Principio del palomar

Juana Contreras S.[♣]
Claudio del Pino O.[♦]

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Introducción

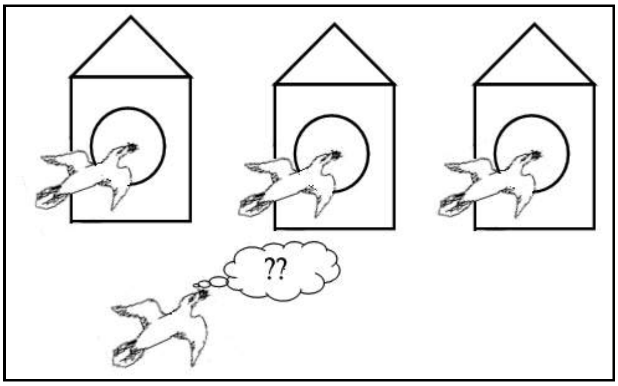
Cuando se reúnen 367 personas, es seguro que debe haber al menos dos personas que cumplen años el mismo día. ¿Qué tienen que ver las palomas para justificar la validez de esta proposición?. El *principio del palomar* establece que, si se cuenta con n nidos y una cantidad de palomas mayor que n, entonces sea cual fuere la distribución de palomas en los n nidos, hay al menos un nido con más de una paloma.

Por lo tanto, como hay 365 o 366 posibles fechas de cumpleaños (*nidos*), con seguridad hay al menos dos personas del grupo de 367 personas (*palomas*) que tienen la misma fecha de cumpleaños. Este elemental pero importante principio de Combinatoria, conocido también con el nombre de *principio de las casillas de Dirichlet*.

El principio del palomar trata la solución de un *problema de existencia*, y se constituye en una herramienta muy útil para realizar demostraciones y resolver ciertos problemas de conteo, con resultados que sorprenden. Se basa en el siguiente hecho: si A y B son dos conjuntos finitos tales que $\#(A) > \#(B)$, entonces no existe una función inyectiva de A en B.

Principio del palomar

Si $k+1$ o más objetos se colocan en k casillas, existe al menos una casilla que contiene dos o más objetos.



[♣] e-mail: jcontres@utalca.cl
[♦] e-mail: cdelpino@utalca.cl

Un enunciado equivalente del principio del palomar es el siguiente: si n objetos se distribuyen en k conjuntos y $n > k$, entonces hay al menos dos objetos que se encuentran en el mismo conjunto.

Este principio tan simple permite resolver de forma rápida y elegante numerosos problemas de distinta naturaleza: aritméticos, geométricos, combinatorios, etc. La clave para resolver problemas por medio del principio del palomar es identificar quiénes desempeñan el papel de las palomas y quiénes el de los nidos.

Cumplen años en el mismo mes
En un grupo de 13 personas existen al menos dos que cumplen años en el mismo mes.

Las 13 personas juegan el papel de las palomas y los 12 meses del año el de los nidos. Luego, la justificación es similar a la del problema inicial.

Un problema de aritmética
Seleccionar seis números naturales cualesquiera. Se puede asegurar que siempre hay al menos dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de cinco.

En efecto, como sólo hay cinco posibles restos (nidos) de dividir un entero por cinco, luego, de un conjunto de seis enteros (palomas), al menos dos de ellos dejan el mismo resto al dividirlo por cinco. La diferencia de estos dos números que dejan el mismo resto es múltiplo de cinco.

Coincidencia en el último dígito
De un conjunto de cupones numerados, se sortean 11, los que serán premiados. Mostrar que hay al menos dos cupones premiados cuyos números coinciden en el último digito.

El último dígito de cada cupón tiene diez posibilidades, que corresponden a los posibles restos de dividir un número entero por 10. Luego, de los 11 cupones sorteados, hay al menos dos que coinciden en el último dígito.

Un múltiplo que sorprende
Todo número entero positivo n tiene un múltiplo cuya expresión decimal está compuesta de ceros y unos.

Considerar los n+1 números enteros: 1, 11, 111, 1111, etc. tal que el último número de la lista tiene n+1 unos en su expresión decimal. Notar que, sólo hay n posibles restos de dividir un número entero por n. Luego, existen al menos dos números de la lista que dejan el mismo resto, y la diferencia entre dos de estos números es múltiplo de n y tiene sólo unos y ceros en su expresión decimal.

