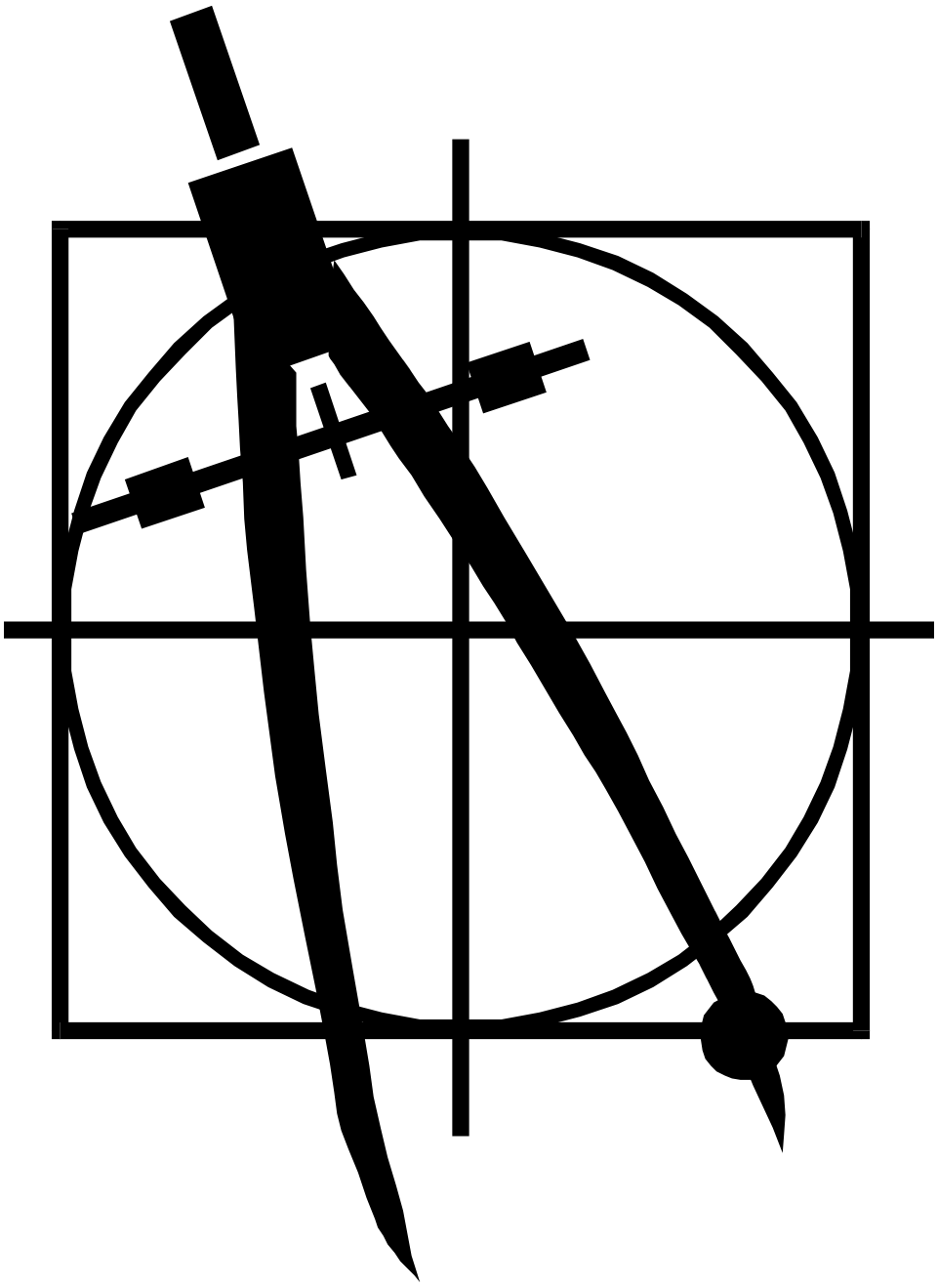
João Batista
<jmnbpt@yahoo.com>

Revisões de Trigonometria



Novembro de 2000

"Não tenho aqui espaço suficiente para dar a explicação completa."
Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês

Índice

PREÂMBULO **5**

ÂNGULOS **6**
1.1. Ângulo trigonométrico 6
1.2. Classificação de ângulos 7
1.3. Arcos de circunferência 8

2. TRIÂNGULOS **9**
1.1. Semelhança de triângulos 9
1.2. Classificação de triângulos 10

3. TRIGONOMETRIA E RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **11**
1.1. Teorema de Pitágoras 11
1.2. Relações trigonométricas de ângulos 12
1.3. Fórmula fundamental da trigonometria 13
1.4. Um problema de trigonometria 14

4. SENO, COSENO E TANGENTE COMO FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL **16**

5. PROPRIEDADES IMPORTANTES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **18**
5.1. Valores das funções trigonométricas para alguns ângulos-chave 18
1.2. Paridade das funções trigonométricas 19
1.3. Sinal das funções trigonométricas 19
1.4. Monotonia das funções trigonométricas 20
1.5. Redução ao primeiro quadrante 22
1.6. Periodicidade das funções trigonométricas 23
1.7. Resumo das propriedades das principais funções trigonométricas 24

6. RELAÇÕES IMPORTANTES DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **27**
1.1. Fórmulas de adição e subtracção 27
1.2. Fórmulas de duplicação 28
1.3. Fórmulas de bissecção 28
1.4. Fórmulas de transformação 28

7. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS **30**
1.1. Arco seno: arcsen(a) 30
1.2. Arco coseno: arccos(a) 31
1.3. Arco tangente: arctg(a) 31
1.4. Arco co-tangente: arccotg(a) 31
1.5. Resumo: domínio e contradomínio das funções trigonométricas inversas 31

8. RESOLUÇÃO DE ALGUMAS EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS **32**
8.1. Resolução de equações de funções trigonométricas do tipo f(x) = y 32
1.2. Exemplo 33
1.3. Funções trigonométricas inversas 33

9. DERIVADAS DE FUNÇÕES CIRCULARES E RESPECTIVAS INVERSAS **34**
9.1. Estudo do $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ 34
9.2. Derivadas de funções trigonométricas 35
1.3. Derivadas de funções trigonométricas inversas 36
1.4. Resumo das derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas 37

10. EXERCÍCIOS RESOLVIDOS **38**

BIBLIOGRAFIA **41**

Preâmbulo

Este texto resume os assuntos respeitantes a trigonometria e geometria do plano leccionada no ensino público secundário, do 9º ao 12º ano. Como tal, não se discutem neste texto funções trigonométricas hiperbólicas – seno hiperbólico, coseno hiperbólico, etc. – que são abordadas em contextos adequados, mais especificamente ao nível de cursos superiores de Matemática e Física. Pressupõe-se que o leitor possui já conhecimentos razoáveis sobre as matérias abordadas. Para um maior aprofundamento, recomenda-se a consulta de livros de texto aprovados e usados nas escolas, tais como os indicados na bibliografia.

Esta é uma segunda versão do texto original, datado de Setembro de 1997. Foram feitas revisões e acréscimos relativamente à primeira versão – essencialmente, esta revisão consistiu numa profunda remodelação do aspecto visual. Foi incluído um capítulo com alguns exercícios resolvidos, no final, dos quais se recomenda uma reflexão adequada à compreensão dos passos envolvidos. É desejável que o leitor tente resolver os exercícios antes de ler a resolução possível apresentada (porque em geral, como em muitas outras coisas na Matemática, existe habitualmente mais que uma resolução). De facto, identificar mais que uma resolução, e comparar as várias possíveis, pode revelar-se útil no desenvolvimento de técnicas de solução de problemas.

Alguns parágrafos são de leitura opcional em virtude da sua utilização pouco frequente na maior parte das aplicações em Trigonometria, e foram introduzidos apenas com o intuito de providenciar uma revisão dos conceitos neles abordados. Assim, os seguintes parágrafos poderão ser ignorados sem grande prejuízo para a revisão de conhecimentos fundamentais:

1.2.b. Classificação de ângulos quanto ao posicionamento (relativamente a outros ângulos)
1.3. Arcos de circunferência
2.1. Semelhança de triângulos

Declaração

Este texto é do domínio público, e pode ser distribuído livremente desde que as seguintes condições sejam respeitadas:

1. O meu nome e elementos de contacto não poderão ser removidos, substituídos, alterados, ou de outro modo deliberada ou acidentalmente omitidos por terceiros ao divulgar, modificar ou corrigir este texto.
2. Eventuais correcções a este texto por parte de terceiros deverão ser devidamente assinaladas pelos respectivos autores. A eles cabe acrescentar numa página nova no texto, que em momento algum poderá ser omitida, o(s) seu(s) nome(s), pelo menos um contacto, a data, e onde foi feita a correcção.
3. Nenhuma compensação, monetária, em géneros, ou qualquer outra, poderá ser obtida a partir da divulgação deste texto, salvo para cobrir as despesas necessárias à cópia e distribuição do texto (e.g. fotocópias, suporte informático – como disquetes –, ou outro meio que sirva para armazenar e permitir a leitura deste texto).

Consciente de que estas condições são razoáveis, espero que sejam respeitadas integralmente. O conhecimento é um património que não tem dono e como tal deve ser divulgado sem restrições.

João Miguel Nobre Batista
Setúbal, Novembro de 2000

Como contactar o autor

Pode contactar o autor deste texto pelo endereço, telefone, endereço de correio electrónico ou página de Internet seguintes:

João Miguel Nobre Batista
Avenida Luísa Tódi, 110, 2ºEsq.
2900-450 Setúbal
Tel. 265 228 384 / 91 427 0853
email: jmnbpt@yahoo.com
Web: www.geocities.com/jmnbpt

1. Ângulos

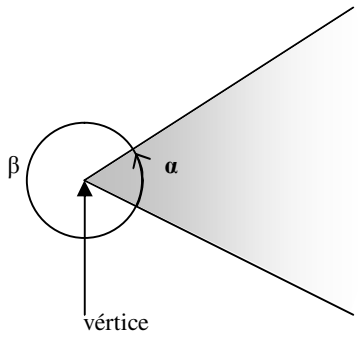


Figura 1. Ângulo α.

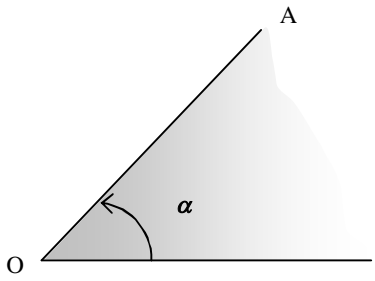


Figura 2. O ângulo α é definido no sentido horário.

Os ângulos de que se fala dizem respeito a ângulos no plano. (Existe os chamados **ângulos sólidos**, definidos no espaço, mas estão fora do âmbito desta Revisão.)

Assim, temos que o ângulo ao centro α é definido pela duas semi-rectas da figura 1. Este é o ângulo mais pequeno definido pelas duas semi-rectas (repare que têm a mesma origem, o vértice no centro da figura). Outro ângulo definido pelas semi-rectas é o ângulo β, que é de abertura visivelmente maior que o ângulo α. Por definição, uma volta completa no plano define o ângulo de 360º, isto é,

$$\alpha + \beta = 360º .$$

No plano, o sentido positivo atribuído aos ângulos é contrário ao dos ponteiros do relógio. Na figura 2 está indicado o sentido de crescimento de um ângulo. O ângulo α aumenta se a abertura aumentar no sentido indicado pela seta. O sentido negativo é definido pela semi-recta *OA* movendo-se no sentido horário.

Em trigonometria, especialmente quando se usam funções trigonométricas, definidas mais adiante, é costume usar outra unidade para os ângulos em vez da indicada: é o **radiano**. É definido de tal forma que um ângulo de π radianos é igual a 180º:

$$\pi \text{ radianos} = 180º,$$

em que π é o número irracional π=3,1415927..., definido pelo quociente entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. É usual não indicar a unidade "radianos" quando nos referimos a um ângulo nestas unidades, quando não há perigo de confusão. Assim teremos, por exemplo, que $\alpha = \pi/4 = 45º$. Para ângulos em unidades de grau de arco, é necessário indicar o símbolo " º " para distinguir da unidade radiano. Há mais outra unidade de ângulo no plano, o **grado**, definida tal que 90º = 100 grados, mas é menos utilizada que qualquer das anteriores.

1.1. Ângulo trigonométrico

Um ângulo pode ter o valor real que se desejar. No entanto, a semi-recta que dá o ângulo (com outra semi-recta, fixa, de referência) completa uma volta após 360º, duas voltas após 720º, etc., ou uma volta no sentido contrário, e nesse caso diz-se que descreveu um ângulo de –360º. O menor ângulo α descrito pela semi-recta é o **ângulo trigonométrico**, e para o ângulo φ descrito pela semi-recta tem-se:

$$\varphi = \alpha + k \cdot 360º, \tag{1.1}$$

em que k é um número inteiro. O ângulo α é o de maior interesse em trigonometria, em particular no que toca às **funções trigonométricas**, abordadas posteriormente. Por exemplo, se $x = \alpha + m \cdot 360º$ e $y = \alpha + n \cdot 360º$ (m e n números inteiros), para igualar os ângulos x e y é necessário que m=0 e n=0 (por exemplo), uma condição trivial.

A razão para a existência desta **periodicidade** para ângulos prende-se com o carácter das funções trigonométricas, o qual será discutido adiante. No entanto, é necessário definir univocamente a aplicação que dá o ângulo definido por duas rectas que se intersectam. Portanto, e para esse efeito, medem-se os ângulos num domínio que vai de 0º a 360º (ou, o que é equivalente, de 0 a 2π radianos), para que nγo haja lugar para dïvidas; no caso de um βngulo no plano, serα de 0Ι a 180º, visto que para ângulos entre 180º e 360º já haverá outro ângulo mais pequeno definido pelas duas rectas dadas – e que será inferior a 180º.

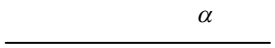


Figura 3.a. Ângulo nulo.
($\alpha = 0º$)

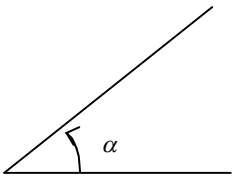


Figura 3.b. Ângulo agudo.
($0º < \alpha < 90º$)

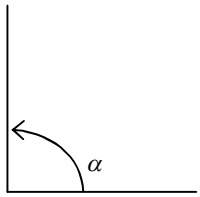


Figura 3.c. Ângulo recto.
($\alpha = 90º$)

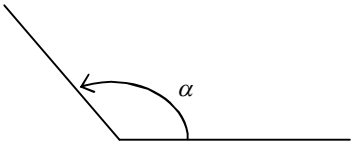


Figura 3.d. Ângulo obtuso.
($90º < \alpha < 180º$)

Figura 3.e. Ângulo raso.
($\alpha = 180º$)

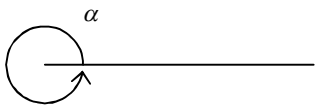


Figura 3.f. Ângulo giro.
($\alpha = 360º$)

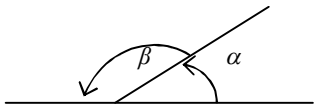


Figura 3.g. Ângulos complementares.
($\alpha + \beta = 180º$)

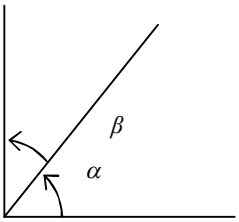


Figura 3.h. Ângulos suplementares.
($\alpha + \beta = 90º$)

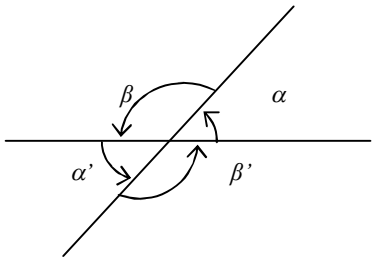


Figura 3.i. Ângulos vertic. opostos.
($\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360º$)

1.2. Classificação de ângulos

1.2.a. quanto à abertura

1) **Ângulo nulo:** $\alpha = 0º$ – figura 3.a.
2) **Ângulo agudo:** $0º < \alpha < 90º$ – figura 3.b.
   Reparar que um ângulo agudo α toma sempre um valor entre 0º e 90º, nunca tomando qualquer destes valores. Exemplos: $\alpha = 30º$, $\alpha = 75{,}4º$, $\alpha = 89{,}99º$ (nunca é igual a 90º ou 0º !).
3) **Ângulo recto:** $\alpha = 90º$ – figura 3.c.
4) **Ângulo obtuso:** $90º < \alpha < 180º$ – figura 3.d.
   Novamente, o ângulo obtuso apenas toma os valores intermédios, nunca os dos extremos que o define.
5) **Ângulo raso:** $\alpha = 180º$ – figura 3.e.
6) **Ângulo giro:** $\alpha = 360º$ – figura 3.f.

Quando se chega a um ângulo 360º, já se descreveu uma volta completa no plano – pelo que a abertura definida por um ângulo giro (de 360º) é a mesma que é definida pelo ângulo raso. Na verdade, e por essa razão, muitos autores identificam o ângulo de 0º (ou 360º, o que é equivalente como acabámos de ver) como **ângulo raso *ou* giro**. Para ângulos superiores a 360º, voltamos novamente ao princípio – daí a definição periódica para o ângulo dada pela expressão (1.1). Assim sendo, um ângulo de 390º será equivalente a outro de 30º:

$$390º = 30º + 1 \cdot 360º .$$

1.2.b. quanto ao posicionamento (relativamente a outros ângulos)

1) **Ângulos complementares:** $\alpha + \beta = 180º$ – figura 3.g.
   Diz-se que α e β são **complementares**, ou que α é complementar de β, e vice-versa. Naturalmente, $0º < \alpha < 180º$, e β também (com $\alpha + \beta = 180º$)!

