

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE MATEMÁTICA: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MÁRCIO ROSTIROLLA ADAMES

Geometria Esférica

Florianópolis - SC

Novembro - 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE MATEMÁTICA: LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MÁRCIO ROSTIROLLA ADAMES

Geometria Esférica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Celso M. Doria

Florianópolis - SC

Novembro - 2005

Agradecimentos

Louvado seja o nome do Senhor, Ele é a minha força e o meu escudo, e a Ele devo este trabalho.

Agradeço aos meus pais Vitor e Yara pela oportunidade de me dedicar aos meus estudos e apoio e incentivo em tudo o que faço, a minha vó Elça por também me apoiar e incentivar.

A Jhuliane pelo carinho e a compreensão, nos finais de semana que fiquei pesquisando e estudando.

Agradeço ao meu orientador, o professor Celso M. Doria, pela ajuda, pelo material que ele escreveu sobre o assunto, pela paciência nos momentos de dificuldade que eu tive no início do trabalho, pelos conselhos e a amizade.

Agradeço a todos os amigos que dedicaram seu tempo para me ajudar com a elaboração e a correção: Antonio João; Jonatam; Maicon e Roberto. Novamente, agradeço a minha mãe Yara pela grande ajuda na correção.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar os objetos geométricos intrínsecos à esfera, usando o conceito de geodésica e, através deste, aplicar os conceitos Euclidianos de ângulo, comprimento e área para: calcular distâncias entre pontos da esfera; definir triângulos esféricos; encontrar relações métricas nos triângulos esféricos que relacionem comprimentos dos lados e ângulos entre os lados; discutir se os casos de congruências de triângulos no plano também valem na esfera; e calcular a área dos triângulos esféricos.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos básicos	4
2 Resultados fundamentais	13
2.1 A esfera	13
2.2 Sistemas de coordenadas na Esfera	14
2.2.1 Coordenadas Cartesianas	14
2.2.2 Coordenadas Esféricas	15
2.3 O comprimento de uma curva na esfera	20
2.4 A área de uma região $\Omega \subset S_\rho^2$	21
2.5 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^3	22
2.5.1 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^2	22
2.5.2 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^3	25
3 Distância e Área	29
3.1 Geodésicas de S_ρ^2	29
3.2 O ângulo entre dois vetores em S_ρ^2	31
3.3 Triângulos	36
3.3.1 Área de um gomo esférico	36
4 Geometria da esfera	38
4.1 Trigonometria esférica	38
4.2 Áreas de triângulos esféricos	57

Introdução

Por motivos astrológicos, religiosos, agrícolas e outros, nossos antepassados tentaram entender o movimento dos corpos celestes (estrelas, planetas, sol e lua) no céu (abóboda celeste), o qual acreditavam ser esférico, como vemos nos antigos textos abaixo:

*“Sim, naturalmente vãos foram todos os homens que ignoraram a Deus e que partindo dos bens visíveis, não foram capazes de conhecer Aquele que é, nem, considerando as obras, de reconhecer o Artífice. Mas foi o fogo, ou o vento, ou o ar sutil, ou a **abóboda estrelada**, ou a água impetuosa, ou os luzeiros do céu, príncipes do mundo, que eles consideraram como deuses!”*

Sabedoria de Salomão, capítulo 13 versículos 1 e 2

E

“Você, Rei Gelon, tem conhecimento que o “universo” é o nome dado pela maioria dos astrônomos para a esfera, o centro da qual é o centro da Terra, enquanto seu raio é igual a linha reta entre o centro do Sol e o centro da Terra. Isto é senso comum como você tem ouvido dos astrônomos.”

Carta de Arquimedes para o Rei Gelon, cerca de 220 A.C.

Eles usaram seus conhecimentos dos astros para se localizar quando navegavam longas distâncias e em tentativas para entender a forma da Terra, mas para isso precisavam compreender as relações entre as distâncias sobre esferas. Assim, a geometria esférica pode ser considerada a primeira geometria não-Euclideana, a qual se desenvolveu nos campos da navegação e da astronomia.

“... será rapidamente visto quanto espaço há entre dois lugares na circunferência de um grande círculo, o qual é desenhado através deles em volta da Terra. ... nós garantimos que foi demonstrado por matemáticos que a superfície da terra e água é em sua totalidade uma esfera, ... e que qualquer plano o qual passa pelo centro faz na sua superfície, isto é, na superfície da terra e no céu, grandes círculos, e que os ângulos dos planos, ângulos os quais estão no centro, cortam as circunferências dos círculos os quais eles interceptam proporcionalmente, ...”

Claudius Ptolemaeus, *Geographia* (150 DC), Livro Um, capítulo II

A pelo menos 2000 anos tem-se o conhecimento de que a Terra é (quase) uma esfera e que as distâncias mais curtas entre dois pontos na superfície do nosso planeta são segmentos de círculos máximos. Em Aristóteles podemos encontrar evidências que a geometria esférica era estudada até mesmo antes de Euclides, e este, no seu trabalho sobre astronomia, *Phaenomena*, discute proposições da geometria esférica. Menelau, um grego do primeiro século DC, publicou o livro *Sphaerica*, o qual contém muitos teoremas sobre triângulos esféricos e compara estes aos triângulos no plano.

Até o século 19, a geometria esférica se desenvolveu quase que somente nos campos da navegação e da astrologia e foi utilizada por navegadores, por agrimensores e por Brahe e Kepler no estudo do movimento de estrelas e planetas.

Neste trabalho alcançaremos alguns resultados da geometria esférica. Para isso, no capítulo 1 enunciaremos alguns conceitos e demonstraremos teoremas do cálculo, da álgebra linear e de análise; no capítulo 2 desenvolveremos as ferramentas básicas para estudar a esfera; no capítulo 3 calcularemos a distância entre dois pontos sobre uma esfera e definiremos triângulos esféricos; e no capítulo 4 veremos resultados equivalentes, na esfera, ao Teorema de Pitágoras, à lei dos senos, à lei dos cossenos, aos casos de congruência de triângulos e a área de triângulos esféricos.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Definição 1.1. *Seja V um conjunto onde está definida uma operação $+: V \times V \rightarrow V$, $+(x, y) = x + y$ e para cada número real λ está definida uma operação $\lambda: V \rightarrow V$, $\lambda(x) = \lambda \cdot x$. V é um espaço vetorial real se os seguintes axiomas são satisfeitos*

1. $x + y = y + x$ para quaisquer $x, y \in V$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ para quaisquer $x, y, z \in V$.
3. Existe um elemento $0 \in V$ tal que, para todo $x \in V$, $x + 0 = x$.
4. Para cada $x \in V$ existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.
5. $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $x, y \in V$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in V$.
7. $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta \cdot x)$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x \in V$.
8. $1 \cdot x = x$ para todo $x \in V$.

Da definição temos que \mathbb{R}^n munido com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial real.

Definição 1.2. *Uma função L de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W é chamada transformação linear se para quaisquer $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares*

$$L(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot L(u) + \beta \cdot L(v). \quad (1.1)$$

Notação. Seja A uma matriz, denotamos por a_j a j -ésima coluna da matriz A e por e_j o j -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.1 (Teorema da representação matricial das transformações lineares). *Se L é uma transformação linear de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m , então existe uma matriz $A_{m \times n}$ tal que*

$$L(x) = Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e o j -ésimo vetor coluna da matriz A é dado por

$$a_j = L(e_j) \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração 1.1. *Para $j = 1, 2, \dots, n$ defina*

$$a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t = L(e_j).$$

Seja

$$A = (a_{ij}) = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Se

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n$$

é um elemento arbitrário de \mathbb{R}^n , temos

$$\begin{aligned} L &= x_1 \cdot L(e_1) + x_2 \cdot L(e_2) + \dots + x_n \cdot L(e_n) = \\ &= x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notação. Seja A uma matriz $n \times m$. Denotamos por M_{ij}^A a matriz $(n-1) \times (m-1)$ formada pelos elementos da matriz A exceto aqueles na i -ésima linha e aqueles na j -ésima coluna. Omitiremos o sobrescrito 'A' quando não houver perigo de confusão.

Teorema 1.2. Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(A^t) = \det(A)$

Demonstração 1.2. Vamos demonstrar por indução em n . O resultado é válido para $n = 1$, já que uma matriz 1×1 é necessariamente simétrica. Suponha que o resultado é válido para todas as matrizes $k \times k$ e que A é uma matriz $(k+1) \times (k+1)$. Expandindo $\det(A)$ em relação à primeira linha, obtemos

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \dots + (-1)^{k+1}a_{1(k+1)}\det(M_{1(k+1)}).$$

Como as matrizes M_{ij} são todas $k \times k$, pela hipótese de indução temos que

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}^t) - a_{12}\det(M_{12}^t) + \dots + (-1)^{k+1}a_{1(k+1)}\det(M_{1(k+1)}^t) = \det(A^t).$$

■

Definição 1.3. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície de \mathbb{R}^3 . O plano tangente a $p \in \Omega$ é o conjunto

$$T_p U = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \gamma: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U, \gamma(0) = p \text{ e } \gamma'(0) = v\}.$$

Denotamos por $T_x \Omega$ o plano tangente a superfície Ω no ponto $x \in \Omega$.

Seja $\gamma \subset \Omega$ uma curva, Ω uma superfície e $\vec{u} \in T_x \Omega$. Denotamos por $d\gamma_x \cdot u$ o vetor tangente a γ , no ponto x , na direção de \vec{u} .

Definição 1.4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $V \subset \mathbb{R}^m$, uma aplicação $f: U \rightarrow V$ é diferenciável se, para todo $p \in U$ e $v \in T_p U$, existe uma transformação linear $df_p: T_p U \rightarrow T_{f(p)} V$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\|y - x\| < \delta$, $y \in V$ implica em

$$\|f(y) - f(x) - df_x(y - x)\| < \epsilon \|y - x\|.$$

Seja $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$, na base canônica,

temos

$$df_p \cdot v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Assim uma base para o subespaço gerado pela imagem de f é $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}$.

Teorema 1.3. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. Se cada uma das derivadas parciais $\partial f_j / \partial x_i$ existe e é contínua em A , então f é diferenciável em A .*

Demonstração 1.3. *Seja df_x a matriz Jacobiano. Precisamos provar que, com $x \in A$ fixo, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $\|y - x\| < \delta$, $y \in A$ implica em*

$$\|f(y) - f(x) - df_x(y - x)\| < \varepsilon \|y - x\|.$$

Para demonstrarmos isso basta provar para cada componente de f separadamente (pois, se isso ocorre em cada componente, basta escolhermos um δ_0 tal que, em cada componente $\|f_i(y) - f_i(x) - df_{i,x}(y - x)\| < \varepsilon / \sqrt{m} \cdot \|y - x\|$, assim $\|f(y) - f(x) - df_x(y - x)\| < \varepsilon \|y - x\|$). Desta forma podemos supor $m = 1$, assim

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, y_2, \dots, y_n) + f(x_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\quad - f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) + f(x_1, x_2, y_3, \dots, y_n) - f(x_1, x_2, x_3, y_4, \dots, y_n) \\ &\quad + \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, y_n) - f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Como A é aberto podemos reduzir δ para obtermos uma região convexa. Portanto, pelo teorema do valor médio, temos

$$f(y_1, \dots, y_n) - f(x_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n)(y_1 - x_1)$$

para algum u_1 entre x_1 e y_1 . Podemos escrever expressões similares para os outros termos, o que nos dá

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, u_2, y_3, \dots, y_n)(y_2 - x_2) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, u_3, y_4, \dots, y_n)(y_3 - x_3) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, u_n)(y_n - x_n). \end{aligned}$$

Como $df_x(y - x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)(y_i - x_i)$, usando a desigualdade triangular e o

fato que $|y_i - x_i| \leq \|y - x\|$, temos

$$\|f(y) - f(x) - df_x(y - x)\| \leq \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, y_2, \dots, y_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \|y - x\| \right. \\ \left. + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, u_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \right\} \|y - x\|.$$

Já que os termos $\partial f / \partial x_i$ são contínuos e u_i está entre y_i e x_i , existe $\delta > 0$ tal que, o termo entre chaves é menor que ϵ para $\|y - x\| < \delta$, o que demonstra o teorema.

■

Definição 1.5. A aplicação $f: U \rightarrow V$ é um difeomorfismo se $f: U \rightarrow f(U)$ for bijetora, diferenciável e a aplicação inversa $f^{-1}: f(U) \rightarrow U$ for diferenciável.

Teorema 1.4 (Teorema da função inversa (TFI)). Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável com derivada df contínua. Seja $x_0 \in A$ e suponha que $df(x_0)$ é invertível. Então existe uma vizinhança $U \subset A$ aberta de x_0 e uma vizinhança aberta W de $f(x_0)$ tal que $f(U) = W$, a restrição de f para U é invertível e a inversa $f^{-1}: W \rightarrow U$ é derivável, com derivada contínua. Além disso, para $y \in W$ e $x = f^{-1}(y)$, temos

$$df^{-1}(y) = [df(x)]^{-1}.$$

Se existem as primeiras p derivadas de f e são contínuas, $p \geq 1$, então existem as primeiras p derivadas de f^{-1} e elas são contínuas.

Demonstração 1.4. A demonstração deste pode ser encontrada em [2].

Definição 1.6. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ e $f: U \rightarrow V$ uma aplicação diferenciável e $p \in U$.

1. Se $n < m$ e $\text{posto}(df_p) = n$ dizemos que f é uma imersão em p . Se para todo $p \in U$, f é uma imersão em p , então dizemos que f é uma imersão.
2. Se $n > m$ e $\text{posto}(df_p) = m$ dizemos que f é uma submersão em p . Se f é uma submersão em p para todo $p \in U$, então dizemos que f é uma submersão.

Teorema 1.5 (Teorema da forma local das imersões). *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}^3$ abertos e $f: U \rightarrow V$ uma imersão. Então, existem abertos $U' \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^2$, $p \in U'$ e um difeomorfismo $\phi: W \rightarrow U'$ tal que a composição $f \circ \phi: W \rightarrow V$ é dada por*

$$f \circ \phi(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \phi(x_1, x_2)). \quad (1.2)$$

Demonstração 1.5. *Seja*

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), f_3(x_1, x_2))$$

então

$$df_{(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Como f é uma imersão, $\text{posto}(df_p) = 2$, uma das seguintes matrizes é não singular

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que seja a primeira (análogo para os outros casos). Ao considerarmos a aplicação $g: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como $g(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, concluímos que dg_p é não singular. Portanto, pelo Teorema da função inversa, existem $U' \subset U$ vizinhança de p e $V' \subset V$ vizinhança de $f(p)$, tais que $g: U' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo. Seja $\Phi = g^{-1}: V' \rightarrow U'$; ao denotarmos $u = f_1(x_1, x_2)$, $v = f_2(x_1, x_2)$ e $\phi_1(u, v) = f_3 \circ \Phi(u, v)$ concluímos que

$$f \circ \Phi: V' \rightarrow U' \quad f \circ \Phi(u, v) = (u, v, \phi_1(u, v)). \quad \blacksquare$$

Definição 1.7. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície. Dizemos que uma curva $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ liga $p, q \in \Omega$ se $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ e γ é diferenciável em $[a, b]$.*

Definição 1.8. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, uma curva*

que liga $p, q \in \mathbb{R}^3$. O comprimento de γ é:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma', \gamma' \rangle} dt. \quad (1.3)$$

Definição 1.9. Definimos a distância d entre dois pontos $p, q \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ como :

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma_\lambda) \mid \gamma_\lambda \text{ é uma curva que liga } p \text{ e } q\}. \quad (1.4)$$

Se existe uma curva $\lambda \subset \Omega$ que minimiza a distância entre dois pontos dizemos que λ é uma geodésica.

Definição 1.10. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Um difeomorfismo $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ é dito ser uma isometria $d(u, v) = d(\phi(u), \phi(v))$.

Teorema 1.6. Um difeomorfismo $\phi: \Omega \rightarrow \Omega$ é uma isometria se e somente se

$$\langle (d\phi)_p.u, (d\phi)_p.v \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Demonstração 1.6. Suponha que $\langle (d\phi)_p.u, (d\phi)_p.v \rangle = \langle u, v \rangle$. Sejam $A = \{\gamma_k \mid \gamma_k \text{ uma curva ligando } p \text{ e } q\}$ e $B = \{\beta_k \mid \beta_k \text{ uma curva ligando } \phi(p) \text{ e } \phi(q)\}$.

Se γ_0 a curva que minimiza a distância entre p e q , então $\beta_0 = \phi \circ \gamma_0$ liga $\phi(p)$ e $\phi(q)$ (pois ϕ é um difeomorfismo, logo β_0 é diferenciável; além disso $\beta_0(a) = \phi \circ \gamma_0(a) = \phi(p)$ e $\beta_0(b) = \phi \circ \gamma_0(b) = \phi(q)$). Mas

$$\begin{aligned} L(\gamma_0) &= \int_a^b \sqrt{\langle \gamma_0', \gamma_0' \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\langle (d\phi)_{\gamma_0(t)} \cdot \gamma_0', (d\phi)_{\gamma_0(t)} \cdot \gamma_0' \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle \beta_0', \beta_0' \rangle} dt. = L(\beta_0). \end{aligned}$$

Assim $\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in A\} \geq \inf\{L(\beta) \mid \beta \in B\}$.

