

# Análise de Circuitos

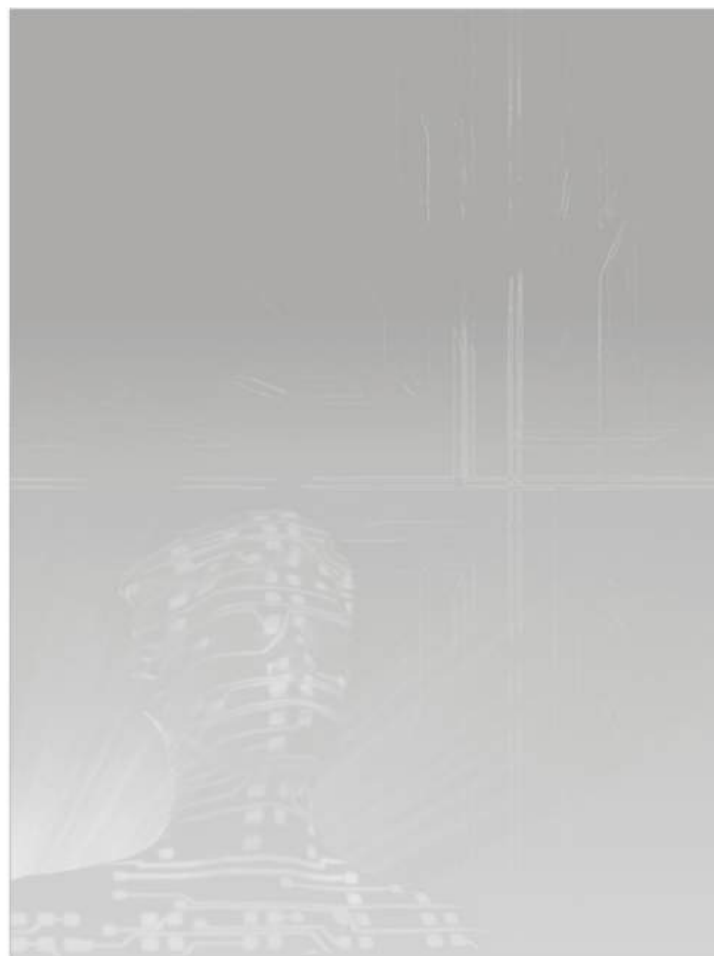
Um Enfoque de Sistemas

Karl Heinz Kienitz

# Análise de Circuitos

## Um Enfoque de Sistemas

---



**Karl Heinz Kienitz**

2ª Edição  
2010

**INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA**  
São José dos Campos

**Análise de circuitos: um enfoque de sistemas – segunda edição**  
ISBN 978-85-87978-17-2

Copyright © 2010 Karl Heinz Kienitz  
Todos os direitos reservados.

Capa: Yuka Osako



*Análise de circuitos: um enfoque de sistemas – segunda edição*, por [Karl Heinz Kienitz](#), está licenciada sob uma [Licença Creative Commons Brasil](#). Permissões além do escopo desta licença podem estar disponíveis via <http://www.ele.ita.br/~kienitz/>.

#### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

---

Kienitz, Karl Heinz

Análise de circuitos: um enfoque de sistemas / Karl Heinz Kienitz – 2.ed. – São José dos Campos: Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2010.

ISBN 978-85-87978-17-2

1. Circuitos elétricos. 2. Engenharia Elétrica. 3. Engenharia Eletrônica. 3. Eletricidade. I.Título

CDU – 621.3.049

---

Índices para catálogo sistemático:

1. Engenharia eletrônica: circuitos – 621.3.049
2. Análise de circuitos – 621.3.049.77

Divisão de Engenharia Eletrônica  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias  
12.228-900 São José dos Campos SP  
[www.ele.ita.br](http://www.ele.ita.br)

À memória de meus avós Ewald, Agnes, David e Maria.  
Com sua fé no Deus da Bíblia moveram montanhas.

# Prefácio

---

Esta edição contém uma versão revista e corrigida de *Análise de circuitos: um enfoque de sistemas*, cuja primeira edição surgiu de notas de aula da disciplina Análise de Circuitos ministrada aos alunos dos cursos de Engenharia Eletrônica e Engenharia de Computação do ITA, o Instituto Tecnológico de Aeronáutica. A disciplina de análise de circuitos no ITA tem sido usada também para introduzir conceitos fundamentais de análise de sistemas dinâmicos. Circuitos elétricos são sistemas dinâmicos, daí a naturalidade da opção de apresentá-los com um enfoque de análise de sistemas dinâmicos.

O objetivo deste texto é apresentar as principais ferramentas teóricas e situações típicas em circuitos ao estudante e ao profissional interessado num texto de referência. A sequência de apresentação pretende ser natural, iniciando com o geral e caminhando para o particular. Assim trata-se, inicialmente, do circuito (linear ou não-linear) no domínio do tempo. Em seguida passa-se à discussão de circuitos lineares (isto é, a um caso particular) usando as ferramentas pertinentes. Somente depois são tratados fasores e circuitos lineares em regime permanente senoidal (isto é, uma situação especial do caso particular).

A abordagem adotada é ao mesmo tempo densa e de compreensão facilitada, pois nada precisa ser decorado, tudo pode ser deduzido e portanto entendido; o ponto de partida são leis fundamentais e as equações com elas obtidas. O texto foi concebido de forma a criar os fundamentos de uma cultura de circuitos adequada às aplicações em constante e rápida evolução, hoje permeadas de circuitos integrados. Além das técnicas consagradas para lidar com os elementos de circuito padrão (resistores, indutores e capacitores lineares) e o já clássico amplificador operacional, o texto confronta o leitor com exemplos de técnicas que permitem explorar os benefícios da não-linearidade quando dispositivos (como o MOSFET, típico de circuitos integrados) são usados em quantidade para obtenção de alguma característica de interesse.

Sou grato a todos que me ajudaram com críticas e sugestões da primeira edição e de versões preliminares. Igualmente agradeço aos meus colegas da Divisão de Engenharia Eletrônica do ITA por valiosas discussões sobre aspectos técnicos e didáticos em análise de circuitos.

Esta segunda edição difere da primeira pelas usuais correções ao texto, bem como por um refinamento e ocasional detalhamento de colocações e explicações em alguns pontos.

# Sumário

---

1. Leis de Kirchhoff .....	1
2. Resistores com dois terminais .....	11
3. Resistores com múltiplos terminais .....	28
4. Ampliadores operacionais .....	42
5. Circuitos de primeira ordem .....	52
6. Circuitos de segunda ordem e ordem superior.....	66
7. Transformada de Laplace e resposta em frequência .....	85
8. O critério de Nyquist.....	102
9. Regime permanente senoidal .....	111
10. Circuitos com várias portas de acesso; reciprocidade .....	124
Apêndice A: Frações parciais .....	132
Apêndice B: Fator de mérito.....	133
Referências .....	137
Índice remissivo.....	138



## 1. Leis de Kirchhoff

---

Este texto é dedicado ao estudo da teoria de circuitos, mais especificamente à sua aplicação em análise de circuitos.

*Teoria de circuitos* é a disciplina de engenharia voltada para o desempenho elétrico, definido por valores de tensões e correntes. Os fenômenos e propriedades físicas subjacentes ao comportamento elétrico, isto é, aquelas que o provocam, não são objeto de estudo aqui.

O objetivo da teoria de circuitos é a predição do comportamento de circuitos físicos visando a melhorias dos projetos. Em *análise de circuitos*, a preocupação é principalmente com o estudo de circuitos já projetados (ou existentes). A atividade criativa e de concepção envolvendo circuitos é denominada *projeto de circuitos* e está alicerçada sobre um bom conhecimento da análise. Daí a grande importância de se conhecer a análise.

Em circuitos existem duas grandezas físicas fundamentais:

- *Tensão*: A tensão (ou diferença de potencial) entre 2 pontos é medida pelo trabalho necessário para transferir carga unitária de um ponto para o outro. A diferença de potencial entre dois pontos perfazendo uma tensão de 1 [V] corresponde a um trabalho de 1 [J] necessário para transferir uma carga de 1 [C].
- *Corrente*: Corrente é a transferência (fluxo) de carga. Uma corrente de 1 [A] equivale à transferência de carga de 1 [C/s].

### Circuitos, modelos e elementos de circuito

#### Dispositivos de circuito, circuitos físicos

Um dispositivo de circuito é um componente elétrico/eletrônico, isto é, um objeto físico. Exemplos de dispositivos são: resistores, capacitores, transistores, circuitos integrados, transformadores, chaves, fontes de tensão e corrente. Um circuito físico (elétrico/eletrônico) é um conjunto interconectado de dispositivos. Para a interconexão, geralmente usa-se algum meio condutor metálico (cabo, fio, filete etc.).

Resistores e capacitores são os dispositivos de circuito mais comuns. Eles estão presentes em praticamente todos os circuitos existentes e são fabricados em diversas tecnologias. Os resistores mais comuns são os de fio e de carbono. Os capacitores mais comuns são os de cerâmica, poliéster e os eletrolíticos. Resistores de carbono e capacitores de poliéster tipicamente têm marcação de seu valor no corpo do componente usando faixas de cores. As primeiras três faixas indicam números  $D_1$ ,  $D_2$  e  $M$  que apontam o valor do componente da seguinte forma:  $D_1D_2 \times 10^M$ . As unidades são [ $\Omega$ ] para os resistores e [pF] para os capacitores. O código de cores é o seguinte:

Cor	Dígito associado
Preto	0
Marrom	1
Vermelho	2
Laranja	3
Amarelo	4

Cor	Dígito associado
Verde	5
Azul	6
Violeta	7
Cinza	8
Branco	9

Na terceira faixa de resistores ainda podem ser usados ouro ( $M = -1$ ) ou prata ( $M = -2$ ). A cor da quarta faixa indica a tolerância do componente:

- Resistores: 5% (ouro), 10% (prata), 20% (ausente)
- Capacitores: 10% (branco), 20% (preto ou ausente)

A tensão de isolamento para os capacitores é indicada pela cor de uma quinta faixa:

- 250V (vermelho)
- 400V (amarelo)
- 630V (azul)



Capacitores eletrolíticos possuem polaridade, que sempre está indicada no corpo do dispositivo. Seu uso exige atenção especial.

### Elementos de circuitos e circuitos

Elementos de circuitos são modelos ideais de dispositivos. Trata-se portanto de objetos idealizados. Os seguintes elementos de circuito são os mais comuns:

- o resistor com a característica  $v = Ri$ ;
- o indutor com a característica  $v = Ldi/dt$ ;
- o capacitor com a característica  $i = Cdv/dt$ .

Um modelo de dado dispositivo é composto de um ou mais elementos de circuito.

Exemplo:

Dispositivo	Elemento de circuito correspondente
bobina	indutor
condensador	capacitor

Um modelo resulta de aproximações. Por isso podem existir diversos modelos para um mesmo dispositivo, dependendo das aproximações usadas. As aproximações usadas dependem das aplicações nas quais se deseja empregar o dispositivo. Dispositivos para os quais isto é fato estabelecido são, por exemplo, amplificadores operacionais e transistores de todo tipo.

Por circuito, finalmente, entende-se a interconexão de elementos de circuito. Assim o circuito é também um modelo, no caso de um circuito físico. Do ponto de vista de sistemas, entende-se um circuito como um sistema e partes de circuitos como sub-circuitos ou subsistemas.

Quando interconectamos diversos elementos de circuito, temos um nó em cada junção. Além disso, terminais que permanecem abertos também são nós.

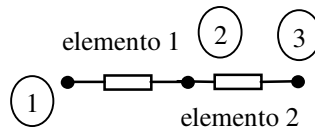


FIGURA 1.1 – Elementos de circuito, terminais e nós.

### O que é análise de circuitos?

A Figura 1.2 ilustra o contexto no qual se insere a análise de circuitos. Ela é a ferramenta que, de forma semelhante ao experimento, permite extrair informação quantitativa de um circuito. O experimento é realizado com o sistema físico (circuito físico ou aparelho). A análise é realizada com o circuito, que é o modelo do sistema físico.

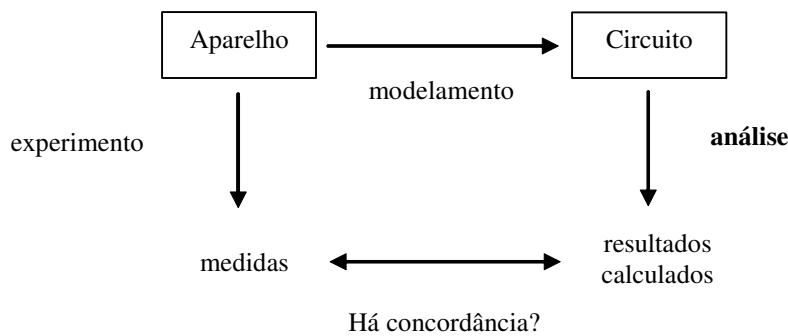


FIGURA 1.2 – Contexto da análise de circuitos.

Em análise de circuitos, empregam-se o conhecimento matemático e o de leis elétricas que constituem objeto deste livro.

*Observações:*

- Em teoria de circuitos supõe-se que os modelos de cada dispositivo sejam conhecidos.
- Na prática, modelos adequados geralmente existem.

### Circuitos concentrados × circuitos distribuídos

Do ponto de vista de modelagem, é importante diferenciar os *circuitos concentrados* dos *circuitos distribuídos*. Um circuito é considerado concentrado quando suas dimensões físicas permitem supor que os sinais de interesse se propagam instantaneamente. Para  $c$  (velocidade de propagação) e  $f$  (maior frequência de interesse) definidos, temos isto como válido, se para o maior caminho no circuito a seguinte condição for verdadeira:

$$d \ll \frac{c}{f}$$

Nesse caso, tensões  $v(t)$  e correntes  $i(t)$  estão definidas por todo o circuito univocamente para todo  $t$ , independentemente das coordenadas de posição.

*Exemplos:*

- Para um circuito de eletrônica de potência que trabalha com  $f = 60$  [Hz], tem-se  $d \ll 5 \times 10^7$  [m].
- Para um circuito de áudio com  $f \leq 25$  [kHz], tem-se  $d \ll 12000$  [m].
- Para um circuito digital com tempos de chaveamento de  $0,1$  [ns], tem-se  $d \ll 30 \times 10^7 \cdot 0,2 \times 10^{-9} = 0,06$  [m], supondo (pessimisticamente) um período do sinal igual a duas vezes o tempo mínimo de chaveamento.

### As leis de Kirchhoff

As leis de Kirchhoff serão aqui entendidas como postulados, no entanto pode-se demonstrar sua validade para circuitos concentrados a partir das equações de Maxwell.

Inicialmente definimos o sistema de coordenadas elétrico convencionando polaridades para as tensões e sentidos para as correntes associadas, como ilustrado na Figura 1.3.

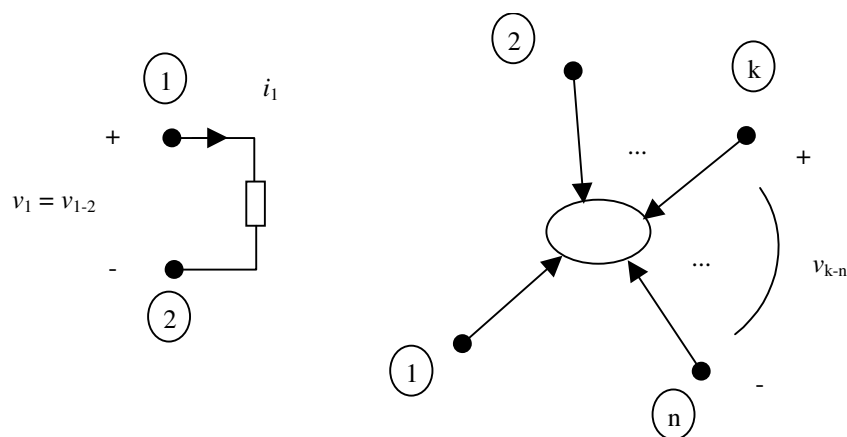


FIGURA 1.3 – Notação e sistema de coordenadas elétrico.

A direção de referência de corrente, juntamente com o sinal de  $i(t)$ , determina o sentido de fluxo das cargas elétricas.

**Definições:**

- *Circuito conectado* é aquele no qual todo nó pode ser alcançado a partir de qualquer outro por meio de um caminho através dos elementos do circuito.
- *Nó de referência* é qualquer nó adotado por convenção para a medida de potenciais elétricos.

**Lei de Kirchhoff das tensões**

*LKT (Lei de Kirchhoff das tensões)*

Para todos os circuitos concentrados, para todas as escolhas de nós de referência, para todos os tempos  $t$  e para todos os nós  $k$  e  $j$  vale

$$v_{k-j}(t) = e_k(t) - e_j(t)$$

onde  $e_j(t)$  é o potencial do nó  $j$  no tempo  $t$ . Tem-se ainda

$$v_{k-j}(t) = -v_{j-k}(t).$$

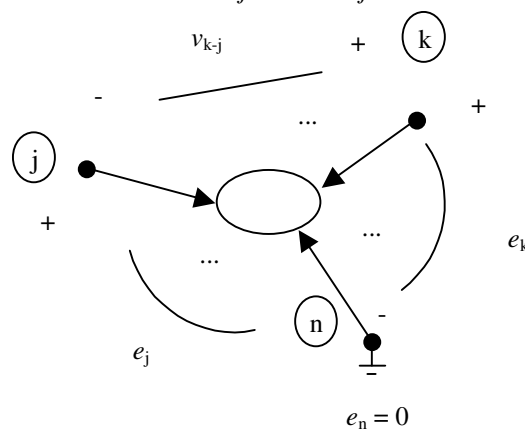


FIGURA 1.4 – Diagrama para enunciado da LKT.

Outra formulação para a Lei de Kirchhoff das tensões, denominada formulação nodal, é a seguinte: para todos os circuitos concentrados conectados, para todas as sequências de nós fechadas (isto é, que iniciam e terminam no mesmo nó), para todos os tempos  $t$ , a soma algébrica de todas as tensões nó-a-nó ao longo de qualquer sequência de nós escolhida é igual a zero.

**Lei de Kirchhoff das correntes**

*Definição*

Uma superfície fechada “tipo balão” receberá o nome de *superfície gaussiana*.

*LKC (Lei de Kirchhoff das correntes)*

Para todos os circuitos concentrados conectados, para todas as superfícies gaussianas  $S$  e todos os tempos  $t$ , a soma algébrica de todas as correntes deixando a superfície  $S$  no tempo  $t$  é nula.

A formulação nodal para a Lei de Kirchhoff das correntes é a seguinte: para todos os circuitos concentrados conectados e todos os tempos  $t$ , a soma algébrica de todas as correntes deixando qualquer nó no tempo  $t$  é nula.

*Observações:*

- LKT e LKC são encarados como postulados fundamentais.
- LKT e LKC refletem propriedades da interconexão e não dos elementos de circuito.
- LKT e LKC (se empregadas como enunciadas aqui) resultam em equações algébricas homogêneas lineares com coeficientes reais de valor 0, 1 ou -1.

*Exemplo:* Para ilustrar o equacionamento usando LKC e LKT será usado o circuito representado no diagrama esquemático anotado da Figura 1.5.

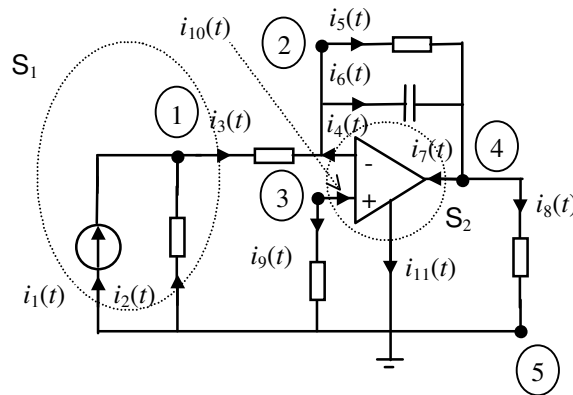


FIGURA 1.5 – Diagrama esquemático anotado.

- Equação LKC para  $S_1$ :  $i_3 - i_1 - i_2 = 0$
- Equação LKC para  $S_2$ :  $i_{11} - i_{10} - i_7 + i_4 = 0$
- Equação LKT para a sequência de nós 5 – 2 – 4 – 5:  $v_{5-2} + v_{2-4} + v_{4-5} = 0$

### Do circuito ao grafo

Visando a uma mecanização da aplicação das leis de Kirchhoff, associaremos a cada circuito um grafo direcionado (que não será, necessariamente, único). O grafo direcionado é uma representação gráfica padrão para circuitos e é obtida como descrito a seguir.

Um grafo é definido por um conjunto de nós e um conjunto de ramos ligando estes nós. Se os ramos receberem uma orientação (o que acontecerá no nosso caso), o grafo é chamado de grafo direcionado ou dígrafo.

O dígrafo associado a um elemento de circuito com dois terminais é o mostrado na Figura 1.6.

