

imaginária.

Definição do número complexo

Um **número complexo** é qualquer número que tem a forma $a+ib$, onde $i^2 = -1$ e $a, b \in \mathbb{R}$

O conjunto dos números complexos normalmente representa – se pela letra C.

Exemplos de números complexos:

$$3+2i, \frac{1}{3}-i\sqrt{5}, 5i, -4+\frac{2}{7}i$$

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe Ano: 2015/ 1ª Época



❖ **Conceitos básicos****Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estuda-se as seguintes operações sobre proposições:

1. **Negação de uma proposição**
2. **Conjunção de proposições**
3. **Disjunção de proposições**
4. **Implicação material**
5. **Equivalência material**

Expressão algébrica

Uma expressão algébrica diz-se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare que a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a variável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pela qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2015/ 1ª Época**Resoluções****1. Resposta:**

A operação lógica que sempre associa duas proposições com mesmo valor lógico numa proposição verdadeira é a equivalência material.

2. Resposta:

A negação da expressão $2 + 5 > 7$ é:

Seja $p : 2 + 5 > 7 \Rightarrow \sim p : \sim (2 + 5 > 7) \Leftrightarrow \sim p : 2 + 5 \leq 7$.

3. Resposta:

A expressão $\frac{x}{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x + 1}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$D = \mathbb{R}$$

4. Resposta:

Resolvendo a equação $2^x + 2^{x+1} = 6$, teremos:

$$2^x + 2^{x+1} = 6 \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 6 \Leftrightarrow 2^x(1 + 2) = 6 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3 = 6 \Leftrightarrow 2^x = \frac{6}{3} \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

5. Resposta:

Consideremos a equação $x + \frac{1}{x} = 10$, desenvolvendo teremos:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= 10^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 100 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 100 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 100 - 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 98 \end{aligned}$$

6. Resposta:

Vamos calcular o valor de seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2 \times 3 \times 5 + 1 \times 2 \times 0 + 4 \times (-1) \times 0) - (4 \times 3 \times 0 + 2 \times 2 \times 0 + 1 \times (-1) \times 5) \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (30 + 0 + 0) - (-5) = 30 + 5 = 35$$

7. Resposta:

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

Permutação

A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

Vamos resolver a inequação $\frac{2x-1}{x+3} > 0$ por auxílio de uma tabela de variação de

sinal. Seja $2x-1=0 \wedge x+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x = -3$

x	$]-\infty; -3[$	-3	$]-3; \frac{1}{2}[$	$\frac{1}{2}$	$]\frac{1}{2}; +\infty[$
$2x-1$	—	-7	—	0	+
$x+3$	—	0	+	$\frac{7}{2}$	+
$\frac{2x-1}{x+3}$	+	ND	—	0	+

A fracção $\frac{2x-1}{x+3}$ é menor que zero se e somente se $x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$, logo

$$\frac{2x-1}{x+3} > 0 \text{ se } x \in]-\infty; -3[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

8. Resposta:

O valor numérico da expressão $\frac{-\operatorname{sen}(5\pi) + \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, segue:

$$\begin{aligned} \frac{-\operatorname{sen}(5\pi) + \cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)} &= \frac{-\operatorname{sen}(5 \times 180^\circ) + \cos\left(-\frac{3}{2} \times 108^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5 \times 180^\circ}{4}\right)} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen}(900^\circ) + \cos(-270^\circ)}{\operatorname{tg}(225^\circ)} = \frac{-\operatorname{sen}(180^\circ) + 0}{1} = \frac{0+0}{1} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

9. Resposta:

A expressão simplificada de $\frac{2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x)}{2\cos(x) - 1}$ segue:

$$\begin{aligned} \frac{2\operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x)}{2\cos(x) - 1} &\Leftrightarrow \frac{2\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2\cos(x) - 1} \Leftrightarrow \frac{\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2\cos(x) - 1} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)(2\cos(x) - 1)}{(2\cos(x) - 1)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(x) \end{aligned}$$