Se β_1 a curva que minimiza a distância entre $\phi(p)$ e $\phi(q)$, então $\gamma_1 = \phi^{-1} \circ \beta_1$ liga p e q (pois ϕ^{-1} é um difeomorfismo, logo γ_1 é diferenciável; além disso $\gamma_1(a) =$

$\phi^{-1} \circ \beta_1(a) = \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma(a) = p$ e $\gamma_1(b) = \phi^{-1} \circ \beta_1(b) = \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma(b) = q$. Mas

$$\begin{aligned} L(\beta_1) &= \int_a^b \sqrt{\langle \beta_1', \beta_1' \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\langle (d\phi^{-1})_{\beta_1(t)} \cdot \beta_1', (d\phi^{-1})_{\beta_1(t)} \cdot \beta_1' \rangle} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\langle \gamma_1', \gamma_1' \rangle} dt = L(\gamma_1). \end{aligned}$$

Assim $\inf\{L(\beta)|\beta \in B\} \geq \inf\{L(\gamma)|\gamma \in A\}$.

Portanto $\inf\{L(\gamma)|\gamma \in A\} = \inf\{L(\beta)|\beta \in B\}$, então $d(p, q) = d(\phi(p), \phi(q))$.

Agora suponhamos que ϕ é uma isometria. Então usando a métrica usual de \mathbb{R}^3 temos

$$d(p, q) = d(\phi(p), \phi(q)) \Rightarrow \sqrt{\| \langle (d\phi)_p \cdot u, (d\phi)_p \cdot v \rangle \|^2} = \sqrt{\| \langle u, v \rangle \|^2}$$

Então, usando que $\langle v, v \rangle \geq 0$, temos

$$\langle (d\phi)_p \cdot u, (d\phi)_p \cdot v \rangle = \langle u, v \rangle . \quad \blacksquare$$

Definição 1.11. O ângulo entre duas curvas γ_1 e γ_2 num ponto $x_0 \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ é o ângulo entre $\gamma_1'(x_0)$ e $\gamma_2'(x_0)$

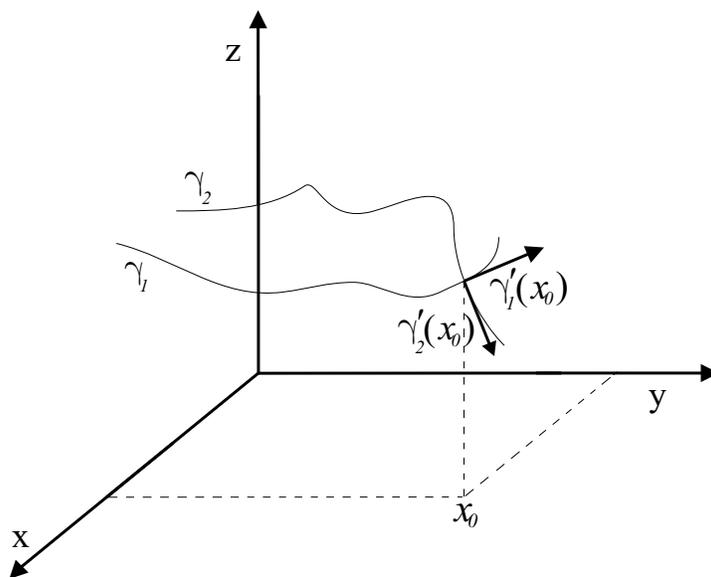


Figura 1.1: Intersecção entre duas curvas

Definição 1.12. A área de uma superfície $K \subset \mathbb{R}^3$ com equação $z = f(x, y)$, onde $(x, y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas é

$$A(K) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 + 1} dx dy. \quad (1.5)$$

Definição 1.13. Seja $\phi: V \rightarrow \mathbf{R}$, o suporte de ϕ em V é o fecho do subconjunto de V no qual ϕ é diferente de zero.

Dizemos que ϕ tem suporte compacto se toda família λ de conjuntos abertos que contém o suporte de ϕ , admite uma família finita $\lambda_0 \subset \lambda$ tal que λ_0 contém o suporte de ϕ .

Teorema 1.7. Sejam $V \subset \mathbf{R}^n$, $\phi: V \rightarrow \mathbf{R}$ contínua que tem suporte compacto, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ diferenciável e $U = f(V)$, então:

$$\int_U \phi \circ f(x) |Df(x)| dx = \int_V \phi(y) dy. \quad (1.6)$$

Demonstração 1.7. A demonstração pode ser encontrada em [2].

Capítulo 2

Resultados fundamentais

2.1 A esfera

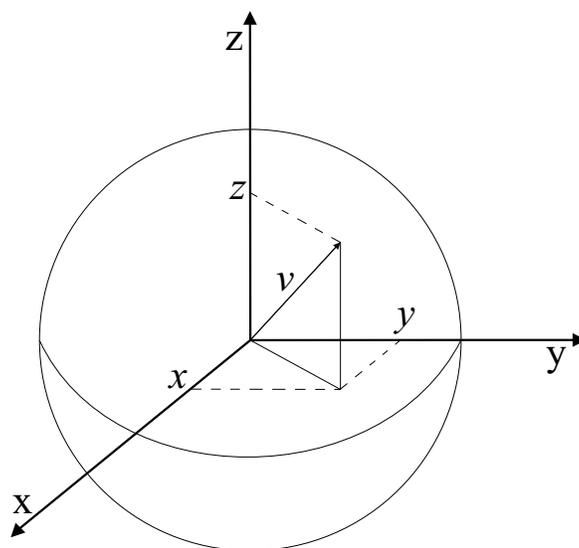


Figura 2.1: A esfera

Definição 2.1. A esfera de raio ρ , com centro na origem de \mathbb{R}^3 é o conjunto S_ρ^2

$$S_\rho^2 = \{v \in \mathbb{R}^3; |v| = \rho\}. \quad (2.1)$$

Seja $v \in \mathbb{R}^3, v = (x, y, z)$, então $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, assim S_ρ^2 é o conjunto das soluções da equação $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

2.2 Sistemas de coordenadas na Esfera

Quando definimos um sistema de coordenadas sobre uma superfície, precisamos mostrar que existe um difeomorfismo entre este sistema de coordenadas e um aberto de \mathbb{R}^2 , para que as definições de derivada e de integral usualmente utilizadas façam sentido.

2.2.1 Coordenadas Cartesianas

Sejam $B_1 = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid w < \rho\}$ a bola aberta e (B_1, ϕ_i) , com $i = 1, \dots, 6$ o sistema de coordenadas locais definidas assim:

$$\begin{aligned} \phi_1: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_1(x, y) &= (x, y, \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}); \\ \phi_2: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_2(x, y) &= (x, y, -\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}); \\ \phi_3: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_3(y, z) &= (\sqrt{\rho^2 - y^2 - z^2}, y, z); \\ \phi_4: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_4(y, z) &= (-\sqrt{\rho^2 - y^2 - z^2}, y, z); \\ \phi_5: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_5(y, z) &= (x, \sqrt{\rho^2 - x^2 - z^2}, z); \\ \phi_6: B_1 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \phi_6(y, z) &= (x, -\sqrt{\rho^2 - x^2 - z^2}, z). \end{aligned}$$

Os outros mapeamentos levam B_1 em outros hemisférios.

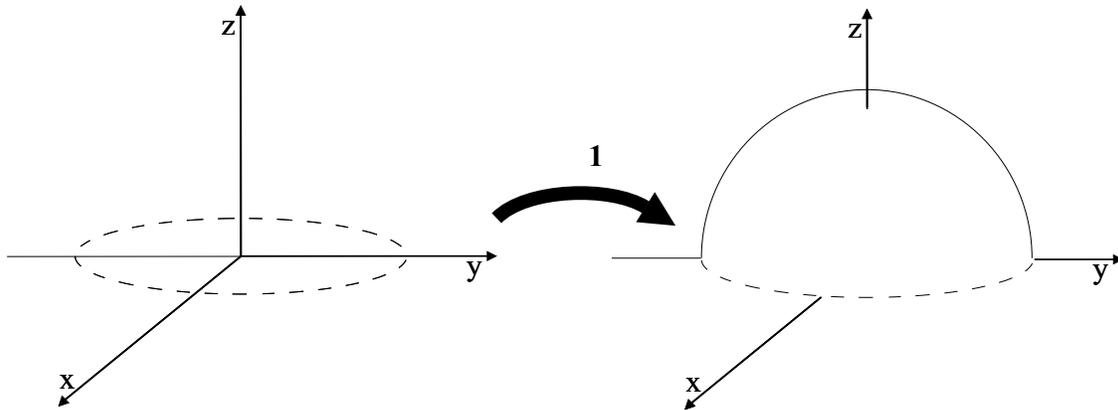


Figura 2.2: ϕ_1 é uma transformação da bola aberta em um hemisfério

Segue que

1. $S^2 = \bigcup_{i=1}^6 \phi_i(B_1)$.

2. $\phi_i: B_1 \rightarrow IM(\phi_i)$ é bijetora para todo i , de fato ϕ_i é sobrejetora pois toda função cujo contra-domínio é igual a sua imagem é sobrejetora, para mostrar que ϕ_i é injetora vamos provar o caso ϕ_1 , os outros são análogos. $\phi_1(x, y) = \phi_1(x', y') \Rightarrow (x, y, \sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}) = (x', y', \sqrt{\rho^2 - x'^2 - y'^2}) \Rightarrow (x, y) = (x', y')$.
3. ϕ_1 é um difeomorfismo entre B_1 e a sua imagem $\phi_1(B_1)$. De fato

$$d\phi_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{posto}(d\phi_1(x, y)) = 2 \quad \forall (x, y) \in B_1.$$

Portanto, pelo Teorema da forma local das imersões, ϕ_1 é um difeomorfismo. Analogamente as outras aplicações ϕ_i também são difeomorfismos.

4. Decorre do item anterior que as aplicações de transição $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}: B_1 \rightarrow B_1$ são difeomorfismos.

Dos itens acima, temos difeomorfismos do plano em S_ρ^2 . Ao supormos que $p = (x, y, z) \in \phi_1(B_1)$ uma base para o plano tangente à S_ρ^2 , em p , é $\beta\{e_1, e_2\}$ onde

$$e_1 = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}} \right) \quad \text{e} \quad e_2 = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}} \right).$$

2.2.2 Coordenadas Esféricas

É habitual associarmos a cada ponto p de \mathbb{R}^3 uma tripla (x, y, z) , onde x é a projeção de p sobre o eixo x , y é a projeção de p sobre o eixo y , e z é a projeção de p sobre o eixo z , que chamamos de coordenadas de p . Na definição de esfera associamos a cada ponto p as coordenadas (x, y, z) , contudo é mais conveniente associarmos aos pontos da esfera uma tripla (ρ, θ, ψ) definida assim:

ρ é a distância de p à origem.

θ é o ângulo, medido em radianos, entre a projeção de \vec{op} sobre o plano- xy e o eixo- x .

ψ é o ângulo, medido em radianos, entre \vec{op} e o eixo- z .

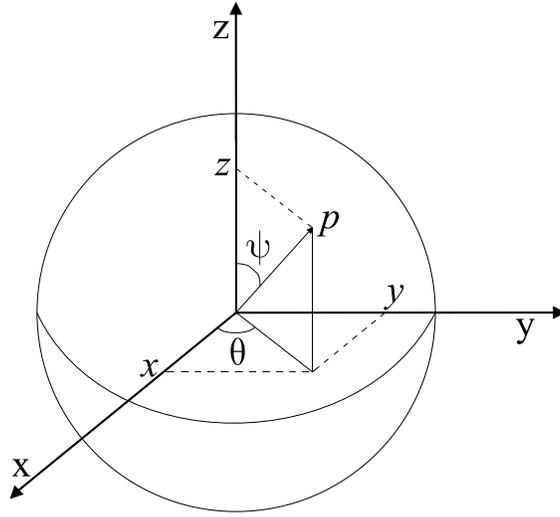


Figura 2.3: Coordenadas esféricas

O ângulo θ é denominado longitude de p , e o ângulo ψ é denominado latitude de p .

$$x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\psi, \quad y = \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi, \quad z = \rho \cdot \cos\psi. \quad (2.2)$$

Assim definimos uma aplicação $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$F(\rho, \theta, \psi) = (\rho \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\psi, \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi, \rho \cdot \cos\psi). \quad (2.3)$$

Observamos que F não é bijetora, pois

$$F(0, \theta, \psi) = (0, 0, 0), \quad \forall (\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

$$F(\rho, 0, \psi) = F(\rho, 2\pi, \psi), \quad \text{para um dado } \rho \text{ e } \forall \psi \in [0, \pi].$$

$$F(\rho, \theta, 0) = (0, 0, \rho), \quad \text{e } F(\rho, \theta, \pi) = (0, 0, -\rho), \quad \text{para um dado } \rho \text{ e } \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Teorema 2.1. *Ao restringirmos F à $F: (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtemos um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) | x \geq 0\}$.*

Demonstração 2.1. *Vamos provar que*

$F: (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) | x \geq 0\}$ *é injetora.*

$$\text{De fato } F(\rho_1, \theta_1, \psi_1) = F(\rho_2, \theta_2, \psi_2) \Rightarrow$$

$$(\rho_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1, \rho_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1, \rho_1 \cdot \cos\psi_1) = (\rho_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2, \rho_2 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2, \rho_2 \cdot \cos\psi_2) \Rightarrow$$

$$1. \quad \rho_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1 = \rho_2 \cdot \cos\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2.$$

$$2. \rho_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1 = \rho_2 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2.$$

$$3. \rho_1 \cdot \text{cos}\psi_1 = \rho_2 \cdot \text{cos}\psi_2.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados e somando as três equações temos:

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2. \text{ Pois } \rho_1, \rho_2 > 0.$$

Da equação três temos:

$\rho_1 \cdot \text{cos}\psi_1 = \rho_2 \cdot \text{cos}\psi_2 \Rightarrow \text{cos}\psi_1 = \text{cos}\psi_2 \Rightarrow \psi_1 = \psi_2$ porque o cosseno é unicamente definido em $(0, \pi)$.

Das equações três temos:

$$\rho_1 \cdot \text{cos}\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1 = \rho_2 \cdot \text{cos}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2 \Rightarrow \text{cos}\theta_1 = \text{cos}\theta_2$$

$$\rho_1 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\psi_1 = \rho_2 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2 \Rightarrow \text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta_2$$

Assim $\theta_1 = \theta_2$, pois $(\text{sen}\theta, \text{cos}\theta)$ é unicamente definido em $(0, 2\pi)$.

Portanto F é injetora.

Os pontos de \mathbb{R}^3 sobre o plano $\{(x, 0, z) | x \geq 0\}$ são da forma $(\rho, 0, \psi)$ ou $(\rho, 2\pi, \psi)$, e os pontos que têm coordenada esférica $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$ estão sobre este plano, e todos os outros podem ser descritos em coordenadas esféricas, assim F é sobrejetora.

$F(\rho, \theta, \psi) = (\rho \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\psi, \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi, \rho \cdot \text{cos}\psi)$, do fato de como ρ é constante na esfera e as funções seno e cosseno são diferenciáveis, temos que as derivadas parciais de F existem e são contínuas, portanto, pelo teorema 1.3 F é derivável e sua derivada é

$$dF_p = \begin{pmatrix} \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\psi & -\rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi & \rho \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{cos}\psi \\ \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi & \rho \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\psi & \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{cos}\psi \\ \text{cos}\psi & 0 & -\rho \cdot \text{sen}\psi \end{pmatrix}.$$

Como F é bijetora, F^{-1} existe. Mas

$$x = \rho \cdot \text{cos}\theta \cdot \text{sen}\psi,$$

$$y = \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi,$$

$$z = \rho \cdot \text{cos}\psi,$$

portanto

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \psi &= \arccos \frac{z}{\rho}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Mas estas estão definidas $\mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) | x \geq 0\}$, e são deriváveis, com derivada contínua, neste domínio. Portanto, pelo teorema 1.3, F^{-1} é derivável.

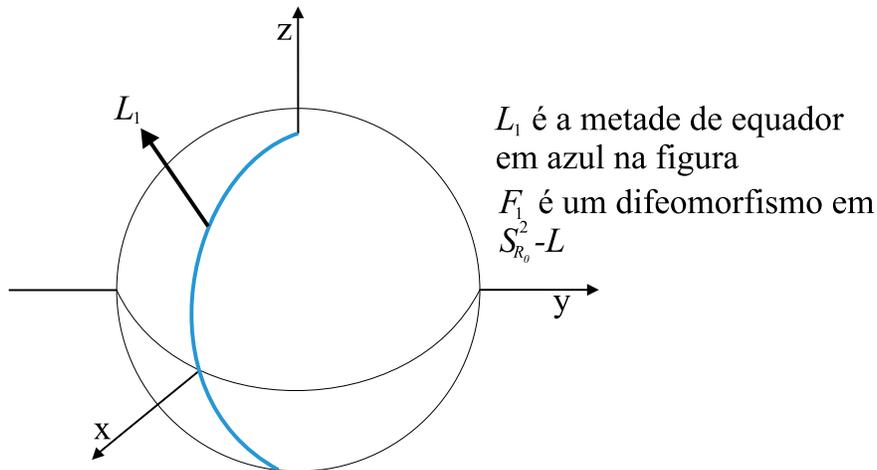
Portanto F é um difeomorfismo. ■

Para qualquer $\rho \in R$, a esfera S_ρ^2 é descrita por

$$S_\rho^2 = \{F(\rho, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3 | (\theta, \psi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]\}.$$

Se $p = F(\rho, \theta, \psi) \in S_\rho^2$ dizemos que as coordenadas esféricas de p induzidas por F são (θ, ψ) .