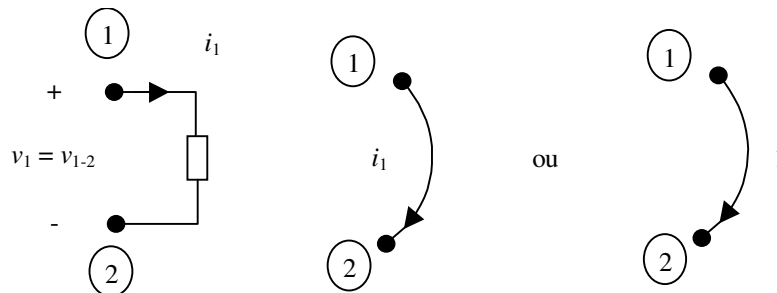


FIGURA 1.6 – Elemento de circuito de dois terminais e dígrafo associado.

$v_1$  é a chamada de tensão de ramo e  $i_1$  é chamada de corrente de ramo. Com as direções escolhidas, o produto  $v_1 i_1$  corresponde à potência entregue ao elemento de circuito através de seus terminais.

Para associar um grafo a um elemento de circuito com mais de dois terminais, considere-se o elemento de  $n$  terminais da Figura 1.7.

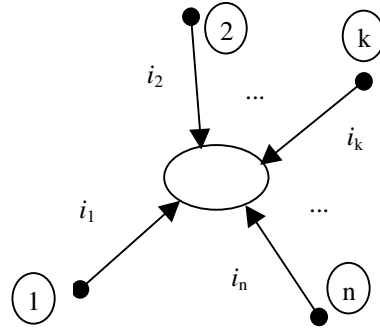


FIGURA 1.7 – Elemento de circuito de  $n$  terminais.

Como sabemos pela LKC que apenas  $n - 1$  correntes são independentes, pois

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0,$$

passamos a desconsiderar  $i_n$  (e a equação acima) e associamos ao elemento de circuito o grafo da Figura 1.8. O nó  $n$  torna-se assim o nó de referência do elemento de circuito. Em vez de optar pelo nó  $n$  como nó de referência, poder-se-ia optar por qualquer outro nó. O grafo resultante seria diferente, porém equivalente.

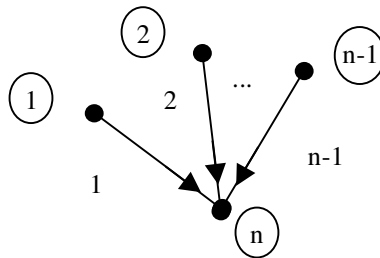


FIGURA 1.8 – Grafo associado a elemento de circuito de  $n$  terminais.

A potência instantânea fornecida a um elemento de circuito através de seus  $n$  terminais vale:

$$p(t) = \sum_{j=1}^{n-1} v_j(t) i_j(t)$$

*Exemplo:* Ao amplificador operacional do circuito da Figura 1.5 pode-se associar um grafo como mostrado abaixo. Neste caso, adotou-se o nó 5 como nó de referência (não para o circuito, mas para o amplificador operacional). Esta escolha não é a única possível. Para outras escolhas, o grafo resultante será diferente, porém equivalente.

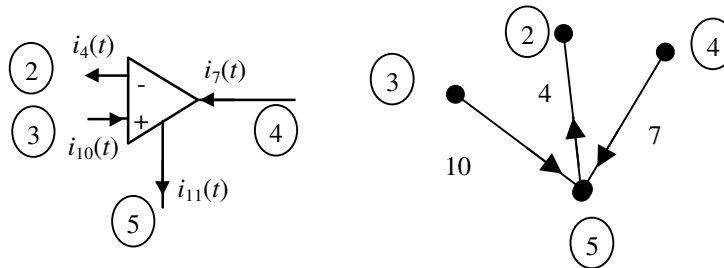


FIGURA 1.9 – Grafo associado a um amplificador operacional.

O grafo de um circuito é obtido pela interconexão dos grafos de seus elementos de circuito.

*Exemplo:* Um grafo representativo do circuito da Figura 1.5 é dado a seguir:

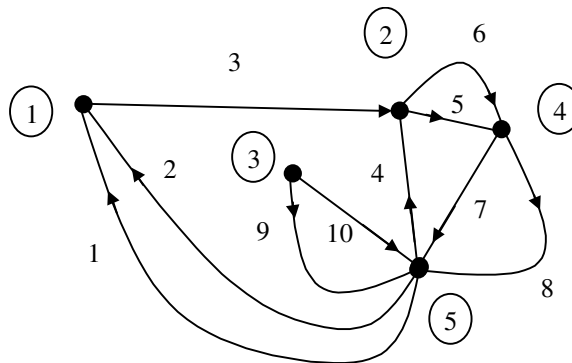


FIGURA 1.10 – Grafo correspondente ao circuito da Figura 1.5.

O problema remanescente é o procedimento (ainda em aberto) com os circuitos não-conectados. Circuitos não-conectados podem ser conectados usando um ramo de conexão "artificial", desprovido de significado físico, pois por ele não passará corrente. O procedimento é ilustrado na Figura 1.11.

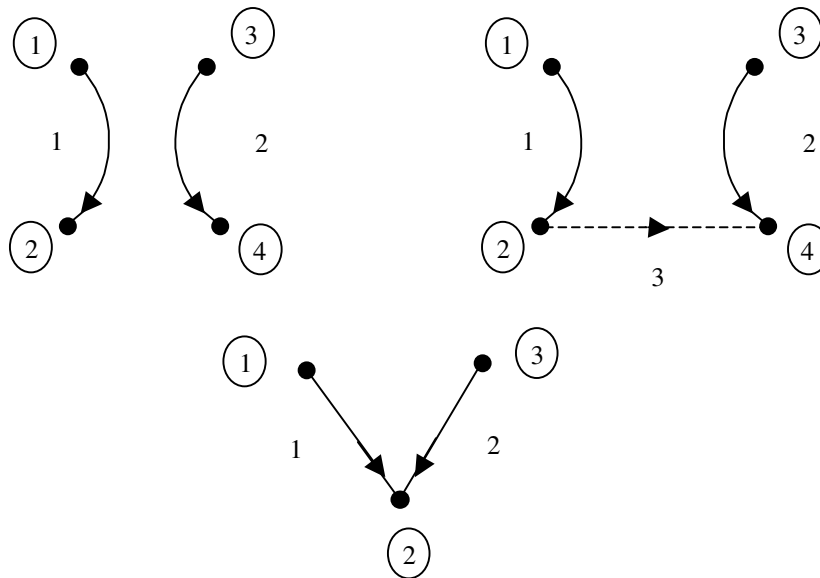


FIGURA 1.11 – Grafo desconectado (acima à esquerda) e o equivalente conectado (acima à direita) que pode ser simplificado eliminando-se o nó 4 (ao meio).

Ao equacionar circuitos usando as leis de Kirchhoff, os seguintes lapsos podem ocorrer com facilidade:

- pode-se omitir alguma equação importante;
- podem-se obter equações linearmente dependentes, isto é, equações em excesso.

Para ambos os casos, uma possível solução encontra-se num equacionamento sistemático a partir do dígrafo do circuito.

### LKC e LKT usando grafos e notação matricial

Para exposição do assunto, considere-se para equacionamento usando LKC e LKT um circuito com o dígrafo da Figura 1.12.

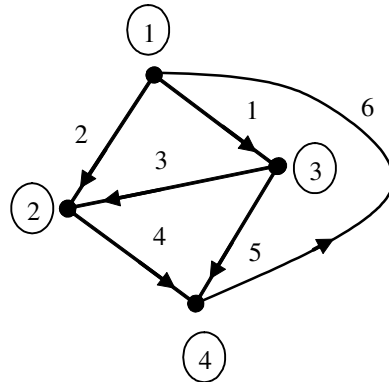


FIGURA 1.12: Exemplo de dígrafo.

As equações obtidas usando LKC são:

$$\text{Para o nó 1: } i_1 + i_2 - i_6 = 0$$

$$\text{Para o nó 2: } -i_2 - i_3 + i_4 = 0$$

$$\text{Para o nó 3: } -i_1 + i_3 + i_5 = 0$$

$$\text{Para o nó 4: } -i_4 - i_5 + i_6 = 0$$

Por convenção do enunciado dado para a LKC, o coeficiente da corrente que sai de um nó é +1 na equação referente àquele nó, é -1 quando entra no nó, e 0 nos demais casos.

As quatro equações obtidas são linearmente dependentes, pois a soma de seus lados esquerdos resulta em 0. Qualquer conjunto de três dessas equações, no entanto, é um conjunto de equações linearmente independentes. Tanto o conjunto de quatro equações quanto qualquer conjunto de três equações podem ser escritas na forma matricial, conforme abaixo. Aqui optou-se por eliminar a equação do nó 4 (escolhendo-o assim como nó de referência).

$$\begin{array}{l} \text{nó 1} \rightarrow \\ \text{nó 2} \rightarrow \\ \text{nó 3} \rightarrow \\ \text{nó 4} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = A_a i = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = A i = 0$$

O vetor  $i$  é o vetor das correntes de ramo. A matriz  $A_a$  recebe o nome de matriz de incidência, pois descreve os sentidos de incidência dos ramos nos nós. A matriz  $A$  é denominada matriz de incidência reduzida.

Uma vez que cada ramo interliga tão-somente dois nós, cada coluna da matriz de incidência deverá conter um 1 e um -1. Os demais elementos da coluna deverão ser nulos.

As equações obtidas usando LKT com o nó de referência 4 (isto é,  $e_4 = 0$ ) são:

$$\text{Para o ramo 1: } v_1 = e_1 - e_3$$

$$\text{Para o ramo 2: } v_2 = e_1 - e_2$$

$$\text{Para o ramo 3: } v_3 = -e_2 + e_3$$

$$\text{Para o ramo 4: } v_4 = e_2$$

$$\text{Para o ramo 5: } v_5 = e_3$$

$$\text{Para o ramo 6: } v_6 = -e_1$$

Também essas equações podem ser colocadas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \text{ ou } v = Me$$

O vetor  $v$  é o vetor das tensões de ramo. O vetor  $e$  é o vetor das tensões nó-referência. (No caso,  $e_4$  não consta da equação, pois o nó 4 é o nó de referência.) Observa-se que  $M = A^T$ .

### Propriedades gerais de circuitos concentrados

Uma matriz de incidência reduzida de um circuito conectado sempre possuirá pleno posto de linhas,<sup>1</sup> como será enunciado e demonstrado no teorema a seguir:

#### Teorema

Para qualquer dígrafo com  $n$  nós, as equações obtidas pela aplicação da LKC em sua formulação nodal para  $n-1$  nós quaisquer formam um conjunto de equações linearmente independentes

#### Demonstração

Denotemos a equação para o nó  $j$  da seguinte forma  $f_j(i_1, \dots, i_n) = 0$ . Suponha (por absurdo) que  $k \leq n-1$  equações das  $n$  são linearmente dependentes. Portanto existem  $a_1, \dots, a_k$  não todos nulos tais que:

$$\sum_{j=1}^k a_j f_j(i_1, \dots, i_n) = 0 \text{ para todos os valores de } i_1, \dots, i_n$$

Sem perda de generalidade pode-se assumir que todos os  $a_j$  são não nulos. Considerem-se agora dois conjuntos disjuntos de nós: os  $k$  nós das equações linearmente dependentes, e os demais. Como o grafo é conectado, existe pelo menos um ramo ligando um conjunto ao outro. A(s) corrente(s) deste(s) ramo(s) aparece(m) uma única vez no somatório acima e, portanto, não pode(m) estar sendo cancelada(s), ou seja, as equações não podem ser linearmente dependentes, o que é uma contradição.

Uma pergunta que resta é: por que com a  $n$ -ésima equação o conjunto torna-se um conjunto de equações linearmente dependentes? Isso acontece porque cada coluna da matriz de incidência  $A_a$  possui um único 1 e um único -1, o que significa que, se somarmos todas as equações, todos os termos estarão sendo cancelados.

#### Teorema de Tellegen

Seja dado um dígrafo de um circuito concentrado com  $b$  ramos, vetor  $i$  de correntes de ramo e vetor  $v$  de tensões de ramos. Então  $v^T i = 0$ .

#### Demonstração

Da LKT  $v = A^T e$ , onde  $A$  é a matriz de incidência reduzida e  $e$  o vetor de tensões nó-referência. Portanto,  $v^T i = e^T A i = 0$ , usando-se LKC.

#### Algumas interpretações para o teorema de Tellegen

a) O produto  $v^T i$  do Teorema de Tellegen pode ser reescrito como

$$v^T i = \sum_{j=1}^b v_j(t) i_j(t) = 0$$

<sup>1</sup> Uma matriz  $M$  possui pleno posto de linhas se a equação  $M^T x = 0$  admite  $x = 0$  como única solução.



Como visto anteriormente,  $v_k(t)i_k(t)$  é a taxa de fornecimento de energia ao ramo  $k$  pelo resto do circuito no tempo  $t$ . Assim pode-se concluir pelo teorema de Tellegen que a conservação de energia em circuitos concentrados é uma consequência das leis de Kirchhoff.

b) Tanto o vetor  $i$  (solução das equações de LKC) como o vetor  $v$  (solução das equações de LKT) são elementos do  $\mathfrak{R}^b$ . O primeiro vetor existe no subespaço das soluções de LKC, de dimensão  $b - (n - 1)$ . O segundo vetor existe no subespaço das soluções de LKT, de dimensão  $(n - 1)$ . O teorema de Tellegen nos informa que estes dois subespaços são ortogonais.

### Exercícios propostos

#### Exercício 1:

No circuito da Figura 1.13, considere

$$v_{a-N'} = 100 \text{ [V]}, v_{b-N'} = 100 \text{ [V]},$$

$$v_{c-N'} = 50 \text{ [V]}, v_{a-N} = 16,7 \text{ [V]}.$$

- Encontre os valores das tensões  $v_{b-N}$  e  $v_{c-N}$ .
- Trace o dígrafo do circuito e repita o item (a) usando o dígrafo.

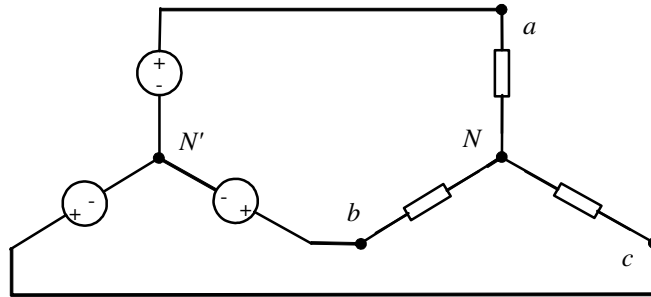


FIGURA 1.13

#### Exercício 2:

- Trace o dígrafo do circuito da Figura 1.5 usando o nó 4 como nó de referência do amplificador operacional. Determine a matriz de incidência  $A_a$  e determine seu posto, isto é, o número de linhas linearmente independentes.
- Usando agora o nó 5 como nó de referência do amplificador operacional, escreva as equações das leis de Kirchhoff usando a matriz de incidência reduzida.

#### Exercício 3:

- No circuito da Figura 1.14, dê nome aos nós e ramos. A seguir, determine o dígrafo do circuito e a matriz de incidência correspondente.
- Suprima uma das linhas da matriz de incidência e verifique que as linhas ainda são linearmente dependentes. Explique.
- Conecte o dígrafo obtido no item (a) e determine a matriz de incidência reduzida do novo dígrafo, que agora é um dígrafo conectado. Verifique que as linhas desta matriz são linearmente independentes.
- Usando a matriz de incidência reduzida do item anterior, escreva as equações que resultam das leis de Kirchhoff.

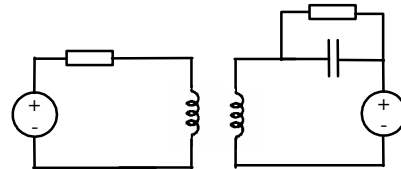


FIGURA 1.14

#### Exercício 4:

- Reescreva as equações das leis de Kirchhoff para o grafo da Figura 1.12.
- Uma solução do sistema de equações fica determinada com a escolha das três tensões de ramo e de um conjunto de 3 valores de correntes de ramo. Escolha dois conjuntos diferentes de valores para três correntes e a três tensões.
- Para cada uma de suas duas escolhas, calcule as tensões de ramo e as correntes de ramo remanescentes.
- De posse dos valores do item (c), verifique o teorema de Tellegen, isto é, verifique que de fato para ambos os conjuntos de soluções

$$v^T i = \sum_{j=1}^b v_j(t) i_j(t) = 0.$$

## 2. Resistores com dois terminais

Obtidas as equações das leis de Kirchhoff, restam graus de liberdade (ver exercício 4 do Capítulo 1) e por isso é importante considerar as relações entre tensões e correntes de ramos do circuito. Essas relações são definidas pelo comportamento dos elementos de circuito. A primeira classe de elementos de circuito a ser estudada é a dos resistores.

*Definição:*

*Resistor* é um elemento de circuito definido completamente pela relação entre os valores instantâneos de corrente  $i(t)$  e tensão  $v(t)$ , isto é, por sua característica tensão  $\times$  corrente (ou corrente  $\times$  tensão).

### Resistores de dois terminais

No caso do resistor linear de dois terminais existe proporcionalidade entre corrente e tensão do ramo correspondente no grafo do circuito, isto é, vale a lei de Ohm:

$$v(t) = Ri(t) \quad \text{ou} \quad i(t) = Gv(t)$$

Assim  $R$  e  $G$  relacionam-se por  $R = 1/G$ . O valor  $R$  é denominado *resistência* (medida em Ohm,  $[\Omega] = [V/A]$ ). O valor  $G$  é denominado *condutância* (medida em Siemens,  $[S] = [A/V]$ ). Curto circuitos ( $R = 0$ ) e circuitos abertos ( $G = 0$ ) são casos-limite do resistor linear.

Mas, de forma geral, a característica  $v(t) \times i(t)$  (ou  $i(t) \times v(t)$ ) pode ser não-linear. No caso geral, tem-se:

$$\mathfrak{R}_R = \{(v, i) : f(v, i) = 0\}$$

Como visto anteriormente, para o caso linear  $f$  assume a forma particular

$$f(v, i) = v - Ri$$

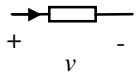
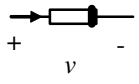
ou

$$\tilde{f}(v, i) = i - Gv$$

A característica resistiva  $f(v, i)$  é denominada *a característica dual* de  $f(v, i)$ . Uma característica  $f(v, i)$  é chamada *característica bilateral* quando  $f(v, i) = f(-v, -i)$ . A bilateralidade corresponde à simetria da característica em relação à origem. Resistores lineares são bilaterais.

A simbologia adotada para resistores neste trabalho é indicada na Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Simbologia para resistores de dois terminais.

Resistor linear	$i$ $R$ ou $G$ 
Resistor não-linear	$i$ $f(v, i)$ 

*Definições:*

- *Resistores controlados por corrente* são aqueles que têm o valor de tensão entre seus terminais univocamente determinado para dado valor de corrente.
- *Resistores controlados por tensão* são aqueles que têm o valor de corrente através de seus terminais univocamente determinado para dado valor de tensão.

Muitas vezes um resistor é tanto um resistor controlado por tensão quanto um resistor controlado por corrente. Este é o caso dos resistores lineares.

Entre resistores lineares e não-lineares existem algumas diferenças marcantes de comportamento.

- Resistores não-lineares produzem harmônicas (superiores).
- Para resistores não-lineares, muitas vezes aproximações lineares por partes podem ser usadas.

Tabela 2.2 – Comparação de resistores lineares e não-lineares.

Resistores lineares	Resistores não-lineares
$i(v_1 + v_2) = i(v_1) + i(v_2)$	$i(v_1 + v_2) \neq i(v_1) + i(v_2)$
$i(kv) = ki(v)$	$i(kv) \neq ki(v)$

*Exemplo:* Um resistor não-linear com a característica corrente  $\times$  tensão da Figura 2.1 produz uma forma de onda de corrente não-senoidal, quando a tensão aplicada é senoidal. A deformação da forma de onda é decorrente à produção de harmônicas pelo resistor não-linear.

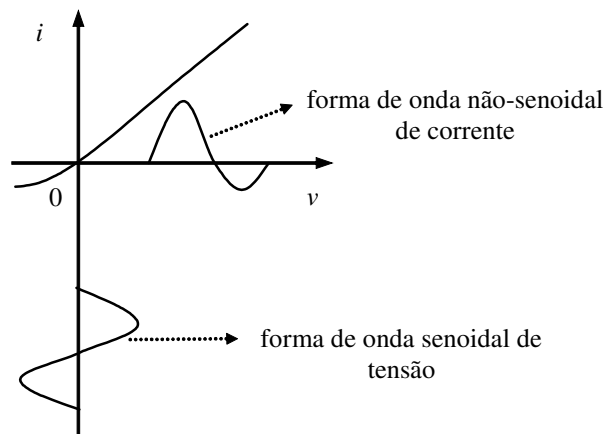


FIGURA 2.1 – Produção de harmônicas por um resistor não-linear.

