

Universidade Estadual do Oeste do Paraná
UNIOESTE/Campus de Foz do Iguaçu
Centro de Engenharias e Ciências Exatas - CECE

Vibrações Mecânicas

Notas de Aulas - 2.º Versão

Prof. Dr. Samuel da Silva

Foz do Iguaçu, 2009.

Prefácio

Este texto apresenta a 2.º versão das notas de aulas da disciplina Vibrações do curso de graduação em Engenharia Mecânica do Centro de Engenharias e Ciências Exatas da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Campus de Foz do Iguaçu. Esta apostila foi elaborada em 2008 e não tem a pretensão de substituir os excelentes livros textos existentes na área [7], [5], [10], [11] ou [15], mas apenas servir como um instrumento conciso e simples para que os alunos e o professor possam seguir durante as aulas teóricas e práticas. Assim, é aconselhável que os alunos mais interessados busquem informações em outros livros para complementar e reforçar o assunto. Espero contar com o apoio dos alunos e demais colaboradores para melhorar este texto constantemente, sendo assim, sugestões, correções e comentários são muito bem vindos¹. Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Milton Dias Junior da FEM/UNICAMP por ceder algumas figuras ilustrativas presentes no capítulo 1. Também agradeço ao Prof. Geraldo Carvalho Brito Jr. pela cuidadosa leitura da 1.º versão desta apostila e por seus comentários e correções. Boa leitura e estudo!

Samuel da Silva
setembro de 2009.

¹e-mail: sam.silva13@gmail.com

Sumário

Lista de Figuras	5
1 Introdução	9
1.1 Exemplos de aplicação	9
1.1.1 Análise vibro-acústica	9
1.1.2 Análise modal experimental e modificação estrutural	10
1.1.3 Manutenção preditiva por análise de vibrações	12
1.1.4 Integridade estrutural	12
1.2 Conceitos básicos	13
1.2.1 Graus de liberdade e coordenadas generalizadas	14
1.2.2 Componentes de sistemas mecânicos	14
1.2.3 Forças de excitação	15
1.2.4 Análise de sistemas equivalentes	19
1.2.5 Posição de equilíbrio estático	21
1.3 Classificação das vibrações mecânicas	21
1.4 Exercícios resolvidos	22
1.5 Exercícios	26
2 Vibrações Livres em Sistemas com 1 Grau de Liberdade	30
2.1 Vibrações livres não-amortecidas	32
2.2 Vibrações livres amortecidas	38
2.2.1 Movimento oscilatório subamortecido ou subcrítico ($0 < \xi < 1$)	41
2.2.2 Movimento superamortecido ou super-crítico($\xi > 1$)	44
2.2.3 Movimento amortecido criticamente ou crítico amorte- cido ($\xi = 1$)	45
2.3 Decremento logarítmico	46
2.4 Exercícios	49
3 Vibrações Forçadas em Sistemas com 1 Grau de Liberdade	57
3.1 Vibração causada por excitação harmônica	58

3.2	Vibração causada por força de desbalanceamento em máquinas rotativas	64
3.3	Função de resposta ao impulso (IRF)	67
3.4	Resposta para excitação do tipo degrau unitário	69
3.5	Método da integral de convolução	71
3.6	Função de transferência e métodos freqüenciais	72
3.6.1	Transformada de Laplace	72
3.6.2	Função de resposta em freqüência (FRF)	74
3.7	Estimativa experimental de IRFs e FRFs: Análise Espectral	76
3.8	Determinação experimental do coeficiente de amortecimento por vibrações forçadas	85
3.9	Métodos numéricos para solução de equações do movimento	85
3.9.1	Método de Série de Taylor	87
3.9.2	Método de Runge-Kutta	88
3.9.3	Método de Newmark	89
3.10	Vibrações em sistemas auto-excitados	92
3.10.1	Análise de estabilidade	92
3.10.2	Instabilidade dinâmica causada por escoamento de fluido	94
3.11	Exercícios	95
4	Isolamento de Vibrações, Tipos de Amortecimento e Técnicas de Medição	103
4.1	Isolamento de Vibrações	103
4.1.1	Isolamento ativo	104
4.1.2	Isolamento passivo	106
4.2	Tipos de Amortecimento	109
4.2.1	Amortecimento de Coulomb	109
4.2.2	Amortecimento histerético	111
4.2.3	Amortecimento proporcional	112
4.3	Técnicas de Medição	113
4.3.1	Medição em campo	113
4.3.2	Medição em laboratório	114
4.3.3	Transdutores para medição de vibrações	115
5	Sistemas Mecânicos com Múltiplos Graus de Liberdade	117
5.1	Equações de Lagrange	118
5.2	Solução via modos normais: análise modal analítica	121
5.2.1	Vibrações livres: sistema sem amortecimento	122
5.2.2	Vibrações livres: sistema com amortecimento proporcional	127
5.3	Vibrações forçadas	133

5.4	Introdução à análise modal experimental	137
5.5	Exercícios	146
Referências Bibliográficas		150

Lista de Figuras

1.1	Análise modal experimental em porta e retrovisor de carros.	11
1.2	Alguns modos de vibrar da porta.	12
1.3	Desabamento de ponte sobre o rio Mississippi em 2007.	13
1.4	Sistema torsional.	15
1.5	Exemplo de força harmônica.	17
1.6	Exemplo de força periódica.	17
1.7	Exemplo de força transitória.	18
1.8	Exemplo de força aleatória.	18
1.9	Sistema massa-mola-amortecedor.	19
1.10	Sistema mecânico como molas em paralelo.	20
1.11	Sistema mecânico como molas em série.	20
1.12	Exemplo 1.	22
1.13	Exemplo 2.	23
1.14	Exemplo 2 - solução.	23
1.15	Exemplo 3.	24
1.16	Exemplo 3 - solução.	25
1.17	Exemplo 4.	26
1.18	Exercício 1.	27
1.19	Exercício 2.	27
1.20	Exercício 3.	28
1.21	Exercício 4.	28
1.22	Exercício 5.	29
2.1	Sistema massa-mola-amortecedor.	31
2.2	Exemplo de resposta de sistema livre não-amortecido com 1 gdl para várias condições iniciais diferentes.	34
2.3	Sistema massa-mola com 1 gdl.	35
2.4	Vagão batendo em uma mola.	36
2.5	Sistema com 1 gdl.	37
2.6	DCL do sistema.	37
2.7	Exemplo de resposta do sistema subamortecido.	42

2.8	Exemplo de resposta de sistema livre amortecido com 1 gdl com movimento subamortecido.	43
2.9	Sistema massa-mola-amortecedor com dois amortecedores. . .	44
2.10	Resposta do sistema superamortecido.	45
2.11	Resposta do sistema criticamente amortecido.	46
2.12	Resposta de sistema subamortecido evidenciando amplitudes sucessivas.	47
2.13	Resposta livre do sistema.	49
2.14	Resposta livre do sistema estrutural.	51
2.15	Resposta ao impulso $h(t)$	52
2.16	Vista do fórmula 1.	52
2.17	Amortecedor para uma motocicleta.	53
2.18	Sistema 1.	53
2.19	Sistema 2.	54
2.20	Sistema 3.	54
2.21	Barra rígida.	55
2.22	Barra rígida.	55
2.23	Eixo com turbina montada.	56
3.1	Curvas de ampliação de amplitudes de vibração para um sistema com 1 gdl.	60
3.2	Exemplo de batimento para um sistema com 1 gdl.	62
3.3	Exemplo de máquina rotativa com massa desbalanceada. . . .	64
3.4	Curva da função $\Lambda(r, \xi)$	65
3.5	Exemplo de resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema.	68
3.6	Exemplo de resposta ao degrau unitário para um sistema com um grau de liberdade.	70
3.7	Funções de resposta em frequência para um sistema com 1 grau de liberdade.	77
3.8	Diagrama de Nyquist da FRF de mobilidade para um sistema com 1 grau de liberdade.	78
3.9	Gráfico da parte real e imaginária da FRF (compliância) para um sistema com 1 grau de liberdade.	79
3.10	Realizações de sinais medidos em um processo estocástico. . .	80
3.11	Exemplo de um sinal estacionário.	81
3.12	Distribuição de partes de um sinal estacionário.	82
3.13	Sistema linear e invariante com o tempo representado por uma IRF discreta $h[n]$	84
3.14	Esquema de aceleração média constante de Newmark.	90
3.15	Conjunto moto-bomba.	100
3.16	Motor elétrico a ser instalado.	101

3.17	FRF (Complância) para um sistema com 1 grau de liberdade.	101
3.18	Diagrama de Nyquist da FRF de mobilidade.	102
3.19	Antena de carro.	102
4.1	Exemplo de máquina montadas sobre uma base com isoladores.	104
4.2	Transmissibilidade Absoluta do sistema.	106
4.3	Exemplo de máquina como isolamento passivo.	107
5.1	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	118
5.2	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	120
5.3	Mapeamento dos pólos do sistema no plano complexo.	132
5.4	Exemplo de sistema com dois graus de liberdade com força de excitação harmônica.	134
5.5	Respostas do sistema mecânica para o sinal de excitação $F(t)$ aplicado na massa 1.	136
5.6	Resposta experimental da estrutura ensada.	142
5.7	FRFs experimentais.	142
5.8	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	146
5.9	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	146
5.10	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	147
5.11	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	147
5.12	Exemplo de uma viga com múltiplos graus de liberdade.	148
5.13	Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.	149

Capítulo 1

Introdução

A meta deste capítulo é introduzir os conceitos básicos envolvidos no estudo de vibrações mecânicas. Inicialmente, apresenta-se uma lista de algumas aplicações práticas na indústria dos conceitos envolvidos nesta disciplina, com o propósito de motivar o leitor ao estudo de vibrações. Em seguida, destaca-se formalmente algumas definições básicas necessárias para estudar vibrações, como graus de liberdade, elementos de um sistema vibratório, forças de excitação, análise de sistemas equivalentes e posição de equilíbrio estático. Por fim, é mostrada uma forma de classificar os problemas de vibrações. Ao longo deste capítulo são apresentados alguns exercícios resolvidos.

1.1 Exemplos de aplicação

Esta seção apresenta alguns exemplos de aplicações industriais que podem ser feitas a partir do conhecimento desta disciplina.

1.1.1 Análise vibro-acústica

A análise vibro-acústica apresenta uma lugar de destaque no projeto de máquinas, automóveis, aeronaves, etc. Um nível de ruído ou vibração excessivo em sistemas mecânicos pode comprometer o correto funcionamento de sistemas de engenharia, prejudicar o conforto humano e diminuir a vida útil do sistema. Portanto, uma análise sobre os níveis de vibração que um sistema mecânico pode atingir é extremamente necessária e desejada em projetos modernos, seja no momento de síntese ou análise de algum protótipo.

Um exemplo é a vibração de um motor de automóvel. O motor é montado em cima de coxins que são presos a estrutura metálica do automóvel. O es-

tudante deve lembrar do conceito de ressonância¹, estudado em física básica. Assim, se a frequência de rotação do motor coincidir com alguma frequência natural da estrutura do automóvel, como as frequências naturais do capo, pode ocorrer um efeito trágico. Portanto, durante o projeto de um carro, os engenheiros devem conhecer muito bem quais são as frequências naturais do sistema como um todo e de seus componentes, para se evitar ressonância, ou mesmo ruído indesejável em painéis, interior, etc².

Outro exemplo interessante é o fenômeno aerelástico de *flutter* que ocorre principalmente em estruturas aeronáuticas [2]. Flutter é uma vibração em voo de estruturas flexíveis causada pela energia de fluxos de ar absorvidas por superfícies de sustentação (ocasionadas sobretudo devido ao despreendimento de vórtices). Este efeito conduz a uma instabilidade potencialmente destrutiva resultante de uma interação entre forças elásticas, de inércia e aerodinâmicas. Assim, para uma aeronave ser certificada pelo CTA/FAA as empresas aeronáuticas devem ter total conhecimento sobre frequências de ressonância em função das velocidades de voo, peso, altitude, pressão, etc. Conseqüentemente, as exigências básicas para os engenheiros envolvidos neste processo é ter conhecimentos básicos sólidos em vibrações mecânicas, muitos deles serão apresentados durante este curso introdutório.

1.1.2 Análise modal experimental e modificação estrutural

A análise modal experimental (AME) consiste em extrair os chamados parâmetros modais de um sistema mecânico. Os parâmetros modais são parâmetros característicos do sistema e são compostos por frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar. Se forem corretamente obtidos é possível descrever o comportamento de um sistema vibratório sem necessitar de um modelo matemático.

A AME também é muito usada pela indústria automobilística e aeronáutica. Um exemplo interessante de aplicação é a extração dos modos naturais de uma porta de carro visando otimizar o projeto de retrovisores [8]. Nesta aplicação, a empresa fabricante do automóvel constatou que em determinadas velocidades o retrovisor vibrava muito e refletia a luz do sol diretamente na face do motorista, o que poderia provocar desconforto, além do risco de acidente. Com o intuito de descobrir qual a origem desta vibração em velocidades tão características foi realizada uma AME na porta do carro com o retrovisor, vista na figura (1.1). Depois de extraído os modos naturais,

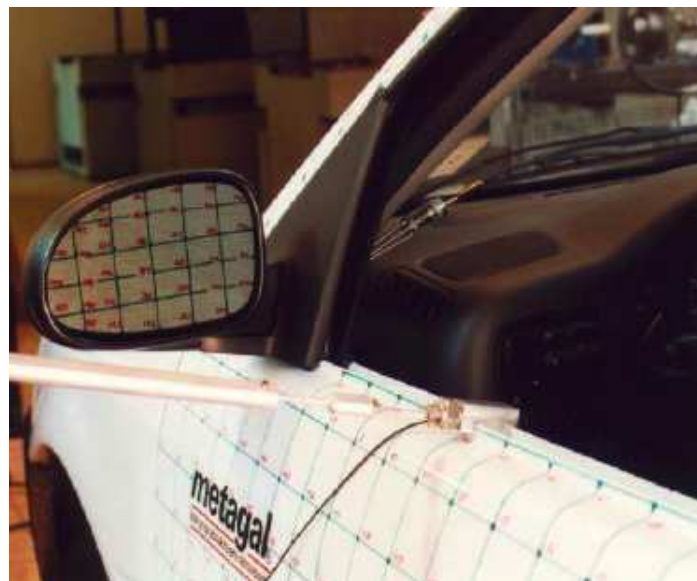
¹O Cap. 2 irá definir formalmente o que é ressonância.

²Quem já não andou em um carro onde todo o seu interior vibra completamente?

vistos na figura (1.2), constatou-se que as frequências naturais destes modos eram excitadas nesta faixa de velocidades. A partir de um procedimento de otimização usando uma malha de elementos finitos foi possível propor uma modificação estrutural na porta e retrovisor visando reduzir este problema.



(a) Carro com instrumentação usada no ensaio.



(b) Detalhe da porta.

Fig. 1.1: Análise modal experimental em porta e retrovisor de carros.

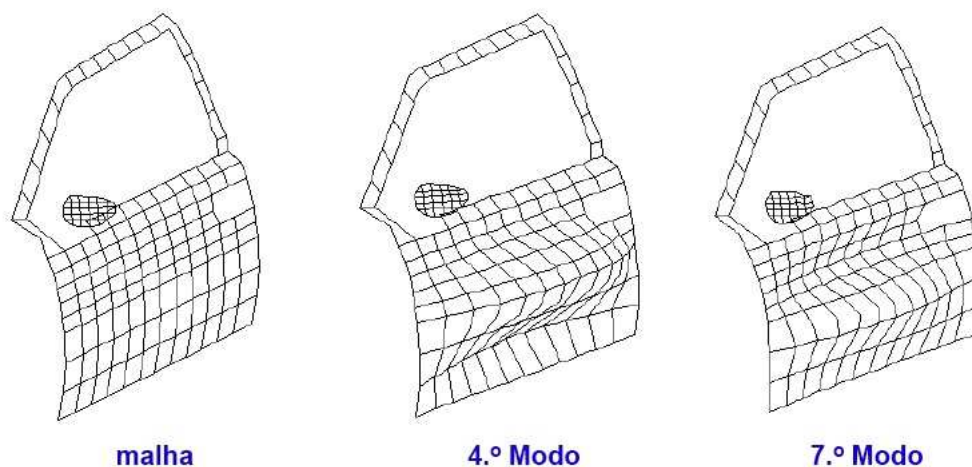


Fig. 1.2: Alguns modos de vibrar da porta.

1.1.3 Manutenção preditiva por análise de vibrações

Quando um componente mecânico de uma máquina rotativa³, como rolamentos, mancais, conexões, etc. apresentam algum defeito, como desalinhamento, desbalanceamento, trinca, etc. o comportamento vibratório do sistema muda o seu padrão. Caso se conheça algum sinal de referência da máquina é possível realizar uma comparação entre dois estados: referência (sem dano) e com dano. Assim, é possível dar um diagnóstico se a máquina está ok ou não. Adicionalmente, com aplicação de análise espectral, pode ser possível inclusive dar um diagnóstico de que tipo de dano a máquina apresenta. As unidades de geração de usinas hidrelétricas, como as de Itaipu, são exemplos de sistemas que são monitorados periodicamente a partir de sinais de vibração para que se avalie se os níveis de vibração global estão dentro do estabelecido pelos fabricantes das máquinas.

1.1.4 Integridade estrutural

Integridade estrutural é o procedimento de extrair informações dinâmicas de estruturas como pontes, fuselagens de aeronaves, estruturas offshore, barragens, etc. visando detectar modificações estruturais correspondentes a falhas. Esta é uma área multidisciplinar, que compreende estudo de materiais, ferramentas estatísticas, reconhecimento de padrões, análise de tensões e

³Sistemas rotativos compreendem ventiladores industriais, compressores, turbinas, etc.

principalmente vibrações mecânicas. Assim, como na manutenção preditiva em sistemas rotativos por análise de vibrações, a medição de vibração mecânica em grandes estruturas pode fornecer informações úteis para diagnóstico e prognóstico de saúde estrutural de sistemas de engenharia.

Um acidente estrutural que teve destaque recente na mídia foi a queda de uma ponte sobre o rio Mississippi, na cidade de Mineápolis nos Estados Unidos, figura 1.3. A ponte tinha sido inspecionada em 2005 e 2006 através de medidas de vibrações e na ocasião nenhum defeito estrutural foi encontrado, porém um estudo conduzido anteriormente em 2001 pelo Departamento de transportes de Minnesota mostrou vários defeitos por tempo de uso⁴ que foram ignorados pelas autoridades. O desastre teve um saldo trágico de 7 mortos e dezenas de feridos.



Fig. 1.3: Desabamento de ponte sobre o o rio Mississippi em 2007.

1.2 Conceitos básicos

Vibração é definida como um movimento periódico, i.e., uma oscilação de uma partícula, um sistema de partículas ou um corpo rígido em torno de uma posição de equilíbrio. A seguir alguns conceitos básicos envolvidos no estudo de vibrações mecânicas.

⁴A ponte foi construída em 1967.

1.2.1 Graus de liberdade e coordenadas generalizadas

O número de graus de liberdade (gdl) usado na análise de um sistema mecânico é o número de coordenadas cinematicamente independentes necessárias para descrever completamente (localizar e orientar) o movimento espacial de toda partícula de um sistema em qualquer instante de tempo. Qualquer conjunto de coordenadas é chamado de conjunto de coordenadas generalizadas. Deve ficar claro para o estudante que a escolha de um conjunto de coordenadas generalizadas não é única. Quantidades cinemáticas como deslocamentos, velocidades e aceleração são escritas em função das coordenadas generalizadas e de suas derivadas temporais.

1.2.2 Componentes de sistemas mecânicos

Um sistema mecânico contém componentes de inércia, de rigidez e amortecimento. Os componentes de inércia têm energia cinética quando o sistema está em movimento. A energia cinética de um corpo rígido⁵ em movimento é

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (1.1)$$

sendo $\bar{v}$ a velocidade do centro de massa do corpo, ω a velocidade angular do eixo perpendicular ao plano de movimento, m é a massa do corpo e $\bar{I}$ é o momento de inércia de massa paralelo ao eixo de rotação que atravessa o centro de massa.

Já um componente de rigidez (uma mola linear) tem uma relação força deslocamento conforme a equação abaixo

$$F = kx \quad (1.2)$$

onde F é a força aplicada e x é a mudança do comprimento. A rigidez k tem dimensão de força por unidade de comprimento. No SI⁶ a unidade de rigidez é N/m.

Medir experimentalmente massa e rigidez não é tão difícil, agora medir amortecimento pode ser um enorme desafio, pois os sistemas mecânicos podem dissipar energia de formas diferentes. O mais comum é considerar um modelo de amortecedor com *amortecimento viscoso*. Um componente linear de amortecimento viscoso tem uma relação força-velocidade da forma

⁵Lembrando que um corpo rígido é definido como um corpo onde as suas dimensões devem ser consideradas na análise dinâmica e, assim, o momento de inércia deve ser levado em conta.

⁶Sistema Internacional.

$$F = cv \quad (1.3)$$

sendo c o coeficiente de amortecimento. A unidade no SI é N.s/m. Existem outros tipos comuns de amortecimento como: amortecimento de Coulomb, amortecimento estrutural, etc. que serão descritos mais a frente durante este curso.

Já quando uma coordenada angular é empregada como coordenada generalizada para um sistema linear, o sistema pode ser modelado como um sistema torsional, figura (1.4).

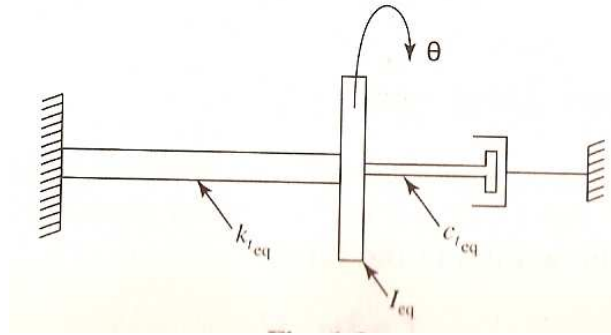


Fig. 1.4: Sistema torsional.

O momento aplicado na mola linear torsional é proporcional à sua rotação angular enquanto o momento aplicado no amortecimento viscoso torsional é proporcional à velocidade angular. Os valores dos coeficientes do sistema torsional equivalente são determinados pelo cálculo da energia cinética total, energia potencial, e trabalho feito pelo amortecedor viscoso do sistema original em termos da escolha da coordenada generalizada empregada

$$T = \frac{1}{2} I_{eq} \dot{\theta}^2, \quad (1.4)$$

$$V = \frac{1}{2} k_{teq} \theta^2, \quad (1.5)$$

$$W = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} c_{teq} \dot{\theta} d\theta. \quad (1.6)$$

1.2.3 Forças de excitação

De acordo com a força de excitação que age em um sistema mecânico as respostas de vibração podem ter características diferentes. A seguir os tipos

de excitação mais comuns:

Força harmônica: forma mais simples de excitação em sistemas mecânicos, descrita pela equação

$$F(t) = F \sin(\omega t), \quad (1.7)$$

sendo F a amplitude da excitação e ω a frequência de excitação em rad/s. Também é usual descrever as frequências em *Hertz* Hz⁷. A frequência em Hz é nomeada de f e descrita por

$$f = \frac{1}{T}, \quad (1.8)$$

sendo T o período de oscilações (tempo que o movimento harmônico leva para repetir seu padrão), medidos em s. A relação entre as frequências em Hz e rad/s é dada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \omega. \quad (1.9)$$

Um movimento harmônico é definido completamente a partir do conhecimento das variáveis acima. Um exemplo prático de excitação harmônica aparece em rotores com massa desbalanceada. A figura (1.5) mostra um exemplo gráfico de uma força deste tipo.

Força periódica: Tipo de excitação que se repete após um período, mas não de forma exatamente igual, conforme o exemplo da figura (1.6). Motores de combustão interna são exemplos deste tipo de excitação.

Força transitória: Excitação caracterizada por uma liberação de energia grande em um intervalo curto de tempo. Inúmeros exemplos descrevem este tipo de força: explosão, impacto, etc. A figura (1.7) ilustra graficamente este tipo de excitação.

Força aleatória: São forças de excitação que não descrevem um padrão determinístico que possa ser definido por uma equação. Para tratar sistemas excitados por forças aleatórias é necessário utilizar métodos estatísticos. Fenômenos aeroelásticos são exemplos de sistemas excitados por forças aleatórias, como forças em asas de aviões, ventos em colunas de pontes, etc. A figura(1.8) ilustra um sinal típico de excitação aleatória.

⁷Em homenagem ao cientista alemão Hertz, o primeiro a estudar as ondas de rádio, que também são vibrações, porém de origem elétrica.

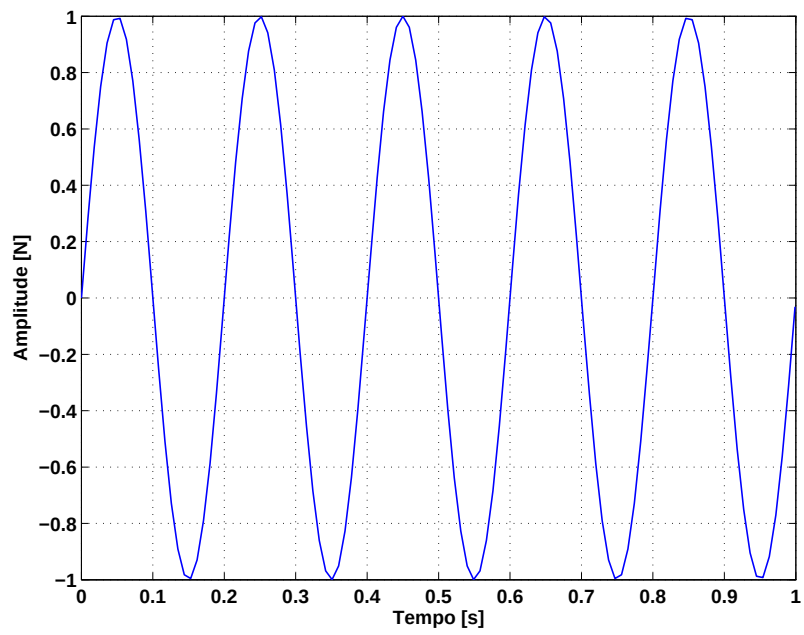


Fig. 1.5: Exemplo de força harmônica.

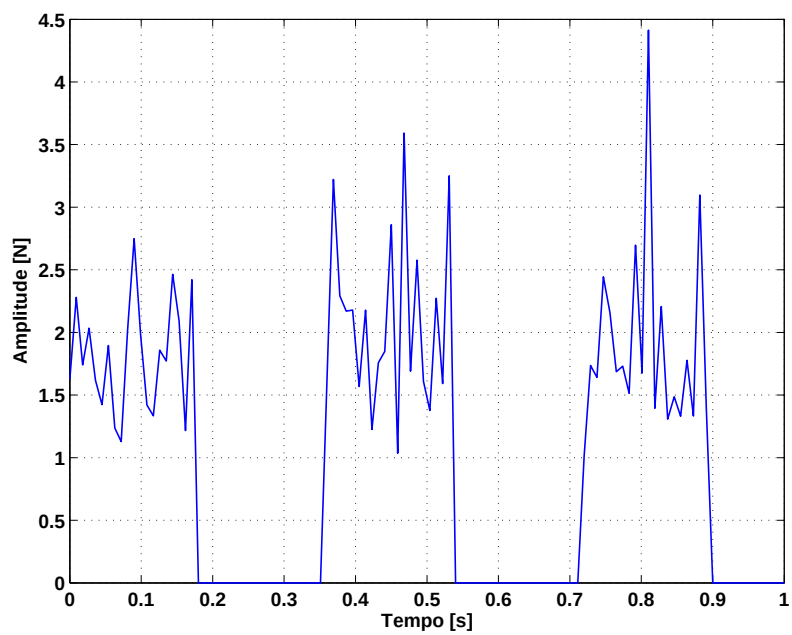


Fig. 1.6: Exemplo de força periódica.

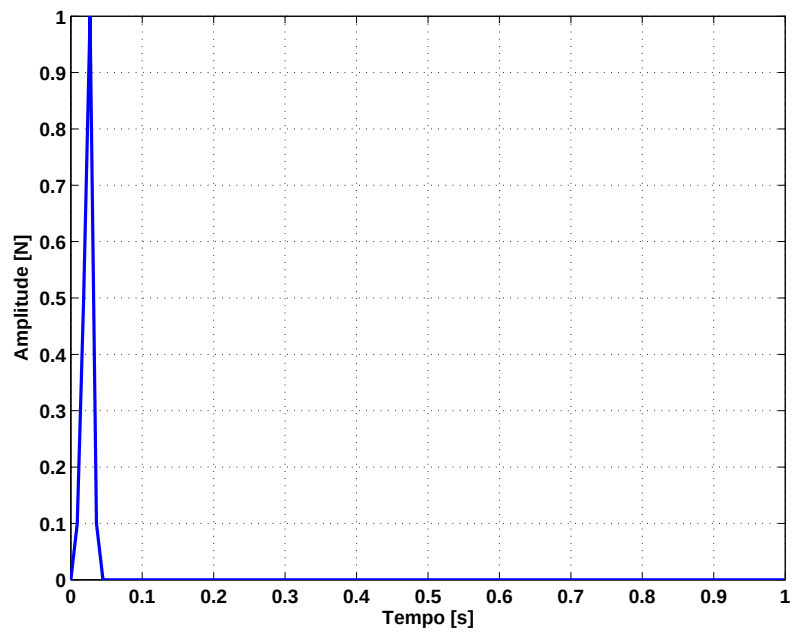


Fig. 1.7: Exemplo de força transitória.

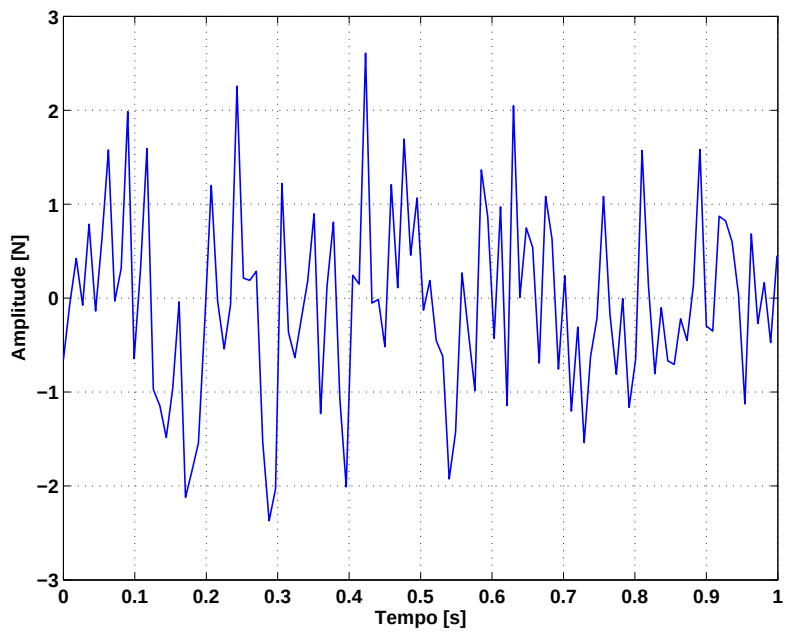


Fig. 1.8: Exemplo de força aleatória.

1.2.4 Análise de sistemas equivalentes

Todo o sistema linear de 1 grau de liberdade com amortecimento viscoso pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor simples, como a figura (1.9), onde m_{eq} , k_{eq} e c_{eq} são a massa equivalente, rigidez equivalente e amortecimento viscoso equivalente.

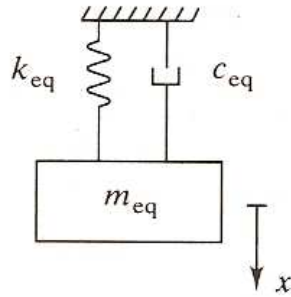


Fig. 1.9: Sistema massa-mola-amortecedor.

Denotando a variável x como a coordenada generalizada, a energia cinética de um sistema linear pode ser escrita como

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2. \quad (1.10)$$

Já a energia potencial de um sistema linear pode ser escrita na forma

$$V = \frac{1}{2} k_{eq} x^2. \quad (1.11)$$

O trabalho realizado pela força de amortecimento viscoso em um sistema linear entre duas localizações arbitrárias x_1 e x_2 podem ser escritas como

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} c_{eq} \dot{x} dx \quad (1.12)$$

Molas em paralelo: O sistema da figura (1.10) tem molas em paralelo que são fixadas a um bloco com massa m . A meta é definir qual a rigidez equivalente desta combinação de molas visando modelar o sistema com uma única mola, similar ao da figura (1.9).

Se o bloco estiver sujeito a um deslocamento arbitrário x , todas as molas sofrem este deslocamento, assim $x = x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Assim a força exercida é

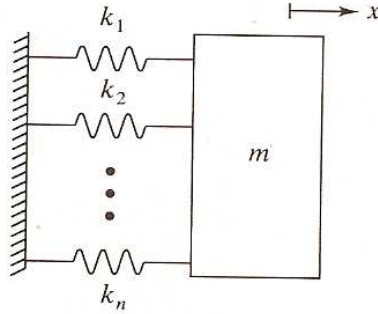


Fig. 1.10: Sistema mecânico como molas em paralelo.

$$F = k_{eq}x = k_1x + k_2x + \cdots + k_nx = \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) x. \quad (1.13)$$

Analisando a Eq. (1.13) observa-se que a rigidez equivalente para um sistema com molas em paralelo é dada por:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^n k_i. \quad (1.14)$$

Molas em série: Já o sistema da figura (1.11) tem molas em série que são fixadas a um bloco com massa m . Novamente a meta é definir qual a rigidez equivalente desta combinação de molas.

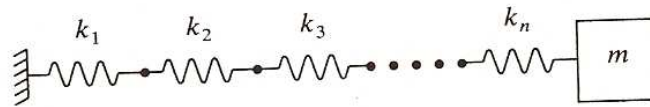


Fig. 1.11: Sistema mecânico como molas em série.

Definindo o deslocamento do bloco como sendo x_i na i -ésima mola e assumindo que cada mola não tem massa, a força desenvolvida na extremidade de cada mola tem a mesma magnitude, mas direções opostas. Assim a força em cada mola é

$$F = k_{eq}x = k_1x_1 = k_2x_2 = \cdots = k_nx_n. \quad (1.15)$$

Sendo assim, o deslocamento total será descrito por

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \cdots + \frac{F}{k_n} \quad (1.16)$$

Resolvendo para x_i da Eq. (1.15) e substituindo na Eq. (1.16) conduz à

$$F = \frac{x}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}. \quad (1.17)$$

A partir da Eq. (1.17) pode-se concluir que para um sistema com molas em série a rigidez equivalente é descrita por

$$k_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}}. \quad (1.18)$$

1.2.5 Posição de equilíbrio estático

Sistemas mecânicos, como os da figura (1.9), têm elementos elásticos que estão sujeitos a forças quando o sistema está em equilíbrio. A deflexão resultante no elemento elástico é chamada de deflexão estática, geralmente nomeada por Δ_{st} . O efeito de deflexão estática de um elemento elástico em um sistema linear não tem efeito na rigidez equivalente do sistema.

1.3 Classificação das vibrações mecânicas

Há diferentes formas de classificar as vibrações em sistemas mecânicos:

Quanto à excitação: As vibrações podem ser livres⁸ ou forçadas⁹.

Quanto ao amortecimento: As vibrações podem ser amortecidas ou não-amortecidas.

Quanto ao deslocamento: Pode ser retilíneo ou torsional, ou combinação de ambos.

⁸O sistema vibra nas suas frequências naturais e não há força de excitação externa.

⁹O sistema vibra na frequência de excitação.

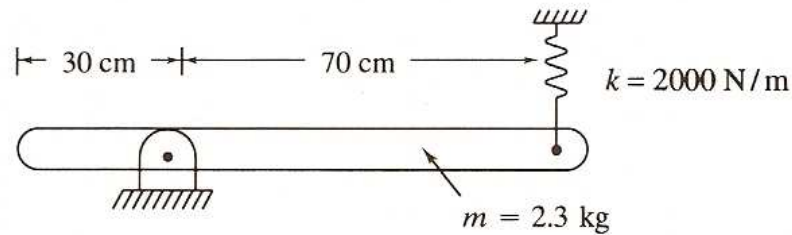


Fig. 1.12: Exemplo 1.

Quanto às propriedades físicas: O sistema pode ser discreto, neste caso tem um número finito de gdl, ou contínuo¹⁰, neste caso tem um número infinito de gdl.

Quanto às equações envolvidas: O sistema pode ser linear (potência 0 ou 1 e não existe produto entre estas e suas derivadas) ou não-linear, quando não é válido o princípio da superposição.