Observemos que F , definida pela equação 2.3, depende da maneira como medimos o ângulo θ em relação aos eixos ortogonais no plano xy e como medimos o ângulo ψ em relação ao eixo z .



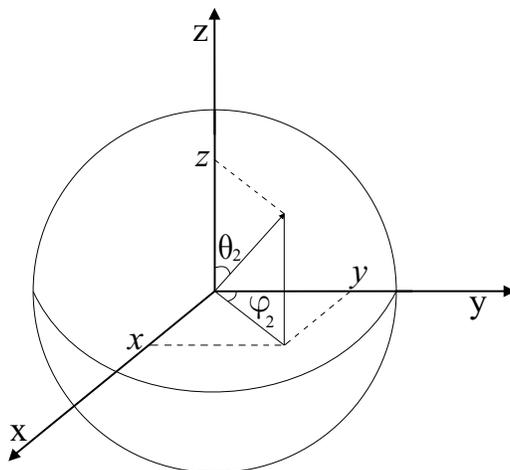
Tomamos $\theta = \theta_1$ e $\psi = \psi_1$ como a maneira de medirmos os ângulos e assim definimos F_1

$$F_1(\theta_1, \psi_1) = (\rho \cdot \cos \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \psi_1, \rho \cdot \operatorname{sen} \theta_1 \cdot \operatorname{sen} \psi_1, \rho \cdot \cos \psi_1). \quad (2.4)$$

Seja $U = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ e $L_1 = \{(\rho \cdot \text{sen}\psi_1, 0, \rho \cdot \text{cos}\psi_1) | 0 \leq \psi_1 \leq \pi\}$, temos que $F_1: U \rightarrow S_\rho^2 - L_1$ é um difeomorfismo.

Notemos que F_1 não é suficiente para atribuir coordenadas à S_ρ^2 , pois F_1 não atribui coordenadas aos pontos que pertencem a curva L_1 .

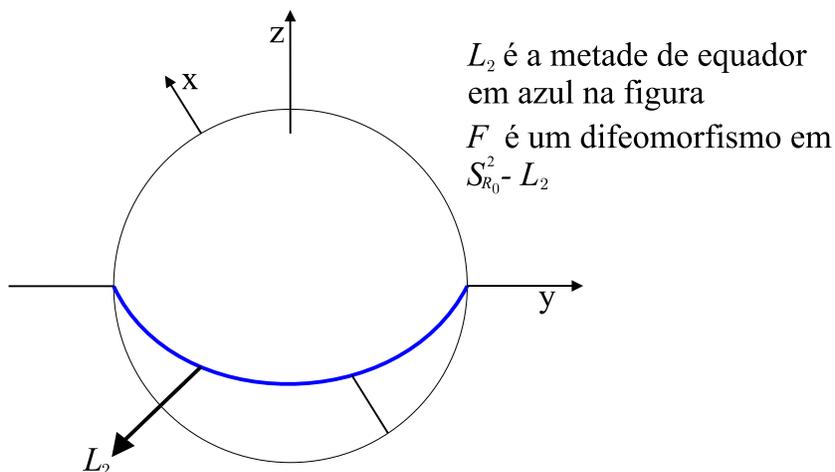
Para resolvermos este problema vamos construir um outro sistema de coordenadas sobre S_ρ^2 . Neste, mediremos os ângulos θ_2 e ψ_2 como na figura abaixo: Assim,



definimos F_2 como

$$F_2(\theta_2, \psi_2) = (\rho \cdot \text{cos}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2, \rho \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_2, \rho \cdot \text{cos}\psi_2). \quad (2.5)$$

Seja $L_2 = \{(-\rho \cdot \text{sen}\psi_2, \rho \cdot \text{cos}\psi_2, 0) | 0 \leq \psi_2 \leq \pi\}$, temos que $F_2: U \rightarrow S_\rho^2 - L_2$ é um difeomorfismo.



Note que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, e como $L_1 = \{F_2(\theta_2, \pi/2), \pi/2 \leq \theta_2 \leq 3\pi/2\}$,

$L_2 = \{F_1(\theta_1, \pi/2), \pi/2 \leq \theta_1 \leq 3\pi/2\}$, então temos

$$F_1(U) \cup F_2(U) = S_\rho^2$$

Portanto, através de F_1 e de F_2 associamos coordenadas a todos os pontos de S_ρ^2 . Porém, os pontos que pertencem a $F_1(U) \cap F_2(U)$ possuem duas coordenadas, por exemplo ao ponto $\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}, 0\right)$ associamos as coordenadas $(\pi/4, 0)_1$ e $(5\pi/4, 0)_2$ pois,

$$F_1(\pi/4, 0) = F_2(5\pi/4, 0) = \left(\frac{\rho}{\sqrt{2}}, \frac{\rho}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

Esta aparente ambiguidade é resolvida com a aplicação de transição entre as coordenadas (θ_1, ψ_1) e (θ_2, ψ_2) dada pelo difeomorfismo $f_{21} = F_2 \circ (F_1)^{-1}: (U - A) \rightarrow (U - A)$, onde $A = \{(\theta, \pi/2) \in U \mid \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\}$.

2.3 O comprimento de uma curva na esfera

Seja $\gamma(x(t), y(t), z(t)) = (\rho \cdot \cos\theta(t) \cdot \text{sen}\psi(t), \rho \cdot \text{sen}\theta(t) \cdot \text{sen}\psi(t), \rho \cdot \cos\psi(t))$ uma curva sobre a esfera que liga p e q , e $\theta(t), \psi(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Para calcularmos o comprimento "C" de γ primeiro vamos calcular

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \text{sen}(\psi(t)) + \rho \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \psi'(t); \\ \frac{dy}{dt} &= \rho \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \text{sen}(\psi(t)) + \rho \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \psi'(t); \\ \frac{dz}{dt} &= -\rho \cdot \text{sen}(\psi(t)) \psi'(t); \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\theta(t)) \cdot (\theta'(t))^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) + \\ &- 2\rho^2 \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\psi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \psi'(t) + \rho^2 \cdot \cos^2(\theta(t)) \cdot \cos^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2; \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= \rho^2 \cdot \cos^2(\theta(t)) \cdot (\theta'(t))^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) + \\ &+ 2\rho^2 \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\psi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \psi'(t) + \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\theta(t)) \cdot \cos^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2.$$

Assim :

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt &= \int_a^b \sqrt{\rho^2 \cdot \text{sen}^2(\theta(t)) \cdot (\theta'(t))^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) +} \\ &- 2\rho^2 \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\psi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \psi'(t) + \rho^2 \cdot \cos^2(\theta(t)) \cdot \cos^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2 +} \\ &+ \rho^2 \cdot \cos^2(\theta(t)) \cdot (\theta'(t))^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) + 2\rho^2 \cdot \text{sen}(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \text{sen}(\psi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \theta'(t) \cdot \psi'(t) +} \\ &+ \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\theta(t)) \cdot \cos^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2 + \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2} dt = \\ &\int_a^b \sqrt{\rho^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\theta'(t))^2 \cdot (\text{sen}^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))) +} \\ &+ \rho^2 \cdot \cos^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2 \cdot (\text{sen}^2(\theta(t)) + \cos^2(\theta(t))) + \rho^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\psi'(t))^2} = \\ &\int_a^b \sqrt{\rho^2 \cdot \text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\theta'(t))^2 + \rho^2 \cdot (\psi'(t))^2 \cdot (\text{sen}^2(\psi(t)) + \cos^2(\psi(t)))} dt = \\ &\rho \int_a^b \sqrt{\text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\theta'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.4 A área de uma região $\Omega \subset S_\rho^2$

Como $\Omega \subset S_\rho^2$ temos $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}$. Pela definição de área

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{\rho^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1} dy dx,$$

portanto

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - x^2 - y^2}} dy dx$$

Vamos fazer uma mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas. Pela equação 2.2 temos que

$$x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\psi \text{ e } y = \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi$$

Assim, uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aonde $f(x, y) = f(g(\theta, \psi), h(\theta, \psi))$. Pela equação 1.6 precisaremos encontrar o jacobiano de f para fazer a mudança de coorde-

nadas

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\psi, \theta)} = \begin{vmatrix} \rho \cdot \cos\theta \cdot \cos\psi & -\rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\psi \\ \rho \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos\psi & \rho \cdot \cos\theta \cdot \text{sen}\psi \end{vmatrix}$$

Assim

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\psi, \theta)} = \rho^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \text{sen}\psi \cdot \cos\psi + \rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{sen}\psi \cdot \cos\psi = \rho^2 \cdot \text{sen}\psi \cdot \cos\psi,$$

portanto, pela equação 1.6

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - \rho^2 \cdot \cos^2\theta \cdot \text{sen}^2\psi - \rho^2 \cdot \text{sen}^2\theta \cdot \text{sen}^2\psi}} \rho^2 \text{sen}\psi \cdot \cos\psi d\psi d\theta \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2(1 - \text{sen}^2\psi)}} \rho^2 \text{sen}\psi \cdot \cos\psi d\psi d\theta \\ &= \iint_{\Omega} \sqrt{\frac{1}{\cos^2\psi}} \rho^2 \text{sen}\psi \cdot \cos\psi d\psi d\theta \\ &= \iint_{\Omega} \rho^2 \text{sen}\psi d\psi d\theta. \end{aligned}$$

2.5 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^3

2.5.1 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^2

Definição 2.2. *Seja $\beta = \{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^2*

1. *A rotação de ângulo θ sobre \mathbb{R}^2 é a transformação linear $R_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que realiza a rotação de ângulo θ sobre cada vetor de \mathbb{R}^2 . Desta maneira, a matriz de R_θ na base β é*

$$[R_\theta]_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

2. *Uma reflexão sobre o eixo x é uma transformação linear $r_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, representada na base β pela matriz*

$$[r_x]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_x \circ r_x = r_x^2 = I. \quad (2.8)$$

Analogamente uma reflexão sobre o eixo y é representada pela matriz

$$[r_x]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_x \circ r_x = r_x^2 = I. \quad (2.9)$$

As reflexões sobre as retas $x = y$ e $x = -y$ são representadas, respectivamente, pelas seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 2.3. O grupo ortogonal é o conjunto

$$O_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I\}$$

munido com a operação de multiplicação de matrizes.

Proposição 2.1. O grupo O_2 é gerado por reflexões e rotações.

Demonstração 2.1

Seja $A \in O_2$ a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

como $A^t \cdot A = I$ temos

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (2.10)$$

$$ac + bd = 0, \quad (2.11)$$

$$c^2 + d^2 = 1. \quad (2.12)$$

A equação 2.11 implica que $ac = -bd$. Vamos considerar os seguintes casos:

1. $c = 0$; então $d = 1$ ou $d = -1$. Em ambos os casos $b = 0$, de onde $a = 1$ ou

$a = -1$. Portanto A será igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. $d = 0$; então $c = 1$ ou $c = -1$. Em ambos os casos $a = 0$, de onde $b = 1$ ou $b = -1$. Portanto A será igual a uma das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $a = 0$ ou $b = 0$. Estes casos resultam nas mesmas matrizes obtidas nos itens anteriores.

4. $a \neq 0$ e $b \neq 0$; então $c = \frac{-bd}{a}$ o que, substituído na equação 2.11, resulta em $|d| = |a|$. Consequentemente há duas possibilidades:

$$d = a \Rightarrow c = -b \text{ ou } d = -a \Rightarrow c = b.$$

Neste caso temos que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $a = \cos\theta$ e $b = -\sin\theta$, então as equações são satisfeitas. O ângulo θ sempre existe porque as funções *seno* e *coseno* são contínuas. Assim temos que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto A é uma matriz de rotação R_θ ou é o produto de uma rotação seguida por uma reflexão. ■

2.5.2 Transformações ortogonais de \mathbb{R}^3

As transformações lineares $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que preservam o comprimento satisfazem a identidade

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Assim, se $A = [T]_\beta$ é a matriz representando T na base β , então

$$\langle A.u, A.v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \Rightarrow u^t . A^t . A . v = u^t . v \Rightarrow A^t . A = I.$$

Definição 2.4. *O grupo ortogonal é o conjunto das matrizes*

$$O_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A . A^t = A^t . A = I\}. \quad (2.13)$$

Para todo $A \in O_3$ a transformação $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $A(x) = A.x$ induz um difeomorfismo $A: S_\rho^2 \rightarrow S_\rho^2$, pois, para todo $p \in S_\rho^2$

$$|A(\vec{op})| = \sqrt{\langle A.\vec{op}, A.\vec{op} \rangle} = \sqrt{\langle \vec{op}, \vec{op} \rangle} = \rho \quad \Rightarrow \quad A(\vec{op}) \in S_\rho^2.$$

De fato, o difeomorfismo $A: S_\rho^2 \rightarrow S_\rho^2$ é uma isometria de S_ρ^2 uma vez que

$$dA_p.u = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(p + h.u) - A(p)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(p) + h.A(u) - A(p)}{h} = A(u),$$

para todo $p \in S_\rho^2$ e $u \in T_p S_\rho^2$; de onde

$$\langle dA_p.u, dA_p.v \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Sendo assim as transformações induzidas pelas matrizes $A \in O_3$ são todas isometrias em S_ρ^2 . Em decorrência do observado, as isometrias mais simples de S_ρ^2 são as rotações em torno de um eixo fixo e as reflexões sobre planos que passam pela origem.

Definição 2.5. *Sejam π um plano em \mathbb{R}^3 e $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , onde $\{e_1, e_2\}$ é uma base de π .*

1. *A rotação de ângulo θ sobre π é a transformação linear $R_\theta^\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que fixa a direção ortogonal à π e realiza uma rotação de ângulo θ sobre o plano π . Desta maneira, a matriz de R_θ^π na base β é*

$$[R_\theta^\pi]_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

2. *Uma reflexão sobre o plano π é uma transformação linear $r_\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, representada na base β , é representada pela matriz*

$$[r_\pi]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_\pi \circ r_\pi = r_\pi^2 = I. \quad (2.15)$$

Note que $\det(A.A^t) = \det(A).\det(A^t) = \det(I)$, mas $\det(A) = \det(A^t)$ então $\det(A)^2 = 1$ e $\det(A^t)^2 = 1$, então, para qualquer $A \in O_3$, observamos que $|\det(A)| = 1$, ou seja, $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$. As transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^3 com determinante igual a 1 formam o grupo ortogonal especial

$$SO_3 = \{A \in O_3 | \det(A) = 1\}.$$

Os elementos $g \in SO_3$ preservam a orientação.

Em vista da rigidez das isometrias, os autovalores de uma transformação ortogonal são 1 ou -1, pois, se $u \neq 0$ e $tu = \lambda.u$, então

$$\langle T.u, T.u \rangle = \langle u, u \rangle \Rightarrow (\lambda^2 - 1)|u|^2 = 0 \Leftrightarrow |\lambda| = 1.$$

Proposição 2.2. *Seja T uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^3 , então:*

1. *Toda transformação $T \in O_3$ fixa um direção em \mathbb{R}^3 .*

2. Para todo $T \in O_3$ existe uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ e um ângulo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que a matriz A de T na base β é dada por $A = [R_\theta^\pi]$ ou por $A = [r_\pi] \circ [R_\theta^\pi]$. No primeiro caso $\det(T) = 1$ e no segundo caso $\det(T) = -1$.

Demonstração 2.2. O polinômio característico de T é da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^3 + a'\lambda^2 + b'\lambda + c'$$

e as suas raízes reais são 1 ou -1, mas um polinômio de grau 3 com coeficientes reais sempre tem uma raiz real, de onde concluímos que T fixa uma direção.

1. Suponha que $p_T(\lambda)$ possui uma raiz igual a 1; neste caso

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Seja e_3 o autovetor unitário correspondente ao auto-valor $\lambda = 1$ e $V \in \mathbb{R}^3$ o subespaço ortogonal a reta l_3 determinada por e_3 . Do fato que T preserva a ortogonalidade entre subespaços ortogonais, segue que V é invariante por T e

$$\mathbb{R}^3 = V \oplus \langle e_3 \rangle.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base de V e $R = T|_V: V \rightarrow V$. Então, em relação a base e_1, e_2, e_3 , a matriz de T é da forma

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ onde } R: V \rightarrow V \text{ satisfaz } R^t R = R R^t = I.$$

Como $V \simeq \mathbb{R}^2$, pela da proposição 2.1, temos que existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que ou $R = R_\theta$ ou $R = R_\theta \cdot r_x$. No primeiro caso, R_θ não possui auto-valores reais uma vez que trata-se de uma rotação, por isso

$$A = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No segundo caso, R é uma reflexão em V e fixa uma direção e inverte outra

direção em V , isto é, os auto-valores são precisamente -1 e 1 . Neste caso,

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \text{ e } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Os argumentos são análogos para o caso quando

$$p_T(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Assim, toda transformação ortogonal em \mathbb{R}^3 é uma rotação ou uma reflexão seguida de uma rotação.