### Potência, passividade e modelamento

Um resistor é denominado *passivo* se apenas dissipa energia, isto é, o produto  $v(t)i(t)$  para o ramo correspondente do grafo do circuito é positivo. Um resistor não-passivo é chamado de *ativo*. Neste caso, o produto  $v(t)i(t)$  para o ramo correspondente é negativo

*Exemplos:*

- Um resistor linear é passivo se  $R \geq 0$ .
- Um resistor não-linear é ativo se sua característica  $v(t) \times i(t)$  ou alternativamente  $i(t) \times v(t)$  estiver contida inteiramente no segundo e quarto quadrantes.

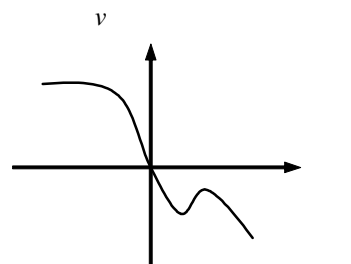


FIGURA 2.2 – Característica  $v(t) \times i(t)$  de um resistor ativo.

## Diodo

O diodo de junção é um dispositivo bastante comum em circuitos. Frequentemente pode ser aproximado por um diodo ideal. As características do diodo ideal e um modelo exponencial para o diodo de junção são dados na Tabela 2.3.

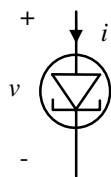
Tabela 2.3 – Símbolos e características de diodos.

	Símbolo	Característica	Expressão analítica
<b>Diodo ideal</b>			$\mathfrak{R}_{di} = \{(v, i) : v i = 0, i = 0 \text{ p/ } v < 0 \text{ e } v = 0 \text{ p/ } i > 0\}$
<b>Diodo de junção</b>			Na região exponencial: $i = I_s \left[ e^{\frac{v}{v_T}} - 1 \right]$ onde $v_T, I_s$ são constantes características

### 2.1.3 Diodo túnel

O diodo túnel é um resistor não-linear controlado por tensão com o símbolo e tipo de característica dado na Figura 2.3.

Símbolo:



Característica:

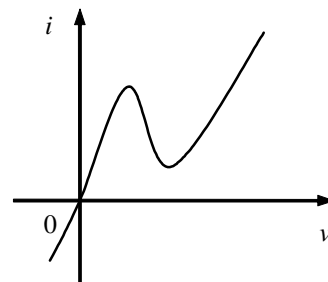


FIGURA 2.3: Símbolo e característica típica de um diodo túnel.

### Resistores variantes e invariantes no tempo

Um resistor é *invariante no tempo* quando a característica que o define independe da variável tempo, isto é, quando é do tipo

$$\mathfrak{R}_R = \{(v, i) : f(v, i) = 0\}$$

Um resistor é *variante no tempo* quando a característica que o define é da forma

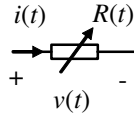
$$\mathfrak{R}_R = \{(v, i, t) : f(v, i, t) = 0\}$$

Observação:

- As variáveis tensão e corrente para qualquer resistor são, de forma geral, variantes no tempo. A definição acima para *variante no tempo* refere-se à relação entre tensão e corrente de ramo.

*Exemplos:* Dois exemplos de resistores variantes no tempo são potenciômetros e chaves, cujos símbolos são dados abaixo.

Potenciômetros:



Chaves:

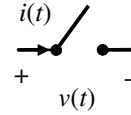


FIGURA 2.4 – Simbologia para potenciômetros e chaves.

### Fontes não controladas

Fontes de tensão e corrente com valores fixos ou dependentes apenas da variável tempo são chamadas de fontes não controladas (ou independentes).

- Uma fonte de tensão não controlada é um elemento de circuito que mantém uma tensão especificada  $v_f(t)$  entre seus terminais, não importando a corrente por ela.
- Uma fonte de corrente não controlada é um elemento de circuito que mantém uma corrente especificada  $i_f(t)$  entrando e saindo de um circuito qualquer ao qual está conectado. O valor de corrente independe da tensão entre os terminais da fonte.

Tanto a fonte de tensão quanto a fonte de corrente satisfazem a definição dada para resistores. Os símbolos adotados para fontes de tensão e corrente independentes encontram-se na Figura 2.5.

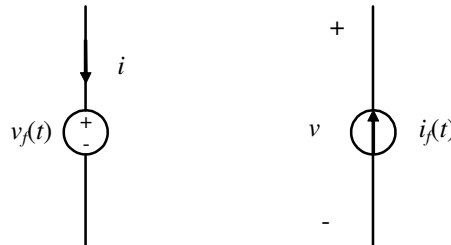


FIGURA 2.5 – Símbolos para fontes não controladas de tensão e corrente.

Fontes de tensão invariantes no tempo são também frequentemente representadas pelo símbolo da Figura 2.6.

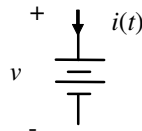


FIGURA 2.6 – Símbolo para fontes de tensão constantes.

O elemento de circuito *fonte de tensão* é um elemento idealizado. A tensão entre os terminais de uma fonte de tensão real varia quando ela é conectada a um circuito. Esse efeito de *carregamento* é modelado por uma resistência de saída, conforme mostrado na Figura 2.7. Para a fonte ideal  $R = 0$ .

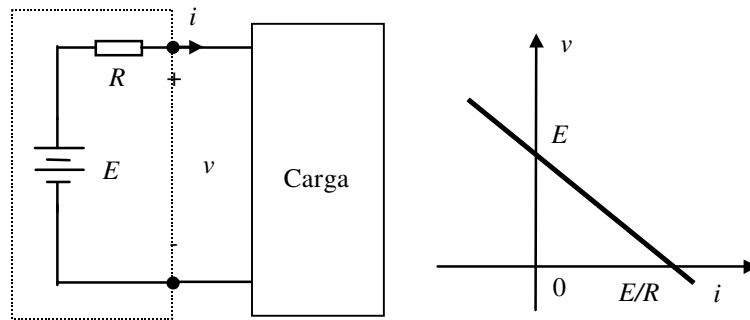


FIGURA 2.7 – Fonte de tensão com resistor modelando o efeito de carregamento: diagrama de circuito e característica tensão  $\times$  corrente.

A fonte de corrente também é um elemento idealizado. Uma fonte de corrente real pode ser modelada por uma fonte ideal em paralelo com um resistor linear conforme mostrado na figura 2.8.

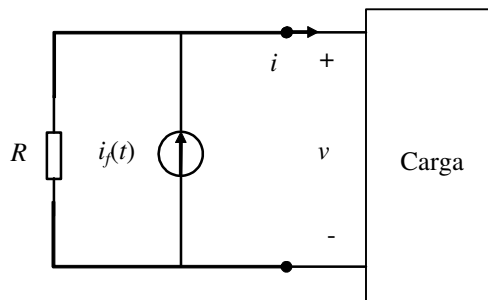


FIGURA 2.8 – Fonte de corrente com resistor modelando o efeito de carregamento.

### Conexões em série, em paralelo e série-paralelo

Conexões de resistores em série, em paralelo e série-paralelo podem ser vistas como elementos de circuitos resistivos.

Na interconexão série de dois ou mais resistores, as características de tensão  $\times$  corrente somadas ponto-a-ponto resultam na características de tensão  $\times$  corrente da interconexão. O caso da interconexão série de dois resistores não-lineares é ilustrado na Figura 2.9.

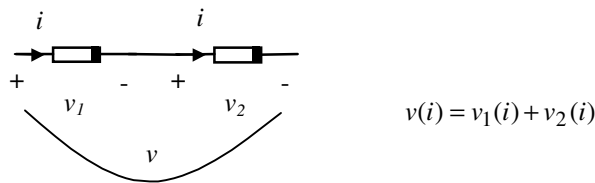


FIGURA 2.9 – Interconexão série de dois resistores não-lineares.

Na interconexão paralelo de dois ou mais resistores, as características de corrente  $\times$  tensão somadas ponto a ponto resultam na características de corrente  $\times$  tensão da interconexão. A interconexão paralelo de dois resistores não-lineares é ilustrada na Figura 2.10.

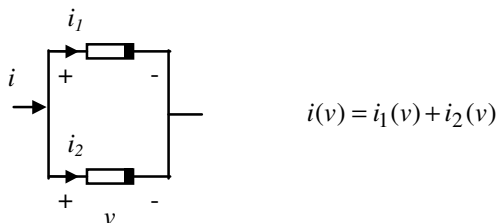


FIGURA 2.10 – Interconexão paralelo de dois resistores não-lineares.

No caso da conexão série de  $n$  resistores lineares com resistências  $R_1, \dots, R_n$ , tem-se:

$$v(i) = \sum_{j=1}^n v_j(i) = \sum_{j=1}^n R_j i = \left[ \sum_{j=1}^n R_j \right] i$$

Ou seja, o conjunto possui uma resistência igual à soma das resistências.

No caso da conexão paralelo de  $m$  resistores lineares com condutâncias  $G_1, \dots, G_m$ , tem-se:

$$i(v) = \sum_{j=1}^m i_j(v) = \sum_{j=1}^m G_j v = \left[ \sum_{j=1}^m G_j \right] v$$

Ou seja, o conjunto possui uma condutância igual à soma das condutâncias.

Na determinação da resistência ou condutância equivalente de interconexões série-paralelo de resistores lineares, procede-se por partes

*Observação:*

Nem toda interconexão de elementos de circuitos faz sentido. A conexão em série de fontes de corrente com correntes diferentes ou a conexão em paralelo de fontes de tensão com tensões diferentes são dois exemplos de interconexões sem sentido físico.

*Exemplo:* Na Figura 2.11 é ilustrada a conexão série de três resistores e a obtenção da característica resultante para a interconexão. Como se trata de uma interconexão série, a característica resultante é obtida somando-se as características de cada resistor da interconexão.

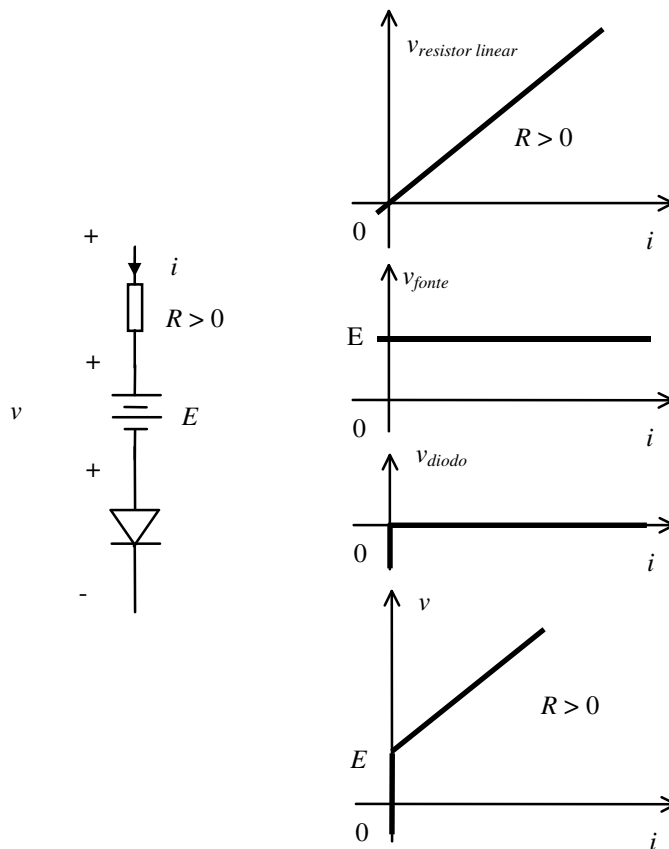


FIGURA 2.11 – Exemplo de interconexão série e característica resultante.

Exemplos:

1. Um *divisor de tensão* é um subcircuito com dois resistores lineares como o mostrado na figura 2.12, que pode ser usado para criar uma tensão  $v_2$  proporcional a uma tensão disponível  $v$ . Neste circuito  $v = v_1 + v_2 = R_1 i + R_2 i$  e portanto

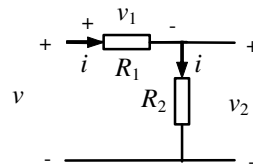
$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v.$$


FIGURA 2.12 – Divisor de tensão.

2. Um *divisor de corrente* é um subcircuito com dois resistores lineares como o mostrado na figura 2.13, que pode ser usado para criar uma corrente  $i_2$  proporcional a uma corrente disponível  $i$ . Neste circuito  $i = i_1 + i_2 = G_1 v + G_2 v$  e portanto

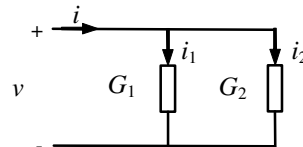
$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i.$$


FIGURA 2.13 – Divisor de corrente.

## Circuitos equivalentes

Na seção anterior, ficou claro que uma interconexão de resistores em série ou em paralelo pode ser substituída por um resistor com característica derivada daquelas dos elementos da interconexão. Diz-se nestes casos que os circuitos correspondentes (com os vários ou com um único resistor resultante da interconexão) são *equivalentes*. De forma geral, *circuitos equivalentes* são aqueles que possuem as mesmas propriedades elétricas nas portas de acesso. Uma porta de acesso é constituída de um par de pontos de acesso ou terminais.

Exemplo: O par mais famoso de circuitos equivalentes e sua característica tensão  $\times$  corrente são dados na Figura 2.14.

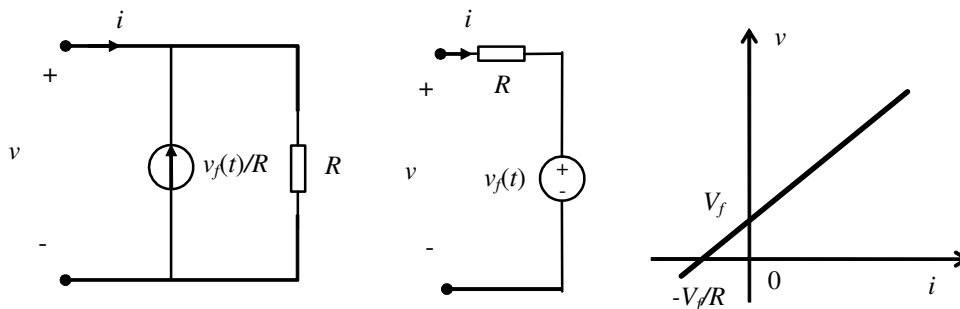


FIGURA 2.14 – Circuitos equivalentes de Norton (esquerda) e Thévenin (centro), com característica típica para  $v_f(t) = V_f$  constante.



Os parâmetros  $R$  e  $v_f(t)$  podem ser obtidos observando que eles se relacionam com a corrente de curto-circuito tensão em aberto do circuito.  $v_f(t)$  é a própria tensão em aberto, e  $R$  é a razão entre essa tensão em aberto e a corrente de curto-circuito.

A Figura 2.15 apresenta um circuito exemplo e seus equivalentes de Thévenin e Norton cujos parâmetros podem ser obtidos da forma descrita acima.

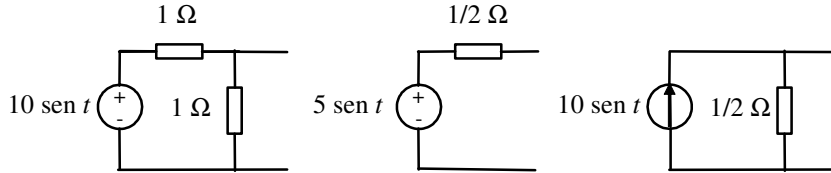


FIGURA 2.15 – Circuito exemplo (esquerda) com seus equivalentes de Norton (direita) e Thévenin (centro).

### Resistores côncavos e convexos

Nesta seção será discutido o uso sistemático da aproximação linear por partes para tratar características de resistores não-lineares. Tais aproximações podem ser muito úteis, pois nas regiões lineares o tratamento do circuito é bastante simplificado. Duas definições serão empregadas neste estudo.

- *Definição 1*

Um *resistor côncavo* é um elemento de circuito de dois terminais cuja característica corrente  $\times$  tensão e símbolo são definidos na Figura 2.16.

$$i(v) = \frac{1}{2}G[|v - E| + (v - E)]$$

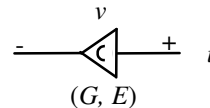


FIGURA 2.16 – Característica e símbolo de um resistor côncavo.

- *Definição 2*

Um *resistor convexo* é um elemento de circuito de dois terminais cuja característica tensão  $\times$  corrente e símbolo são definidos na Figura 2.17.

$$v(i) = \frac{1}{2}R[|i - I| + (i - I)]$$

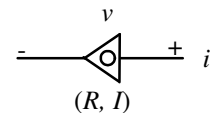


FIGURA 2.17 – Característica e símbolo de um resistor convexo.

Para  $G > 0$  um resistor côncavo pode ser realizado pela conexão série de um resistor linear, uma fonte de tensão constante e um diodo ideal como mostrado na Figura 2.18.

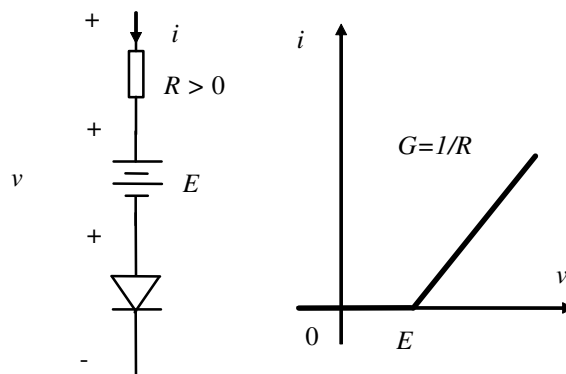


FIGURA 2.18 – Realização de um resistor côncavo (esquerda) e esboço de sua característica (direita).

Para  $R > 0$  um resistor convexo pode ser realizado pela conexão paralelo de um resistor linear, uma fonte de corrente constante e um diodo ideal como mostrado na Figura 2.19.

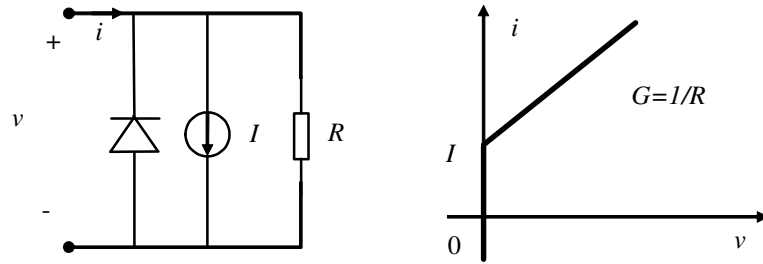


FIGURA 2.19 – Realização de um resistor convexo (esquerda) e esboço de sua característica (direita).

### Aproximações lineares por partes

Na aproximação de características não-lineares quaisquer por características lineares por partes, não se procura uma linearização local da característica, mas sim uma aproximação global por uma coleção de segmentos de reta e semirretas. No caso de um elemento de circuito controlado por tensão, uma característica linear por partes sempre poderá ser representada por:

$$i(v) = a_0 + a_1 v + \sum_{j=1}^n b_j |v - E_j| \quad (2.1)$$

onde  $E_1 < \dots < E_n$  são os pontos de quebra. Dados o valor da corrente  $i(v = 0)$ , e a inclinação do  $j$ -ésimo segmento de reta (ou semirreta)  $m_j$ , os valores de  $a_0$ ,  $a_1$  e dos  $b_j$  são calculados da seguinte forma:

$$a_1 = \frac{1}{2}(m_0 + m_n) \quad b_j = \frac{1}{2}(m_j - m_{j-1}) \quad a_0 = i(0) - \sum_{j=1}^n b_j |E_j|$$

Uma característica linear por partes controlada por tensão do tipo (2.1) pode ser sintetizada (isto é, criada) por uma fonte de corrente, um resistor linear e resistores côncavos em paralelo.

Com características não-lineares controladas por corrente procede-se analogamente. A síntese nesse caso acontecerá usando fonte de tensão, resistor linear e resistores convexos conectados em série.

*Exemplo:* Considere uma característica de diodo túnel a ser aproximada usando segmentos de reta e semirretas. A característica com uma aproximação possível superposta é mostrada na Figura 2.20 juntamente com uma decomposição que considera o uso de um resistor linear e dois resistores côncavos, um deles com parâmetro  $G < 0$ .

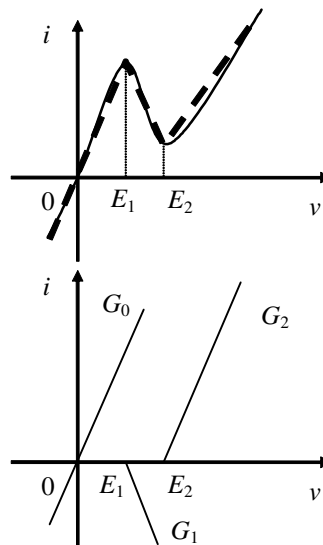


FIGURA 2.20 – Aproximação linear por partes de uma característica de diodo túnel e sua decomposição.