10. Resposta:

A condição para que $|1-3x| - x + 8 = 9 - 4x$ seja verdadeira segue:

$$|1-3x| - x + 8 = 9 - 4x \Leftrightarrow$$



$P_n = n!$ ou

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$n \equiv p$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de

Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$\Leftrightarrow |1-3x| - x + 8 = 9 - 4x \Leftrightarrow |1-3x| = 9 - 4x + x - 8 \Leftrightarrow |1-3x| = 1 - 3x$$

Pela definição do módulo de um número real temos:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x, & \text{se } 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x), & \text{se } 1-3x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

A condição para que $|1-3x| - x + 8 = 9 - 4x$ seja verdadeira é

$$1-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

11. Resposta:

Vamos resolver a equação modular $|5x-1| = x+3$ e depois somar os elementos do conjunto solução:

$$|5x-1| = x+3 \Leftrightarrow$$

$$5x-1 = x+3 \vee 5x-1 = -x-3 \Leftrightarrow$$

$$5x-x = 3+1 \vee 5x+x = -3+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \vee 6x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{4} \vee x = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow S = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

12. Resposta:

O número que representa $\frac{5!+6!}{6!}$ segue:

$$\frac{5!+6!}{6!} = \frac{5!+6 \times 5!}{6 \times 5!} = \frac{5!(1+6)}{6 \times 5!} = \frac{1+6}{6} = \frac{7}{6}$$

13. Resposta:

Vamos desenvolver a expressão $(x+2)^8$, assim:

$$(x+2)^8 = C_0^8 x^8 2^0 + C_1^8 x^7 2^1 + C_2^8 x^6 2^2 + C_3^8 x^5 2^3 + C_4^8 x^4 2^4 + C_5^8 x^3 2^5 + C_6^8 x^2 2^6 +$$

Repare que o sexto termo é $C_4^8 x^4 2^4$

14. Resposta:

O número total de comissões formado por homens e mulheres, sendo cada comissão tem 3 elementos é dado por C_3^7 . O número total de comissões formado por apenas mulheres é dado por C_3^4 , foi dito no problema que em cada comissão deve ter pelo menos um homem, isto significa as comissões deve ter um homem ou dois, neste caso temos que retirar a possibilidade de ter comissões formadas por três mulheres, assim:

$$nCP = C_3^7 - C_3^4 \Leftrightarrow nCP = \frac{7!}{(7-3)!3!} - \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} - \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 35 - 4 = 31, \text{ o}$$

número de comissões possíveis a criar são 31.

15. Resposta:

Vamos representar o espaço amostral deste fenómeno aleatório (experimento aleatório):

$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$, o evento cair faces diferentes tem seguinte elementos:

$A = \{CC, KK \Rightarrow n(\Omega) = 4 \wedge n(A) = 2\}$, os eventos elementares do espaço amostral

Ω são equiprováveis e mutuamente excludentes dois a dois, pois é um espaço amostral enumerável e finito, portanto podemos aplicar a definição de Laplace para resolver este problema, assim:



$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(CF) \geq n(CP)$$

Límite de uma sucessão**Sucessão convergente**

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$$1. k \times \infty = \infty$$

$$2. \infty^k = \infty$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

16. Resposta:

Uma sucessão diz-se infinitamente pequena quando o limite dessa sucessão tende para zero quando o valor de n tende para infinito, sendo assim a sucessão da opção A é infinitamente pequena, assim,

$$\frac{n-1}{(n+1)^2} \Rightarrow \lim \left(\frac{n-1}{(n+1)^2} \right) = \lim \left(\frac{n-1}{n^2+2n+1} \right) = \lim \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

17. Resposta:

$$\text{Seja } a_n = \frac{2n+1}{n}; \delta = 0.02 = \frac{2}{100} \wedge L = 2$$

$$\text{Pela definição de limite de uma sucessão, tem: } \lim \frac{2n+1}{n} = L \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - L \right| < \delta$$