Capítulo 3

Distância e Área

3.1 Geodésicas de S_ρ^2

Lembremos da definição de geodésica dada no capítulo 1.

Definição 3.1. *Dados dois pontos p e q , e uma superfície S dizemos que Ω é uma geodésica de S se Ω é a curva sobre S que liga os dois pontos e tem menor comprimento.*

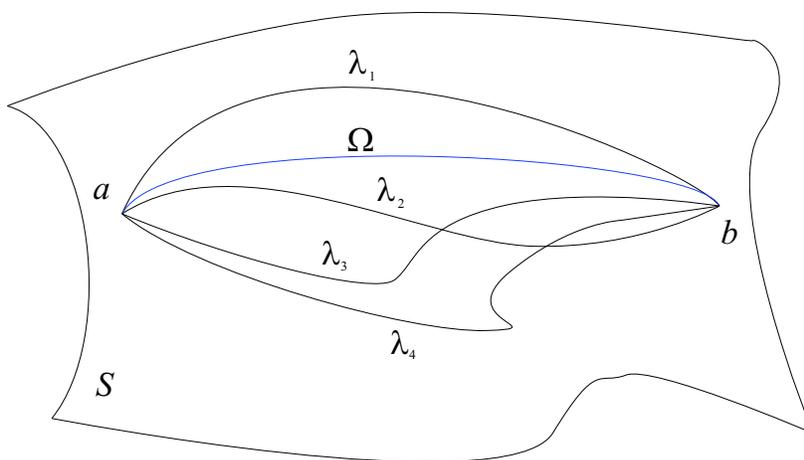


Figura 3.1: Uma superfície S e algumas das curvas sobre S que ligam $a, b \in S$

Seja $\gamma(x(t), y(t), z(t)) = (\rho \cdot \cos\theta(t) \cdot \text{sen}\psi(t), \rho \cdot \text{sen}\theta(t) \cdot \text{sen}\psi(t), \rho \cdot \cos\psi(t))$ uma curva sobre a esfera que liga p e q , e $\theta(t), \psi(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Da equação 2.6 do Capítulo 2 temos

$$L(\gamma) = \rho \int_a^b \sqrt{\text{sen}^2(\psi(t)) \cdot (\theta'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Seja $\gamma(t) = (\rho.\text{sen}(\psi(t)), 0, \rho.\text{cos}(\psi(t)))$, $0 \leq t \leq b \leq \pi$, a curva parametrizada que descreve o segmento do equador $M_0 = S_\rho^2 \cap \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$ ligando o ponto $p = (0, 0, \rho)$ ao ponto $q = (\rho.\text{sen}(\psi(b)), 0, \rho.\text{cos}(\psi(b)))$, então o comprimento de γ é

$$L(\gamma) = \rho. \int_0^b \sqrt{\psi'^2} dt = \rho. \int_0^b |\gamma'| dt. \quad (3.1)$$

Lema 3.1. *Sejam $p, q \in M_0 = S_\rho^2 \cap \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\}$. A geodésica ligando p à q descreve um segmento de M_0 .*

Demonstração. Seja $\beta: [0, b] \rightarrow S_\rho^2$ uma curva que liga p e q , então

$$L(\beta) = \rho. \int_0^b \sqrt{(\theta')^2 \text{sen}^2(\psi) + (\psi')^2} dt \geq \int_0^b |\psi'| dt = L(\gamma)$$

onde $\gamma \subset M_0$ é o segmento de equador que liga p à q . Assim, γ minimiza a distância entre p e q .

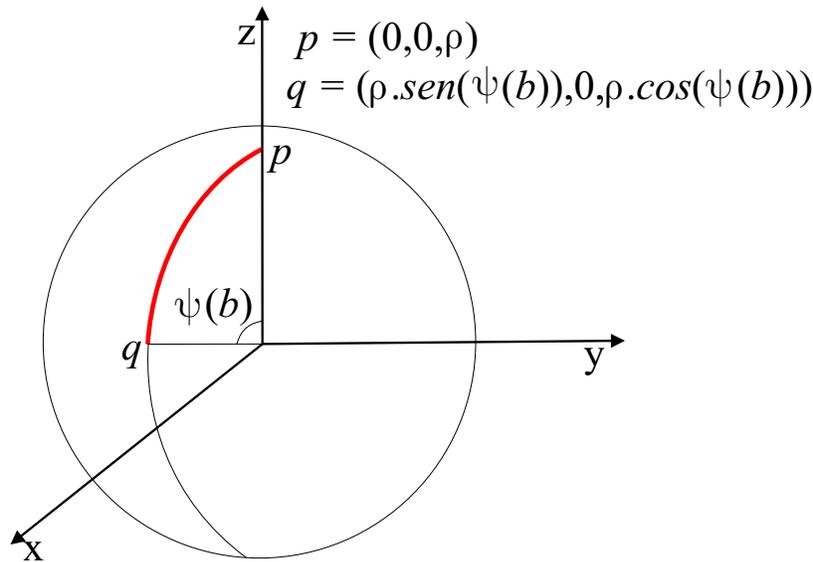


Figura 3.2: O segmento de equador M_0

Consideremos $p, q \in S_\rho^2$ e π_{pq} o plano gerado pelos vetores \vec{op} e \vec{oq} . Desta forma, p e q determinam um único grande círculo $c_{pq} = \pi_{pq} \cap S_\rho^2$ e o dividem em dois segmentos c_{pq}^1 e c_{pq}^2 , tais que $c_{pq}^1 \cup c_{pq}^2 = c_{pq}$ e $c_{pq}^1 \cap c_{pq}^2 = p, q$, como na figura 3.3.

■

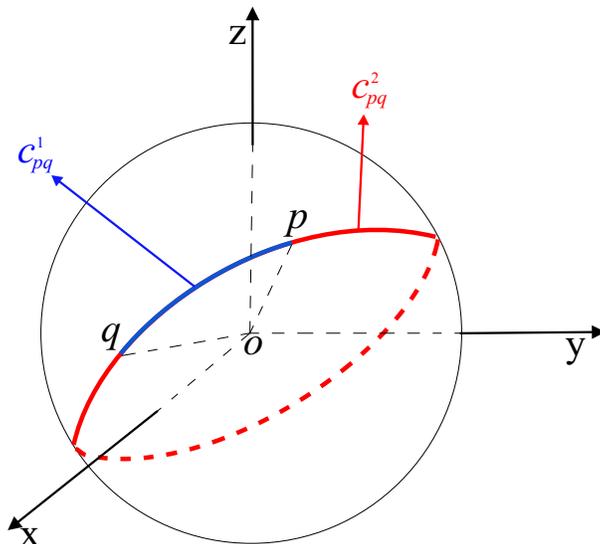


Figura 3.3: Um equador dividido em dois segmentos

Teorema 3.1. *Sejam $p, q \in S_\rho^2$, então existe uma única geodésica em S_ρ^2 ligando p e q . A geodésica é o segmento que minimiza o comprimento dentre os segmentos c_{pq}^1 e c_{pq}^2 .*

Demonstração 3.1. *Sejam $p, q \in S_\rho^2$ dois pontos quaisquer. Seja $T: S_\rho^2 \rightarrow S_\rho^2$ uma transformação ortogonal (rotação ou reflexão) tal que $T(p) = (0, 0, \rho)$ e $T(q) = (\rho \cdot \text{sen}(\psi(b)), 0, \rho \cdot \text{cos}(\psi(b)))$. Ao aplicarmos o lema anterior concluímos que um segmento M_0 minimiza a distância entre $T(p)$ e $T(q)$. Portanto, a distância de p à q é realizada por um segmento sobre a curva $T^{-1}(M_0)$, que também é um segmento de um grande círculo.*

■

3.2 O ângulo entre dois vetores em S_ρ^2

A determinação da distância entre dois pontos (dois lugares) sobre S_ρ^2 (S_{6400}^2 , ou a Terra) era uma questão fundamental para os navegadores e cartógrafos antigos. Com a utilização de coordenadas esféricas sobre S_ρ^2 esta questão torna-se um tanto simples. Nesta seção os ângulos serão dados em radianos. Sejam

$$\begin{aligned} p_1 &= (\rho \cdot \text{cos}(\theta_1) \text{sen}(\psi_1), \rho \cdot \text{sen}(\theta_1) \text{sen}(\psi_1), \text{cos}(\psi_1)), \\ q_1 &= (\rho \cdot \text{cos}(\theta_2) \text{sen}(\psi_2), \rho \cdot \text{sen}(\theta_2) \text{sen}(\psi_2), \text{cos}(\psi_2)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

pontos de \mathbb{R}^3 e seja α o ângulo, em radianos, entre os vetores $u = o\vec{p}_1$ e $v = o\vec{p}_2$, então a distância entre $p_1 \in S_\rho^2$ e $p_2 \in S_\rho^2$ é

$$d_{S_\rho^2}(p_1, p_2) = \rho \cdot \alpha. \quad (3.3)$$

Para determinar α vamos formar um triângulo com os vetores u e v , como na figura abaixo.

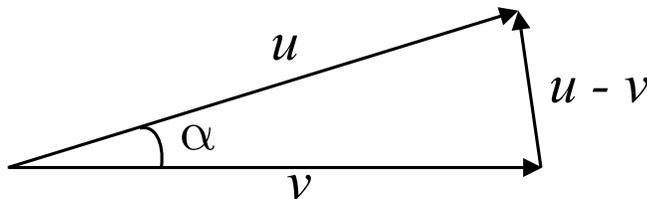


Figura 3.4: Triângulo formado por u e v

Então, pela lei dos cossenos

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2 \cdot \|u\| \cdot \|v\|} = \\ &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - (u_1^2 - 2 \cdot u_1 \cdot v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2 \cdot u_2 \cdot v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2 \cdot u_3 \cdot v_3 + v_3^2)}{2 \cdot \|u\| \cdot \|v\|} \\ &= \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}. \end{aligned}$$

Temos interesse particular na esfera, onde $\|u\| = \|v\| = \rho$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\rho^2} \quad (3.4)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \alpha &= \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\rho^2}\right) = \\ &= \left(\arccos\frac{\rho^2 \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_1 \cdot \text{sen}\psi_2 + \rho^2 \cdot \text{sen}\theta_1 \cdot \text{sen}\theta_2 \cdot \text{sen}\psi_1 \cdot \text{sen}\psi_2 + \rho^2 \cdot \cos\psi_1 \cdot \cos\psi_2}{\rho^2}\right) \\ &= \arccos(\cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \text{sen}(\psi_1) \cdot \text{sen}(\psi_2) + \cos(\psi_1) \cdot \cos(\psi_2)). \end{aligned}$$

Considerando $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ e $1 - \cos\Delta\theta = 2.\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ temos

$$\begin{aligned}\alpha &= \arccos(\cos\Delta\theta.\text{sen}\psi_1.\text{sen}\psi_2 + \cos\psi_1.\cos\psi_2 + \cos\Delta\theta.\cos\psi_1.\cos\psi_2 - \cos\Delta\theta.\cos\psi_1.\cos\psi_2) \\ &= \arccos(\cos\Delta\theta.\cos(\psi_2 - \psi_1) + (1 - \cos\Delta\theta).\cos\psi_1.\cos\psi_2 = \\ &= \arccos(\cos\Delta\theta.\cos\Delta\psi + 2.\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos\psi_1.\cos\psi_2).\end{aligned}$$

Portanto

$$d_{S_\rho^2}(p_1, p_2) = \rho.\arccos(\cos\Delta\theta.\cos\Delta\psi + 2.\text{sen}^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right).\cos\psi_1.\cos\psi_2). \quad (3.5)$$

Mas como rotações e translações são isometrias, podemos realizar uma rotação sobre S_ρ^2 de modo que p_1 fique sobre o plano-xz, neste caso $\psi_1 = \pi/2$, assim existem $\Delta\theta'$ e $\Delta\psi'$ tais que a distância entre p_1 e p_2 é

$$d_{S_\rho^2}(p_1, p_2) = \rho.\arccos(\cos\Delta\theta'.\cos\Delta\psi'). \quad (3.6)$$

Exemplo 3.1. *Suponha que a Terra seja uma esfera de raio 6400km. Qual a distância entre Florianópolis e Nova York?*

Solução: Segundo o *Google EarthTM*, as coordenadas, em termos da longitude e da latitude, de Florianópolis são $(27^\circ 36' S, 48^\circ 30' W)$ e as de Nova York são $(40^\circ 42' N, 73^\circ 58' W)$, assim:

$$\psi_1 = 90^\circ + 27^\circ 36' = 117^\circ 36' \approx 2,052 \text{ radianos};$$

$$\psi_2 = 90^\circ - 40^\circ 42' = 49^\circ 18' \approx 0,860 \text{ radianos};$$

$$\Delta\theta = 48^\circ 30' - 73^\circ 58' = -25^\circ 28' \approx -0,444 \text{ radianos};$$

$$\Delta\psi = 117^\circ 36' - 49^\circ 18' = 68^\circ 18' \approx 1,192 \text{ radianos}.$$

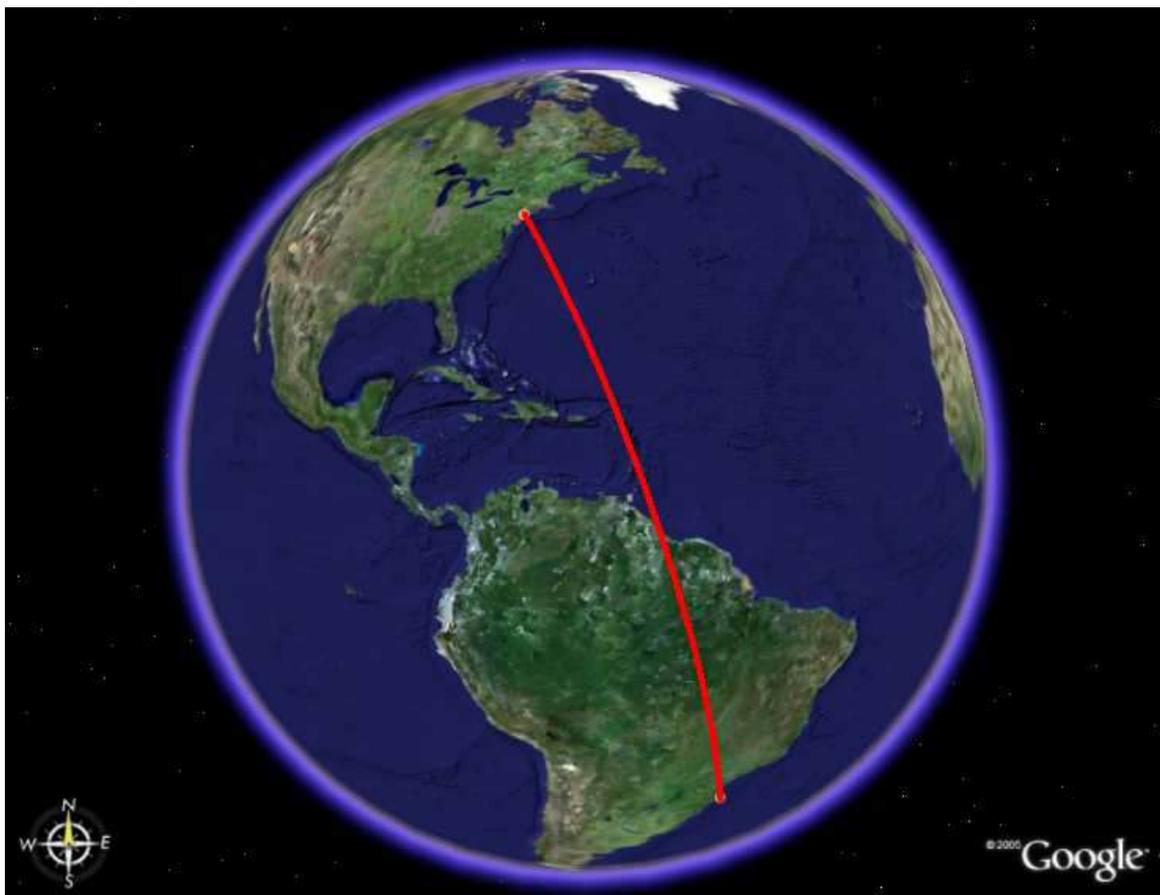


Figura 3.5: O segmento de Equador ligando Florianópolis e Nova York

Considerando que o raio da terra mede $6400km$, temos:

$$d = 6400 \cdot \arccos(\cos(-0,444) \cdot \cos(1,192) + 2 \cdot \sin^2(-0,222) \cdot \cos(2,052) \cdot \cos(0,860)) km$$

$$d = 6400 \cdot 1,261 km = 8071,72 km.$$

Exemplo 3.2. *Suponha que a terra seja uma esfera de raio $6400km$. Qual a distância entre Tokio e Nova Delhi?*

Solução: Segundo o *Google EarthTM*, as coordenadas, em termos da longitude e da latitude, de Tokio são $(35^{\circ}41'N, 139^{\circ}48'E)$ e as de Nova Delhi são $(28^{\circ}40'N, 77^{\circ}12'E)$,