1.4 Exercícios resolvidos

Exemplo 1.1 *Determine o número de graus de liberdade (gdl) para ser usado na análise de vibrações da barra rígida da figura (1.12), e especifique um conjunto de coordenadas generalizadas que pode ser usado nesta análise.*

Solução: Uma vez que a barra é rígida o sistema têm apenas um grau de liberdade. Uma possível escolha para coordenada generalizada é θ , deslocamento angular da barra medido positivo no sentido anti-horário da posição de equilíbrio do sistema.

Exemplo 1.2 *Determine o número de gdl necessários para analisar o sistema mecânico composto por uma barra rígida com comprimento L e duas molas da figura (1.13), e especifique um conjunto de coordenadas generalizadas que pode ser usado nesta análise de vibrações.*

Solução: Assume-se x como sendo o deslocamento do centro de massa da barra rígida, medido a partir da posição de equilíbrio. Infelizmente, o conhecimento apenas de x é insuficiente para determinar totalmente o

¹⁰Também chamado de *sistema com parâmetros distribuídos*.

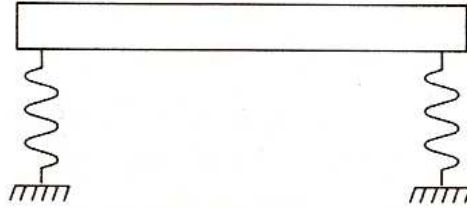


Fig. 1.13: Exemplo 2.

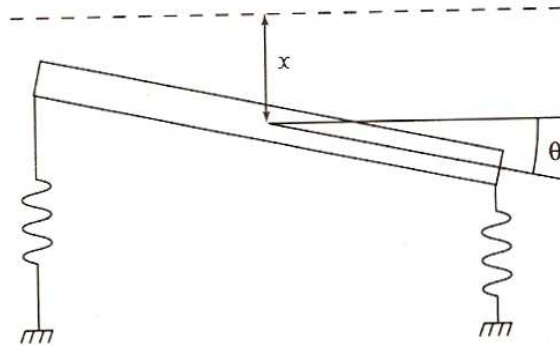


Fig. 1.14: Exemplo 2 - solução.

deslocamento de qualquer partícula na barra. Assim o sistema tem mais de um grau de liberdade. Para descrever totalmente este movimento deve-se considerar também a rotação angular θ no sentido anti-horário da barra com respeito ao eixo da barra em sua posição de equilíbrio. Se θ é pequeno¹¹, então o deslocamento do fim do lado direito da barra é $x + (L/2)\theta$. Portanto, o sistema tem 2 gdl, e x e θ são um possível conjunto de coordenadas generalizadas, como ilustrado na figura (1.14).

Exemplo 1.3 Dado o sistema da figura (1.15) encontre um modelo equivalente composto apenas por uma mola fixa ao bloco de massa m .

Solução: Primeiro deve-se substituir as combinações de molas em paralelo por rigidez equivalente usando a Eq. (1.14). Este primeiro resultado é

¹¹Hipótese feita para assumir que o sistema é linear.

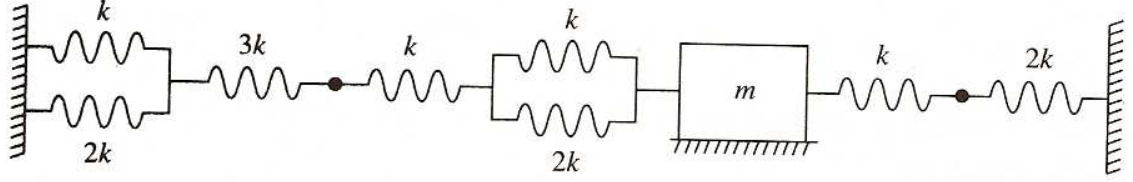


Fig. 1.15: Exemplo 3.

mostrado na figura (1.16a). Em seguida calcula-se a rigidez equivalente do lado esquerdo do bloco

$$\frac{1}{\frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{3k}} = \frac{k}{2}. \quad (1.19)$$

Por sua vez, as molas fixadas do lado direito do bloco têm rigidez equivalente da forma

$$\frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k}{3}. \quad (1.20)$$

Como resultado tem-se o sistema da figura (1.16b). Quando o bloco tem um deslocamento arbitrário x , os deslocamentos em cada mola da figura (1.16b) são os mesmos, e a força total agindo sobre o bloco é a soma das forças desenvolvidas nas molas. Assim estas duas molas se comportam como se estivessem em paralelo e portanto a rigidez equivalente do sistema é descrita por

$$\frac{k}{2} + \frac{2k}{3} = \frac{7k}{6} \quad (1.21)$$

que é mostrada na figura (1.16c).

Exemplo 1.4 *Determine a rigidez equivalente do sistema mostrado na figura (1.17) usando o deslocamento do bloco como uma coordenada generalizada.*

Solução: A deflexão da viga engastada-livre na sua extremidade livre é devido a uma carga concentrada neste ponto e é definida como $\delta =$

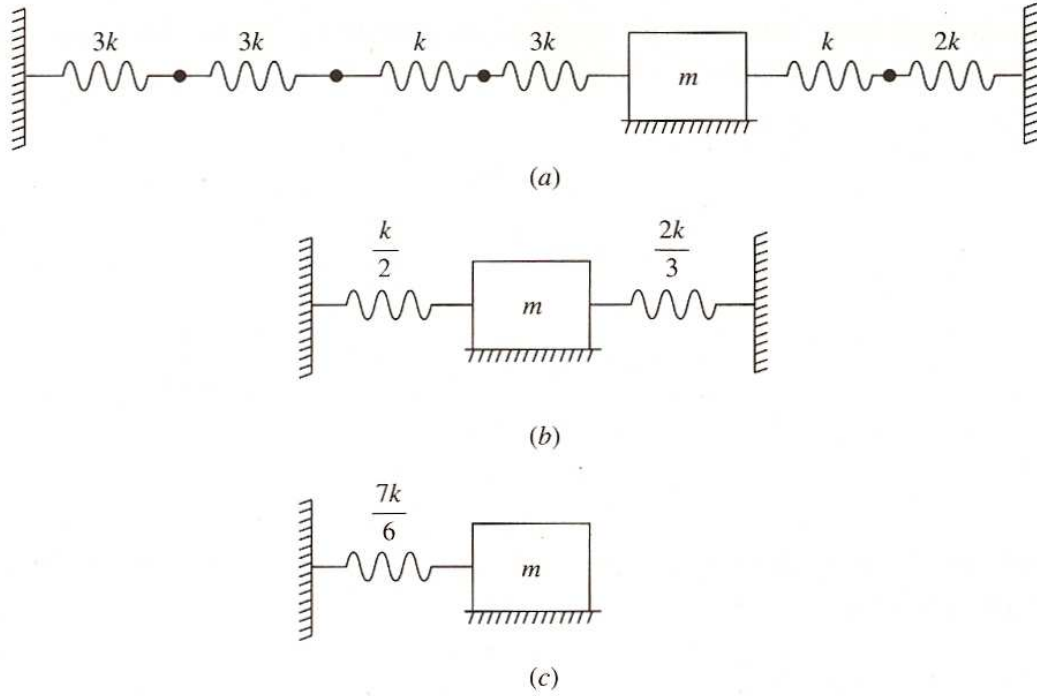


Fig. 1.16: Exemplo 3 - solução.

$FL^3/(3EI)$, sendo F a carga aplicada, L o comprimento da viga, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia de área. Assim a rigidez equivalente da viga é dada por¹²

$$k_b = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3(210 \times 10^9)(1.5 \times 10^{-5})}{(2.5)^3} = 6.05 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (1.22)$$

A rigidez da viga e a mola superior que está presa agem como se estivessem em paralelo, pois a força na viga provocada pelo efeito de rigidez na viga é $F_b = k_b x$ e a força na mola superior é $F_1 = k_1 x$, assim a força total é $F_b + F_1$. Assim a deflexão no ponto de junção da extremidade livre da viga e da mola é:

$$\delta = x = (F_b + F_1) \frac{L^3}{3EI}, \quad (1.23)$$

¹²A rigidez é definida como o inverso da deflexão com uma carga unitária aplicada.

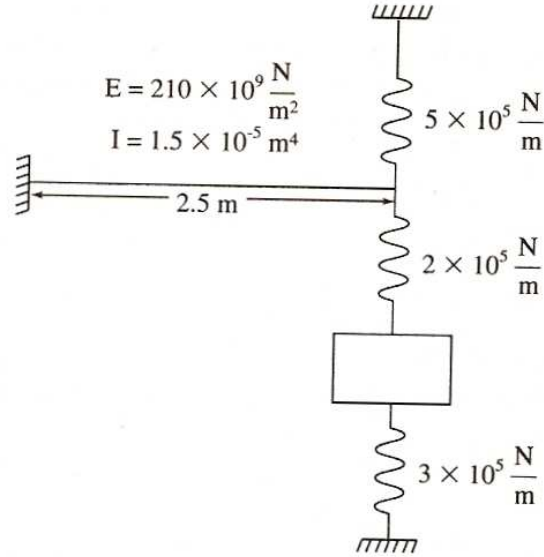


Fig. 1.17: Exemplo 4.

o que leva a

$$x = \frac{F_b}{k_1 + \frac{3EI}{L^3}}. \quad (1.24)$$

Assim, observa-se que a rigidez da viga com a mola superior, agem como duas molas em paralelo. Esta combinação em paralelo está em série com a mola entre a viga e o bloco. Por fim, esta combinação em série está em paralelo com a mola inferior entre o bloco e a parte fixa. Portanto a rigidez equivalente é escrita como:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{6.05 \times 10^5 + 5 \times 10^5} + \frac{1}{2 \times 10^5}} + 3 \times 10^5 = 4.69 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (1.25)$$

1.5 Exercícios

Ex. 1.1 Determine o número de gdl usados na análise do sistema mecânico da figura (1.18) e especifique um conjunto de coordenadas generalizadas que pode ser usado na análise deste sistema.

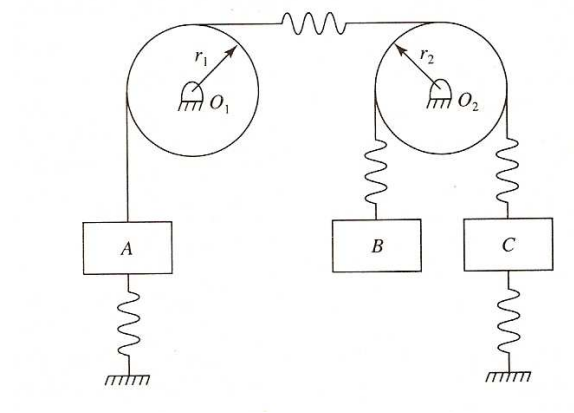


Fig. 1.18: Exercício 1.

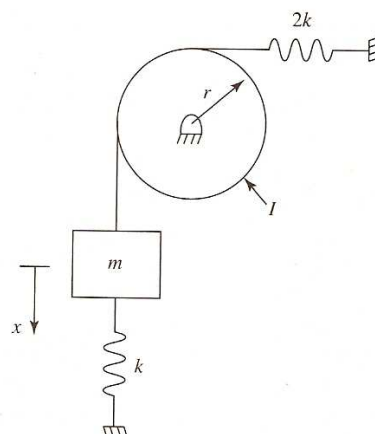


Fig. 1.19: Exercício 2.

Ex. 1.2 Determine a massa equivalente m_{eq} e a rigidez equivalente k_{eq} do sistema mecânico da figura (1.19) quando x , o deslocamento do bloco, medido da posição de equilíbrio, é usado como coordenada generalizada.

Ex. 1.3 Determine a massa equivalente m_{eq} e a rigidez equivalente k_{eq} do sistema mecânico da figura (1.20) quando x , o deslocamento do bloco, medido da posição de equilíbrio, é usado como coordenada generalizada. Assuma que o disco é fino e rola sem atrito.

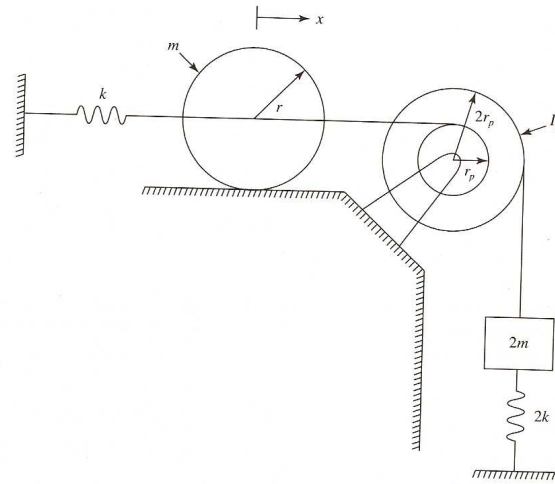


Fig. 1.20: Exercício 3.

Ex. 1.4 Determine a rigidez equivalente do sistema da figura (1.21).

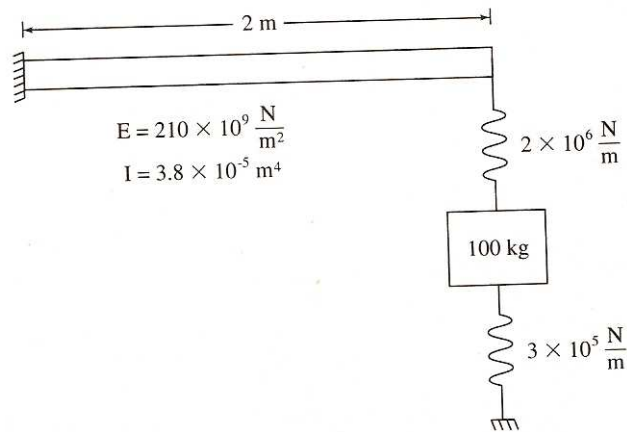


Fig. 1.21: Exercício 4.

Ex. 1.5 O conceito de rigidez é um dos mais importantes em projeto de máquinas. A esse respeito, responda ao solicitado abaixo¹³. Explique em

¹³Questão extraída do Provão de Cursos EM 99.

poucas palavras o que é rigidez. Quais os fatores que determinam a rigidez de um componente mecânico? Como a rigidez e a massa de um componente estão relacionadas com sua frequência natural? Entre os perfis apresentados na fig. (1.22), qual você escolheria como o mais adequado à estrutura de um veículo que será submetido a carregamentos combinados de flexão e torção, variáveis em direção e intensidade, de modo que o mesmo possa ter rigidez satisfatória com um peso relativamente reduzido? Justifique sua resposta.

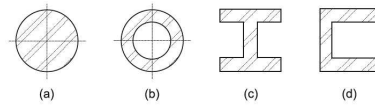


Fig. 1.22: Exercício 5.

Capítulo 2

Vibrações Livres em Sistemas com 1 Grau de Liberdade

Como já visto no capítulo 1, muitos sistemas mecânicos lineares complexos podem ser modelados como um sistema equivalente massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade (gdl). Sendo assim, é necessário saber como obter a equação do movimento de um sistema deste tipo e como resolver esta equação. Inúmeros métodos podem ser usados para obter a equação do movimento do sistema. Um método popular é construir um diagrama de corpo livre (DCL) em um instante arbitrário e descrever as forças atuantes externas e de inércia em termos de coordenadas generalizadas. As leis básicas de mecânica são então aplicadas no DCL conduzindo as equações diferenciais ordinárias que descrevem o movimento.

Para um corpo rígido o movimento oscilatório é descrito pelas equações de Newton-Euler

$$\sum F = ma \quad (2.1)$$

$$\sum M_G = I\ddot{\theta} \quad (2.2)$$

sendo $\sum F$ o somatório de forças externas, $\sum M_G$ o somatório de momentos no centro de gravidade G , I o momento de inércia de massa e $\ddot{\theta}$ a aceleração angular.

Uma versão do método DCL para corpos rígidos usa uma variação do princípio de D'Alembert. Nesta nova configuração outro DCL mostrando forças externas em um instante arbitrário, um segundo DCL é desenhado em um mesmo instante mostrando as forças efetivas do sistema. As forças efetivas para um corpo rígido são definidas como forças iguais a ma , agindo

no centro de massa, e um conjugado igual a $I\ddot{\theta}$. As Eqs. (2.1) e (2.2) são aplicadas na forma

$$\left(\sum F\right)_{externas} = \left(\sum F\right)_{efetivas}, \quad (2.3)$$

$$\left(\sum M_A\right)_{externas} = \left(\sum M_A\right)_{efetivas}, \quad (2.4)$$

aplicadas a um ponto A.

A figura (2.1) apresenta um sistema massa-mola-amortecedor com 1 gdl.

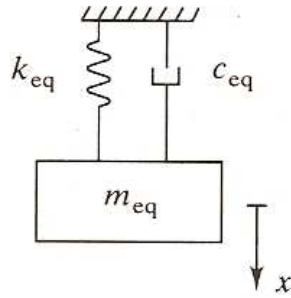


Fig. 2.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

Considerando que esta massa sofra a ação de uma força $F(t)$, a equação do movimento para este sistema é dada por:

$$\sum F = ma, \quad (2.5)$$

$$F(t) - kx(t) - c\dot{x}(t) = m\ddot{x}, \quad (2.6)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \quad (2.7)$$

A eq. (2.7) é uma equação diferencial ordinária (EDO) linear com coeficientes constantes, com deslocamento $x(t)$, velocidade $\dot{x}(t)$ e aceleração $\ddot{x}(t)$. É importante ressaltar que a força peso mg não entra neste balanço de forças, se a mola não distende em relação a linha de equilíbrio estático.

Com relação aos valores da força F e o dos coeficientes de amortecimento viscoso c pode-se definir os tipos de movimentos:

Movimento oscilatório livre não-amortecido: $m\ddot{x} + kx = 0$.

Movimento oscilatório livre amortecido: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$.

Movimento oscilatório forçado não-amortecido: $m\ddot{x} + kx = F(t)$.

Movimento oscilatório forçado amortecido: $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$.

2.1 Vibrações livres não-amortecidas

Considerando a fig. (2.3) assumindo $c = 0$, tem-se a equação do movimento para um sistema livre não-amortecido

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0. \quad (2.8)$$

Dividindo a Eq. (2.8) por m tem-se:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \quad (2.9)$$

Definindo a frequência angular natural não-amortecida ω_n em rad/s¹

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.10)$$

Substituindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.9) tem-se

$$\ddot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) = 0. \quad (2.11)$$

Assumindo que a resposta desta EDO é do tipo $x(t) = Ce^{\lambda t}$ com C constante. Assim

$$x(t) = Ce^{\lambda t}, \quad (2.12)$$

$$\dot{x}(t) = C\lambda e^{\lambda t}, \quad (2.13)$$

$$\ddot{x}(t) = C\lambda^2 e^{\lambda t}. \quad (2.14)$$

Substituindo estes valores na Eq. (2.11) chega-se a

$$\lambda^2 Ce^{\lambda t} + \omega_n^2 Ce^{\lambda t} = 0, \quad (2.15)$$

$$Ce^{\lambda t} (\lambda^2 + \omega_n^2) = 0. \quad (2.16)$$

Uma vez que $C = 0$ é solução trivial e $e^{\lambda t} \neq 0$, tem-se a equação característica

$$\lambda^2 + \omega_n^2 = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 = -\omega_n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n. \quad (2.17)$$

Com estes valores obtém-se a solução da EDO que descreve o movimento oscilatório

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}. \quad (2.18)$$

¹A frequência natural em Hz é dada por $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$.

Lembrando a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ e aplicando este resultado na Eq. (2.51)

$$x(t) = C_1 [\cos(\omega_n t) + i\sin(\omega_n t)] + C_2 [\cos(\omega_n t) - i\sin(\omega_n t)], \quad (2.19)$$

$$x(t) = (C_1 + C_2) \cos(\omega_n t) + (C_1 - C_2) i\sin(\omega_n t), \quad (2.20)$$

$$x(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t). \quad (2.21)$$

A solução final da equação do movimento é função das constantes A e B que são obtidas a partir das condições iniciais de deslocamento $x(0) = x_0$ e velocidade $\dot{x}(0) = v_0$, sendo assim

$$x_0 = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) = B \quad (2.22)$$

$$\dot{x}(t) = A\omega_n \cos(\omega_n t) - B\omega_n \sin(\omega_n t) = v_0 \therefore A = \frac{v_0}{\omega_n}. \quad (2.23)$$

Com isto a solução final da EDO é dada por

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) + x_0 \cos(\omega_n t). \quad (2.24)$$

Em problemas práticos é interessante também saber qual o valor máximo $x(t)_{max}$ das amplitudes de vibração. Para encontrar este valor pode-se calcular os pontos críticos $\frac{dx}{dt} = 0$. Após estes cálculos, constata-se que o valor da amplitude máxima de vibração livre em sistemas não-amortecidos é dado por

$$x_{max} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}. \quad (2.25)$$

Outra forma comum de se escrever a solução da Eq. (2.11) é

$$x(t) = X \sin(\omega_n t + \phi), \quad (2.26)$$

sendo

$$X = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2}, \quad (2.27)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_n x_0}{v_0} \right). \quad (2.28)$$

A fig. (2.2) apresenta exemplos de respostas de sistemas livres não-amortecidos para diferentes valores de condições iniciais.

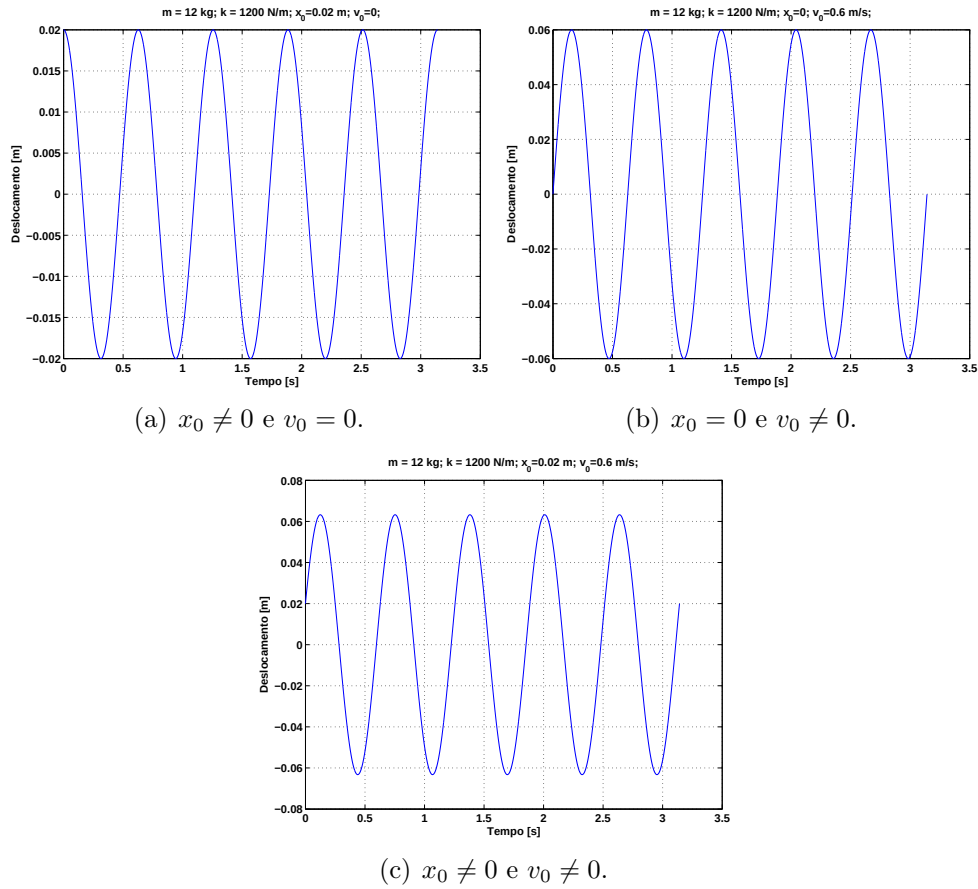


Fig. 2.2: Exemplo de resposta de sistema livre não-amortecido com 1 gdl para várias condições iniciais diferentes.

Exemplo 2.1 Dado o sistema mecânico, visto na fig. (2.3), com massa $m = 12 \text{ kg}$, rigidez da mola de $k = 1200 \text{ N/m}$ e com condições iniciais de deslocamento e velocidade de $x_0 = 0.02 \text{ m}$ e $v_0 = 0$, respectivamente, pede-se: a frequência natural não-amortecida, o cálculo da resposta de vibração do sistema e a amplitude máxima de deslocamento.

Solução: A frequência natural é definida pela Eq. (2.10), assim:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1200}{12}} = 10 \text{ rad/s}$$

ou convertendo para Hz tem-se $f_n = 1.59 \text{ Hz}$. Após a construção de um DCL constata-se que a equação do movimento deste sistema simples é $m\ddot{x} + kx = 0$ com solução dada pela Eq. (2.21)

$$x(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t).$$

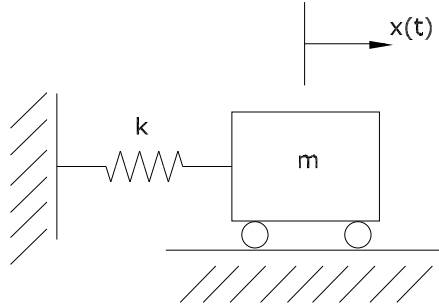


Fig. 2.3: Sistema massa-mola com 1 gdl.

As constantes A e B são descritas a partir do conhecimento das condições iniciais de deslocamento e velocidade

$$B = x_0 = 0.02m,$$

$$A = \frac{v_0}{\omega_n} = 0.$$

Assim a resposta de oscilação deste sistema é descrita por:

$$x(t) = 0.02 \cos(\omega_n t)$$

Já a amplitude máxima de deslocamento é dada pela Eq. (2.25)

$$x_{max} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2} = 0.02m$$

A fig. (2.2(a)) ilustra a resposta de vibração deste sistema, onde pode-se observar que o sistema vibra como uma senóide com frequência natural de 1.59 Hz e com amplitude máxima de 0.02 m.

Exemplo 2.2 *Um vagão, visto na fig. (2.4), com massa $m = 15000$ kg se deslocando sem atrito bate em uma mola com velocidade v_0 . A mola é deformada em 200 mm e tem uma rigidez de 130000 N/m. Com que velocidade o vagão bateu na mola?*

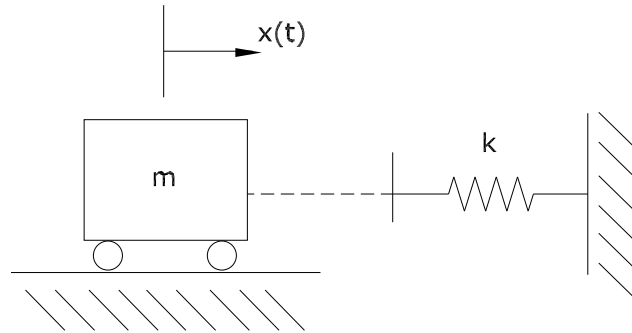


Fig. 2.4: Vagão batendo em uma mola.

Solução: A frequência natural do sistema é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{130000}{15000}} = 2.94 \text{ rad/s.}$$

A resposta livre do sistema massa-mola com 1 gdl é dada pela Eq. (2.21)

$$x(t) = A \sin(\omega_n t) + B \cos(\omega_n t).$$

sendo

$$x(0) = B = 0,$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = A\omega_n \therefore v_0 = 2.94A.$$

A mola foi deformada com 0.02 m, que corresponde ao valor da amplitude máxima de deslocamento dada pela Eq. (2.25)

$$x_{max} = 0.02 \text{ m} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2 + x_0^2} \Rightarrow v_0 = 0.588 \text{ m/s}$$

Com isto a resposta livre de oscilação do vagão é descrita por:

$$x(t) = 0.2 \sin(2.94t)$$

Exemplo 2.3 Considere o sistema da fig. (2.5). Calcule a frequência natural e a equação do movimento deste sistema. O momento de inércia da massa é $I = \frac{1}{2}Mr^2$.

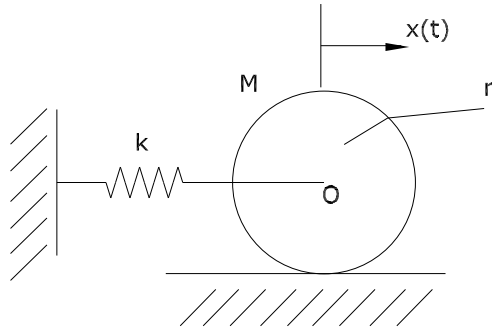


Fig. 2.5: Sistema com 1 gdl.

Solução: A primeira etapa é construir um diagrama de corpo livre para este sistema especificando todas as forças e momentos externos e de inércia, visto na fig. (2.6).

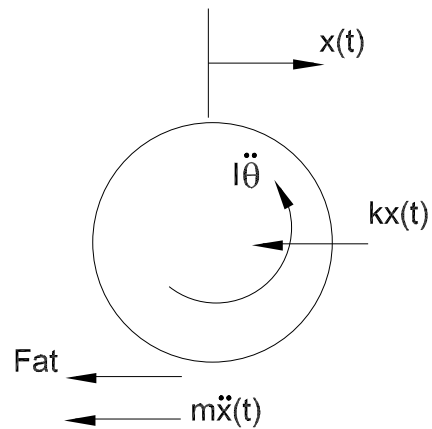


Fig. 2.6: DCL do sistema.

Agora aplicando a equação de Newton, tem-se

$$\begin{aligned}\sum F_{ext} + \sum F_{Inercia} &= 0, \\ m\ddot{x} + kx + F_{at} &= 0.\end{aligned}\tag{2.29}$$

A equação de Euler é dada por

$$\begin{aligned}\sum M_{ext} + M_{Inercia} &= 0, \\ \frac{1}{2}Mr^2\ddot{\theta} - F_{at}r &= 0 \Rightarrow F_{at} = \frac{1}{2}Mr\ddot{\theta}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Substituindo a Eq. (2.30) em (2.29) tem-se:

$$m\ddot{x} + kx + \frac{1}{2}Mr\ddot{\theta} = 0.\tag{2.31}$$

Lembrando que para ângulos pequenos $\sin\theta \approx \theta$, tem-se que $x = r\theta$ e, portanto, $\ddot{x} = r\ddot{\theta}$. Com isto a equação do movimento é descrita por

$$m\ddot{x} + kx + \frac{1}{2}M\ddot{x} = 0\tag{2.32}$$

$$\left(M + \frac{1}{2}M\right)\ddot{x} + kx = 0\tag{2.33}$$

$$\frac{3M}{2}\ddot{x} + kx = 0\tag{2.34}$$

Com isto a massa equivalente deste sistema é dada por $m_{eq} = \frac{3M}{2}$ e segue que a frequência natural não-amortecida do sistema é

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{2k}{3M}}.$$

2.2 Vibrações livres amortecidas

Caso o sistema da fig. (2.3) tenha $c \neq 0$, o problema é de vibrações livres amortecidas, sendo o seu movimento descrito pela seguinte equação

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0.\tag{2.35}$$

Assumindo que este sistema tenha solução do tipo $x(t) = De^{\lambda t}$, sendo λ uma variável complexa, assim:

$$x(t) = De^{\lambda t} \quad (2.36)$$

$$\dot{x}(t) = \lambda De^{\lambda t} \quad (2.37)$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 De^{\lambda t}$$

Substituindo estas soluções na Eq. (2.35) conduz ao seguinte resultado

$$m\lambda^2 De^{\lambda t} + c\lambda De^{\lambda t} + k = De^{\lambda t} = 0 \quad (2.39)$$

$$De^{\lambda t} (m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0. \quad (2.40)$$

Como $D = 0$ é a solução trivial e $e^{\lambda t}$ nunca é zero, temos a seguinte equação característica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0, \quad (2.41)$$

que pode ser escrita como

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0. \quad (2.42)$$

A solução da equação de segundo grau na Eq. (2.42) pode ser solucionada usando álgebra simples, assim

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (2.43)$$

Com isto a solução final da Eq. (2.35) é dada por:

$$x(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.44)$$

$$x(t) = D_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + D_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \quad (2.45)$$

Colocando em evidência o termo $e^{-\frac{c}{2m}t}$ tem-se a solução final:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left[D_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + D_2 e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right] \quad (2.46)$$

Algumas observações:

1. O termo $e^{-\frac{c}{2m}t}$ é uma função exponencialmente decrescente.

2. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$ os expoentes serão números reais e não ocorrerá oscilações, caracterizando superamortecimento.
3. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$ os expoentes serão números imaginários e ocorrerá oscilações, característica de um movimento oscilatório subamortecido.
4. Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$ tem característica de amortecimento crítico, ou seja, quando perturbado o sistema não oscila e volta rapidamente para a sua posição de equilíbrio.

Neste ponto pode-se definir o coeficiente de amortecimento crítico c_c , lembrando que $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 = \omega_n^2 \Rightarrow c_c = 2m\omega_n. \quad (2.47)$$

Neste caso m é igual a massa equivalente do sistema de um grau de liberdade. Após a definição do coef. de amortecimento crítico c_c define-se o fator de amortecimento:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \Rightarrow c = \xi c_c = \xi 2m\omega_n, \quad (2.48)$$

$$\frac{c}{2m} = \xi \omega_n. \quad (2.49)$$

Outra forma comum de escrever o fator de amortecimento ξ é observar que

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{\frac{km^2}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.50)$$

Com isto os pólos da equação característica (raízes da Eq. (2.42)) podem ser rescritos como:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = \\ &= -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \\ &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

sendo que ξ determina a natureza da solução, se é subamortecida, superamortecida ou amortecimento crítico.

2.2.1 Movimento oscilatório subamortecido ou subcrítico ($0 < \xi < 1$)

Neste caso a solução da equação do movimento é dada por

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[D_1 e^{i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t} + D_2 e^{-i\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t} \right]. \quad (2.52)$$

Lembrando da relação de Euler $e^{\theta t} = \cos\theta + i\sin\theta$ e substituindo na Eq. (2.52), após algumas manipulações matemáticas chega-se a:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)), \quad (2.53)$$

sendo ω_d a frequência angular natural amortecida definida como

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (2.54)$$

As constantes A e B são obtidas através das condições iniciais de deslocamento e velocidade e são dadas por:

$$A = x_0, \quad (2.55)$$

$$B_0 = \frac{v_0 + \xi\omega_n x_0}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (2.56)$$

Os pólos do sistema são descritos por:

$$\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm i\omega_d, \quad (2.57)$$

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2) = \omega_n^2. \quad (2.58)$$

Outra forma comum de resposta é

$$x(t) = C e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi), \quad (2.59)$$

sendo C a amplitude máxima do deslocamento e ϕ a fase, definidas por:

$$C = \frac{\sqrt{(v_0 + \xi\omega_n x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}}{\omega_d}, \quad (2.60)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left[\frac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\omega_n x_0} \right]. \quad (2.61)$$

A fig. (2.7) mostra um exemplo de resposta de sistema subamortecido com o envoltório em linha tracejada.

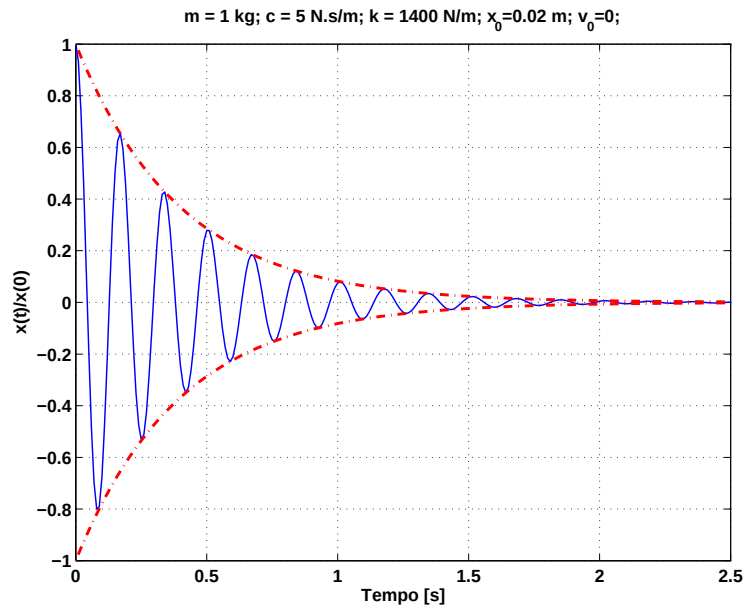


Fig. 2.7: Exemplo de resposta do sistema subamortecido.

Exemplo 2.4 Uma massa de 4.5 kg é suspensa por uma mola de rigidez $k = 1400 \text{ N/m}$. Um amortecedor com um coeficiente de amortecimento viscoso $c = 50 \text{ N.s/m}$ é conectado ao sistema. Determine o fator de amortecimento ξ , a frequência natural ω_n e a frequência natural amortecida ω_d ?