Una interesante propiedad
Si se eligen 51 enteros del conjunto $S=\{1, 2, 3, 4, ..., 100\}$, entonces existen dos números del conjunto S tales que uno de ellos es un factor del otro.

Cada número $n \in S$ se puede expresar en la forma $n = 2^k m$, donde k es un número entero, $k \geq 0$ y m es impar. Por ejemplo, $15 = 2^0 \cdot 15$, $16 = 2^4 \cdot 1$, $20 = 2^2 \cdot 5$ $72 = 2^3 \cdot 9$. Al elegir 51 números del conjunto S, existen al menos dos números de S de la forma $A = 2^a h$ y $B = 2^b h$, para un mismo valor de *h*. Notar que *A* es un factor de *B*, o, *B* es un factor de *A*.

Pruebas con igual nota
¿Cuántos estudiantes debe haber (por lo menos) en un curso para garantizar que al menos dos de ellos obtengan la misma nota en una prueba?. Se supone que se califica con notas de 1 a 7, enteras o con un decimal.

El conjunto de notas posibles es {1.0, 1.1, ..., 1.9, 2.0, 2.1, ..., 7.0}, es decir, 61 posibles notas. Por lo tanto, el principio del palomar asegura que si en el curso hay 62 o más estudiantes, entonces al menos dos de ellos tendrán la misma nota.

Resumiendo, el principio del palomar afirma que cuando hay más objetos que casillas donde colocar dichos objetos, siempre hay al menos dos objetos que ocuparán una misma casilla. ¿Qué se puede asegurar cuando el número de objetos es mayor que un múltiplo de la cantidad de casillas?.

Principio del palomar generalizado.
Si se colocan *n* objetos en *k* casillas, entonces existe una casilla que contiene $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ o más objetos♦.

Demostración
Suponer que en cada casilla se pueden colocar a lo más $\left[\frac{n-1}{k}\right]$ objetos.

Usando la desigualdad $\left[\frac{n-1}{k}\right] < \frac{n}{k}$, se obtiene que, el número total de objetos es a lo más:

$$k \cdot \left[\frac{n-1}{k}\right] < k\left(\frac{n}{k}\right) = n$$

lo que contradice el hecho de que hay *n* objetos.

En palabras más simples, si *n* objetos se distribuyen en *k* conjuntos y $n > mk$, entonces al menos m+1 objetos se encuentran en un mismo conjunto.

En particular, si $n>k$ entonces hay al menos dos objetos en un mismo conjunto. Igualmente, si $n > 2k$, entonces hay al menos tres objetos en un mismo conjunto, etc.

♦ La notación $[x]$, se lee *cajita de x*, y representa el mayor entero menor o igual a *x*. Por ejemplo: $[31{,}235] = 31$, $[100/9] = 11$.

A continuación se presentan algunas situaciones donde se aplica este principio.

Número de palomas en un nido
Si 21 palomas se alojan en 4 nidos, entonces existe al menos un nido con 6 o más palomas.

En efecto, existe un nido donde alojan $\left[\dfrac{21-1}{4}\right]+1=6$ o más palomas.

Personas que coinciden en el mes de nacimiento
En un grupo de 200 personas existen 17 o más personas que nacieron en un mismo mes.

En efecto, en un grupo de 200 personas existen $\left[\dfrac{200-1}{12}\right]+1=16+1=17$ o más personas que nacieron en un mismo mes.

Otra formulación del principio del palomar es el siguiente:

Proposición
Sean X e Y dos conjuntos finitos con n y k elementos respectivamente, y sea $f : X \to Y$

a) Sea cual fuere la función f, si $n>k$ entonces hay al menos dos elementos de X, distintos, cuyas imágenes son iguales (f no es inyectiva).

b) Más general, si $n > k \cdot s$ para cierto $s \geq 1$, entonces hay al menos s+1 elementos distintos de X, que tienen la misma imagen.