A expressão para a característica aproximada vale:

$$i(v) = a_0 + a_1 v + b_1 |v - E_1| + b_2 |v - E_2| \quad (2.2)$$

O circuito correspondente é mostrado na Figura 2.21.

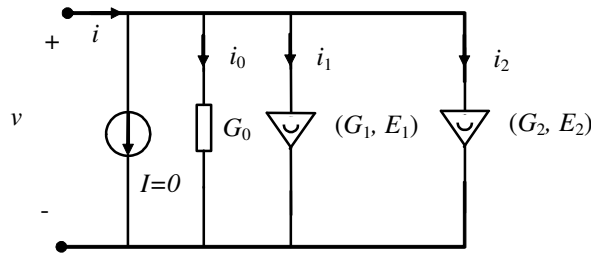


FIGURA 2.21 – Circuito que aproxima a característica de um diodo túnel.

Para a corrente dos ramos, tem-se:

$$\begin{aligned} i_0 &= G_0 v \\ i_1 &= \frac{1}{2} G_1 [|v - E_1| + (v - E_1)] \\ i_2 &= \frac{1}{2} G_2 [|v - E_2| + (v - E_2)] \\ i &= i_0 + i_1 + i_2 \end{aligned}$$

Da comparação da última expressão acima com a expressão 2.2, obtém-se a correspondência entre os coeficientes  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  e os parâmetros  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$ .

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}(G_1 E_1 + G_2 E_2) \\ a_1 &= G_0 + \frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_2 \\ b_1 &= \frac{1}{2} G_1 \\ b_2 &= \frac{1}{2} G_2 \end{aligned}$$

Aqui há 4 equações com apenas 3 graus de liberdade, isto é, apenas 3 das variáveis podem ser escolhidas independentemente. De fato, de considerações anteriores tem-se que  $a_0 = -b_1 |E_1| + b_2 |E_2|$ .

## Análise DC

A análise DC consiste na obtenção de soluções (tensões e correntes) para circuitos invariantes no tempo com fontes constantes (ou DC, do inglês *direct current*). Tais soluções são chamadas pontos de operação. Para discutir as problemáticas, considerem-se dois circuitos resistivos com fontes constantes, conectados por suas portas de acesso, conforme mostrado na Figura 2.22.

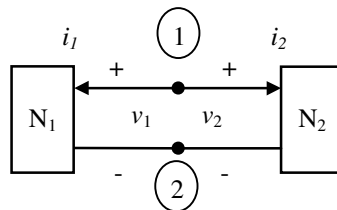


FIGURA 2.22 – Dois circuitos resistivos de uma porta conectados entre si.

Sejam as características dos dois circuitos dadas por  $f_1(v_1, i_1) = 0$  e  $f_2(v_2, i_2) = 0$ . As equações das leis de Kirchhoff são:

$$LKT \rightarrow v_1 = v_2 = v$$

$$LKC \rightarrow -i_1 = i_2 = i$$

Por isso, as soluções (isto é, os pontos de operação) são determinadas a partir do sistema de equações

$$f_1(v, -i) = 0$$

$$f_2(v, i) = 0$$

Essas duas equações combinam as características dos dois circuitos e as equações obtidas pelas leis de Kirchhoff, equações estas que traduzem as propriedades de interconexão dos dois circuitos. Para a solução do sistema de duas equações, podem-se usar métodos:

- analíticos: quando expressões analíticas para  $f_1$  e  $f_2$  forem conhecidas e uma solução analítica for viável;
- gráficos: quando as características  $f_1$  e  $f_2$  estiverem disponíveis na forma de gráficos; ou
- numéricos: usando algoritmos numéricos de solução de equações transcendentais (no caso geral de circuitos não-lineares).

Na análise DC poderão ocorrer 3 situações:

- existência de solução única (exemplo: fonte de tensão alimentando um resistor linear);
- existência de soluções múltiplas (ver exemplo abaixo);
- solução inexistente (exemplo: fonte de corrente alimentando diodo ideal polarizado inversamente).

*Exemplo:* Determinar as soluções (pontos de operação) para o circuito da Figura 2.23a.

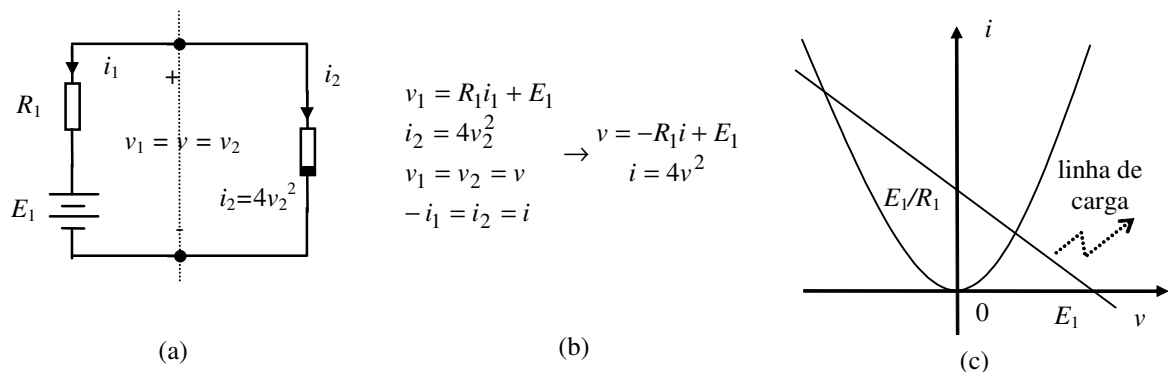


FIGURA 2.23 – (a) Circuito resistivo não-linear; (b) equacionamento da análise DC; (c) solução gráfica da análise DC.

Pelo procedimento gráfico de solução ilustrado na Figura 2.23c, constata-se que existem dois pontos de operação possíveis para este circuito. O procedimento gráfico é equivalente à solução numérica das equações dadas na Figura 2.23b. No caso de características simples ou não-analíticas, o procedimento gráfico pode ser vantajoso.

## Análise de pequenos sinais

Na análise de pequenos sinais, parte-se da premissa de que, além das fontes invariantes no tempo, existem fontes contribuindo com sinais de corrente ou tensão de pequena amplitude. Por “pequena amplitude” entende-se uma amplitude tal que os valores dos pontos de operação do circuito não sofram uma alteração significativa. O significado quantitativo desta hipótese varia de aplicação para aplicação, pois o que pode ser

uma amplitude pequena num contexto, pode não sê-lo em outro. A análise de pequenos sinais às vezes também recebe o nome de análise AC (do inglês *alternated current*).

Partindo da hipótese de que os sinais são de pequena amplitude, busca-se equacionar separadamente o ponto de operação (contribuição das fontes constantes), usando análise DC, e a contribuição do sinal, usando a *análise de pequenos sinais*. Para isto procede-se em três passos:

- determina-se o ponto de operação usando o modelo não-linear;
- lineariza-se o circuito em torno do ponto de operação;
- usa-se o circuito linearizado para determinar a contribuição de sinal.

O procedimento é ilustrado no exemplo a seguir.

*Exemplo:* Determinar  $v(t)$  em função de  $v_s(t)$  para o circuito da Figura 2.24.

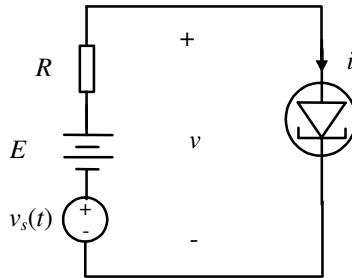


FIGURA 2.24 – Circuito não-linear com diodo túnel.

As duas equações que definem as variáveis  $v(t)$  e  $i(t)$  do circuito são:

$$v(t) = v_s(t) - Ri(t) + E$$

$$i(t) = \hat{i}[v(t)]$$

Em termos gráficos a situação é representada na Figura 2.25.

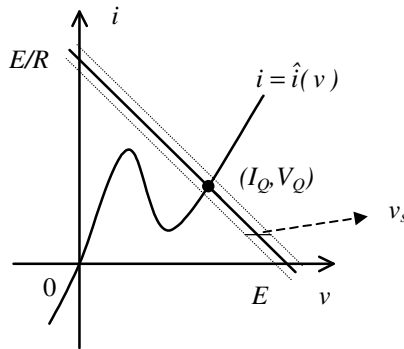


FIGURA 2.25 – Determinação do ponto de operação do circuito da Figura 2.24.

O ponto de operação  $Q = (I_Q, V_Q)$  é obtido fazendo-se  $v_s(t) = 0$  e resolvendo-se

$$V_Q = -RI_Q + E$$

$$I_Q = \hat{i}(V_Q)$$

onde  $\hat{i}$  é a característica conhecida do diodo túnel usado no circuito.

Tensão  $v(t)$  e corrente  $i(t)$  podem ser entendidas como variáveis que recebem duas contribuições:

- uma do ponto de operação (valor quiescente, estático), e
- uma do sinal.

Dessa forma

$$\begin{aligned} v(t) &= \tilde{v}(t) + V_Q \\ i(t) &= \tilde{i}(t) + I_Q \end{aligned}$$

onde  $\tilde{i}(t), \tilde{v}(t)$  são as contribuições das fontes de pequenos sinais às correntes e tensões de ramos. A movimentação em torno de  $Q$  é então descrita por:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) + V_Q &= v_s(t) - RI_Q - R\tilde{i}(t) + E \\ I_Q + \tilde{i}(t) &= \hat{i}[\tilde{v}(t) + V_Q] \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v_s(t) - R\tilde{i}(t) \\ I_Q + \tilde{i}(t) &= \hat{i}[\tilde{v}(t) + V_Q] \end{aligned}$$

Caso  $\tilde{v}(t)$  seja “pequeno”, então a seguinte aproximação de primeira ordem é razoável:

$$I_Q + \tilde{i}(t) = \hat{i}[\tilde{v}(t) + V_Q] \cong \hat{i}[V_Q] + \left. \frac{d\hat{i}(v)}{dv} \right|_{v=V_Q} \tilde{v}(t)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= v_s(t) - R\tilde{i}(t) \\ \tilde{i}(t) &\cong \left. \frac{d\hat{i}(v)}{dv} \right|_{v=V_Q} \tilde{v}(t) = G(V_Q)\tilde{v}(t) \end{aligned}$$

Este equacionamento corresponde ao equacionamento de um assimo chamado *circuito de pequenos sinais*, que para este exemplo é mostrado na Figura 2.25. A quantidade  $G(V_Q)$  é denominada *condutância de pequenos sinais* e é função do ponto de operação.

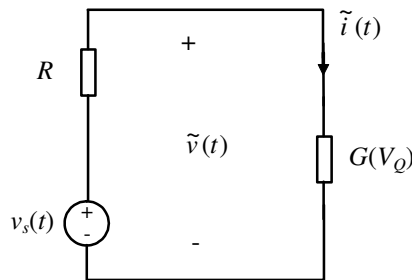


FIGURA 2.26 – Circuito de pequenos sinais para o circuito da Figura 2.24.

A solução da análise de pequenos sinais contempla apenas as variações em torno do ponto de operação e será:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \frac{1}{1 + RG(V_Q)} v_s(t) \\ \tilde{i}(t) &= \frac{G(V_Q)}{1 + RG(V_Q)} v_s(t) \end{aligned}$$

### Ganho

No exemplo anterior, a solução para a tensão foi:

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{1 + RG(V_Q)} v_s(t) \quad \text{ou} \quad \frac{\tilde{v}(t)}{v_s(t)} = \frac{1}{1 + RG(V_Q)}$$

A quantidade  $|1/(1 + RG)|$  corresponde a um *ganho* de tensão de sinal, que pode ser elevado, para valores adequados negativos da condutância de pequenos sinais  $G$ .

Pode-se pensar em termos de ganho também considerando a variável potência. Se definirmos a potência de sinal como o produto da corrente e tensão obtidos na análise de pequenos sinais, tem-se, para o caso do exemplo acima, o seguinte valor para o ganho de potência de sinal

$$\left| \frac{\tilde{v} \tilde{i}}{v_s \tilde{i}} \right| = \left| \frac{1}{1 + RG} \right|,$$

que neste caso coincide com o ganho de tensão. Via de regra, no entanto, os valores para o ganho de potência e de tensão serão diferentes.

## Características de transferência

Por característica de transferência entende-se a característica que relaciona duas variáveis de interesse, uma delas considerada variável de entrada (ou determinante) e outra variável de saída (ou determinada pela escolha da entrada). Quando se tratar de circuitos resistivos, as características de transferência sempre serão estáticas e poderão ser expressas usando equações algébricas ou na forma gráfica como no exemplo a seguir.

---

*Exemplo:* A característica de transferência de  $v_i(t)$  para  $v_o(t)$  do circuito retificador da Figura 2.27 pode ser determinada a partir das características de cada elemento de circuito.

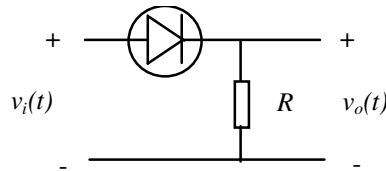


FIGURA 2.27 – Circuito retificador.

A característica de transferência de  $v_i(t)$  para  $v_o(t)$  do circuito da Figura 2.27 é dada na Figura 2.28.

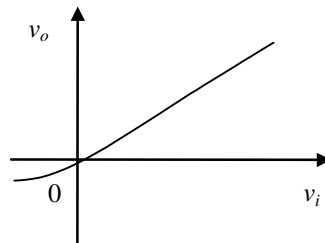


FIGURA 2.28 – Característica de transferência do circuito retificador da Figura 2.27.

---

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

Suponha que um resistor não-linear controlado por tensão tenha a seguinte característica:

$$i(t) = v(t) + v^2(t) + v^3(t).$$

Determine  $i(t)$  para  $v(t) = \cos(\omega t)$ . Quais frequências estão presentes no sinal  $i(t)$  além da harmônica fundamental  $\omega$ ?

### Exercício 2:

Determine as características  $i \times v$  dos circuitos da Figura 2.29.

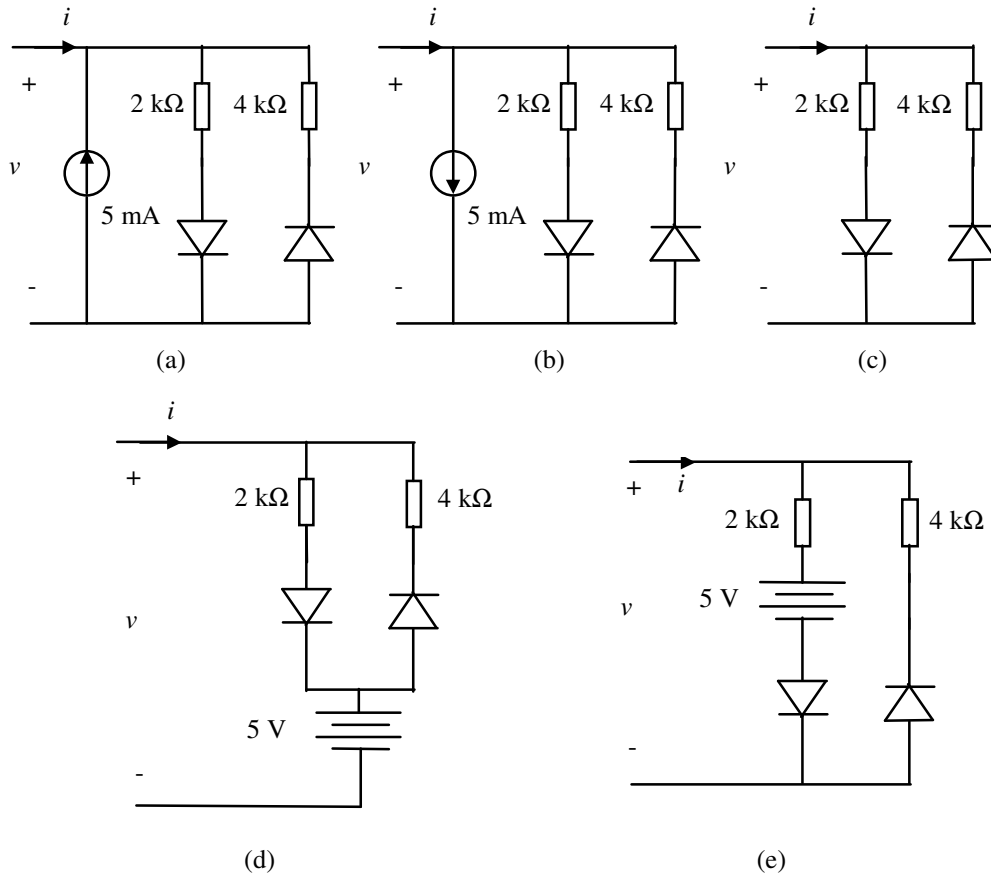


FIGURA 2.29

**Exercício 3:**

Os circuitos da Figura 2.29(a)-(b) são conectados em paralelo. Determine a característica corrente  $\times$  tensão da interconexão e determine um circuito equivalente para o conjunto, isto é, um circuito mais simples com o mesmo comportamento corrente  $\times$  tensão.

**Exercício 4:**

Determine a característica  $i \times v$  do circuito da Figura 2.30. Apresente um esboço gráfico da característica resultante.

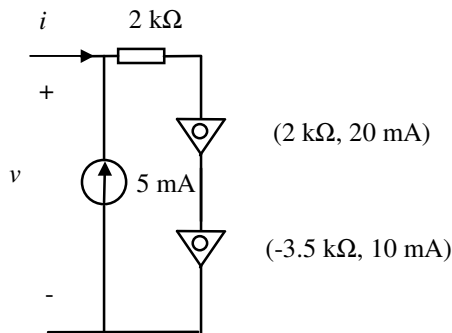


FIGURA 2.30

**Exercício 5:**

Trace o grafo orientado correspondente ao circuito da Figura 2.31. Determine a matriz de incidência e a matriz de incidência reduzida. Determine um conjunto de equações (suficientemente determinado) que permita calcular todas as correntes de ramo em função dos  $R_b$ ,  $I_b$ ,  $E$  e  $I$ .



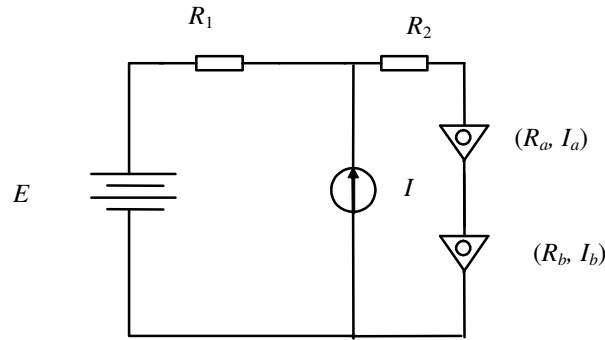


FIGURA 2.31

**Exercício 6:**

- Quais os pontos de operação  $(v, i)$  do circuito da Figura 2.32?
- Determine o circuito equivalente de pequenos sinais em cada um dos pontos de operação.

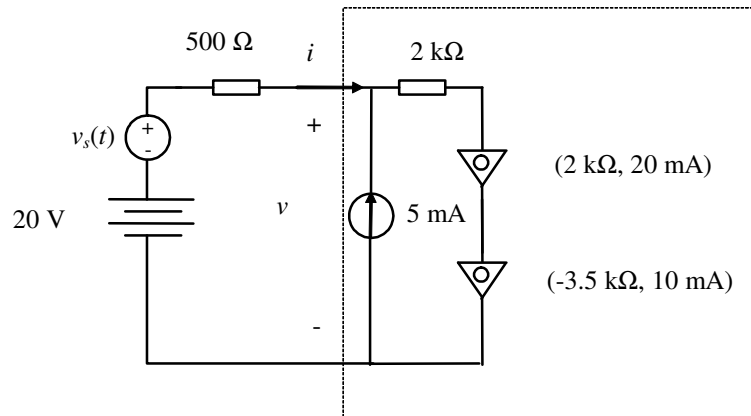


FIGURA 2.32

**Exercício 7:**

Faça um balanço de potência completo para o circuito do exercício 6, explicando para cada ponto de operação quais os elementos de circuito que dissipam potência e quais os elementos que fornecem potência no circuito. Por balanço de potência entende-se o cálculo da potência dissipada ou fornecida por elemento de circuito e a verificação final de que a soma das potências fornecidas é igual às dissipadas.

**Exercício 8:**

Qual a característica de transferência de  $v_i(t)$  para  $v_o(t)$  do circuito da Figura 2.33?