Solução A frequência natural ω_n é descrita por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1400}{4.5}} = 17.63 \text{ rad/s},$$

ou em Hz, $f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n = 2.8 \text{ Hz}$. Já o coeficiente de amortecimento crítico c_c é dado por:

$$c_c = 2m\omega_n = 2(4.5)(17.63) = 158.67 \text{ N.s/m}.$$

Com isto o fator de amortecimento ξ é dado por:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{50}{158.67} = 0.31.$$

Como ξ está no intervalo $0 < \xi < 1$ este sistema possui movimento oscilatório subamortecido. A frequência natural amortecida é dada por

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = 16.76 \text{ rad/s}$$

A fig. (2.8) mostra o gráfico de deslocamento deste sistema considerando $x_0 = 0.02 \text{ m}$ e $v_0 = 0$ como condições iniciais. É importante observar que as oscilações vão sendo amortecidas com o tempo dentro

de um envoltório definido por $e^{-\xi\omega_n t}$, que é mostrado em linha tracejada na fig. (2.8).

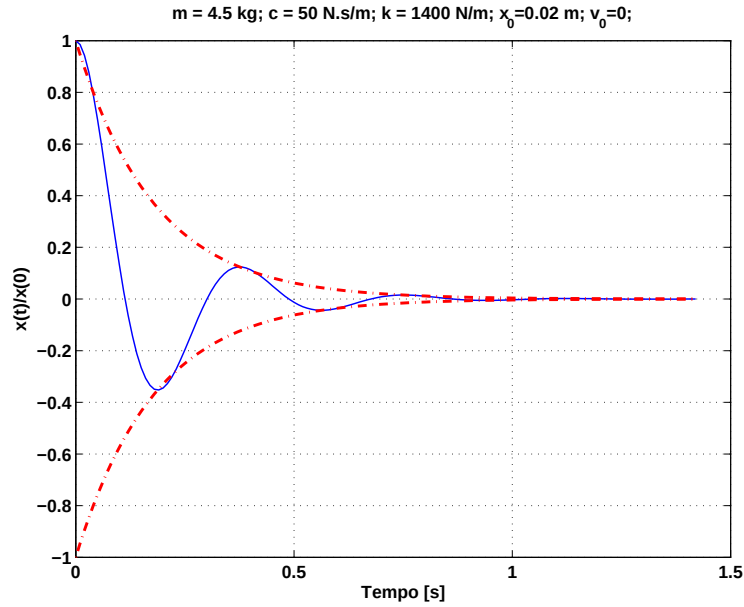


Fig. 2.8: Exemplo de resposta de sistema livre amortecido com 1 gdl com movimento subamortecido.

Exemplo 2.5 Dado o sistema da fig. (2.9), escreva a equação do movimento e defina o fator de amortecimento.

Solução: Após a construção de um DCL pode-se escrever a equação do movimento:

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + kx = 0. \quad (2.62)$$

Da Eq. (2.62) pode-se observar que $c_e q = c_1 + c_2$ e daí

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c_1 + c_2}{2m\omega_n} \quad (2.63)$$

Por fim deve-se notar que é possível escrever a equação do movimento de um sistema amortecido de 1 gdl em função de ω_n e ξ , assim:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (2.64)$$

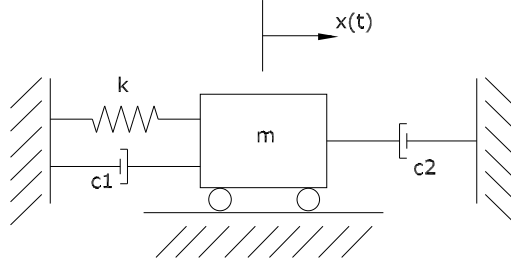


Fig. 2.9: Sistema massa-mola-amortecedor com dois amortecedores.

2.2.2 Movimento superamortecido ou super-crítico ($\xi > 1$)

Este caso acontece quando $\xi > 1$, o que faz com que as raízes da Eq. (2.51) sejam um par de números reais. A solução da equação do movimento para esta situação é dada por

$$x(t) = Ae^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + Be^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, \quad (2.65)$$

sendo A e B são novamente obtidas pelas condições iniciais e são dadas por:

$$A = \frac{v_0 + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (2.66)$$

$$B = -\frac{v_0 + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x_0}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (2.67)$$

A resposta de sistemas superamortecidos não envolvem oscilação, assim quando este é perturbado, este retorna a sua posição de equilíbrio de forma exponencial. A fig. (2.10) mostra um exemplo de resposta para este sistema considerando como condições iniciais $x_0 = 0.02$ m e velocidade inicial de $v_0 = 0$.

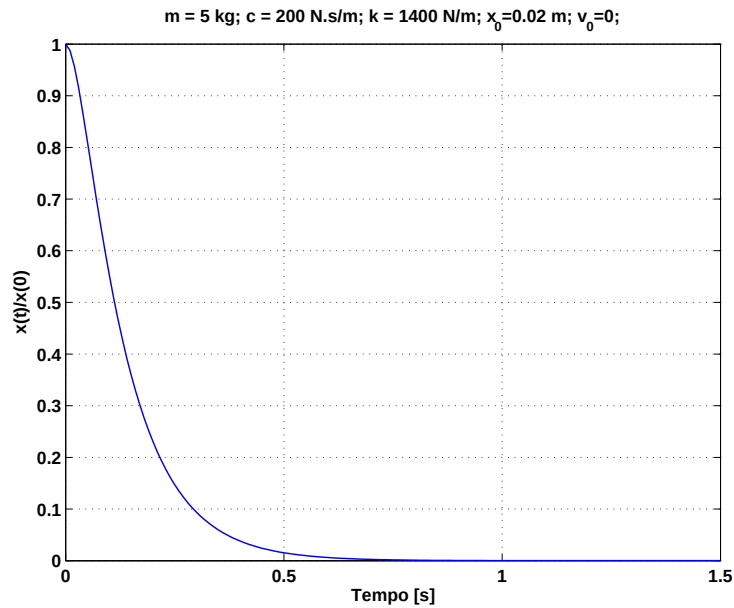


Fig. 2.10: Resposta do sistema superamortecido.

2.2.3 Movimento amortecido criticamente ou crítico amortecido ($\xi = 1$)

Este caso especial ocorre quando $\xi = 1$ e neste caso as raízes são um par de números reais negativos e iguais. A solução da equação do movimento é dada por:

$$x(t) = e^{-\omega_n t} [(v_0 + \omega_n x_0) t + x_0] \quad (2.68)$$

Na fig. (2.11) é mostrada a resposta para vários valores da condição inicial de v_0 .

Um sistema amortecido criticamente quando perturbado por certas condições iniciais, retorna à posição do equilíbrio no tempo mais rápido sem oscilar. Um exemplo clássico de aplicação deste sistema é o dispositivo amortecedor em portas de elevador, caso se solte a porta bruscamente esta não bate violentamente no batente, e sim volta para a posição de equilíbrio suavemente. Outro exemplo é o sistema de recolhimento de armas de fogo.

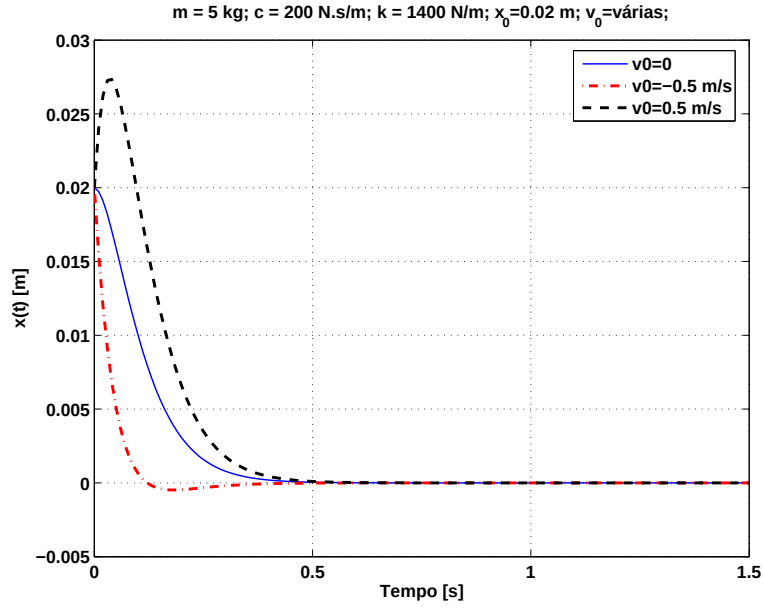


Fig. 2.11: Resposta do sistema criticamente amortecido.

2.3 Decremento logarítmico

Quando se está analisando um sistema estrutural já existente, normalmente não se conhece os valores dos parâmetros de rigidez e amortecimento, sendo necessário, portanto, determinar o valor do fator de amortecimento ξ assumindo um sistema de 1 gdl equivalente. Nestes casos é necessário realizar uma estimativa a partir dos dados experimentais do comportamento vibratório do sistema quando lhe é aplicado alguma condição inicial de perturbação. Vários podem ser os métodos empregados. Neste capítulo será apresentado o método do decremento logarítmico. Nos capítulos seguintes irá se discutir outros métodos para sistemas forçados e com múltiplos graus de liberdade.

O decremento logarítmico δ é definido como o logaritmo natural da razão de duas amplitudes sucessivas. Considere a resposta $x(t)$ do caso subamortecido ($0 < \xi < 1$) visto na fig. (2.12). O decremento logarítmico δ é escrito como:

$$\delta = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t + t_d)} \right), \quad (2.69)$$

sendo $t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ o período entre duas oscilações sucessivas, onde ω_d é a frequência angular natural amortecida.

Para um caso geral tem-se:

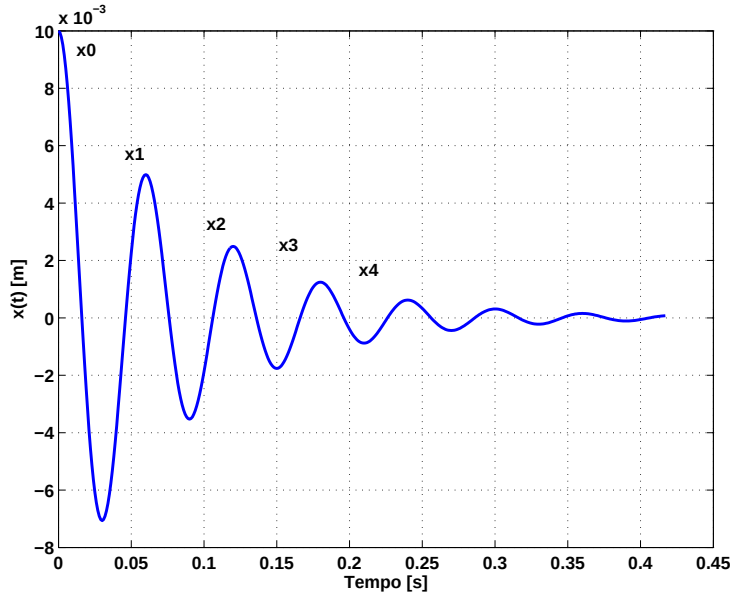


Fig. 2.12: Resposta de sistema subamortecido evidenciando amplitudes sucessivas.

$$\delta = \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right) = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \ln \left(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} \right), \quad (2.70)$$

sendo n o número de oscilações realizadas. A Eq. (2.70) pode ser rescrita da forma:

$$e^\delta = \frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{x_n}. \quad (2.71)$$

Notando que $\frac{x_0}{x_n} = \frac{x_0}{x_1} \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_3} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n}$ pode-se escrever a relação:

$$e^{n\delta} = \frac{x_0}{x_n}. \quad (2.72)$$

Com isto obtém-se uma nova expressão para o decremento logarítmico δ em função do número de ciclos n realizados no movimento oscilatório

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_0}{x_n} \right). \quad (2.73)$$

Lembrando que a resposta de um sistema subamortecido é do tipo

$$x(t) = X e^{-\xi \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (2.74)$$

Substituindo a Eq. (2.74) na Eq. (2.70) obtém-se a seguinte equação

$$\delta = \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right) = \ln \left(\frac{X e^{-\xi \omega_n t_0} \operatorname{sen}(\omega_d t_0 + \phi)}{X e^{-\xi \omega_n t_1} \operatorname{sen}(\omega_d t_1 + \phi)} \right), \quad (2.75)$$

sendo $t_1 = t_0 + t_d$, onde $t_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$. Após algumas manipulações algébricas na Eq. (2.75) chega-se a expressão do decremento logarítmico δ em função do fator de amortecimento ξ

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (2.76)$$

Ou ainda da forma

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (2.77)$$

Assim se conheço duas amplitudes sucessivas x_0 e x_1 , ou se uma amplitude x_0 e uma amplitude x_n após n ciclos, posso calcular o decremento logarítmico δ entre elas e estimar com a Eq. (2.77) o fator de amortecimento ξ do sistema.

Exemplo 2.6 Considere um sistema massa-mola-amortecedor com massa $m = 20\text{kg}$ e deslocamento inicial $x_0 = 0.01\text{ m}$. A fig. (2.13) mostra a resposta livre deste sistema. Estime os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento viscoso deste sistema.

Solução: Considerando duas amplitudes sucessivas $x_0 = 0.01\text{ m}$ e $x_1 = 0.005\text{ m}$, mostradas na fig. (2.13), o decremento logarítmico é calculado a seguir:

$$\delta = \ln \left(\frac{x_0}{x_1} \right) = \ln \left(\frac{0.01}{0.005} \right) = 0.693.$$

Com o δ calculado emprega-se a Eq. (2.77) para se estimar o fator de amortecimento ξ

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0.693}{\sqrt{4\pi^2 + (0.693)^2}} = 0.11.$$

Como o fator de amortecimento ξ está entre 0 e 1, este sistema é subamortecido. Sabendo que o período entre as duas oscilações sucessivas é $t_d = 0.06\text{ s}$, também visto na fig. (2.13), pode-se calcular a frequência angular natural amortecida

$$\omega_d = \frac{2\pi}{t_d} = 104.7 \text{ rad/s}.$$

Com o uso da Eq. (2.54) pode-se então estimar qual o valor da frequência angular natural dada por

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{104.7}{\sqrt{1 - (0.1)^2}} = 105.3 \text{ rad/s}.$$

A rigidez do sistema pode ser escrita lembrando que $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$, o que leva a

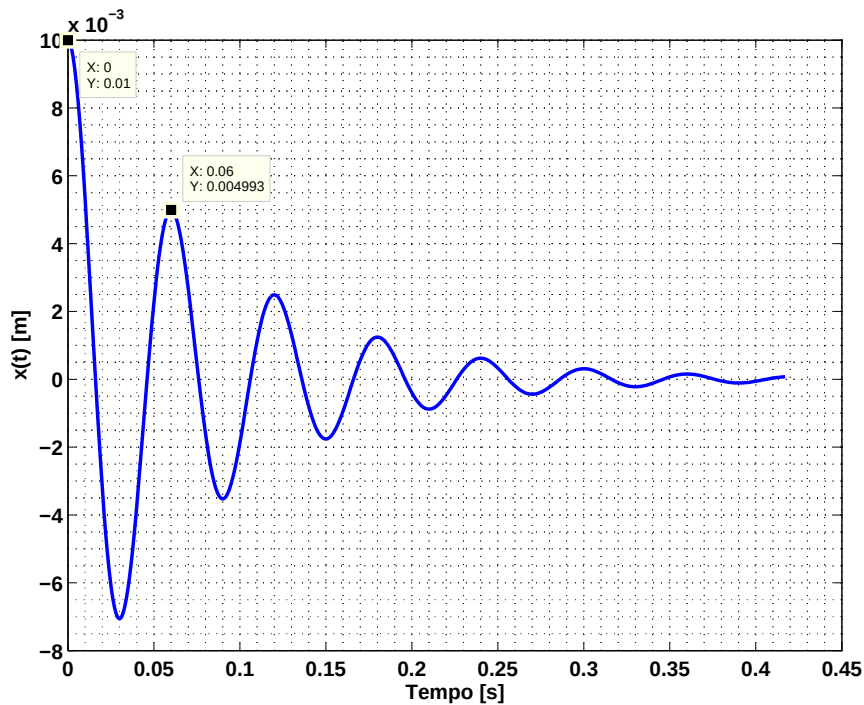


Fig. 2.13: Resposta livre do sistema.

$$k = m\omega_n^2 = (20)(105.3)^2 = 2.22 \times 10^5 \text{ N/m.}$$

Já o coeficiente de amortecimento viscoso é estimado por:

$$c = 2m\omega_n\xi = 2(20)(105.3)(0.11) = 4.63 \times 10^2 \text{ N.s/m}$$

2.4 Exercícios

Ex. 2.1 Plote em algum software (estilo Scilab) a resposta para o sistema $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, com $m = 1 \text{ kg}$, $c = 4 \text{ N.s/m}$ e $k = 5000 \text{ N/m}$, com condição inicial de $x_0 = 0.03 \text{ m}$ e $v_0 = 0.2 \text{ m/s}^2$.

Ex. 2.2 Resolva a seguinte equação do movimento $m\ddot{x} - kx = 0$ com condição inicial $x_0 = 1$ e $v_0 = 0$. Plote sua resposta assumindo valores para k e m em algum software (estilo Scilab). Discuta o resultado.

Ex. 2.3 Resolva a seguinte equação do movimento $\ddot{x} - \dot{x} + x = 0$ com condição inicial $x_0 = 1$ e $v_0 = 0$. Plote sua resposta assumindo valores para k e m em alguma software (estilo Scilab). Discuta o resultado.

Ex. 2.4 Sabe-se que um sistema massa-mola-amortecedor tem os seguintes pólos $\lambda_{1,2} = 1 \times 10^2 (-0.1157 \pm 1.0472j)$. Pede-se: (a) Estes pólos são estáveis? Justifique. (b) Qual o tipo de movimento que este sistema realiza quando este é perturbado com uma condição inicial? (c) Determine a frequência natural e o fator de amortecimento deste sistema.

Ex. 2.5 Para um sistema massa-mola-amortecedor, com $m = 8.75$ kg, $c = 1401.2$ N.s/m e $k = 14012.5$ N/m quando este é sujeito a uma velocidade inicial de $v_0 = 25.4$ m/s e $x_0 = 0$ pede-se: (a) Verifique o tipo de sistema: subamortecido, crítico ou superamortecido; (b) O deslocamento máximo do sistema.

Ex. 2.6 Um canhão tem uma massa de 1100 kg e um sistema de recolhimento composto de uma mola $k = 470000$ N/m e amortecedor de choque viscoso com amortecimento crítico. A distância de recolhimento é de 0.9 m. Pede-se: (a) A velocidade inicial de recolhimento. (b) O tempo para retornar à posição 0.25 m da posição inicial. (c) O deslocamento em $t=0.5$ s.

Ex. 2.7 Para um sistema com amortecimento viscoso com massa $m = 1$ kg e rigidez $k = 4900$ N/m, verifica-se que a amplitude de vibração reduz-se em 80% em 15 ciclos. Determine o fator de amortecimento ξ e o coeficiente de amortecimento viscoso do sistema.

Ex. 2.8 Um componente estrutural de um sistema automotivo com massa de 1 kg é perturbado para oscilar com vibrações livres. A sua resposta experimental para esta condição é vista na fig. (2.14). Com base neste gráfico determine os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento viscoso deste sistema, assumindo que ele tem apenas 1 grau de liberdade.

Ex. 2.9 A resposta ao impulso de um sistema mecânico é medida experimentalmente e mostrada na fig. (2.15). Com base neste gráfico pede-se o cálculo do coeficiente de amortecimento viscoso equivalente e do coeficiente de rigidez equivalente do sistema. A massa do sistema é 20 kg.

Ex. 2.10 Durante parte do Campeonato Mundial de Fórmula 1 de 2006, a Equipe Renault utilizou em seus carros absorvedores de vibração na dianteira e na traseira, com o objetivo de minimizar as oscilações do chassi provocadas pela passagem sobre as “zebras” e, conseqüentemente, melhorar seu desempenho. No detalhe da fig. (2.16) está mostrado o dispositivo empregado na dianteira, que consiste basicamente em um sistema massa-mola-amortecedor de 1 grau de liberdade, com uma massa de 7 kg (1) apoiada sobre molas (2 e 3) de diferente rigidez, com relação 1 : 3, inseridas em uma carcaça (4)

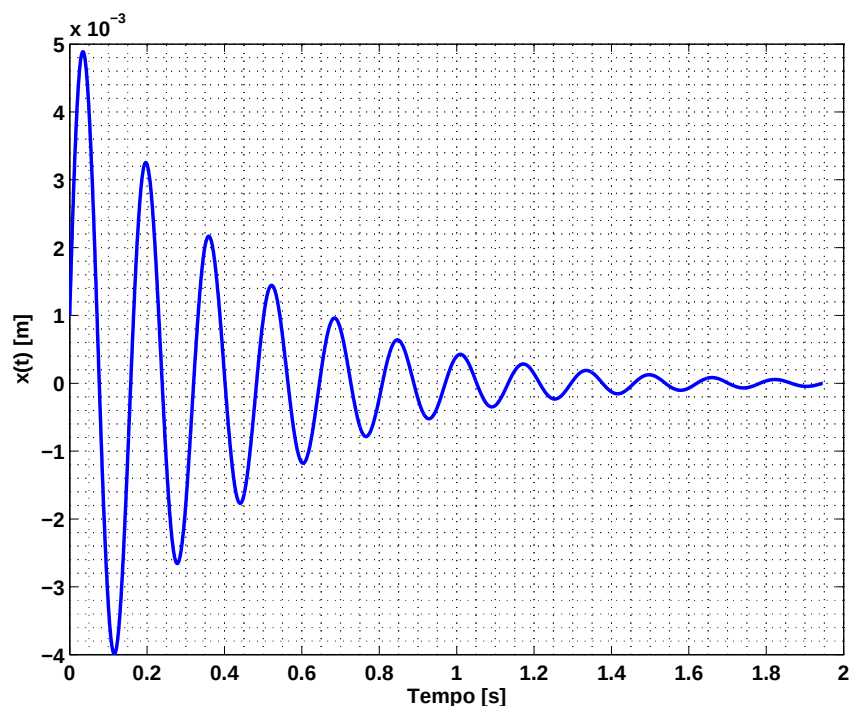


Fig. 2.14: Resposta livre do sistema estrutural.

de fibra de carbono, e com um amortecedor regulável (5) contendo um fluido viscoso. Sabendo que a frequência natural não amortecida do absorvedor de vibração utilizado na dianteira é de $\sqrt{2}/2$ Hz, determine a rigidez das molas empregadas².

Ex. 2.11 O projeto de uma absorvedor de choque subamortecido para uma motocicleta para motocross de 200 kg de massa, fig. (2.17), deve atender às seguintes especificações: quando o amortecedor estiver sujeito a uma velocidade vertical inicial devido a uma saliência na estrada, a curva deslocamento-tempo deve ser decrescente. Determine as constantes de rigidez e amortecimento necessárias para o amortecedor se o período de vibração amortecida for $T_d = 2$ s e a amplitude tiver que reduzir em $1/4$ em **meio período**. Determine também a velocidade inicial mínima que resulta em um deslocamento máximo de 250 mm.

Ex. 2.12 Para os sistemas das figuras (2.18), (2.19) e (2.20) determine a equação do movimento e a frequência natural não-amortecida do sistema.

²Questão adaptada do ENADE 2008.

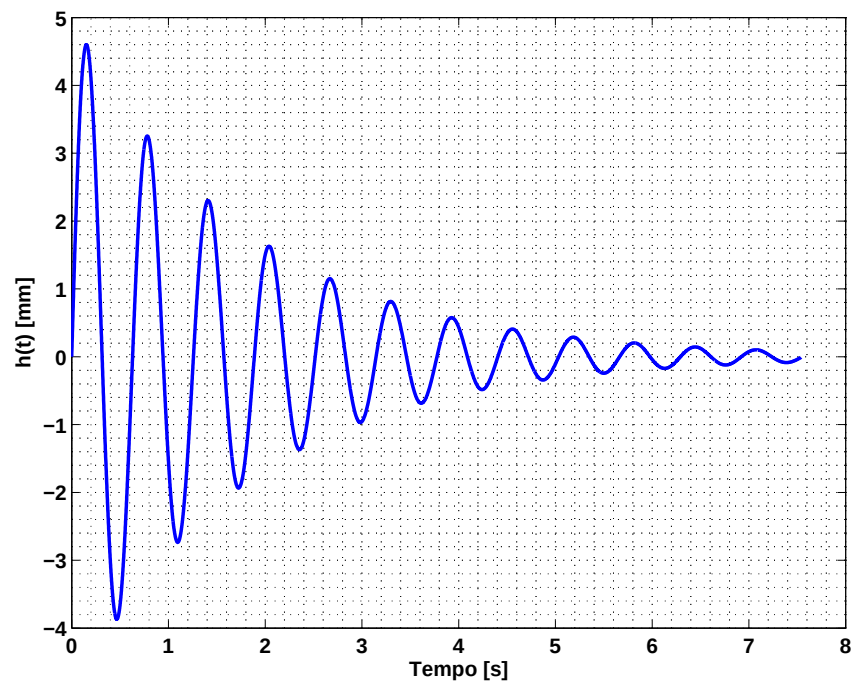
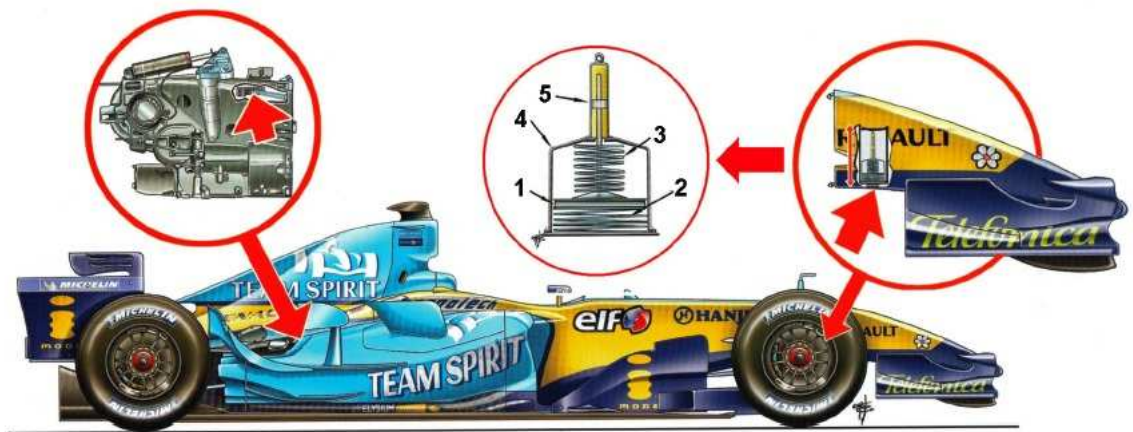


Fig. 2.15: Resposta ao impulso $h(t)$.



PIOLA, G., **Formula 1 Technical Analysis 2006-2007**. Giorgio Nada Editore, 2007. (Adaptado).

Fig. 2.16: Vista do fórmula 1.

Ex. 2.13 *Uma haste delgada uniforme de massa m e comprimento l é ar-*

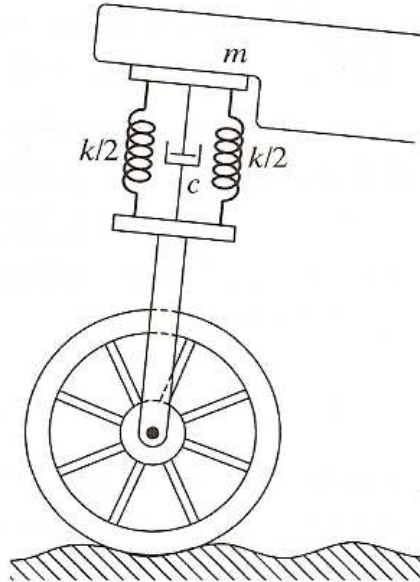


Fig. 2.17: Amortecedor para uma motocicleta.

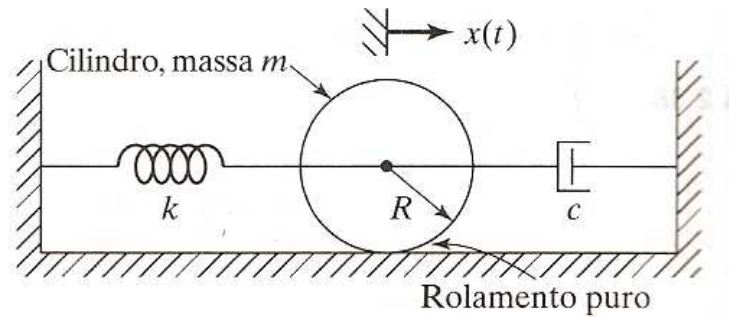


Fig. 2.18: Sistema 1.

ticulada no ponto A e está ligada a quatro molas lineares e a uma mola torcional, como mostra a fig. (2.21). Determine a frequência natural não-amortecida do sistema se $k = 2000 \text{ N/m}$, $k_t = 1000 \text{ N.m/rad}$, $m = 10$ e $l = 5 \text{ m}$.

Ex. 2.14 Determine a equação do movimento da barra rígida OA de comprimento l e massa m da fig. (2.22). Determine também a sua frequência natural

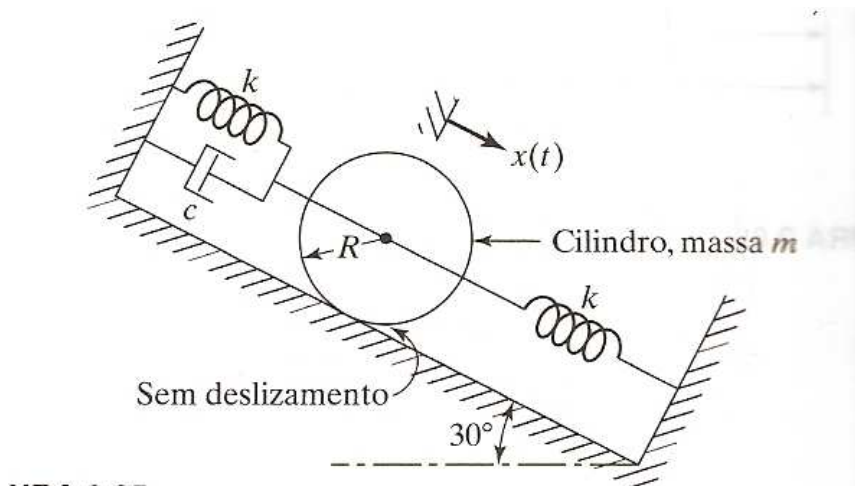


Fig. 2.19: Sistema 2.

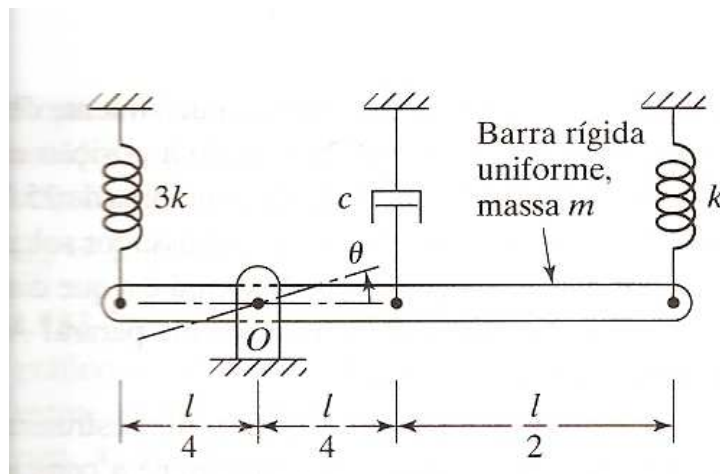


Fig. 2.20: Sistema 3.

Ex. 2.15 Desafio: Uma turbina hidráulica de 1000 kg de massa e 500 kg/m² de momento de inércia de massa é montada em um eixo de aço como visto na fig. (2.23). A velocidade operacional da turbina é 2.400 rpm. Admitindo que as extremidades do eixo sejam fixas, determine os valores de d , a e l tais que a frequência natural de vibrações da turbina em cada uma das direções axial, transversal e radial seja maior que a velocidade operacional da turbina. O momento de inércia de área do eixo é $I = \pi d^4/64$, momento de inércia de massa é definido como:

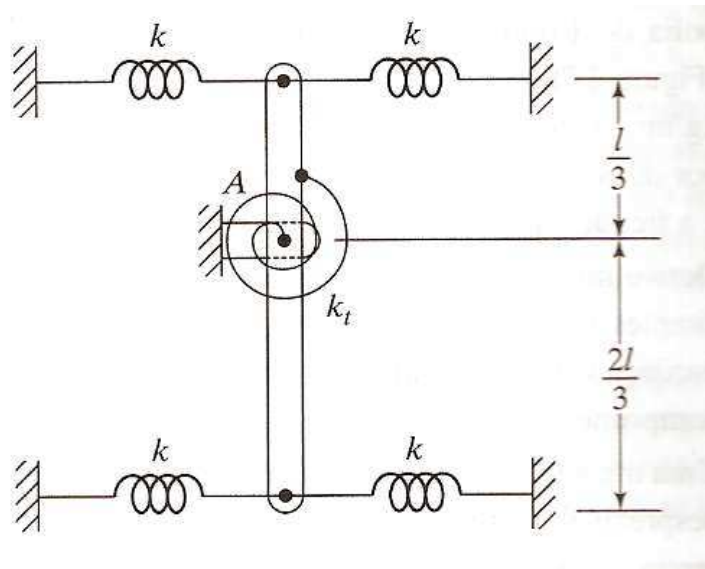


Fig. 2.21: Barra rígida.

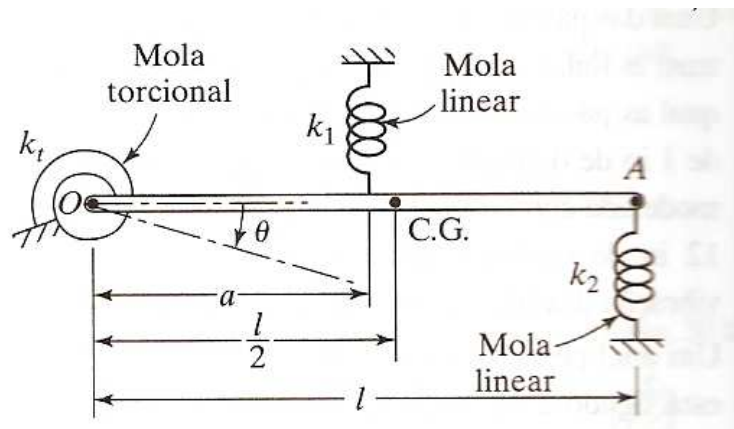


Fig. 2.22: Barra rígida.

$$I = \int_m r^2 dm \quad (2.78)$$

sendo $dm = \rho dV$. Dica: use os conceitos de energia cinética e potencial e cálculo de massa e rigidez equivalente do sistema.

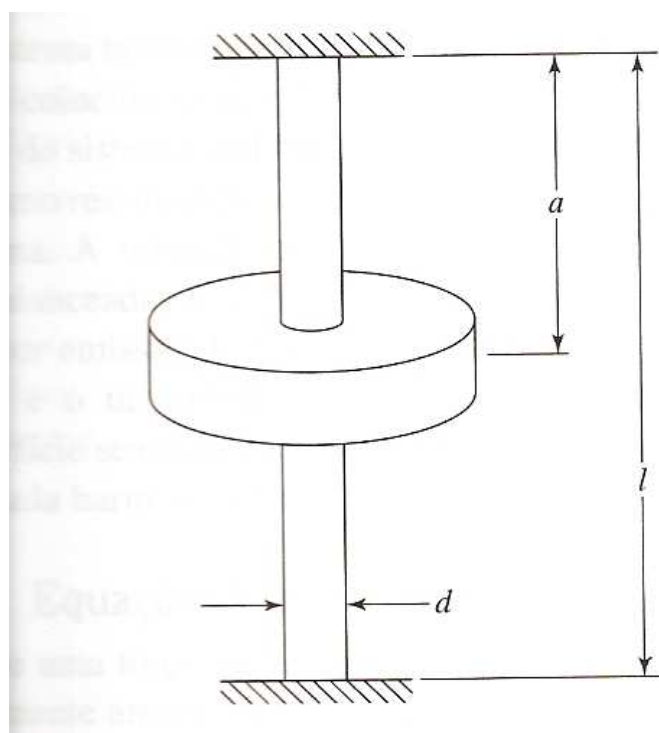


Fig. 2.23: Eixo com turbina montada.

Capítulo 3

Vibrações Forçadas em Sistemas com 1 Grau de Liberdade

Imagine a seguinte situação prática e bastante comum em um ambiente industrial: Você trabalha em uma empresa que recebeu um compressor alternativo de grande dimensão e precisa instalá-lo. Para isto deve especificar uma fundação composta por absorvedores com determinada rigidez e amortecimento para reduzir a vibração da máquina. Caso isto não seja bem feito é possível que a vida útil da máquina seja reduzida devido a vibração excessiva. Como proceder isto? Até o final deste capítulo, o estudante terá uma idéia de como realizar este projeto. Na situação hipotética descrita acima, e em muitas outras, as máquinas e sistemas estruturais vibram devido não somente às condições iniciais e na frequência natural (amortecida ou não) e sim em função também de forças de excitação externa $F(t)$, que podem ser de diferentes tipos, conforme visto na seção 1.2.3.