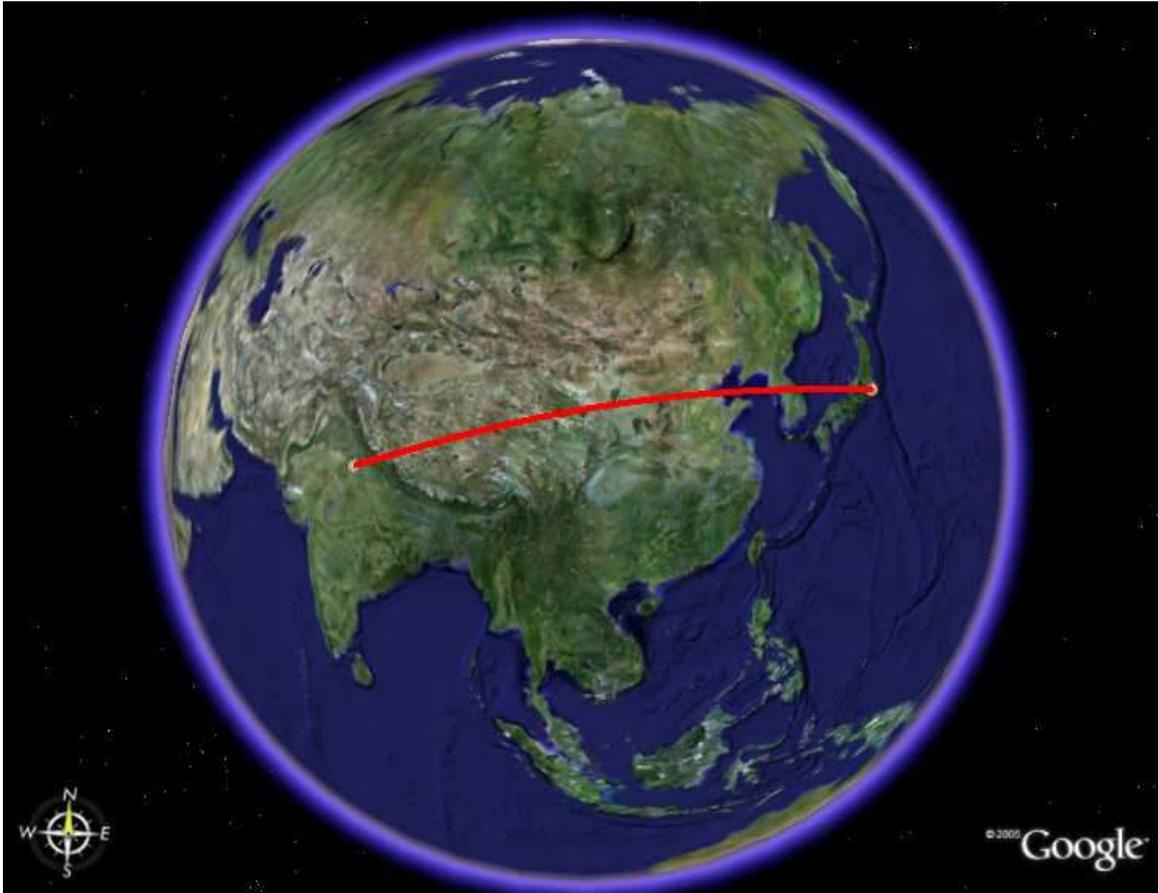


Figura 3.6: O segmento de Equador ligando Tokio e Nova Delhi

assim:

$$\psi_1 = 90^\circ - 35^\circ 41' = 54^\circ 19' \approx 0,948 \text{ radianos};$$

$$\psi_2 = 90^\circ - 28^\circ 40' = 61^\circ 20' \approx 1,070 \text{ radianos};$$

$$\Delta\theta = 139^\circ 48' - 77^\circ 12' = 62^\circ 36' \approx 1,092 \text{ radianos};$$

$$\Delta\psi = 54^\circ 19' - 61^\circ 20' = -7^\circ 01' \approx 0,123 \text{ radianos}.$$

Considerando que o raio da terra mede 6400km , temos:

$$d = 6400 \cdot \arccos(\cos(1,092) \cdot \cos(0,123) + 2 \cdot \sin^2(0,546) \cdot \cos(0,948) \cdot \cos(1,070)) \text{ km}$$

$$d = 6400 \cdot 0,917 \text{ km} = 5868,59 \text{ km}.$$

3.3 Triângulos

Definição 3.2. Se três pontos, A , B e C , sobre S_ρ^2 não estão sobre um mesmo grande círculo temos que A , B e C definem uma região convexa em S_ρ^2 , limitada pelas geodésicas γ_{AB} (ligando A e B), γ_{AC} (ligando A e C) e γ_{BC} (ligando B e C). Chamamos esta região de triângulo esférico, com vértices A , B e C .

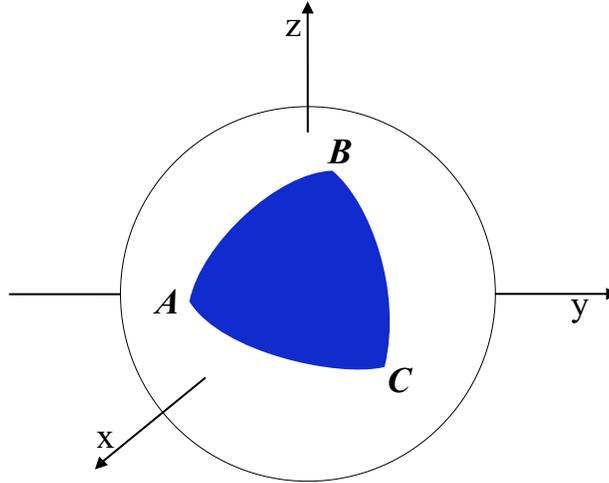


Figura 3.7: Um triângulo esférico

Note que cada um dos ângulos internos do triângulo esférico são sempre menores que π , e que se " a " é um lado do triângulo, então $0 < \frac{a}{\rho} < \pi$.

3.3.1 Área de um gomo esférico

Definição 3.3. Duas geodésicas $\eta \subset S_\rho^2$ e $\sigma \subset S_\rho^2$ que ligam pontos antípodas $p = (x, y, z)$ e $q = (-x, -y, -z)$ definem uma região convexa, que chamamos de gomo esférico.

Em p e q , os vetores tangentes às geodésicas formam um ângulo α denominado ângulo do gomo. Note que este ângulo é o mesmo nas duas interseções entre os equadores porque cada equador está contido em um plano, os vetores tangentes aos equadores estão nas interseções dos planos que contém os equadores com os planos tangentes a circunferência em p e q e os planos tangentes a pontos antípodas são paralelos e assim o ângulo é o mesmo nas duas interseções das geodésicas.

Um gomo G_α com ângulo α é equivalente por uma isometria de S_ρ^2 à

$$G_\alpha = \{(\rho \cdot \cos\theta \cdot \sin\psi, \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\psi, \rho \cdot \cos\psi) \mid 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 \leq \psi \leq \pi\}$$

conforme mostra a figura abaixo.

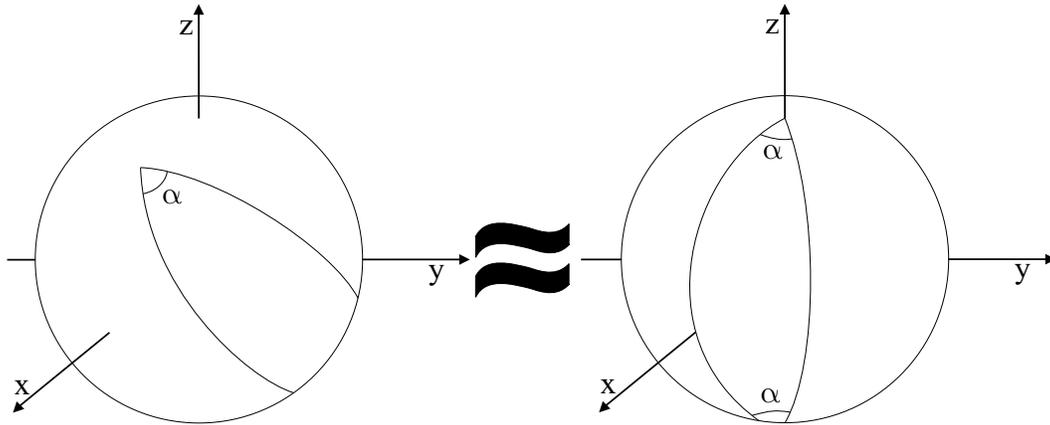


Figura 3.8: Um gomo esférico

Teorema 3.2. *A área de um gomo com ângulo interno α é igual a $2\rho^2 \cdot \alpha$.*

Demonstração 3.2. *Utilizando coordenadas esféricas, temos que*

$$A = \int_0^\alpha \int_0^\pi \rho^2 \cdot \sin\psi \cdot d\psi \cdot d\theta = \int_0^\alpha 2\rho^2 (-\cos\psi)|_0^\pi d\theta = 2\rho^2 \cdot \alpha.$$

Em particular quando $\alpha = 2\pi$ obtemos a área de S_ρ^2 que é $4\pi\rho^2$. ■

Capítulo 4

Geometria da esfera

4.1 Trigonometria esférica

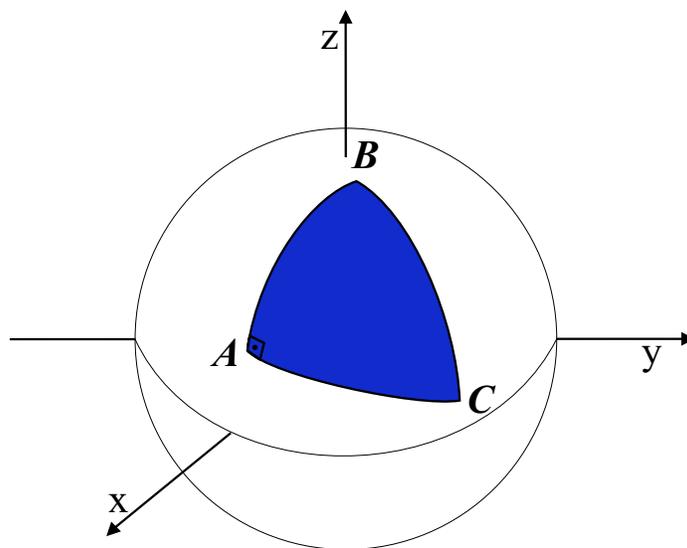


Figura 4.1: Um triângulo esférico retângulo

Teorema 4.1 (Teorema de Pitágoras esférico). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre S_ρ^2 com um ângulo reto no vértice A e o lado oposto medindo a . Se os comprimentos dos lados opostos aos vértices B e C medem b e c , respectivamente, então*

$$\cos(a/\rho) = \cos(b/\rho) \cdot \cos(c/\rho). \quad (4.1)$$

Demonstração 4.1. *Como as rotações são isometrias podemos assumir, sem perda*

de generalidade, que o lado AB está sobre o equador $\psi = \pi/2$. Sejam $X, Y \in S_\rho^2$ e θ o ângulo entre \vec{OX} e \vec{OY} e z o comprimento do arco que liga X e Y , então $z = \theta \cdot \rho \Rightarrow \theta = z/\rho$ e temos

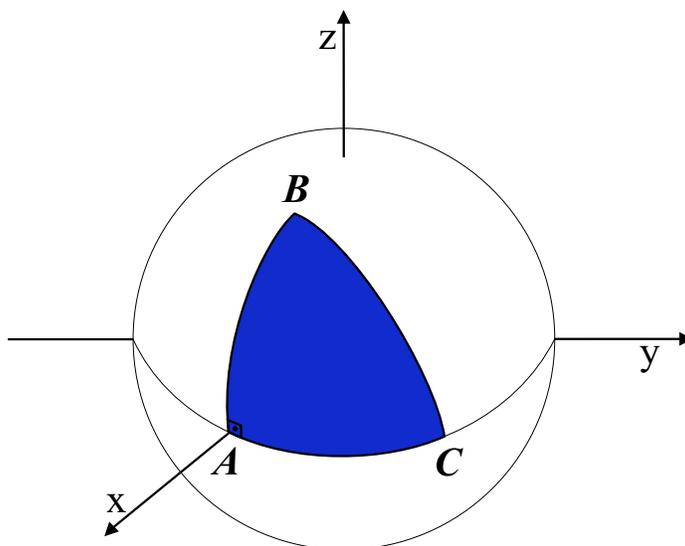


Figura 4.2: Triângulo esférico retângulo em A

$$A = (\rho, 0, 0), \quad B = (\rho \cdot \cos(c/\rho), 0, \rho \cdot \sin(c/\rho)), \quad C = (\cos(b/\rho), \sin(b/\rho), 0).$$

Então pela equação 3.6

$$\cos(a/\rho) = \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \cos(b/\rho) \cdot \cos(c/\rho).$$

■

Voltando para o plano. Vamos mostrar que, no limite, quando o raio da esfera vai para o infinito, voltamos ao caso euclidiano $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração. Se expandirmos o cosseno pela série de Taylor, com $x_0 = 0$ temos

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Assim:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} + \dots &= \left(1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \\
1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} + \dots &= 1 + \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots \\
&\quad + \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \\
-\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} + \dots &= -\frac{c^2}{2!} + \frac{c^4/\rho^2}{4!} + \dots - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4/\rho^2}{4!} + \dots \\
&\quad + \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Desta maneira, aplicando o limite, quando o raio da esfera vai para o infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[-\frac{a^2}{2!} + \frac{a^4/\rho^2}{4!} + \dots\right] &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[-\frac{c^2}{2!} + \frac{c^4/\rho^2}{4!} + \dots - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4/\rho^2}{4!} + \dots\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{a^2}{2!}\right) + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{a^4}{4!} + \dots\right] &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(-\frac{c^2}{2!} - \frac{b^2}{2!}\right) + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{c^4}{4!} + \dots\right] + \left[\frac{b^4}{4!} + \dots\right] \\
&\quad + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right] \left[-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right].
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Mas, pelo teste da razão, uma série com termo geral da forma $k/2n!$ é convergente. De fato

$$\frac{k}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{k} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como esta série é maior, em módulo, para $\rho > 1$, que a série com termo geral $k/(\rho^{2n} \cdot 2n!)$ ambas convergem. Portanto existem constantes M, N, O, P e Q que majoram as séries entre colchetes da equação 4.2, assim, ao tomarmos o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, temos

$$-\frac{a^2}{2} = -\frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2,$$

que é o Teorema de Pitágoras no plano. ■

Teorema 4.2 (Lei dos cossenos na esfera). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre S_ρ^2 com ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem, respectivamente, a , b e c como na figura 4.3.*

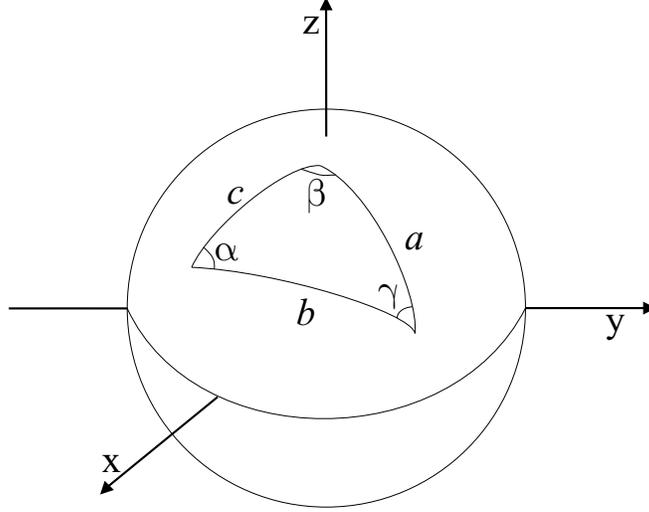


Figura 4.3: Triângulo esférico de lados a , b e c

Então

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}\frac{c}{\rho}} & \cos\gamma &= \frac{\cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen}\frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen}\frac{b}{\rho}} \\ \cos\beta &= \frac{\cos\frac{b}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}\frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen}\frac{c}{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Demonstração 4.2. *Sem perda de generalidade, suponhamos que*

$$A = (\rho, 0, 0), \quad B = (\rho \cdot \cos\theta_B \cdot \operatorname{sen}\psi_B, \rho \cdot \operatorname{sen}\theta_B \cdot \operatorname{sen}\psi_B, \cos\psi_B), \quad C = (\rho \cdot \cos\theta_C, \rho \cdot \operatorname{sen}\theta_C, 0),$$

como na figura 4.4. Assim:

$$\cos\frac{a}{\rho} = \frac{\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle}{\rho^2} = \cos(\theta_C - \theta_B) \cdot \operatorname{sen}\psi_B; \quad (4.4)$$

$$\cos\frac{b}{\rho} = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle}{\rho^2} = \cos\theta_C; \quad (4.5)$$

$$\cos\frac{c}{\rho} = \frac{\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle}{\rho^2} = \cos\theta_B \cdot \operatorname{sen}\psi_B. \quad (4.6)$$