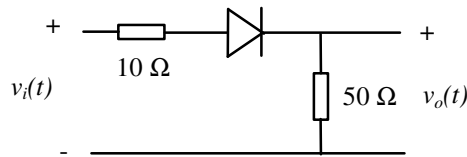


FIGURA 2.33

**Exercício 9:**

Determine todas as correntes de ramo e tensões nodais dos circuitos da Figura 2.34.

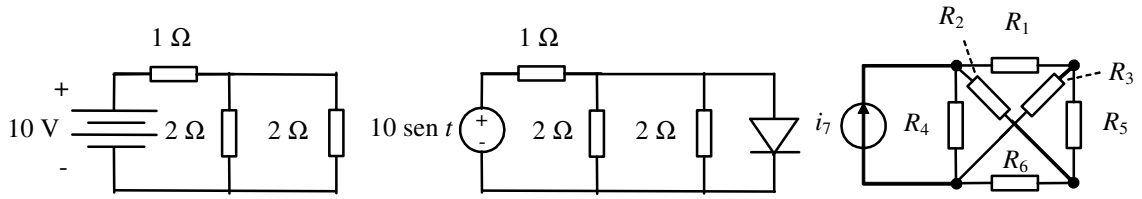


FIGURA 2.34

**Exercício 10:**

Ache os equivalentes de Norton e Thévenin do circuito da figura 2.35, considerando todos os resistores iguais a 1 [Ω].

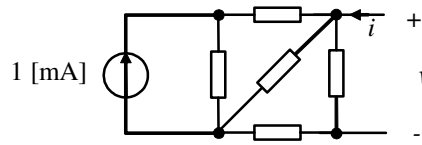


FIGURA 2.35

### 3. Resistores com múltiplos terminais

Neste capítulo, o conceito de resistor é estendido a certos elementos de circuito com mais de dois terminais. De forma geral, considerar-se-á um resistor qualquer elemento de circuito cujo comportamento seja descrito por relações algébricas sem o uso de equações a diferença ou equações diferenciais. Serão apresentados alguns exemplos de relevância para a engenharia eletrônica.

#### Resistores com múltiplos terminais

Um elemento de três terminais ou com duas portas de acesso<sup>1</sup> (isto é, dois pares de pontos de acesso) será chamado um resistor<sup>2</sup> se tensões e correntes satisfizerem a relação:

$$\mathfrak{R}_R = \{ (v_1, v_2, i_1, i_2) : f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \text{ e } f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \}$$

Seu comportamento está completamente definido pela relação entre os valores instantâneos de corrente e tensão, satisfazendo assim também a definição de resistor dada no início do Capítulo 2. Um resistor genérico com duas portas de acesso e três terminais encontra-se representado na Figura 3.1. O par de nós 1-3 e 2-3 constituem as duas portas de acesso.

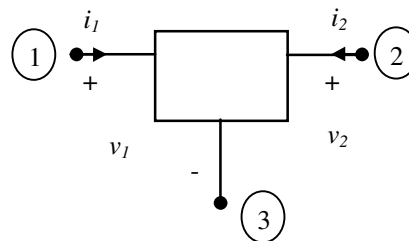


FIGURA 3.1 – Resistor genérico de três terminais.

Um resistor genérico com duas portas de acesso e quatro terminais encontra-se representado na Figura 3.2. Nesse caso, as portas de acesso são formados pelos pares de nós 1-2 e 3-4. Ao contrário do caso anterior (resistor de três terminais), as portas de acesso não têm um terminal em comum.

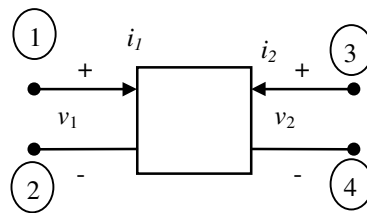


FIGURA 3.2 – Resistor genérico de quatro terminais.

*Exemplo:* Um resistor de três terminais constituído por um conjunto interligado de três resistores lineares de dois terminais encontra-se esquematizado no interior do retângulo pontilhado da Figura 3.3.

<sup>1</sup> Uma porta corresponde a um par de pontos de acesso. Quando um elemento possui mais de uma porta, portas distintas podem compartilhar um dos pontos de acesso.

<sup>2</sup> invariante no tempo.

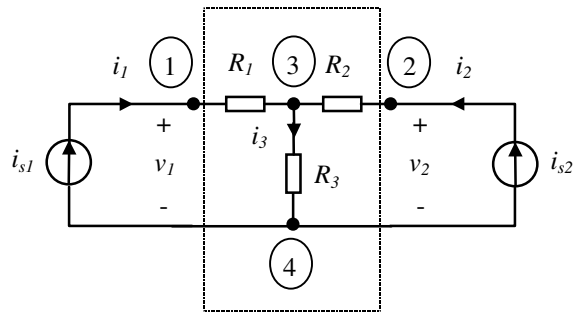


FIGURA 3.3 – Um resistor linear de quatro terminais.

A relação que descreve o resistor da Figura 3.3 pode ser deduzida usando as leis de Kirchhoff e a definição dos resistores lineares. Tal dedução fica proposta como exercício. O resultado será:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Ri = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

A representação acima é uma representação controlada por corrente. Uma representação controlada por tensão tem a forma  $i = Gv$ , e neste exemplo tal representação existe e  $G = R^{-1}$ .

### Representações possíveis

Para resistores com duas portas, existem diversas representações possíveis. Elas são apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Representações para resistores com duas portas

Nome	variáveis independentes	variáveis dependentes	expressão
controlada por corrente	$i_1, i_2$	$v_1, v_2$	$v = Ri$
controlada por tensão	$v_1, v_2$	$i_1, i_2$	$i = Gv$
Transmissão 1	$v_2, i_2$	$v_1, i_1$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$
Transmissão 2	$v_1, i_1$	$v_2, i_2$	$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$
híbrida 1	$i_1, v_2$	$v_1, i_2$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
híbrida 2	$v_1, i_2$	$i_1, v_2$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = H' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

Os elementos da matriz  $R$  podem ser interpretados como indicado a seguir:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- $r_{11}$ : resistência da porta 1 quando  $i_2 = 0$ ;
- $r_{21}$ : resistência de transferência quando  $i_2 = 0$ ;
- $r_{12}$ : resistência de transferência reversa quando  $i_1 = 0$ ;
- $r_{22}$ : resistência da porta 2 quando  $i_1 = 0$ .

Para os elementos das matrizes  $G$ ,  $H$ ,  $H'$ ,  $T$  e  $T'$  existem interpretações semelhantes.

As representações da Tabela 3.1 são especialmente úteis quando os elementos das matrizes  $R$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $H'$ ,  $T$  e  $T'$  forem constantes, o que acontecerá para resistores lineares.

## Alguns elementos de circuito resistivos comuns de duas portas

### Fontes controladas

Fontes controladas são elementos de circuito idealizados muito úteis no modelamento de dispositivos reais, em especial os ativos, tais como amplificadores operacionais e transistores. Nas Figuras 3.4 a 3.7, encontram-se diagramas de definição e representações para fontes controladas lineares. É muito útil trabalhar também com fontes controladas não-lineares. Para isso basta uma pequena extensão das definições, substituindo as expressões lineares das variáveis controladas pelas expressões não-lineares da aplicação considerada. Por variável controlada entende-se aquela cujo valor é definido em função de uma das outras variáveis do circuito. No caso da fonte definida na Figura 3.4, por exemplo, a variável controlada é  $v_2$ , pois ela é definida por  $r_m i_1$ , onde  $r_m$  é um parâmetro da fonte com dimensão de resistência.

#### Fonte de tensão controlada por corrente

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem uma fonte de tensão controlada por corrente são dados na Figura 3.4.

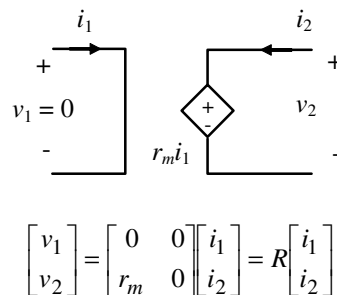


FIGURA 3.4 – Diagrama esquemático e relação que definem a fonte de tensão controlada por corrente.

#### Observação:

- A inversa da matriz  $R$  não existe (e não faz sentido). Algo semelhante acontece com as matrizes das representações das demais fontes controladas dadas a seguir.

#### Fonte de corrente controlada por tensão

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem uma fonte de corrente controlada por tensão são dados na Figura 3.5.

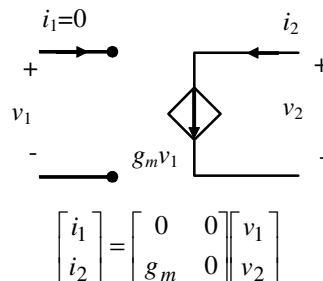


FIGURA 3.5 – Diagrama esquemático e relação que definem a fonte de corrente controlada por tensão.

#### Fonte de corrente controlada por corrente

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem uma fonte de corrente controlada por corrente

são dados na Figura 3.6.

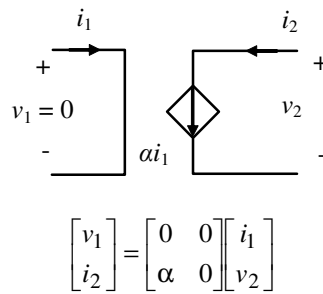


FIGURA 3.6 – Diagrama esquemático e relação que definem a fonte de corrente controlada por corrente.

*Fonte de tensão controlada por tensão*

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem uma fonte de tensão controlada por tensão são dados na Figura 3.7.

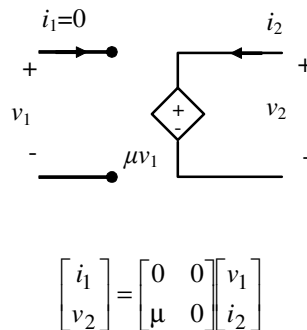


FIGURA 3.7 – Diagrama esquemático e relação que definem a fonte de tensão controlada por tensão.

**Circuitos equivalentes para elementos resistivos lineares de duas portas**

Circuitos equivalentes são instrumentos úteis para o esboço e entendimento de diagramas de circuitos compostos da interconexão de diversos elementos de circuito complexos.

Considere a representação controlada por corrente de um elemento resistivo linear de duas portas:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Em termos de diagrama de circuito, este elemento pode ser representado (equivalentemente) pelo circuito da Figura 3.8.

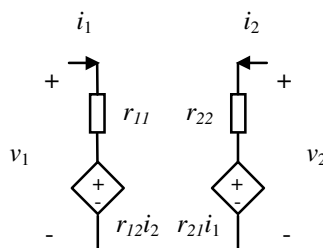


FIGURA 3.8 – Circuito equivalente de um elemento resistivo linear de duas portas controlado por corrente.

Raciocínio semelhante pode ser utilizado para encontrar circuitos equivalentes para circuitos descritos por uma das outras representações da Tabela 3.1. Por exemplo, um circuito usando condutâncias e fontes controladas de corrente pode ser obtido diretamente a partir da representação controlada por tensão.

### Transformador ideal

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem um transformador ideal são dados na Figura 3.9.

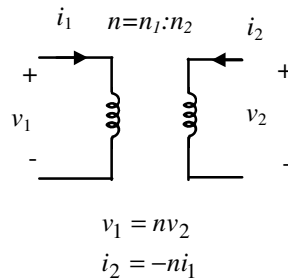


FIGURA 3.9 – Representação esquemática e relação que definem o transformador ideal.

Para o transformador ideal, valem as seguintes propriedades:

- 1 Usando-se as expressões da definição da Figura 3.9, pode-se verificar o seguinte balanço de potência para o transformador  $p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0$ .
- 2 Colocando-se uma resistência de valor  $R$  no secundário do transformador (lado de índice 2), um observador no primário (lado de índice 1) observará uma resistência de valor  $n^2R$ . De fato:

$$v_2(t) = -Ri_2(t)$$

$$\frac{v_1(t)}{i_1(t)} = \frac{nv_2(t)}{-i_2(t)/n} = -n^2 \frac{v_2(t)}{i_2(t)} = n^2R$$

Observações:

- Transformadores práticos normalmente são implementados usando bobinas com núcleo comum, e operam com sinais de corrente alternada (AC). A relação de transformação  $n=n_1:n_2$  neste caso é definida pela relação entre os números de espiras das bobinas no primário e no secundário do transformador.
- A definição do modelo do transformador ideal não está restrita a transformadores AC.

### Análogo mecânico

Existem analogias entre sistemas elétricos e mecânicos. Isso pode ser ilustrado comparando-se um transformador ideal com uma par de engrenagens implementando uma redução (Figura 3.10).

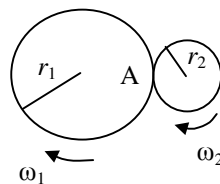


FIGURA 3.10 – Par de engrenagens.

Duas equações descrevem este par de engrenagens. Uma é obtida considerando-se que a velocidade das duas engrenagens no ponto de contato A é igual. A segunda equação é obtida considerando-se que a força sobre cada uma das duas engrenagens no ponto A é igual em módulo e de sinal oposto àquela sobre a outra engrenagem. Usando  $\tau_i$  para representar o torque sobre a engrenagem  $i$ , as equações são:

$$\omega_2(t)r_2 = \omega_1(t)r_1$$

$$\frac{\tau_1(t)}{r_1} = -\frac{\tau_2(t)}{r_2}$$

Assim a analogia pode ser explicitada como na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Analogias entre variáveis em sistemas mecânicos e circuitos

Sistema mecânico	Circuitos
velocidade angular ( $\omega$ )	tensão
torque ( $\tau$ )	corrente
razão dos raios ( $r_2/r_1$ )	razão de transformação ( $n = n_1/n_2$ )

### Girador ideal

O diagrama esquemático e a relação matemática que definem um girador ideal são dados na figura 3.11.

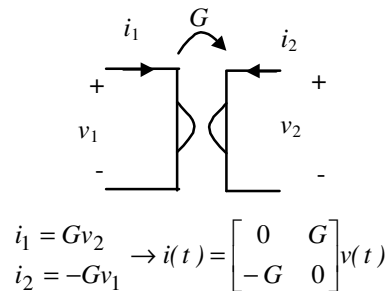


FIGURA 3.11 – Representação esquemática e relação que define o girador ideal.

Para o girador com  $G = 1$ , tudo o que é colocado na saída (porta 2) é visto de forma dual na entrada (porta 1), pois

$$\frac{v_1(t)}{i_1(t)} = \frac{-i_2(t)/G}{Gv_2(t)} = \frac{1}{G^2} \begin{bmatrix} -i_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_2(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Dessa forma, uma resistência de  $R$  [ $\Omega$ ] na porta 2 será vista como uma condutância de  $R$  [S] na porta 1.

Giradores podem ser realizados com o auxílio de circuitos integrados para aplicações que envolvam sinais de baixa frequência.

### Elementos não-lineares de duas portas

Para elementos não-lineares pelo menos uma das características  $f_1$  e  $f_2$  que definem o resistor é não-linear.

$$\mathfrak{R}_R = \{ (v_1, v_2, i_1, i_2) : f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \text{ e } f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \}$$

Às vezes é possível escrever as características em formas passíveis de representação gráfica, como:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \hat{v}_1(i_1, i_2) & \text{ou} & & v_1 &= \hat{v}_1(i_1, v_2) \\
 v_2 &= \hat{v}_2(i_1, i_2) & & & i_2 &= \hat{i}_2(i_1, v_2)
 \end{aligned}$$

Vários dispositivos possuem modelos desse tipo. Exemplos são os transistores. Como o tratamento de todos os transistores é semelhante do ponto de vista de circuitos, aqui será citado apenas o transistor MOSde efeito de campo, um componente muito comum em circuitos integrados.

### Transistor MOS

Existem vários tipos de transistores MOSde efeito de campo (ou simplesmente MOSFETs, do inglês *Metal-Oxide-Semiconductor Field Effect Transistor*). Como o objetivo é ilustrar o tratamento de elementos não-



lineares de duas portas, trabalhar-se-á somente com o transistor MOS, tipo reforço, canal N. Os símbolos e a nomenclatura adotados para este transistor encontram-se na Figura 3.12.

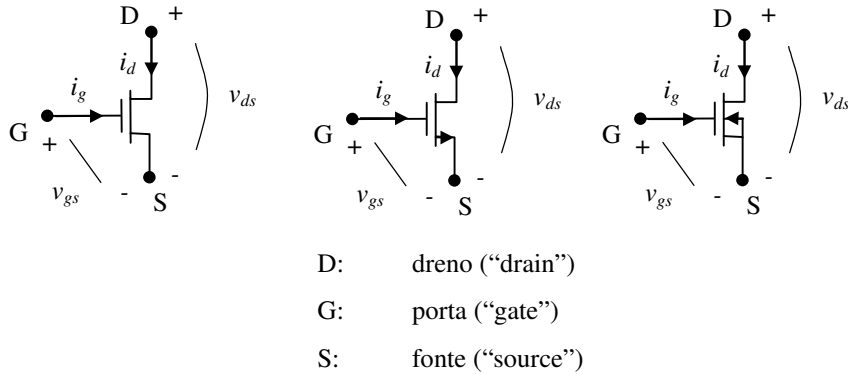


FIGURA 3.12 – Símbolos usados para o transistor MOS, tipo reforço, canal N

Uma característica típica para estes transistores encontra-se na Figura 3.13. Por construção, a corrente  $i_g$  de um transistor MOS pode ser considerada sempre nula.

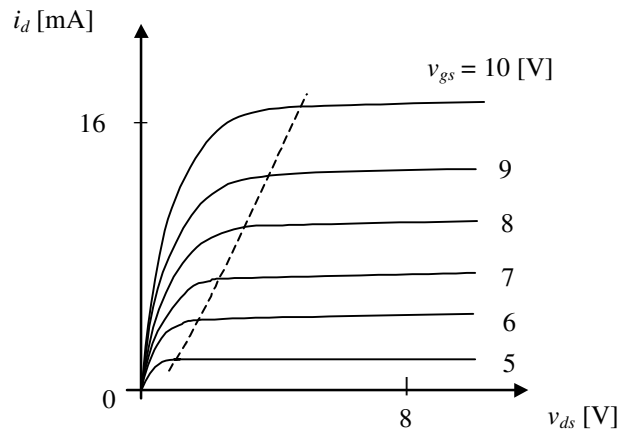


FIGURA 3.13 – Característica típica de um MOSFET, tipo reforço, canal N.

À direita da reta tracejada da Figura 3.13 um modelo analítico aproximado para o MOSFET considerado ( $v_{gs}$  positivo) é:

$$i_d = \frac{1}{2} \beta (v_{gs} - V_{th})^2 \quad \text{para } v_{ds} \geq v_{gs} - V_{th} \quad (3.1)$$

A constante  $\beta$  depende das dimensões do dispositivo e de constantes físicas. A constante  $V_{th}$  depende da tecnologia do dispositivo. A região na qual vale este modelo é chamada de “região de saturação”.

Na região à esquerda da reta tracejada da Figura 3.13, chamada de “região linear”, o modelo analítico aproximado é:

$$i_d = \beta [(v_{gs} - V_{th})v_{ds} - \frac{v_{ds}^2}{2}] \quad \text{para } v_{ds} < v_{gs} - V_{th} \quad (3.2)$$

Dessa forma, o transistor MOS é (em baixas frequências) um resistor de três terminais não-linear controlado por tensão caracterizado pela equação 3.1 ou 3.2, conforme o caso, e por  $i_g = 0$ .

Um circuito equivalente não-linear, em termos de elementos de circuito já vistos, pode ser estabelecido por exemplo para a região de saturação conforme mostrado na Figura 3.14.

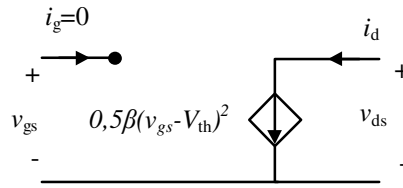


FIGURA 3.14 – Circuito equivalente de um MOSFET, tipo reforço, canal N, na região de saturação.

Além de ser usado em uma das regiões descritas pelas equações (3.1) e (3.2), o MOSFET é frequentemente usado como chave de potência. Na característica da Figura 3.13 verifica-se que para fechar a chave basta aplicar uma tensão  $v_{gs}$  adequada. Neste caso, o dispositivo irá permitir a passagem de uma corrente pelo dreno. Para abrir a chave, basta colocar  $v_{gs} = 0$ . A qualidade do MOSFET como chave será tanto melhor quanto mais íngreme for a reta tracejada da Figura 3.13.

### O princípio translinear MOS

O MOSFET é um elemento de circuito que (à semelhança de outros não discutidos aqui, como o transistor bipolar) é utilizado em quantidade em circuitos integrados. A análise e síntese de tais circuitos exige ferramentas específicas para a classe de elementos de circuito considerada. Uma delas é apresentada a seguir: o princípio translinear MOS.<sup>3</sup> Esse princípio refere-se a circuitos constituídos por transistores MOS e fontes de corrente interconectados numa topologia mostrada na Figura 3.15, tipicamente implementável em circuitos integrados analógicos. Essa topologia recebe o nome de topologia translinear.