Inicialmente iremos considerar apenas o caso em que a excitação é do tipo harmônica. Em seguida, excitações do tipo impulso unitário e degrau serão usadas. Nesta primeira parte uma série de conceitos e definições importantes em vibrações vão ser apresentadas. Como aplicação se mostrará a vibração causada por força de desbalanceamento em máquina rotativa e o projeto de fundação para instalação de máquinas. O caso de resposta de sistemas excitados por forças de excitação qualquer é tratado com várias abordagens: usando a transformada de Laplace, método da integral de convolução e transformadas de Fourier. Na medida do possível, buscasse ilustrar todo o conteúdo apresentado com exemplos de aplicação prática na indústria. Também são introduzidos alguns conceitos básicos de análise espectral e formas de se estimar as funções de resposta ao impulso (IRF) e função de resposta em frequência (FRF). A abordagem de solução das equações do movimento para sistemas com 1 grau de liberdade (livre ou forçado) através

de métodos de aproximação numérica é revista, em especial nas formulações baseadas em aproximação por séries de Taylor. Por fim, é apresentada uma discussão sucinta do fenômeno comum na prática de vibração auto-excitada, em especial a instabilidade dinâmica causada por escoamento de fluido.

3.1 Vibração causada por excitação harmônica

Considere a equação do movimento de um sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade com uma força de excitação $F(t)$ agindo sobre ele

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) é uma equação diferencial ordinária linear e não-homogênea (EDOLNH). No caso considerado nesta seção assuma que a força $F(t)$ seja do tipo harmônica e descrita por

$$F(t) = F \operatorname{sen}(\omega t), \quad (3.2)$$

sendo F a amplitude de excitação, unidade [N], e ω seja a frequência de excitação. Com isto a Eq. (3.1) torna-se

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \operatorname{sen}(\omega t). \quad (3.3)$$

A questão agora é saber como solucionar a EDOLNH para saber o movimento oscilatório $x(t)$. Um método que pode ser usado envolve aplicar o método dos coeficientes indeterminados [3]. Assim a solução da equação do movimento (3.3) envolve a soma de duas soluções, uma primeira homogênea $x_h(t)$ (que pode ser as Eqs. (2.53), (2.65) ou (2.68) dependendo do valor do ξ do sistema) e uma segunda particular $x_p(t)$, ou seja,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (3.4)$$

A solução homogênea $x_h(t)$ corresponde a solução da equação quando $F(t) = 0$ e representa um termo transitório provocado pela resposta livre, já a solução permanente $x_p(t)$ depende da frequência de excitação e é uma resposta em regime permanente. Fisicamente, a solução em regime permanente $x_p(t)$ segue a excitação $F(t)$ com uma amplitude X_p e fase φ em relação a excitação¹, assim a solução da parte permanente é do tipo

$$x_p(t) = X_p \operatorname{sen}(\omega t - \varphi). \quad (3.5)$$

¹Obviamente se for assumido que o sistema é linear e que a excitação é senoidal.

Derivando a Eq. (3.5) e substituindo na Eq. (3.3) chega-se a amplitude de resposta X_p do sistema:

$$X_p = \frac{\frac{F}{k}}{\sqrt{\left(1 - m\frac{\omega^2}{k}\right)^2 + \left(c\frac{\omega}{k}\right)^2}}, \quad (3.6)$$

ou de uma forma mais elegante

$$M(r, \xi) = \frac{X_p k}{F} = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}, \quad (3.7)$$

sendo $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ a razão entre as frequências de excitação e natural não-amortecida e $M(r, \xi)$ o fator de ampliação, que é função da razão r e do fator de amortecimento ξ . Já a fase φ pode ser escrita como

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1 - r^2} \right). \quad (3.8)$$

Então a solução final da equação do movimento para um sistema subamortecido, $0 < \xi < 1$, pode ser escrita como:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

$$x(t) = X_h e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \phi) + \frac{F/k}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \text{sen}(\omega t - \varphi), \quad (3.9)$$

sendo X_h a amplitude da resposta transitória dada pela Eq. (2.59). Examinando a Eq. (3.9) pode-se realizar duas observações importantes:

- Quando o tempo t é grande ($t \rightarrow \infty$) o termo transiente $x_h(t)$ (primeiro termo da Eq. (3.9) torna-se muito pequeno e consequentemente a resposta de regime permanente $x_p(t)$ fica predominante na resposta final $x(t)$.
- Caso a frequência de excitação ω seja igual ou próxima da frequência natural ω_n , a razão $r \approx 1$. Este fenômeno é conhecido como ressonância e implica que o fator de ampliação $M(r, \xi)$ possa aumentar muito, dependendo do valor do ξ do sistema, e consequentemente as amplitudes de vibração podem ficar muito grandes.

O fenômeno de ressonância normalmente deve ser evitado no projeto de estruturas e máquinas, uma vez que grandes amplitudes de vibração podem

acelerar o processo de falha por fadiga, desconforto, ruído, dentre outros problemas. Ocasionalmente, o fenômeno de ressonância pode ser catastrófico, dependendo do valor do fator de amortecimento ξ do sistema. Entretanto, o conceito de ressonância também é muito útil em teste estrutural. Por exemplo, toda a análise modal é baseada em medir vibrações em condição de ressonância.

A fig. (3.1) ilustra como o valor da razão de frequência r e do fator de amortecimento ξ afetam as amplitudes na condição de ressonância, quando $r = 1$. Esta figura ilustra o fator de ampliação $M(r, \xi)$ para vários valores de ξ . Note que existe uma faixa próxima a $r = 1$ onde existe uma ampliação nas amplitudes de vibração, esta região é conhecida como faixa de ressonância. É interessante também observar pela Eq. (3.7) que quando $\xi = 0$ e $r = 1$ o valor de $X_p \rightarrow \infty$.

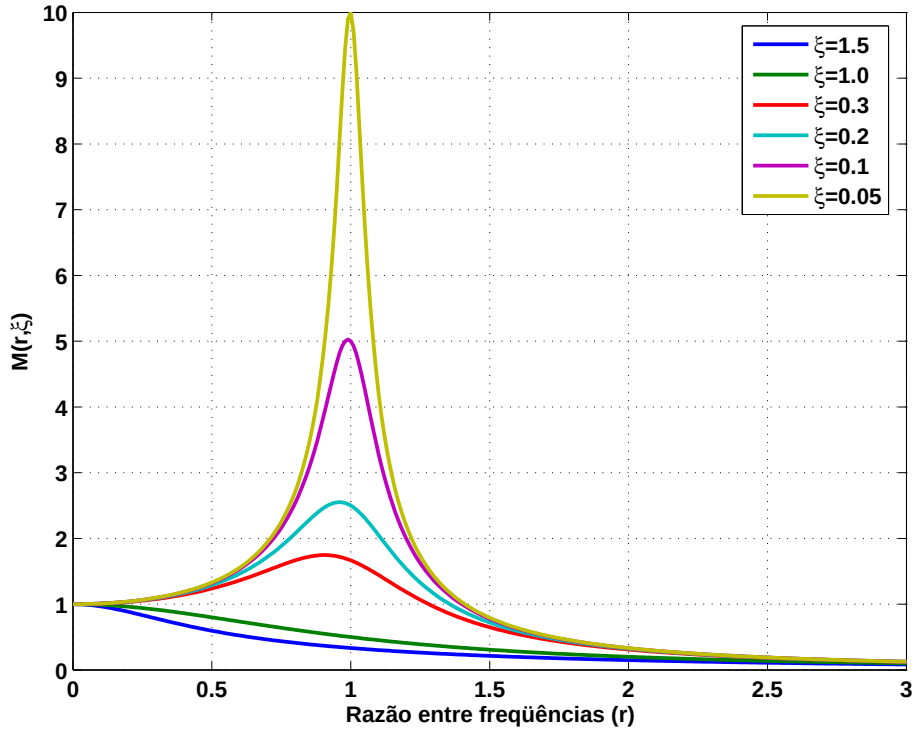


Fig. 3.1: Curvas de ampliação de amplitudes de vibração para um sistema com 1 gdl.

O máximo valor de $M(r, \xi)$ é chamado de pico de ressonância e é encontrado quando

$$\frac{dM(r, \xi)}{dr} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{1 - 2\xi^2} = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (3.10)$$

O valor máximo de $M(r, \xi)$ quando $r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$ e quando $\xi < 1/\sqrt{2}$ é dado por:

$$M_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (3.11)$$

Pode-se definir também a largura de banda (Bandwidth) BW como sendo o valor da frequência em que a magnitude de vibração $X_p k/F$ fica abaixo de 70.7%, que corresponde a um decaimento de -3.0 dB². A largura da banda BW pode ser relacionada ao fator de amortecimento ξ através da expressão

$$BW = \omega_n \sqrt{(1 - 2\xi^2) + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad (3.12)$$

Outras duas quantidades utilizadas na discussão de vibrações de estruturas e máquinas é o fator de perda η descrito por

$$\eta = 2\xi, \quad (3.13)$$

e o valor Q ou fator de forma de ressonância expressado através da relação

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{\eta}. \quad (3.14)$$

É interessante notar que quando $r = 1$ o fator de ampliação $M(r, \xi)$ é igual ao valo Q .

Outra situação interessante acontece quando $r \approx 1$ e o sistema não é amortecido $\xi \approx 0$. Nestes casos ocorre o fenômeno de batimento, ilustrado na fig. (3.2). Um exemplo prático do fenômeno de batimento ocorre em vibração de transformadores.

Na seqüência apresenta-se alguns exemplos sobre a aplicação destes conceitos em problemas práticos de engenharia.

Exemplo 3.1 *Uma máquina com 45 kg é montada em cima de um isolador não-amortecido composto por quatro molas em paralelo com rigidez de 2×10^5 N/m em cada mola. Quando opera a uma velocidade de 32 Hz, a amplitudes em regime permanente X_p é medida a partir de um teste experimental e corresponde a 1.5 mm. Qual a magnitude da força que excita esta máquina nesta velocidade?*

²O decibel (dB) é definido como sendo $-20\log(\text{Amplitude})$, no caso $-20\log(.707)=-3.0$ dB.

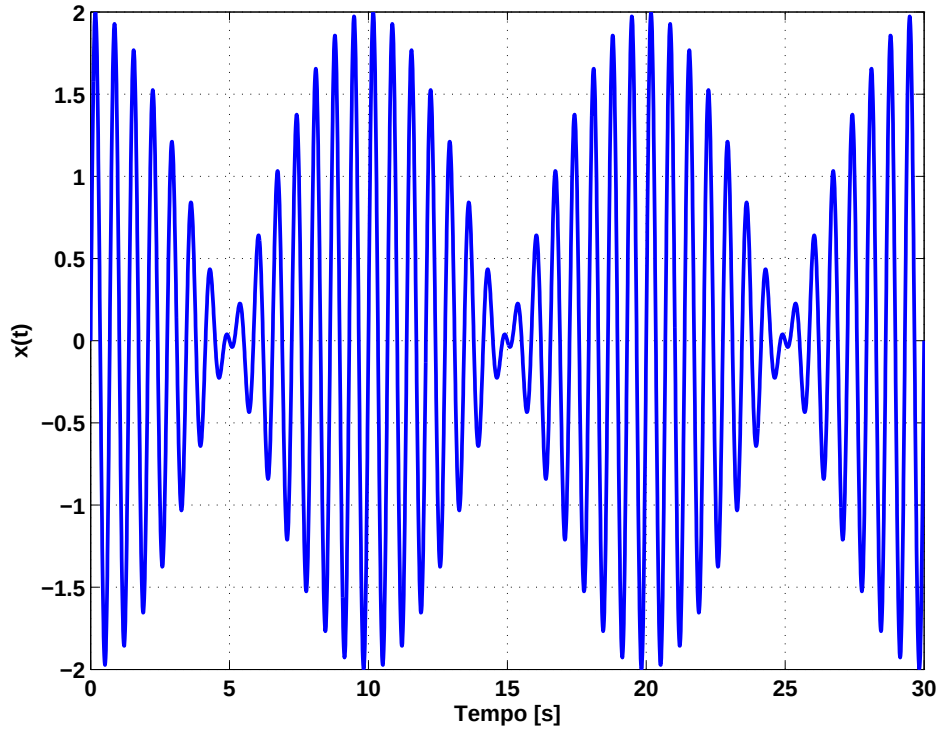


Fig. 3.2: Exemplo de batimento para um sistema com 1 gdl.

Solução: A frequência natural deste sistema é calculada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{4(2 \times 10^5)}{45}} = 133.3 \text{ rad/s.} \quad (3.15)$$

A frequência de excitação em rad/s é calculada como $\omega = 2\pi f = 2\pi(32)$. Com isto a razão entre frequências do sistema é calculada como:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\pi(32)}{133.3} = 1.51. \quad (3.16)$$

Como o sistema é montado em um isolador sem amortecimento ($\xi = 0$) com um $r > 1$ o fator de ampliação $M(r, \xi)$ é calculado pela Eq. (3.7) de forma modificada:

$$M(r = 1.51, \xi = 0) = \frac{1}{|1 - r^2|} = \frac{1}{|1 - (1.51)^2|} = 0.781. \quad (3.17)$$

Rearranjando a Eq. (3.7) obtém-se o valor da amplitude da força de excitação deste sistema:

$$F = \frac{X_p k_{eq}}{M(r = 1.51, \xi = 0)} = \frac{(0.0015)(8 \times 10^5)}{0.781} = 1.54 \times 10^3 \quad N. \quad (3.18)$$

Exemplo 3.2 Uma máquina com 120 kg é montada no meio de uma viga simplesmente suportada com comprimento $L = 1.5$ m, módulo de elasticidade $E = 200 \times 10^9$ N/m² e momento de inércia de área $I = 1.53 \times 10^{-6}$ m⁴. Um teste de vibrações é feito nesta máquina quando esta é excitada por uma força harmônica com magnitude de 2000 N para diferentes velocidades de rotação da máquina. Todas as medições experimentais das amplitudes de vibração X_p , em função das velocidades de rotação, são gravadas e constata-se analisando estes resultados que a maior amplitude corresponde a 2.5 mm. Com esta informação estime o coeficiente de amortecimento do sistema.

Solução: O primeiro passo é calcular a rigidez da viga, que para esta condição de contorno (simplesmente suportada) é definida como:

$$k = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48(200 \times 10^9)(1.53 \times 10^{-6})}{(1.5)^3} = 4.35 \times 10^6 \quad N/m. \quad (3.19)$$

Com a rigidez calculada é possível se calcular a frequência natural ω_n do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4.35 \times 10^6}{120}} = 190.4 \quad rad/s. \quad (3.20)$$

Como a informação conhecida é a máxima amplitude de vibração em regime permanente medida experimentalmente $X_{max} = 0.0025$ m pode-se calcular o fator de ampliação máximo M_{max} pela Eq. (3.7)

$$M(r, \xi) = \frac{X_{max} k}{F} = \frac{(0.0025)(4.35 \times 10^6)}{2000} = 5.44. \quad (3.21)$$

Com o valor de M_{max} calculado, a Eq. (3.11) pode ser rearranjada

$$\xi^4 - \xi^2 + \frac{1}{4M_{max}^2} = 0, \quad (3.22)$$

que é uma equação quadrática em ξ^2 cuja raízes são dadas por

$$\xi = \left[\frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{M_{max}^2}} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Substituindo $M_{max} = 5.44$ e notando que o sinal positivo em $\pm$ leva a um fator de amortecimento maior do que $1/\sqrt{2}$, tem-se então que $\xi = 0.092$. Ou seja apenas uma das raízes da equação acima é significativa fisicamente.

3.2 Vibração causada por força de desbalanceamento em máquinas rotativas

Um caso especial de vibrações excitadas por forças harmônicas ocorre em máquinas rotativas com massa desbalanceada. Nestes casos o sistema é excitado por uma massa desbalanceada com uma velocidade angular ω e com uma excentricidade e . Esta força de desbalanceamento é dada por:

$$F_c(t) = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.24)$$

A fig. (3.3) mostra uma máquina rotativa representada por um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade.

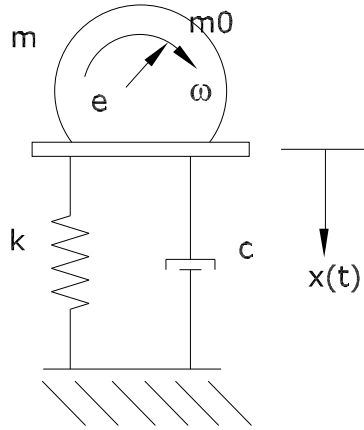


Fig. 3.3: Exemplo de máquina rotativa com massa desbalanceada.

Neste caso a equação do movimento do sistema é descrita por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.25)$$

Assim para este caso, a amplitude de vibrações em regime permanente de uma máquina rotativa com desbalanceamento pode obtida a partir da Eq. (3.7)

$$X_p = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (3.26)$$

Como a amplitude da força de desbalanceamento é $F = m_0 e \omega^2$ a Eq. (3.26) pode ser reescrita

$$\frac{X_p}{k} = \frac{m_0 e \omega^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (3.27)$$

sendo que $m_0 e$ representa a quantidade de desbalanceamento do sistema. Em geral $m_0 e$ é obtido a partir de um teste experimental para procurar adicionar massas para corrigir este desbalanceamento, uma vez que esta excitação em níveis muito grandes pode comprometer o funcionamento de uma máquina e diminuir sua vida útil. Dividindo a Eq. (3.27) por m obtém-se a expressão final conhecida como fator de ampliação adimensional $\Lambda(r, \xi)$

$$\frac{m X_p}{m_0 e} = \Lambda(r, \xi) = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (3.28)$$

A fig. (3.4) ilustra a função $\Lambda(r, \xi)$ para vários valores de r e ξ .

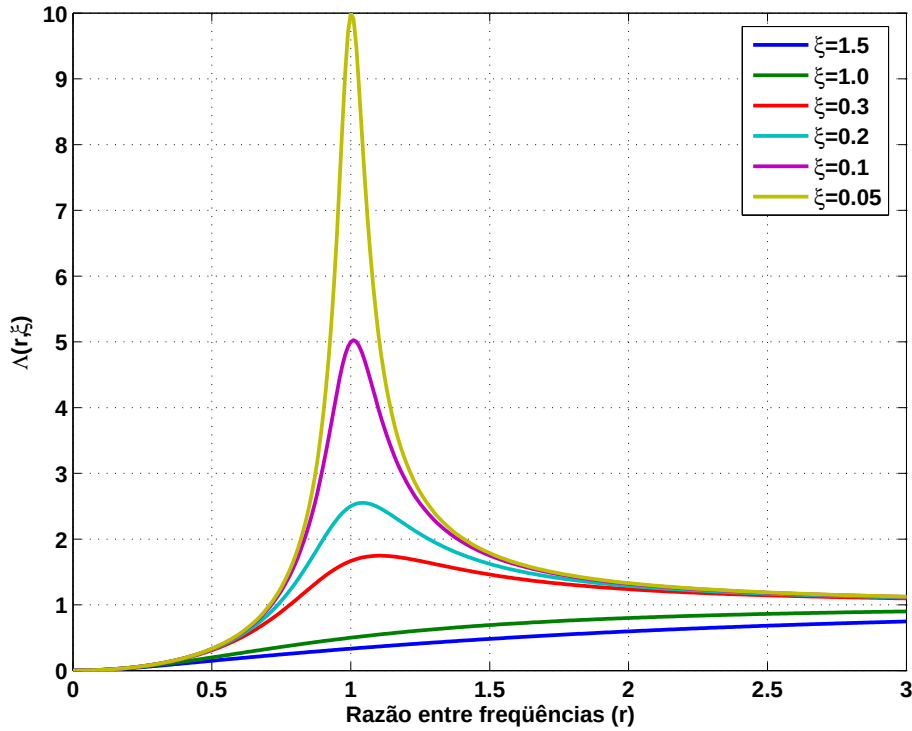


Fig. 3.4: Curva da função $\Lambda(r, \xi)$.

Nota-se que para um $\xi < 1/\sqrt{2}$, o máximo valor Λ é

$$\Lambda_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (3.29)$$

e ocorre quando a razão de freqüências r é dada por

$$r_{\Lambda_{max}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\xi^2}} \quad (3.30)$$

Exemplo 3.3 *Um gerador composto por um motor diesel monocilíndrico de massa $m = 1100$ kg está montado sobre isoladores com uma rigidez equivalente $k_{eq} = 1.5$ MN/m. O pistão e a parte da biela equivalente têm massa de 26 kg e movem-se de forma harmônica na máquina no sentido vertical com curso de 0.45 m a 500 rpm. O curso é definido como curso = 2e. A partir de um teste experimental constatou-se que a amplitude de vibração em regime permanente do motor, X_p é de 0.01 m. Admitindo amortecimento viscoso, calcular o coeficiente de amortecimento do sistema.*

Solução: *A freqüência de excitação da máquina em rad/s é dada por*

$$\omega = 500 \frac{2\pi}{60} = 52.3 \quad \text{rad/s} \quad (3.31)$$

A freqüência natural ω_n do sistema é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1.5 \times 10^6}{1100}} = 36.9 \quad \text{rad/s} \quad (3.32)$$

A razão entre as freqüências do sistema r é escrita como

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{52.3}{36.92} = 1.41 \quad (3.33)$$

A excentricidade é calculada sabendo que o curso = 2e, como o curso é de 0.45 m então a excentricidade e é dada por 0.225 m. A massa de desbalanceamento é $m_0 = 26$ kg. Com isto a partir da Eq. (3.28) pode-se calcular o fator de amortecimento ξ

$$\frac{mX_p}{m_0e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (3.34)$$

$$\frac{1100(0.01)}{(26)(0.225)} = \frac{(1.41)^2}{\sqrt{(1-(1.41)^2)^2 + (2\xi(1.41))^2}} \quad (3.35)$$

Com isto o valor do fator de amortecimento é dado por $\xi = 0.133$. Lembrando do capítulo 2 que o coeficiente de amortecimento viscoso é calculado por

$$c = 2m\xi\omega_n = 2(1100)(0.133)(36.92) = 10559.1 \quad N.s/m. \quad (3.36)$$

3.3 Função de resposta ao impulso (IRF)

Uma situação muito comum em análise de vibrações e em problemas de dinâmica estrutural é focar na análise transiente da resposta. Nestes casos uma entrada do tipo impulso ocupa um lugar de destaque. A resposta ao impulso basicamente tem a forma da resposta as condições iniciais do caso homogêneo. Muitos sistemas mecânicos são excitados por carregamentos que são aplicados por um tempo breve. Matematicamente, estas situações são modeladas usando uma representação matemática chamada de impulso unitário ou função delta de Dirac $\delta(t - a)$. Esta representação matemática é definida como

$$\delta(t - a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases}, \quad (3.37)$$

sendo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - a) dt = 1 \quad (3.38)$$

Assim a equação do movimento para um sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade é descrita por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t - a) \quad (3.39)$$

A resposta da Eq. (3.39) para o caso subamortecido é escrita como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)}{m\omega_n}, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}, \quad (3.40)$$

onde $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ é a frequência natural amortecida. A resposta do sistema quando a excitação aplicada é uma função impulso unitário é tão importante que nestes casos $x(t)$ é chamada de função de resposta ao impulso (IRF)³ e escrita como sendo $h(t)$. Quando $a = 0$ a IRF de um sistema de um grau de liberdade é escrita como:

³Do inglês *Impulse Response Function*.

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)}{m\omega_n}. \quad (3.41)$$

Note que a IRF $h(t)$ é idêntica a resposta livre subamortecida do sistema, Eq. (2.52), quando as condições iniciais de deslocamento e velocidade são respectivamente, $x_0 = 0$ e $v_0 = \frac{1}{m}$. A fig. (3.5) apresenta um exemplo de IRF quando $m = 1$ kg, $c = 5$ N.s/m e $k = 1000$ N/m.

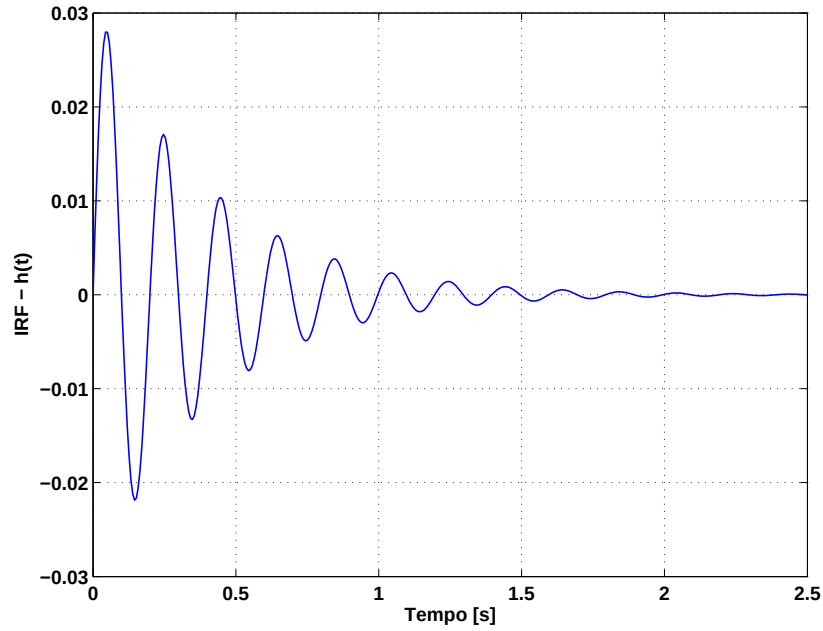


Fig. 3.5: Exemplo de resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema.

A IRF é muito útil para realização de análise transiente de sistemas estruturais e mecânicos complexos e também para descrever a resposta de sistemas para diversos tipos de excitação. O conhecimento da IRF também pode ser usado em análise modal visando extrair os parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar). Algumas destas considerações ainda serão apresentadas até o final deste capítulo, assim como formas de se estimar a IRF de maneira experimental.

3.4 Resposta para excitação do tipo degrau unitário

A resposta para excitação do tipo degrau unitário $u(t - t_0)$ é útil para análise de projeto de sistemas dinâmicos e muito usada para especificação de controladores. A partir da resposta $x(t)$ de um sistema à excitação degrau unitário é possível definir vários parâmetros que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema qualquer.

A função degrau unitário é descrita matematicamente pela expressão a seguir

$$u(t - t_0) = \int_0^t \delta(\tau - t_0) d\tau \quad (3.42)$$

que leva então para

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \leq t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Quando $t_0 = 0$ a excitação degrau unitário é dada por $u(t - t_0) = \mu(t)$. A equação do movimento de um sistema quando aplicado como excitação $F(t) = \mu(t)$ um degrau unitário é dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mu(t). \quad (3.44)$$

Resolvendo a equação diferencial dada pela Eq. (3.44) chega-se ao resultado abaixo:

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, \quad (3.45)$$

sendo a fase ϕ descrita como

$$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) \quad (3.46)$$

Um esboço da resposta ao degrau unitário para um sistema mecânico com $m = 1$ kg, $c = 5$ N.s/m e $k = 1000$ N/m é mostrado na fig. (3.6).

Note que na fig. (3.6) são descritos alguns parâmetros que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema e podem ser usados para analisar qualitativamente se um sistema mecânico tem comportamento adequado ou não, de acordo com especificações de projeto. Uma destas medidas é o overshoot, mais conhecido pelo termo em inglês *overshoot OS*. Este valor é dado

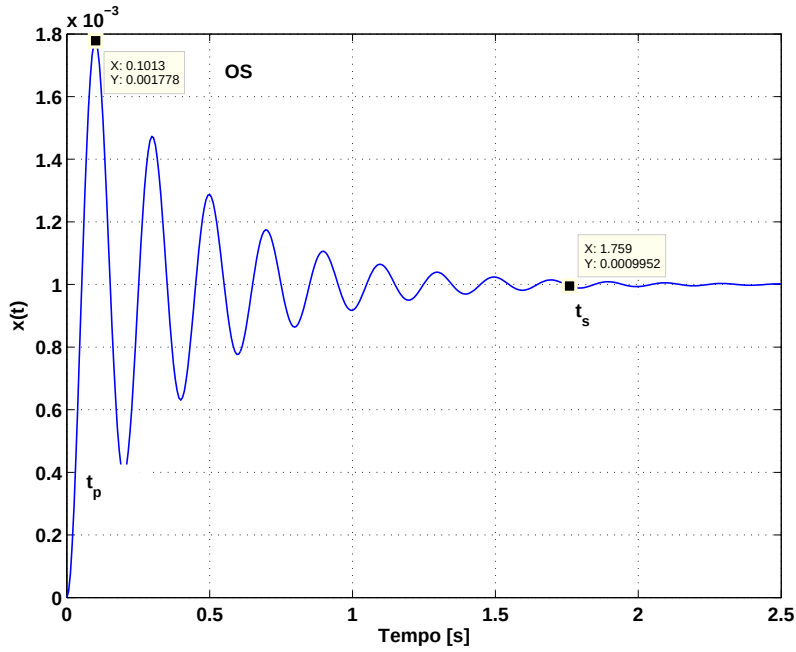


Fig. 3.6: Exemplo de resposta ao degrau unitário para um sistema com um grau de liberdade.

pelo máximo valor da resposta menos o valor desta quando o sistema entra em regime permanente

$$OS = x_{max}(t) - 1 = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right), \quad (3.47)$$

o *overshoot* ocorre exatamente em um tempo de pico t_p descrito como

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.48)$$

Outra característica importante é o período de oscilações T_d dado por

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 2t_p. \quad (3.49)$$

Por fim o tempo de ajuste, t_s , define o tempo em que a resposta do sistema atinge o regime permanente dentro de um intervalo de $\pm 5\%$ ⁴. Uma aproximação para t_s pode ser escrita como

⁴Há definições para t_s quando este intervalo é $\pm 3\%$.

$$t_s = \frac{3}{\omega_n \xi}. \quad (3.50)$$

É importante observar que a partir das equações anteriores é possível projetar um sistema com um determinado fator de amortecimento ξ e frequência natural ω_n de acordo com os parâmetros de tempo de ajuste, *overshoot*, período de oscilações e tempo de pico para conduzirem a uma resposta com características e forma desejada.

3.5 Método da integral de convolução

A integral de convolução ocupa um lugar de destaque no estudo de sistemas dinâmicos lineares. A partir desta integral é possível descrever a resposta de um sistema mecânico quando este é excitado por qualquer tipo de sinal de entrada (força) $F(t)$ e quando as condições iniciais de deslocamento e velocidade são nulas, $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, respectivamente. Para isto é necessário se conhecer a IRF $h(t)$. A convolução entre a excitação $F(t)$ e a IRF $h(t)$ conduz a resposta do sistema

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad (3.51)$$

O limite inferior da Eq. (3.51) pode ser descrito como zero, pois o comum é estudar sistemas que são causais⁵, assim a integral de convolução pode ser reescrita na forma

$$x(t) = \int_0^{+\infty} F(\tau)h(t - \tau)d\tau = F(t) * h(t), \quad (3.52)$$

onde o símbolo $*$ representa a operação de convolução entre sinais. A Eq. (3.52) mostra a importância do conhecimento da IRF $h(t)$. Caso se estime experimentalmente a IRF $h(t)$ é possível descrever a resposta de um sistema mecânico complexo a qualquer tipo de excitação sem precisar resolver uma equação diferencial do movimento, uma grande vantagem da integral de convolução.

Em termos práticos os sinais experimentais medidos de entrada $F(t)$ e da IRF $h(t)$ são de natureza discreta. Assim define-se a força e a IRF em

⁵O conceito de sistemas causais significa que um sistema só começa a responder se uma entrada é aplicada em um instante t ou um instante anterior $t - t_0$. Já um sistema não-causal pode responder em um instante t às entradas futuras $t + t_0$ que ainda nem foram aplicadas. Um exemplo de sistema não-causal é sistemas dinâmicos que descrevem o comportamento de bolsas de valores.

termos de amostras em instantes n , sendo que a distância entre estas amostras depende da taxa de amostragem empregada⁶. Nestes casos a IRF e força são escritas como seqüências $h[n]$ e $F[n]$ e a integral de convolução da Eq. (3.52) é escrita na forma discreta como uma soma de convolução

$$x[n] = \sum_{k=0}^N h[n-k]F[k] = h[n] * F[n], \quad (3.53)$$

sendo $N = N_F + N_h - 1$ o número de amostras contidas no sinal discreto $x[n]$, onde N_F é o número de amostras no sinal de força $F[n]$ e N_h o número de amostras da IRF discreta $h[n]$.

3.6 Função de transferência e métodos freqüenciais

Até este ponto toda a análise de vibrações empregada se baseou em técnicas temporais. Outra abordagem é analisar vibrações em outros domínios, como no domínio da variável de Laplace s ou no domínio da freqüência. Nestes casos as equações diferenciais ordinárias lineares podem ser descritas de forma algébrica, além de ser em alguns casos mais fácil se extrair informações dinâmicas de um sistema mecânico quando este está representado no domínio s ou $j\omega$.

3.6.1 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática para mudança de domínios entre sistemas contínuos. A transformada de Laplace é definida para sistemas lineares causais e contínuos descritos por uma IRF $h(t)$ como sendo

$$H(s) = \mathfrak{L}\{h(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st}h(t)dt. \quad (3.54)$$

Se aplicarmos a transformada de Laplace na equação do movimento, Eq. (3.1) com condições iniciais nulas, obtém-se

$$X(s) [ms^2 + cs + k] = F(s), \quad (3.55)$$

que pode ser organizada como uma relação entre sinais de entrada e saída. Esta relação fornece a transformada de Laplace da IRF $H(s)$

⁶Definida com cuidado para se evitar o fenômeno de *aliasing*.

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}.$$

A função $H(s)$ é comumente chamada de função de transferência do sistema e é uma característica intrínseca do sistema dinâmico em estudo. Importante fazer algumas observações sobre a função de transferência $H(s)$:

- A função de transferência (FT) é a mesma qualquer que seja a excitação aplicada.
- O conhecimento da FT de um sistema ajuda a descrever a resposta a qualquer excitação.
- O denominador da FT é a já definida equação característica.
- As raízes do denominador da FT são valores singulares chamados de pólos e para um sistema subamortecido são dados por $s = -\xi_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$.

A contrapartida no domínio s de Laplace para a integral de convolução da Eq. (3.52) é dada por

$$X(s) = H(s)F(s), \quad (3.57)$$

ou seja, é possível descrever a resposta de um sistema devido a um sinal qualquer usando uma simples relação algébrica entre os dados de entrada e saída, em vez de calcular uma integral de convolução ou mesmo resolver uma equação diferencial. Esta é uma das grandes vantagens de se trabalhar com transformadas. Note que a variável s é complexa.

Existe também uma contrapartida para o caso discreto usando a soma de convolução, nesta situação se emprega a transformada z , que infelizmente ainda não é estudada em detalhes em um curso convencional de graduação em Engenharia Mecânica. A tabela (3.1) resume as situações para os casos contínuos e discretos.

A FT também pode ser descrita em função de ω_n e ξ

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (3.58)$$

Em problemas de engenharia de controle a FT é descrita apenas como a razão entre sinais de entrada e saída, sem grande preocupação com as grandezas física envolvidas nesta razão. Porém, em problemas de análise de vibrações e dinâmica estrutural é comum se medir a grandeza física de

Tab. 3.1: Tipos de análise de sistemas mecânicos usando transformadas.

Contínuo	Discreto
$X(s) = H(s)F(s)$ Transformada de Laplace	$X(z) = H(z)F(z)$ Transformada z
$x(t) = \int_0^{+\infty} F(\tau)h(t-\tau)d\tau$ Integral de convolução	$x[n] = \sum_{k=0}^N h[n-k]F[k]$ Soma de Convolução

aceleração $\ddot{x}$ usando acelerômetros, nestes casos a relação entrada/saída é dada por $s^2H(s)$ e é chamada de inertância. A tabela (3.2) mostra os vários tipos de FT que podem ser aplicadas em dinâmica de estruturas dependendo do tipo de medida efetuada.

Tab. 3.2: Vários tipos de função de transferência empregadas na análise dinâmica.

Resposta medida	Função de Transferência	Inverso da FT
Deslocamento	$H(s)$, Compliância	Rigidez dinâmica
Velocidade	$sH(s)$, Mobilidade	Impedância
Aceleração	$s^2H(s)$, Inertância	Massa aparente

Note que uma vez conhecida a inertância ou qualquer outra função de transferência é possível transformar de uma a outra a partir ou de multiplicações ou divisões pela variável de Laplace s .