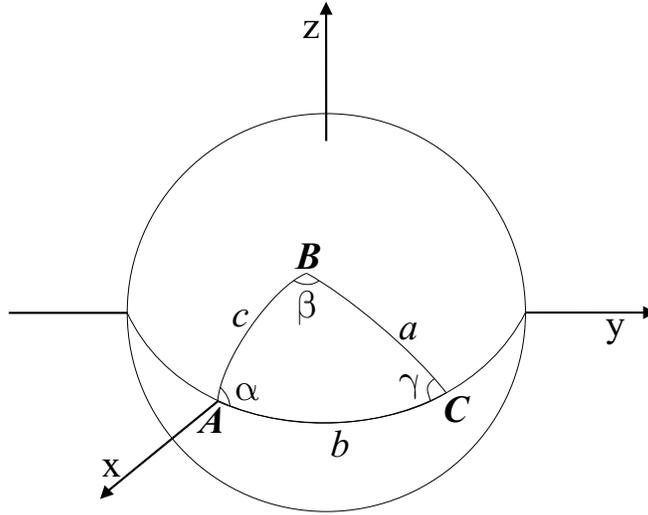


Figura 4.4: Triângulo esférico com o lado AC sobre o plano xy

De onde segue que

$$\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} = \sqrt{\cos^2 \psi_B + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \cdot \operatorname{sen}^2 \psi_B},$$

$$\operatorname{sen} \frac{c}{\rho} = \sqrt{\cos^2 \psi_B + \operatorname{sen}^2 \theta_B \cdot \operatorname{sen}^2 \psi_B},$$

e como $0 < \theta_C < \pi$ e o seno é unicamente definido neste intervalo

$$\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} = \operatorname{sen} \theta_C. \quad (4.7)$$

Se os planos π_{AC} , π_{AB} e π_{BC} contêm os lados do triângulo esférico, então para determinarmos os ângulos entre os lados, basta determinarmos os ângulos entre os vetores normais a estes planos, vetores estes:

$$n_{AB} = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = \frac{(0, -\cos \psi_B, \operatorname{sen} \theta_B \cdot \operatorname{sen} \psi_B)}{\sqrt{\cos^2 \psi_B + \operatorname{sen}^2 \theta_B \cdot \operatorname{sen}^2 \psi_B}};$$

$$n_{BC} = \frac{|\vec{OB} \times \vec{OC}|}{|\vec{OB} \times \vec{OC}|} = \frac{(-\cos \psi_B \cdot \operatorname{sen} \theta_C, \cos \psi_B \cdot \cos \theta_C, \operatorname{sen}(\theta_C - \theta_B) \cdot \operatorname{sen} \psi_B)}{\sqrt{\cos^2 \psi_B + \operatorname{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \cdot \operatorname{sen}^2 \psi_B}};$$

$$n_{AC} = \frac{|\vec{OA} \times \vec{OB}|}{|\vec{OA} \times \vec{OB}|} = (0, 0, \rho).$$

Assim:

$$\cos\alpha = \langle n_{AB}, n_{AC} \rangle = \frac{\text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B}{\sqrt{\cos^2\psi_B + \text{sen}^2\theta_B \cdot \text{sen}^2\psi_B}} = \frac{\text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B}{\text{sen}\frac{c}{\rho}}, \quad (4.8)$$

$$\cos\gamma = \langle n_{AC}, n_{BC} \rangle = \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_B) \cdot \text{sen}\psi_B}{\sqrt{\cos^2\psi_B + \text{sen}^2(\theta_C - \theta_B) \cdot \text{sen}^2\psi_B}} = \frac{\text{sen}(\theta_C - \theta_B) \cdot \text{sen}\psi_B}{\text{sen}\frac{a}{\rho}}. \quad (4.9)$$

Por outro lado, das equações 4.4, 4.5 e 4.6

$$\cos\frac{a}{\rho} = \cos\theta_C \cdot \cos\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B + \text{sen}\theta_C \cdot \text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B = \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho} + \text{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_C - \theta_B) \cdot \text{sen}\psi_B &= \text{sen}\theta_C \cdot \cos\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B - \cos\theta_C \cdot \text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B \\ &= \text{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B, \end{aligned}$$

assim

$$\text{sen}\theta_B \cdot \text{sen}\psi_B = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho}} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_C - \theta_B) \cdot \text{sen}\psi_B &= \text{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho}} \\ &= \frac{\cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{b}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ao substituírmos as equações 4.10 e 4.11 nas equações 4.8 e 4.9 temos as seguintes identidades

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \text{sen}\frac{c}{\rho}} \quad e \quad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{b}{\rho}}{\text{sen}\frac{a}{\rho} \cdot \text{sen}\frac{b}{\rho}}.$$

Analogamente a identidade para $\cos\beta$ é obtida a partir da situação na qual os vértices

do triângulo $\triangle ABC$ são

$$A = (\rho, 0, 0)$$

$$B = (\rho \cdot \cos\theta_B, \rho \cdot \sen\theta_B, 0)$$

$$C = (\rho \cdot \cos\theta_C \cdot \sen\psi_C, \rho \cdot \sen\theta_C \cdot \sen\psi_C, \rho \cdot \cos\psi_C).$$

Neste caso obtemos

$$\cos\beta = \frac{\cos\frac{b}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\sen\frac{a}{\rho} \cdot \sen\frac{c}{\rho}}.$$

■

Voltando para o plano. Vamos mostrar que, no limite, quando o raio da esfera vai para o infinito, voltamos ao caso euclideo $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$.

Demonstração. Se expandirmos o seno e o cosseno pela série de Taylor, com $x_0 = 0$ temos

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sen(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Assim, pela lei dos cossenos na esfera temos

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1 - \frac{(a/\rho)^2}{2!} + \frac{(a/\rho)^4}{4!} + \dots - \left(1 - \frac{(b/\rho)^2}{2!} + \frac{(b/\rho)^4}{4!} + \dots\right) \left(1 - \frac{(c/\rho)^2}{2!} + \frac{(c/\rho)^4}{4!} + \dots\right)}{\left(\frac{b}{\rho} - \frac{(b/\rho)^3}{3!} + \dots\right) \cdot \left(\frac{c}{\rho} - \frac{(c/\rho)^3}{3!} + \dots\right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{a^2}{2!} + \dots\right) - 1 + \frac{-1}{\rho^2} \left(-\frac{c^2}{2!} + \dots - \frac{b^2}{2!} + \dots\right) - \left(-\frac{(b/\rho)^2}{2!} + \dots\right) \left(-\frac{(c/\rho)^2}{2!} + \dots\right)}{\frac{bc}{\rho^2} + \frac{b}{\rho^4} \left(-\frac{c^3}{3!} + \dots\right) + \frac{1}{\rho^3} \left(\frac{b^3}{3!} + \dots\right)} \\ &= \frac{-\frac{a^2}{2!} + \frac{c^2}{2!} + \frac{b^2}{2!} + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{a^4}{4!} + \dots + \frac{c^4}{4!} + \dots + \frac{b^4}{4!} + \dots\right) - \frac{1}{\rho^2} \left(-\frac{b^2}{2!} + \dots\right) \left(-\frac{c^2}{2!} + \dots\right)}{bc + \frac{b}{\rho^2} \left(-\frac{c^3}{3!} + \dots\right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{b^3}{3!} + \dots\right)}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mas, pelo teste da razão, uma série com termo geral da forma $k/2n!$ é

convergente. De fato

$$\frac{k}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{k} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como esta série é maior, em moódulo, para $\rho > 1$, que a série com termo geral $k/(\rho^{2n} \cdot 2n!)$, ambas convergem. Portanto existem constantes M, N, O, P, Q, R e S que majoram as séries entre parenteses na equação 4.12. Assim, ao tomarmos o limite quando $\rho \rightarrow \infty$ em ambos os lados (note que o ângulo α pode mudar se mantivermos o comprimento dos três lados fixos), temos:

$$\cos\alpha' = \frac{-\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2}}{bc} \Rightarrow bc \cdot \cos\alpha' = -\frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha'$$

que é a lei dos cossenos no plano. ■

Colorolário 4.1 (Corolário da lei dos cossenos). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre S_ρ^2 , sejam a, b e c o comprimento dos lados e sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos opostos a cada lado, respectivamente (como na figura 4.3). Então:*

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\text{sen}\beta \cdot \text{sen}\gamma};$$

$$\cos \frac{b}{\rho} = \frac{\cos\beta + \cos\alpha \cdot \cos\gamma}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\gamma};$$

$$\cos \frac{c}{\rho} = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta}.$$

Demonstração do Corolário 4.1. *Para esta demonstração precisaremos de um lema.*

Lema 4.1. - *Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x^2 < 1, y^2 < 1$ e $z^2 < 1$ e sejam:*

$$\begin{aligned} a &= \frac{x-yz}{(1-y^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}}; \\ b &= \frac{y-xz}{(1-x^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}}; \\ c &= \frac{z-xy}{(1-x^2)^{1/2} \cdot (1-y^2)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Então:

$$\begin{aligned}x &= \frac{a+bc}{(1-b^2)^{1/2} \cdot (1-c^2)^{1/2}}; \\y &= \frac{b+ac}{(1-a^2)^{1/2} \cdot (1-c^2)^{1/2}}; \\z &= \frac{c+ab}{(1-a^2)^{1/2} \cdot (1-b^2)^{1/2}}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Demonstração do Lema 4.1. *Seja $M = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$, então*

$$1-a^2 = -\frac{(x-yz)^2 - (1-y^2)(1-z^2)}{(1-y^2)(1-z^2)} = -\frac{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}{(1-y^2)(1-z^2)} = \frac{-M}{(1-y^2)(1-z^2)}.$$

Analogamente segue que

$$1-b^2 = \frac{-M}{(1-x^2)(1-z^2)} \quad e \quad 1-c^2 = \frac{-M}{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}a+bc &= \frac{x-yz}{(1-y^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}} + \frac{y-xz}{(1-x^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}} \cdot \frac{z-xy}{(1-x^2)^{1/2} \cdot (1-y^2)^{1/2}} = \\&= \frac{x-x^3-yz+x^2yz+yz-xy^2-xz^2+x^2yz}{(1-x^2) \cdot (1-y^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}} = \frac{x \cdot (1+2xyz-x^2-y^2-z^2)}{(1-x^2) \cdot (1-y^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2}}\end{aligned}$$

e

$$(1-b^2)(1-c^2) = \frac{M^2}{(1-x^2)^2(1-y^2)(1-z^2)},$$

portanto

$$\frac{a+bc}{\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}} = \frac{x \cdot (1+2xyz-x^2-y^2-z^2) \cdot (1-x^2)(1-y^2)^{1/2}(1-z^2)^{1/2}}{(1-x^2) \cdot (1-y^2)^{1/2} \cdot (1-z^2)^{1/2} \cdot M} = \frac{Mx}{M} = x.$$

De maneira análoga obtemos as outras equações.

Observe que pela lei dos cossenos

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}\frac{c}{\rho}} = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\sqrt{1-\cos^2\frac{b}{\rho}} \cdot \sqrt{1-\cos^2\frac{c}{\rho}}}$$

e que $\cos\frac{b}{\rho}$ e $\cos\frac{c}{\rho}$ são diferentes de 1 e de -1 pois, num triângulo esférico o ângulo $\theta = \frac{\pi}{\rho}$ correspondente a um dos lados deve ser diferente de 0 (caso isso ocorresse teríamos dois dos vértices do triângulo no mesmo ponto e um único grande círculo

conteria os três vértices do triângulo, o que é absurdo) e também diferente de π (caso isso ocorresse teríamos um equador contendo os três vértices do triângulo, o que é absurdo). Assim a lei dos cossenos satisfaz as hipóteses do Lema e portanto:

$$\begin{aligned}\cos\frac{a}{\rho} &= \frac{\cos\alpha + \cos\beta.\cos\gamma}{\text{sen}\beta.\text{sen}\gamma}; \\ \cos\frac{b}{\rho} &= \frac{\cos\beta + \cos\alpha.\cos\gamma}{\text{sen}\alpha.\text{sen}\gamma}; \\ \cos\frac{c}{\rho} &= \frac{\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta}{\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta}.\end{aligned}$$

■

Teorema 4.3 (Lei dos senos esférica). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo esférico sobre S_ρ^2 , sejam a, b e c o comprimento dos lados e sejam α, β e γ as medidas dos ângulos internos opostos a cada lado, respectivamente (como na figura 4.3), então*

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\frac{a}{\rho}} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{sen}\frac{b}{\rho}} = \frac{\text{sen}\gamma}{\text{sen}\frac{c}{\rho}}. \quad (4.15)$$

Demonstração 4.3. *Pela lei dos cossenos temos:*

$$\begin{aligned}\text{sen}^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho}.\cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho}.\text{sen}\frac{c}{\rho}} \right)^2; \\ &= \frac{\text{sen}^2\frac{b}{\rho}.\text{sen}^2\frac{c}{\rho} - \cos^2\frac{a}{\rho} + 2\cos\frac{a}{\rho}.\cos\frac{b}{\rho}.\cos\frac{c}{\rho} - \cos^2\frac{b}{\rho}.\cos^2\frac{c}{\rho}}{\text{sen}^2\frac{b}{\rho}.\text{sen}^2\frac{c}{\rho}}; \\ &= \frac{(1 - \cos^2\frac{b}{\rho})(1 - \cos^2\frac{c}{\rho}) - \cos^2\frac{a}{\rho} + 2\cos\frac{a}{\rho}.\cos\frac{b}{\rho}.\cos\frac{c}{\rho} - \cos^2\frac{b}{\rho}.\cos^2\frac{c}{\rho}}{\text{sen}^2\frac{b}{\rho}.\text{sen}^2\frac{c}{\rho}}; \\ &= \frac{1 - \cos^2\frac{a}{\rho} - \cos^2\frac{b}{\rho} - \cos^2\frac{c}{\rho} + 2\cos\frac{a}{\rho}.\cos\frac{b}{\rho}.\cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}^2\frac{b}{\rho}.\text{sen}^2\frac{c}{\rho}},\end{aligned}$$

analogamente

$$\text{sen}^2\beta = \frac{1 - \cos^2\frac{a}{\rho} - \cos^2\frac{b}{\rho} - \cos^2\frac{c}{\rho} + 2\cos\frac{a}{\rho}.\cos\frac{b}{\rho}.\cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}^2\frac{a}{\rho}.\text{sen}^2\frac{c}{\rho}}$$

e

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{1 - \cos^2 \frac{a}{\rho} - \cos^2 \frac{b}{\rho} - \cos^2 \frac{c}{\rho} + 2 \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho}},$$

portanto

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{\rho}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{a}{\rho} - \cos^2 \frac{b}{\rho} - \cos^2 \frac{c}{\rho} + 2 \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}^2 \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho}}.$$

Então

$$\left| \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho}} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right|$$

mas com $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $0 < \gamma < \pi$ e como $0 < \frac{a}{\rho} < \pi$, $0 < \frac{b}{\rho} < \pi$, $0 < \frac{c}{\rho} < \pi$ os senos nas equações acima são todos positivos e portanto

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho}} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \frac{c}{\rho}}.$$

■

Voltando para o plano. Vamos mostrar que, no limite, quando o raio da esfera vai para o infinito, voltamos ao caso euclideo $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b}$.

Demonstração. Se expandirmos o seno pela série de Taylor, com $x_0 = 0$ temos

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Assim

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\frac{a}{\rho} - \frac{a^3}{3! \rho^3} + \frac{a^5}{5! \rho^5} - \frac{a^7}{7! \rho^7} + \dots} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\frac{b}{\rho} - \frac{b^3}{3! \rho^3} + \frac{b^5}{5! \rho^5} - \frac{b^7}{7! \rho^7} + \dots},$$

multiplicando os dois lados por ρ , temos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5! \rho^2} - \frac{a^7}{7! \rho^4} + \dots \right)} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5! \rho^2} - \frac{b^7}{7! \rho^4} + \dots \right)}.$$

Mas, pelo teste da razão, uma série com termo geral da forma $k/2n!$ é

convergente. De fato

$$\frac{k}{(2n+2)!} \cdot \frac{2n!}{k} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Como esta série é maior, em módulo, para $\rho > 1$, que a série com termo geral $k/(\rho^{2n} \cdot 2n!)$. Assim ambas convergem, portanto existem constantes M e N que majoram as séries entre parenteses na equação acima. Assim, ao tomarmos o limite quando $\rho \rightarrow \infty$ em ambos os lados (note que o ângulo α e β podem mudar se mantivermos o comprimento dos três lados fixos), temos

$$\frac{\text{sen}\alpha'}{a} = \frac{\text{sen}\beta'}{b},$$

que é a lei dos senos no plano. ■

Definição 4.1. *Um triângulo esférico $\triangle ABC$ é congruente ao $\triangle A'B'C'$ se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:*

$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{A'B'} & \angle BAC &\cong \angle B'A'C' \\ \overline{AC} &\cong \overline{A'C'} & \text{e } \angle CBA &\cong \angle C'B'A' \\ \overline{BC} &\cong \overline{B'C'} & \angle ACB &\cong \angle A'C'B' \end{aligned} \tag{4.16}$$

Onde $X \cong X'$ significa $m(X) = m(X')$. Como mostra a figura 4.5.