2) **Ângulos suplementares:** $\alpha + \beta = 90º$ – figura 3.h.
   Diz-se que α e β são **suplementares**, ou que α é suplementar de β, e vice-versa. Naturalmente, $0º < \alpha < 90º$, e β também (com $\alpha + \beta = 90º$)!

3) **Ângulos verticalmente opostos:** $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 360º$ – figura 3.i.
   Os ângulos α e α' dizem-se verticalmente opostos. Temos que $\alpha = \alpha'$, e também $\beta = \beta'$, que também são verticalmente opostos.

1.3. Arcos de circunferência

Um **arco de circunferência** é definido de uma maneira semelhante à que foi feita para um ângulo no plano. Desta feita, define-se um arco sobre uma circunferência.

Sobre uma circunferência, um ponto pode-se mover em dois sentidos. O sentido positivo para os ângulos é, por convenção, anti-horário, e o negativo é o sentido horário. Dessa forma, quando um ponto da circunferência se desloca sobre ela do ponto A para B, diz-se que esse ponto da circunferência descreveu o arco $\overset{\frown}{AB}$.

2. Triângulos

São figuras geométricas definidas numa superfície plana, constituídas por três segmentos de recta cujas extremidades se unem. Sejam então três segmentos de recta, de comprimentos x, y e z. Quando unidas as extremidades, definem ângulos internos α, β e γ. Seja α o ângulo mais pequeno definido pelos segmentos de comprimentos x e y. Abusivamente, designarei de agora em diante x e y os segmentos de recta de comprimento dado pelos valores de x e y, respectivamente.

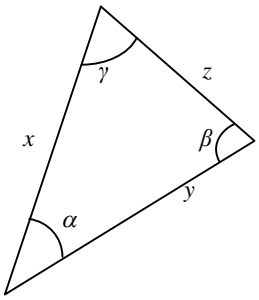


Figura 4. Um triângulo.

Propriedade 1: *Todos* os triângulos, quaisquer que sejam, que a soma dos ângulos internos seja 180º, isto é,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ .$$

Isto verifica-se *sempre* para todos os triângulos constituídos sobre uma superfície plana[(1)].

Propriedade 2: A soma do comprimento de dois lados quaisquer é sempre maior que o comprimento do terceiro lado.

Por exemplo: se o Gabriel (no vértice de ângulo γ) quiser ir à casa da Alexandra (vértice de ângulo α), percorrerá um caminho menor, de comprimento x, indo directamente para lá do que passando primeiro pela casa da Beatriz (ângulo β) e indo depois até à casa da Alexandra (num percurso total dado por $y + z$).

2.1. Semelhança de triângulos

Dois triângulos dizem-se semelhantes quando são homotéticos, isto é, quando existe uma **homotetia** entre os dois triângulos – os lados dos triângulos são proporcionais entre si. Das seguintes relações de semelhança, conclui-se que os dois triângulos a considerar são homotéticos:

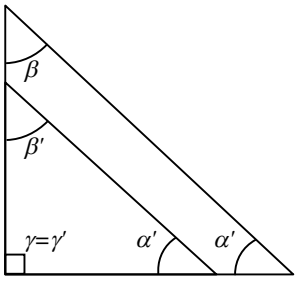


Figura 5. Semelhança de triângulos.

a) **três lados proporcionais [LLL], ou**
três ângulos iguais entre si [AAA];
Este caso é trivial, e resulta da definição de homotetia que foi agora apresentada. O efeito produzido por [LLL] ou por [AAA] é o mesmo, e equivalem-se entre si: dois triângulos com ângulos iguais entre si têm lados correspondentes com comprimento de igual proporção, e vice-versa – ver figura 5.

b) **dois lados proporcionais e um ângulo igual [LLA];**
Aqui, dois lados dos triângulos são proporcionais, e um dos ângulos de um triângulo tem igual abertura ao do ângulo correspondente no outro triângulo: $\alpha = \alpha'$ e $x'/x = y'/y$. Consequências: z'/z obedece à mesma proporção entre os comprimentos dos lados, e os ângulos correspondentes nos dois triângulos são iguais entre si.

c) **dois ângulos iguais e um lado proporcional [LAA];**
Dois ângulos quaisquer são iguais. Tem-se $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, e um valor para x'/x. Então resulta que o terceiro ângulo é igual para os dois triângulos, e que os lados são proporcionais.

Naturalmente, se nenhuma das três situações anteriores se verificar, o par de triângulos considerados não são semelhantes.

Estas classificações não devem ser confundidas com as de triângulo equilátero, isósceles e escaleno, definidos a seguir. Enquanto que aquelas dizem respeito a relações entre dois triângulos, as últimas referem-se à caracterização de um único triângulo.

---

(1) Para demonstrar esta propriedade dos triângulos, é necessário recorrer aos axiomas de Euclides enunciados no seu tratado de geometria, os "Elementos". Em particular, é necessário o 5º axioma, que afirma que "*duas rectas do mesmo lado de uma terceira recta, e que lhe sejam perpendiculares, nunca se cruzam*". Os ângulos assim formados, do "lado de dentro" definido pela duas rectas, fazem o ângulo 90º + 90º = 180º. A cruzarem-se, a soma dos dois ângulos seria menor que 180º, e a "quantidade que falta" seria o terceiro ângulo, indo formar um triângulo. No caso das rectas paralelas, o terceiro ângulo não existe, pois as rectas não se intersectam. A partir daqui, a propriedade pode-se tornar mais ou menos intuitiva.

2.2. Classificação de triângulos

2.2.a. quanto aos ângulos internos

1) **Triângulo acutângulo**
Todos os ângulos internos são agudos, isto é, têm um valor inferior a 90º (mas nunca igual).

2) **Triângulo rectângulo**
Um dos ângulos internos é recto; no caso da figura 6 é o ângulo α, e portanto temos $\alpha = 90º$. Os restante ângulos internos são necessariamente agudos, pois a sua soma tem de ser *igual* a 90º, visto a soma dos ângulos internos de um triângulo ter de ser 180º. Logo, esses dois ângulos são *suplementares*.

3) **Triângulo obtusângulo**
Um dos ângulos internos é obtuso, isto é, tem entre 90º e 180º; é o caso do ângulo $90º < \alpha < 180º$. A soma dos restantes ângulos internos é *inferior* a 90º, visto ser condição obrigatória que a soma dos três ângulos 180º. Claro, os restantes ângulos internos são agudos, pois não ultrapassam 90º: a sua soma é até inferior a 90º.

2.2.b. quanto ao número de lados/ângulos iguais

1) **Triângulo equilátero**
Todos os lados são iguais. Todos os ângulos internos são iguais: $\alpha = \beta = \gamma$. Como a soma dos ângulos internos é sempre 180º, forçosamente $\alpha = \beta = \gamma = 60º$. É um triângulo agudo, pois todos os ângulos são menores que 90º. Como o nome indica, é "equilátero" – todos os lados medem o mesmo: $x = y = z$.

2) **Triângulo isósceles**
Temos dois lados iguais (y e z, por exemplo), e dois ângulos iguais. Caso $y = z$, temos $\alpha = \beta \neq \gamma$; ou seja, são iguais os ângulos não comuns aos lados iguais (α e β não são comuns aos lados x e y, que são iguais).

3) **Triângulo escaleno**
Todos os lados e ângulos respectivos são diferentes.

Não deverá confundir estas classificações com as de semelhança de triângulos (secção 2.1), que dizem respeito a relações entre *dois* triângulos!

3. Trigonometria e relações trigonométricas

Aquando da sua criação pelos matemáticos gregos, a trigonometria dizia respeito exclusivamente à medição de triângulos, e tal como as funções e relações trigonométricas apresentadas a seguir, é aplicada exclusivamente ao estudo de *triângulos rectângulos*. Porém, as funções trigonométricas resultantes, e apresentadas mais adiante, encontram aplicações mais vastas e de maior riqueza noutras áreas como a Física (por exemplo, no estudo de fenómenos periódicos) ou a Engenharia.

Limitarmo-nos-emos à trigonometria no plano. Assuntos mais elaborados (alguns dos quais leccionados em cursos universitários), como desenvolvimentos em série de Taylor de funções trigonométricas, números complexos e funções trigonométricas hiperbólicas não serão abordados neste texto. Ainda no intuito de manter a generalidade deste texto, que se pretende uma simples revisão sobre trigonometria leccionada no ensino secundário, não falarei também sobre trigonometria esférica.

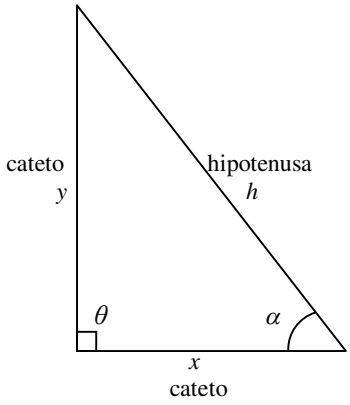


Figura 6. Um triângulo rectângulo.

Em trigonometria, os lados dos triângulos rectângulos assumem nomes particulares, apresentados na figura ao lado. O lado mais comprido, oposto ao ângulo recto θ, chama-se **hipotenusa**; os lados restantes, ligados ao ângulo recto, chamam-se **catetos**.

3.1. Teorema de Pitágoras

O geómetra grego Pitágoras (570–501 a.C.) formulou o seguinte teorema, que tem hoje o seu nome, e que relaciona a medida dos diferentes lados de um triângulo rectângulo: *a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*. Ou seja, se x e y forem o comprimento dos dois catetos e h o comprimento da hipotenusa, ter-se-á:

$$x^2 + y^2 = h^2 \,.$$

A demonstração deste teorema pode ser efectuada através do cálculo de áreas de triângulos rectângulos e de quadrados — ver figura 7. A área de um quadrado com comprimento do lado de valor l é dada por l^2. Para um rectângulo de comprimento de base a e de altura b a área é dada pelo produto destes dois comprimentos, isto é, $a \times b$. Se dividirmos esse rectângulo com uma diagonal, teremos dois triângulos rectângulos, com catetos de comprimento a e b; a área de cada um é, então, metade da área do triângulo — $ab/2$.

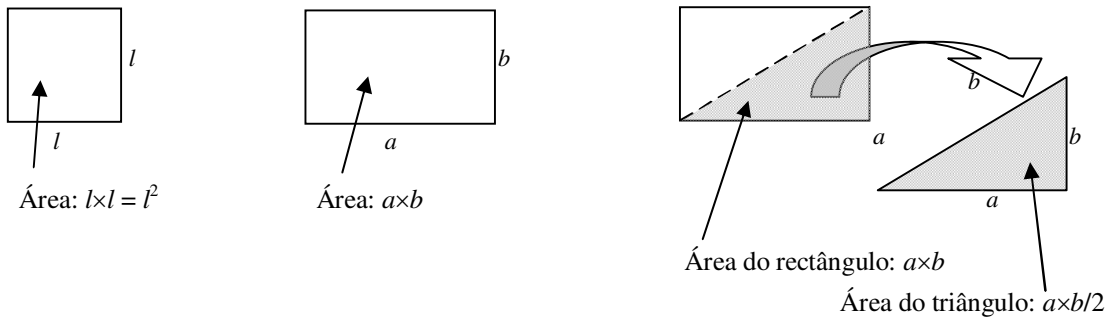


Figura 7. Áreas do quadrado com comprimento l do lado, e do rectângulo com comprimentos a e b dos lados. A partir da área do rectângulo é fácil ver que a área de um triângulo rectângulo com comprimento da base a e altura b (direita) é metade da área do rectângulo com os mesmos comprimento dos lados; ou seja, a área desse triângulo é $a \times b/2$.

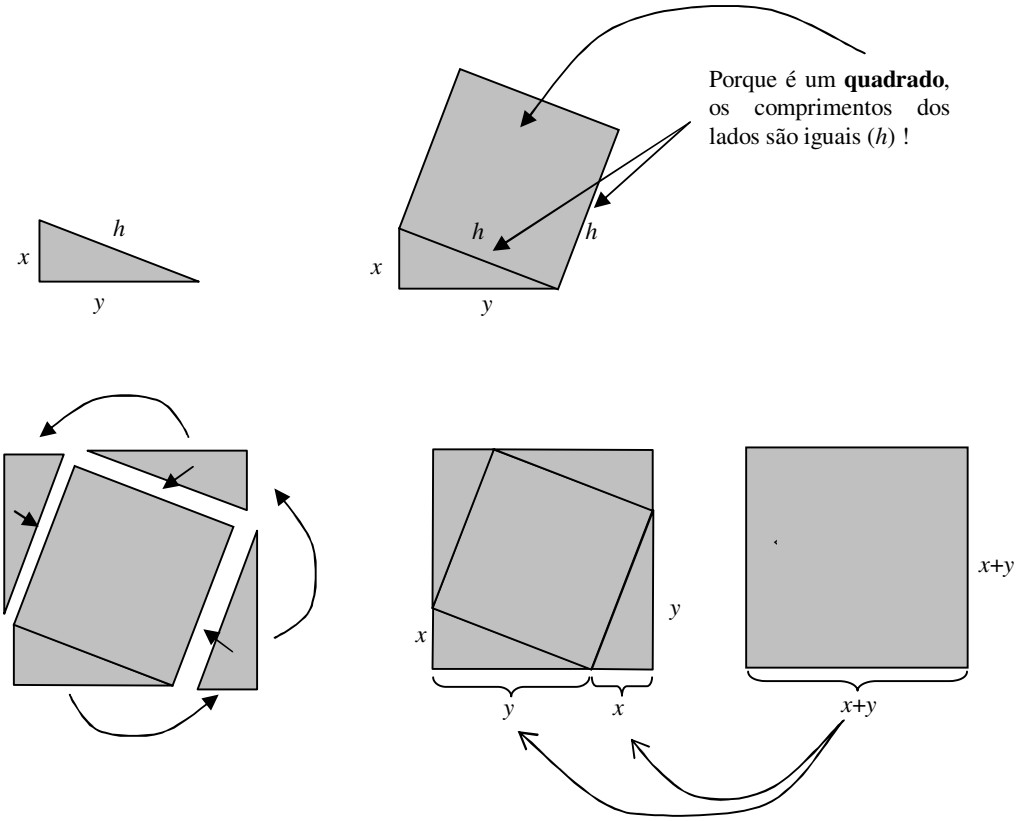


Figura 8. O teorema de Pitágoras pode ser demonstrado através de relações de áreas de triângulos e de quadrados. No fim, a área ocupada pelo quadrado mais pequeno e pelos quatro triângulos rectângulos é igual à área do quadrado maior (duas últimas figuras, em baixo à direita). A equação do teorema é obtida da relação das áreas ocupadas pelas figuras — ver texto.

Observe agora a figura 8. O triângulo rectângulo tem lados de comprimento x e y. Pelo que se disse no parágrafo anterior, a área deste triângulo é $xy/2$. O quadrado que está junto ao triângulo foi escolhido de modo a ter comprimento do lado precisamente igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja, h. A área do quadrado é, naturalmente, h^2. Ora bem, o triângulo pode ser "copiado" e "colado" aos restantes lados do quadrado de modo que se juntem as hipotenusas dos triângulos copiados aos lados do quadrado. Isto produz uma nova figura, um quadrado, no qual se inscrevem o quadrado e os triângulos — o "original" e as "cópias". Este novo quadrado tem lado com comprimento $x+y$ — canto inferior direito da figura 8.

Ora, a área do novo quadrado é $(x+y)^2$, ou seja, $x^2 + 2xy + y^2$. Por outro lado, a área deste novo quadrado é igual ao espaço ocupado pelas figuras anteriores – o quadrado e os quatro triângulos. Estas cinco figuras têm áreas dadas por h^2 e $xy/2$. Como temos *quatro* triângulos, a área que todos eles ocupam é $4\times xy/2 = 2xy$. Então, as cinco figuras dentro do quadrado maior ocupam uma área que totaliza h2 + 2xy. Mas esta área é igual à do quadrado maior, como se vê na figura 8. Portanto, temos

$$x^2 + 2xy + y^2 = h^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = h^2 ,$$

que é justamente a anterior fórmula para o teorema de Pitágoras.

3.2. Relações trigonométricas de ângulos

Na esmagadora maioria das aplicações trigonométricas relacionam-se os comprimentos dos lados de um triângulo recorrendo a determinadas relações dependentes de ângulos internos. Assim, apresentam-se de seguida algumas relações trigonométricas com esse fim. No capítulo 5 discutir-se-á o intervalo de aplicabilidade (já sob o ponto de vista de funções reais de variável real) de algumas das seguintes relações trigonométricas.

a) Seno de α

É o quociente do comprimento do cateto *oposto* ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h} \ .$$

O seno de α pode aparecer com uma das seguintes representações: senα, sinα, sen(α), sin(α).

b) Coseno de α

É o quociente do comprimento do cateto *adjacente* ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h} \ .$$

Em geral, o coseno de α aparece com uma das duas representações: cosα, cos(α).

c) Tangente de α

É o quociente dos comprimentos do cateto *oposto* pelo cateto *adjacente*, ou seja,

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{y/h}{x/h} = \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{x} = \frac{y}{x} \ .$$

É usual representar a tangente de a de uma das seguintes maneiras: tanα, tan(α), tgα, tg(α).

d) Co-tangente de α

É definida como o recíproco da tangente de α:

$$\text{cotan}(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{x}{y} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} \ .$$

A co-tangente de a pode aparecer representada de uma das maneiras seguintes: cotan(α), cotg(α), cotanα, cotgα.