3.6.2 Função de resposta em frequência (FRF)

Do ponto de vista experimental o que se faz é trabalhar com a transformada de Fourier⁷. Assim uma vez conhecido o sinal de entrada (excitação) no domínio do tempo $F(t)$ ⁸ e considerando um mapeamento da função de transferência $H(s)$ em $s = j\omega$, sendo ω uma frequência que varia em um intervalo de análise, obtém-se a então chamada função de resposta em frequência (FRF)⁹ $H(j\omega) = H(\omega)$

⁷Em particular com sua variante no domínio discreto: A Transformada Discreta de Fourier.

⁸Que pode ser medido com o auxílio de células de carga.

⁹Do inglês *Frequency Response Function*.

$$H(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + cj\omega + K} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + jc\omega}. \quad (3.59)$$

Interessante observar que a FRF $H(\omega)$ nada mais é do que a aplicação da transformada de Fourier na função de resposta ao impulso (IRF) $h(t)$ no domínio contínuo ou da aplicação da transformada discreta de Fourier na IRF discreta $h[n]$. Sendo assim, também é possível escrever a relação entre entrada e saída dada pela Eq. (3.57) no domínio da frequência ω

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega). \quad (3.60)$$

Note na Eq. (3.54) que se considerarmos $s = j\omega$ obtém-se a expressão para a transformada de Fourier da IRF conduzindo a FRF

$$H(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} h(t) dt. \quad (3.61)$$

Assim como a FT, a FRF também pode ser descrita em função dos sinais de aceleração, velocidade e deslocamento. A tabela (3.3) mostra estes casos, onde observa-se que a relação entre estas FRFs são em relação a dividir ou multiplicar $H(\omega)$ pela frequência ω .

Tab. 3.3: Vários tipos de FRFs empregadas na análise dinâmica.

Resposta medida	FRF	Inverso da FRF
Deslocamento	$H(\omega)$, Compliância	Rigidez dinâmica
Velocidade	$j\omega H(\omega)$, Mobilidade	Impedância
Aceleração	$j^2\omega^2 H(\omega)$, Inertância	Massa aparente

Deve-se notar também que a FRF $H(\omega)$ é uma grandeza complexa descrita por uma parte real e imaginária

$$H(\omega) = \Re \{H(\omega)\} + j\Im \{H(\omega)\}, \quad (3.62)$$

sendo sua magnitude descrita por

$$|H(\omega)| = \sqrt{\Re \{H(\omega)\}^2 + \Im \{H(\omega)\}^2}, \quad (3.63)$$

e sua fase escrita como

$$\phi = \frac{\Im \{H(\omega)\}}{\Re \{H(\omega)\}}. \quad (3.64)$$

Pode-se representar uma FRF graficamente de diferentes formas. A mais comum é o chamado diagrama de Bode que consiste em descrever o módulo e a fase da FRF com a amplitude em dB. A fig. (3.7) apresenta as FRFs do sistema com $m = 1$ kg, $c = 5$ N.s/m e $k = 1000$ N/m, considerando inércia, mobilidade e compliância.

Outro gráfico comum é escrever a parte imaginária em função da parte real. Neste caso o gráfico tem a forma de um círculo com centro em $\frac{1}{2c}$ e raio $\frac{1}{c}$, caso se empregue a FRF de mobilidade. A fig. (3.8) apresenta um exemplo deste tipo de gráfico. Esta representação é conhecida como diagrama de Nyquist e muito usada em teoria de controle para estudo de estabilidade de sistemas. Em análise modal este diagrama é usado para estimativa do fator de amortecimento ξ e da frequência natural ω_n , com um método conhecido como *Curve Fitting*, que será estudado nos próximos capítulos.

Por fim, outra forma de representar sistemas dinâmicos é com o uso dos gráficos da parte real e imaginária da resposta em frequência. A fig. (3.9) mostra estas representações.

3.7 Estimativa experimental de IRFs e FRFs: Análise Espectral

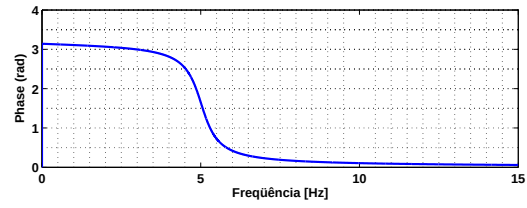
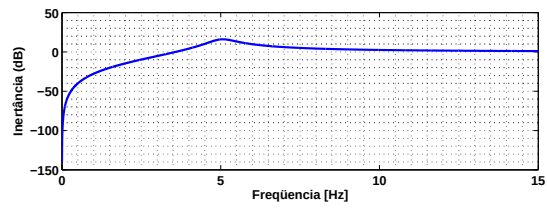
Uma FRF pode ser obtida experimentalmente caso se conheça um sinal qualquer de resposta medida (aceleração, velocidade ou aceleração) e o sinal de força aplicada (que pode ser medido com a ajuda de uma célula de carga). Um dos métodos é aplicar a transformada de Fourier nos sinais de saída $x(t)$ e $F(t)$ que são definidos no domínio contínuo como

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt, \quad (3.65)$$

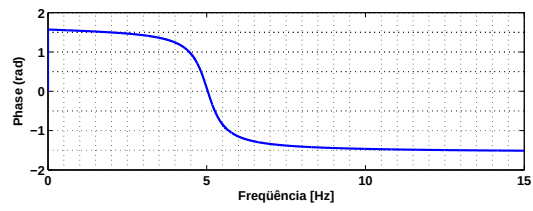
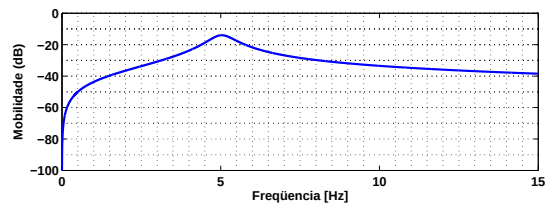
$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-j\omega t} F(t) dt. \quad (3.66)$$

Porém na prática a aplicação da transformada contínua de Fourier (integral acima) não é muito efetiva, uma vez que os sinais são normalmente amostrados em intervalos de tempo. O mais sensato então é aplicar a transformada discreta de Fourier nos vetores discretizados (seqüências) $x[n]$ e $F[n]$

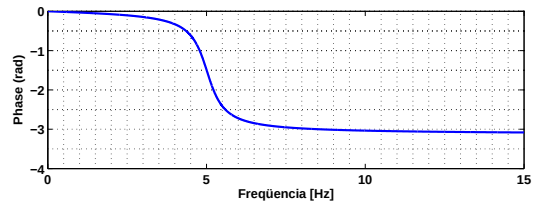
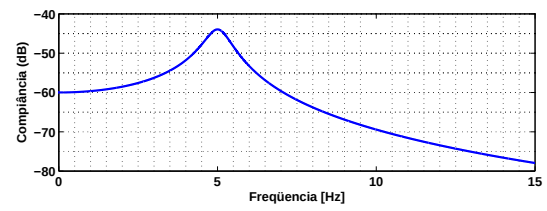
$$X(\omega_k) = \sum_{n=0}^N x[n] e^{-j\omega_k n}, \quad (3.67)$$



(a) Inertância



(b) Mobilidade



(c) Complância

Fig. 3.7: Funções de resposta em frequência para um sistema com 1 grau de liberdade.

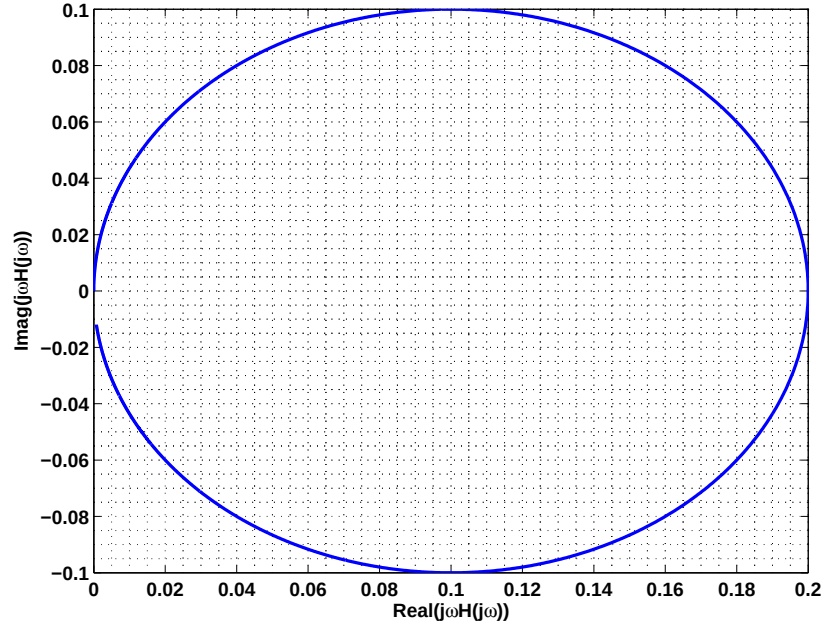


Fig. 3.8: Diagrama de Nyquist da FRF de mobilidade para um sistema com 1 grau de liberdade.

$$F(\omega_k) = \sum_{n=0}^N F[n]e^{-j\omega_k n}, \quad (3.68)$$

sendo ω_k o valor discreto de frequência em uma posição k dado por $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$ e N o número de amostras calculadas. É importante observar que pela natureza do processo de amostragem o sinal no domínio da frequência é periodizado, portanto se os sinais têm N amostras temporais, somente $N/2$ amostras são usadas para descreve-los frequencialmente. Assim, a FRF pode ser obtida pela razão entre $X(\omega_k)$ e $F(\omega_k)$

$$H(\omega_k) = \frac{X(\omega_k)}{F(\omega_k)}. \quad (3.69)$$

Este método é o mais simples e é conhecido como o de *varredura em frequência*. Infelizmente esta forma de se estimar a FRF também não conduz a bons resultados em geral, uma vez que a razão entre ruídos nos sinais de entrada e saída pode ser amplificada pela Eq. (3.69). Na prática esta estimativa é feita usando conceitos de processamento de sinais aleatórios e se empregando alguns conceitos básicos de estatística. Toda esta área é conhecida como *Análise Espectral*.

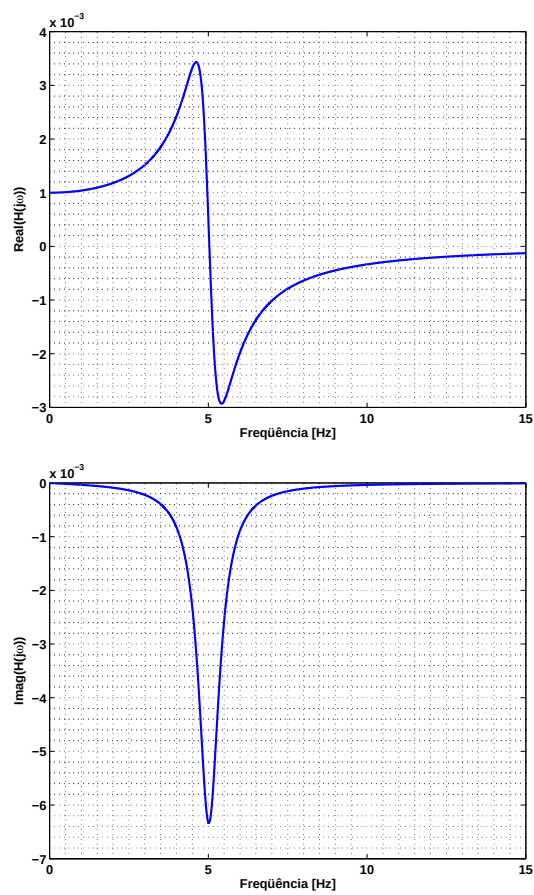


Fig. 3.9: Gráfico da parte real e imaginária da FRF (compliância) para um sistema com 1 grau de liberdade.

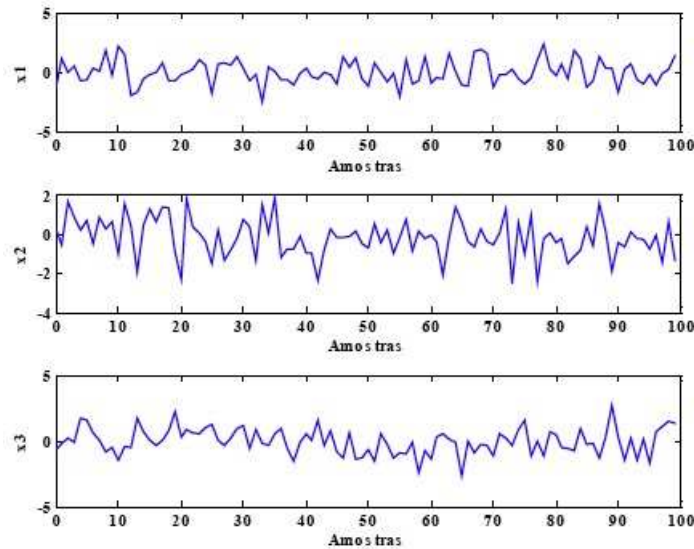


Fig. 3.10: Realizações de sinais medidos em um processo estocástico.

A meta de análise espectral é descrever a distribuição sobre frequência da potência contida em um sinal com base em um conjunto finito de amostras. Estas ferramentas são úteis em análise modal, vibro-acústica, telecomunicações, identificação de sistemas, processamento de imagens, etc. Assume-se que os sinais, tanto de entrada como de saída de um sistema linear qualquer, são aleatórios, ou seja, não se consegue prever seus estados futuros. Estes sinais também não são periódicos e nem transientes, portanto a rigor não podemos utilizar diretamente as ferramentas de análise de Fourier estudadas até o momento.

Vários termos utilizados em análise espectral são novos para a maioria dos alunos de graduação, portanto é interessante fazer uma definição de alguns termos básicos:

Processo Estocástico: graficamente pode ser expresso por um conjunto de testes com amostras aleatórias $x_k[n]$ com $k = 1, 2, \dots, K$ realizações e $n = 1, 2, \dots, N$ pontos cada, ou seja, só é possível analisar as características médias deste processo. A fig. (3.10) mostra um exemplo gráfico de processo estocástico.

Momentos estatísticos: métricas utilizadas para descrever as características de processos estocásticos. Por exemplo, o valor médio de um sinal $x[n]$ é chamado de momento de 1.º ordem

$$m[k] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k[n]. \quad (3.70)$$

Entre os momentos estatísticos mais importantes se destacam as funções de autocorrelação (FAC) $R_{xx}(n, m)$

$$R_{xx}(n, m) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_k[n] x_k[n + m] \quad (3.71)$$

e funções de correlações cruzadas (FCC)

$$R_{Fx}(n, m) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K F_k[n] x_k[n + m] \quad (3.72)$$

sendo m o número de atrasos temporais. É interessante notar que a FAC é a média do produto entre $x_k[n]$ e $x_k[n + m]$ e a FCC é a média do produto entre duas seqüência diferentes $F_k[n]$ e $x_k[n + m]$.

Processo estacionário: um processo é dito estacionário se suas propriedades estatísticas não variam com o tempo (se mantém constante). A fig. (3.11) apresenta um sinal estacionário. Caso se divida este sinal em várias partes e se calcule a distribuição de probabilidade em cada uma destas partes irá se constatar que a distribuição estatística é a mesma, conforme a fig. (3.12).

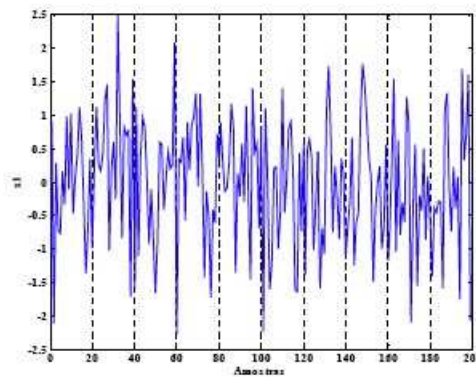


Fig. 3.11: Exemplo de um sinal estacionário.

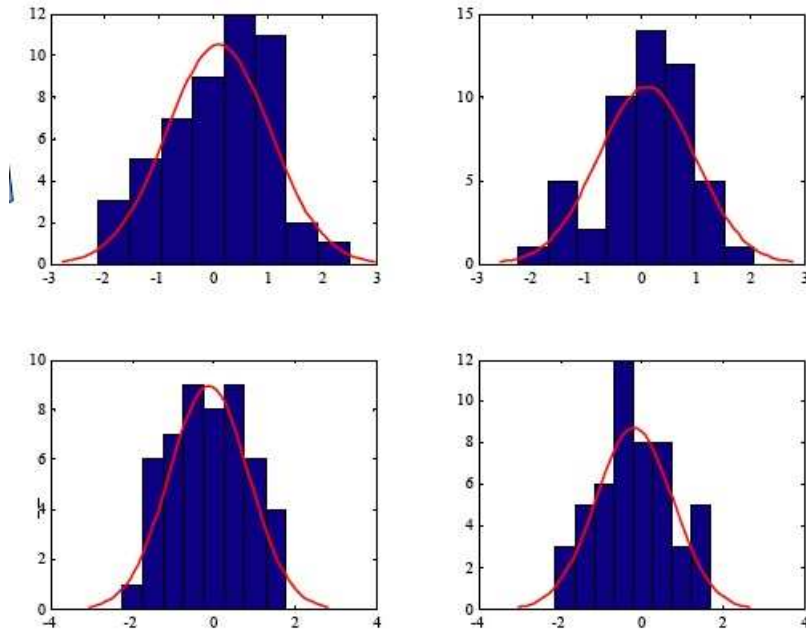


Fig. 3.12: Distribuição de partes de um sinal estacionário.

Processo ergódico: Um processo é dito ergódico quando as propriedades médias calculadas no tempo para qualquer realização são iguais às propriedades calculadas a partir das médias do conjunto. Assim as FAC e FCC de processos estacionários e ergódicos se tornam dependentes apenas dos atrasos m , assim $R_{xx}(m, n) = R_{xx}(m)$ e $R_{Fx}(n, m) = R_{Fx}(m)$. Existem vários métodos temporais para se estimar as correlações (pois dificilmente elas são conhecidas por serem baseadas na definição de um limite). Um dos métodos mais conhecidos é o método de Levinson-Durbin. A rigor deveríamos utilizar os termos função de autocovariância e função de covariância cruzada, que são iguais as FAC e FCC, mas retirando o efeito da média.

Após estas definições básicas é possível descrever o espectro de potências de um sinal aleatório discreto $x[n]$ descrito por um processo estocástico, estacionário e ergódico através da transformada de Fourier da FAC $R_{xx}(m)$ em função da frequência ω .

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m)e^{-j\omega m} \quad (3.73)$$

sendo $\omega = 2\pi \frac{f}{F_s}$, onde F_s é a taxa de amostragem em Hz e f o vetor de frequências, também em Hz. Assim

$$S_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(m) e^{\frac{-2\pi j f}{F_s} m}. \quad (3.74)$$

A partir do espectro de potências é possível escrever a densidade espectral de potência (PSD) $P_{xx}(f)$ do sinal $x[n]$

$$P_{xx}(f) = \frac{S_{xx}(f)}{F_s}. \quad (3.75)$$

A PSD representa a potência contida em um sinal em uma banda de frequência infinitesimal, daí a definição densidade. A unidade da PSD é potência do sinal (e.g., Watts) por unidade de frequência. Na prática o cálculo da PSD a partir da FAC não é usual. Alternativamente se usam métodos não-paramétricos (Periodograma, Welch, Correlograma, etc.), métodos paramétricos (Modelos auto-regressivos, Equações de Yule-Walker, etc.) e métodos de subespaço.

O estimador espectral não-paramétrico mais usado e simples é o Periodograma definido como

$$\hat{P}_{xx}(f) = \frac{|X(f)|^2}{F_s L}, \quad (3.76)$$

sendo $X(f)$ a transformada discreta de Fourier do sinal aleatório $x[n]$ com L pontos. Já a PSD cruzada entre dois sinais $x[n]$ e $y[n]$ é obtida por

$$\hat{P}_{xy}(f) = \frac{X(f)Y^*(f)}{F_s L}, \quad (3.77)$$

sendo $Y^*(f)$ o complexo conjugado da transformada discreta de Fourier do sinal $y[n]$. Infelizmente o periodograma obtido a partir da operação acima fornece estimativas pobres devido à problemas relacionados à resolução, polarização e variância. A solução é a utilização de janelas, o que dá origem ao Periodograma Ponderado e/ou divisão em segmentos o que dá origem ao Periodograma de Welch. Maiores detalhes nestes métodos podem ser obtidos no livro [14].

Uma das aplicações mais comuns de PSD é estimar de forma não-paramétrica funções de transferência de sistemas lineares e invariantes com o tempo a partir de dados de entrada/saída obtidos de testes experimentais, fig. (3.13). Ou seja, conhecidos os sinais de excitação $x[n] = F[n]$ e de resposta $y[n]$ qual o sistema $h[n]$?

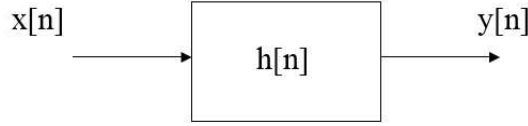


Fig. 3.13: Sistema linear e invariante com o tempo representado por uma IRF discreta $h[n]$.

Pode-se mostrar que a FCC entre a excitação $F[n]$ e a resposta $x[n]$, $R_{Fx}[i]$, é igual a convolução discreta entre a IRF $h[n]$ e a FAC de $F[n]$, $R_{FF}[i]$. Esta relação é conhecida como equação de Wiener-Hopf

$$R_{Fx}[i] = \sum_{j=0}^{\infty} h[j] R_{FF}[i - j]. \quad (3.78)$$

Assim, através da estimativa das FAC e FCC pode-se calcular $h[n]$ a partir da Eq. (3.78). Este método é conhecido como *Método das correlações* [1]. Esta estimativa também pode ser feita em termos espectrais utilizando a PSD e a PSD cruzada entre os sinais $F[n]$ e $x[n]$.

Um dos estimadores espectrais clássicos de funções de transferência é o estimador H_1 definido como:

$$H_1(f) = \frac{P_{Fx}(f)}{P_{FF}(f)}, \quad (3.79)$$

este estimador H_1 é utilizado principalmente quando o ruído afeta mais os sinais de resposta. Outro estimador usual é o H_2 usado quando o ruído afeta mais o sinal de entrada

$$H_2(f) = \frac{P_{xx}(f)}{P_{xF}(f)}. \quad (3.80)$$

Um estimador espectral de FRFs mais genérico é o H_v usado quando o ruído afeta tanto os sinais de entrada quanto os sinais de saída

$$H_v(f) = \sqrt{H_1(f)H_2(f)^T}. \quad (3.81)$$

Uma forma efetiva de conferir se uma estimativa espectral de FRF foi bem realizada é calcular a função de coerência entre os sinais de excitação $F[n]$ e resposta $x[n]$

$$C_{Fx}(\omega) = \frac{|S_{Fx}(\omega)|^2}{S_{FF}(\omega)S_{xx}(\omega)}. \quad (3.82)$$

O resultado da função de coerência é sempre um valor real entre 0 e 1. Se a coerência de um sinal é próxima à 1 para uma determinada banda de frequência, significa que nesta faixa obteve-se uma boa estimativa da FRF do sistema mecânico de interesse, quando este recebe como entrada um sinal $F[n]$ e produz na saída um sinal $x[n]$. Ou seja, as estimativas de H_1 e H_2 são próximas.

3.8 Determinação experimental do coeficiente de amortecimento por vibrações forçadas

Uma forma de se estimar o coeficiente de amortecimento em testes forçados é empregar a Eq. (3.7) vista nas seções anteriores. Em resumo: caso se conheça a amplitude da força de excitação F e da vibração em regime permanente X_p , a razão de frequências r e a rigidez do sistema k pode-se estimar o fator de amortecimento ξ . A metodologia usando o decremento logarítmico δ também pode ser empregada a partir de um teste experimental de aplicação de um impulso, caso se tenha em mãos um martelo de impacto com célula de carga ou se extrairmos experimentalmente a FRF ou a IRF usando os métodos descritos na seção anterior.

Um método popular de se estimar o fator de amortecimento ξ com base na FRF do sistema é medir as duas frequências ω_1 e ω_2 em torno de um pico de ressonância com frequência ω_n quando a amplitude em ω_1 e ω_2 da FRF são 0.707, ou seja, -3.0 dB (este valor é conhecido como ponto de meia potência). O fator de amortecimento pode ser estimado por [4]:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \right). \quad (3.83)$$

Este método é chamado de *Quadrature peak picking* e é válido para sistemas levemente amortecidos.

3.9 Métodos numéricos para solução de equações do movimento

Equações diferenciais aparecem com enorme frequência em diversos problemas de modelagem de fenômenos físicos [12]. Exemplos são equações que

descrevem escoamento de fluidos, transferência de calor e massa, química, dinâmica e vibrações em sistemas mecânicos, etc.

Uma equação diferencial é definida como uma equação que envolve derivadas das funções. A ordem de uma equação diferencial é descrita em função da maior ordem p da derivada envolvida.

Dois tipos básicos podem aparecer, o primeiro envolve equações diferenciais ditas *ordinárias*. Neste caso existe apenas uma variável independente, $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad (3.84)$$

Equações diferenciais ordinárias contêm parâmetros físicos concentrados.

O segundo tipo acontece quando existe mais de uma variável independente, por exemplo $u(x, y)$ sendo o deslocamento u em uma placa em função de x e y :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \quad (3.85)$$

sendo ∇^2 o Laplaciano. Esta equação é um exemplo de equação diferencial *parcial*. Este tipo de equação envolve parâmetros distribuídos. Neste texto iremos focar apenas a solução numérica de equações diferenciais ordinárias (EDO).

Um fato interessante é constatar que EDOs não possuem apenas uma solução e sim uma família ou conjunto de soluções possíveis. Para particularizar a solução de uma EDO é essencial se definir valores de condições suplementares. Caso estes valores sejam especificadas no mesmo ponto tem-se uma condição inicial e neste contexto o problema é classificado como de valor inicial (PVI). Por outro lado se for especificada em mais de um ponto tem-se um problema de valor de contorno (PVC).

As equações diferenciais podem ser lineares ou não-lineares, dependendo se é válido ou não o princípio da superposição. Um exemplo de equação diferencial ordinária não-linear é:

$$u''(x) + u'^2(x) = 1 \quad (3.86)$$

A grande preocupação dos matemáticos é garantir a existência e unicidade da solução de PVI e PVC. Um problema de PVC normalmente é mais complexo, pois em inúmeros exemplos não se garante unicidade da solução.

Em problemas de dinâmica de sistemas mecânicos a aplicação da 2.ª lei

de Newton gera sistemas de EDOs que são essencialmente não-lineares¹⁰. Ao menos para casos bem particulares, no geral linearizados e com aplicação de hipóteses simplificadoras, a solução analítica destas equações pode se tornar inviável. Assim, justifica-se a aplicação e implementação de métodos numéricos [13].

A ideia básica de grande parte deste métodos numéricos é ser capaz de construir uma solução para uma equação do tipo $x'(t) = f(x, t)$ dada uma condição $x(t_0) = x_0$. O que se busca é definir uma sequência de valores $t_1, t_2, \dots, t_n$, não necessariamente espaçados e calcular aproximações numéricas para $x_i(t_i)$ baseado em informações passadas. Se apenas uma informação passada é empregada o método é conhecido com sendo da classe passo simples. Por outro lado, se usarmos vários valores passados, o método é de passo múltiplo. Alguns métodos clássicos usados envolvem a aproximação numérica da série de Taylor, como será apresentado na sequência.

3.9.1 Método de Série de Taylor

A série de Talyor pode ser usada para resolver qualquer tipo de EDO, porém os resultados em termos de eficiência computacional são limitados para EDOs de ordem baixa. A ideia consiste em aproximar a função $x(t)$ em um ponto em torno de $t = t_{n+1}$ por uma série¹¹:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \dot{x}(t_n)\Delta t + \ddot{x}(t_n)\frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (3.87)$$

sendo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ o passo de integração, que não necessariamente precisa ser uniforme entre todos os pontos. Obviamente, que a equação acima terá um erro de truncamento. Observa-se claramente que uma redução de Δt faria com que a solução convirja mais rápido para a solução exata. Porém, do ponto de vista computacional uma redução grande de Δt pode não conduzir na prática à um aumento da precisão, uma vez que existe uma maior propagação de erros de truncamento, além do tempo de processamento ficar elevado.

Um caso particular é realizar uma aproximação de 1.º ordem:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \dot{x}(t_n)\Delta t \quad (3.88)$$

neste caso, a série de Taylor de 1.º ordem é chamada de método de Euler.

¹⁰Estas EDOs são as equações do movimento e no nosso curso de vibrações na maioria das vezes linearizamos assumindo pequenas oscilações.

¹¹Que neste caso específico é truncada em termos de 2.º ordem.

O procedimento para obter a solução de uma EDO é conhecer as condições iniciais no instante t_0 e prosseguir na aproximação em instantes $t_1 = t_0 + \Delta t$ até $t_N = t_0 + N\Delta t$, sendo N o número de amostras a avaliar.

Assim para uma EDO do tipo:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0 \quad (3.89)$$

com condições iniciais $\dot{x}(t_0)$ e $x(t_0)$ conhecidas, tem-se que $\ddot{x}(t_0)$ é:

$$\ddot{x}(t_0) = -\dot{x}(t_0) - x(t_0) \quad (3.90)$$

Para um instante $t_1 = t_0 + \Delta t$ deve-se aproximar quem são as funções $\dot{x}(t_1)$ e $x(t_1)$. Usando a aproximação com o método de Euler:

$$x(t_1) = x(t_0 + \Delta t) \approx x(t_0) + \dot{x}(t_0)\Delta t \quad (3.91)$$

$$\dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_0 + \Delta t) \approx \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)\Delta t \quad (3.92)$$

E portanto a função $\ddot{x}(t_1)$ será aproximada usando estes resultados:

$$\ddot{x}(t_1) \approx -\dot{x}(t_1) - x(t_1) \quad (3.93)$$

e assim por diante até atingir t_N , tendo as respostas numéricas que solucionam a EDO em estudo.

A maior desvantagem do uso da série de Taylor é a necessidade de se verificar valores das derivadas de ordem mais alta da função $x(t)$ a aproximar. Assim, apesar de ser teoricamente possível resolver qualquer EDO, os resultados computacionais só são eficientes para EDOs de ordem baixa (1.º ou 2.º ordem). O método de Runge-Kutta resolve em partes esta deficiência.

3.9.2 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta foi proposto por dois matemáticos alemães em 1902 visando:

- Aproveitar as qualidades da série de Taylor para aproximar $x(t)$.
- Eliminar a necessidade de cálculo das derivadas de $x(t)$ na aproximação, por exemplo, lembre que para aproximar via método de Euler $x(t_1)$ necessito conhecer $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$. O preço pago na família de métodos¹² de Runge-Kutta é calcular $\dot{x}(t) = f(x, t)$ em vários pontos.

¹²O termo família é usado pois existem métodos de Runge-Kutta de várias ordens.

O método de Runge-Kutta de 1.º ordem é uma aproximação pelo método de Euler da forma:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + f(t_n, x(t_n))\Delta t \quad (3.94)$$

Um dos métodos mais populares¹³ de Runge-Kutta é o de 4.º ordem, descrito por:

$$x(t_{n+1}) \approx x(t_n) + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.95)$$

sendo as constantes calculadas para cada passo Δt :

$$k_1 = \Delta t f(t_n, x(t_n)) \quad (3.96)$$

$$k_2 = \Delta t f(t_n + \Delta t/2, x(t_n) + k_1/2) \quad (3.97)$$

$$k_3 = \Delta t f(t_n + \Delta t/2, x(t_n) + k_2/2) \quad (3.98)$$

$$k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, x(t_n) + k_3) \quad (3.99)$$

3.9.3 Método de Newmark

O sistema de equações diferenciais de segunda ordem em dinâmica estrutural pode ser resolvido por qualquer método considerando a existência de alguma excitação $\mathbf{F}$ externa sendo aplicado no sistema ou mesmo condição inicial de deslocamento e velocidade em algum nó. Entre estes, o método de Newmark é um dos mais versátil e popular¹⁴ para solução de grandes sistemas de equações diferenciais de segunda ordem. Aqui não será dada nenhuma prova. Apenas apresentado sucintamente o método e mostrado um algoritmo efetivo para solução do sistema de EDOs.

Considerando a equação do movimento do sistema descrita pelas matrizes de massa e rigidez e com o amortecimento sendo do tipo proporcional a massa e/ou rigidez:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (3.100)$$

sendo $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{x}$ os vetores aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente.

A equação acima pode ser integrada usando algum método numérico. Em essência, a integração numérica direta é baseada em duas ideias. Na primeira, ao invés de tentar satisfazer a equação acima em todo tempo t ,

¹³Consulte o comando *ODE45* no Matlab®.

¹⁴O integrador do software de elementos finitos Ansys® é baseado neste procedimento.

busca-se satisfazê-la apenas em intervalos discretos de tempo Δt . A segunda ideia consiste em variar os deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo de tempo Δt assumido.

Em seguida, considera-se que os vetores deslocamento, velocidade e aceleração no tempo inicial t_0 , denotados por $\mathbf{x}(0)$, $\dot{\mathbf{x}}(0)$ e $\ddot{\mathbf{x}}(0)$ respectivamente, são conhecidos e implementa-se a solução das equações de equilíbrio para um tempo de t_0 até t_N . Na solução, todo o tempo considerado é dividido em N intervalos iguais Δt ($\Delta t = t_N/N$) e o esquema de integração empregado estabelece uma solução aproximada para os tempos $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t + \Delta t, \dots, T_N$.

O esquema geral no método de Newmark assume que:

$$\dot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{x}}(t) + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{x}}(t) + \gamma\ddot{\mathbf{x}}(t + \Delta t)] \quad (3.101)$$

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{x}}(t) + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}(t) + \beta \ddot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) \right] \Delta t^2 \quad (3.102)$$

As constantes γ e β são conhecidas como parâmetros de Newmark e são determinados visando obter exatidão e estabilidade numérica. Na literatura existem muitas variações deste algoritmo. Newmark originalmente propôs o esquema conhecido como aceleração média constante, conhecida como regra trapezoidal, neste caso $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$. A fig. (3.14) mostra o esquema de integração. Porém outros esquemas podem ser usados, como por exemplo $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$, que será empregado na rotina computacional do final desta seção.

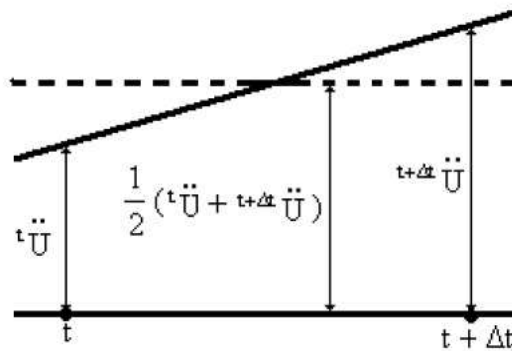


Fig. 3.14: Esquema de aceleração média constante de Newmark.

A ideia é fazer com que a equação do movimento, eq. (3.100), seja válida nos intervalos de tempo de 0 até t_N :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(0) + \mathbf{K}\mathbf{x}(0) &= \mathbf{F}(0). \\
&\vdots \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{F}(t). \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t + \Delta t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t + \Delta t) &= \mathbf{F}(t + \Delta t). \\
&\vdots \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t_N) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t_N) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t_N) &= \mathbf{F}(t_N).
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Com base nesta ideia e no esquema de integração de Newmark pode-se escrever um algoritmo computacional para integração de equações diferenciais de segunda ordem de sistemas lineares descrito por quatro passos básicos:

- Inicialização.
- Predição.
- Equação de equilíbrio
- Correção.

Escrevendo explicitamente cada passo temos:

1. Dados do problema: $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$
2. Inicialização:

$$\ddot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{M}^{-1} \left\{ \mathbf{F}(0) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{K}\mathbf{x}(0) \right\} \tag{3.104}$$

3. Incremento temporal:

$$t_{k+1} = t_k + \Delta t \tag{3.105}$$

4. Predição:

$$\dot{\mathbf{x}}_{t_{k+1}} = \dot{\mathbf{x}}_{t_k} + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{t_k} \tag{3.106}$$

$$\mathbf{x}_{t_{k+1}} = \mathbf{x}_{t_k} + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_{t_k} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{x}}_{t_k} \tag{3.107}$$

5. Equação de equilíbrio:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K} \quad (3.108)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t_k+1} = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{F}_{t_k} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{t_k} - \mathbf{K}\mathbf{x}_{t_k}) \quad (3.109)$$

6. Correção:

$$\dot{\mathbf{x}}_{t_k+1} = \dot{\mathbf{x}}_{t_k} + \Delta t\gamma\ddot{\mathbf{x}}_{t_k} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{x}_{t_k+1} = \mathbf{x}_{t_k} + \Delta t^2\beta\ddot{\mathbf{x}}_{t_k} \quad (3.111)$$

7. Critério de parada: atingir t_N .

3.10 Vibrações em sistemas auto-excitados

Até o momento o sistema dinâmico em estudo era forçada por uma fonte externa e independente do movimento. Porém, existem inúmeros casos práticos em que as forças que excitam o sistema são dependentes da cinemática do movimento. Este tipo de sistema é conhecido como auto-excitado, uma vez que o próprio movimento é responsável pela excitação. Exemplos práticos de sistemas auto-excitados incluem:

- Instabilidade de eixos rotativos em velocidades críticas.
- Tremulação de pás de turbinas e hélices.
- Vibrações em tubulações induzidas por escoamento de fluidos ou descargas.
- Vibrações em pneus de automóveis.
- Vibrações em pontos por fenômenos aerodinâmicos.