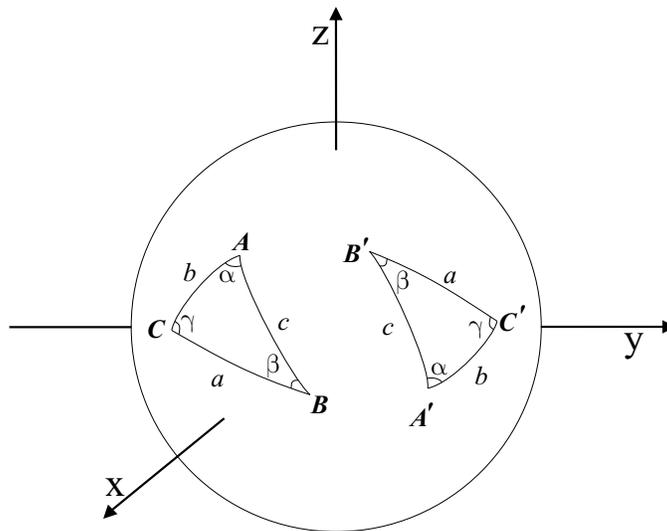


Figura 4.5: Dois triângulos esféricos congruentes

Teorema 4.4 (Caso AAA de Congruência). *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 sobre S_ρ^2 tem ângulos internos congruentes, então eles são congruentes.*

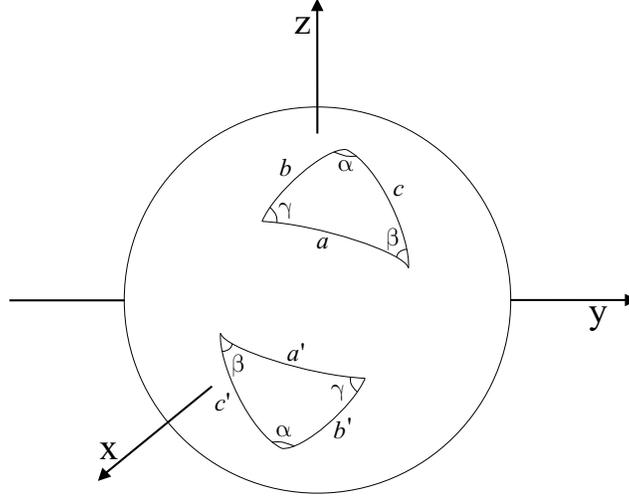


Figura 4.6: Dois triângulos esféricos com ângulos internos congruentes

Demonstração 4.4. *Usando o corolário da lei dos cossenos nos dois triângulos temos:*

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma};$$

$$\cos \frac{b}{\rho} = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \gamma};$$

$$\cos \frac{c}{\rho} = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}$$

e

$$\cos \frac{a'}{\rho} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \beta \cdot \operatorname{sen} \gamma};$$

$$\cos \frac{b'}{\rho} = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \cdot \cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \gamma};$$

$$\cos \frac{c'}{\rho} = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}.$$

Desta maneira, $\cos \frac{a}{\rho} = \cos \frac{a'}{\rho}$, $\cos \frac{b}{\rho} = \cos \frac{b'}{\rho}$ e $\cos \frac{c}{\rho} = \cos \frac{c'}{\rho}$, mas como o cosseno é unicamente definido em $]0, \pi[$ temos que $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$ portanto os

triângulos são congruentes como queríamos demonstrar. ■

Teorema 4.5 (Caso ALA de congruência). *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 sobre S_ρ^2 tem dois ângulos e o lado entre eles congruentes, como na figura 4.7, então eles são congruentes.*

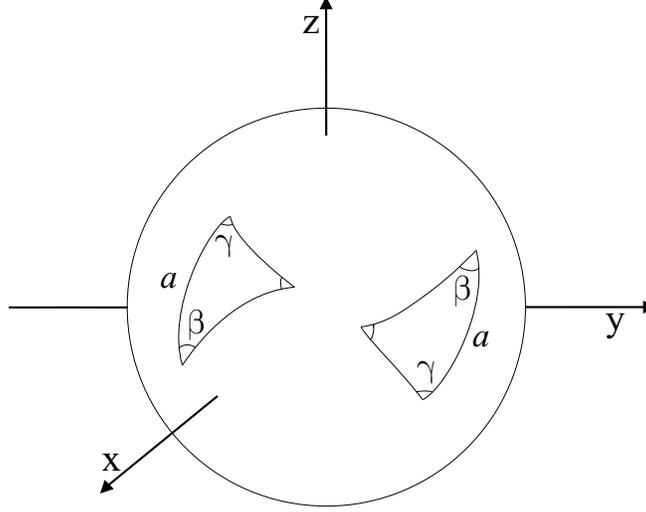


Figura 4.7: Dois triângulos esféricos com dois ângulos congruentes e o lado entre eles congruente.

Demonstração 4.5. *Pelo corolário da lei dos cossenos, no triângulo de lados a , b e c temos*

$$\cos \frac{a}{\rho} = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma} \Rightarrow \cos \alpha = \cos \frac{a}{\rho} \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Utilizando o mesmo corolário, no triângulo de lados a' , b' e c' temos

$$\cos \frac{a'}{\rho} = \frac{\cos \alpha' + \cos \beta' \cdot \cos \gamma'}{\text{sen} \beta' \cdot \text{sen} \gamma'} \Rightarrow \cos \alpha' = \cos \frac{a'}{\rho} \cdot \text{sen} \beta' \cdot \text{sen} \gamma' - \cos \beta' \cdot \cos \gamma'.$$

Mas $\angle \beta \cong \angle \beta'$, $\angle \gamma \cong \angle \gamma'$ e $a \cong a'$, assim

$$\cos \alpha' = \cos \frac{a}{\rho} \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma = \cos \alpha.$$

Como o cosseno é unicamente definido no intervalo $(0, \pi)$ temos que $\alpha' \cong \alpha$ e assim, pelo caso AAA de congruência de triângulos esféricos, os dois triângulos são congruentes. ■

Teorema 4.6 (Caso LLL de Congruência). *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 sobre S_ρ^2 tem os três lados congruentes, então eles são congruentes.*

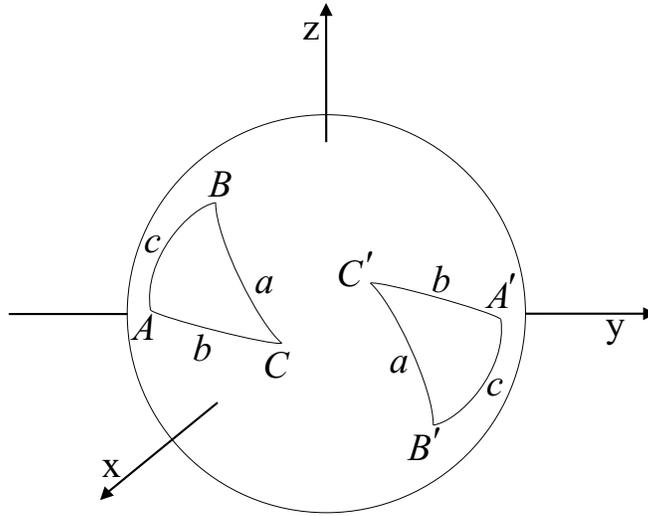


Figura 4.8: Dois triângulos esféricos com os três lados congruentes

Demonstração 4.6. *Pela Lei dos Cossenos*

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos\frac{b}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{b}{\rho} \cdot \text{sen}\frac{c}{\rho}} \qquad \cos\gamma = \frac{\cos\frac{c}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{b}{\rho}}{\text{sen}\frac{a}{\rho} \cdot \text{sen}\frac{b}{\rho}}$$

$$\cos\beta = \frac{\cos\frac{b}{\rho} - \cos\frac{a}{\rho} \cdot \cos\frac{c}{\rho}}{\text{sen}\frac{a}{\rho} \cdot \text{sen}\frac{c}{\rho}}$$

Assim, como o ângulo entre dois lados de um triângulo esférico é maior do que 0 e menor do que π , temos que α , β e γ são unicamente difnidos. Desta maneira os ângulos entre lados congruentes tem a mesma medida e, portanto, são congruentes. Assim $\Delta_1 \cong \Delta_2$. ■

Teorema 4.7 (Caso LAL de Congruência). *Se os triângulos esféricos Δ_1 e Δ_2 sobre S_ρ^2 tem dois lados e os ângulos entre estes lados congruentes, como na figura 4.9, então eles são congruentes.*

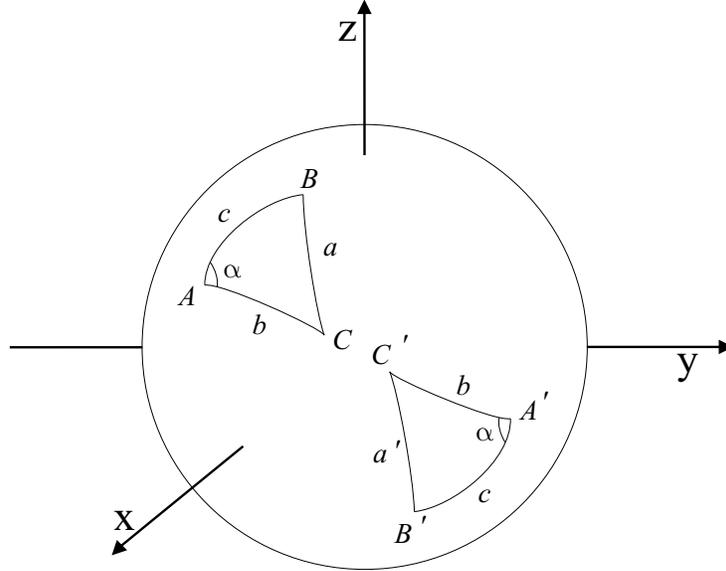


Figura 4.9: Dois triângulos com dois lados e o ângulo entre eles congruentes

Demonstração 4.7. *Pela lei dos cossenos, no triângulo ΔABC , temos*

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\sin \frac{b}{\rho} \cdot \sin \frac{c}{\rho}} \Rightarrow \cos \frac{a}{\rho} = \cos \alpha \cdot \sin \frac{b}{\rho} \cdot \sin \frac{c}{\rho} + \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}$$

e no triângulo $\Delta A'B'C'$ temos

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{a'}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\sin \frac{b}{\rho} \cdot \sin \frac{c}{\rho}} \Rightarrow \cos \frac{a'}{\rho} = \cos \alpha \cdot \sin \frac{b}{\rho} \cdot \sin \frac{c}{\rho} + \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}$$

Assim $\cos \frac{a'}{\rho} = \cos \frac{a}{\rho}$ mas, como $0 < \frac{a}{\rho} < \pi$ e o cosseno é unicamente definido neste intervalo, temos $\frac{a'}{\rho} = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = a' \Rightarrow \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ mas, por hipótese os outros dois lados são congruentes, portanto, pelo caso LLL de congruência de triângulos esféricos, $\Delta_1 \cong \Delta_2$. ■

Definição 4.2. Dizemos que um triângulo esférico é isósceles se ele tem dois lados congruentes.

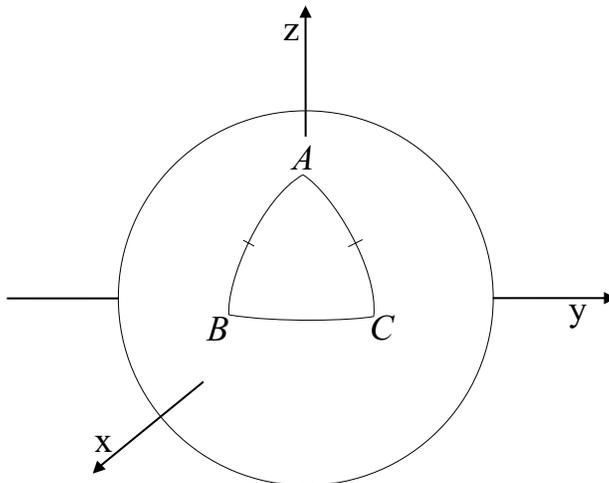


Figura 4.10: Um triângulo esférico isósceles

Teorema 4.8 (Teorema do triângulo isósceles). - Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes.

Demonstração 4.8. Vamos provar que este triângulo é congruente a ele mesmo, refletido. Construimos $\triangle A'B'C'$ (na figura 4.11) tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\angle BAC \cong \angle C'A'B'$, $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ e $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$.

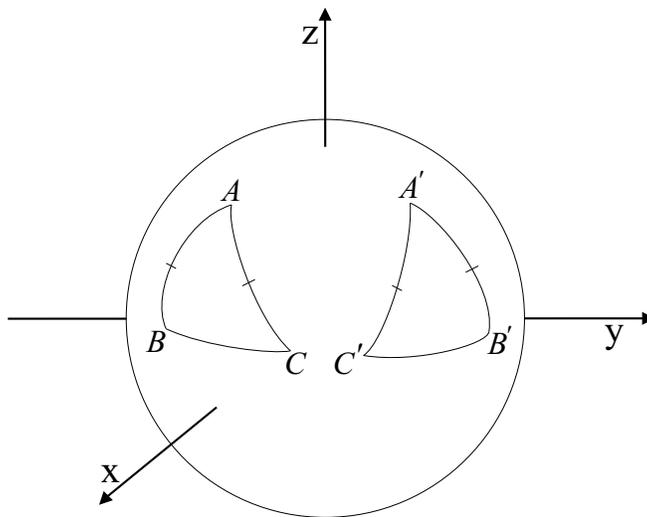


Figura 4.11: $\triangle A'B'C'$ é uma cópia de $\triangle ABC$

Por construção:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'C'};$$

$$\overline{AC} \cong \overline{A'B'};$$

$$\angle BAC \cong \angle C'A'B'.$$

Pelo caso LAL de congruência de triângulos esféricos $\angle ABC \cong \angle A'C'B'$, mas por construção $\angle A'C'B' \cong \angle ACB$ assim, $\angle ABC \cong \angle ACB$ portanto, os ângulos opostos aos lados congruentes são congruentes.

■

Definição 4.3. Dizemos que um triângulo esférico é equilátero se ele tem os três lados congruentes.

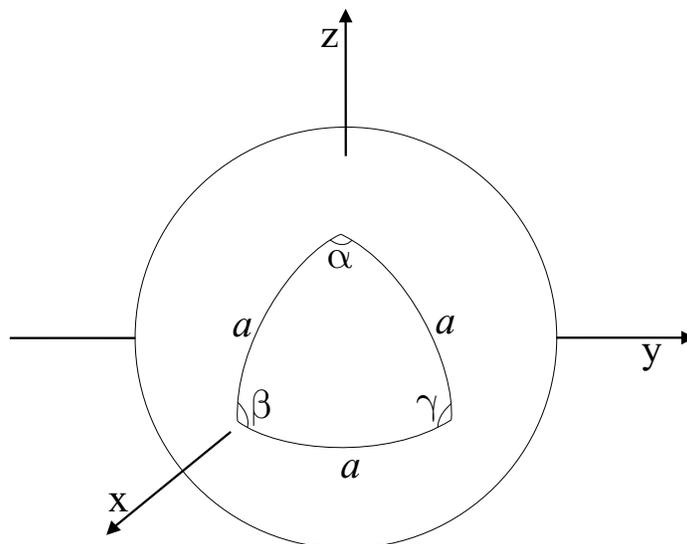


Figura 4.12: Um triângulo esférico equilátero

Teorema 4.9 (Teorema do triângulo equilátero). Um triângulo equilátero tem os três ângulos internos congruentes.

Demonstração 4.9. Em particular um triângulo equilátero tem dois lados congruentes e, portanto, pelo teorema do triângulo isósceles, os ângulos opostos a estes lados são congruentes. Assim $\alpha \cong \beta$, utilizando novamente o teorema do triângulo isósceles, temos que $\beta \cong \gamma$ e portanto $\alpha \cong \beta \cong \gamma$.

■

Como os três lados do triângulo esférico equilátero têm a mesma medida, podemos nos referir ao triângulo esférico equilátero de lado a , e como os três ângulos internos de um triângulo esférico equilátero são congruentes, podemos nos referir ao ângulo do triângulo esférico equilátero.

Teorema 4.10. *Seja Δ_1 um triângulo esférico equilátero sobre S_ρ^2 .*

1. *Se o lado do Δ_1 mede a , então, ângulo α do triângulo é tal que*

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{\rho}}{1 + \cos\frac{a}{\rho}}.$$

2. *Se o ângulo de Δ_1 mede α , então o lado do triângulo é tal que*

$$\cos\frac{a}{\rho} = \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Demonstração 4.10.