, isso pode-se escrever da seguinte maneira:

$$\left| \frac{2n+1}{n} - L \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2n+1}{n} - L < \delta \wedge \frac{2n+1}{n} - L > -\delta \Rightarrow L - \delta < \frac{2n+1}{n} < L + \delta$$

$$\Leftrightarrow 2 - 0.02 < \frac{2n+1}{n} < 2 + 0.02 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{100} < \frac{2n+1}{n} < 2 + \frac{2}{100} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{50} < \frac{2n+1}{n} < 2 + \frac{1}{50}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{50} < 2 + \frac{1}{n} < 2 + \frac{1}{50} \Leftrightarrow -\frac{1}{50} < \frac{1}{n} < \frac{1}{50} \Rightarrow n > 50.$$

R: A partir de ordem 50, os termos da sucessão $a_n = \frac{2n+1}{n}$, encontra-se a menos de 0.02 do limite 2.

18. Resposta:

Considere a sucessão 18,15;12;9;6;...

Fazendo

$$a_1 = 18; a_2 = 15; a_3 = 12; a_4 = 9; a_5 = 6 \dots \Rightarrow 6 - 9 = 9 - 12 = 12 - 15 = 15 - 18 = -3$$

a diferença entre a_{n+1} e a_n é constante pois é igual a -3 unidades.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 18 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow a_n = -3n + 3 + 18 \Leftrightarrow a_n = -3n + 21$$

19. Resposta:

Vamos aplicar directamente a fórmula da soma de n termos de PA,

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n, a_1 = 3, d = 2, n = 6 \wedge \Rightarrow S_6 = \frac{4 + 4 + (6-1) \times 2}{2} \times 6 = (8 + 5 \times 2) \times 3 = 54$$

20. Resposta:

Dado que numa PG de 5 termos, tem-se $a_1 = 3 \wedge a_5 = 48$

$$a_n = a_1 \times q^{n-1} \Rightarrow 48 = 3q^{5-1} \Leftrightarrow 16 = q^4 \Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow q = 2$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_3 = 3 \times 2^{3-1} \Leftrightarrow a_3 = 3 \times 2^2 \Leftrightarrow a_3 = 3 \times 4 \Leftrightarrow a_3 = 12$$

21. Resposta:

A função que não é injectiva é da opção B.

22. Resposta:

3. $\infty \times \infty = \infty$
 4. $k + \infty = \infty$
 5. $k - \infty = -\infty$
 6. $\frac{\infty}{k} = \infty$
 7. $\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

• Limites Neperianos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é descontínua no ponto de abscissa a

Dada as funções $f(x) = 2^x$; $g(x) = \sin(x)$; $h(x) = x^2 + 5$, $m(x) = x^3$

A proposição falsa é da opção **C**: f e g não tem zeros, porque os seus gráficos não intersectam o eixo das abscissas xx

23. Resposta:

A afirmação correcta é da opção **B**: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \wedge f(3) = 0$

24. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ segue:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \frac{3 \times 2^2 - 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{12 - 12}{4 - 4} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ Vamos redefinir o limite,}$$

assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)\left(x + \frac{5}{3}\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\left(x - \frac{5}{3}\right)}{(x+2)} =$$

$$3 \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(x + \frac{5}{3}\right)}{x+2} = 3 \times \frac{\left(2 + \frac{5}{3}\right)}{2+2} =$$

$$\frac{6+5}{4} = \frac{11}{4} \quad 3 \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{11}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

25. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4}$ segue:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4} = \frac{\infty^2 - \infty + 3}{3 \times \infty^3 - 4} = \frac{\infty - \infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$$

Vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{3 \times \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

26. Resposta:

O valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x}$ segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{\sin^2(0)}{0} = \frac{0^2}{0} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

Vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 1 \times 0 = 0$$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$

Baseando no limite neperiano $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ teremos:



Cálculo diferencial**Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata**Função constante**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial**Função composta**

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x = e^5$$

28. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \leq 0 \\ k - 4, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{Para que a função } f(x) \text{ seja continua em } x=0 \text{ é necessário}$$

que se cumpra a seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \quad \text{Neste caso para}$$

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow f(0) = -3, \quad \text{a condição } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \text{ equivale}$$

afirmar que existem o limite de $f(x)$ no ponto de abscissa $x=0$, então podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 2 \cdot 0 - 3 = k - 4 \Leftrightarrow -3 = k - 4 \Leftrightarrow k = -3 + 4 \Rightarrow k = 1$$

29. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

Para que a função $f(x)$ seja continua em $x=a$ é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 5; & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ x + 1; & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

- Vamos estudar a continuidade da função no ponto de abscissa 2, assim,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 5) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ logo não existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

A função é descontínua no ponto de abscissa 2

- Vamos estudar a continuidade da função no ponto de abscissa 3, assim,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 5) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$$

$$f(3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \text{ A função é continua no ponto de abscissa 3}$$

A função $f(x)$ tem ponto de descontinuidade no ponto de abscissa $x=2$, porque apresenta um salto neste ponto, ou seja a função não é tem limites laterais iguais neste ponto

30. Resposta:

A opção correcta é A, porque é verdade afirmar que uma função derivada gera variação do sinal da função.

31. Resposta:

Observando rigorosamente o gráfico, no enunciado conclui-se $f'(2) = 1$

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

$$\text{Repare que em } x \in]-\infty - 1] \Rightarrow f(x) = x + 3 \Rightarrow f'(x) = (x + 3)' = 1$$



$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(a) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica

Função seno

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra

Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Onde

32. Resposta:

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$, a primeira derivada segue:

33. Resposta:

Considere a função f que se segue e determine a imagem de 180° pela primeira derivada da função f

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$f(x) = \sin(2x) \Rightarrow f'(x) = (\sin(2x))' \Leftrightarrow f'(x) = (2x)' \cos(2x) \Leftrightarrow f'(x) = 2 \cos(2x), x = \pi$$

$$\Rightarrow f'(\pi) = 2 \cos(2\pi) \Leftrightarrow f'(\pi) = 2 \times 1 = 2$$

34. Resposta:

Consideremos: $f(x) = e^{2x+1}$ vamos determinar a segunda derivada da função dada:

$$f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = (e^{2x+1})' \Leftrightarrow f'(x) = (2x+1)' e^{2x+1} \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (2e^{2x+1})' \Leftrightarrow f''(x) = 2(2x+1)' e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 2 \times 2e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 4e^{2x+1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln(x) \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)' + (\ln(x))' = -\frac{1}{x^2} + \frac{x'}{x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

35. Resposta:

Vamos chamar desses números por x e y , então teremos:

$$x - y = 6 \wedge P = xy \Rightarrow y = x - 6 \Rightarrow P(x) = x(6 - x) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 6x,$$

no problema foi dito que o produto entre x e y é um mínimo, então:

$$P'(x) = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = \frac{-6}{-2} \Rightarrow x = 3$$

$$x - y = 6 \Rightarrow 3 - y = 6 \Leftrightarrow -y = 6 - 3 \Leftrightarrow -y = 3 \Rightarrow y = -3$$

Os dois números procurados são: -3 e 3

- Somente para secção de Letras

36. Resposta:

Dado o polinómio

$P(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 3$ e $x - 1$, o polinómio quociente entre $P(x)$ por $x - 1$ pode ser determinado por regra de *Rufin*, assim:

	4	-2	1	-3
1				
	4	2	3	0

Logo:

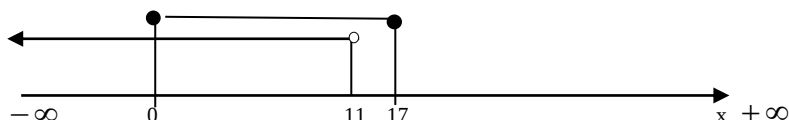
$$\frac{P(x)}{x-1} = \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 3}{x-1} = 4x^2 + 2x + 3 \Rightarrow Q(x) = 4x^2 + 2x + 3$$

37. Resposta:

Dados os conjuntos $M =]-\infty; 11[$, $N = [0; 17]$ no universo $\mathbb{R}$, vamos determinar

$$\overline{M \setminus N}$$

Começamos por representar num eixo real os conjuntos dados:



$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau n e um binómio linear $x - a$.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

1. Reunião de conjuntos
2. Intersecção de conjuntos
3. Diferença de conjuntos
4. Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e recta r :
 $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta r representada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ com } cx+d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:
 $3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

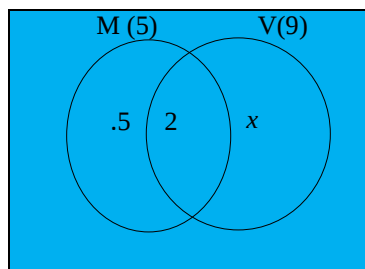
Primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k) dx = kx + c$$

$$\text{Repare que } \overline{M \setminus N} =]0; +\infty[$$

38. Resposta ao problema:



$$n(U)=?$$

$$n(M \cup V) = ?$$

$$\Rightarrow n(M \cup V) \Leftrightarrow n(M) + n(V) + n(M \cap V)$$

$$n(M \cup V) = 5 + 7 + 2 = 14$$

São 14 pessoas que estavam na festa.

39. Resposta:

$$f(x) = k^3 \wedge g(x) = x^2 - 1$$

$$f(3) = g(k) \Leftrightarrow k^3 = 3^2 - 1 \Leftrightarrow k^3 = 9 - 1 \Leftrightarrow k^3 = 8 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{8} \Rightarrow k = 2$$

40. Resposta:

O gráfico que representa uma função ímpar é da opção C

- **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:

Dado o ponto $P(1;4)$ e a equação da recta $r: 3x-4y+6=0$

De uma forma geral a distância entre um ponto e uma recta no plano é dada pela equação

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 4 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 16 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|7|}{5} = \frac{7}{5}$$

37. Resposta:

$$\text{Dada a função } f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$$

A função dada chama se homógrafa, ela é da família com forma padrão

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ com } cx+d \neq 0$$

De uma forma geral a equação da assíntota vertical é dada por

$$x = \frac{a}{c}; a = 2 \wedge c = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x = 2$$

38. Resposta:

$$\text{A expressão equivalente a } \frac{13}{3-4i} \text{ segue:}$$

$$\frac{13}{3-4i} = \frac{13(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{39+52i}{3^2-(4i)^2} = \frac{39+52i}{9-4^2 \times i^2} = \frac{39+52i}{9-16 \times (-1)} = \frac{39+52i}{9+16} = \frac{39+52i}{25}$$

39. Resposta:

$$\begin{aligned} \int (4x^3 - 2x) dx &= \int 4x^3 dx - \int 2x dx = 4 \int x^3 dx - 2 \int x dx = 4 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^2}{2} + C \\ &= x^4 - x^2 + C \end{aligned}$$



$$\int (ku) dx = k \int u dx$$

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u \pm v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int e^u u' dx = e^u + c$$

$$\int a^u u' dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Integração por parte

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx$$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

1. Função modular do tipo

$$y = f(|x|)$$

2. Função modular do tipo

$$y = |f(x)|$$

3. Função modular do tipo

$$y = |f(|x|)|$$

40.Resposta:

O gráfico que representa a função $y = \log_2 |x|$ é da opção B.

FIM