3.10.1 Análise de estabilidade

Nos capítulos anteriores vimos que um sistema dinâmico linear é dito estável se sua resposta transiente de sistemas amortecidos (vibração livre) converge ao equilíbrio. Isto significou que o movimento decresce com o tempo seguindo $e^{-\xi\omega_n t}$. Se este movimento divergir o sistema é dito instável, ou seja com o passar do tempo as amplitudes em regime transiente aumentam. Um

sistema mecânico pode se tornar instável se houver alimentação de energia ao sistema por auto-excitação.

Para visualizar bem isto é interessante verificar as raízes da equação características, que conforme já foi discutido, são chamadas de pólos do sistema. Para o caso de sistema de 2.º ordem, que é o mais comum de ocorrer em vibrações temos:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}} \quad (3.112)$$

Nestas condições o sistema é estável nas situações:

- Raízes reais e negativas para $\xi \geq 1$.
- Raízes conjugadas complexas com parte real negativa para $0 < \xi < 1$.

Esta situação é alcançada se $\frac{c}{m}$ e $\frac{k}{m}$ são constantes positivas. Assim no caso de um sistema instável:

$$\lambda_1 = p + iq \quad \lambda_2 = p - iq \quad (3.113)$$

sendo p e q números reais, de modo que:

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \\ &= \lambda^2 + \left(\frac{c}{m}\right)\lambda + \frac{k}{m} = 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

Onde pode-se observar que:

$$\frac{c}{m} = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -2p \quad \frac{k}{m} = \lambda_1\lambda_2 = p^2 + q^2 \quad (3.115)$$

A eq. (3.115) ilustra que se p for negativo, $\frac{c}{m}$ é positivo, e para $p^2 + q^2$, $\frac{k}{m}$ deve ser positiva. Admitimos que a massa m sempre é positiva, c e k devem ser positivos para o sistema ser estável.

Um exemplo bem interessante de vibração auto-excitada ocorre em freios de absorção com correia e polia e cursores de máquinas ferramentas [11]. Uma máquina-ferramenta (torno) pode sofrer algum solavanco mesmo o cursor tendo um movimento suave. Assuma um máquina com massa m e a conexão bancada-cursor de avanço como uma mola com rigidez k e amortecimento viscoso c . Existe um coeficiente de atrito μ entre a bancada e superfície do cursor que varia em função da velocidade de deslizamento. A equação do movimento da bancada pode ser descrita como:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg \left(\mu_0 - \frac{a}{mg}(V - \dot{x}) \right) \quad (3.116)$$

sendo a uma constante. A equação anterior pode ser descrita como:

$$m\ddot{x} + (c - a)\dot{x} + kx = 0 \quad (3.117)$$

onde vê-se claramente que se $a > c$ o sistema é instável.

3.10.2 Instabilidade dinâmica causada por escoamento de fluido

A vibração causada por escoamento de fluido ao redor de corpos é muito comum. Exemplos:

- Vibração em linhas de transmissão causada por vento.
- Vibração em antenas de automóveis causada por vento.
- Vibração em chaminés ou torres altas.
- Vibrações em pás de turbinas hidráulicas.
- Tubos de compressores de ar.
- Tubulações de óleo.

Todos estes sistemas podem vibrar violentamente sob certos regimes de escoamento. O que ocorre é que estes sistemas podem extrair energia da fonte induzindo vibrações cada vez maiores. Vários fenômenos físicos podem ser os responsáveis por esta indução de vibrações. Grande parte podem ser resultado da emissão de redemoinhos, conhecidos como vórtices de Karman.

Vórtices de Karman ocorrem alternadamente em sentido horário e anti-horário quando despreendidos por um escoamento de fluido ao redor de um corpo sólido. Estes vórtices provocam forças de elevação com variação harmônica e perpendiculares à velocidade do fluido. Testes experimentais em túnel hidrodinâmico e/ou de vento mostram que a emissão de vórtices de Karman é muito grande na faixa de número de Reynolds (Re) entre 60 a 5000. O número de Reynolds nesta faixa é calculado como:

$$Re = \frac{Vd}{\mu} \quad (3.118)$$

sendo d o diâmetro de um cilindro ao redor do qual o fluido escoar, ρ a densidade, V a velocidade e μ a viscosidade do fluido. Para $Re > 1000$ a frequência adimensional de emissão de vórtices pode ser expressa em função do número de Strouhal St :

$$St = \frac{fd}{V} = 0.21 \quad (3.119)$$

sendo f a frequência de emissão de vórtices em Hz. A força de elevação $F(t)$ harmônica induzida pelo escoamento perpendicular a velocidade do fluido é:

$$F(t) = \frac{1}{2}c\rho V^2 A \sin(\omega t) \quad (3.120)$$

sendo c uma constante dependente da geometria do corpo (para cilindros $c \approx 1$), A a área projetada do cilindro perpendicular à direção de V , ω a frequência angular de emissão dos vórtices.

Assim o escoamento de fluidos ao redor de um corpo pode produzir vibração auto-excitada. Para projeto tem-se que garantir:

- A magnitude da força $F(t)$ deve ser baixa para que não ocorra falha. Perfil aerodinâmico adequado pode ser usado para reduzir esta força.
- Mesmo a magnitude da força ser baixa, a frequência de emissão não pode produzir fadiga na estrutura mecânica.
- A frequência de emissão dos vórtices de Karman não pode coincidir com a frequência de ressonância do sistema¹⁵.

Em termos práticos vários são as técnicas usadas para reduzir estas instabilidades. Por exemplo, em grandes estruturas esbeltas e altas é comum a instalação de *spoilers* ou reforços. *Spoilers* quebram o padrão de emissão de vórtices de tal forma que nenhuma excitação harmônica bem-definida seja aplicada. Em aerofólios busca-se criar forças aerodinâmicas voltadas ao contrário da força $F(t)$ buscando minimizá-la e garantir estabilidade.

3.11 Exercícios

Ex. 3.1 Uma máquina com 110 kg é montada em uma fundação elástica com rigidez de 2×10^6 N/m. Quando a máquina opera com uma velocidade de 150 rad/s, esta é sujeita a uma força harmônica com magnitude de 1500

¹⁵A causa do colapso da ponte Takoma foi causada por não atender a esta especificação.

N. A amplitude em regime permanente X_p medida em um teste de vibração nesta situação é encontrada ser de 1.9 mm. Qual o fator de amortecimento ξ desta fundação?

Ex. 3.2 *Uma máquina ferramenta com 82 kg é montado em uma fundação elástica. Um teste experimental é realizado para estimar as características de rigidez e amortecimento desta base. Quando a ferramenta é excitada com uma força harmônica com magnitude de 8000 N em várias frequências, a máxima amplitude em regime permanente obtida é dada por 4.1 mm na frequência de excitação de 40 Hz. Usando estas informações estime o fator de amortecimento ξ e o coeficiente de rigidez desta fundação.*

Ex. 3.3 *Uma máquina de 45 kg é montada na extremidade livre de uma viga engastada-livre de aço com comprimento $L = 2.5\text{m}$ e módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. A rigidez da viga engastada-livre é calculada por $k = \frac{3EI}{L^3}$, sendo I o momento de inércia de área. A máquina é sujeita a excitação harmônica com magnitude de 1000 N em uma velocidade de rotação de 40 rad/s. Suponha que sua meta é limitar a amplitude de vibração em regime permanente desta máquina para no máximo 15 mm. Para isto você precisa especificar um perfil para a viga engastada-livre com base em um catalogo comercial em função do momento de inércia de área desejado. Para quais valores do momento de inércia de área I a exigência de projeto é satisfeita.*

Ex. 3.4 *Uma máquina industrial de serrar com 65 kg tem um desbalanceamento m_0 de 0.15 kg.m. A máquina opera em uma velocidade de 125 Hz e é montada sob uma fundação com rigidez equivalente de $k = 2 \times 10^6 \text{ N/m}$ e fator de amortecimento $\xi = 0.12$. Qual a amplitude de vibração em regime permanente desta máquina?*

Ex. 3.5 *Um ventilador industrial com 40 kg tem um desbalanceamento m_0 de 0.1 kg.m. Este ventilador é montado na extremidade livre de uma viga engastada-livre com comprimento $L = 1.2 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e momento de inércia de área de $I = 1.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. A rigidez da viga engastada-livre é calculada por $k = \frac{3EI}{L^3}$. A viga foi confeccionada para adicionar amortecimento viscoso. Como a rotação de trabalho do ventilador é variável foi notado que a máxima amplitude de vibração em regime permanente é dada por 20.3 mm. Qual é a amplitude de vibração em regime permanente do ventilador quando este opera em 1000 rpm?*

Ex. 3.6 *Considere uma máquina com 120 kg montada sob uma viga engastada-livre com comprimento $L = 0.8 \text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e momento de inércia de área de $I = 4.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. A rigidez da viga*

engastada-livre é calculada por $k = \frac{3EI}{L^3}$. A partir de um teste experimental de vibrações livres constata-se que a razão entre duas amplitudes sucessivas em um ciclo é de 2.5 para 1. Determine a resposta da máquina devido a um desbalanceamento m_0e de 0.25 kg.m quando a máquina opera em uma rotação de 2000 rpm e o amortecimento é assumido ser viscoso.

Ex. 3.7 Considere o conjunto moto-bomba visto na fig. (3.15) A bomba tem uma massa de 123 kg e o motor 390 kg. Constatou-se que em operações normais de trabalho a vibração do conjunto era muita alta e acima do nível máximo tolerado, que é 4 mm/s. Neste primeiro teste o nível de vibrações do conjunto era 13 mm/s. Após um enrijecimento da base feito a partir de suportes de uma chapa dobrada em L com um reforço interligando as abas (mão francesa de chapa de mesma espessura) constatou-se que a vibração reduziu-se para 9.5 mm/s. Mesmo assim ficou acima do nível máximo tolerado, mostrando que esta mudança não foi suficiente. A rotação da bomba é 3000 rpm. Para simplificação dos cálculos, assuma que o sistema tem um amortecimento estrutural ξ nulo. Lembre-se que $x(t) = X_p \sin(\omega t)$ e $\dot{x}(t) = \omega X_p \cos(\omega t)$. Baseado nestas informações pede-se¹⁶:

- a) Calcule uma estimativa da mudança ocorrida na rigidez do sistema com a modificação estrutural proposta e implementada.
- b) Quanto deveria ser esta mudança para que o nível de amplitude de vibrações ficasse abaixo do valor máximo permitido (4 mm/s)?

Ex. 3.8 O motor elétrico de acionamento de um sistema mecânico possui massa de 20 kg e deve ser instalado sobre quatro absorvedores de vibração, conforme ilustrado na fig. (3.16). Esse motor deve operar na faixa de 100 a 1000 rpm, e seu rotor possui um desbalanceamento representado pela força $F_0 = 0,05\omega^2$, onde F_0 é expressa em N e ω é a rotação do motor em rad/s. Considere os três tipos de absorvedores disponíveis apresentados na tabela (3.4), despreze qualquer efeito dissipativo e admita apenas o movimento vibratório na direção vertical¹⁷.

- a. Determine as frequências de ressonância do sistema correspondentes aos três tipos de absorvedores de vibrações apresentados, obtendo os resultados em rpm.

¹⁶Caso real ocorrido na Itaipu Binacional.

¹⁷Questão tirada do Provão Eng. Mec. 2001 - INEP.

Tab. 3.4: Constantes elásticas dos absorvedores de vibração disponíveis.

Tipo de Absorvedor	Constante elástica [N/m]
A	200000
B	20000
C	445

b. *Especifique o tipo de absorvedor que deve ser utilizado para atender a requisitos de montagem que limitam em 1 mm o deslocamento vibratório vertical máximo do motor.*

Ex. 3.9 *Em um teste experimental se estimou uma função de resposta em frequência (FRF) com base no sinal de deslocamento. Esta FRF é vista na fig. (3.17). Estime a frequência natural e o fator de amortecimento ξ que este sistema contém.*

Ex. 3.10 *A fig. (3.18) mostra o diagrama de Nyquist da FRF de mobilidade obtido através de um teste experimental. Com base neste gráfico estime o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente c do sistema.*

Ex. 3.11 *Considere um sinal de excitação $F[n]$ obtido experimentalmente que é composto por 5 amostras: $F[0] = 0.5$, $F[1] = 0.25$, $F[2] = 0.3$, $F[3] = 0.65$ e $F[4] = 1.0$. Quando este sinal de força é aplicado para excitar um sistema mecânico, a resposta medida com um sensor de deslocamento é dada pelo sinal discreto $x[n]$ também formado por 5 amostras: $x[0] = 0.2$, $x[1] = 0.3$, $x[2] = 0.25$, $x[3] = 0.7$ e $x[4] = 0.1$. Estes dois sinais são discretizados com uma taxa de amostragem de $F_s = 100$ Hz (100 amostras por segundo). Com base nestas informações pede-se:*

- Calcule a transformada discreta de Fourier $F(\omega_k)$ e $X(\omega_k)$ para os sinais $F[n]$ e $x[n]$ com 5 amostras.*
- Calcule a densidade espectral de potência $P_{xx}(f)$ e $P_{Fx}(f)$ destes sinais.*
- Estime as FRFs usando os estimadores H_1 , H_2 e H_v .*
- Calcule a função de coerência desta estimativa e comente os resultados.*
- Estime a IRF $h[n]$ e confira os resultados a partir de $x[n] = h[n] * F[n]$.*

Ex. 3.12 *Uma estrutura de aço tem 20 m de altura, 0.75 m de diâmetro interno e 0.8 m de diâmetro externo. Determine a velocidade do fluxo de vento ao redor desta estrutura que induzirá vibração transversal da chaminé*

na direção do fluxo de ar. Dica: frequência natural fundamental da viga em balanço pode ser escrita como $\omega_1 = (1.875104)^2 \sqrt{EI/\rho A l^4}$.

Ex. 3.13 As duas primeiras frequências naturais de uma antena de carro, fig. (3.19), são 3.0 Hz e 7.0 Hz. Determine se a emissão de vórtices ao redor da antena irá causar instabilidade na faixa de velocidades de 100 à 120 km/hora do automóvel.



(a) Vista geral do conjunto.



(b) Detalhe da base.

Fig. 3.15: Conjunto moto-bomba.
100

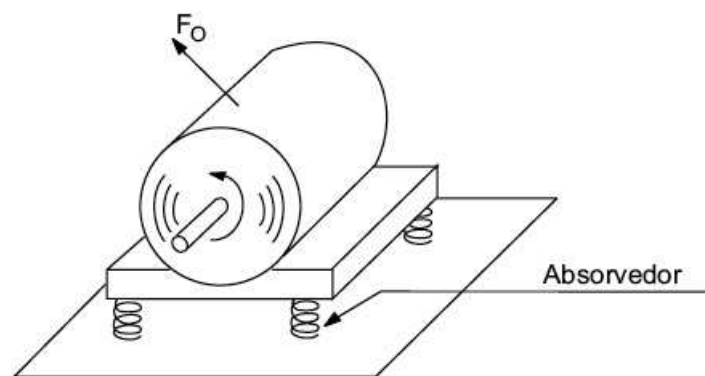


Fig. 3.16: Motor elétrico a ser instalado.

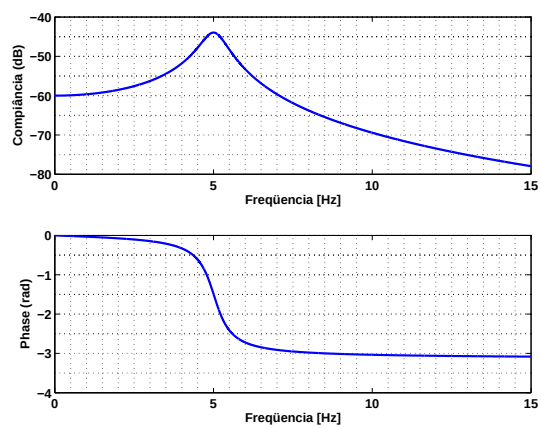


Fig. 3.17: FRF (Complância) para um sistema com 1 grau de liberdade.

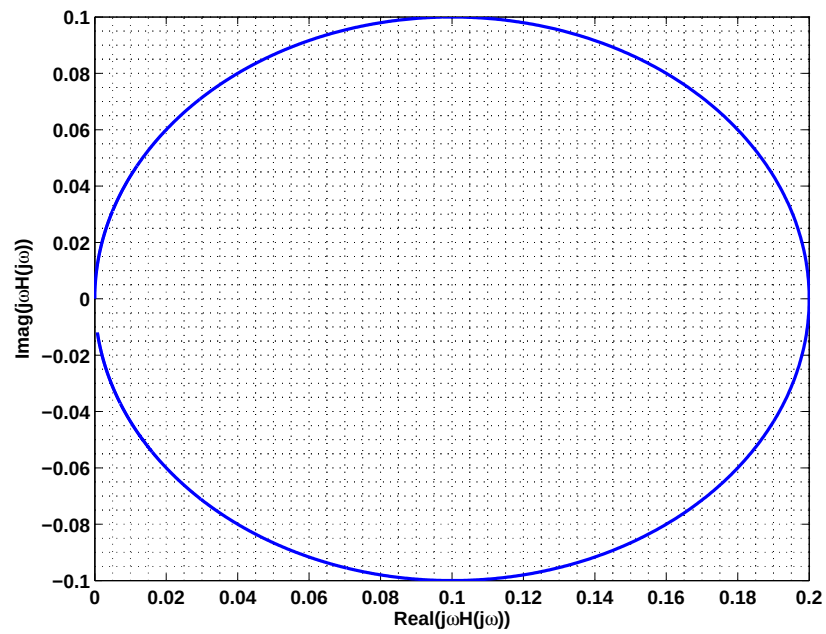


Fig. 3.18: Diagrama de Nyquist da FRF de mobilidade.

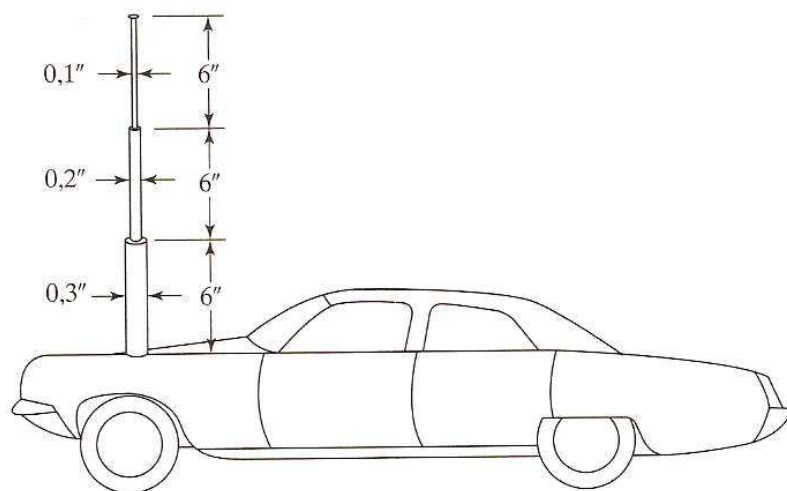


Fig. 3.19: Antena de carro.

Capítulo 4

Isolamento de Vibrações, Tipos de Amortecimento e Técnicas de Medição

Mesmo uma máquina sendo montada em cima de uma base rígida projetada para apresentar níveis adequados de vibrações, a força transmitida da máquina para a base ou da base para o sistema pode ser elevada e isto pode causar problemas. Nestes casos é necessário isolar o sistema. Este capítulo visa apresentar alguns conceitos relacionados ao projeto de isoladores ativos e passivos de vibrações. No decorrer deste capítulo também são discutidos tipos comuns de amortecimento usados para descrever sistemas mecânicos: amortecimento de Coulomb, histerético e proporcional. Por fim são apresentados alguns equipamentos básicos utilizados para medir, condicionar e analisar sinais de vibrações a partir de testes experimentais.

4.1 Isolamento de Vibrações

Isolar é interpor entre um sistema (máquina) e sua base elementos com características (k e c) bem definidas de maneira que as forças transmitidas (do sistema para sua base e vice-versa) sejam as menores possíveis. O isolamento pode ocorrer de duas maneiras, primeiro isolar a base (e conseqüentemente o meio) das forças de vibração transmitidas pela máquina. Em segundo, isolar a máquina da vibração proveniente da base. A seguir são apresentados alguns comentários sobre os dois tipos de isolamento e é apresentado o conceito de transmissibilidade absoluta.

4.1.1 Isolamento ativo

O isolamento ativo consiste em isolar a base das vibrações provenientes da máquina. Para isto é necessário determinar as forças transmitidas pelos amortecedores e molas (em regime permanente) vistos na fig. (4.1).

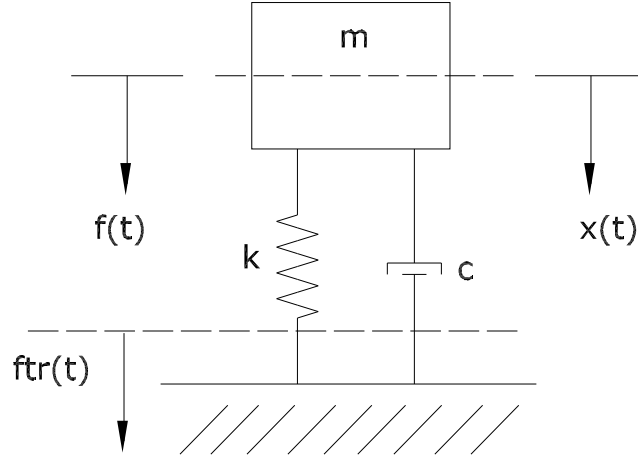


Fig. 4.1: Exemplo de máquina montada sobre uma base com isoladores.

As amplitudes das forças nas molas e amortecedores em regime permanente são dadas por

$$F_{mola} = kx = kX_p \sin(\omega t - \phi), \quad (4.1)$$

$$F_{amort} = c\dot{x} = c\omega X_p \cos(\omega t - \phi). \quad (4.2)$$

É interessante observar que F_{mola} e F_{amort} são ortogonais daí a amplitude total da força transmitida F_{tr} pode ser calculada por

$$\begin{aligned} |F_{tr}| &= \sqrt{F_{mola}^2 + F_{amort}^2} = \sqrt{(kX_p)^2 + (c\omega X_p)^2} = \\ &= kX_p \sqrt{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

lembrando que $r = \frac{\omega}{\omega_n}$, $c = 2m\xi\omega_n$ e $k = m\omega_n^2$ tem-se que

$$|F_{tr}| = kX_p \sqrt{1 + (2\xi r)^2}. \quad (4.4)$$

A transmissibilidade absoluta T_R é portanto definida como sendo a razão entre as amplitudes das forças transmitidas e de excitação

$$T_R = \frac{|F_{tr}|}{|F_{exc}|}. \quad (4.5)$$

Relembrando do capítulo anterior que a amplitude da força de excitação pode ser calculada com base na amplitude de vibração em regime permanente

$$F = kX_p \sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}. \quad (4.6)$$

Substituindo as Eqs. (4.6) e (4.4) na Eq. (4.5) obtém-se a transmissibilidade absoluta

$$T_R = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (4.7)$$

É importante observar que $F_{tr} = T_R F_{exc}$, ou seja, a força de excitação é transmitida proporcionalmente a transmissibilidade absoluta T_R . Assim, é desejável que o valor de T_R seja o mínimo possível. Na prática deve-se definir qual a transmissibilidade T_R adequada para o sistema e com isto calcular qual a razão r que pode ser utilizada para se ter esta transmissibilidade.

A fig. (4.2) mostra o valor de T_R em função da razão r . Onde observa-se que para valores $r > \sqrt{2}$ representam $T_R < 1$, o que significa que o que é transmitido a base é menor que a amplitude gerada. Esta faixa representa a faixa de isolamento. Por outro lado, para $r < \sqrt{2}$ representa $T_R > 1$, o que representa a faixa de ampliação.

Exemplo 4.1 *Uma máquina rotativa tem massa de 500 kg e um desbalanceamento $m_0 e = 5.8 \text{ kg.m}$. Quando são usados amortecedores com fator de amortecimento $\xi = 0.2$; especifique as molas para montagem tal que somente 10% da força de desbalanceamento seja transmitida ao chão. Determine também a intensidade da força transmitida. O ventilador gira a uma velocidade de 1000 rpm.*

Solução: A rotação da máquina em rad/s é dada por

$$\omega = 1000 \times \frac{2\pi}{60} = 104.7 \text{ rad/s}. \quad (4.8)$$

A transmissibilidade T_R desejada é de 10% assim a razão r necessária é calculada por

$$T_R = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = (0.1), \quad (4.9)$$

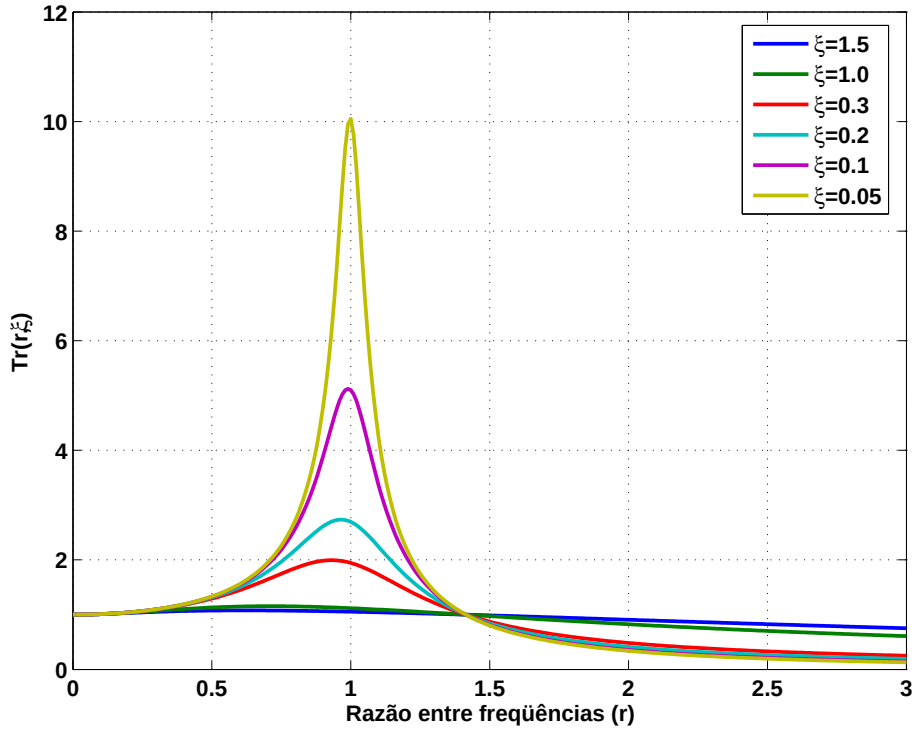


Fig. 4.2: Transmissibilidade Absoluta do sistema.

Resolvendo a equação acima chegasse a $r = 4.72 > \sqrt{2}$ que corresponde a faixa de isolamento. Após o r calculado obtém-se a frequência natural ω_n necessária

$$\omega_n = \frac{104.7}{4.72} = 22.18 \text{ rad/s.} \quad (4.10)$$

Lembrando que a rigidez é dada por $k = m\omega_n^2$ tem-se que mola deve ter uma rigidez $k = 246198 \text{ N/m}$. Por fim, a intensidade da força transmitida é

$$T_R = 0.1 = \frac{F_{tr}}{F_{exc}} \Rightarrow F_{tr} = 0.1F_{exc} = 0.1 (m_0 e \omega^2) = 6360.4 \text{ N} \quad (4.11)$$

4.1.2 Isolamento passivo

O isolamento passivo por sua vez corresponde a isolar a excitação da base para a máquina. A fig. (4.3) mostra um sistema com isolamento passivo.

Neste caso $x(t)$ representa a vibração da máquina, $y(t)$ a vibração da base e $z(t)$ a vibração relativa

$$z(t) = x(t) - y(t). \quad (4.12)$$

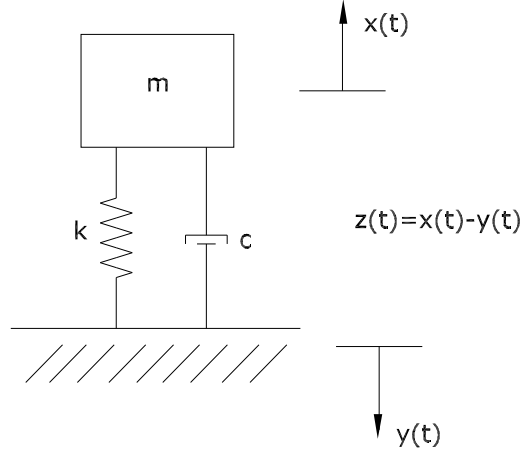


Fig. 4.3: Exemplo de máquina como isolamento passivo.

Assim as forças nas molas e amortecedores são dada por:

$$F_{mola} = kz = k(x - y) = kx - ky, \quad (4.13)$$

$$F_{amort} = c\dot{z} = c(\dot{x} - \dot{y}) = c\dot{x} - c\dot{y}. \quad (4.14)$$

A equação do movimento para o sistema máquina-base é descrita por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky, \quad (4.15)$$

onde assume-se que a base tem um movimento do tipo harmônico $y(t) = Y \text{sen}(\omega t)$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\omega Y \cos(\omega t) + kY \text{sen}(\omega t), \quad (4.16)$$

Assim a transmissibilidade absoluta (T_R) para este caso é dada por:

$$T_R = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (4.17)$$

Exemplo 4.2 *Um grupo motor-ventilador é montado sobre duas viga I de aço com $E = 210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, 2 metros de comprimento cada uma com momento de inércia $I = 27000 \text{ cm}^4$. O grupo tem 7300 kg e massa e gira*

a 900 rpm. (a) Supondo $\xi = 0.05$ qual a % da força de excitação que é transmitida à estrutura que suporta as vigas? (b) Interpondo entre a viga e o grupo em série, isoladores de molas helicoidais de rigidez total de 4000 kgf/cm qual a redução (%) da amplitude?

Solução: (a) A rotação em rad/s pode ser calculada por

$$\omega = 900 \frac{2\pi}{60} = 94.3 \text{ rad/s} \quad (4.18)$$

A rigidez total das duas vigas em paralelo é obtida a partir de

$$k_{eq} = 2 \times \frac{48EI}{L^3} = 2 \times \frac{(210 \times 10^9 \times 2.7 \times 10^{-3})}{2^3} = 6.8 \times 10^7 \text{ N/m} \quad (4.19)$$

Uma vez a rigidez k_{eq} calculada pode-se obter a frequência natural ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = 96.5 \text{ rad/s} \quad (4.20)$$

Conhecidas as frequências $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.98 < \sqrt{2}$, que corresponde a uma faixa de ampliação. Por fim a transmissibilidade absoluta é dada por

$$T_R = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 9.51 \quad (4.21)$$

que corresponde a um valor muito alto.

(b) Como a transmissibilidade é muito alta deve-se instalar molas como isoladores para diminuir T_R . O primeiro ponto é calcular a rigidez equivalente entre a rigidez das duas vigas e das molas dos isoladores que estão em série

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{6.8 \times 10^7} + \frac{1}{4 \times 10^6} \Rightarrow k_{eq} = 3.77 \times 10^6 \text{ N/m} \quad (4.22)$$

A nova frequência natural do sistema é então calculada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{3.77 \times 10^6}{7300}} = 22.7 \text{ rad/s} \quad (4.23)$$

A razão entre as frequências para esta configuração é dada por

$$r = \frac{94.3}{22.7} = 4.14 > \sqrt{2} \quad (4.24)$$

A nova transmissibilidade é então dada por

$$T_R = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = 0.072 \quad (4.25)$$

A amplitude de vibração em regime permanente antes de colocar os isoladores é dada por:

$$\frac{mX_p}{m_0e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{0.98^2}{\sqrt{(1 - 0.98^2)^2 + (2\xi 0.98)^2}} \quad (4.26)$$

Depois de colocar as molas dos isoladores a amplitude de vibração em regime permanente deve ser descrita por

$$\frac{mX_{p1}}{m_0e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} = \frac{4.14^2}{\sqrt{(1 - 4.14^2)^2 + (2\xi 4.14)^2}} \quad (4.27)$$

Assim, a razão entre as amplitudes antes e depois de colocar os isoladores é dada por

$$\frac{X_p}{X_{p1}} = 2,56 \Rightarrow X_{p1} = 0.12X_p \quad (4.28)$$

Com isto a redução conseguida na amplitude de vibração do sistema quando se aplica os isoladores é de 88%.

4.2 Tipos de Amortecimento

Além do amortecimento do tipo viscoso existem vários outros modelos para simular o efeito de dissipação de energia em sistemas vibratórios. Os mais comuns são o amortecimento de Coulomb, amortecimento histerético e amortecimento estrutural. Abaixo a descrição detalhada de cada um deles.

4.2.1 Amortecimento de Coulomb

Uma aproximação da resposta de um sistema com amortecimento de Coulomb excitado por uma força harmônica é obtido modelando o sistema usando amortecimento viscoso com uma razão de amortecimento equivalente ξ_{eq} , calculada tal que o trabalho feito sobre um ciclo de movimento com amortecimento de Coulomb é o mesmo do trabalho feito pelo sistema com amortecimento viscoso com o coeficiente de amortecimento equivalente. Assim:

$$\xi_{eq} = \frac{2\iota}{\pi r M}, \quad (4.29)$$

sendo $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ e

$$\iota = \frac{F_f}{F_0}, \quad (4.30)$$

onde F_f é a amplitude da força de atrito (Coulomb), $F_f = \mu mg$ e F_0 é a amplitude da força de excitação. O fator de ampliação M para este caso é calculado a partir de

$$M = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4\iota}{\pi}\right)^2}{(1 - r^2)^2}}, \quad (4.31)$$

esta expressão é válida para $\iota < \frac{\pi}{4}$.

Exemplo 4.3 Calcule a amplitude de vibração em regime permanente de um sistema massa-mola com amortecimento de Coulomb, sabendo que a massa é 100 kg, a rigidez é 10^5 N/m e $\mu = 0.08$ e a força de excitação é $F = 300 \sin(40t)$.

Solução: A frequência natural não-amortecida é dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 31.6 \quad \text{rad/s} \quad (4.32)$$

A razão entre as frequências é:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40}{31.6} = 1.27 \quad (4.33)$$

Razão entre as amplitudes das forças de atrito e excitação:

$$\iota = \frac{F_f}{F_0} = \frac{\mu mg}{300} = 0.262. \quad (4.34)$$

Com isto o fator de ampliação M é dado por:

$$M = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{4\iota}{\pi}\right)^2}{(1 - r^2)^2}} = 1.538 \quad (4.35)$$

Lembrando que o fator $M = \frac{X_p k}{F_0}$, tem-se que:

$$X_p = \frac{F_0 M}{k} = 4.6 \quad \text{mm} \quad (4.36)$$

4.2.2 Amortecimento histerético

Evidências empíricas mostram que a energia dissipada em um ciclo do movimento devido ao amortecimento histerético é independente da frequência, mas proporcional ao quadrado da amplitude. A resposta livre de um sistema com amortecimento histerético é similar a de um sistema com amortecimento viscoso. Um coeficiente de amortecimento histerético adimensional h é determinado do decremento logarítmico δ :

$$h = \frac{\delta}{\pi}. \quad (4.37)$$

Para um sistema forçado, a razão de amortecimento viscoso equivalente é:

$$\xi_{eq} = \frac{h}{2r}, \quad (4.38)$$

que leva ao fator de ampliação:

$$M = \frac{X_p k}{F} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + h^2}} \quad (4.39)$$

ou ainda no caso de desbalanceamento de máquinas rotativas

$$\Lambda = \frac{X_p m}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + h^2}}. \quad (4.40)$$

Exemplo 4.4 *Uma bomba com 125 kg é instalada em cima de um suporte formado por uma viga engasta-livre de aço com 0.8 m de comprimento e perf T com momento de inércia de área de $4.5 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Quando um teste de vibrações livre é feito a razão de amplitudes em ciclos sucessivos é de 2.5:1. Determine a resposta da máquina ao desbalanceamento 0.25 kg.m quando a bomba opera a 2000 rpm e o amortecimento é assumido ser histerético.*

Solução: *A rigidez equivalente do sistema para a condição de contorno dada é*

$$k = \frac{3EI}{L^3} = 5.27 \times 10^6 \text{ N/m}, \quad (4.41)$$

com isto pode-se calcular a frequência natural do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 205.3 \text{ rad/s}, \quad (4.42)$$

e a razão entre as frequências de excitação e natural:

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\frac{2\pi}{60} 2000}{205.3} = 1.02. \quad (4.43)$$

O decremento logarítmico pode ser estimado pela informação dada sobre a razão entre amplitudes de vibração em ciclos sucessivos

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_0} \right) = \ln \left(\frac{2.5}{1} \right) = 0.916 \quad (4.44)$$

Portanto, o coeficiente de amortecimento histerético é:

$$h = \frac{\delta}{\pi} = 0.292 \quad (4.45)$$

Por fim a amplitude em regime permanente é dada por:

$$X_p = \frac{m_0 e}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + h^2}} = 7.06 \quad mm. \quad (4.46)$$

4.2.3 Amortecimento proporcional

O amortecimento proporcional é um tipo comum de amortecimento usado para modelar sistemas na prática e de uma forma empírica. A idéia é assumir que o amortecimento é proporcional ao parâmetro de rigidez equivalente e massa do sistema:

$$c = \alpha m + \beta k \quad (4.47)$$

sendo α e β duas constantes obtidas no geral a partir de testes experimentais e usando técnicas de ajuste de modelos e otimização. Deve ficar claro que este mecanismo de amortecimento é usado apenas para ajustar melhor respostas experimentais e teóricas (simuladas) e não significa que o mecanismo real de amortecimento tem esta característica fisicamente falando. Este tipo de amortecimento é muito empregado em softwares de elementos finitos comerciais para modelar amortecimento em estruturas complexas, uma vez que não existem modelos de elementos FEM para amortecimento.