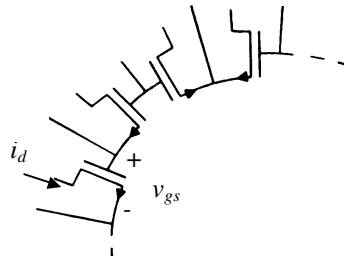


FIGURA 3.15 – Topologia translinear de interconexão de transistores MOS, tipo reforço, canal N.

Nesta interconexão por hipótese há um igual número de MOSFETs ligados no sentido horário e no sentido anti-horário. Por hipótese todos os transistores estão na região de saturação e têm mesmos  $\beta$  e  $V_{th}$ . Além disso, assumir-se-á (por simplicidade) que todos os MOSFETs são do tipo "reforço" com canal N. Sob estas hipóteses, pela lei de Kirchhoff das tensões tem-se

$$\sum_{\text{sentido horário}} v_{gs_j} = \sum_{\text{sentido anti-horário}} v_{gs_k}$$

$$\sum_{\text{sentido horário}} \left( V_{th} + \sqrt{\frac{2i_{d_j}}{\beta}} \right) = \sum_{\text{sentido anti-horário}} \left( V_{th} + \sqrt{\frac{2i_{d_k}}{\beta}} \right)$$

$$\sum_{\text{sentido horário}} \sqrt{i_{d_j}} = \sum_{\text{sentido anti-horário}} \sqrt{i_{d_k}} \quad (3.3)$$

A equação (3.3) caracteriza o princípio translinear MOS. Ele simplifica muito a análise de circuitos translineares usando MOSFETs. Em seguida será apresentado um exemplo de aplicação deste princípio na análise de circuitos translineares MOS (circuitos MOS com a topologia da Figura 3.15).

<sup>3</sup> Maiores detalhes podem ser encontrados em Wiegerink, 1993.

*Exemplo:* No circuito da Figura 3.16, a corrente de entrada é  $i_e$ ; a corrente de saída é  $i_s$ .  $i_{pol}$  é uma corrente de polarização. Por hipótese todos os transistores tem mesmos  $\beta$  e  $V_{th}$ . Usando o princípio translinear, mostre que este circuito funciona como quadrador de corrente

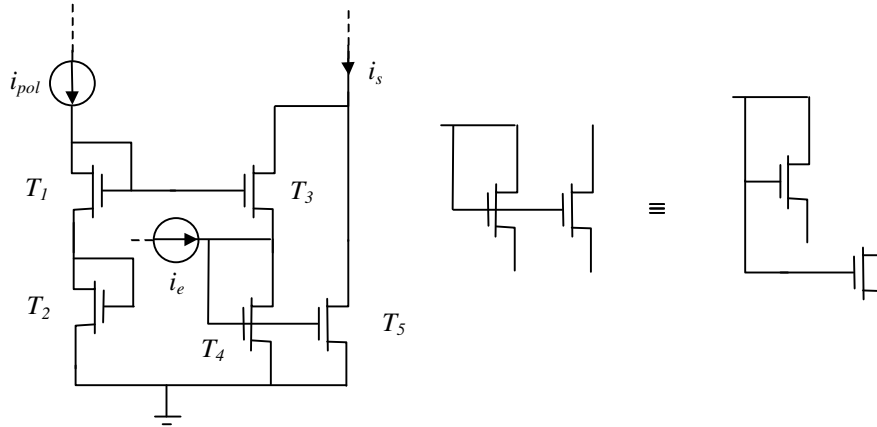


FIGURA 3.16 – Circuito MOS translinear quadrador de corrente.<sup>4</sup>

Inicialmente constata-se que o circuito da Figura 3.16 é um circuito translinear no padrão da Figura 3.15. Usando a lei de Kirchhoff das correntes e o princípio translinear MOS, tem-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\sqrt{i_{d_1}} + \sqrt{i_{d_2}} &= \sqrt{i_{d_3}} + \sqrt{i_{d_4}} \\ i_{d_1} &= i_{pol} = i_{d_2} \\ i_{d_4} &= i_{d_5} = i_{d_3} + i_e \\ i_s &= i_{d_5} + i_{d_3}\end{aligned}$$

Combinando-se as equações acima resulta:

$$2\sqrt{i_{pol}} = \sqrt{i_{d_4} - i_e} + \sqrt{i_{d_4}}$$

Resolvendo esta equação encontra-se:

$$i_{d_4} = i_{pol} + \frac{i_e}{2} + \frac{i_e^2}{16i_{pol}}$$

Donde se conclui que

$$i_s = i_{d_5} + i_{d_3} = 2i_{pol} + \frac{i_e^2}{8i_{pol}}$$

ou seja, o circuito acima é de fato um quadrador de corrente (descontado um múltiplo da corrente de polarização).

## Elementos de circuito resistivos de múltiplas portas

Generalizando noções e definições introduzidas em seções anteriores, podem-se definir elementos resistivos com número arbitrário de portas de acesso como elementos de circuito descritos por:

$$\mathfrak{R}_R = \{ (v_1, v_2, \dots, v_n, i_1, i_2, \dots, i_n) : f_1(v_1, v_2, \dots, v_n, i_1, i_2, \dots, i_n) = 0, \dots, f_n(v_1, v_2, \dots, v_n, i_1, i_2, \dots, i_n) = 0 \}$$

<sup>4</sup> Circuito apresentado em Wiegerink, 1993.

### Transformador ideal com três enrolamentos

O símbolo de um transformador ideal com três enrolamentos é dado na Figura 3.17.

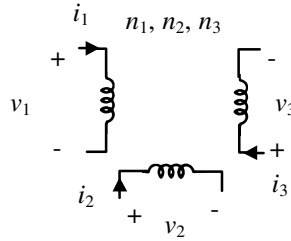


FIGURA 3.17 – Símbolo do transformador ideal de três enrolamentos.

Este transformador é definido por:

$$f_1(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := \frac{v_1}{n_1} - \frac{v_3}{n_3} = 0$$

$$f_2(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := \frac{v_2}{n_2} - \frac{v_3}{n_3} = 0$$

$$f_3(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0$$

Como no transformador ideal de duas portas, tanto a matriz de resistência quanto a de condutância inexistem. A representação matricial adequada é a representação híbrida seguinte:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{n_1}{n_3} \\ 0 & 0 & \frac{n_2}{n_3} \\ -\frac{n_1}{n_3} & -\frac{n_2}{n_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se o balanço de potência para o transformador de três enrolamentos, pode-se verificar que a soma das potências entrando pelas três portas de acesso é nula.

### Circulador

O símbolo do circulador é mostrado na Figura 3.18.

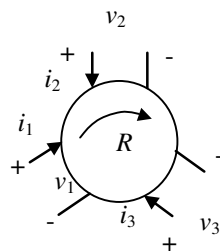


FIGURA 3.18 – Símbolo do circulador ideal.

O circulador ideal é definido por:

$$f_1(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := v_1 - Ri_2 + Ri_3 = 0$$

$$f_2(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := v_2 + Ri_1 - Ri_3 = 0$$

$$f_3(v_1, v_2, v_3, i_1, i_2, i_3) := v_3 - Ri_1 + Ri_2 = 0$$

Uma representação matricial controlada por corrente é:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R & -R \\ -R & 0 & R \\ R & -R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

O valor de resistência  $R$  é denominado *resistência característica* do circulator. Fazendo-se o balanço de potência para o circulator, pode-se verificar que a soma das potências entrando pelas três portas de acesso é nula, à semelhança do que acontece também com o transformador ideal de três enrolamentos.

Numa das suas aplicações mais comuns, o circulator é ligado como indicado na Figura 3.19.

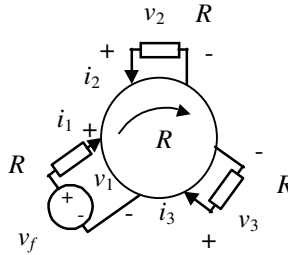


FIGURA 3.19 – Aplicação do circulator ideal.

Neste caso determina-se  $i_1 = v_f/2R$ ,  $i_1 = i_2$  e  $i_3 = 0$ . Isso significa que o circulator é um elemento indispensável na ligação de uma antena a ser usada para transmissão e para recepção. Como transmissora, a antena constitui carga  $R$  para uma fonte de sinal. Como receptora, a antena é modelada como fonte de sinal seguida de um resistor  $R$  no valor da impedância nominal.

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

Para o circuito com duas portas de acesso da Figura 3.20, determine uma descrição controlada por corrente, isto é, uma descrição do tipo

$$\begin{aligned} v_1 &= f_1(i_1, i_2) \\ v_2 &= f_2(i_1, i_2) \end{aligned}$$

Esta descrição pode ser colocada na forma controlada por corrente da Tabela 3.1? Explique.

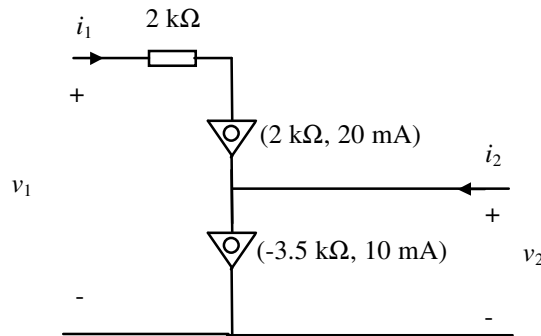


FIGURA 3.20

### Exercício 2:

Para o circuito da Figura 3.21 faça o seguinte:

- Determine o ponto de operação  $Q$ , supondo (inicialmente) que o transistor está operando na região de saturação. Após os cálculos, confirme a validade desta hipótese.
- Desenhe o circuito equivalente de pequenos sinais.
- Determine a tensão de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)$  e o ganho de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)/v_1(t)$ .

Dados:  $\beta = 0,64$  [mA/V<sup>2</sup>]  $V_{th} = -4,0$  [V]

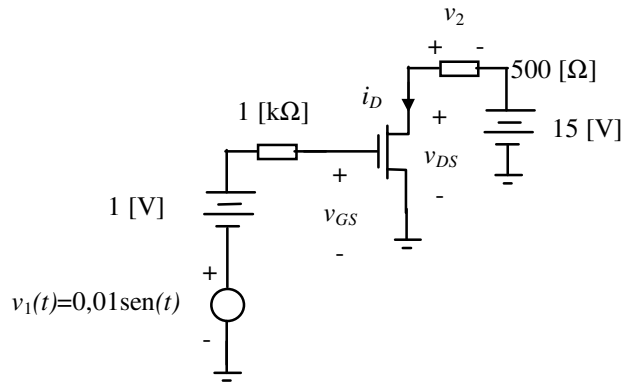


FIGURA 3.21

**Exercício 3:**

Para o circuito da Figura 3.22 faça o seguinte:

- Determine o ponto de operação Q, supondo (inicialmente) que o transistor está operando na região de saturação. Após os cálculos, verifique se esta hipótese é válida. Se necessário, refaça os cálculos.
- Desenhe o circuito equivalente de pequenos sinais.
- Determine a tensão de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)$  e o ganho de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)/v_1(t)$ .

Dados:  $\beta = 0,64 \text{ [mA/V}^2\text{]}$   $V_{th} = -4,0 \text{ [V]}$

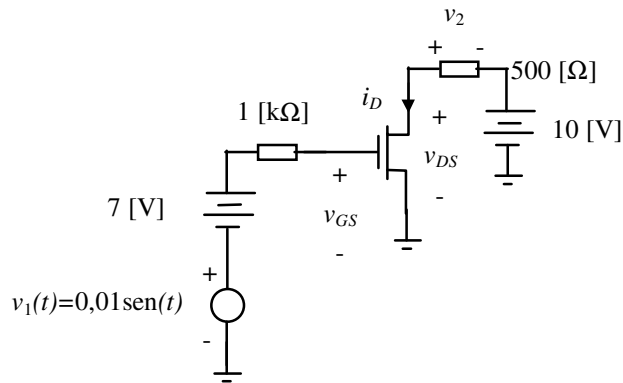


FIGURA 3.22

**Exercício 4:**

No circuito da Figura 3.23,  $N_a$  é um girador com condutância característica  $G = 2 \text{ [S]}$ . Determine uma representação do circuito  $N_b$  tal que a interligação de  $N_a$  e  $N_b$  se comporte como uma fonte controlada por corrente na qual a corrente de saída é o dobro da corrente de entrada.

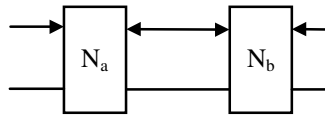


FIGURA 3.23

**Exercício 5:**

Determine a matriz de condutância  $G$  da representação controlada por tensão (Tabela 3.1) para o circuito da Figura 3.3.

**Exercício 6:**

Demonstre a equivalência dos dois circuitos da Figura 3.24 do ponto de vista das variáveis  $i$  e  $v$ .  $R$  é a resistência característica do circulador.

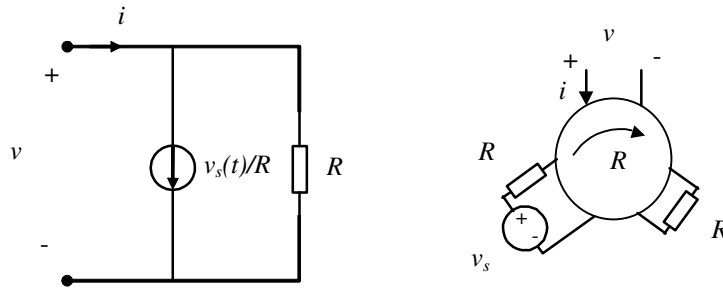


FIGURA 3.24

**Exercício 7:**

Para o circuito da Figura 3.25, onde  $i_1(t)$  é um pequeno sinal, faça o seguinte:

- Determine o ponto de operação Q.
- Desenhe o circuito equivalente de pequenos sinais.
- Determine a tensão de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)$  como função de  $i_1(t)$ . Na sua opinião, para que faixa de valores de  $i_1(t)$  o modelo de pequenos sinais fornece resultados razoáveis?

Dados:  $\beta = 0,64 \text{ [mA/V}^2\text{]}$   $V_{th} = -4,0 \text{ [V]}$

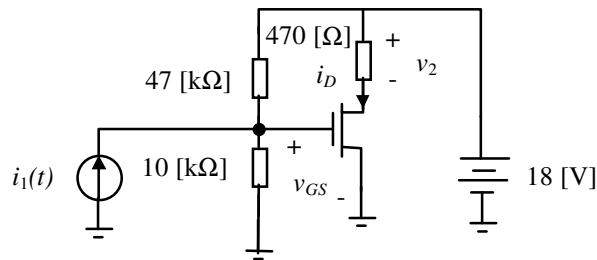


FIGURA 3.25

**Exercício 8:**

Os itens abaixo referem-se ao subcircuito translinear MOS da figura 3.26, que representa um diagrama esquemático de um programa de simulação de circuitos. Considere-se o subcircuito como candidato hipotético a inclusão numa implementação em CI. Todos os transistores têm mesmos  $\beta$  e  $V_{th}$ .

- Deduza a característica de transferência do circuito, supondo todos os transistores operando na região saturada. A variável de saída (de interesse) é a corrente pelo resistor R7. As variáveis de entrada são as correntes  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

*Dica:* Para a dedução use o princípio translinear MOS e as leis de Kirchhoff.

*Resultado:* A corrente por R7 é proporcional à média geométrica das correntes  $x$  e  $y$ .

- Usando o programa de simulação de circuitos de sua preferência e selecionando um dispositivo MOSFET padrão, tipo reforço, canal N, avalie para que região de valores  $x$  e  $y$  o circuito realmente implementa com boa aproximação a característica de transferência desejada. Faça esta avaliação para tensões de alimentação  $V_4$  iguais a 15 e 30 [V], bem como valores de R7 iguais a 200 e 1000 [ $\Omega$ ]. (Se usar o programa PCSPICE ou equivalente, use o dispositivo MbreakN ou equivalente com os parâmetros "default" do modelo.)

*Sugestões:*

- Implemente  $(x+y)/4$  usando duas fontes de corrente controladas por corrente.
- Faça a varredura do domínio  $x \times y$  usando as fontes I3 e I4.

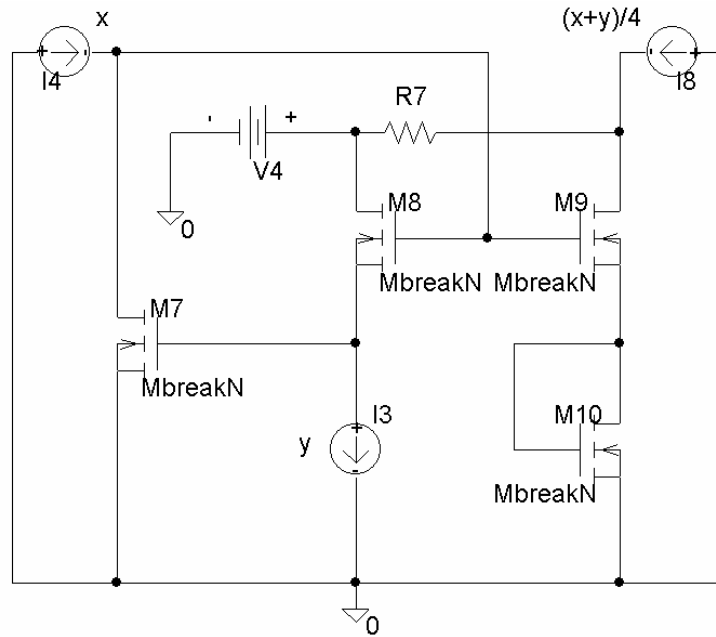


FIGURA 3.26 – Diagrama esquemático de um circuito que implementa a média geométrica.

**Exercício 9:**

Considere as seguintes modificações no circuito da Figura 3.23:

- a) a fonte de corrente I8 fornece  $x/2$  ao invés de  $(x+y)/4$ ;
- b) a fonte I4 fornece  $x+y$  ao invés de  $x$ ;
- c) a fonte I3 fornece  $x-y$  ao invés de  $y$ ;
- d)  $x \geq |y| \geq 0$ .

Mostre que a corrente por R7 será proporcional a  $\sqrt{x^2 - y^2}$ .



## 4. Ampliadores operacionais

O amplificador operacional é um elemento ideal muito bem aproximado por diversos dispositivos, especialmente em baixas frequências. Seu uso é muito difundido em todas as aplicações de eletrônica analógica. Por serem produzidos em grandes quantidades, amplificadores operacionais tornaram-se muito acessíveis, estando disponíveis em circuitos integrados com um a quatro amplificadores operacionais independentes. Dispositivos que realizam amplificadores operacionais estão disponíveis em diversas tecnologias de circuito integrado. Exemplos bastante comuns são o circuito integrado (CI) LM741 (que contém um amplificador operacional) e o CI LM324 (que contém quatro amplificadores operacionais). Estas implementações satisfazem a definição do elemento de circuito com boa precisão até frequências de sinal na faixa de 10-20 kHz.

A simbologia usada para o amplificador operacional é encontrada na Figura 4.1.

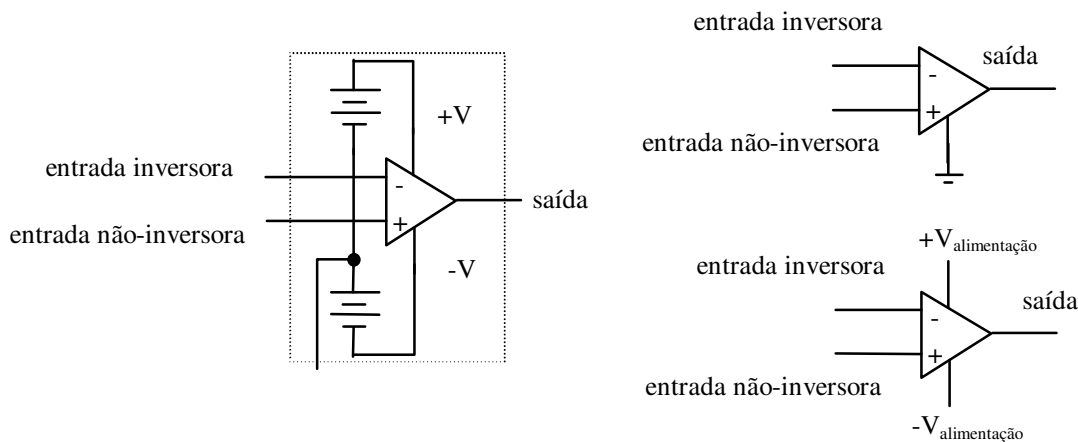


FIGURA 4.1 – Símbolos para o amplificador operacional

O amplificador operacional ideal pode ser entendido como uma fonte não-linear de tensão controlada por tensão definida pelo modelo da Figura 4.2 com a característica  $f(v_d)$  dada na Figura 4.3.