Pelas definições em c) e d), e segundo as definições em a) e b), podemos ver ainda que:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \text{e} \quad \text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} \ .$$

e) Secante e co-secante de α

Definem-se ainda as funções **secante** de α e **co-secante** de α como, respectivamente:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{h}{x} \quad \text{e} \quad \text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{h}{y} \ .$$

A secante pode ser representada por: sec(α), secα. A co-secante pode ser representada por: cosec(α), cosecα, csc(α), cscα.

3.3. Fórmula fundamental da trigonometria

A fórmula fundamental da trigonometria surge como um caso particular do teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = h^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1 \ .$$

Pela definição de seno e de coseno de um ângulo, dadas acima por a) e b), temos que:

$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \ . \qquad (3.1)$$

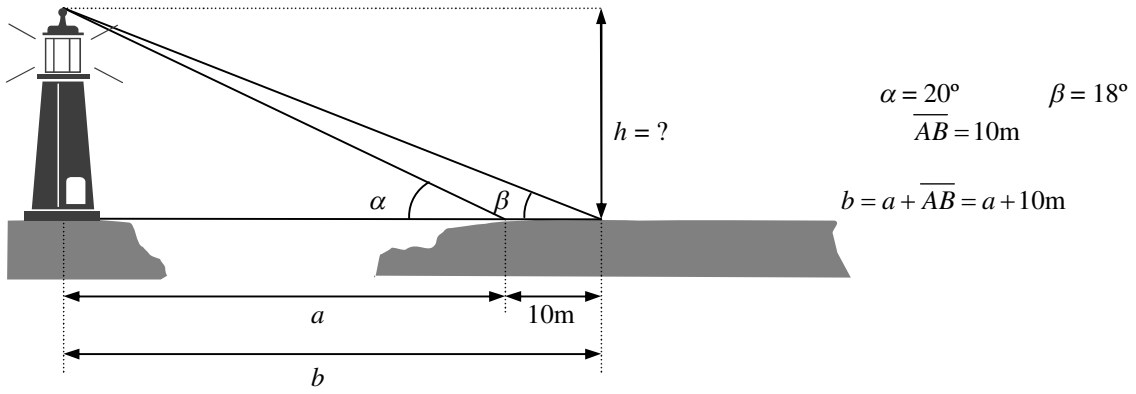


Figura 9. Um problema muito concreto, envolvendo a trigonometria. Qual é a altura *h* da torre, conhecendo-se apenas a distância entre os pontos *A* e *B*, e os ângulos α e β?

A equação (3.1) é a **fórmula fundamental da trigonometria**. Nela, $\text{sen}^2(\alpha) = \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\alpha)$, e o mesmo se sucede para $\cos^2(\alpha)$. Da fórmula fundamental da trigonometria é ainda possível extrair outras fórmulas importantes; por exemplo, dividindo-a por $\cos^2(\alpha)$, vem:

$$\tan^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)};$$

ou, dividindo por $\text{sen}^2(\alpha)$:

$$\text{cotan}^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2(\alpha)}.$$

3.4. Um problema de trigonometria

Por vezes não nos é possível (por quaisquer razões) encontrar os valores dos comprimentos dos lados e dos ângulos a partir dos dados disponíveis – chama-se a isto **resolver um triângulo**. Mas se conhecermos, por exemplo, um ângulo (que não seja o ângulo recto, porque obviamente já é conhecido) e um lado de um triângulo rectângulo, podemos encontrar os valores dos ângulos e lados que faltam. Para isso necessitamos de dispor de uma tabela trigonométrica ou de uma calculadora, para podermos obter os valores que tomam as funções trigonométricas para diferentes ângulos.

Suponhamos, por exemplo, que queríamos medir a altura *h* de uma torre de farol que nos é inacessível, ou para a qual era incómodo e difícil efectuar directamente uma medição sobre a torre com fita métrica. Como fazer?

Em primeiro lugar, mediu-se, no ponto *A*, o ângulo a que a extremidade mais alta da torre faz com a linha de horizonte, e mediu-se $\alpha = 20º$. Depois, afastamo-nos uma distância apropriada – 10 metros, no caso presente[(2)]. Faz-se uma nova medição do ângulo que o cimo da torre faz com a linha de horizonte, e obteve-se o valor $\beta = 18º$.

Consultemos uma tabela, ou usemos uma calculadora científica para obter os valores das funções trigonométricas para os ângulos mencionados. Na tabela seguinte estão transcritos os valores para os dois ângulos relevantes.

θ	sen(θ)	cos(θ)	tan(θ)
18º	0,309	0,951	0,325
20º	0,342	0,940	0,367

Que funções trigonométricas utilizar? Pretende-se obter a altura da torre, *h*. Não sabemos a distância no solo até à torre, mas possuímos um dado parecido: a distância entre dois pontos de observação. O problema

[(2)] É importante admitir aqui que os dois pontos, A e B, estão ao mesmo nível. De outro modo, seria necessário introduzir uma correcção para compensar a diferença de alturas – mais uma vez usando relações trigonométricas. Não abordarei o problema aqui; na verdade, apela-se ao leitor para que tente resolver este outro problema após compreender bem o formalismo por detrás do primeiro problema. De facto, teríamos de usar mais triângulos (e obter relações entre eles) para se levar em linha de conta tal desnível.

sugere-nos então que usemos a função tangente para calcular a altura da torre – sabemos uma distância sobre um cateto, e queremos saber o comprimento de outro cateto. Assim, teremos:

$$\tan(\beta) = \frac{h}{b} \quad \text{e} \quad \tan(\alpha) = \frac{h}{a} \ .$$

Talvez possamos usar a tangente, visto h ser comum a $\tan(\alpha)$ e a $\tan(\beta)$, como se vê pelas duas fórmulas acima. Assim, ficamos com:

$$h = b \cdot \tan(\beta) = a \cdot \tan(\alpha) \ .$$

E como $b = a + 10$,

$$(a+10) \cdot \tan(\beta) = a \cdot \tan(\alpha) \Leftrightarrow 10 \cdot \tan(\beta) = a \cdot \left[\tan(\alpha) - \tan(\beta)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{10 \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)} = \frac{10 \cdot \tan(18^\circ)}{\tan(20^\circ) - \tan(18^\circ)} = 83{,}20 \text{ metros}$$

Por fim, temos que a altura da torre é:

$$h = a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot \tan(20^\circ) = \underline{30{,}3 \text{ metros}} \ .$$

4. Seno, coseno e tangente como funções reais de variável real[3]

Anteriormente definimos as funções trigonométricas atendendo a que os seus argumentos, o ângulo α, era inferior a 90º e superior a 0º – pois caso contrário não teríamos um triângulo rectângulo. Se $\alpha = 0º$, teríamos um segmento de recta, e se $\alpha = 90º$, teríamos duas semi-rectas com os pontos de origem ligados por um segmento de recta, com o qual são perpendiculares. Temos, pois, que as funções trigonométricas, tal como anteriormente definidas para o triângulo rectângulo, têm o domínio restringido a $0º < \alpha < 90º$, ou se usarmos radianos, $0 < \alpha < 2\pi$.

A extensão do domínios das funções trigonométricas a toda a recta real faz-se recorrendo ao **círculo trigonométrico**. Ele é definido por uma circunferência de raio unitário (isto é, igual a um) centrada na origem dos eixos coordenados.

O triângulo $\Delta[OPx]$ é rectângulo no ângulo com o eixo das abcissas – o eixo dos XX – como se pode ver pela figura. Visto a circunferência ter raio $r = 1$, todos os pontos distam da origem da mesma distância, r. Logo, o segmento $[OP]$ tem comprimento $\overline{OP} = 1$.

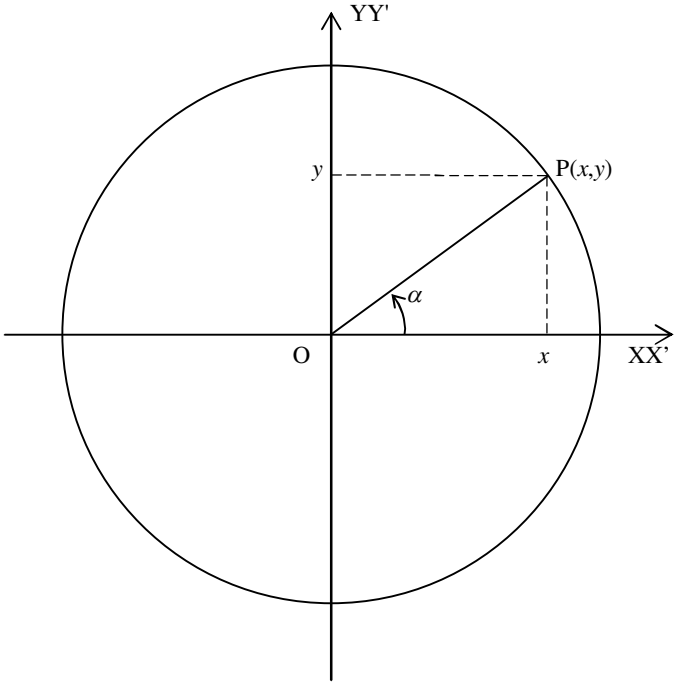


Figura 10. O círculo trigonométrico e um ponto P sobre ele.

Assim sendo, o quociente y/r representa o seno de α, sendo r a hipotenusa. Da mesma forma, x/r representa o coseno do ângulo α.

Desta forma, posso definir o seno e o coseno do ângulo α para todos os valores de α, e não somente para aqueles entre 0º (ou 0 radianos) e 90º (ou $\pi/2$ radianos), como anteriormente. Temos então que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \ .$$

Como no círculo trigonométrico o raio é $r = 1$, temos então que as coordenadas do ponto $P(x,y)$ são: $P(x,y) = (x,y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Escrevo desta forma as coordenadas do ponto $P(x,y)$ pois situa-se numa circunferência de raio $r = 1$. Se fosse $r \neq 1$, teria de dividir as coordenadas por r, sendo $r^2 = x^2 + y^2$, pelo teorema de Pitágoras[4].

Prestando atenção à figura, veremos que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

De igual forma, para o ângulo $\alpha = \pi$ radianos (meia-volta no círculo), temos $\operatorname{sen}(\pi) = 0$ e $\cos(\pi) = -1$, obtemos o ponto $P(x,y) = (0,-1)$. Quando temos $\alpha = 2\pi$ radianos (uma volta completa começando em $\alpha = 0$, isto é, sobre o eixo dos XX), voltamos a ter o ponto $(0,1)$ – logo $\operatorname{sen}(2\pi) = 0$ e $\cos(2\pi) = 1$. Prosseguindo para outros valores, verificamos que as funηões se repetem cada vez que adicionamos 2π radianos ao argumento (ângulo). Da mesma forma que temos valores possvveis para o seno e o coseno quando $\alpha > 0$, também é possível atribuir valores às funções trigonométricas quando $\alpha < 0$. Nesses casos, temos ângulos descritos no sentido dos ponteiros do relógio. As duas funções ficam então definidas para todos os valores da recta real.

Como se passarão as coisas com as funções tangente e co-tangente? Recordemos a definição de tangente de α:

---

[3] Daqui em diante, e sempre que não hajam riscos de interpretação duvidosa, escrever-se-á $\operatorname{sen}(\alpha)$ como sen α, e $\cos(\alpha)$ como cos α.

[4] Na verdade, as coordenadas são geralmente divididas por r. Porém, e no caso do círculo trigonométrico, para o qual $r = 1$, portanto não é necessário introduzir a divisão por r nas fórmulas para as coordenadas.

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} \ .$$

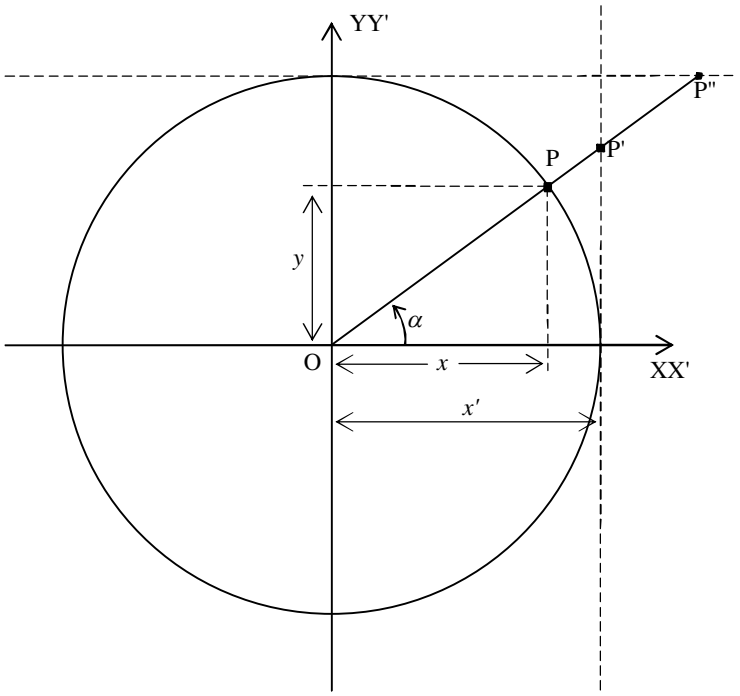


Figura 9. Novamente o círculo trigonométrico (de raio unitário). A ordenada ("altura") do ponto P' representa a tangente de α, e a abcissa do ponto P'' representa a co-tangente de α.

Prestemos agora atenção aos triângulos $\Delta[OPx]$ e $\Delta[OP'x']$. São triângulos semelhantes, com três ângulos iguais: os ângulos nos pontos *P'* e *P* são iguais pois *OP* e *OP'* são **colineares** (têm a mesma direcção), bem como *Px* e *P'x'*; logo o ângulo $<OPx$ é igual ao ângulo $<OP'x'$. Assim, os lados dos triângulos são proporcionais um a um, bastando multiplicar em cima e em baixo do sinal de fracção pela constante de proporcionalidade respeitante ao comprimento dos lados dos triângulos. Portanto – e recordando que estamos a usar uma circunferência de raio $r = 1$ – posso definir a tangente do ângulo α da forma anterior, sendo x e y as coordenadas do ponto $P(x,y) = (x,y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

Pode-se usar o seguinte como mnemónica. "Marca-se" $\cos\alpha$ no eixo dos XX – o que corresponde à coordenada x do ponto P sobre a circunferência – ou seja, corresponde à sua "distância" na horizontal, a partir do centro do sistema de eixos. O $\operatorname{sen}\alpha$ é "marcado" no eixo dos YY, e corresponde à coordenada y do ponto P, ou "altura" do ponto P[(5)].

A tangente de α é assinalada pela "altitude" do ponto *P'*, ou seja, a sua ordenada. Ora, o ponto *P'* tem coordenadas $P'(x,y) = (1, \tan\alpha)$. Repare-se que os triângulos são semelhantes, e para mais têm lados proporcionais. Portanto, o quociente de comprimentos mantém-se – é igual o quociente de comprimentos dos lados para os dois triângulos. No triângulo contido na circunferência, temos $\tan\alpha = y / x$, e dentro da circunferência temos $-1 < x < 1$ porque os pontos *P* sobre a circunferência de raio $r = 1$ nunca vão além de $x = 1$ ou de $x = -1$. Ora, o ponto *P'* no segundo triângulo tem abcissa $x = 1$ pois situa-se sobre a vertical que passa por $x = 1$ no eixo dos XX. Sendo $x = 1$, temos então $y = x \cdot \tan\alpha$. Para ângulos "grandes", ou melhor, tais que $y > x$, temos $\tan\alpha > 1$. Como $x = 1$ em *P'*, temos que[(6)]:

$$\tan\alpha > 1 \Rightarrow x \cdot \tan\alpha > 1 \Rightarrow y = x \cdot \tan\alpha > 1 \, .$$

Nesse caso, a "altura" do ponto *P'* dá-nos uma medida de $\tan\alpha$.

O mesmo se passa para $\operatorname{cotg}\alpha$. O seu valor vai corresponder ao afastamento, à distância do ponto *P''*, situado sobre o traço horizontal tangente à circunferência no seu ponto mais "alto". Quanto mais "alto" estiver o ponto *P'*, maior será o ângulo α, e mais a semi-recta definida pelo ângulo com o eixo XX se aproxima do eixo YY, logo $\operatorname{cotg}\alpha$ diminui – bem como a abcissa do ponto *P''*.

Estas duas funções, no entanto, não podem ser definidas para todos os valores reais. De facto, quando $\alpha = \pi/2$, a "altura" de *P'* é infinita (ou seja, $\tan\alpha = \infty$), e nesse caso a função não fica bem definida nesse ponto[(7)]. O mesmo se passa para $3\pi/2$, $5\pi/2$, e assim por diante – ou seja, qualquer ponto na forma $\alpha = \pi/2 + k\pi$, sendo k um número inteiro. Pelas mesmas razões $\operatorname{cotg}\alpha$ fica indefinida nos pontos $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$ – isto é, qualquer ponto na forma $\alpha = k\pi$. Portanto, o domvnio destas funηões deve necessariamente excluir todos estes pontos em que as funções não ficam bem definidas; os restantes pontos, obviamente, são permitidos.

(5) O raio é $r = 1$. Se assim não fosse, teríamos de recorrer à definição: sen $\alpha = y / r$, e cos $\alpha = x / r$.
(6) Temos $x \cdot \tan\alpha > 1$, e não $x \cdot \tan\alpha > x$, porque x=1 no ponto *P'*.
(7) Além disso os limites da função tangente à esquerda e à direita de $\pi/2$ são diferentes: antes de $\pi/2$ é +8 e depois é –8, pelo que existe uma descontinuidade que torna a função indefinida nesse ponto.

5. Propriedades importantes das funções trigonométricas

Neste capítulo serão apresentadas algumas importantes propriedades das funções trigonométricas seno, coseno, tangente e co-tangente, nomeadamente: paridade, sinal, monotonia, periodicidade, e o resultado de redução ao primeiro quadrante. Já de seguida, serão dados também os valores dessas funções trigonométricas para alguns ângulos do primeiro quadrante: 0º, 30º, 45º, 60º, e 90º.