O fator de amortecimento para sistemas com amortecimento proporcional é escrito em função das constantes α e β :

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_n + \frac{\beta}{\omega_n} \right). \quad (4.48)$$

Além disto, deve-se destacar que em sistemas com múltiplos graus de liberdade o problema de auto-valor e auto-vetor em sistemas com amortecimento proporcional são idênticos a problemas com amortecimento viscoso, o que simplifica bastante o problema em simulações.

4.3 Técnicas de Medição

A mediação de vibrações ocupa um lugar de destaque em diversas áreas e aplicações. Portanto, o emprego de técnicas adequadas que garantam uma correta análise é de fundamental importância. Esta seção tem como propósito fornecer algumas informações básicas sobre qual o hardware necessário para medição de sinais de vibração. Em primeiro lugar deve ficar claro ao estudante que existem duas formas de se medir sinais de vibrações:

- Medidas somente de resposta em máquinas operando em condições de trabalho, onde no geral se desconhece exatamente quais são os sinais de entrada que excitam o sistema (máquina).
- Medidas realizadas em ambiente de laboratório, onde o sinal de excitação é simulado a partir de um excitador.

O primeiro tipo de medição é mais usado em aplicações de manutenção preditiva por análise de vibrações ou ainda em análise modal operacional. Já o segundo tipo de medição é empregado comumente em análise modal experimental, análise dinâmica visando modificação estrutural, testes de produtos e protótipos, etc. A seguir se apresenta uma descrição mais detalhada do instrumental de cada caso.

4.3.1 Medição em campo

A medição em campo significa obter as respostas de vibração através de sensores diversos¹ quando a máquina ou o sistema se encontra operando em condições reais de trabalho. Nestas condições, normalmente a força de excitação é desconhecida exatamente². Neste caso pode-se medir os sinais usando os chamados coletores comerciais de grandes fabricantes. Estes coletores são compostos por um sistema de aquisição com conversor A/D, filtro anti-aliasing analógico, condicionador de sinais e sensor acoplado tudo no mesmo sistema. Alguns modelos têm inclusive softwares analisadores de

¹sensores de proximidade, acelerômetros, etc.

²Deve ficar claro ao estudante que a natureza da excitação pode ser muito bem conhecida agora o valor exato deste sinal não.

sinais, sendo possível dar algum diagnóstico e informação prévia sem necessitar descarregar em algum computador. Outro tipo comum de medição pode ser feita agrupando todos os elementos acima em hardwares separados, por exemplo, ter um sensor, um condicionador, um filtro anti-aliasing analógico, uma placa A/D, um sistema de aquisição de sinais e um computador para análise dos dados.

O uso de condicionadores de sinais é obrigatório, pois o sinal analógico de vibração é convertido em grandeza elétrica pelos sensores (transdutores). No geral, a intensidade deste sinal é muito baixa sendo necessária amplificar e condicionar este sinal. Este procedimento é realizado pelo aparelho condicionador de sinais. O filtro anti-aliasing é necessário para limitar o sinal até uma frequência máxima para poder amostra-lo em uma taxa correta e evitar os problemas nocivos de aliasing. A placa de conversão A/D discretiza o sinal tanto em frequência quanto em amplitude (dividindo pelo número de bits do conversor). Assim se uma placa de aquisição tem 12 bits, isto significa que em amplitude ocorrerá uma divisão em 2^{12} níveis de tensão quantizadas (número de quantas). Após o sinal digitalizado este pode ser analisado em algum software específico em um computador para se dar algum diagnóstico. Destaca-se que todo o hardware empregado em medições deve estar previamente calibrado.

4.3.2 Medição em laboratório

A medição em laboratório se caracteriza por ser realizada em um ambiente controlado. Além de toda a instrumentação discutida anteriormente ser usada pode-se empregar também um gerador de sinais analógicos (ou mesmo digital com um conversor D/A), um amplificador de potência e um excitador, que pode ser eletrodinâmico (tipo mais comum), magnético, hidráulico, piezocerâmico (muito usado em controle ativo de vibrações em estruturas inteligentes), etc. Acoplado ao excitador é comum se empregar um sensor de força composto por uma célula de carga. A saída desta célula de carga pode estar acoplada a um sistema de aquisição de dados. Neste caso específico o sinal de excitação seria medido. Portanto, poderíamos estimar FRFS, IRFs de sistemas mecânicos em laboratório e extrair parâmetros modais.

Os principais fabricantes mundiais de softwares, sensores, placas de aquisição de dados para vibração, etc. são: BK, LMS, PCB, National Instruments (LabView), dentre outros.

4.3.3 Transdutores para medição de vibrações

Quando se emprega um transdutor para medir vibrações, o que estamos fazendo é medir o deslocamento relativo entre duas coordenadas generalizadas. Considere a medida de movimento relativo $z(t)$ do sistema da fig. (4.3). Sabe-se que $\ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y}$ e:

$$m\ddot{x} = F_{mola} - F_{amort} \quad (4.49)$$

$$m\ddot{x} = -kx + ky - c\dot{x} + c\dot{y} \quad (4.50)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (4.51)$$

Lembrando que os sinais podem ser assumidos do tipo harmônico:

$$y(t) = Y \sin(\omega t) \quad (4.52)$$

$$\ddot{y}(t) = Y\omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.53)$$

Assim a Eq. (4.51) pode ser escrita como:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mY\omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.54)$$

Então:

$$y(t) = \frac{Fk \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (4.55)$$

$$\tan(\phi) = \frac{2\xi r}{1 - r^2} \quad (4.56)$$

e

$$z(t) = \frac{mY\omega^2 \sin(\omega t - \phi)}{k\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (4.57)$$

Assim a razão entre as duas amplitudes z e y é dada por:

$$\frac{z}{y} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}. \quad (4.58)$$

Existem dois tipos de transdutores: instrumentos com baixa frequência natural e alta frequência natural. Em transdutores com baixa frequência

natural têm-se que $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$, ou seja, que a frequência da máquina ou sistema a ser medida é muito maior do que a frequência natural do transdutor. Um exemplo de sensor deste tipo são os vibrômetros e sismômetros. Nesta situação a Eq. (4.58) fica:

$$\frac{z}{y} \approx 1 \Rightarrow z \approx y \quad (4.59)$$

sendo y a amplitude a ser medida e z a amplitude fornecida pelo instrumento de medição.

No outro tipo (com alta frequência natural) o mais comum é o emprego de acelerômetros. Um acelerômetro basicamente é composto de uma pequena massa sobre uma base com dois cristais piezelétricos, um acoplado na massa e o segundo acoplado na base. O movimento relativo entre estes cristais é convertido em tensão elétrica que é enviada a um condicionador de sinais por cabos e posteriormente para um sistema de aquisição.

Exemplo 4.5 *Um transdutor com $\omega_n = 1$ Hz é usado para medir uma vibração de $\omega = 4$ Hz. A amplitude indicada pelo transdutor é de 1,3 mm, qual a amplitude correta? ($\xi = 0$).*

Solução: *Primeiramente, calculamos a razão entre frequências:*

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{4}{1} = 4 \quad (4.60)$$

O que significa que o transdutor tem alta frequência natural, assim

$$\frac{z}{y} = \frac{1,3}{y} = \frac{r^2}{|1 - r^2|} \Rightarrow y = 1,22 \text{ mm} \quad (4.61)$$

Capítulo 5

Sistemas Mecânicos com Múltiplos Graus de Liberdade

Inúmeros sistemas mecânicos são descritos apenas como tendo um grau de liberdade. Porém em muitas situações de análise esta simplificação não se torna válida. Por exemplo, imagine que você queira descrever o comportamento vibratório de um capo de um carro quando este sofre excitação do ruído proveniente do motor. Neste exemplo pode ser muito difícil analisar totalmente o comportamento dinâmico do sistema assumindo apenas um grau de liberdade. Sendo assim torna-se necessário empregar um modelo de sistema mecânico com múltiplos graus de liberdade (MDOF)¹.

Ao se modelar um sistema como sendo MDOF em vez de termos apenas uma frequência natural e um fator de amortecimento, iremos trabalhar com várias frequências naturais e fatores de amortecimento. No caso de vibrações livres o sistema vibra como uma combinação de todas estas frequências naturais e não apenas em uma como no caso de sistema com 1 dof (estudado nos capítulos anteriores). Além destes fatos, outra variável extremamente importante irá aparecer: os modos de vibrar (ou formas modais) de uma estrutura. Cada modo é associado diretamente com sua respectiva frequência natural e fator de amortecimento.

Esta capítulo introduz todos estes conceitos básicos. Inicialmente é apresentado um método efetivo para obtenção de equações do movimento de sistemas MDOF usando as equações de Lagrange. Este método evita ter que construir um diagrama de corpo livre para cada elemento (parte) de um sistema. Na sequência se apresenta a solução via modos normais, também conhecida com análise modal analítica. Esta parte está dividida aqui em dois casos, primeiro o caso de vibrações livres (sem ou com amortecimento

¹Do inglês *Multiple degrees of freedom*.

proporcional) e depois o caso de vibrações forçadas. Exemplos de aplicação são solucionados no decorrer do capítulo. Por fim, é introduzido ao estudante conceitos básicos de análise modal à partir de dados experimentais. Este tópico é ilustrado através de um exemplo, mostrando todos os passos envolvidos na extração dos parâmetros modais usando uma técnica clássica no domínio da frequência.

5.1 Equações de Lagrange

A fig. (5.1) mostra um exemplo de sistema MDOF. Neste caso a equação do movimento vai ser descrita por um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.1)$$

sendo $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema; $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots x_n]^T$ o vetor deslocamento em cada coordenada generalizada² e $\mathbf{F}$ o vetor correspondente as forças que excitam o sistema (quais dofs são excitados). A questão é: Como obter as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{K}$? Uma forma efetiva é a aplicação das equações de Lagrange.

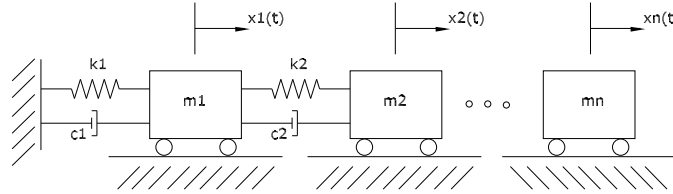


Fig. 5.1: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

Para obter as equações de Lagrange é necessário primeiro se obter as equações para descrever a energia cinética $T(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$ e potencial $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$

²Coordenadas generalizadas representam as coordenadas referentes a determinação do número de dofs do sistema.

$$T = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}I_i\dot{\theta}^2 \quad (5.2)$$

$$V = \frac{1}{2}k_ix_i \quad (5.3)$$

sendo $\dot{x}_i$ a velocidade na i coordenada generaliza, I_i o momento de inércia de massa do i corpo, m_i a massa do corpo i , k_i a rigidez do corpo i e $\dot{\theta}$ a velocidade angular em rad/s (no caso de um corpo rígido).

Também pode-se calcular os termos de energia que são essencialmente dissipadas. A energia dissipativa (no caso de amortecimento viscoso) é dada por

$$E_d = \frac{1}{2}c\dot{x}^2. \quad (5.4)$$

Pode-se agora definir o Lagrangiano L como

$$L = T - V \quad (5.5)$$

Então a equação de Lagrange por ser obtida pela expressão geral

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.6)$$

Englobando o termo dissipativo e expandindo, pode-se obter a equação de Lagrange para o caso geral

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.7)$$

sendo Q_i a força externa aplicada na i coordenada do sistema.

A partir da Eq. (5.7) é possível descrever a equação do movimento de um sistema MDOF sem precisar realizar um diagrama de corpo livre de cada termo do sistema. Com isto pode-se obter a matriz de massa $\mathbf{M}$, amortecimento $\mathbf{C}$ e rigidez $\mathbf{K}$ do sistema de interesse. A seguir um exemplo explica melhor como proceder isto.

Exemplo 5.1 *Obtenha a equação do movimento para o sistema da fig. (5.2) usando as equações de Lagrange. Assuma que uma força $F_1(t)$ atua na massa m_1 .*

Solução: *A primeira coisa a fazer é calcular os termos de energia cinética T e potencial V para este sistema. Assim*

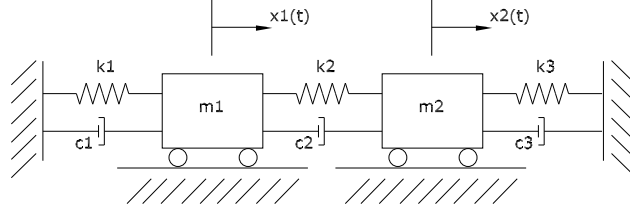


Fig. 5.2: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (5.8)$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3x_2^2 \quad (5.9)$$

O termo de energia dissipativa E_d para este sistema pode ser calculado como

$$E_d(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}c_3\dot{x}_2^2 \quad (5.10)$$

O termo Q_i para descrever os esforços externos neste caso é $Q_1 = F_1$, pois apenas uma força age na massa m_1 . Assim a equação de Lagrange, Eq. (5.7) pode ser aplicada para as duas coordenadas x_1 e x_2 :

(a) Equação de Lagrange aplicada a coordenada x_1 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = F_1 \quad (5.11)$$

Com base nos valores de T , V e E_d e após solucionar a expressão acima a gente pode chegar na equação do movimento para esta coordenada

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \quad (5.12)$$

(b) Equação de Lagrange aplicada a coordenada x_2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = 0 \quad (5.13)$$

Com base nos valores de T , V e E_d e após solucionar a expressão acima a gente pode chegar na equação do movimento para esta coordenada

$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_2\dot{x}_1(k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = 0 \quad (5.14)$$

A equação final do movimento é dada por um conjunto de duas equações diferenciais acopladas que podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.15)$$

sendo o vetor deslocamento

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad (5.16)$$

o vetor força

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (5.17)$$

a matriz de massa $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

a matriz de amortecimento viscoso $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

e a matriz de rigidez $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Note no exemplo acima que a solução via um diagrama de corpo livre daria o mesmo resultado, porém teríamos que isolar os dois corpos e colocar todas os esforços internos e externos, aplicar a lei de ação e reação e a segunda lei de Newton para cada massa, para aí então realizar a montagem do sistema de equações diferenciais final.

5.2 Solução via modos normais: análise modal analítica

Agora que vimos uma forma de obter a equação do movimento de um sistema MDOF devemos resolver este conjunto de EDOs. Uma questão que deve ficar clara de antemão é que o sistema representado pela Eq. (5.1)

corresponde a um sistema acoplado de equações, o que pode dificultar determinadas análises, além de não podermos fazer uma generalização direta com sistemas mais simples de um grau de liberdade. Nestes casos a transformação do sistema para uma outra base de coordenadas pode ser muito útil. Dentre as várias coordenadas a do tipo modal ocupa um lugar de destaque em dinâmica estrutural. Este tópico é muitas vezes referenciado na literatura como análise modal analítica. Nas próximas subseções iremos apresentar como tratar um problema de vibrações livres e forçadas como base nos parâmetros modais³.

5.2.1 Vibrações livres: sistema sem amortecimento

Considere que um sistema descrito pela Eq. (5.1) possui amortecimento nulo $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ e não possui excitação externa alguma $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Assim a equação do movimento se reduz ao seguinte

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (5.21)$$

Uma forma de solucionar este problema é propor uma solução do tipo

$$\mathbf{x} = \Phi e^{j\omega t} \quad (5.22)$$

Sendo o vetor Φ formado por amplitudes que indicam quais as formas modais do problema. Substituindo a Eq. (5.22) dentro da Eq. (5.21) obtém-se

$$-\omega^2 \mathbf{M}\Phi e^{j\omega t} + \mathbf{K}\Phi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

que após uma simples manipulação torna-se

$$e^{j\omega t} [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

uma vez que $e^{j\omega t} \neq 0$ temos o seguinte problema a solucionar

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \Phi = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

A Eq. (5.25) representa um problema clássico de auto-valor e auto-vetor. Este problema também pode ser descrito como

$$[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}] \Phi = \mathbf{0} \quad (5.26)$$

³Frequência naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar.

sendo $\mathbf{I}$ matriz identidade de ordem $n \times n$, sendo n o número de graus de liberdade empregados e $\lambda = \omega^2$. Agora o problema de auto-valor e auto-vetor pode ser escrito em uma forma padrão

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\Phi = \lambda\Phi \quad (5.27)$$

$$\mathbf{A}\Phi = \lambda\Phi \quad (5.28)$$

sendo $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Os auto-valores são dados por $\lambda = \omega^2$ e neste caso são relacionados diretamente as frequências naturais dos sistemas. Os auto-vetores são dados por Φ e representam os modos de vibrar (ou formas modais), e nada mais são do que uma razão de amplitudes. A solução do problema de auto-valor e auto-vetor pode ser feita via inúmeros métodos numéricos, por exemplo o método de Choleski⁴, porém aqui será resolvido de forma clássica a partir do cálculo do determinante. Assim

$$\det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (5.29)$$

ou ainda a partir de

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (5.30)$$

O problema de auto-valor leva à uma equação algébrica em ω^2 . Como os coeficientes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{K}$ são normalmente reais e simétricos teremos n raízes reais, o que implicará em n frequências naturais. Se o sistema for estável, $\mathbf{K}$ é definida positiva e as raízes são positivas. Um sistema não-restringido apresentará modos de corpo rígido correspondendo a frequências naturais nulas.

Importante constatar que os modos de vibrar representam uma base ortogonal no espaço. Assim a matriz modal Φ apresenta as seguintes propriedades para $i \neq j$

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_j = 0 \quad (5.31)$$

$$\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_j = 0 \quad (5.32)$$

$$(5.33)$$

sendo Φ_i o i -ésimo modo associado com a i -ésima frequência natural ω_{ni} e Φ_j o j -ésimo modo associado com a j -ésima frequência natural ω_{nj} . Assim

⁴Consulte o *help* do comando Matlab® *eig* para maiores informações.

$$\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = 1 \quad (5.34)$$

$$\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i = \omega_i^2 \quad (5.35)$$

Neste caso os modos Φ são normalizados em relação a matriz massa, o que implica que a matriz modal é ortonormal⁵. A matriz modal Φ contém as formas de vibrar Φ_1 quando o sistema é excitado na primeira frequência natural ω_{n1} , Φ_2 quando o sistema é excitado na segunda frequência natural ω_{n2} e assim por diante, assim esta matriz é dada por

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \Phi_n] \quad (5.36)$$

Um vez calculados os modos de vibrar e as frequência naturais pode-se substituir estes valores na solução proposta, Eq. (5.22) e obter a solução da resposta de vibração do sistema (se conhecendo as condições iniciais $\mathbf{x}(0)$).

O sistema mecânico de MDOF de coordenadas físicas também pode ser convertido em coordenadas modais através da transformação da base física para a base modal (representada pela matriz modal Φ) tal que

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (5.37)$$

sendo $\mathbf{q}$ o vetor deslocamento em coordenadas modais. Substituindo a Eq. (5.37) dentro da Eq. (5.21) e pré-multiplicando por Φ^T tem-se

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

Assumindo que a matriz modal Φ é normalizada em relação a matriz de massa $\mathbf{M}$ e com a propriedade de ortonormalidade

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (5.39)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (5.40)$$

sendo $\Omega = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$. Aplicando o resultado acima dentro da Eq. (5.38) chega-se a equação para o sistema MDOF livre e sem amortecimento escrita em uma base modal que é dada por

$$\ddot{\mathbf{q}} + \Omega \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (5.41)$$

⁵Na maioria das vezes é necessário normalizar a matriz Φ para se ter esta propriedade.

Note que a equação acima significa que o sistema de equações diferenciais ordinárias representado pela Eq. (5.21) é totalmente desacoplado em vários sistemas de 1 dof, caso se resolva escreve-lo em coordenadas modais⁶.

Exemplo 5.2 Para o sistema mecânico da fig. (5.2) considere que os termos de amortecimento viscoso são $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ e $m_1 = m_2 = m$. Calcule as freqüência naturais e os modos de vibrar deste sistema.

Solução: Como já visto anteriormente, para este sistema simples a matriz de massa é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

e a matriz de rigidez por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Para se calcular as freqüência naturais e os modos de vibrar deste sistema deve-se resolver o problema de auto-valor (freqüência naturais) e auto-vetor (modos de vibrar) associado com as matrizes de massa e rigidez. Assim

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0 \quad (5.44)$$

sendo $\lambda = \omega^2$. Efetuando estes cálculo:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2k - \lambda m & -k \\ -k & 2k - \lambda m \end{bmatrix}\right) = 0 \quad (5.45)$$

O que conduz a seguinte equação característica:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = (2k - \lambda m)^2 - k^2 = 0 \quad (5.46)$$

Expandindo este termo chega-se a seguinte expressão

$$\lambda^2 - 4\frac{k}{m}\lambda + 3\frac{k^2}{m^2} = 0 \quad (5.47)$$

Resolvendo esta simples equação de segunda ordem encontra-se os valores de $\lambda_{1,2}$. Lembrando que $\lambda_{1,2} = \omega_{n1,2}^2$ encontram-se os valores das freqüência naturais do sistema:

⁶Ou seja, caso represente-o em outra base ortogonal ou ortonormal (no caso específico da matriz modal estar normalizada com relação a matriz de massa do sistemas).

$$\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies 1.^{\circ} \text{ freqüência natural} \quad (5.48)$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{\frac{3k}{m}} \implies 2.^{\circ} \text{ freqüência natural} \quad (5.49)$$

Agora resta calcular os auto-vetores do sistema (associados as formas de vibrar deste sistema simples de 2.^o ordem). Cada freqüência natural (auto-valor) está associada a um modo de vibrar (auto-vetor). Assim temos duas situações distintas:

1.^o Modo de vibrar (associado a 1.^o freqüência natural): Caso se substitua $\omega_{n1} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dentro da Eq. (5.25) obtém-se

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{21} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.50)$$

sendo que o 1.^o modo de vibrar é definido como um vetor $\Phi = [\Phi_{11} \quad \Phi_{21}]^T$, sendo que Φ_{11} e Φ_{21} são os valores das amplitudes nas coordenadas generalizadas 1 e 2, respectivamente. A solução do problema de auto-vetor fornece apenas uma razão entre as amplitudes Φ_{11} e Φ_{21} . Solucionando o sistema linear acima chega-se que:

$$\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{21}} = 1 \quad (5.51)$$

Portanto os auto-vetores não são únicos uma vez que se pode propor infinitos vetores Φ_{11} e Φ_{21} que satisfazem as Eqs. (5.50) e (5.51). Uma solução é propor que o primeiro modo de vibrar é dado por:

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

Os valores de Φ_{11} e Φ_{21} terem o mesmo sinal, significa dizer que no 1.^o modo de vibrar as massas vão oscilar em completa fase e com a mesma intensidade. Note que outra solução seria:

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

e infinitas outras.

2.^o Modo de vibrar (associado a 2.^o freqüência natural): Caso se substitua $\omega_{n2} = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ dentro da Eq. (5.25) obtém-se

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

sendo que o 2.º modo de vibrar é definido como um vetor $\Phi = [\Phi_{21} \quad \Phi_{22}]^T$, sendo que Φ_{21} e Φ_{22} são os valores das amplitudes nas coordenadas generalizadas 1 e 2, respectivamente. A solução do problema de auto-vetor fornece apenas uma razão entre as amplitudes Φ_{21} e Φ_{22} . Solucionando o sistema linear acima chega-se que:

$$\frac{\Phi_{11}}{\Phi_{21}} = -1 \quad (5.55)$$

Portanto os auto-vetores não são únicos uma vez que se pode propor infinitos vetores Φ_{11} e Φ_{21} que satisfazem as Eqs. (5.54) e (5.55). Uma solução é propor que o segundo modo de vibrar é dado por:

$$\Phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

Agora repita o problema anterior e encontre uma matriz modal que seja normalizada com relação a matriz de massa $\mathbf{M}$. Também é interessante solucionar o problema anterior usando algum pacote computacional, por exemplo o Matlab®. O comando Matlab® para calcular o problema de auto-valor e auto-vetor é a rotina *eig*.

5.2.2 Vibrações livres: sistema com amortecimento proporcional

Considere agora que um sistema mecânico sem excitação tenha o seu movimento vibratório descrito pela seguinte equação diferencial

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5.57)$$

sendo $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento assumida ser do tipo proporcional a matriz de massa e rigidez

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (5.58)$$

sendo α e β constantes determinadas a partir de métodos específicos de ajuste de modelos. Neste exemplo o problema de auto-valor e auto-vetor associado a solução da Eq. (5.57) irá envolver soluções que serão complexas. Assim as raízes da equação característica associada irá envolver pares de pólos complexos conjugados para cada modo de vibrar do sistema⁷

⁷Assumindo o caso de sistema subamortecido em todos os modos ($0 < \xi < 1$).

$$\lambda_i = -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (5.59)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$, n o número de modos do sistema, ξ_i o fator de amortecimento modal associado ao i -ésimo modo de vibrar e ω_{ni} a i -ésima frequência natural do sistema. Para o caso particular de amortecimento do tipo proporcional, os fatores de amortecimento modal ξ_i podem ser aproximados pela seguinte equação

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\alpha \omega_{ni} + \frac{\beta}{\omega_{ni}} \right) \quad (5.60)$$

Para solucionar o problema de auto-valor e auto-vetor de um sistema com amortecimento do tipo proporcional é interessante reescrever a Eq. (5.57) de uma forma mais conveniente. A principal diferença neste caso é que os auto-valores e auto-vetores são complexos, ou seja, os auto-valores estão relacionados diretamente aos fatores de amortecimento e frequência natural para cada modo e os auto-vetores aos modos de vibrar que neste caso por serem complexos devem ser descritos por uma amplitude e uma fase, o que significa dizer que os modos de vibrar apresentam uma fase na mesma coordenada. Isto tudo é induzido pela presença de amortecimento no sistema. Deve ficar claro que é muito comum se desconsiderar o efeito do amortecimento no cálculo de modos de vibrar e frequências naturais, caso a estrutura seja levemente amortecida e o fator de amortecimento possa ser aproximado à zero (o que significa dizer que os pólos do sistema estão muito próximos do eixo imaginário).

A seguir se discute duas formas padrão muito usadas para solução do problema de auto-valor e auto-vetor de um sistema com amortecimento proporcional.

Forma 1

Em vez de solucionar o problema de auto-valor e auto-vetor do sistema com amortecimento proporcional a partir da Eq. (5.57) é conveniente escrever a equação do movimento dobrando o número de equações e diminuindo uma ordem, assim

$$\widetilde{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{y}} + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

sendo

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

matrizes simétricas com ordem $2n \times 2n$ e $\mathbf{y}$ o vetor de estados definido como

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (5.64)$$

A solução da equação neste caso é dada por:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Psi} e^{-\lambda t} \quad (5.65)$$

sendo λ os $2n$ auto-valores e $\boldsymbol{\Psi}$ a matriz modal com ordem $2n \times 2n$, determinados da solução do problema de auto-valor e auto-vetor envolvendo as matrizes $\tilde{\mathbf{M}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$. Assim como o caso anterior sem amortecimento, neste caso a matriz modal $\boldsymbol{\Psi}$ satisfaz a relação de ortogonalidade

$$\boldsymbol{\Psi}_i \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\Psi}_j = \mathbf{0}, \quad i \neq j \quad (5.66)$$

Forma 2

Uma segunda forma de resolver o problema de auto-valor e auto-vetor em um problema com vibrações forçadas é descrever a equação do movimento a partir da realização no espaço de estados. Assim isolando o vetor de aceleração $\ddot{\mathbf{x}}$ dentro da Eq. (5.57) obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} \quad (5.67)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} \quad (5.68)$$

Definindo o vetor de estados como sendo

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} \quad (5.69)$$

Pode-se então chegar a realização no espaço de estados da equação de movimento do sistema para o caso de vibrações livres:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} \quad (5.70)$$

sendo $\mathbf{A}$ a matriz dinâmica do sistema função das matrizes de massa $\mathbf{M}$, amortecimento proporcional $\mathbf{C}$ e rigidez $\mathbf{K}$, e dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade com ordem $n \times n$. As frequências naturais, modos de vibrar e fatores de amortecimento modal são extraídos diretamente do conhecimento da matriz dinâmica $\mathbf{A}$ a partir da solução do problema de auto-valor e auto-vetor⁸:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad (5.72)$$

que conduz ao seguinte resultado:

$$\mathbf{A}\Psi = \lambda\Psi \quad (5.73)$$

Exemplo 5.3 *Considere o sistema mecânico da fig. (5.2) com $m_1 = m_2 = 1$ kg, $c_1 = c_2 = c_3 = 20$ N.s/m e $k_1 = k_2 = k_3 = 1500$ N/m. Pedese o cálculo das frequências naturais ω_{ni} , dos fatores de amortecimento modal ξ_i e dos modos de vibrar do sistema.*

Solução: *As matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dadas por*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3000 & -1500 \\ -1500 & 3000 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Escrevendo as matrizes auxiliares através da Eq. (5.61) tem-se:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 40 & -20 \\ 0 & 1 & -20 & 40 \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3000 & -1500 \\ 0 & 0 & -1500 & 3000 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

⁸Este problema pode ser resolvido com o Matlab® com o auxílio dos comandos *eig* ou *damp*

sendo o vetor de estados neste caso

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.79)$$

O problema de auto-valor e auto-vetor é então solucionado por

$$\det(\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (5.80)$$

Assim

$$\det \begin{pmatrix} 40 - \lambda & -20 & 3000 & -1500 \\ -20 & 40 - \lambda & -1500 & 3000 \\ -1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.81)$$

que após solucionar leva aos seguintes auto-valores

$$\lambda_1 = -10 + 37.4j \quad (5.82)$$

$$\lambda_2 = -10 - 37.4j \quad (5.83)$$

$$\lambda_3 = -30 + 60j \quad (5.84)$$

$$\lambda_4 = -30 - 60j \quad (5.85)$$

Agora é fácil constatar que os parâmetros modais neste sistema são:

$$\omega_{n1} = 38.7 \text{ rad/s}, \quad \xi_1 = 0.258 \quad (5.86)$$

$$\omega_{n2} = 67.1 \text{ rad/s}, \quad \xi_2 = 0.447 \quad (5.87)$$

A *fig.(5.3)* mostra o mapeamento dos pólos deste sistema mecânico no plano s .

Os auto-valores Ψ calculados através da Eq. (5.73) são dados por

$$\Psi = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \Psi_3 \quad \Psi_4] \quad (5.88)$$

sendo

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ -0.0047 - 0.017j \\ -0.0047 - 0.017j \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

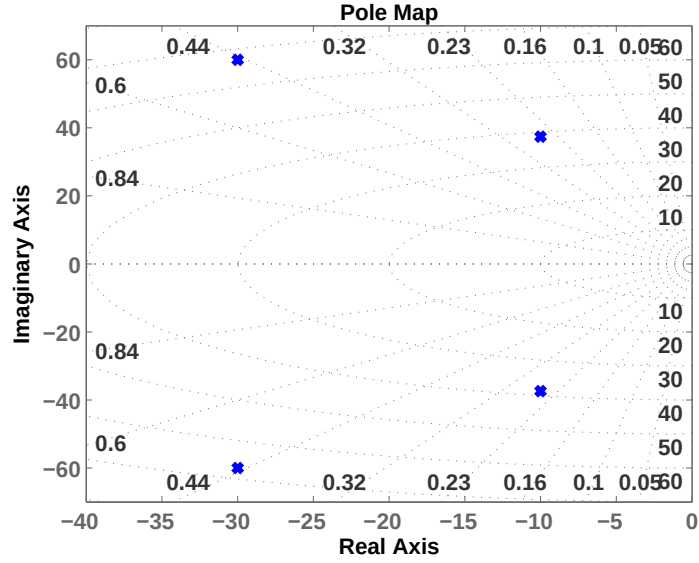


Fig. 5.3: Mapeamento dos pólos do sistema no plano complexo.

$$\Psi_2 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \\ -0.0047 + 0.017j \\ -0.0047 + 0.017j \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} 0.707 \\ -0.707 \\ -0.0047 - 0.009j \\ 0.0047 + 0.009j \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

$$\Psi_4 = \begin{bmatrix} 0.7070 \\ -0.707 \\ -0.0047 + 0.009j \\ 0.0047 - 0.009j \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

É importante notar que neste caso a matriz modal Ψ é complexa, o que significa que os modos de vibrar possuem módulo e fase. Também é interessante observar que a matriz modal apresenta razão tanto entre amplitudes de deslocamento como entre as amplitudes de velocidade, daí sua ordem ser $2n \times 2n$ e não $n \times n$ como no caso da matriz Φ .

Agora repita o exemplo anterior, porém resolvendo através da matriz dinâmica $\mathbf{A}$.

5.3 Vibrações forçadas

O caso de vibrações forçadas em sistemas com múltiplos graus de liberdade considera solucionar o problema dado pela Eq. (5.1) que é repetida a seguir

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (5.93)$$

sendo $\mathbf{F}$ o vetor de força de excitação, que pode ser harmônica ou, em um caso mais geral, puramente aleatória. Pode-se solucionar esta equação de várias formas possíveis. Uma forma seria resolver numericamente usando alguma técnica de solução para resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias e lineares, como a família de algoritmos Runge-Kutta ou o Algoritmo de Newmark. Esta abordagem não será estudada neste curso. Uma segunda abordagem é empregar o uso de transformadas, tanto a de Laplace quanto a de Fourier.

Inicialmente vamos aplicar a transformada Laplace na Eq. (5.93) assumindo condições iniciais nulas dos vetores de deslocamento $\mathbf{x}(0)$ e velocidade $\dot{\mathbf{x}}(0)$. Assim as transformadas de Laplace dos vetores de resposta $\mathbf{x}$ e força $\mathbf{F}$ são dadas por:

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\} \quad (5.94)$$

$$\mathbf{F}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{F}(t)\} \quad (5.95)$$

Substituindo as expressões anteriores na Eq. (5.93) obtém-se a equação do movimento escrita em função da variável de Laplace s

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (5.96)$$

A equação anterior pode ser escrita como

$$\mathbf{Z}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (5.97)$$

sendo $\mathbf{Z}(s)$ a matriz de impedância mecânica, também conhecida como matriz de rigidez dinâmica.

$$\mathbf{Z}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}] \quad (5.98)$$

A solução do sistema pode ser obtida invertendo-se a matriz de impedância $\mathbf{Z}(s)$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1}\mathbf{F}(s) \quad (5.99)$$

A inversa da matriz de impedância é chamada de matriz de receptância ou compliância do sistema

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} \quad (5.100)$$

Uma vez obtido $\mathbf{X}(s)$ aplica-se a transformada inversa de Laplace obtendo assim a resposta do sistema no domínio temporal.

Exemplo 5.4 Considere o sistema mecânico com dois graus de liberdade mostrado na fig. (5.4). Considere que $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $k_1 = k_2 = 100$ N/m, $c = 2$ N.s/m, as condições iniciais sejam nulas e a excitação na massa 1 seja $F = F_0 \sin(\omega t)$, sendo a frequência de excitação $\omega = 10$ rad/s.

