

FICHE COMPLEXES

Le but de cette feuille est de savoir calculer avec des nombres complexes,

- ① le plus rapidement, proprement et efficacement possible,
- ② en organisant vos calculs et mettant en valeur votre résultat (souligné deux fois par exemple),
- ③ en faisant attention à ne pas faire de faute de copie,
- ④ même s'il y a des paramètres.

EXERCICE 1 ☐☐☐ Rapidité

Mettre sous forme algébrique les complexes suivants ($a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$):

- | | |
|--|--|
| ① $z_1 = ((1 + 3i) - (2 - i))(2 - i)$ | ⑤ $z_5 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 (\cos a + i \sin a)$ |
| ② $z_2 = (5 - i)(7 + 4i) - (3 - i)(-2 + 2i)$ | ⑥ $z_6 = \frac{\cos a + i \sin a}{1 + 3i}$ |
| ③ $z_3 = (1 + 2i)^3 - (2 + i)^2(7 - 5i)$ | |
| ④ $z_4 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-2i}$ | |

EXERCICE 2 ☐☐☐

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle (en étant le plus efficace possible) : les expressions étant explicites, ne pas calculer "à part" le module, mais factoriser les termes afin d'obtenir les nombres classiques.

- | | | |
|--------------------------------|--|---|
| ① $z_1 = 5i$ | ⑤ $u_3 = (-3 + 3i)^5$ | ⑨ $u_7 = (1 - i)(1 + i\sqrt{3})$ |
| ② $z_2 = -3$ | ⑥ $u_4 = (\sqrt{3} + i)(5 + 5i\sqrt{3})$ | ⑩ $z_6 = \frac{\cos a + i \sin a}{3 + 3i}$ |
| ③ $u_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ | ⑦ $u_5 = \frac{1+i}{3\sqrt{3}+3i}$ | ⑪ $z_7 = \frac{1}{\cos(2a) + i \sin(2a) - 1}$ |
| ④ $u_2 = (1 - i)^2$ | ⑧ $u_6 = \frac{-4i}{1 - i}$ | |

EXERCICE 3 ☐☐☐ Rapidité

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, dont on donnera le résultat sous forme algébrique:

- | | |
|---------------------|------------------------------|
| ① $3iz - 3 = z + i$ | ③ $(3z - i)(z + 2 + 3i) = 0$ |
| ② $3z(z + i) = -iz$ | ④ $\frac{z-1}{iz+3} = 4i$ |

EXERCICE 4 ☒☐☐

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, dont on donnera le résultat sous forme algébrique: (ne pas oublier de préciser le domaine de définition)

- | | | |
|---|--|---|
| ① $\frac{-z}{iz+1} + \frac{3z}{z-i} = 2(3+i)$ | ② $z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$ | ③ $\left(\frac{z-3i}{z+2}\right)^2 + 6\left(\frac{z-3i}{z+2}\right) + 13 = 0$ |
|---|--|---|

EXERCICE 5 ☒☐☐

Soit a un complexe de module $|a| < 1$. Montrer que pour tout complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$, on a

$$1 - \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

Puis déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| \leq 1$.

EXERCICE 6 ☒☐☐

Soit $z = \frac{1}{\cos(2a) + i \sin(2a) - 1}$. Montrer que $\operatorname{Re}(z) = \frac{-1}{2}$.

EXERCICE 7   

Montrer que, pour tout complexe z , $\frac{|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leq |z|$.

EXERCICE 8   

① Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, $z \neq 1$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geq \frac{1}{2}$.

② Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) \geq 1$. Montrer que $\left|z - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$.