5.1. Valores das funções trigonométricas para alguns ângulos-chave

Existem alguns ângulos do primeiro quadrante para os quais é possível determinar facilmente os valores tomados pelas funções trigonométricas. Para ângulos de outros quadrantes, torna-se necessário efectuar em primeiro lugar uma **redução ao primeiro quadrante**. Finalmente, os restantes ângulos cuja redução ao primeiro quadrante (discutida mais adiante) não devolve um destes ângulos, e também para ângulos do primeiro quadrante que não sejam os descritos, é necessário recorrer a tabelas trigonométricas ou uma calculadora científica ou computador.

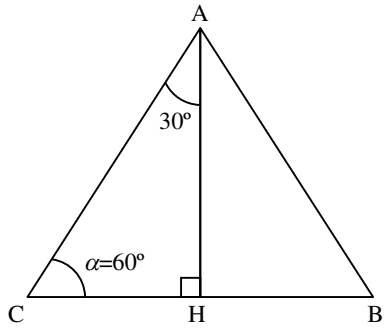


Figura 12. O triângulo Δ[ABC] é isósceles; os triângulos Δ[CHA] e Δ[BHA] sγo equiláteros.

Para os ângulos 0 e π/2 radianos (ou, 0º e 90º, respectivamente), de imediato se encontram os valores das funções trigonométricas. Para $\alpha = 0$, a semi-recta que define o ângulo com o semi-eixo positivo dos XX coincide com este. Logo, sendo $r = 1$ e $\cos\alpha = x / r = x$, vem que $\cos\alpha = 1$ e $\text{sen}\,\alpha = 0$. Daqui decorre que $\tan\alpha = \text{sen}\alpha / \cos\alpha = 0$, e $\text{cotg}\alpha = 1 / \tan\alpha = +\infty$. Para $\alpha = \pi/2$ radianos, temos que a semi-recta coincide com o semi-eixo positivo dos YY, fazendo com que $\text{sen}\,\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0$. Daqui vem que $\tan\alpha = +\infty$ e $\text{cotg}\alpha = 0$.

Comecemos por considerar um triângulo equilátero como o da figura 12, cujos lados têm comprimento $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 1$. O ponto H é ponto médio do segmento $[BC]$, logo $\overline{BH} = \overline{CH} = ½$. E como $\cos\alpha = \overline{CH} / \overline{AC}$ e $\overline{AC} = 1$, vem: $\cos\alpha = \cos(60º) = \overline{CH} = ½$. Da aplicação do teorema de Pitágoras resulta que:

$$\text{sen}^2(60º) + \cos^2(60º) = 1 \Rightarrow \text{sen}(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pela definição de tangente de α, vem: $\tan(60º) = \sqrt{3}$. Observando a figura, é ainda possível concluir que:

$$\text{sen}(30º) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \cos(60º) = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos(30º) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \text{sen}(60º) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ,$$

$$\tan(30º) = \frac{\text{sen}(30º)}{\cos(30º)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Consideremos agora um triângulo (rectângulo) isósceles – $\alpha = 45º$ como o da figura 13. Como a ângulos iguais se opõem lados iguais, $\overline{MN} = \overline{NP}$. Seja $\overline{MP} = 1$. Então,

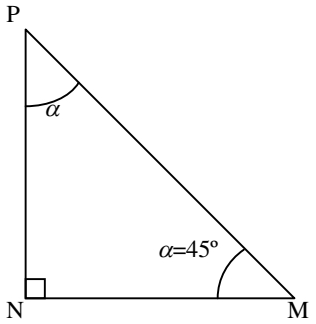


Figura 13. Um triângulo rectângulo isósceles.

$$\text{sen}(45º) = \frac{\overline{NP}}{\overline{MP}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{MP}} = \cos(45º).$$

Sabendo então que sen(45º) = cos(45º), e aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\text{sen}^2(45º) + \cos^2(45º) = 2 \cdot \text{sen}^2(45º) = 1 \Rightarrow \text{sen}(45º) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45º)$$

Pela definição,

$$\tan(45^\circ) = \frac{\text{sen}(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = 1 .$$

Em resumo, temos o seguinte quadro:

	Valores do argumento α (radianos)				
	0	**π/6**	**π/4**	**π/3**	**π/2**
senα	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tanα	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
cotgα	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0
	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
	Valores do argumento α (graus)				

5.2. Paridade das funções trigonométricas

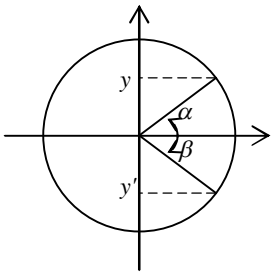


Figura 14. Acerca da paridade das funções trigonométricas.

Das quatro funções trigonométricas até agora discutidas (seno, coseno, tangente e co-tangente), todas têm uma paridade bem definida.

a) **O seno é ímpar**
Seja $\alpha = -\beta$, isto é, $\alpha = |\beta|$, e $\beta = -|\alpha| = -\alpha$. Ora, $\text{sen}\alpha = y/r$. Projectando o ângulo β sobre o eixo dos YY, então vem que $\text{sen}\beta = y'/r < 0$, pois y' < 0. Vê-se facilmente que: $\text{sen}\beta = y'/r < 0$, e por conseguinte $\text{sen}\alpha = y/r = -y'/r = -\text{sen}\beta = -\text{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$. Logo, a função seno é ímpar.

b) **O coseno é par**
Seja $\alpha = -\beta$. Ora, $\cos\alpha = x/r$, e $\cos\beta = x'/r$. Na projecção para a figura acima, facilmente se verá que $x = x'$. Logo, $\cos\alpha = x/r = x'/r = \cos\beta = = \cos(-\alpha)$. Portanto, a função coseno é par.

c) **A tangente é ímpar**
Seja $\alpha = -\beta$. Ora, $\tan\alpha = y/x$, e $\tan\beta = y'/x'$, pela figura anterior – aliás, basta dividir seno por coseno. Analogamente, prova-se que $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ – ou seja, a tangente é ímpar.

d) **A co-tangente é ímpar**
A demonstração é análoga a c). Sendo $\alpha = -\beta$, $y = -y'$ e $x = x'$, como se pode concluir do gráfico acima, vem que $\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\alpha$: a co-tangente é ímpar.

5.3. Sinal das funções trigonométricas

5.3.a. Seno

Esta função é ímpar, e como tal $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$. Logo, para um ângulo α situado no 1ºQ, teremos que o seno do ângulo $-\alpha$, situado no 4ºQ, tem um valor simétrico. Como no 1ºQ $\text{sen}\alpha > 0$, então para $\alpha \in$ 4ºQ, temos $\text{sen}\alpha < 0$.

Um ponto P(x,y) do 2ºQ tem coordenadas tais que $x<0$ (pois encontra-se na região onde x toma valores negativos – o valor x=0 corresponde ao centro do sistema de eixos, ou melhor, a todos os pontos com abcissa nula (x=0), situados no eixo dos YY), e $y>0$. Por definição $\text{sen}\alpha = y/r$ – relembrar que o seno se "marca" no eixo dos YY, correspondente à "altura" do ponto P(x,y) a considerar, caso r=1. Ora $r>0$, pois trata-se de uma distância, sendo sempre um número não negativo. Como $r>0$ sempre, e nessa região particular (2ºQ), temos que $y>0$; então $\text{sen}\alpha>0$ no segundo quadrante.

O que se sucede no 3ºQ? Seja α um ângulo positivo pertencente ao 2ºQ (ou seja, tem-se $\pi/2 < \alpha < \pi$); o ângulo $\beta = -\alpha$ pertence ao 3ºQ. De facto, e como a função seno tem período 2π (isto é, repetem-se os valore e a monotonia da função em intervalos de largura 2π), o ângulo $\beta+2\pi$ ainda se situa na mesma regiγo do plano (3ºQ), e $\beta = -\alpha \Leftrightarrow \beta + 2\pi = 2\pi - \alpha$. Resolva-se então a desigualdade que resulta da localização de α no 2ºQ:

$$\pi/2 < \alpha < \pi \Leftrightarrow -\pi/2 > -\alpha > -\pi \Leftrightarrow 2\pi - \pi/2 > 2\pi - \alpha > 2\pi - \pi \Leftrightarrow 3\pi/2 > 2\pi - \alpha > \pi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\pi/2 > 2\pi + \beta > \pi .$$

Então: $\beta + 2\pi > \pi$, e ainda $3\pi/2 > \beta + 2\pi \Leftrightarrow \beta + 2\pi < 3\pi/2$, ou ainda: $\pi < 2\pi + \beta < 3\pi/2$.

Com a aplicação dada pelo ângulo no plano com o eixo dos XX é uma aplicação de período 2π (isto é, os ângulos voltam a ser iguais ao fim de um arco de $360º = 2\pi$ radianos), então b situa-se no 3ºQ pois é maior que π e menor que $3\pi/2$, como queríamos demonstrar.

A função seno é ímpar – verifica-se que $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. De facto, se $\alpha \in$ 2ºQ então $\beta \in$ 3ºQ (como vimos), e $\text{sen}\beta = \text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$. No 2ºQ o seno toma valores positivos (recordar que $y>0$), logo toma valores negativos no 3ºQ. De resto, um ponto $P(x,y) \in$ 3ºQ tem ordenada $y<0$, logo o seno de um ângulo pertencente ao 3ºQ é de facto negativo.

5.3.b. Coseno

Esta função é par, isto é, para qualquer ângulo α verifica-se $\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$. Por definição, sendo $r>0$ a distância de um ponto do plano à origem do sistema de eixos, e x a distância da projecção do ponto sobre o eixo dos XX, temos $\cos(\alpha) = x/r$.

No primeiro quadrante, $x>0$. Logo $\cos(\alpha)>0$, para todo o $\alpha \in$ 1ºQ.

Também no 4ºQ se tem $x>0$, embora $y<0$.Mas apenas x (e r) aparecem na definição do coseno, portanto $\cos(\alpha)>0$ para $\alpha \in$ 4ºQ. De facto, e como vimos acima, se $\beta = -\alpha$ e $\alpha \in$ 1ºQ, então $\beta \in$ 4ºQ.

No 2ºQ e 3ºQ, $x<0$. Logo, $\cos(\alpha)<0$ para α pertencente a qualquer destes dois quadrantes. De facto, se $\alpha \in$ 2ºQ e $\alpha = -\beta$, então $\beta \in$ 3ºQ, e como a função seno é par, resulta que $\cos(\beta) = \cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$.

5.3.c. Tangente

A função é ímpar, ou seja, para qualquer ângulo α, $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$. Por definição, para qualquer ângulo α que não coincida com o eixo YY, isto é, que lhe não seja paralelo (ou ainda, que não faça um ângulo recto com o eixo dos XX), $\tan\alpha = y/x$. Naturalmente, esta função "dá problemas" quando x=0, o que ocorre para os argumentos $\pm\pi/2$, $\pm3\pi/2$, $\pm5\pi/2$,... , ou seja, βngulos que são perpendiculares ao eixo dos XX e para os quais a tangente toma um valor infinito, não podendo portanto ser definida nesses pontos. Para $\alpha=0, \pm\pi, \pm2\pi$,... , temos $\tan\alpha = 0$, visto nesses casos se ter $y=0$, e aí a tangente anula-se Fora estes pontos, a tangente pode tomar qualquer outro valor real.

No 1ºQ, $x>0$ e $y>0$, logo $\tan\alpha>0$. No 2ºQ, $x<0$ e $y<0$, o que faz $\tan\alpha<0$. No 3ºQ tem-se $x<0$ e $y<0$, portanto $\tan\alpha>0$. Finalmente, no 4ºQ $\tan\alpha<0$ porque $x>0$ mas $y<0$.

5.3.d. Co-tangente

A função é ímpar e tem o mesmo sinal da função tangente, pois apenas difere desta por ser a sua recíproca – isto é, $\text{cotg}\alpha = 1 / \tan\alpha = x / y$. A função não está definida para os pontos $\alpha = 0$, $\alpha = \pm\pi$, $\alpha = \pm2\pi$ – ou seja, todos os pontos da forma $\pm k\pi$ (com k inteiro positivo ou nulo), em que se verifica que $y = 0$.

Em suma, temos o seguinte quadro:

	Sinal das funções trigonométricas			
	1ºQ	**2ºQ**	**3ºQ**	**4ºQ**
senα	+	+	–	–
cosα	+	–	–	+
tanα	+	–	+	–
cotgα	+	–	+	–
	"+" = positivo		"–" = negativo	

5.4. Monotonia das funções trigonométricas

Trata-se de se conhecer em que intervalos as funções crescem, decrescem, ou se mantêm constantes se for caso disso.

Para toda a recta real, as funções seno e coseno dizem-se **oscilantes**, ou seja, não têm uma monotonia que se mantenha ao longo de todo o seu domínio de aplicação. Quanto à tangente e à co-tangente, não é possível falar de monotonia da mesma maneira que o seno ou o coseno, mas apenas a restrições dos seus domínios; falar-se-á disso adiante.

O comportamento das funções trigonométricas é diverso do anterior quando se trata de restrições do domínio de aplicação. Assim, por exemplo, a função seno é crescente no intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$. Com efeito, sendo $\text{sen}\alpha = y/r$, nesse intervalo o valor de y – a projecção do ponto $P(x,y)$ do círculo trigonométrico no eixo dos YY – vai aumentando.

5.4.a. Seno

No primeiro quadrante ($0 < \alpha < \pi/2$), a função é crescente pois y aumenta com α.

No segundo quadrante ($\pi/2 < \alpha < \pi$), a função é decrescente pois y diminui com α.

No terceiro quadrante ($\pi < \alpha < 3\pi/2$), a função é decrescente porque y continua a diminuir à medida que aumentamos o ângulo α (recorde-se que o sentido do aumento do ângulo α é o sentido anti-horário).

No quarto quadrante ($3\pi/2 < \alpha < 2\pi$), a função seno torna a crescer, pois nesse intervalo y cresce com o ângulo α.

5.4.b. Coseno

Primeiro quadrante (1ºQ): o coseno é decrescente porque a projecção do ponto $P(x,y)$ vai-se aproximando do centro do eixo à medida que α aumenta, ou seja, à medida que x diminui.

Segundo quadrante: a função é decrescente (ou melhor, cresce em valor absoluto, mas com sinal negativo), porque x continua a diminuir com o aumento de α.

Terceiro quadrante: é crescente, porque x começa agora a aumentar (ainda com valor negativo; decresce em valor absoluto, mas com sinal negativo).

Quarto quadrante: crescente.

5.4.c. Tangente

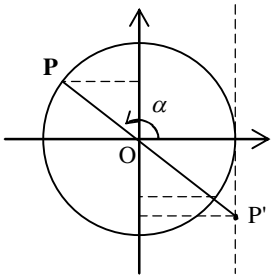


Figura 15. Acerca da monotonia da função tangente de α. O eixo das tangentes é a recta vertical a tracejado, no lado direito, que contém o ponto P'.

É crescente no 1ºQ (veja-se a monotonia das funções seno e coseno acima). Relembrando a monotonia dos valores das coordenadas do ponto P(x,y) sobre o círculo trigonométrico de raio unitário – y para o valor de $\text{sen}\alpha$, e x para o valor de $\cos\alpha$ – y aumenta e x diminui com o ângulo α.

No segundo quadrante, a tangente de α é crescente, porém de valor negativo, porque aí $x<0$ e $y>0$. Porém, à medida que α aumenta, x vai aumentando também (distância da projecção do ponto P sobre o eixo dos XX), ao passo que y (o comprimento da projecção do ponto P sobre o eixo dos YY) vai diminuindo.

Para o 3ºQ, pode-se fazer a análise da monotonia da função do mesmo modo. Projectando um ponto $P(x,y)\in$3ºQ sobre o "eixo das tangentes" (a recta vertical a tracejado no lado direito do círculo trigonométrico representado na figura 15), temos que $\tan\alpha > 0$, e se α aumentar, $\tan\alpha$ aumentará também. Logo, no 3ºQ a tangente é crescente.

No 4ºQ a tangente também é crescente. Basta projectar o ponto P(x,y) do círculo trigonométrico sobre o "eixo das tangentes", segundo a recta que assenta na semi-recta definida pelo ângulo α com o eixo dos XX, para constatar que a "altura" do ponto P', projecção de P, vai aumentando, ainda que com valor negativo.

A conclusão a tirar daqui é que a monotonia da função tangente de α é sempre crescente em todos os pontos do seu domínio. Claro, a tangente não fica definida para $\pm\pi/2$ (e outros valores para o argumento α que produzam ângulos com a mesma abertura), pois estes pontos não fazem parte do domínio, porque para esses valores do argumento a tangente assume valores infinitos.

5.4.d. Co-tangente

O estudo da monotonia da co-tangente faz-se de modo semelhante ao efectuado para a tangente. Conclui-se que a função é sempre decrescente em todo o seu domínio de aplicação (1ºQ, 2ºQ, 3ºQ e 4ºQ).

Monotonia das funções trigonométricas				
	1ºQ	**2ºQ**	**3ºQ**	**4ºQ**
senα	+	–	–	+
cosα	–	–	+	+
tanα	+	+	+	+
cotgα	–	–	–	–
	"**+**" = crescente		"–" = decrescente	

5.5. Redução ao primeiro quadrante

O círculo trigonométrico é usualmente dividido segundo regiões denominadas quadrantes, como indicado na figura 16. São quatro, e indicam-se de acordo com o sentido do crescimento dos ângulos – sentido anti-horário.