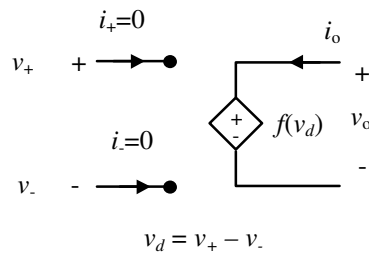


FIGURA 4.2 – Circuito equivalente do amplificador operacional.

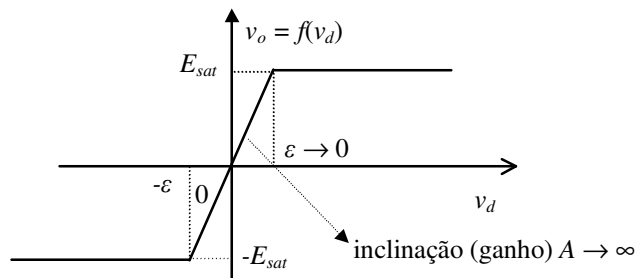


FIGURA 4.3 – Característica de transferência do amplificador operacional.

Via de regra assume-se que  $E_{sat}$ , a assim denominada tensão de saturação do amplificador operacional, coincide com a tensão de alimentação  $V$  da Figura 4.1. De fato  $E_{sat}$  costuma ser ligeiramente inferior a  $V$ .

### Terra virtual

Quando um amplificador operacional com ganho  $A$  muito elevado está operando na região linear da característica da Figura 4.3, o valor da tensão  $\varepsilon$  (Figura 4.3) é muito pequeno, muito menor do que o valor das tensões relevantes dentro do circuito. Assim pode-se equacionar o circuito considerando  $v_d = 0$ . A este "curto-circuito aparente" entre o terminal inversor e o terminal não inversor chama-se *terra virtual*.

A noção de terra virtual é muito importante no equacionamento de circuitos com amplificadores operacionais. Considerem-se os exemplos a seguir.

*Exemplo:* O amplificador inversor é um (sub)circuito bastante comum. Seu diagrama de circuito é o da Figura 4.4.

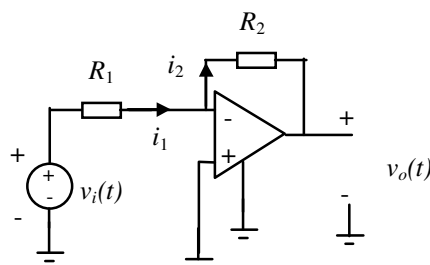


FIGURA 4.4 – Amplificador inversor.

O equacionamento sem o uso do conceito de terra virtual segue o seguinte roteiro:

$$v_o = Av_d = A(-v_i + R_1 i_1) = A \left[ -v_i + R_1 \frac{v_i - v_o}{R_1 + R_2} \right],$$

$$v_o = -v_i \frac{AR_2}{R_1 + R_2} - v_o \frac{AR_1}{R_1 + R_2},$$

e, finalmente,

$$v_o \xrightarrow{A \rightarrow \infty} -\frac{R_2}{R_1} v_i.$$

O equacionamento com o uso do conceito de terra virtual, por sua vez, é bem mais simples, como mostrado a seguir.

$$v_d = 0$$

$$i_1 = i_2 \therefore \frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2} \Rightarrow v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_i$$

A característica de transferência obtida vale somente enquanto o amplificador estiver operando na região linear, ou seja com  $v_i$  tal que  $|v_o| < E_{sat}$ .

*Exemplo:* Considerem-se os circuitos da Figura 4.5 para a implementação de um "buffer" ou seguidor de tensão. Tanto no caso do circuito 1 quanto no caso do circuito 2 desta figura deduz-se a mesma característica de transferência (na região linear) válida somente para  $|v_i| < E_{sat}$ .

$$v_d = 0 \therefore v_i - v_o = 0 \Rightarrow v_o = v_i.$$

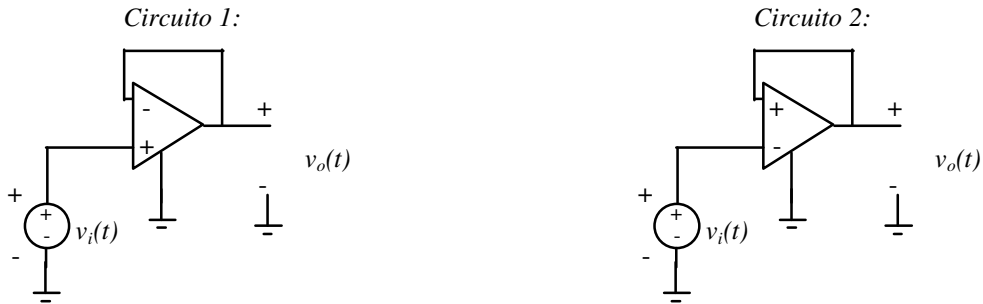


FIGURA 4.5 – Dois circuitos candidatos para implementação de um "buffer".

No entanto, uma verificação em laboratório mostraria que o circuito 2 da Figura 4.5 não funciona como "buffer". A razão está no uso de *realimentação positiva*. Sua inconveniência pode ser compreendida intuitivamente. Suponha que para um valor fixo de  $v_i = v_1 > 0$  o valor da saída  $v_o$  encontra-se estabilizado também em  $v_1$ . Caso, por algum ruído qualquer, surja um  $v_i = v_1 + \Delta$ , isto implicará uma diminuição em  $v_o$ , e conseqüentemente em  $v_i$ . Uma diminuição em  $v_o$  levará a nova diminuição em  $v_i$  e assim por diante, até que o elemento de circuito atinja a condição de saturação. Este fenômeno não ocorre com o circuito 1, que emprega "realimentação negativa".

De fato as características de transferência completas dos dois circuitos (incluindo as regiões de saturação) são bem diferentes, como mostram os gráficos da Figura 4.6.

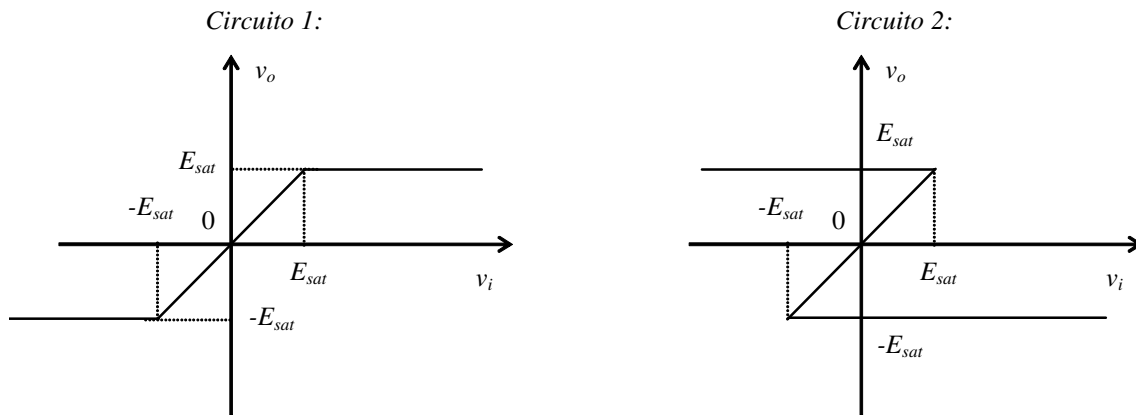


FIGURA 4.6 – Características de transferência dos circuitos da figura 4.5.

*Exemplo:* O amplificador não-inversor também é um (sub)circuito muito comum. Seu diagrama de circuito é o da Figura 4.7.

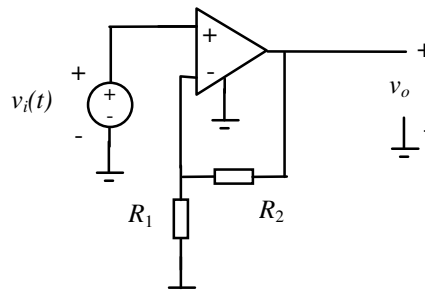


FIGURA 4.7 – Amplificador não-inversor.

A característica de transferência do amplificador não-inversor também pode ser obtida usando-se o conceito de terra virtual.

$$v_i = v_+ = \overset{\text{terra virtual}}{=} v_- = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Portanto,

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_i = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) v_i.$$

Novamente, a característica de transferência obtida vale somente enquanto o amplificador estiver operando na região linear, ou seja, com  $v_i$  tal que  $|v_o| < E_{sat}$ , onde  $E_{sat}$  é a tensão de saturação do amplificador operacional.

*Exemplo:* O diagrama de circuito de um somador inversor é dado na Figura 4.8

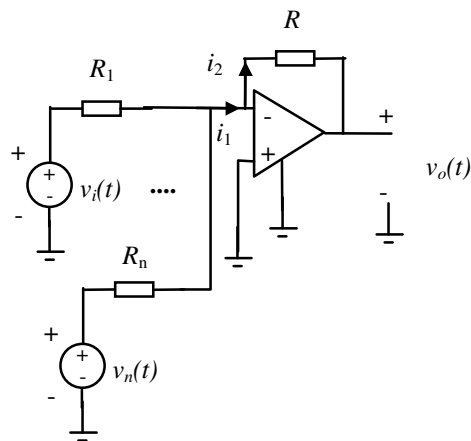


FIGURA 4.8 – Somador inversor.

O circuito acima é uma extensão muito útil do amplificador inversor. A característica de transferência é determinada a seguir.

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} + \dots + \frac{v_n}{R_n}$$

$$i_1 = i_2 \therefore -\frac{v_o}{R} = \frac{v_1}{R_1} + \dots + \frac{v_n}{R_n} \Rightarrow v_o = -\frac{R}{R_1} v_1 - \dots - \frac{R}{R_n} v_n$$

Esta característica de transferência vale somente enquanto o amplificador estiver operando na região linear, ou seja com os  $v_i$  tais que  $|v_o| < E_{sat}$ , onde  $E_{sat}$  é a tensão de saturação do amplificador operacional.

*Exemplo:* O circuito da Figura 4.9 apresenta um amplificador operacional na configuração inversora (isto é, usado de forma semelhante como no caso do amplificador inversor), mas com realimentação não-linear.

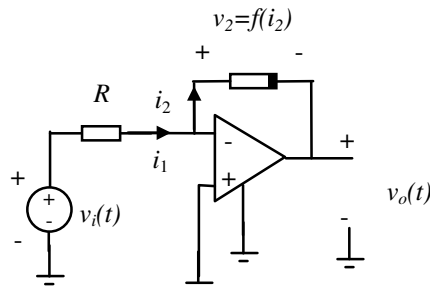


FIGURA 4.9 – Amplificador na configuração inversora com realimentação não-linear.

Assim como o circuito anterior, também este é uma extensão muito útil do amplificador inversor. Supondo-se que o resistor não-linear de realimentação é do tipo controlado por corrente, como indicado na Figura 4.9, verifica-se por inspeção que

$$v_o = -f\left(\frac{v_i}{R}\right)$$

Apesar de usar um resistor não-linear na realimentação, a característica de transferência obtida vale somente enquanto o *amplificador* estiver operando na região linear, ou seja com  $v_i$  tal que  $|v_o| < E_{sat}$ . Este circuito é útil para implementar funções não-lineares de interesse, bastando para tal a escolha do resistor não-linear com a característica controlada por corrente adequada.

*Exemplo:* O circuito da Figura 4.10 com os amplificadores operacionais trabalhando na sua região linear implementa um girador. Seu funcionamento será verificado usando equacionamento por inspeção com o conceito de terra virtual.

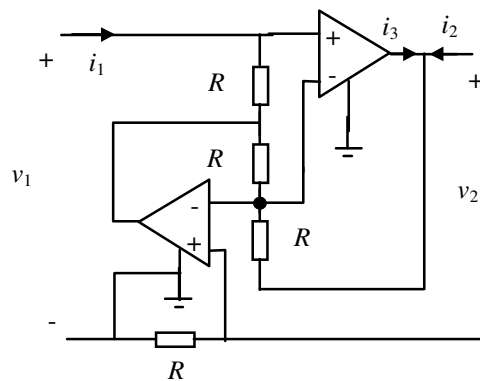


FIGURA 4.10 – Implementação de um girador.

Considerando-se

- corrente nula nas entradas dos amplificadores operacionais, e
- os amplificadores operando na região linear (terra virtual),

obtem-se as seguintes equações pela aplicação da lei de Kirchhoff das tensões na sua formulação nodal:

$$v_1 - Ri_1 + 2R(i_2 + i_3) - v_2 + Ri_2 = 0$$

$$v_2 - R(i_2 + i_3) = 0$$

$$Ri_1 - R(i_2 + i_3) = 0 \Rightarrow i_3 = i_1 - i_2$$

Portanto,

$$v_1 = -Ri_2$$

$$v_2 = Ri_1$$

ou na forma controlada por tensão usada na definição do girador no Capítulo 3

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{R} v_2 \\ i_2 &= -\frac{1}{R} v_1 \end{aligned} \rightarrow i(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} v(t).$$

## Equacionamento sistemático

O equacionamento sistemático de circuitos com amplificadores operacionais será exemplificado usando o circuito da Figura 4.11, que pode ser utilizado para implementar um amplificador diferencial.

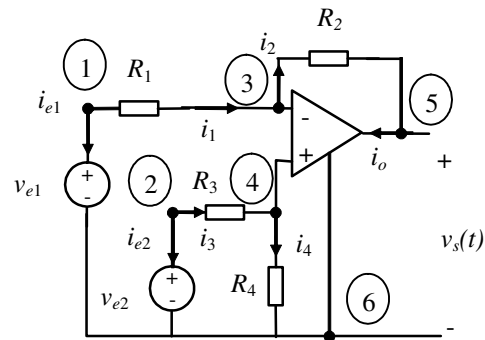


FIGURA 4.11 – Circuito para implementação de amplificador diferencial.

*Notação*

A tensão do ramo por onde flui a corrente  $i_j$  será denominada  $v_j$ . A polaridade da tensão de ramo é definida pelo sentido da corrente de ramo de acordo com a convenção dos capítulos anteriores.

- Passo 1: Aplicando-se a lei de Kirchhoff das tensões, obtém-se a equação que relaciona as tensões nodais (ou nó-referência) às tensões de ramo. Como nó de referência foi escolhido o nó 6, portanto  $e_6 = 0$ . A equação obtida é

$$v = A^T e$$

onde  $A$  é a matriz de incidência reduzida associada ao dígrafo do circuito da Figura 4.11.

- Passo 2: As correntes de ramo são expressas como funções das tensões nodais.

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{e_1 - e_3}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{v_2}{R_2} = \frac{e_3 - e_5}{R_2}$$

$$i_3 = \frac{v_3}{R_3} = \frac{e_2 - e_4}{R_3}$$

$$i_4 = \frac{v_4}{R_4} = \frac{e_4}{R_4}$$

- Passo 3: Aqui identificam-se as correntes que não puderam ser expressas como funções de tensões nodais. Estas correntes são:

$$i_o, i_{e1}, i_{e2}$$

*Observações:*

1. As correntes de entrada no amplificador operacional não serão consideradas, pois são nulas.
2. O objetivo deste passo é saber quantas equações em quais variáveis deverão ser obtidas. No caso deste exemplo sabe-se agora que devem-se ter oito equações em:

$$e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, i_o, i_{e1}, i_{e2}.$$

- Passo 4: A lei de Kirchhoff das correntes é aplicada a cada nó, exceto o de referência. A equação resultante é:

$$A_i = 0$$

Em seguida substituem-se as correntes determinadas no Passo 2, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{e_1 - e_3}{R_1} + i_{e1} &= 0 \\ \frac{e_2 - e_4}{R_3} + i_{e2} &= 0 \\ \frac{e_3 - e_5}{R_2} - \frac{e_1 - e_3}{R_1} &= 0 \\ \frac{e_4}{R_4} - \frac{e_2 - e_4}{R_3} &= 0 \\ i_o - \frac{e_3 - e_5}{R_2} &= 0 \end{aligned}$$

- Passo 5: Após o Passo 4, têm-se 5 equações a 8 incógnitas. As equações das leis de Kirchhoff e das definições dos resistores já foram usadas. Restam ainda as definições do amplificador operacional e das fontes. Estas definições fornecem as três equações adicionais.

$$\begin{aligned} e_4 - e_3 &= 0 \\ e_1 &= v_{e1} \\ e_2 &= v_{e2} \end{aligned}$$

- Passo 6: Solução do sistema de equações encontrado. No caso do exemplo a solução é:

$$v_s = e_5 = \frac{\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)R_4}{R_3 + R_4} v_{e2} - \frac{R_2}{R_1} v_{e1}.$$

Observações:

- Esta solução é válida enquanto  $|v_s| < E_{sat}$ , onde  $E_{sat}$  é a tensão de saturação do amplificador operacional.
- Um amplificador diferencial (muito útil em instrumentação) é obtido com a escolha:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

## O amplificador operacional na região não-linear

Na região de saturação, o amplificador operacional pode ser substituído por um dos modelos equivalentes da Figura 4.12.

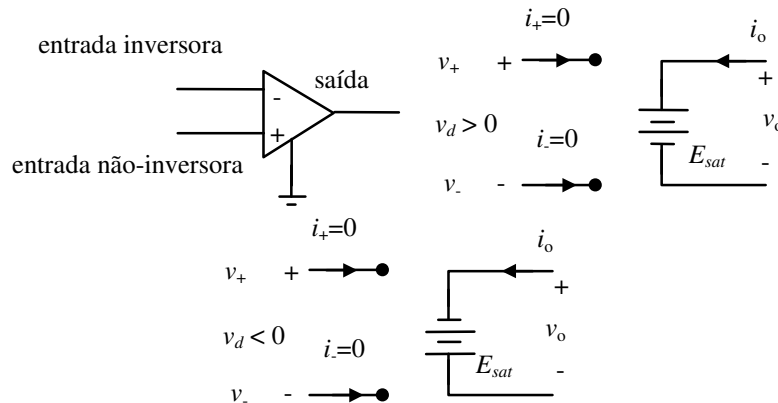


FIGURA 4.12 – O amplificador operacional na região de saturação.

*Exemplo:* Um circuito simples que usa o amplificador operacional na região não-linear é o comparador de tensão, cujo diagrama de circuitos e característica de transferência se encontram na Figura 4.13.

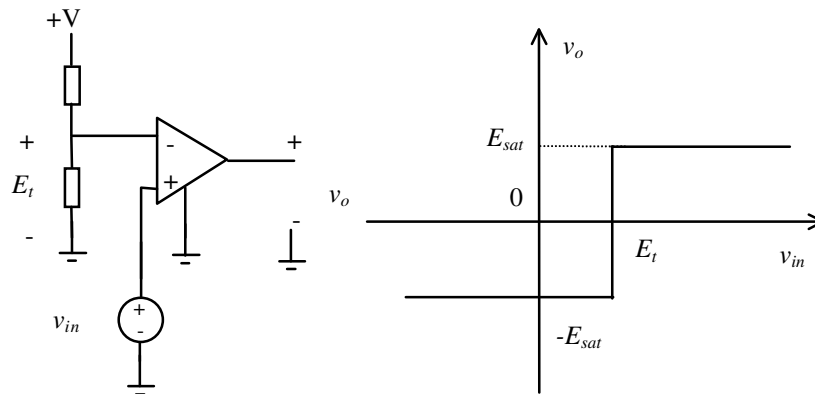


FIGURA 4.13 – Diagrama de circuitos e característica de transferência de um comparador de tensão.

*Exemplo:* O circuito da Figura 4.14 é um conversor de resistência negativa, que permite implementar características  $i \times v$  com inclinações negativas.

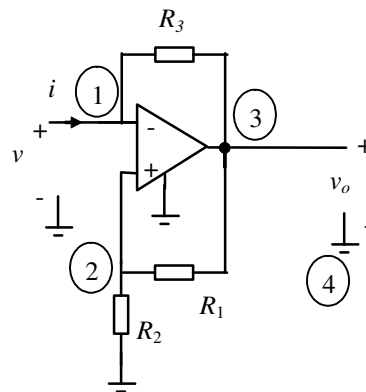


FIGURA 4.14 – Conversor de resistência negativa.

Na região linear tem-se (usando a noção de terra virtual):

$$v = v_{2-4} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_o = K v_o$$

Aplicando-se a lei de Kirchhoff das tensões na sequência de nós 4-1-3-4, obtém-se

$$v = v_o + R_3 i$$

A partir das duas equações anteriores tem-se:

$$i = \frac{v - v_o}{R_3} = -\frac{R_1}{R_2 R_3} v$$

O amplificador estará na região linear enquanto:

$$-K E_{sat} \leq v \leq K E_{sat}$$

Na região de saturação positiva tem-se:

$$v_o = E_{sat}$$

$$v = E_{sat} + R_3 i$$



O amplificador estará operando nesta região enquanto  $v_d$  for positiva. Para determinar  $v_d$  equaciona-se a Lei de Kirchhoff das tensões para a sequência de nós 4-1-2-4:

$$v_d = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_{sat} - v = KE_{sat} - v$$

Portanto, o amplificador permanecerá na região de saturação positiva enquanto

$$v \leq KE_{sat} = v_M$$

Para a região de saturação negativa procede-se de maneira análoga. A característica  $i \times v$  completa do circuito encontra-se na Figura 4.15.