En el lenguaje de las palomas, X representa al conjunto de las palomas e Y al conjunto de los nidos, y la función f, la que define en qué nido alojará cada paloma. Para $s=1$, la proposición corresponde al principio del palomar, y para $s>1$, al principio generalizado.

La dificultad para aplicar el principio del palomar en la resolución de ciertos problemas es, identificar los conjuntos representados por X e Y respectivamente. Los ejemplos que a continuación se presentan, se resuelven usando la nueva formulación del principio.

Resolviendo un problema de números
Sea n un número natural. Seleccionar n+1 números naturales cualesquiera, distintos. Se puede asegurar que siempre hay al menos dos de ellos cuya diferencia es múltiplo de n. Problema resuelto anteriormente, para n=5.

Sea $X=\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ el conjunto que contiene los n+1 números naturales, e $Y=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ el conjunto de posibles restos de dividir un número entero por n.

Se define una función f:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \rightarrow \quad Y \\ & a_i \mapsto f(a_i) = \textit{resto de dividir } a_i \textit{ por } n \end{aligned}$$

Como X tiene n+1 elementos, e Y tiene n elementos, aplicando el principio del palomar se obtiene que existen al menos dos elementos distintos a_k, a_m en el conjunto X tales que $f(a_s) = f(a_m) = r$. Luego, $a_k - a_m$ es múltiplo de n.

Ubicaciones en una mesa redonda
Seis personas se sentaron alrededor de una mesa redonda en la que se encontraban tarjetas que identificaban a la persona que debería ocupar dicho lugar, distribuidas uniformemente. Pronto descubren que ninguna se encuentra en el lugar correcto. Demostrar que girando la mesa, se puede lograr que por lo menos dos personas queden correctamente ubicadas.

Sea $X = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ el conjunto que contiene las seis personas, y sea $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ el conjunto que representa los posibles lugares que puede desplazarse una persona, que equivale a girar la mesa. No se considera 0 o 6, ya que originalmente, cada persona no se encuentra en su lugar correcto.

Se define una función d:

$$\begin{aligned} d: X \rightarrow \quad & Y \\ p_i \mapsto \quad & d(p_i) = \textit{cantidad de lugares que debe desplazarse} \\ & \qquad p_i \textit{ para llegar a su lugar correcto (en sentido contrario} \\ & \qquad \textit{a las manecillas de un reloj)} \end{aligned}$$

Así, usando el principio del palomar, se obtiene que, al girar la mesa al menos dos de las personas coinciden con su tarjeta

Número de amigos
En un grupo de n personas, demostrar que existen al menos dos de ellas que tienen el mismo número de amigos. Se conviene que: si a es amigo de b, entonces b es amigo de a; y se considera que a no es amigo de sí mismo.

Sean $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ el conjunto que contiene las n personas, e $Y = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ el conjunto que representa las posibles cantidades de amigos que podría tener una persona del conjunto X.

Se define una función f:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to \quad Y \\ & a_i \mapsto f(a_i) = \textit{número de amigos de } a_i \textit{ en } X \end{aligned}$$

Notar que en este ejemplo, los conjuntos *X* e *Y* tienen el mismo número de elementos, luego, no es posible aplicar el principio del palomar directamente. Después de un breve estudio de los dos posibles casos que se presentan, podrá aplicarse este principio.

Caso 1: Si alguna persona a_m no tiene amigos en X, entonces $f(a_m) = 0$. Luego, no podrá existir una persona con n-1 amigos. Y ahora sí se puede aplicar el principio del palomar para este caso.

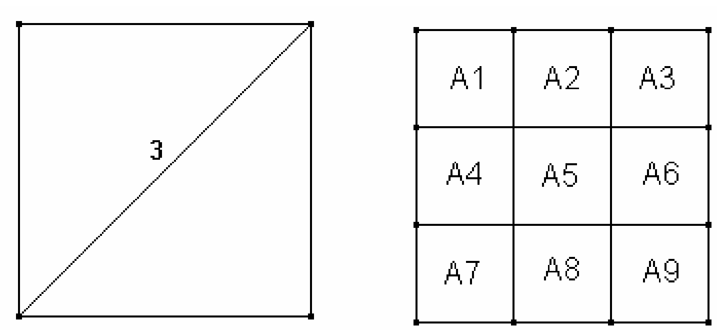
Caso 2: Si no existe una persona con 0 amigos en X, entonces $f(a_i) > 0$ para todo *i*, y se puede aplicar el principio del palomar, demostrando la proposición para este caso.