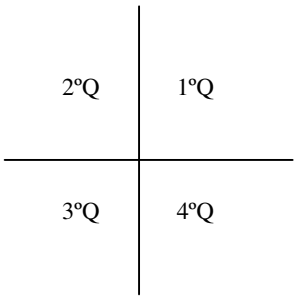


Figura 16. Quadrantes.

Existem certos ângulos para os quais as funções trigonométricas tomam valores fáceis de determinar, e que convém ter sempre presente. No entanto, alguns desses ângulos podem cair noutros quadrantes que não o 1º, e nesse caso convém reduzi-los ao 1º quadrante, até porque as tabelas trigonométricas apresentam ângulos que dizem respeito a esse quadrante.

Assim, iremos descobrir o comportamento das funções trigonométricas nos restantes quadrantes, e compará-lo com os valores tomados pelas funções trigonométricas para ângulos do primeiro quadrante. Na figura 16, o 1ºQ corresponde ao intervalo $0 < \alpha < \pi/2$, o 2ºQ a $\pi/2 < \alpha < \pi$, o 3ºQ a $\pi < \alpha < 3\pi/2$, e o 4ºQ a $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$.

Considere-se, por exemplo, que $\alpha \in$ 1ºQ, e $\beta \in$ 2ºQ, tal que $\beta = \alpha + \pi/2$. O que resulta da redução ao primeiro quadrante das funções trigonométricas para o ângulo β? Repare-se que esta redução terá de ser tal que se relacionem funções com o mesmo contradomínio, isto é, senos com cosenos (que têm contradomínio $[-1,1]$) e tangentes com co-tangentes (de contradomínio $]-\infty, +\infty[$).

Comecemos pela função seno. No 2ºQ, o seno diminui, pois y/r diminui com o aumento de β. Para α, é o coseno que diminui com o aumento de α. Se a for apenas um pouco maior que 0º (próximo de 0º, mas no 1ºQ), teremos que β será também apenas um pouco maior que $\pi/2$: lembre-se que $\beta = \alpha + \pi/2$, neste caso. Assim, como $\cos(\alpha)$ se aproxima de 1 nessa situação, e $\text{sen}(\beta)$ também se aproxima de 1, há equivalência geométrica entre $\cos\alpha$ e $\text{sen}\beta$, ou seja: $\text{sen}(\beta) = \cos(\alpha)$.

Para o coseno, e ainda para a situação em que $\alpha \to 0$ e $\beta \to \pi/2$, acima destes valores (para que α e β continuem no 1ºQ e 2ºQ, respectivamente), temos que $\text{sen}(\alpha) \to 0$ e $\cos(\beta) \to 0$. Mas no 2ºQ, o *coseno* toma valores negativos, pois $x<0$: $\cos(\beta)<0$. No 1ºQ, por outro lado, o *seno* toma valores positivos, pois $y>0$: $\text{sen}(\alpha)>0$. Quer $\cos(\beta)$ quer $\text{sen}(\alpha)$ tendem para zero quando $\alpha \to 0$ e $\beta \to \pi/2$ por valores acima dos indicados, portanto podemos relacionar $\text{sen}(\alpha)$ e $\cos(\beta)$: temos $\cos(\beta) = -\text{sen}(\alpha)$, com $\alpha \in$ 1ºQ e $\beta \in$ 2ºQ. O sinal negativo, como acabo de referir, advém do facto de que o coseno toma valores negativos no 2ºQ e o seno valores positivos no 1ºQ.

Tudo isto pode ser visto de outro modo, talvez mais correcto ou mais fácil de visualizar. Suponhamos que temos o triângulo rectângulo contido no primeiro quadrante e limitado pelo quarto de circunferência, como assinalado no figura 17. Seja y o comprimento da projecção do ponto P sobre o eixo dos YY. Seja x o comprimento da projecção de P sobre o eixo dos XX, e que resulta no ponto X, e seja x' o comprimento da projecção de P' sobre o eixo dos XX, e que resulta no ponto X'. Consideremos que a circunferência tem raio r=1. Então, temos: $\text{sen}\alpha = y$, $\cos\alpha = x$, $\text{sen}\beta = y$', e $\cos\beta = x$'. Consideremos que o ângulo α é suficientemente pequeno para que nos seja fácil visualizar o que se segue, e que $\beta = \alpha + \pi/2$, ou seja, também β forma um ângulo com o eixo dos YY, da mesma abertura que a forma com o eixo dos XX. Pode-se constatar que o triângulo definido no primeiro quadrante pelo ângulo α (o triângulo Δ[OPX]) é igual ao triângulo do segundo quadrante, definido pelo ângulo $\beta - \pi/2$. Ou seja, o segundo triângulo resulta de uma rotação de $\pi/2$ radianos do primeiro triângulo em torno do centro do sistema de eixos, o ponto O. Assim, o cateto de maior comprimento no triângulo Δ[OPX] é igual ao cateto de maior comprimento no segundo triângulo, que assenta sobre o eixo dos YY, no segundo quadrante. O mesmo se passa para os catetos de menor comprimento dos dois triângulos.

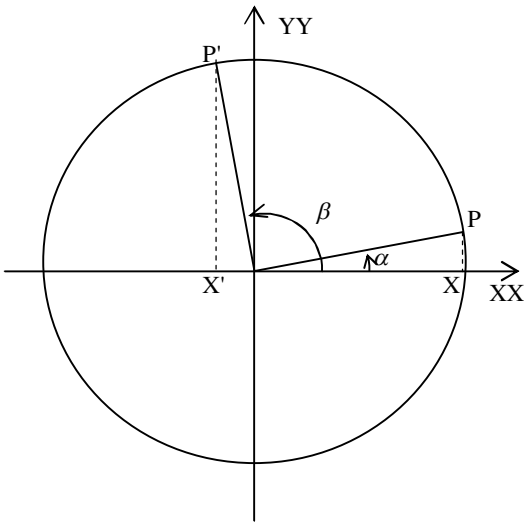


Figura 17. Sobre redução de ângulos ao primeiro quadrante.

Deste modo, pode-se constatar que $\text{sen}\alpha = y = -x' = -\cos\beta$ – ou seja, $\text{sen}\alpha = -\cos\beta$. O sinal negativo surge porque $y>0$ e $x'<0$, pois x' encontra-se à esquerda do ponto no eixo dos XX em que x=0). Também se pode ver que $\cos\alpha = x = y' = \text{sen}\beta$ (aqui já não há troca de sinal, pois x e y' são ambos positivos). Além disso, $\tan\beta$ e

cotgβ relacionam-se com tanα e cotgα de modo semelhante, e podemos descobrir as relações recorrendo a um raciocínio geométrico como o atrás descrito, ou de imediato por cálculos algébricos:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y'}{x'} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{cotg}\alpha$$

e

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\alpha\ .$$

Para outros quadrantes, o tratamento é semelhante, e sugere-se que o leitor os realize a título de exercício. Os resultados para outros quadrantes encontram-se resumidos no seguinte quadro:

	Redução de funções trigonométricas ao primeiro quadrante		
	2º quadrante $\beta = \pi/2 + \alpha$	**3º quadrante** $\beta = \pi + \alpha$	**4º quadrante** $\beta = 3\pi/2 + \alpha$
sen(β)	cos(α)	–sen(α)	–cos(α)
cos(β)	–sen(α)	–cos(α)	sen(α)
tg(β)	–cotg(α)	tg(α)	–cotg(α)
cotg(β)	–tg(α)	cotg(α)	–tg(α)
α = Ângulo do 1º quadrante		β = Ângulo a converter	

5.6. Periodicidade das funções trigonométricas

Em virtude das características da aplicação "menor ângulo de uma semi-recta com o semi-eixo positivo dos XX" (centrada na origem dos eixos), as funções trigonométricas, que têm por argumento um ângulo no plano, terão certas características, nomeadamente a repetição periódica de valores, e para os quais se verificam as mesmas características de monotonia (crescente ou decrescente). Por outras palavras, as funções trigonométricas são periódicas, e como tal voltamos a ter os mesmos valores para a função ao fim de um número inteiro de períodos, e para os quais a função toma as mesmas características de monotonia: nesse ponto, a função é crescente, ou decrescente, consoante o valor do argumento da função.

Consideremos a função seno do ângulo α, definida por senα = y/r, num círculo trigonométrico de raio r=1. Então, temos senα = y. A projecção de dois ângulos, por exemplo, $\alpha\in$1ºQ e $\beta\in$2ºQ, tal que $\beta = \pi - \alpha$ (ou seja β é tal que o arco que resta até π é igual a α), é a mesma, isto é, senβ = senα. Mas, para o ângulo α, a função seno ainda está em crescimento (ramo crescente), e para o ângulo β a função já está em decrescimento. Mas, para um ângulo $\alpha + 2\pi$, a função toma o mesmo valor que para o ângulo α, e também está em crescimento[8]. O mesmo se passa para outro ângulo $\beta + 2\pi$, relativamente a 2π. Ou seja, ao fim de uma volta completa os valores de seno repetem-se, e com a mesma monotonia. O mesmo se passa para a função coseno, como se poderá facilmente verificar: ao fim de uma volta completa (arco de 2π radianos), a função retoma os mesmos valores, e com o mesmo sentido de crescimento (monotonia).

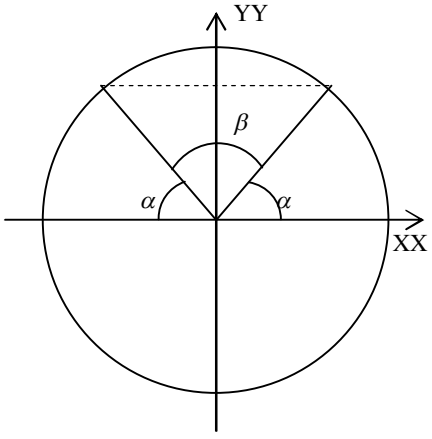


Figura 18. Acerca da periodicidade das funções trigonométricas.

As funções tangente e co-tangente, por outro lado, têm apenas período π, isto é, os valores repetem-se com a mesma monotonia (crescente e decrescente, respectivamente) ao fim de arcos múltiplos de π. Ora, por definição de tangente, tgθ = y/x = senθ / cosθ. No 1ºQ, senθ>0 e cosθ>0, logo tgθ>0. No 2ºQ, senθ>0 e cosθ<0 – logo tgθ<0. No 3ºQ, senθ <0 e cosθ<0, logo tgθ>0. Mas no 3ºQ, sendo $\alpha\in$1ºQ tal que $\theta = \alpha + \pi$, a redução ao primeiro quadrante resulta em senθ = –senα, e cosθ = –cosα. Assim, tgθ = senθ / cosθ = senα / cosα = tgα – ou seja, a tangente repete os mesmos valores. E quanto à monotonia? Como se viu acima, a tangente tem sempre a mesma monotonia (crescente), pelo que não é necessário preocuparmo-nos com esse pormenor. O mesmo se passa para

[8] Repare-se: $\alpha + 2\pi$ corresponde a uma volta completa, mais um arco α, ou seja, voltamos a cair no ângulo α.

o 4ºQ, como facilmente se poderá constatar (sugere-se como exercício de demonstração para o leitor). Logo, a tangente tem período π, e não 2π como o seno ou o coseno.

Para a co-tangente, a análise é semelhante.

Em resumo: as funções *seno* e *coseno* têm período 2π (isto é, os valores repetem-se com a mesma monotonia ao fim de uma volta completa), e as funções *tangente* e *co-tangente* têm período π (os valores repetem-se com a mesma monotonia ao fim de meia volta ao círculo trigonométrico).

5.7. Resumo das propriedades das principais funções trigonométricas

Nesta secção far-se-á um resumo das principais propriedades das funções trigonométricas mais frequentemente usadas: seno, coseno, tangente e co-tangente.

No que se segue,

- $\mathbb{R}$ e $]-\infty, +\infty[$ denotam toda a recta dos números reais;
- os traços verticais mais finos, onde existentes, representam pontos múltiplos ou submúltiplos de π ($\pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 2\pi$, etc.)[9];
- as assimptotas horizontais são representadas a traço mais fino.

5.7.a. Seno de α

$f(\alpha) = \text{sen}\alpha = y / r$

- Função ímpar, positiva no 1º e 2ºQ, negativa no 3º e 4ºQ.
- **Monotonia:** crescente no 1º e 4ºQ, decrescente no 2º e 3ºQ.
- **Domínio:** $]-\infty, +\infty[$
  Ou seja, a função pode ter por argumento qualquer número real.
- **Contradomínio:** $[-1 ; +1]$
  Nos pontos máximo e mínimo do círculo trigonométrico (circunferência de raio $r = 1$), tem-se $y = 1$ e $y = -1$. Nesses pontos, temos $\text{sen}\alpha = 1$ e $\text{sen}\alpha = -1$, respectivamente.
- **Período:** 2π

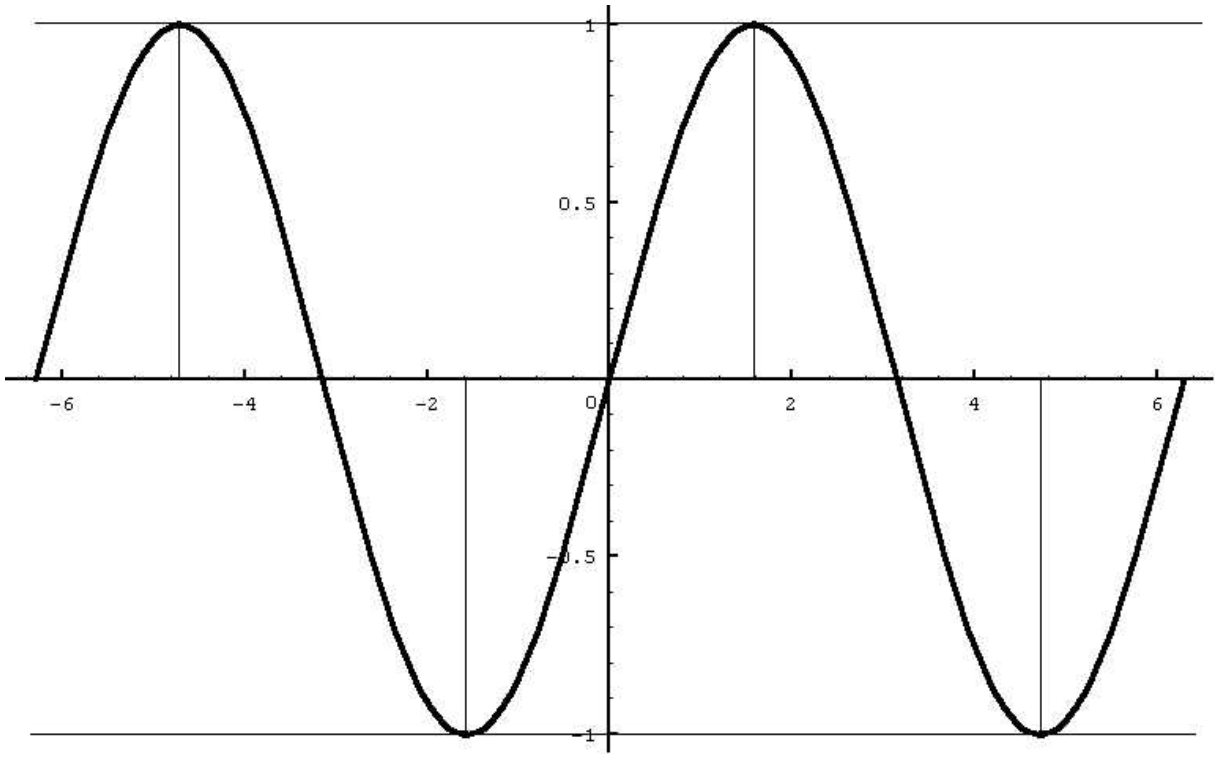


Figura 19. Gráfico da função $f(\alpha) = \text{sen}\alpha$ para $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

[9] $\pi/2=1,57$; $\pi=3,14$; $3\pi/2=4,71$; $2\pi=6,28$.

5.7.b. Coseno de α

f(α) = cosα = *x* / *r* – função par, positiva no 1º e 4ºQ, negativa no 2º e 3ºQ. **Monotonia:** crescente no 3º e 4ºQ, decrescente no 1º e 2ºQ. **Domínio:**] –∞ , +∞ [. **Contradomínio:** [–1 ; +1]. **Período:** 2π

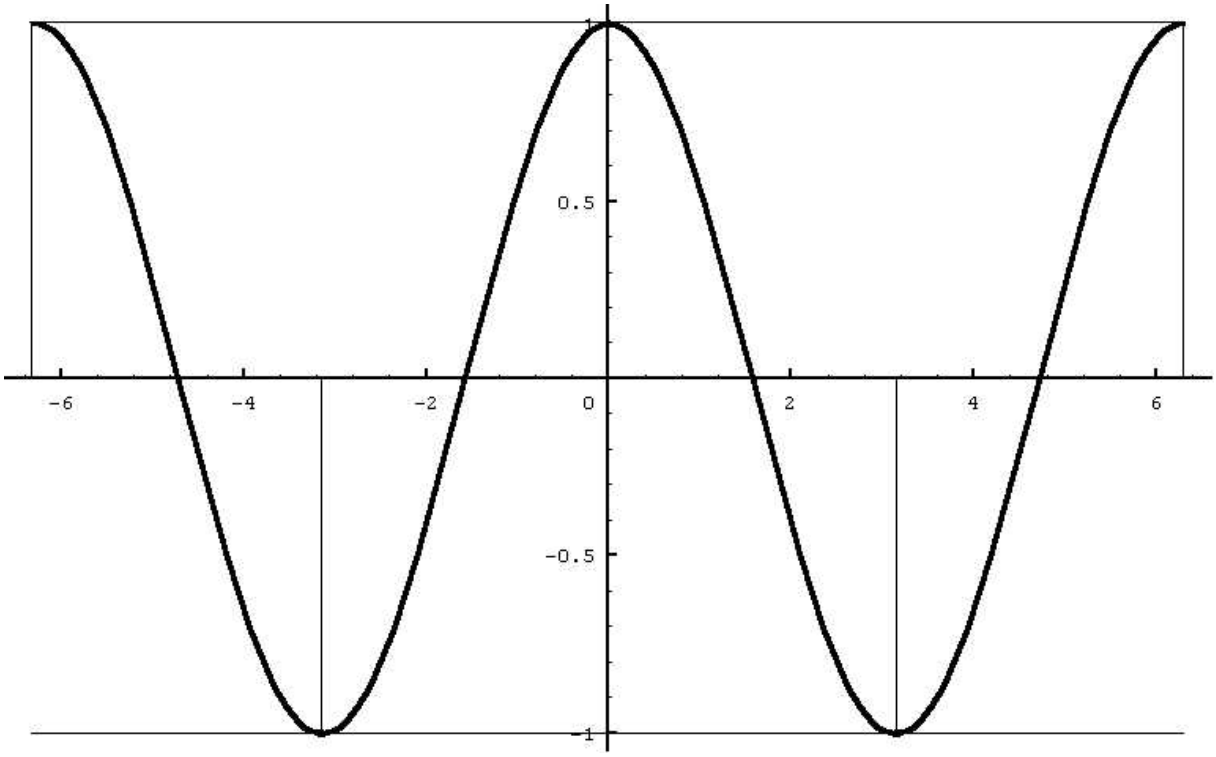


Figura 20. Gráfico da função f(α) = cosα para $\alpha\in$]–π/2,+ π/2[.

