

# SEMAINE DU 3/11 AU 4/11

## THÉORIE DES ENSEMBLES

- ① Définitions d'un ensemble, ensemble fini, cardinal, ensemble vide
- ② Définitions de  $\mathcal{P}(E)$ , Cardinal de  $\mathcal{P}(E) = 2^n$ , de l'égalité, de l'inclusion, de l'union (multiple), de l'intersection (multiple), de la différence et du complémentaire dans  $\mathcal{P}(E)$
- ③ Relations entre logique et ensemble en compréhension, Règles de calculs entre inclusion, intersection et complémentaire
- ④ Définition du produit cartésien
- ⑤ Définition de recouvrement et de partition
- ⑥ Définition des relations binaire, relations d'équivalence, relations d'ordre (total)
- ⑦ Définition d'une classe d'équivalence et preuve que l'ensemble des classes forme une partition de l'ensemble ambiant.  
Définition d'ensemble quotient

## APPLICATIONS

- ① Définitions d'applications, d'image, image réciproque, de composée de deux application, Notation  $F^E$ ,
- ② Définition d'injection, surjection et bijection
- ③ Composé de 

|            |     |            |
|------------|-----|------------|
| injection  | est | injective  |
| surjection | est | surjective |
| bijection  | est | bijective  |

, si  $g \circ f$ 

|            |       |                                         |
|------------|-------|-----------------------------------------|
| injective  | alors | $f$ est injective                       |
| surjective |       | $g$ est surjective                      |
| bijective  |       | $f$ est injective et $g$ est surjective |
- ④ Retour sur l'application réciproque, réciproque d'une composée

## PREUVES

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Donner les relations entre  $g \circ f$  et 

|           |    |            |
|-----------|----|------------|
| injection | ou | surjection |
|-----------|----|------------|

 et preuves.  
*L'étudiant doit définir lui-même les applications pour que la composée soit viable.*
- ② Définition de  $\leq$  sur  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  et preuve que c'est une relation d'ordre qui n'est pas totale.
- ③ Montrer que,  $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$ , définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$  et décrire les classes d'équivalence.
- ④ Montrer que  $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$ .
- ⑤ Soit  $f : z \mapsto \frac{z}{z^2 + 1} \in \mathbb{C}$ .  $f$  est-elle injective? surjective? Donner  $f^{-1}(\mathbb{R})$  et  $f(\mathbb{R})$ .
- ⑥ Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$   

|     |           |        |
|-----|-----------|--------|
| $A$ | $\mapsto$ | $f(A)$ |
|-----|-----------|--------|

  
Montrer que  $\Phi$  est injective si et seulement si  $f$  est injective.  
*On commencera par montrer que "Si  $f$  est injective, alors, pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $f^{-1}(f(A)) = A$ ."*

(1) Donner les relations entre  $g \circ f$  et  $\begin{tabular}{c} \text{injection} \\ \text{ou} \\ \text{surjection} \end{tabular}$  et preuves.  
 $\backslash\backslash\text{emph}\{L'\text{étudiant doit définir lui-même les applications pour que la composée soit viable.}\}$

(2) Définition de  $\leq$  sur  $R \setminus R$  et preuve que c'est une relation d'ordre qui n'est pas totale.

(3) Montrer que,  $\forall X \in \mathcal{R} \quad Y \xrightarrow{\text{Leftrightarrow}} X \cup A = Y \cup A$ ,  $\forall$  définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{P}(E)$  et décrire les classes d'équivalence.

(4) Montrer que  $A \cup B = A \cap C \xrightarrow{\text{Leftrightarrow}} B \subset A \subset C$ .

(5) Soit  $f: \mathbb{Z} \mapsto \frac{z}{z^2+1} \in \mathbb{C}$ .  $f$  est-elle injective? surjective? Donner  $f^{-1}(\mathbb{R})$  et  $f(\mathbb{R})$ .

(6) Soient  $f: E \rightarrow F$   $\forall$  et  $\forall$   $\Phi: \begin{array}{t} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F) \\ A \mapsto f(A) \end{array}$   
 $\forall$   $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$   $\forall$   
 $A \mapsto f(A)$   
 $\forall$   $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$   
Montrer que  $\Phi$  est injective si et seulement si  $f$  est injective.  $\backslash\backslash$   
 $\text{emph}\{\text{On commencera par montrer que "Si } f \text{ est injective, alors, pour tout } A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A."$