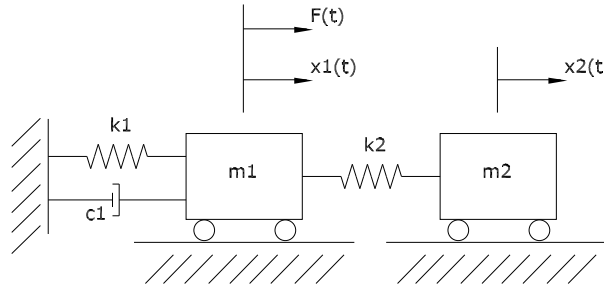


Fig. 5.4: Exemplo de sistema com dois graus de liberdade com força de excitação harmônica.

Solução: Para este exemplo as matrizes de massa, rigidez e amortecimento são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.101)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \quad (5.103)$$

Efetuada a montagem da matriz de impedância mecânica $\mathbf{Z}(s)$ do sistema obtém-se

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 2s + 200 & -100 \\ -100 & 2s^2 + 100 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Então a relação entrada-saída pode ser escrita no domínio s como

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2s + 200 & -100 \\ -100 & 2s^2 + 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1(s) \\ \mathbf{X}_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1(s) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$

Através da inversão da matriz de impedância $\mathbf{Z}(s)$ chega-se a matriz de receptância do sistema

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}(s)^{-1} = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} s^2 + 50 & 50 \\ 50 & \frac{1}{2}(s^2 + 2s + 200) \end{bmatrix} \quad (5.106)$$

sendo $D(s)$ a equação característica do sistema, fornecendo as frequências naturais e os fatores de amortecimento do sistema

$$D(s) = s^4 + 2s^3 + 250s^2 + 100s + 5000 \quad (5.107)$$

A transformada de Laplace do sinal de força aplicada é dada por:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{10F_0}{s^2 + 100} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.108)$$

O passo final é aplicar a transformada de Laplace inversa a partir da expansão em frações parciais de $\mathbf{X}(s)$ obtendo assim $\mathbf{x}(t)$. A fig. (5.5) mostra a resposta obtida quando se emprega $F_0 = 10$ N de amplitude na força de excitação na frequência $\omega = 10$ rad/s.

É interessante observar que a Eq. (5.97) pode ser escrita no domínio da frequência a partir do mapeamento de $s = j\omega$, assim:

$$\mathbf{Z}(j\omega)\mathbf{X}(j\omega) = \mathbf{F}(j\omega) \quad (5.109)$$

Neste caso a matriz de função de resposta em frequência (FRF) é dada por

$$\mathbf{H}(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} \quad (5.110)$$

Assim existem duas formas básicas para se obter a matriz de FRFs. A primeira é a partir do conhecimento da matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{Z}(\omega)$, que basicamente significa obter as FRFs com o conhecimento das matrizes estruturais que definem o seu sistema, matrizes de massa $\mathbf{M}$, amortecimento proporcional $\mathbf{C}$ e rigidez $\mathbf{K}$. Neste caso se obtermos os auto-valores e auto-vetores diretamente destas matrizes se estará trabalhando dentro do contexto

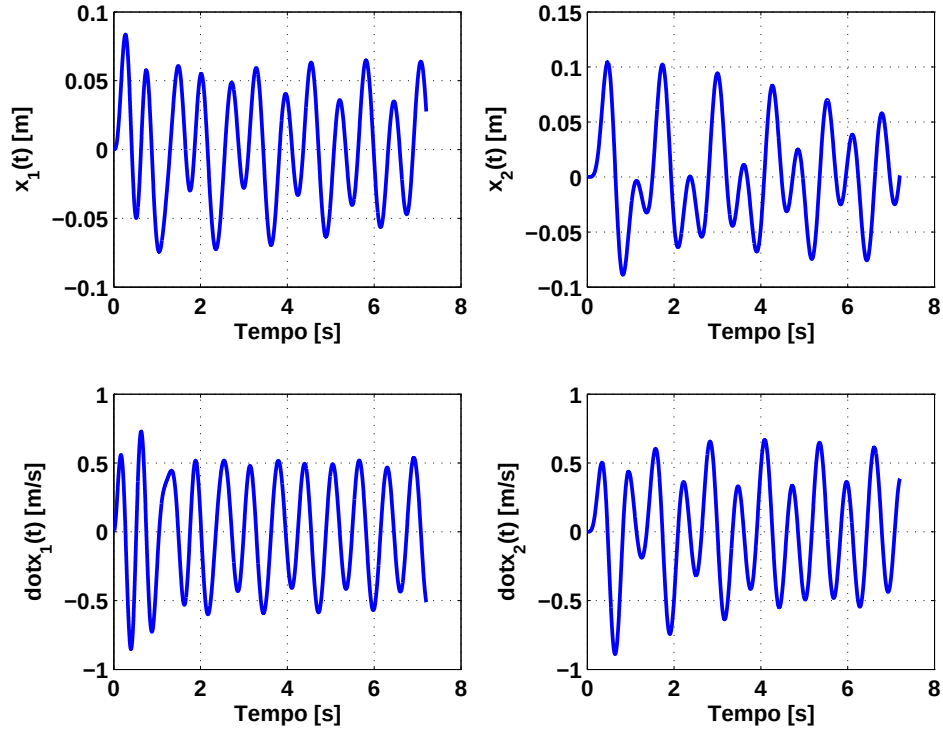


Fig. 5.5: Respostas do sistema mecânica para o sinal de excitação $F(t)$ aplicado na massa 1.

de análise modal analítica. Uma segunda abordagem é estimar a matriz de FRFs $\mathbf{H}(\omega)$ a partir do conhecimento dos sinais de resposta e excitação e utilizar conceitos de análise espectral, como estimadores H_1 , H_2 ou H_v e o emprego da função de coerência do sistema. Estes tópicos foram introduzidos aos estudantes no final do capítulo 3 desta apostila. Neste caso se os autovalores e auto-vetores são extraídos a partir do conhecimento do sinal não paramétrico da matriz de FRFs estaremos empregando ferramentas de análise modal experimental.

No caso de um sistema com dois graus de liberdade a matriz de FRFs (receptância no caso de se medir o sinal de deslocamento) é composta pela combinação de dois sinais de entrada e dois sinais de resposta, assim $H_{ij}(\omega)$, sendo i o ponto em que é feita a medida e j o ponto onde o sistema é medido. No caso de dois graus de liberdade tem-se

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

Observe que a situação quando o ponto de excitação é igual ao ponto que é medido indica que $i = j$. Esta condição é chamada de *drive point*. É muito comum se excitar e medir no mesmo ponto para se verificar a existência de frequências de anti-ressonâncias. Anti-ressonância é uma frequência localizada entre duas frequências naturais onde o movimento oscilatório é anulado. Se excita-se e mede-se no mesmo ponto deve existir anti-ressonância entre todas as frequências naturais. Outra propriedade interessante diz respeito a reciprocidade de Maxwell, que significa que

$$H_{12}(\omega) = H_{21}(\omega) \quad (5.112)$$

ou, seja, a propriedade de linearidade é válida. Caso a constatação acima não seja possível significa que o sistema não responde de forma linear e portanto as ferramentas de análise modal como apresentadas neste texto não são válidas.

A próxima seção traz algumas considerações básicas sobre a estimativa experimental dos parâmetros modais com base em dados reais de medição experimental. Será apresentado apenas um método clássico no domínio da frequência, considerado o mais simples e fácil de ser implementado na prática.

5.4 Introdução à análise modal experimental

Diversos métodos podem ser empregados para identificação de parâmetros modais de estruturas e/ou componentes mecânicos, exemplos são os métodos de realização de auto-sistemas (ERA), exponencial complexa (método de Prony), método de Ibrahim, todos estes no domínio do tempo e métodos frequências como o *curve fitting*, exponencial complexa no domínio da frequência, método usando a máxima resposta em frequência, dentre inúmeros outros.

Aqui nesta seção será apresentado apenas uma introdução e um exemplo envolvendo a identificação dos parâmetros modais (frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibrar) com base no conhecimento das FRFs. O primeiro ponto é definir quantos pontos serão empregados, ou seja, Será necessário ter um conhecimento completo da matriz de respostas em frequências (FRFs) $\mathbf{H}(\omega)$? A resposta a esta pergunta é não. Basta definir claramente qual será o número de modos que se irá buscar identificar. Em uma aplicação envolvendo uma estrutura real, por exemplo, a asa de uma aeronave ou uma pá de turbina de um hidrogenador a dinâmica é muitas vezes extremamente complexa e com diversos modos de vibrar associados. Sendo assim, a primeira coisa é ficar bem exposto pelo analista qual será a faixa de frequências a ser investigada.

Baseado no que foi discutido no parágrafo anterior fica subentendido que basta se conhecer, ou uma linha, ou coluna ou diagonal da matriz de FRFs $\mathbf{H}(\omega)$. Lembrando que a matriz de FRFs é composta por respostas em frequência H_{ij} , onde as linhas i representam os pontos onde as respostas são medidas e as colunas j os pontos onde são aplicados os esforços de excitação. Aqui irá-se considerar que apenas um ponto fixo j é usado como excitação e o ponto da resposta i é variante, ou seja, irá se considerar a medição apenas das colunas da matriz de FRFs. Deve ficar claro para o estudante que esta escolha prática está relacionado com qual aparato experimental (hardware) se tem em mão para efetuar as medidas. Por exemplo, suponha que você disponha de apenas um acelerômetro e de um martelo de impacto instrumentado com uma célula de carga. Neste caso pode ser mais interessante se medir apenas uma linha da FRF variando a posição de entrada (facilmente executada com o martelo) e mantendo a resposta do acelerômetro em um ponto fixo. Mas tudo isto depende muito dos equipamentos que o analista ou a equipe de análise modal tenha em mãos.

Para obter uma FRF existe dois caminhos: ou você dispõe de um analisador comercial que já fornece a estimativa da FRF via estimador H_1 , H_2 ou H_v em um faixa específica de frequência e sua qualidade com a utilização da função de coerência. Com isto basta gravar estes sinais e realizar o pós-processamento para extração dos parâmetros modais da estrutura/máquina/componente de interesse. Já para o caso de não haver um analisador comercial será necessário realizar o pré-processamento para a obtenção das FRFs, usando alguns conceitos que foram introduzidos rapidamente no capítulo 3 desta apostila. Ressalta-se que caso os elementos da matriz de FRF $\mathbf{H}(\omega)$ não sejam bem estimados, toda a identificação modal fica completamente comprometida. Os estudantes interessados em um maior enfoque neste assunto podem consultar as referências [6], [4] ou [9].

Após obtida os termos da matriz de FRFs pode-se determinar os máximos picos de ressonância e a frequência natural amortecida de cada modo (pico) ω_{di} ⁹. O método *Peak Point* de análise modal consiste em definir graficamente qual é esta frequência. Caso o sistema seja levemente amortecido pode-se aproximar a frequência de ressonância por esta frequência, ou seja, $\omega_{di} \approx \omega_{ni}$, $i = 1, 2, \dots, n$, sendo n o número de modos de vibrar do sistema. Para estimar o fator de amortecimento neste modo, basta definir quais as frequências laterais a este pico onde a amplitude é 0.707 de $H_{ij}(\omega)$, ou seja, as frequências onde a amplitude decai de -3.0 dB. Estas frequências são conhecidas como pontos de meia-potência. Pode-se denotar estas frequências de ω_{1i} e ω_{2i} . As-

⁹Na verdade esta frequência corresponde a frequência onde ocorre o máximo pico de amplitude da FRFs para o par ij .

sim o fator de amortecimento para o i -ésimo modo é dado aproximadamente por:

$$\xi_i = \frac{\omega_{21} - \omega_{1i}}{2\omega_{ni}} \quad (5.113)$$

Considere o caso em que se tenha um sistema com 2 dofs e que tenhamos em mãos as FRFs $H_{11}(\omega)$ e H_{21} . Nesta situação iremos ter a definição de duas frequências naturais diferentes, uma estimada no gráfico $H_{11}(\omega)$ e outra no gráfico $H_{21}(\omega)$. É claro que ambas as estimativas serão próximas e o mesmo se pode dizer sobre a estimativa do fator de amortecimento. Assim, para o caso prático pode-se realizar uma média geométrica das estimativas das frequências naturais ω_{ni} e dos fatores de amortecimento modal ξ_i em cada curva de FRF $H_{ij}(\omega)$. No caso geral quando se tem N pontos de medidas

$$\hat{\omega}_{ni} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_{nik} \quad (5.114)$$

$$\hat{\xi}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_{ik} \quad (5.115)$$

sendo $\hat{\omega}_{ni}$ a i -ésima frequência natural estimada experimentalmente a partir das medidas das FRFs, ω_{nik} a i -ésima frequência natural estimada da k -ésima medida de FRF, $\hat{\xi}_i$ o i -ésimo fator de amortecimento estimado experimentalmente e ξ_{ik} o i -ésimo fator de amortecimento estimado da k -ésima medida de FRF. Deve-se observar que é plenamente possível obter as frequências naturais e os fatores de amortecimento de um sistema com base apenas em um termo da matriz de FRFs $\mathbf{H}(\omega)$. Porém, para determinação dos modos de vibrar (auto-vetores) do sistema é necessário mais do que uma FRF. A razão para isto vem do próprio fato do modo de vibrar ser uma relação entre amplitudes em coordenadas diferentes, exigindo assim informações de medidas de entrada e/ou saídas em vários pontos diferentes.

A tarefa de se extrair os modos de vibrar de forma experimental pode se tornar bastante complexa dependendo do tipo de estrutura/sistema mecânico que se irá analisar. Do ponto de vista frequencial o conhecimento da matriz de receptância¹⁰ expandida em uma série de frações parciais onde o denominador é formado por funções de 2.º ordem na frequência de excitação ω traz uma informação importante nos resíduos que são associados diretamente com os modos de vibrar do sistema. Matematicamente:

¹⁰Matriz de FRF quando a resposta medida é o deslocamento.

$$H_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{[\Phi_r \Phi_r^T]_{ij}}{(\omega_{nr}^2 + 2j\xi_r \omega_{nr} \omega - \omega^2)} \quad (5.116)$$

sendo que neste caso o sistema é considerado subamortecido com n modos. A magnitude de $H_{ij}(\omega)$ medida no pico de ω_{nr} é dada por:

$$|H_{ij}(\omega_{nr})| = \left| \frac{[\Phi_r \Phi_r^T]_{ij}}{(\omega_{nr}^2 + 2j\xi_r \omega_{nr}^2 - \omega_{nr}^2)} \right| \quad (5.117)$$

Consequentemente:

$$|[\Phi \Phi^T]_{ij}| = |H_{ij}(\omega_{nr})| |2\xi_r \omega_{nr}^2| \quad (5.118)$$

Aqui o valor medido na máxima função de resposta em frequência em $\omega \approx \omega_{nr}$ no ponto de resposta i e entrada j é devido apenas a resposta para a frequência de ressonância. A Eq. (5.118) é chamada de constante modal, que é definida como a magnitude do ij -ésimo elemento de $\Phi_r \Phi_r^T$. A Eq. (5.118) resulta na hipótese básica de assumir que a curva da FRF vem da curva de um sistema com um grau de liberdade em cada modo (sistema desacoplado). Este método é muito limitado, pois somente permite identificar modos de vibrar de sistemas bem desacoplados e sem dominância modal em determinadas faixas. É um método totalmente não-paramétrico (baseado apenas em curvas gráficas) e portanto o seu interesse atual é mais didático. Porém, com esta formulação é possível na prática se identificar os parâmetros com uma relativa acurácia dada as devidas simplificações. O principal vilão acaba sendo a estimativa correta do fator de amortecimento modal.

O subscrito ij denota a coordenada relativa as posições de saída e de excitação. Em outras palavras, a quantidade $|H_{ij}(\omega_{nr})|$ representa o módulo da função de transferência entre o ponto de saída i e a resposta medida em j quando o sistema é excitado na condição de ressonância.

Neste caso, a estimativa dos auto-vetores, ou modos de vibrar, pode ser calculada fazendo uma série de medidas em pontos diferentes, aplicando a Eq. (5.118) e obtendo as constantes modais e examinando a fase relativa dos picos de $H_{ij}(\omega_{nr})$. Com isto um sistema linear pode ser montado e os modos de vibrar calculados de maneira experimental. A seguir são ilustrados dois exemplos dos conceitos explicados anteriormente.

Exemplo 5.5 *Considerando o sistema da fig. (5.4) pede-se a expansão em frações parciais da receptância em $H_{11}(\omega)$.*

Solução: *Como já obtido anteriormente sabe-se que para este exemplo:*

$$H_{11}(s) = \frac{s^2 + 50}{s^4 + 2s^3 + 250s^2 + 100s + 5000} \quad (5.119)$$

Decompondo em frações parciais obtém-se:

$$H_{11}(s) = \frac{R_1}{s + 0.8637 - 15j} + \frac{R_1^*}{s + 0.8637 + 15j} + \frac{R_2}{s + 0.136 - 4.68j} + \frac{R_2^*}{s + 0.136 + 4.68j}$$

sendo R_1 e R_2 os resíduos para o primeiro e o segundo modo de vibrar e o sobre-escrito * o complexo conjugado. Para este caso têm-se que

$$R_1 = 0.0011 - 0.0287j \quad (5.120)$$

$$R_2 = -0.0011 - 0.014j \quad (5.121)$$

É importante observar que os resíduos são valores complexos e portanto possuem módulo e fase. O próximo exemplo mostra a obtenção dos resíduos e das constantes modais a partir diretamente de uma FRF obtida experimentalmente.

Exemplo 5.6 Considere que foram medidos dois sinais de resposta em um sistema mecânico qualquer nos pontos 1 e 2 quando se aplica uma excitação puramente aleatória no ponto 1. A fig. (5.6) apresenta as respostas de deslocamento medidas experimentalmente.

Com o auxílio de um analisador comercial foi então obtido as FRFs experimentais com o emprego do estimador H_1 . A fig. (5.7) apresenta esta estimativa. Sabe-se que a fase do pico do 1.º modo em $H_{11}(\omega)$ é de -180° , do pico do 1.º Modo em $H_{21}(\omega)$ é -180° , do pico do 2.º modo em $H_{11}(\omega)$ é -180° e do pico do 2.º modo em $H_{21}(\omega)$ é -360° .

Com base nos gráficos da fig. (5.7) pede-se a estimativa das frequências naturais, dos fatores de amortecimento e dos modos de vibrar do sistema de forma experimental.

Solução: A primeira questão é analisar a estimativa da FRF para validar se está ok. Neste exemplo os dados experimentais apresentam ruídos e, conseqüentemente, a estimativa das FRFs não fica 100%. Outro ponto que deve ficar claro é que o pico exato pode não ser possível de ser obtido, assim como os valores das frequência de meia-potência. Como o método que irá-se empregar é totalmente não-paramétrica em essência a estimativa das FRFs tem

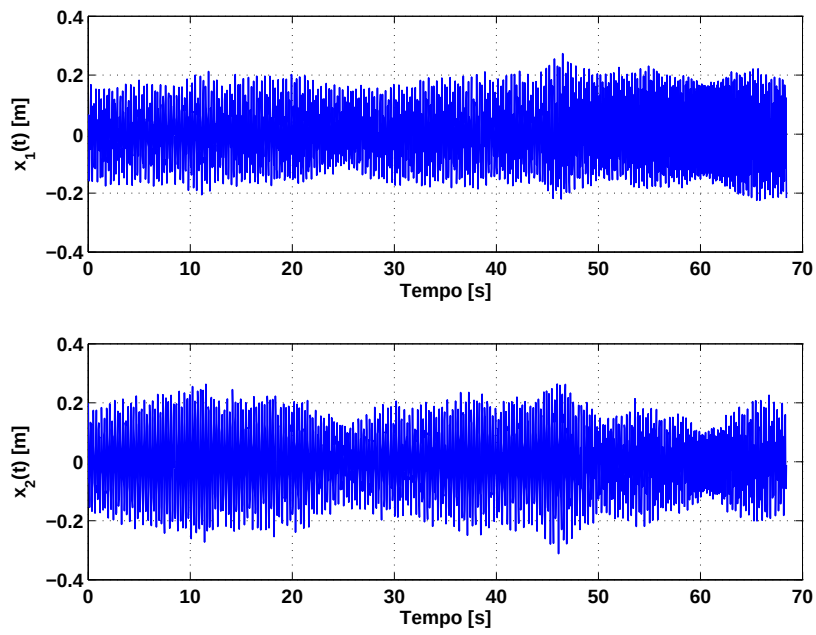


Fig. 5.6: Resposta experimental da estrutura ensaada.

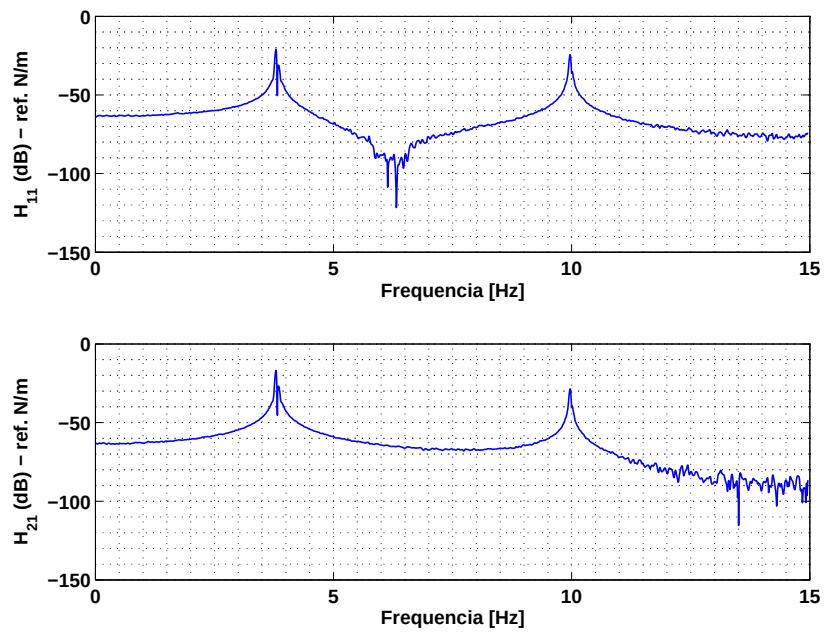


Fig. 5.7: FRFs experimentais.

total influência. Como neste exemplo assume-se que as FRFs já são fornecidas diretamente por um analisador comercial não temos controle das suas estimativas e assume-se que não há nenhum erro. Com base nos valores de pico de $H_{11}(\omega)$ e $H_{21}(\omega)$ obtém-se as frequências naturais do sistema. A análise gráfica fornece as seguintes frequências naturais para o sistema:

$$\omega_{n1} = 3.81 \text{ Hz} \implies 1.^{\circ} \text{ frequência natural} \quad (5.122)$$

$$\omega_{n2} = 9.96 \text{ Hz} \implies 2.^{\circ} \text{ frequência natural} \quad (5.123)$$

A estimativa dos fatores de amortecimento ξ_1 e ξ_2 são um pouco mais complicadas pois dependem das definições das frequências de meia-potência com a Eq. (5.113)

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3.828 - 3.794}{3.81} \right) = 0.004 \implies 1.^{\circ} \text{ modo} \quad (5.124)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{9.97 - 9.949}{9.96} \right) = 0.00105 \implies 2.^{\circ} \text{ modo} \quad (5.125)$$

Estas estimativas são comparadas com os valores do modelo matemático de referência que foi usado para gerar os dados de simulação. A tab. (5.1) apresenta a comparação entre as estimativas e os valores de referência.

Tab. 5.1: Comparação das estimativas feitas.

Parâmetro	Valor Real	Valor identificado da FRF	Erro
ω_{n1}	3.81 Hz	3.81 Hz	0 %
ξ_1	0.14×10^{-4}	0.004	99%
ω_{n2}	9.97 Hz	9.96 Hz	0.1%
ξ_2	0.32×10^{-4}	0.00105	97%

Com a análise da tab. (5.1) pode-se constatar o enorme erro na estimativa do fator de amortecimento. Este erro é causado pelo fato de não se conhecer exatamente a amostra onde o sistema decai -3 dB com relação à amplitude do pico. Qualquer modificação por menor que seja pode causar um enorme erro no valor da frequência de meia-potência que gera uma diferença enorme na estimativa do fator de amortecimento. O ideal para estimar o fator de amortecimento é se empregar alguma técnica temporal. Uma saída é filtrar os dados nas faixas em torno de um modo, aplicar a transformada de Fourier

inversa e analisar diretamente a IRF $h_{ij}(t)$. Neste caso pode-se aplicar o método do decremento logarítmico, como estudados nos capítulos anteriores. Porém, isto só é possível em sistemas onde não existe modos sobrepostos ou muito próximos uns dos outros.

Agora resta estimar os modos de vibrar. Para isto é necessário se definir as amplitudes dos picos em ω_{n1} e ω_{n2} nas FRFs $H_{11}(\omega)$ ¹¹ e $H_{21}(\omega)$:

$$|H_{11}(\omega_{n1})| = -21.01dB = 0.089 \quad (5.126)$$

$$|H_{21}(\omega_{n1})| = -16.86dB = 0.1436 \quad (5.127)$$

$$|H_{11}(\omega_{n2})| = -24.05dB = 0.0599 \quad (5.128)$$

$$|H_{21}(\omega_{n2})| = -28.65dB = 0.03713 \quad (5.129)$$

Com o auxílio da Eq. (eq:ctemodal) é possível calcular as constantes modais relacionadas aos resíduos e modos de vibrar do sistema:

$$\left| [\Phi_1 \Phi_1^T]_{ij} \right| = |H_{11}(\omega_{n1})| |2\xi_1 \omega_{n1}^2| = 0.408 \quad (5.130)$$

$$\left| [\Phi_1 \Phi_1^T]_{ij} \right| = |H_{21}(\omega_{n1})| |2\xi_1 \omega_{n1}^2| = 0.658 \quad (5.131)$$

$$\left| [\Phi_2 \Phi_2^T]_{ij} \right| = |H_{11}(\omega_{n2})| |2\xi_2 \omega_{n2}^2| = 0.4926 \quad (5.132)$$

$$\left| [\Phi_2 \Phi_2^T]_{ij} \right| = |H_{21}(\omega_{n2})| |2\xi_2 \omega_{n2}^2| = 0.3054 \quad (5.133)$$

É importante frisar que as freqüências naturais usadas para calcular as constantes anteriores são convertidas para rad/s. O primeiro modo é então calculado como:

$$\Phi_{11}^2 = 0.408 \implies \Phi_{11} = 0.6387 \quad (5.134)$$

$$\Phi_{12} \Phi_{11} = 0.658 \implies \Phi_{12} = 1.03 \quad (5.135)$$

Já o segundo modo é calculado por:

$$\Phi_{22}^2 = 0.4926 \implies \Phi_{22} = 0.701 \quad (5.136)$$

$$\Phi_{21} \Phi_{22} = 0.3054 \implies \Phi_{21} = 0.4356 \quad (5.137)$$

Uma vez que a fase das FRFs para o segundo pico (segundo modo) possuem defasagem de 180° , o segundo modo está fora de fase. A matriz modal identificada experimentalmente é então dada por

¹¹Lembre-se que $dB = 20\log_{10}(\text{Amplitude})$.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.6387 & -0.701 \\ 1.03 & 0.4356 \end{bmatrix} \quad (5.138)$$

Importante notar que a razão entre amplitude do 1.º modo é 0.62 e para o 2.º modo é -1.60.

Tão importante quanto identificar experimentalmente os modos de vibrar é validar se esta estimativa está coerente. Vários métodos podem ser empregados para este propósito. Um dos mais utilizados é o *Modal Assurance Criteria* (MAC). Os valores MAC fornecem uma medida precisa de correlação entre modos analíticos (extraídos a partir do conhecimento de matrizes estruturais do sistema) e modos experimentais (extraídos de dados de ensaio de vibrações). Como bem se sabe o produto escalar entre dois vetores que formam uma base ortonormal deve ser 1 ou 0 dependendo de qual par de vetor é usado, assim os valores MAC nada mais são do que:

$$MC = \frac{\left| (\Phi_i^{mod})^T (\Phi_j^{exp})^T \right|}{\left| (\Phi_i^{mod})^T (\Phi_i^{exp}) (\Phi_j^{exp})^T (\Phi_j^{mod}) \right|} \quad (5.139)$$

sendo Φ_i^{mod} o i -ésimo modo do modelo e Φ_i^{exp} o i -ésimo modo extraído experimentalmente. Caso $i = j$ o valor MAC deve ser 1 ou próximo de 1 (em função da qualidade da estimativa). Caso $i \neq j$ o valor MAC deve ser 0.

Assim para o exemplo sabendo que a matriz modal obtida com os valores analíticos das matrizes de massa e rigidez é dada por:

$$\Phi^{mod} = \begin{bmatrix} -0.5257 & -0.8507 \\ -0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix} \quad (5.140)$$

Comparando a razão de amplitude dos modos analíticos pode-se observar que para o 1.º modo esta razão é 0.6179 e para o 2.º modo é -1.6182, bem próximos ao obtido com a identificação experimental. Calculando os valores MAC com a equação anterior conclui-se que a matriz de valores MAC é

$$\mathbf{MC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.141)$$

Sendo assim constata-se que se a matriz de valores MAC for próxima da matriz identidade a matriz modal identificada é próxima da matriz modal analítica. Esta abordagem é muito usada buscando otimização estrutural. Os valores MAC são usados como função objetivo de um problema de otimização onde a meta é ajustar os parâmetros do modelo matemático da estrutura de tal forma que o comportamento dinâmico do modelo fique idêntico ao comportamento dinâmico da estrutura experimental (real).

5.5 Exercícios

Ex. 5.1 Para o sistema da fig. (5.8) calcule as frequências naturais e os modos de vibrar. Normalize a matriz modal pela matriz de massa e comprove as propriedades de ortogonalidade dos modos de vibrar. Escreva a equação do movimento em coordenadas modais.

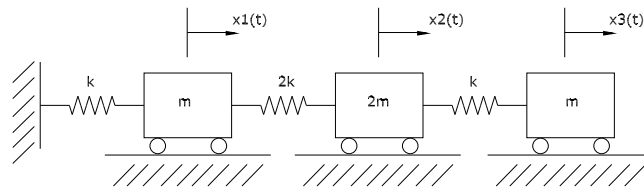


Fig. 5.8: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

Ex. 5.2 Considere o sistema mecânico da fig. (5.9) pede-se a obtenção via equações de Lagrange da equação do movimento do sistema e o cálculo das frequências naturais e modos próprios.

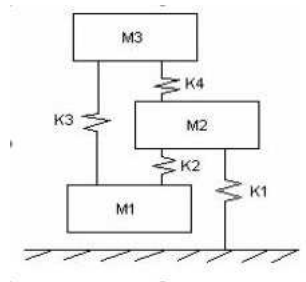


Fig. 5.9: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

Ex. 5.3 Considere o sistema mecânico da fig. (5.10) com três graus de liberdade, pede-se a obtenção via equações de Lagrange da equação do movimento do sistema e o cálculo das frequências naturais, fatores de amortecimento e modos próprios.

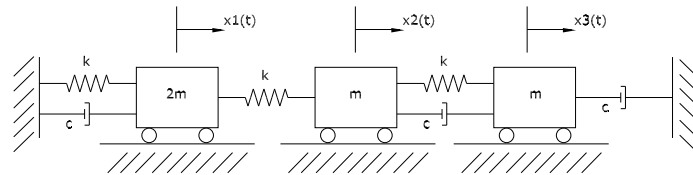


Fig. 5.10: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

Ex. 5.4 A fig. (5.11) mostra o exemplo de um modelo matemático que pode ser usado para modelar um prédio com três andares. Assuma que $m_1 = m_2 = m_3 = m$ e que as rigidez das paredes entre os pisos é k , sendo que as duas paredes atuam como molas em paralelo. Para este sistema obtenha o sistema de equações do movimento usando as Equações de Lagrange. Calcule as frequências naturais e os modos de vibrar deste sistema. Trace um gráfico dos modos próprios de vibração para visualização física deles.

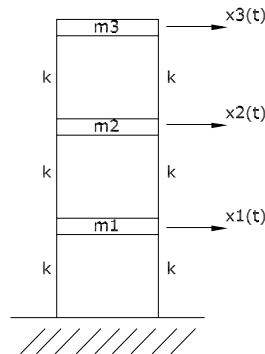


Fig. 5.11: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

Ex. 5.5 A fig. (5.12) mostra uma viga modelada com três graus de liberdade. Para este exemplo a matriz de massa é dada por:

$$\mathbf{M} = \frac{m}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.142)$$

Já a matriz de rigidez é dada por:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \frac{256}{3} & \frac{768}{11} & \frac{768}{7} \\ \frac{768}{11} & \frac{48}{11} & \frac{768}{11} \\ \frac{768}{7} & \frac{768}{11} & \frac{256}{3} \end{bmatrix}. \quad (5.143)$$

Para esta viga calcule as freqüência naturais e os modos normais de vibração. Trace um gráfico dos modos próprios obtidos.

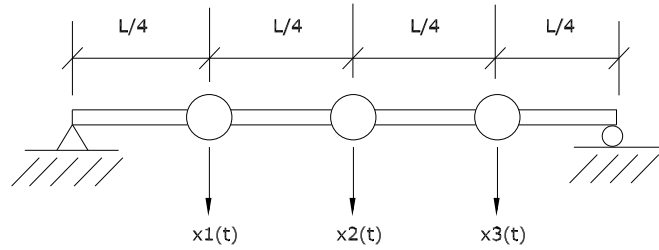


Fig. 5.12: Exemplo de uma viga com múltiplos graus de liberdade.

Ex. 5.6 Para o sistema mecânico de 2 dofs abaixo calcule a equação do movimento usando as equações de Lagrange e extraia as freqüências naturais e os modos de vibrar do sistema.

Ex. 5.7 Considere uma viga engastada livre onde 3 pontos de medida de deslocamento foram obtidos quando a excitação era aplicada em um ponto fixo. As FRFs são estimadas com o estimador H_1 e as freqüências naturais e fatores de amortecimento são extraídos diretamente destas FRFs:

$$\xi_1 = 0.01 \quad \omega_{n1} = 2 \quad (5.144)$$

$$\xi_2 = 0.2 \quad \omega_{n2} = 10 \quad (5.145)$$

$$\xi_3 = 0.01 \quad \omega_{n3} = 12 \quad (5.146)$$

As amplitudes das FRFs (em escala absoluta) em H_{13} são:

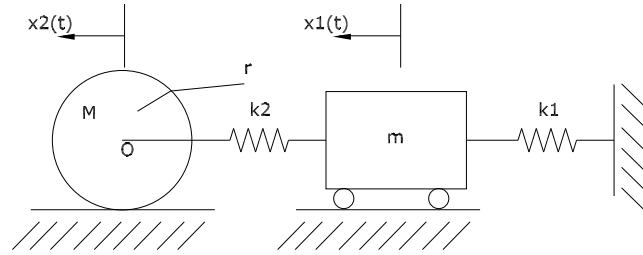


Fig. 5.13: Exemplo de sistema com múltiplos graus de liberdade.

$$H_{13}(\omega_{n1}) = 1 \quad (5.147)$$

$$H_{13}(\omega_{n2}) = 2 \quad (5.148)$$

$$H_{13}(\omega_{n3}) = 3 \quad (5.149)$$

Já em H_{23} são

$$H_{23}(\omega_{n1}) = -3 \quad (5.150)$$

$$H_{23}(\omega_{n2}) = 2 \quad (5.151)$$

$$H_{23}(\omega_{n3}) = 4 \quad (5.152)$$

e por fim em H_{33} são

$$H_{33}(\omega_{n1}) = 5 \quad (5.153)$$

$$H_{33}(\omega_{n2}) = 2 \quad (5.154)$$

$$H_{33}(\omega_{n3}) = -2 \quad (5.155)$$

Com base nestas informações obtenha os modos de vibrar do sistema real.

Referências Bibliográficas

- [1] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, 2.º edition, 2004.
- [2] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman. *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1996.
- [3] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley, 1986.
- [4] D. J. Ewins. *Modal Testing: Theory and Practice*. New York: John Wiley, 1984.
- [5] J. P. Den Hartog. *Mechanical Vibrations*. Dover, 1984.
- [6] D. J. Inman. *Vibration with control, measurement, and stability*. Prentice Hall, 1989.
- [7] D. J. Inman. *Engineering Vibrations*. Prentice Hall, 3rd edition, 2007.
- [8] M. Dias Jr. Análise modal experimental. Notas de aula da disciplina de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da FEM/UNICAMP, 2005.
- [9] N. M. M. Maia. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press (1st Edition), 1997.
- [10] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1986.
- [11] S. Rao. *Vibrações Mecânicas*. Prentice Hall, 4.º edition, 2008.
- [12] M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, 1996.
- [13] I. F. Santos. *Dinâmica de Sistemas Mecânicos*. Makron Books, 2001.

- [14] P. Stoica and R. L. Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Prentice-Hall, 1997.
- [15] W. T. Thomson. *Theory of Vibration with Applications*. Prentice Hall, 3rd edition, 1988.