5.7.c. Tangente de α

f(α) = tgα = *y* / *x* – função ímpar, estritamente crescente em todo o domínio. Positiva no 1º e 3ºQ, negativa no 2º e 4ºQ. **Domínio:** $\mathbb{R}\backslash\{k\pi+\pi/2,\ k = 0, \pm1, \pm2,...\}$. **Contradomínio:**]–∞ ,+∞[. **Período:** π.

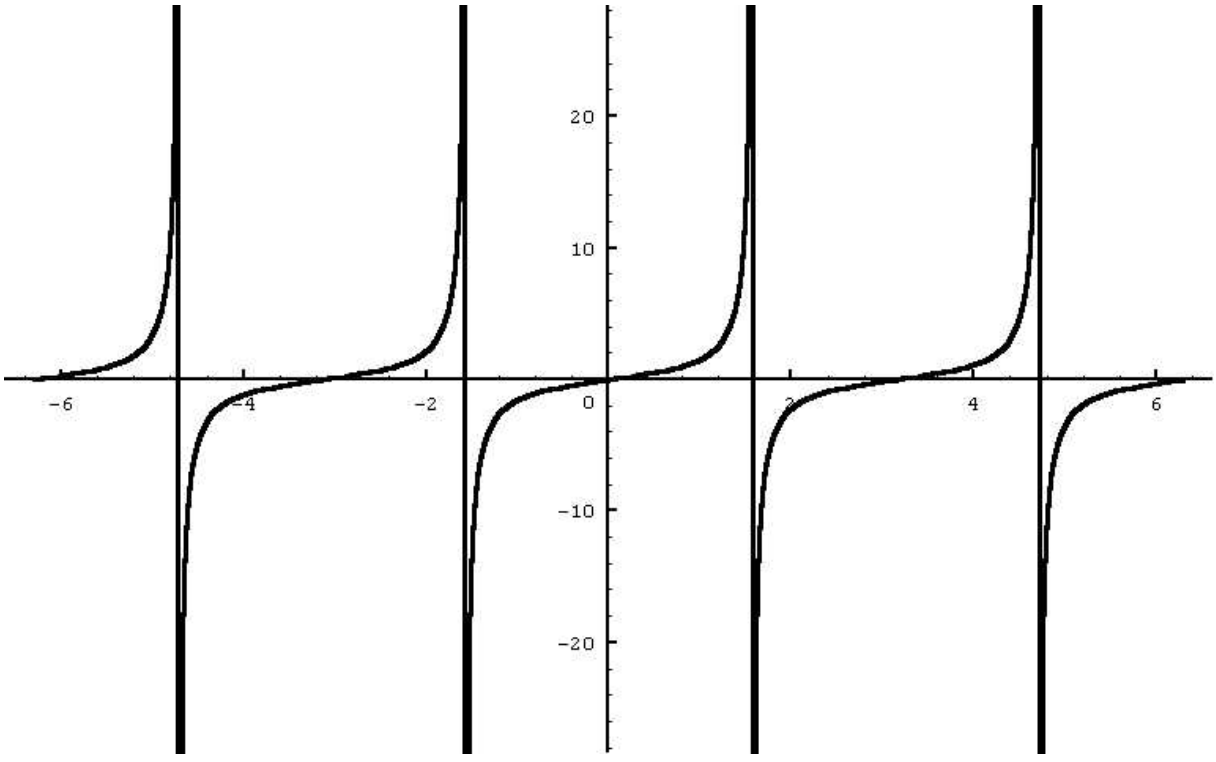


Figura 21. Gráfico da função f(α) = tgα para $\alpha\in$]–π/2,+ π/2[.

5.7.d. Co-tangente de α

f(α) = cotgα = *x* / *y* – função ímpar, estritamente decrescente em todo o domínio. Positiva no 1º e 3ºQ, negativa no 2º e 4ºQ. **Domínio:** $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2,...\}$. **Contradomínio:** $]-\infty, +\infty[$. **Período:** π.

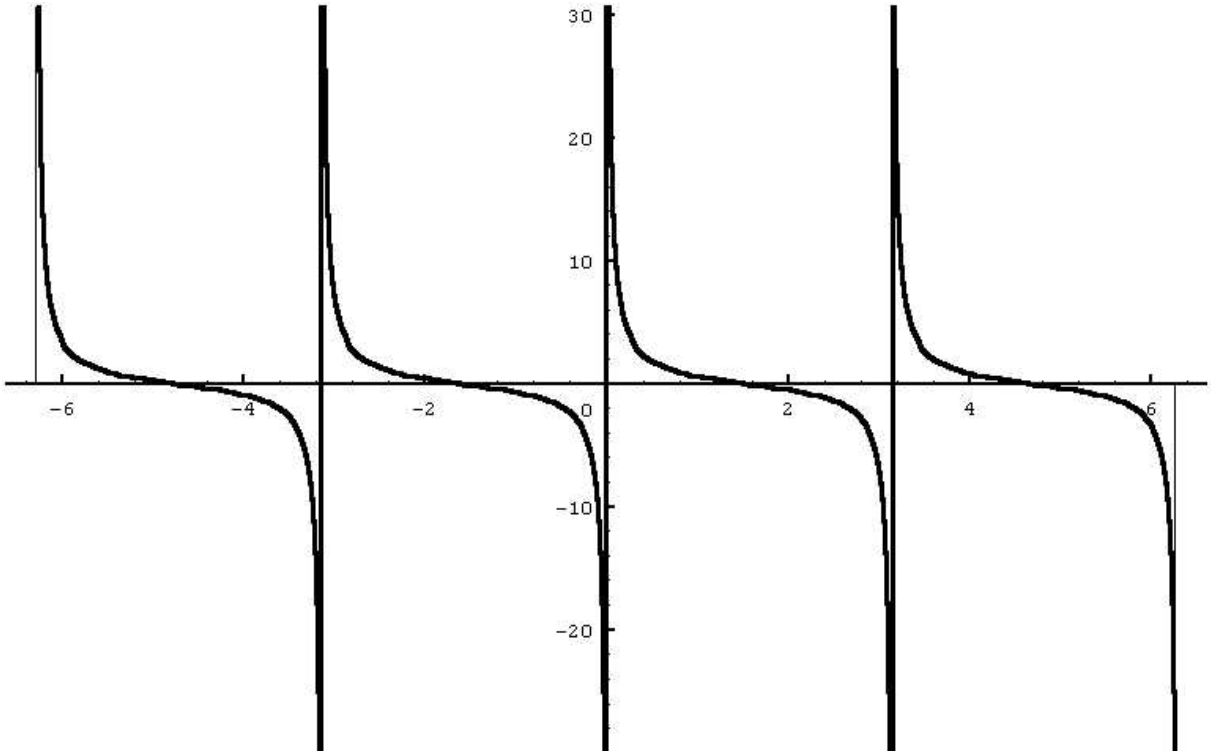


Figura 22. Gráfico da função f(α) = cotgα para $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

6. Relações importantes de funções trigonométricas

Em muitos casos sucede-se que ocorram relações que envolvam funções trigonométricas diferentes das que temos visto até aqui. Algumas dessas relações podem envolver, por exemplo, funções trigonométricas de somas de ângulos, ou determinadas funções que envolvem funções trigonométricas de um ângulo, e cuja escrita pode ser simplificada. Nesta curta introdução não adiantarei muito mais, porém deixarei que a leitura das secções seguintes permita ao leitor o esclarecimento destes pontos. No final deste capítulo é apresentada uma tabela com os resultados aqui obtidos.

6.1. Fórmulas de adição e subtracção

Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ dois vectores com origem no ponto O e extremidade no ponto A e B, respectivamente, e que fazem ângulos α e β com o eixo dos XX, respectivamente. Pela definição de produto interno de dois vectores, temos que

$$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \cdot \cos(\beta - \alpha),$$

e $\beta - \alpha$ é o ângulo que $\overrightarrow{OB}$ faz com $\overrightarrow{OA}$. O ponto A, pela figura 23, tem coordenadas ($\cos\alpha$, $\text{sen}\alpha$), e o ponto B tem coordenadas ($\cos\beta$, $\text{sen}\beta$). Visto os vectores terem origem no ponto O(0,0), as coordenadas dos vectores coincidirão com as coordenadas dos pontos A e B. com isto em mente, o produto interno dos dois vectores pode ainda ser escrito como:

$$(\cos\alpha, \text{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta, \text{sen}\beta) = \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta + \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

Fazendo equivaler as duas expressões para o produto interno dos dois vectores, e notando que $\left\|OA\right\| = \left\|OB\right\| = 1$ (visto que o círculo trigonométrico tem raio r=1 – ver figura 19), temos finalmente:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta.$$

Fazendo agora $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$, vem ainda[(10)]:

$$\cos(\beta + (-\alpha)) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta.$$

Calculemos de seguida $\text{sen}(\beta - \alpha)$. Para dois ângulo suplementares (isto é, cuja soma é $\pi/2$ radianos), verifica-se que o seno de um ângulo é igual ao coseno do outro ângulo. Observe a figura 24: supondo que a hipotenusa é h=1, o comprimento do cateto adjacente a α é $\cos\alpha$. O cateto adjacente ao ângulo α é simultaneamente o cateto oposto ao ângulo β – logo, $\cos\alpha = \text{sen}\beta$. Igualmente, $\text{sen}\alpha = \cos\beta$, como se poderá constatar observando a mesma figura.

$$\begin{aligned}
&\text{sen}(\beta - \alpha) = \cos[\pi/2 - (\beta - \alpha)] = \\
&= \cos(\pi/2 - \beta + \alpha) = \cos[\alpha - (\beta - \pi/2)] = \\
&= \cos\alpha \cdot \cos(\beta - \pi/2) + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\beta - \pi/2) = \\
&= \cos\alpha \cdot [\cos\beta \cdot \cos(\pi/2) + \text{sen}\beta \cdot \text{sen}(\pi/2)] + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}(\beta - \pi/2).
\end{aligned}$$

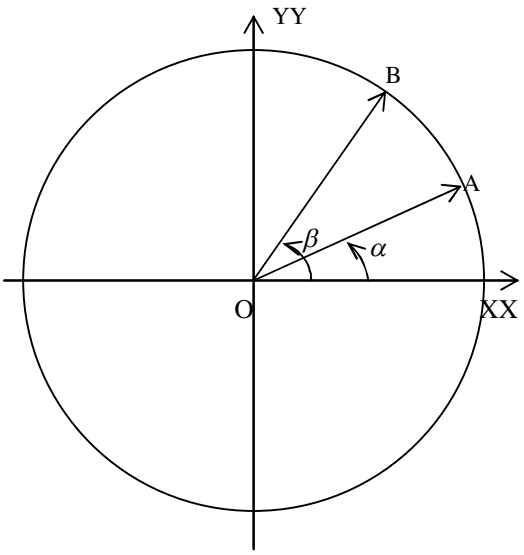


Figura 23. Círculo trigonométrico, de raio $r = 1$.

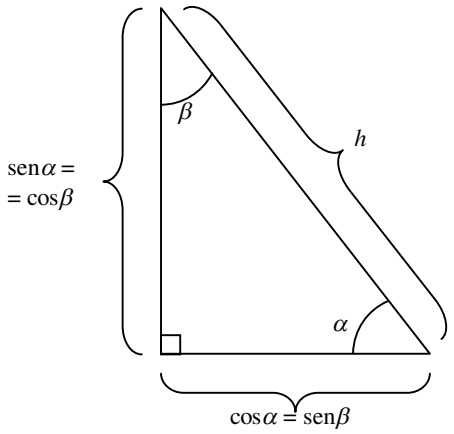


Figura 24. Relações trigonométricas para dois ângulos suplementares, α e β.

[(10)] Recorde-se as propriedades de paridade das funções seno e coseno do ângulo α: $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ e $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$.

Ora, $\cos(\pi/2)=0$ e $\text{sen}(\pi/2)=1$. O seno tem período 2π (isto é, $\text{sen}\theta = \text{sen}(\theta + 2\pi)$), e por conseguinte $\text{sen}(\beta - \pi/2) = \text{sen}(\beta + 3\pi/2)$. Faz-se esta redução ao primeiro quadrante: $\text{sen}(\beta - \pi/2) = \text{sen}(\beta + 3\pi/2) = -\cos\beta$. Assim,

$$\text{sen}(\beta + \alpha) = ... = \cos a \cdot (0 \cdot \cos\beta + 1 \cdot \text{sen}\beta) + \text{sen}\alpha \cdot (-\cos\beta) = \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta - \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta.$$

Substituindo agora $\beta + \alpha$ por $\beta - (-\alpha)$, vem:

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \text{sen}(\beta + (-\alpha)) = \cos(-\alpha) \cdot \text{sen}\beta - \text{sen}(-\alpha) \cdot \cos\beta.$$

Lembrando a paridade das funções seno e coseno, temos: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ e $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$. Logo,

$$\text{sen}(\beta - \alpha) = \cos\alpha \cdot \text{sen}\beta + \text{sen}\alpha \cdot \cos\beta.$$

O cálculo de $\text{tg}(\beta \pm \alpha)$ faz-se dividindo $\text{sen}(\beta \pm \alpha)$ por $\cos(\beta \pm \alpha)$, como de resto resulta da definição de tangente de um ângulo. Portanto,

$$\text{tg}(\beta + \alpha) = \frac{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha} \qquad \text{e} \qquad \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\alpha}.$$

6.2. Fórmulas de duplicação

Neste caso, faz-se $\alpha = \beta$ e aplicam-se as fórmulas obtidas em 6.1 para arcos $\alpha + \beta = 2\alpha$. Fica então:

$$\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \qquad tg(2\alpha) = \frac{2 \cdot \text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha}.$$

6.3. Fórmulas de bissecção

Neste caso, faz-se a substituição $2\beta = \alpha$, e usam-se as fórmulas obtidas em 6.2, e a fórmula fundamental da trigonometria (relação (3.1)).

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2\beta = 1 + \cos(2\beta) \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{1 + \cos(2\beta)}{2}.$$

Aplicando a transformação de variável $2\beta = \alpha$, vem[11]:

$$\cos^2(\alpha/2) = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$$

Para obter $\text{sen}(\alpha/2)$, voltamos a usar a relação (3.1):

$$\text{sen}^2(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2(\alpha/2) + \frac{1 + \cos\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2(\alpha/2) = \frac{1 - \cos a}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Novamente, para obter $\text{tg}(\alpha/2)$ divide-se $\text{sen}(\alpha/2)$ por $\cos(\alpha/2)$:

$$tg(\alpha/2) = \frac{\text{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

6.4. Fórmulas de transformação

Interessa, por vezes, transformar somas ou diferenças de senos ou de cosenos em produtos de funções trigonométricas. Para tal, comecemos por definir a seguinte mudança de variáveis, invertível, **T**:

$$\mathbf{T} \quad \begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha - \beta \end{cases}$$

[11] O sinal ± aparece porque os quadrados de números simétricos são iguais, logo há que incluir as duas possibilidades.

Daqui resulta ainda a transformação inversa, **T'**:

$$\mathbf{T'} \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a+b}{2} \\ \beta = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Aplicando agora a transformação **T'**:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right) =$$
$$= \operatorname{sen}(a/2)\cdot\cos(b/2) + \cos(a/2)\cdot\operatorname{sen}(b/2) + \operatorname{sen}(a/2)\cdot\cos(b/2) - \cos(a/2)\cdot\operatorname{sen}(b/2) =$$
$$= 2\cdot\operatorname{sen}(a/2)\cdot\cos(b/2)$$

Da aplicação da transformação **T** resulta:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Para calcular $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta$, usa-se a paridade da função seno e substitui-se $-\operatorname{sen}\beta$ por $\operatorname{sen}(-\beta)$. Logo,

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

O mesmo método é usado para calcular $\cos\alpha + \cos\beta$ e $\cos\alpha - \cos\beta$, bem como para outras relações entre as funções – como o produto de funções, por exemplo.