Por lo tanto, en un grupo de n amigos, al menos dos de ellos tienen el mismo número de amigos.

Colocando puntos en un cuadrado o en su interior

En un cuadrado cuya diagonal es 3 unidades se marcan 10 puntos al azar ya sea en interior o en el cuadrado mismo. Demostrar que siempre existen al menos dos puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que 1.

Dividir el cuadrado cuya diagonal mide 3 unidades, en nueve cuadraditos congruentes, como se muestra en la figura de la derecha:



Sea $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ el conjunto de los diez puntos marcados en el cuadrado e $Y = \{A_1, A_2, \ldots, A_9\}$ el conjunto de los nueve cuadraditos.

Definir una función *f*:

$$\begin{aligned} f: \quad & X \to \quad Y \\ & p_i \mapsto f(p_i) = A_j \end{aligned}$$

donde A_j es el cuadradito de menor subíndice tal que $p_i \in A_j$ (en el interior o en la frontera).

Luego, existen al menos dos puntos distintos en un mismo cuadradito.

Como la diagonal de cada cuadradito es 1 unidad, luego, existen al menos dos puntos de los marcados, tales que la distancia entre ellos es menor o igual que 1.

A continuación se presenta una propuesta de actividades que se pueden resolver aplicando el principio del palomar generalizado.

1. ¿Cuántas cartas se deben extraer de una baraja de 52 naipes para garantizar que tres de ellas sean de la misma pinta?.

2. En una estantería hay 10 libros en francés, 29 en español, 30 en alemán y 25 en inglés ¿Cuántos libros deben ser escogidos para asegurar que hay al menos 12 libros escritos en el mismo idioma?.

3. ¿Cuál es la menor longitud de los códigos de área que se requieren para garantizar que los 20 millones de teléfonos de un país tengan números distintos?. Se supone que los números de teléfono tienen el formato: $N_1N_2 \ldots – D_1D_2D_3D_4D_5$, donde los primeros dígitos ($N_1N_2 \ldots$) indican el código de área, N_1 es un dígito del 2 al 9 inclusive, y las demás variables representan un dígito cualquiera.

4. Dados diez puntos en un círculo de diámetro 5, probar que hay dos de ellos que se encuentran a una distancia menor que 2.

Como se mencionó anteriormente, el primer enunciado del principio del palomar se atribuye a *Dirichlet*, quién lo utilizó en varios de sus trabajos.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), nació en una familia francesa que vivía cerca de Colonia, Alemania. Estudió en la Universidad de París, y trabajó como profesor en las universidades de Breslau y Berlín. En 1855 sucedió a Gauss en la Universidad de Gottinga. Se dice que siempre llevaba consigo la gran obra de Gauss *Disquisitiones Arithmeticae*. *Dirichlet* estableció una formulación rigurosa de los conceptos de variable, función, y la correspondencia entre variable independiente x, y la variable independiente y, cuando y=f(x).

Dirichlet contribuyó con importantes descubrimientos en teoría de los números, entre ellos el teorema que asegura que en toda progresión aritmética $an+b$, siendo a y b primos relativos, existen infinitos números primos. Por ejemplo, existen infinitos números primos de la forma $3n$+2, entre ellos el 5, el 11, el 17, el 23, etc. Formuló el *principio del palomar* en el año 1834, con el nombre de *Schubfachprinzip* (principio de los cajones), conocido también como el *principio de Dirichlet*.

El principio del palomar generalizado se puede aplicar a una rama importante de la combinatoria llamada *teoría de Ramsey*, en honor al matemático inglés Frank Plumpton Ramsey (1903-1930).

Bibliografía

[1] Grimaldi, Ralph. (1998). *Matemáticas Discretas y Combinatoria.* Editorial Prentice Hall.

[2] Fernández G., Pablo. (2001). *Apuntes de Matemática Discreta.* Universidad Autónoma de Madrid. España.

[3] Rosen, Kenneth. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones.* Editorial Mc Graw Hill.