1. $0 < \frac{a}{\rho} < \pi$ pois segmentos de comprimento π sobre uma esfera, ligam pontos antípodas (não teríamos um triângulo, e sim um gomo). Pela lei dos cossenos

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{a}{\rho} - \cos^2\frac{a}{\rho}}{\sin^2\frac{a}{\rho}} = \frac{\cos\frac{a}{\rho}[1 - \cos\frac{a}{\rho}]}{1 - \cos^2\frac{a}{\rho}} = \frac{\cos\frac{a}{\rho}[1 - \cos\frac{a}{\rho}]}{(1 - \cos\frac{a}{\rho})(1 + \cos\frac{a}{\rho})} = \frac{\cos\frac{a}{\rho}}{1 + \cos\frac{a}{\rho}}.$$

2. $0 < \alpha < \pi$. Pelo corolário da lei dos cossenos

$$\cos\frac{a}{\rho} = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha[1 + \cos\alpha]}{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha[1 + \cos\alpha]}{(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

■

Exemplo 4.1. *Triângulo esférico equilátero máximo?*

Pelo teorema anterior, usando o fato que o comprimento de qualquer lado de um triângulo esférico é um número entre 0 e π , temos que

$$\frac{\cos\frac{a}{\rho}}{1 + \cos\frac{a}{\rho}} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{\cos\frac{a}{\rho}}{1 + \cos\frac{a}{\rho}} \geq -1 \Rightarrow \cos\frac{a}{\rho} \geq -1 - \cos\frac{a}{\rho} \Rightarrow \cos\frac{a}{\rho} \geq \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{a}{\rho} \leq \frac{2\pi}{3}.$$

Exemplo 4.2. *Um triângulo com os três ângulos retos???*

Seja Δ_1 um triângulo esférico equilátero cujo lado mede $\frac{\pi}{2} \cdot \rho$, então, pelo teorema anterior,

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1 + 0} = 0.$$

Como $0 \leq \alpha \leq \pi$ temos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ou seja, Δ_1 tem os três ângulos retos.

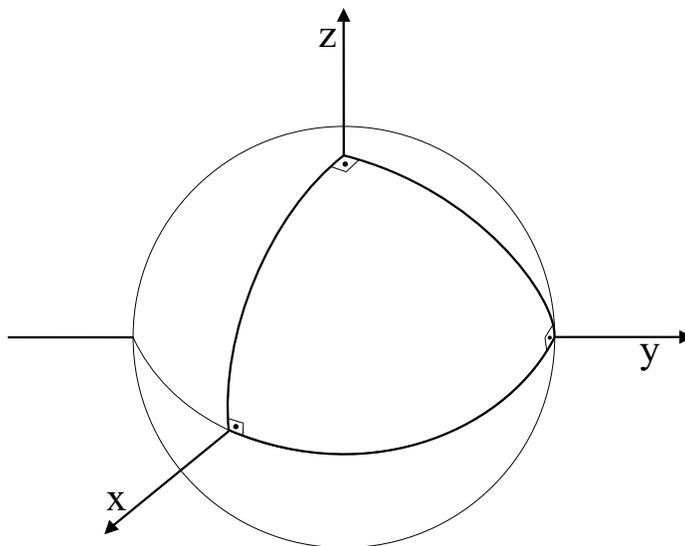


Figura 4.13: Um triângulo esférico com os três ângulos retos

4.2 Áreas de triângulos esféricos

Teorema 4.11. *A área de um triângulo $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ em S_ρ^2 , com ângulos internos medindo α , β e γ (como na figura 4.13), é*

$$A = \rho^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]. \quad (4.17)$$

Demonstração 4.11. *Seja A a área do triângulo e A_α a área da região complementar ao triângulo no gomo. Pelo lema anterior a área do gomo G_α é*

$$A + A_\alpha = 2\alpha \Rightarrow A = 2\alpha - A_\alpha.$$

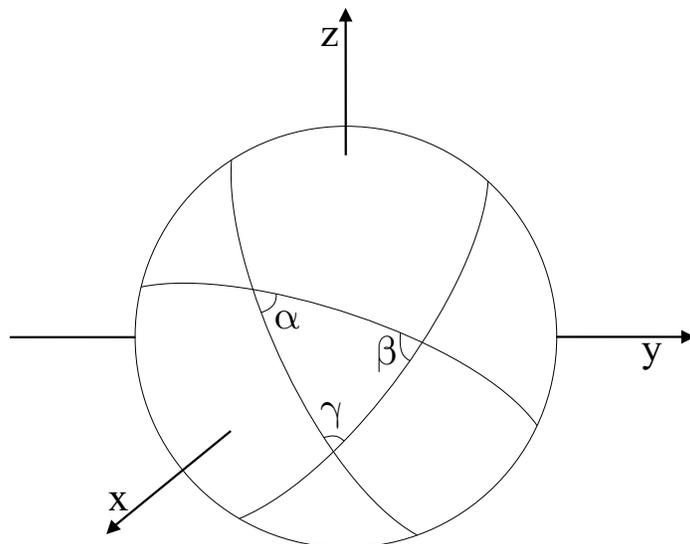


Figura 4.14: Triângulo esférico de ângulos α , β e γ

Note que dois equadores definem dois gomos antípoda e os três equadores definem dois triângulos antípoda. Seja $\Delta'(\alpha, \beta, \gamma)$ o triângulo antípoda ao $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ e G'_β o gomo antípoda ao gomo G_β , podemos definir um equador $H = G_\alpha \cup G_\gamma \cup G'_\beta - \Delta'(\alpha, \beta, \gamma)$, e portanto

$$A + A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2\pi\rho^2,$$

consequentemente

$$A + (2\alpha\rho^2 - A) + (2\beta\rho^2 - A) + (2\gamma\rho^2 - A) = 2\pi\rho^2,$$

então

$$A = \rho^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi]. \quad \blacksquare$$

Da onde obtemos a Fórmula de Girard

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A/\rho^2.$$

Note que a área de um triângulo é sempre maior que zero, e assim

$$\rho^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) - \pi > 0,$$

que nos dá a famosa desigualdade da soma dos ângulos internos em um triângulo esférico

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi. \quad (4.18)$$

Exemplo 4.3. *O triângulo das Bermudas é o triângulo esférico com vértices nas Ilhas Virgens Britânicas ($18^{\circ}17'N$, $66^{\circ}28'W$), Bermudas ($32^{\circ}19'N$, $64^{\circ}50'W$) e no extremo sul da Flórida ($24^{\circ}46'N$, $80^{\circ}57'W$). Aproximando a Terra por uma esfera de raio 6400km , qual a área do triângulo das bermudas?*

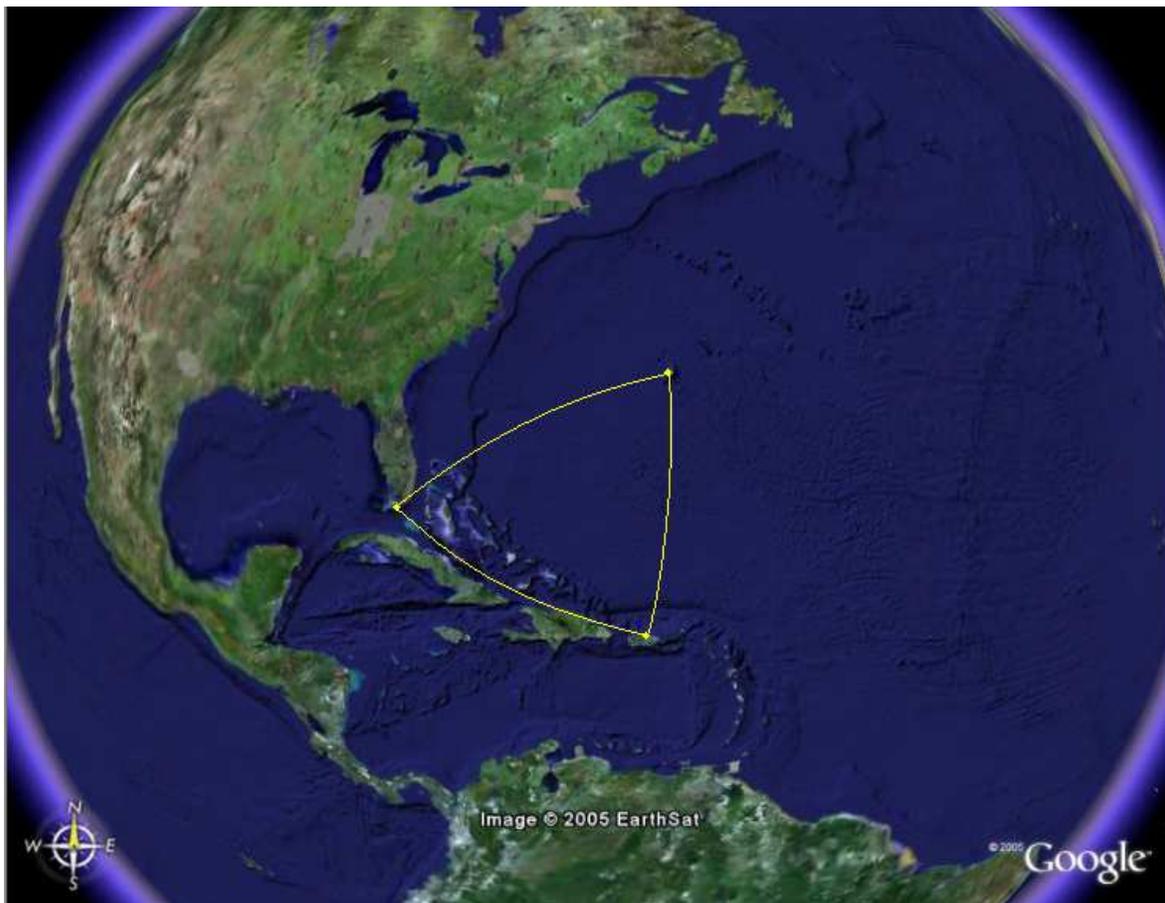


Figura 4.15: O Triângulo das Bermudas

Solução:

Vamos utilizar o mesmo sistema coordenado dos exemplos anteriores.

A tabela abaixo mostra as coordenadas dos vértices do triângulo esférico:

	Latitude	Longitude	θ	ψ
Ilhas V. Britânicas	18°17'N	66°28'W	-1,16 <i>radianos</i>	1,244 <i>radianos</i>
Bermudas	32°19'N	64°50'W	-1,131 <i>radianos</i>	1,006 <i>radianos</i>
Sul da Flórida	24°46'N	80°57'W	-1,413 <i>radianos</i>	1,138 <i>radianos</i>

Assim, a distância d_1 entre as Ilhas Virgens e as Bermudas é

$$d_1 = 6400 \cdot \arccos(\cos(0,029) \cdot \cos(0,238) + 2 \cdot \text{sen}^2(0,0145) \cdot \cos(1,244) \cdot \cos(1,006)) \text{ km}$$

$$d_1 \approx 6400 \cdot 0,239 \text{ km} = 1532,3 \text{ km}.$$

Assim, a distância d_2 entre as Ilhas Virgens e o Sul da Flórida é

$$d_2 = 6400 \cdot \arccos(\cos(0,253) \cdot \cos(0,106) + 2 \cdot \text{sen}^2(0,1265) \cdot \cos(1,244) \cdot \cos(1,138)) \text{ km}$$

$$d_2 \approx 6400 \cdot 0,257 \text{ km} = 1648,29 \text{ km}.$$

Assim, a distância d_3 entre as Bermudas e o Sul da Flórida é

$$d_3 = 6400 \cdot \arccos(\cos(0,282) \cdot \cos(0,132) + 2 \cdot \text{sen}^2(0,141) \cdot \cos(1,006) \cdot \cos(1,138)) \text{ km}$$

$$d_3 \approx 6400 \cdot 0,280 \text{ km} = 1792 \text{ km}.$$

Pela Lei dos Cossenos o ângulo α , cujo lado oposto liga as Ilhas Virgens Britânicas e as Bermudas, é

$$\alpha = \arccos \frac{\cos \frac{1532,3}{6400} - \cos \frac{1648,29}{6400} \cdot \cos \frac{1792}{6400}}{\text{sen} \frac{1648,29}{6400} \cdot \text{sen} \frac{1792}{6400}} \approx 0,9293 \text{ radianos}.$$

Pela Lei dos Cossenos o ângulo β , cujo lado oposto liga as Ilhas Virgens Britânicas e o Sul da Flórida, é

$$\beta = \arccos \frac{\cos \frac{1648,29}{6400} - \cos \frac{1532,3}{6400} \cdot \cos \frac{1792}{6400}}{\text{sen} \frac{1532,3}{6400} \cdot \text{sen} \frac{1792}{6400}} \approx 1,0363 \text{ radianos}.$$

Pela Lei dos Cossenos o ângulo γ , cujo lado oposto liga as Bermudas e o

Sul da Flórida, é

$$\beta = \arccos \frac{\cos \frac{1792}{6400} - \cos \frac{1532,3}{6400} \cdot \cos \frac{1648,29}{6400}}{\operatorname{sen} \frac{1532,3}{6400} \cdot \operatorname{sen} \frac{1648,29}{6400}} \approx 1,2046 \text{ radianos.}$$

Assim, pela equação 4.17

$$A \approx 6400^2 [1,2046 + 1,0363 + 0,9293 - 3,1416] \text{ km}^2 = 40960000 \cdot 0,0286 \text{ km}^2 = 1171456 \text{ km}^2.$$

Teorema 4.12. *A área de um triângulo $\Delta(\alpha, \beta, \gamma)$ em S_ρ^2 , com lados medindo a , b e c é*

$$\begin{aligned} A = \rho^2 & \left[\arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) + \arccos \left(\frac{\cos \frac{c}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right) \right. \\ & \left. + \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) - \pi \right]. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Demonstração 4.12. *Pelo lei dos cossenos temos*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right)^2 \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho} - \cos^2 \frac{a}{\rho} + 2 \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho} - \cos^2 \frac{b}{\rho} \cdot \cos^2 \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho}} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 \frac{b}{\rho})(1 - \cos^2 \frac{c}{\rho}) - \cos^2 \frac{a}{\rho} + 2 \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho} - \cos^2 \frac{b}{\rho} \cdot \cos^2 \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho}} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \frac{a}{\rho} - \cos^2 \frac{b}{\rho} - \cos^2 \frac{c}{\rho} + 2 \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen}^2 \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{c}{\rho}}. \end{aligned}$$

Portanto, pela equação 4.17, a área de um triângulo esférico em função dos lados é

$$\begin{aligned} A = \rho^2 & \left[\arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) + \arccos \left(\frac{\cos \frac{c}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right) \right. \\ & \left. + \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) - \pi \right]. \end{aligned}$$

■

Teorema 4.13. *Seja Δ_1 um triângulo esférico cujos lados medem a , b e c e os ângulos opostos a estes lados são, respectivamente, α , β e γ , como na figura 4.3, então soma dos ângulos internos deste triângulo esférico é*

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = & \arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) + \arccos \left(\frac{\cos \frac{c}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right) \\ & + \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right). \end{aligned}$$

Demonstração 4.13. *Pelas equações 4.17 e 4.19 temos*

$$\begin{aligned} \rho^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] = & \rho^2 \left[\left(\arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) + \arccos \left(\frac{\cos \frac{c}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) \right) - \pi \right], \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = & \arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{\rho} - \cos \frac{b}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{b}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right) + \arccos \left(\frac{\cos \frac{c}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{b}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{b}{\rho}} \right) \\ & + \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{\rho} - \cos \frac{a}{\rho} \cdot \cos \frac{c}{\rho}}{\operatorname{sen} \frac{a}{\rho} \cdot \operatorname{sen} \frac{c}{\rho}} \right). \end{aligned}$$

■

Conclusão

Para realizar este trabalho, estudei um pouco de cálculo vetorial e de álgebra linear e, é claro, geometria esférica, através da qual conheci geometrias não euclidianas, a importância dos resultados que encontramos nelas e descobri que não existe uma geometria, mas sim geometrias, e que elas dependem da noção intuitiva que damos aos termos primitivos, apesar deste trabalho não tratar de forma axiomática a geometria.

Descobrimos que o surgimento da geometria esférica ocorreu há pelo menos 2000 anos, motivado por questões religiosas, agrícolas e astronômicas. Vimos algumas de suas possíveis aplicações na navegação e na agrimensura, mas ela tem aplicações em várias outras áreas, como, por exemplo, na astronomia quando aproximarmos a Terra ou algum outro corpo celeste por uma esfera.

Também desenvolvemos as ferramentas básicas para tratarmos de problemas em superfícies esféricas, tais como, o teorema de pitágoras esférico, a lei dos senos esférica e a lei dos cossenos esférica (além de mostrarmos as relações destas com suas versões no plano), os casos de congruência de triângulos esféricos e as áreas destes.

Referências Bibliográficas

- [1] DORIA, CELSO M. - *Geometrias Não-Euclidianas: Exemplos*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBA, outubro de 2004.
- [2] Marsden, Jerrold E. e Hoffman, Michael J. - *Elementary Classical Analysis*. W. H. Freeman; 1993.
- [3] H.S.M. Coxeter - *Mathematical Expositions: Non-Euclidean Geometry*. University of Toronto Press, 5ª edição, 1965.
- [4] Dolce, Osvaldo e Pompeo, José N. - *Fundamentos de Matemática Elementar*, 7ª edição, volume 9. Atual, 1993.
- [5] Karlson, Paul - *A magia dos números*. Globo, 1961.

Referencias na WWW (World Wide Web)

- [W1] DORIA, CELSO M. - *Estruturas Geométricas em Dimensão 2*. Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Matemática, <http://www.mtm.ufs.br>.
- [W2] GOOGLE EARTH.
<http://www.googleearth.com>.
- [W3] <http://www.math.cornell.edu/dtaimina/MAA/MAA.htm>.
- [W4] Wikipedia
www.wikipedia.org