 \\ &= (\mathbb{E}(X - Y))^2 - (\mathbb{E}(X - Y))^2 = 0. \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

Notons $\Delta_{i,j}$ le cofacteur correspondant au terme en position i, j . Développons par rapport à la première ligne $\det M = \sum_{j=1}^n X_{1,j} \Delta_{1,j}$ puis passons à l'espérance

$$\mathbb{E}(\det M) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_{1,j} \Delta_{1,j}\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{1,j} \Delta_{1,j})$$

La variable $\Delta_{1,j}$ s'écrit comme somme et produits de $X_{i,k}$, avec $i \geq 2$ et $k \neq j$. Ce sont toutes des variables aléatoires indépendantes de $X_{1,j}$. Donc $X_{1,j}$ et $\Delta_{1,j}$ sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{E}(\det M) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_{1,j}) \mathbb{E}(\Delta_{1,j})$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_{1,j}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, donc $\mathbb{E}(\det M) = 0$.

↪ retour à l'EXERCICE 19

Correction de l'EXERCICE 20 Fonction génératrice

- ① La fonction g_X est une fonction polynomiale dont les coefficients sont les $\mathbb{P}(X = k)$. La donnée de g_X détermine donc les $\mathbb{P}(X = k)$, c'est-à-dire la loi de X .

- ② Pour tout réel t :

$$g_{X_1+X_2}(t) = \mathbb{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1}t^{X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1})\mathbb{E}(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$$

car les variables t^{X_1} et t^{X_2} sont indépendantes (fonctions de variables indépendantes).

- ③ Si X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) , on a , pour tout t , d'après la formule de transfert :

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^n t^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + 1 - p)^n$$

Si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes suivant les lois binomiales de paramètre (n, p) et (n_2, p) , on a, pour tout réel t :

$$g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = (pt + 1 - p)^{n_1} (pt + 1 - p)^{n_2} = (pt + 1 - p)^{n_1+n_2}$$

On reconnaît la fonction génératrice de la loi binomiale de paramètre $(n_1 + n_2, p)$. D'après la question 1, la variable $X_1 + X_2$ suit la loi binomiale de paramètre $(n_1 + n_2, p)$.

↪ retour à l'EXERCICE 20

Correction de l'EXERCICE 21 Promenade aléatoire dans $\mathbb{N}$

- ① 1. Un calcul immédiat donne $\mathbb{E}(X_1) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{5}{2}$ et donc $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{4}$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit $\mathbb{E}(S_n) = \frac{3n}{2}$. Comme les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{n}{4}$. 2. (a) Soit $n \geq 1$. Par définition, on a $Y_n \geq 1$. Comme $S_n \geq n$, on a $Y_n \leq n$: l'ensemble des valeurs prises par Y_n est inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. (b) Soit $n \geq 2$. On considère le système complet d'événements $(\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 2\})$. Pour $k \geq 2$, on pose $T_k = S_k - X_1 = \sum_{i=2}^k X_i$. Dans la suite on fait la convention que $T_i = 0$ si $i \leq 1$ et $S_i = 0$ si $i \leq 0$. Par définition de Y_n , on a, pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \{Y_n = k\} \cap \{X_1 = 1\} &= \{S_k \geq n\} \cap \{S_{k-1} < n\} \cap \{X_1 = 1\} \\ &= \{T_k \geq n-1\} \cap \{T_{k-1} < n-1\} \cap \{X_1 = 1\} \end{aligned}$$

D'après le lemme des coalitions, X_1 est indépendante du couple (T_{k-1}, T_k) , donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k, X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1) \mathbb{P}(T_k \geq n-1, T_{k-1} < n-1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(T_k \geq n-1, T_{k-1} < n-1) \end{aligned}$$

Les variables X_i sont indépendantes et de même loi, donc $U_k = (X_2, \dots, X_k)$ a même loi que $V_k = (X_1, \dots, X_{k-1})$. On note f_k l'application de $\mathbb{R}^{k-1}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1} \quad f_k(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1 + \dots + x_{k-1}, x_1 + \dots + x_{k-2})$$

On a alors $(T_k, T_{k-1}) = f(U_k)$ et $(S_{k-1}, S_{k-2}) = f(V_k)$. De $U_k \sim V_k$, on déduit, d'après la proposition 11 de la page 1092, $(T_k, T_{k-1}) \sim (S_{k-1}, S_{k-2})$. On a donc :

$$\mathbb{P}(T_k \geq n-1, T_{k-1} < n-1) = \mathbb{P}(S_{k-1} \geq n-1, S_{k-2} < n-1) = \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$$

On a donc $\mathbb{P}(Y_n = k, X_1 = 1) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1)$. On montre de la même manière que $\mathbb{P}(Y_n = k, X_1 = 2) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)$. Comme $(\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 2\})$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n = k) &= \mathbb{P}(Y_n = k, X_1 = 1) + \mathbb{P}(Y_n = k, X_1 = 2) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1) \end{aligned}$$

(c) Pour la simplicité, on écrit $\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Y_n = k)$, en ajoutant éventuellement des termes nuls. En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_n) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(Y_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = k-1)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) (\mathbb{P}(Y_{n-1} = j) + \mathbb{P}(Y_{n-2} = j))\end{aligned}$$

En supprimant des termes nuls et en séparant en deux sommes, on en déduit :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1) \mathbb{P}(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-2} (j+1) \mathbb{P}(Y_{n-2} = j)$$

ce qui, par la formule de transfert et la linéarité de l'espérance, donne :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1} + 1) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2} + 1) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

(d) On a, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(Y_{n-2}) - na + 1 \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-2} + \frac{(n-1)a}{2} + \frac{(n-2)a}{2} - na + 1 \\ &= \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-2} + \frac{2-3a}{2}.\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux si, et seulement si, $2 - 3a = 0$ c'est-à-dire $a = \frac{2}{3}$, ce que nous supposons désormais. L'équation caractéristique est alors $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$, de racines 1 et $-\frac{1}{2}$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. La variable aléatoire Y_0 est égale à 0 donc $\mathbb{E}(Y_0) = 0$ et $u_0 = 0$. La variable Y_1 est égale à 1, donc $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et $u_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Des valeurs de u_0 et u_1 , on tire $\lambda = \frac{2}{9}$ et $\mu = -\frac{2}{9}$. Ainsi pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{2n}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22 Inégalité de Bernstein

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)