Os resultados obtidos neste capítulo são resumidos no seguinte tabela:

Fórmulas de adição	**Fórmulas de subtracção**
$\operatorname{sen}(\beta+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta$	$\operatorname{sen}(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta$
$\cos(\beta+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$	$\cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{tg}(\beta+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}$
Fórmulas de duplicação	**Fórmulas de bissecção**
$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\ .\ \operatorname{sen}\alpha\ .\ \cos\alpha$	$\operatorname{sen}(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$	$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
$tg(2\alpha) = \dfrac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$tg(\alpha/2) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
Fórmulas de transformação	
$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$	$\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

7. Funções trigonométricas inversas

Esta classe de funções representa a aplicação inversa para cada função trigonométrica já discutida. Devido às propriedades de periodicidade das funções trigonométricas, as respectivas inversas não são injectivas[12] quando se toma o domínio das funções trigonométricas – ou seja, para um determinado argumento das funções trigonométricas inversas, estas devolvem como solução uma infinidade de ângulos possíveis, separados de um número inteiro de períodos da função trigonométrica original (2π no caso do seno, coseno, secante e co-secante, e π no caso da tangente e co-tangente).

Desse modo, é necessário que as funções trigonométricas inversas tenham um domínio restrito, para que a aplicação seja bem definida. De facto, porque uma aplicação não pode ter, para o mesmo argumento, dois valores distintos, há que restringir esta classe de aplicações a um domínio onde as funções trigonométricas sejam injectivas. Esse domínio deve também ser escolhido por forma a que todos os seus elementos tenham imagem no contradomínio da função trigonométrica, isto é, os contradomínios das funções restringida e não restringida devem ser coincidentes. Por exemplo, sendo [–1; +1] o contradomínio da função *seno* – isto é, a imagem da aplicação da função a *qualquer* ponto do seu domínio cai sobre este intervalo –, deve-se escolher uma restrição do domínio da função seno tal que os seus elementos representem todos os valores que é possível a função seno tomar, e que caem no intervalo referenciado.

7.1. Arco seno: arcsen(*a*)

Por definição, esta função devolve o *arco*[13] *cujo seno é* a. Suponhamos que $a = \text{sen}\theta$. Então, o ângulo θ é definido como o arco cujo seno é a, isto é, $\theta = \text{arcsen}(a)$.

Como se pode ver pelo gráfico da função seno (página 24), a função é não injectiva porque temos infinitos ângulos que possuem o mesmo valor da função seno. Desse modo, não nos é possível definir uma aplicação inversa para a função seno, porque assim para um valor do domínio dessa aplicação existe uma infinidade de valores possíveis. Para que a aplicação fique bem definida, é necessário que cada valor do seu domínio devolva *um único resultado*. Pode acontecer que vários elementos do domínio da função dêem origem ao mesmo valor, mas cada elemento do domínio só pode originar *um único valor*. Tal não se passa para a função seno quando se toma por domínio *toda* a recta dos números reais.

No entanto, é possível definir uma função inversa da função seno para um domínio restrito em que haja injectividade, isto é, para o qual a cada elemento do domínio corresponda um valor que não é imagem desse, e de nenhum outro, elemento do domínio. Como a função devolve resultados no intervalo [–1, +1], interessa considerar um domínio para a função inversa em que todos os elementos desse intervalo sejam imagem da "função" arco seno. Tal intervalo é, por exemplo, $[-\pi/2, +\pi/2]$ – que é o usado convencionalmente. De facto, usando a função arco seno de uma calculadora científica que suporte essa função, obtemos valores dentro deste intervalo. Obviamente, a introdução de valores fora do intervalo [–1, +1] como argumento da função arco seno produz uma informação de erro na calculadora.

Assim, suponhamos que se pretende calcular arcsen(1/2). Trata-se de procurar qual o arco (ângulo), no intervalo $[-\pi/2, +\pi/2]$, cujo seno é 1/2. Se tivermos $\text{sen}\alpha=1/2$, então $\text{arcsen}(1/2)=\alpha$. Como $\text{sen}(\pi/6)=1/2$, então o resultado é: $\text{arcsen}(1/2)=\pi/6$.

O arco seno tem domínio [–1, +1], o contradomínio do seno: o argumento a só pode tomar valores dentro desse intervalo. O contradomínio é uma restrição do domínio do seno: $[-\pi/2, +\pi/2]$.

---

[12] Para uma **função injectiva**, qualquer recta horizontal r intersecta *uma única vez* o gráfico de uma função; numa **função não injectiva**, existe *pelo menos uma recta* r que intersecta *duas ou mais vezes* o gráfico da função – ver figuras 23 e 24. As funções periódicas são não injectivas, em geral em intervalos de medida igual ou maior ao período da função.

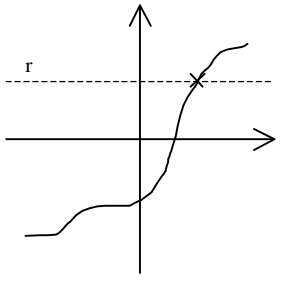


Figura 23. Função injectiva.

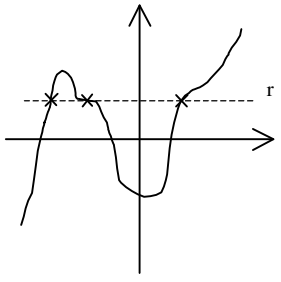


Figura 24. Função não injectiva.

[13] "Arco", ou "ângulo" – têm aqui o mesmo significado.

7.2. Arco coseno: arccos(*a*)

A maneira de definir esta "função" é a mesma que foi utilizada para definir o arco seno.

O **arco coseno** é definido como o *arco cujo seno é igual ao argumento da função*. Assim, se um ângulo a tem por coseno $\cos\alpha = a$, então $\arccos(a) = \alpha$. O arco coseno é assim a "função inversa" da função coseno.

A função coseno não é injectiva, como se pode observar pelo seu gráfico, na página 25. Logo, há que procurar uma restrição do domínio da função coseno em que se possa definir inequivocamente a aplicação coseno. Por convenção, o intervalo usado é $[0; +\pi]$, e os valores permitidos para o argumento desta "função situam-se no intervalo $[-1, +1]$, pois o coseno só toma valores neste intervalo.

O arco coseno tem por domínio $[-1, +1]$: é forçoso que $-1 \leq a \leq 1$. O contradomínio convencionado para o arco coseno é $[0; +\pi]$, uma restrição do domínio da função coseno.

7.3. Arco tangente: arctg(*a*)

O arco tangente é o ângulo (arco de circunferência) cuja tangente é igual ao argumento da aplicação: é a "função inversa" da tangente.

A tangente é periódica, de período π, sendo forçosamente não injectiva (ver nota sobre funções injectivas e não injectivas, na página anterior). O intervalo que é usado para definir esta função é $]-\pi/2, +\pi/2[$. Note-se que os extremos do intervalo, $-\pi/2$ e $+\pi/2$, são excluídos, pois nesses pontos a tangente não está definida (toma valores infinitos). O argumento, *a*, pode tomar todos os valores reais: $a \in \mathbb{R}$.

7.4. Arco co-tangente: arccotg(*a*)

É o ângulo cuja co-tangente é igual ao argumento – a "função inversa" da co-tangente.

A co-tangente, tal como a tangente, é periódica e tem período π. O intervalo de valores tomado pelo arco co-tangente é $]0; +\pi[$, e o argumento a pode tomar qualquer valor real. Os extremos do domínio da função arco co-tangente são excluídos porque nesses pontos a co-tangente não está definida (tem valor infinito).

7.5. Resumo: domínio e contradomínio das funções trigonométricas inversas

Função	Domínio	Contradomínio
arcsen(*a*)	$a \in [-1, +1]$	$[-\pi/2, +\pi/2]$
arccos(*a*)	$a \in [-1, +1]$	$[0; +\pi]$
arctg(*a*)	$a \in \mathbb{R}$	$]-\pi/2, +\pi/2[$
arccotg(*a*)	$a \in \mathbb{R}$	$]0; +\pi[$

8. Resolução de algumas equações trigonométricas

Trata-se de resolver equações do tipo f(x)=y, sendo f(x) uma função trigonométrica ou trigonométrica inversa, e y um valor real.

Há que notar que a resolução *analítica* de equações de funções trigonométricas (ou que envolvam funções trigonométricas inversas, ou ambas, ou outras funções quaisquer) nem sempre é fácil, e é frequentemente impossível. Nesses casos, há que utilizar métodos numéricos, com recurso a calculadoras programáveis e/ou computadores, ou em alternativa métodos gráficos – por exemplo, pode-se sobrepor os gráficos das funções seno e a tangente e procurar os pontos em que os gráficos das respectivas funções se seccionam ou osculam (embora estes últimos sejam mais difíceis de determinar "a olho") para determinar as soluções da equação sen$x$=tg$x$.

8.1. Resolução de equações de funções trigonométricas do tipo f(x) = y

Este tipo de equações tem como solução geral um intervalo, em virtude da periodicidade das funções trigonométricas.

8.1.a. sen$x$ = y

Como a função seno tem período 2π, são válidos os valores de a separados de múltiplos inteiro do período. Naturalmente, como a função seno é limitada, x terá de se situar no intervalo [–1, +1], sob pena de a equação não ter solução. Assim, caso $y\in[-1, +1]$, pode-se fazer $y = \text{sen}\alpha$. Logo, a equação fica:

$$\text{sen}x = \text{sen}\alpha.$$

No caso da figura 27, y=senα representa a "altura" do ponto P que se projecta sobre o eixo dos YY. Mas, a essa projecção correspondem pelo menos dois ângulos, a e b, como se constata. Ora, pode-se provar que os senos de dois ângulos complementares (isto é, ângulos que somam 180º – ver página 8) são iguais. Logo, se α e β são complementares, β=180º–α, e temos senβ = senα. A partir daqui têm-se duas soluções possíveis.

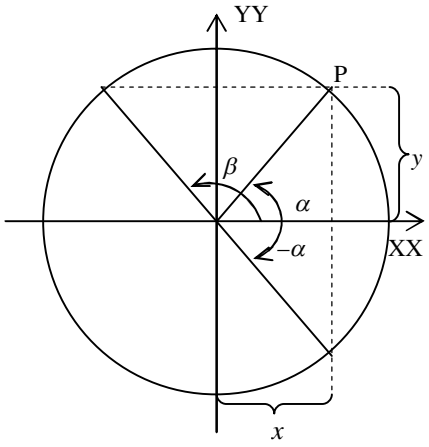


Figura 27. Acerca da periodicidade das funções seno e coseno.

Porém, podem-se obter mais soluções adicionando (ou subtraindo) ao argumento múltiplos do período da função. Como se vê, entre 0º e 360º, o seno de x é igual ao seno de α quando x=α, ou quando x=180º–α. Atendendo à periodicidade do seno, vem então:

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\cdot 360º \text{ ou } x = 180º - \alpha + k\cdot 360º, k \in \mathbf{N},$$

ou, em radianos:

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\,\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\cdot 2\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + k\cdot 2\pi, k \in \mathbf{N}.$$

8.1.b. cos$x$ = y

O método de resolução é semelhante ao anterior. Façamos y=cosα, logo para que a equação tenha solução tem de se verificar que y$\in$[–1, +1]. No intervalo [0; +2π], há duas soluções para x: α e –α.

De facto, para que nesse intervalo se verifique que os cosenos de dois ângulos sejam iguais, os ângulos devem ser iguais (o que é trivial), ou – devido à paridade da função coseno – devem ser simétricos[(14)].

Devido ao facto do coseno ter período 2π, as soluções que distam entre si de um múltiplo inteiro do período também são solução. Logo, são solução geral de cos$x$=cosα:

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\cdot 360º, k \in \mathbf{N},$$

[(14)] Lembrar que cosα = cos(-α).

ou ainda, em radianos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{N} .$$

8.1.c. tg*x* = *y*

A tangente tem período 180º, ou π radianos. Calcula-se a solução geral da maneira semelhante à anterior. O resultado em radianos é:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k \cdot \pi, k \in \mathbf{N} .$$

8.1.d. cotg*x* = *y*

A co-tangente, tal como a tangente, tem período π radianos. A solução geral é igual à indicada em 8.1.c:

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k \cdot \pi, k \in \mathbf{N} .$$

8.2. Exemplo

O cálculo de uma equação de qualquer dos tipos anteriores pode não ser apenas algo como "sen$x$=α". Em vez de x pode aparecer algo como " $5x$+75º ", ou outro polinómio de x. De qualquer modo, a resolução continua a ser a mesma.

Procuremos a solução de: cos(5x+75º) = cos25º. NB: neste exemplo, a solução será dada em graus; a solução em radianos é determinada trivialmente. Começa-se por resolver a equação em ordem a x:

$$\cos(5x + 75º) = \cos 25º \Leftrightarrow 5x + 75º = \pm 25º + k \cdot 360º .$$

A solução geral é dada por:

$$x = -10º + k \cdot 72º \text{ ou } x = 16º + k \cdot 72º, k \in \aleph$$

Se em vez de cos25º tivéssemos sen25º, por exemplo, teríamos de mudar o seno para coseno, pois apenas podemos comparar argumentos de funções iguais. Recordemos que, para dois ângulos suplementares[15], $\alpha + \beta = \pi/2$, se tem senα = cosβ, e cosα = senβ. No nosso caso o ângulo suplementar de 25º é 65º. Logo, usar-se-ia cos65º no lugar de sen25º, e a resolução continuava de maneira análoga à descrita.

8.3. Funções trigonométricas inversas

Seja f(α) uma função trigonométrica (seno, coseno, ...) e g(x) a inversa de f(x). A resolução da equação g(x) = α pode ser feita de um modo similar para as alíneas anteriores. É possível, por exemplo, tentar encontrar qual o argumento a da função trigonométrica inversa que é igual a α, e nesse caso a equação escreve-se: g(x)=g(α).

Um processo alternativo, que por vezes se pode revelar útil, consiste em aplicar a função trigonométrica f(α) inversa de g(x), aos dois membros da equação – para tal é necessário, em primeiro lugar, que figurem de ambos os lados da equação a mesma função. Chama-se ainda a atenção para o pormenor dos intervalos de aplicação: se dentro desse intervalo a função não for injectiva, não é possível definir a função inversa, logo este método não é aplicável. Da aplicação deste método resulta:

$$\mathrm{g}(x) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{f}\left[\mathrm{g}(x)\right] = \mathrm{f}(\alpha) \Leftrightarrow x = \mathrm{f}(\alpha) .$$

[15] Ângulos cuja soma é 90º, ou π/2 radianos – ver página 8.

9. Derivadas de funções circulares e respectivas inversas

Para que uma função seja diferenciável, deve ser contínua em todo o seu domínio. Tal verifica-se nas funções trigonométricas e nas respectivas funções inversas.

Seja $x\in]0;\pi/2[$ um ângulo do primeiro quadrante, no círculo trigonométrico, com amplitude em radianos. Pela figura 28, sendo $\overline{OC}=1$ e $\operatorname{sen} x=\overline{AC}$, tem-se que

$$\overline{AC}<\overline{TC}<\text{compr.}\overset{\frown}{TC},$$

sendo $\overline{TC}$ o comprimento do segmento de recta [TC] e compr.$\overset{\frown}{TC}$ o comprimento do arco $\overset{\frown}{TC}$. Pode-se então concluir que sen$x$ < x. Para $x\in]-\pi/2;0[$ teríamos $|\text{sen}x|<|x|$.

A desigualdade é válida para $x\in]-\pi/2;\pi/2[$, e vai servir para provar que a função definida por f(x)=sen$x$ é contínua para qualquer x real.

$$\lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)\right]=0.$$

Ora, $\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x=2\cdot\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$, e como $|\text{sen}(h/2)|<|h/2|$ e $|\cos(x+h/2)|\le 1$, temos:

$$\left|\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x\right|\le 2\cdot\left|\frac{h}{2}\right|\cdot 1=|h|.$$

Então, sen(x+h)–sen$x$ é um infinitésimo com h, e verifica-se o limite anterior. Como x é agora qualquer elemento do conjunto dos números reais, conclui-se que sen$x$ é contínua em todo o seu domínio.

Também cos$x$ é contínua: pode-se verificar imediatamente da identidade cos$x$ = sen($\pi/2-x$).

As funções tg$x$ e cotg$x$ também são contínuas em todo o seu domínio, pois resultam do divisão de funções contínuas nos respectivos domínios[16].

Comecemos por estudar alguns limites que interessarão para o levantamento de indeterminações aquando do cálculo de derivadas.

9.1. Estudo do $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$

Seja a função f(x) = sen$x$ / x, cujo domínio é toda a recta real, excepto o ponto x=0. Calculemos o $\lim_{x\to 0^+}\text{f}(x)$. Comparemos x, sen$x$ e tg$x$ quando $x\in]0;\pi/2[$. Da figura 28 resulta:

$$\overline{AC}<\text{compr.}\overset{\frown}{TC}<\overline{TB}$$

Como $\overline{AC}=\operatorname{sen}x$, compr.$\overset{\frown}{TC}=x$, e $\overline{TB}=\operatorname{tg}x$, vem: sen$x$ < x < tg$x$. Dividindo por sen$x$, ficamos agora com:

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen}x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$, temos então que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\operatorname{sen}x}=1.$$

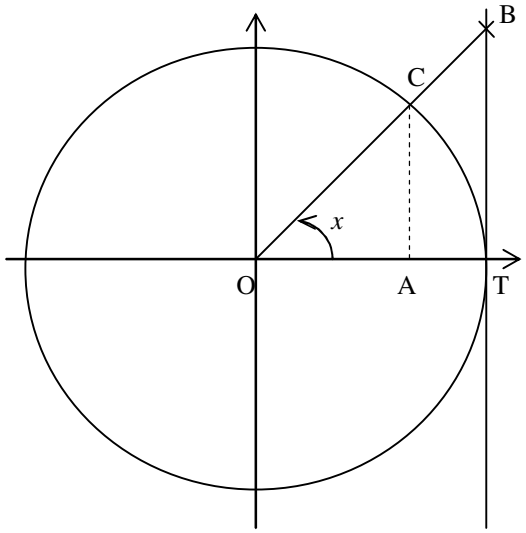


Figura 28. Estudo do $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}$.

A circunferência tem raio $r=\overline{OC}=1$.

[16] O domínio de tg$x$ (e cotg$x$) excluí alguns pontos, justamente onde o denominador se anula: tg$x$ = sen$x$ / cos$x$. Porém, a tangente é contínua nos restantes pontos do seu domínio.

Ora, a função g(x) = x / sen$x$ é par. Com efeito, $g(-x) = \frac{-x}{\text{sen}(-x)} = \frac{-x}{-\text{sen}(x)} = \frac{x}{\text{sen}(x)} = g(x)$. Por isso,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{sen } x} = 1 \text{, e } \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{x}{\text{sen } x}} = 1 .$$

Por definição, a derivada da função f(x) no ponto x é:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

9.2. Derivadas de funções trigonométricas

Apliquemos esta definição para obter as derivadas das funções trigonométricas e das respectivas inversas.

9.2.a. Derivada do seno

Aplicando a anterior definição de derivada de uma função, temos:

$$(\text{sen } x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} .$$

Sabendo que $\text{sen}(p) - \text{sen}(q) = 2 \cdot \text{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$, vem:

$$(\text{sen } x)' = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \text{sen} \frac{(x+h)-x}{2} \cdot \cos \frac{(x+h)+x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \left[\cos\left(x + \frac{h}{2} \right) \right] .$$

A função coseno é contínua, logo lim(cosθ) = cos(limθ). Assim,

$$(\text{sen}x)' = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Em particular, sendo u=u(x) uma função diferenciável num intervalo aberto, e aplicando a regra da derivação da função composta, temos[17]:

$$(\text{sen}[u(x)])' = u' \cdot \cos[u(x)] .$$

9.2.b. Derivada do coseno

Sabendo que cos(x) = sen(π/2–x), e derivando (temos u(x) = π/2 – x), vem:

$$(\cos x)' = -1 \cdot \cos(\pi/2 - x) = -\text{sen}(x) .$$

Em particular, sendo u(x) diferenciável num intervalo aberto]a,b[, tal como para o seno, então a função cos[u(x)] é diferenciável em]a,b[e

$$(\cos[u(x)])' = -u' \cdot \text{sen}[u(x)] .$$

9.2.c. Derivada da tangente

A função y=tg$x$ tem por derivada y' = 1/cos^2x = 1 + tg^2x. Com efeito,

$$y = \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \text{com } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N} .$$

Derivando sen$x$/cos$x$, temos: $y' = \frac{\cos^2 x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

[17] NB: a função é derivada em ordem à variável, x!

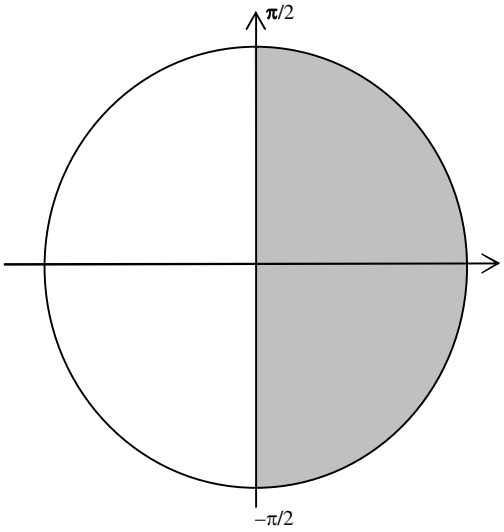


Figura 29. y∈]–π/2, +π/2[

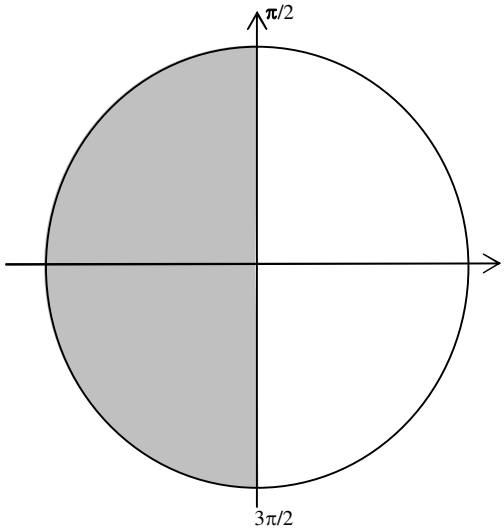


Figura 30. y∈]π/2, 3π/2[

Em particular, se y=tg[u(*x*)], temos: $y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$, com u=u(*x*).

9.2.d. Derivada da co-tangente

Obtém-se da mesma forma que a da tangente, sabendo que cotg*x* = cos*x*/sen*x*. Daqui segue então que: $y' = (\text{cotg}x)' = 1/\text{sen}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$.

Em particular, se y=cotg[u(*x*)], temos: $y' = \frac{u'}{\text{sen}^2 u}$.

9.3. Derivadas de funções trigonométricas inversas

Vejamos agora as derivadas de algumas funções trigonométricas.

9.3.a. Derivada do arco seno

Seja y=arcsen(*x*), com y∈]–π/2, +π/2[. Visto que y=arcsen(*x*), então *x*=sen(y). A regra da derivação da função composta inversa[18] dá então:

$$x' = \cos(y) \Rightarrow y' = \frac{1}{(x)'} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria, relação (3.1), temos $\cos(y) = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$. Então,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Se tivéssemos y∈]π/2, 3π/2[, então $\cos y = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$ e $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Por fim, sendo y=arcsen(u) e u=u(*x*) funções diferenciáveis, temos:

$$y' = (\text{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

(18) Sendo g inversa de f, então f' = 1/g' .

9.3.b. Derivada do arco coseno

Seja y=arccosx $\Leftrightarrow$ x=cosy. Então, $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

Em particular, sendo u=u(x) uma função diferenciável, e y=arccos(u),

$$y' = (\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

9.3.c. Derivada do arco tangente

Seja u=u(x) uma função diferenciável, e y=arctg(u). Então,

$$y' = (\text{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

9.3.d. Derivada do arco co-tangente

Seja u=u(x) função diferenciável, y=arccotg(u). Então,

$$y' = (\text{arccotg}(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

9.4. Resumo das derivadas de funções trigonométricas e trigonométricas inversas

Na tabela que se segue, u=u(x) é uma função diferenciável[(19)], e cujo contradomínio está necessariamente contido no domínio das respectivas funções trigonométricas e trigonométricas inversas – ver secção 7.5.

Derivadas de funções trigonométricas	
$(\text{sen}(u))' = u'(x) \cdot \cos(u)$	$(\text{tg}(u))' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cos(u))' = -u' \cdot \text{sen}(u)$	$(\text{cotg}(u))' = \frac{u'}{\text{sen}^2 u}$
$(\text{cosec}(u))' = \left(\frac{1}{\text{sen}(u)}\right)' = -\frac{u' \cdot \cos(u)}{\text{sen}^2 u}$	$(\sec(u))' = \left(\frac{1}{\cos(u)}\right)' = \frac{u' \cdot \text{sen}(u)}{\cos^2 u}$
Derivadas de funções trigonométricas inversas	
$(\text{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\text{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$
$(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\text{arccotg}(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$
$(\text{arccosec}(u))' = \left(\frac{1}{\text{arcsen}(u)}\right)' = -\frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$	$(\text{arcsec}(u))' = \left(\frac{1}{\arccos(u)}\right)' = \frac{u'}{u\sqrt{1-u^2}}$

(19) Isto é, com derivada no seu domínio de aplicação.

10. Exercícios resolvidos

Apresentam-se de seguida alguns exercícios, com *uma* resolução possível. Apela-se para que o leitor procure outras resoluções válidas. Alguns conselhos:

- Ao tentar resolver um problema, e sempre que possível, que *faça um desenho ou esquema* relacionado com o problema; verá que isso contribui para uma melhor visualização da situação e pode ajudar imenso a perceber o que se pede e a encontrar uma solução!
- Leia o problema uma vez, do início ao fim. Depois, leia novamente o exercício e tente perceber:
  - quais os dados do problema;
  - o que é pedido para determinar.

  Tente explicar por suas próprias palavras o que é dado e o que é pedido no problema. Se não consegue explicar por si próprio ou a outra pessoa o que leu, é bem possível que não tenha percebido a informação dos dados, do que é pedido, ou ambas as coisas! Leia o problema, ou a(s) parte(s) que não percebeu, tantas vezes quantas as necessárias até que se torne perfeitamente claro para si.

1. Um vaivém em órbita terrestre descreve um trajecto tipicamente circular a uma altitude de cerca de 300km acima da superfície. Sabendo que o raio da Terra é 6380km, escreva a expressão para a distância do horizonte àquela altitude, e calcule o seu valor.

   Resolução:

   Seja R o raio da Terra e h a altitude do vaivém acima da superfície da Terra. Pretende-se determinar a distância d. O ângulo α é recto porque a recta a que pertence o segmento de comprimento d é perpendicular ao raio da Terra – é tangente à superfície.
   Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

   $$R^2 + d^2 = (R+h)^2 \Leftrightarrow d^2 = h^2 + 2Rh \Leftrightarrow d = \sqrt{h^2 + 2Rh}\ .$$

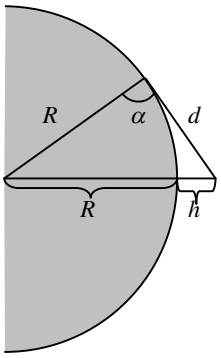
   

   Figura 31. Vaivém espacial em órbita.

   Repare-se que não surge uma solução do tipo $d = \pm\sqrt{...}$ porque:

   1) a solução deve ser bem definida (um só valor, isto é, uma *distância* qualquer tem um valor bem definido);
   2) trata-se de *distâncias* – valores reais *positivos*.

   Assim, temos: $d = \sqrt{300^2 + 2 \times 6380 \times 300} = 2{,}00 \times 10^3\ \text{km} \cong 2000\text{km}$.

   Poder-se-ia resolver este problema de maneiras mais complicadas, mas em particular foi possível usar aqui o teorema de Pitágoras, o que simplificou significativamente os cálculos. Se o ângulo α não fosse recto, nesse caso já seria necessário recorrer a fórmulas trigonométricas. Seria um bom exercício para o leitor tentar obter uma relação entre o ângulo α e a distância d.

2. Uma aeronave prepara-se para aterrar numa pista (poderia ser o vaivém do exercício anterior...). O avião faz uma aproximação a um ângulo de 60º do lado esquerdo da pista onde pretende aterrar. Os instrumentos de bordo indicam que o ponto de aterragem está a uma distância de 30km em linha recta e a um ângulo de 45º para a esquerda da direcção em que o avião se desloca. Considere apenas a projecção no solo do trajecto do avião (ou seja, ignore a altitude do avião acima do solo). Calcule a distância do avião

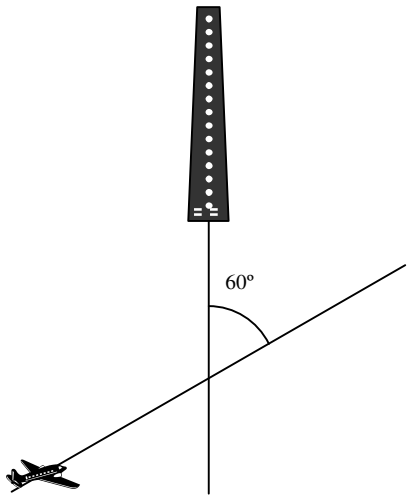
   a) ao eixo da pista de aterragem;

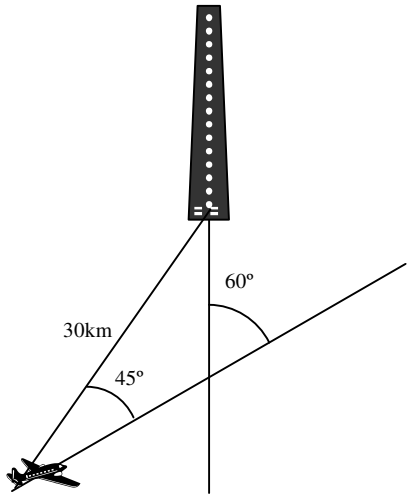
   b) do local onde irá cruzar o eixo da pista de aterragem até ao ponto de aterragem.

   Resolução:

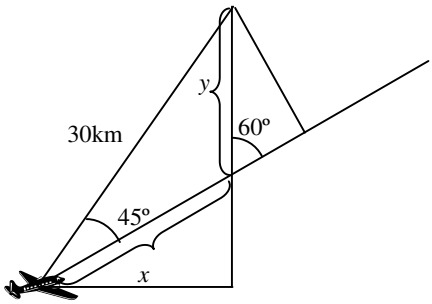
   O exercício exige já um á-vontade considerável nos assuntos versados até ao capítulo 5. Embora pareça difícil, não nos devemos deixar intimidar. Na verdade, se começarmos a fazer um desenho baseado nos dados do problema veremos que até é parecido com o problema do farol na secção 3.4!

O avião aproxima-se da pista pelo lado esquerdo, fazendo com ela um ângulo de 60º. Temos então algo assim (figura do lado esquerdo):



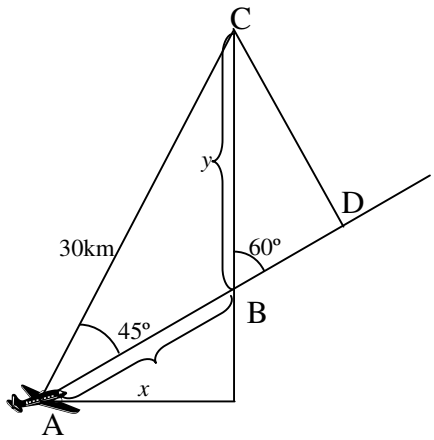


Por outro lado, sabemos que o ponto de aterragem está, pelas indicações dos instrumentos de bordo, a um ângulo de 45º (para a esquerda) com a direcção a que viaja o avião (figura do lado direito). Além disso, os instrumentos informam que o ponto de aterragem está a 30km (em linha recta!).



Esta é toda a informação que é dada no problema. A distância a calcular na alínea a) corresponde a x e a distância y corresponde ao cálculo da alínea b). Comecemos então a ver o que se poderá usar e no quê.

Este problema é, com efeito, semelhante ao problema do farol na secção 3.4: conhecemos dois ângulos e sabemos uma distância, e pedem-nos para calcular outra distância – ou, neste caso, duas.



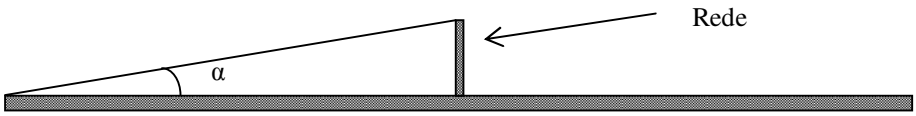
Chamemos, para facilitar a discussão, A ao ponto onde está o avião, B ao ponto onde este intersecta o eixo da pista de aterragem e C ao ponto de aterragem.

y é o comprimento da hipotenusa BC do triângulo BDC. O cateto CD deste triângulo tem comprimento dado por $y \cdot \text{sen}(60º)$. Mas, este cateto (CD) é também um cateto do triângulo ADC, pelo que se tem: $y \cdot \text{sen}(60º) = 30 \cdot \text{sen}(45º)$.

Consultando a tabela na página 19, vemos então que y = 24,5km. Os comprimentos dos catetos AD e BD são, respectivamente: 30·cos(45º) = 21,2km; e y·cos(60º)=12,25km. Logo, o comprimento x é simplesmente 21,2 – 12,25 = 8,96km.

3) Num campo de ténis, a distância entre a rede central e a linha de fundo é de 23,77m. A altura da rede é 1,07m. Qual é o ângulo entre o chão e o topo da rede, na linha lateral, a partir da linha de fundo?

Resolução:



O ângulo pedido é o ângulo α. A altura da rede é 1,07m e a distância desde o extremo do campo, no vértice do triângulo, é de 23,77m. Na figura, a rede constitui o cateto oposto ao ângulo α e o segmento desde a linha de fundo até à rede constitui o cateto adjacente ao mesmo ângulo. O quociente entre as duas distâncias dá a tangente do ângulo α:

$$\frac{1{,}07\text{m}}{23{,}77\text{m}} = \tan\alpha\ .$$

Por fim, o ângulo α é, por definição, o arco cuja tangente é dado por este quociente. Ou seja,

$$\alpha = \arctan\frac{1{,}07}{23{,}77} = 2{,}58^\circ = 2^\circ 34' 38{,}9''$$

O resultado é apresentado em duas notações: em graus (2,58º) e com a fracção do ângulo em notação sexagesimal (2º 34' 38,9", ou seja: 2 graus, 34 minutos e 38,9 segundos). Na notação sexagesimal, "minuto" e "segundo" significam *minuto de arco* e *segundo de arco*, respectivamente.

Bibliografia

- "Matemática – Formulário", Manuel Alberto M. Ferreira, Isabel Amaral. Edições Silabo, L.da. Lisboa, 1994 (8ª edição).
- "Matemática/10ºano – 2º volume", Maria Augusta Neves, Maria Teresa Vieira, Alfredo Gomes Alves. Porto Editora. Porto, 1991 (3ª edição).
- "Matemática/12ºano", Maria Augusta Neves, Maria Teresa Vieira, Alfredo Gomes Alves. Porto Editora.
- "Trigonometry", E. P. Vance. Collier's Encyclopedia vol.22, pgs.469-476. Macmillan Educational Company, 1990.