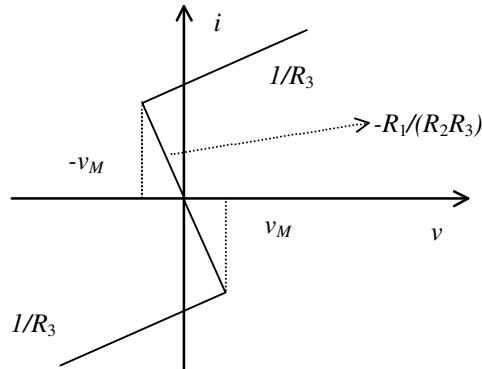


FIGURA 4.15 – Característica do conversor de resistência negativa.

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

Qual a característica  $v_o \times v_i$  do circuito da Figura 4.16? Considere apenas a situação em que o MOSFET opera saturado e o amplificador operacional opera em sua região linear. Quais as restrições sobre  $v_i$  para que isto aconteça?

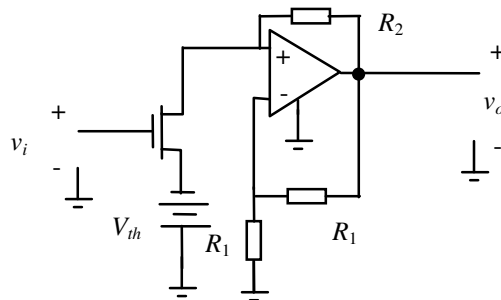


FIGURA 4.16

### Exercício 2:

Mostre que os circuitos da Figura 4.17 funcionam como conversores tensão-corrente,<sup>1</sup> isto é, a corrente  $i_L(t)$  pela carga  $R_L$  é proporcional ao valor da tensão de entrada  $v_i(t)$ . Qual a relação entre os valores dos resistores para que a constante de proporcionalidade seja igual à unidade?

<sup>1</sup> Conversores tensão-corrente podem fornecer correntes bem maiores do que fontes de sinal de baixa potência. Daí o interesse prático no seu uso.

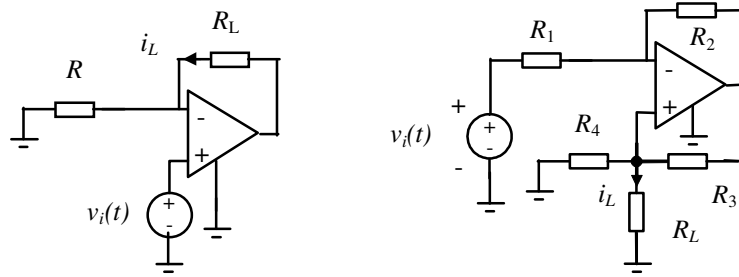


FIGURA 4.17

**Exercício 3:**

Mostre que o circuito da Figura 4.18 funciona como conversor corrente-tensão, isto é, a tensão  $v_s(t)$  na saída é proporcional à corrente  $i_e(t)$  na entrada.

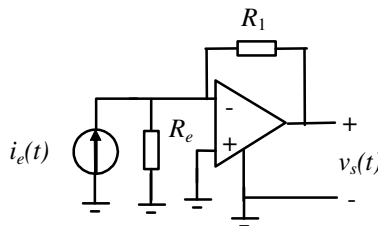


FIGURA 4.18

**Exercício 4:**

Faça um balanço de potência para os circuitos das Figuras 4.17 e 4.18.

**Exercício 5:**

Determine a característica  $v \times i$  do circuito da Figura 4.19 tanto com o amplificador operacional na região linear como na não-linear. Repita o exercício para o caso em que o ganho  $A$  da característica do amplificador operacional (Figura 4.3) não tende a infinito, mas assume um valor finito conhecido.

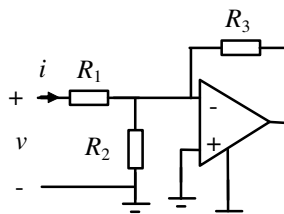


FIGURA 4.19

**Exercício 6:**

Determine a característica  $v \times i$  do circuito da Figura 4.20 tanto com o amplificador operacional na região linear como na não-linear. Repita o exercício para o caso em que o ganho  $A$  da característica do amplificador operacional (Figura 4.3) não tende a infinito, mas assume um valor finito conhecido.

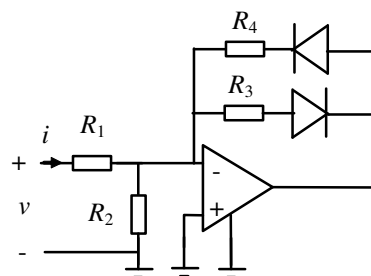


FIGURA 4.20

## 5. Circuitos de primeira ordem

Quando se equacionam circuitos resistivos, a aplicação das leis de Kirchhoff e das definições dos elementos de circuitos sempre resulta em equações algébricas (possivelmente não-lineares) nas correntes de ramo e potenciais dos nós. Quando o circuito não é puramente resistivo, ele recebe o nome genérico de circuito dinâmico, pois o circuito será descrito por um conjunto de equações algébricas e diferenciais (ou em casos não considerados aqui ainda por equações a diferenças).

### Elementos de circuito reativos

Os elementos de circuito responsáveis pela existência de dinâmica são capacitores e indutores, genericamente chamados de *elementos reativos*. O símbolo usado aqui para denotar elementos reativos será o da Figura 5.1.

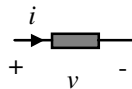
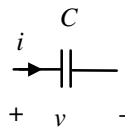


FIGURA 5.1 – Símbolo genérico para elementos reativos.

Os capacitores e indutores mais simples são os lineares, definidos respectivamente por:

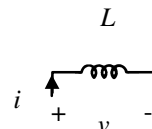
*Capacitor linear:*



$$i = C \frac{dv}{dt}$$

O valor  $C$  é chamado capacitância e é medido em Farad [F].

*Indutor linear:*



$$v = L \frac{di}{dt}$$

O valor  $L$  é chamado indutância e é medido em Henry [H].

FIGURA 5.2 – Capacitores e indutores lineares: definições.

*Exemplo:* Para ilustrar o equacionamento de circuitos dinâmicos, considere-se o circuito da Figura 5.3 com um capacitor:

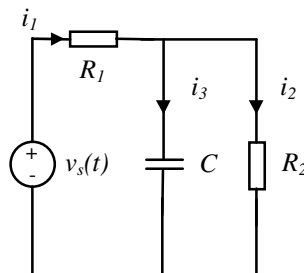


FIGURA 5.3 – Circuito dinâmico.

As equações que descrevem este circuito são:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 \\ v_3 &= v_2 = R_2 i_2 \\ v_1 &= R_1 i_1 \end{aligned}$$

$$v_2 = v_s - v_1$$

$$i_3 = C \frac{dv_3}{dt}$$

Neste exemplo, têm-se 6 incógnitas (3 tensões de ramo, 3 correntes de ramo) e 6 equações. Destas 6 equações, cinco são equações algébricas e uma é equação diferencial.

A condição inicial é a tensão entre os terminais do capacitor, que está relacionada à carga acumulada neste elemento no instante inicial.

Para trabalhar com fenômenos mais gerais é útil definir as grandezas carga  $q(t)$ , medida em Coulomb, [C], e fluxo  $\phi(t)$ , medido em Weber, [Wb]. As definições são as seguintes:

$$q(t) := \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$\phi(t) := \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

Para as grandezas carga e fluxo, nem sempre existe uma interpretação física simples. Para elementos de circuito dinâmicos é relevante a representação da sua característica no plano  $q \times v$  ou no plano  $\phi \times i$ . No primeiro caso, o elemento é chamado de capacitivo, no segundo caso de indutivo. Assim têm-se as definições a seguir.

*Capacitor invariante no tempo*

$$f_C(q, v) = 0$$

$v = \hat{v}(q)$  - - capacitor controlado por carga

$q = \hat{q}(v)$  - - capacitor controlado por tensão

Se  $\hat{q}(v)$  for diferenciável, então:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dv} \frac{dv}{dt} = C(v) \frac{dv}{dt}$$

$C(v)$  é chamada de capacitância de pequenos sinais no ponto  $v$ . O exemplo clássico de capacitor é o capacitor de placas paralelas.

*Indutor invariante no tempo*

$$f_L(\phi, i) = 0$$

$i = \hat{i}(\phi)$  - - indutor controlado por fluxo

$\phi = \hat{\phi}(i)$  - - indutor controlado por corrente

Se  $\hat{\phi}(i)$  for diferenciável, então:

$$v = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{di} \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt}$$

$L(i)$  é chamada indutância de pequenos sinais no ponto  $i$ . O exemplo clássico de indutor é a bobina.

*Exemplo:* Um exemplo de capacitor controlado por tensão é o varactor, mostrado num circuito simples na Figura 5.4.

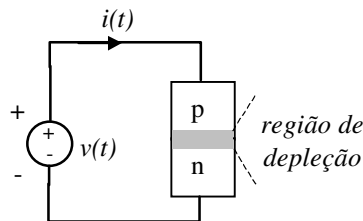


FIGURA 5.4 – Varactor num circuito simples.

Da física dos semicondutores tem-se que

$$q = \hat{q}(v) = -K \sqrt{V_0 - v}, v < V_0$$

Uma faixa típica de valores é  $0,2 < V_0 < 0,9$ . A capacitância de pequenos sinais vale:

$$C(v) = \frac{d\hat{q}(v)}{dv} = \frac{K}{2\sqrt{(V_0 - v)}}, v < V_0.$$

Portanto, na região de validade da característica  $\hat{q}(v)$ , o varactor é um capacitor controlado por tensão.

O uso de indutores tradicionais como a bobina sempre é acompanhado de efeitos colaterais desagradáveis, como ocupação ineficiente de espaço e dispersão de campos (irradiação). Por isso, podem-se adotar soluções que produzem comportamento indutivo sem o uso de bobinas. Um exemplo é a associação de um girador e um capacitor discutida no exemplo a seguir.

*Exemplo:* Um indutor eletrônico pode ser implementado como mostrado na Figura 5.5.

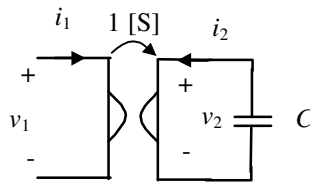


FIGURA 5.5 – Um indutor eletrônico.

O girador é descrito por:

$$i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} v(t)$$

Para o capacitor tem-se:

$$-i_2 = C \frac{dv_2}{dt}.$$

Combinando-se as duas equações acima obtém-se:

$$i_2 = -v_1 = -C \frac{dv_2}{dt} = -C \frac{di_1}{dt},$$

ou seja:

$$v_1 = C \frac{di_1}{dt},$$

que é uma característica indutiva. Isso significa que o conjunto girador-capacitor da Figura 5.5 implementa de fato o comportamento elétrico de um indutor com indutância  $C$  [H].

Para elementos reativos variantes no tempo, valem as seguintes características:

*Capacitor variante no tempo*

$$f_C(q, v, t) = 0$$

*Indutor variante no tempo*

$$f_L(\phi, i, t) = 0$$

Caso  $q(t) = C(t)v(t)$  então:

$$i(t) = C(t) \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} v(t)$$

Caso  $\phi(t) = L(t)i(t)$  então:

$$v(t) = L(t) \frac{di(t)}{dt} + \frac{dL(t)}{dt} i(t)$$

### Propriedades de capacitores e indutores invariantes no tempo

Memória, continuidade e ausência de perdas são propriedades de capacitores invariantes no tempo que serão demonstradas aqui. Essas propriedades também valem para indutores ideais e podem ser demonstradas de forma semelhante.

**Memória**

Para o capacitor vale

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

A integral acima "acumula" informação ao longo do tempo, constituindo um tipo de memória que pode ser explorada na construção de circuitos como detetores de pico ou seguidores-seguradores, como os apresentados nos dois exemplos a seguir.

*Exemplo:* A funcionalidade básica de um detetor de pico está presente no circuito da Figura 5.6.

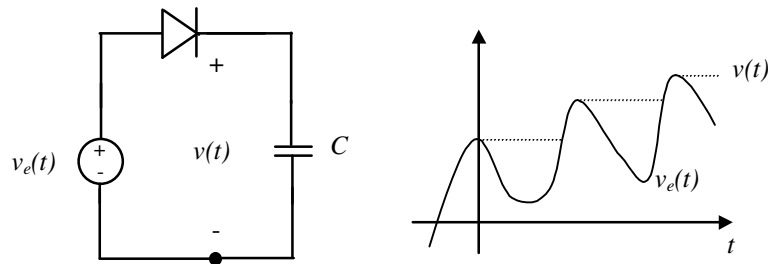


FIGURA 5.6 – Diagrama de circuito e característica de transferência de um detetor de pico.

Sua implementação prática pode ser feita usando-se um circuito com dois amplificadores operacionais, onde o primeiro é responsável por fornecer corrente suficiente para a carga do capacitor e o segundo atua como "buffer" de saída (seguidor de tensão). Tal circuito encontra-se na Figura 5.7.

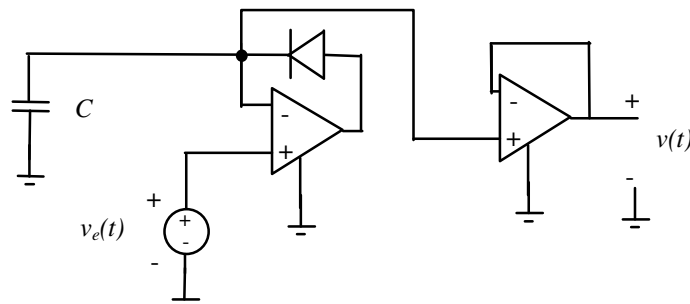


FIGURA 5.7 – Diagrama de circuito para implementação de um detetor de pico.

*Exemplo:* Em aplicações de controle por computador é importante amostrar-se um sinal (variante no tempo) e a seguir mantê-lo estável (num valor constante) para que se possa fazer uma conversão analógico-digital. Um circuito que realiza essa função de amostrador-segurador é mostrado na Figura 5.8.

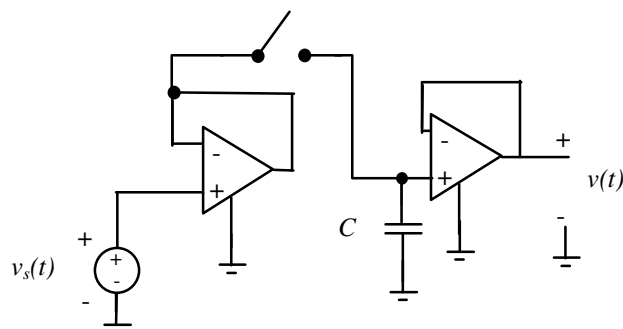


FIGURA 5.8 – Circuito amostrador-segurador.

### Continuidade

Um elemento de circuito capacitivo linear é definido por uma característica linear no plano  $q \times v$ . Portanto, a tensão sobre tal elemento de circuito, quando por ele flui uma corrente  $i_C(t)$ , vale:

$$v_C(T+dt) - v_C(T) = \frac{1}{C} \int_T^{T+dt} i_C(\tau) d\tau.$$

Como a corrente sempre é limitada em módulo por algum  $M$  em  $T \leq t \leq T+dt$ , a área sob  $i_C(t)$  no intervalo em questão será menor ou igual a  $M \cdot dt$  e, conseqüentemente,

$$v_C(T+dt) \xrightarrow{dt \rightarrow 0} v_C(T),$$

o que estabelece a continuidade da variável tensão entre os terminais de um capacitor. Para indutores, a propriedade da continuidade vale para a variável corrente.

### Ausência de perdas

A potência instantânea fornecida a um elemento de circuito vale

$$p(t) = v(t)i(t).$$

A energia fornecida entre dois instantes  $t_1$  e  $t_2$  vale

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t) dt.$$

No caso de um resistor linear (com  $R > 0$ ),  $w$  sempre terá valor positivo e sempre haverá dissipação de energia, pois

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2(t) dt \geq 0.$$

Para um capacitor controlado por carga ( $v = \hat{v}(q)$ ) vale

$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \hat{v}[q(t)]i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \hat{v}[q(t)] \frac{dq(t)}{dt} dt = \int_{q_1}^{q_2} \hat{v}(q) dq.$$

De forma semelhante para um indutor controlado por fluxo ( $i = \hat{i}(\phi)$ ) vale

$$w(t_1, t_2) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \hat{i}(\phi) d\phi.$$

Dessa forma, sob excitação periódica de tensão (para o capacitor) ou corrente (para o indutor), a energia total entrando no elemento reativo em um período completo do sinal é nula, pois  $q_1 = q_2$  (para o capacitor) ou  $\phi_1 = \phi_2$  (para o indutor).

### Circuitos genéricos de primeira ordem

Um circuito de primeira ordem sempre pode ser representado como na Figura 5.9. Sua descrição sempre será possível de uma das duas formas seguintes:

*Circuito capacitivo*

$$f_C(q, v, t) = 0$$

$$f_N(v, i, t) = 0$$

*Circuito indutivo*

$$f_L(\phi, -i, t) = 0$$

$$f_N(v, i, t) = 0$$

$$q(t) = - \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

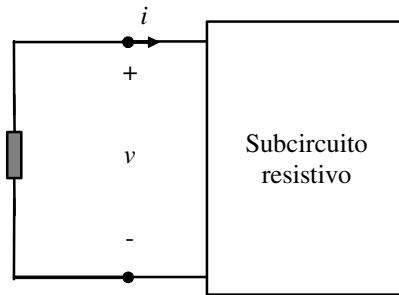
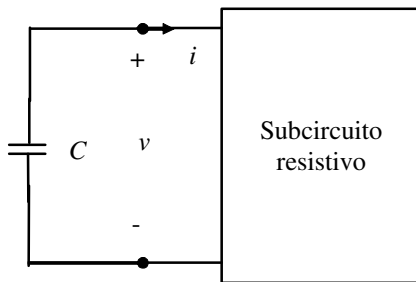


FIGURA 5.9 – Circuito de primeira ordem.

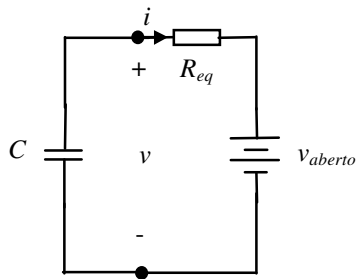
### Circuitos de primeira ordem lineares invariantes no tempo

Para circuitos de primeira ordem lineares e invariantes no tempo, as seguintes particularizações podem ser feitas:

*Circuito capacitivo:*



O subcircuito resistivo sempre poderá ser substituído por seu equivalente de Thevenin. Fazendo-se isso resulta:



com

$$v - R_{eq}i - v_{aberto} = 0.$$

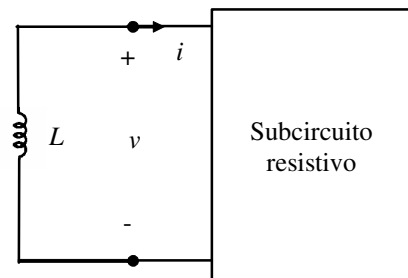
Como

$$i = -C \frac{dv}{dt},$$

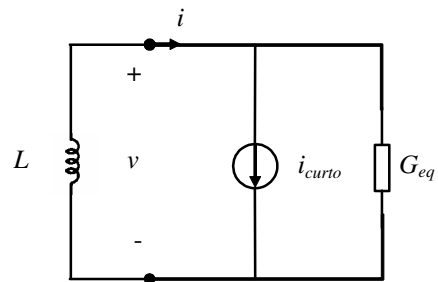
a equação diferencial para o circuito é:

$$\dot{v}(t) = \frac{v_{aberto}(t)}{R_{eq}C} - \frac{v(t)}{R_{eq}C}.$$

*Circuito indutivo:*



O subcircuito resistivo sempre poderá ser substituído por seu equivalente de Norton. Fazendo-se isso resulta:



com

$$i - G_{eq}v - i_{curto} = 0.$$

Como

$$v = -L \frac{di}{dt},$$

a equação diferencial para o circuito é:

$$\dot{i}(t) = \frac{i_{curto}(t)}{G_{eq}L} - \frac{i(t)}{G_{eq}L}.$$



O produto  $R_{eq}C$  tem dimensão de tempo e é denominado *constante de tempo do circuito*.

A condição inicial é a tensão entre os terminais do capacitor no instante inicial.

O produto  $G_{eq}L$  tem dimensão de tempo e é denominado *constante de tempo do circuito*.

A condição inicial é a corrente pelo indutor no instante inicial.

As equações diferenciais para circuitos de primeira ordem lineares são bastante semelhantes para circuitos indutivos e para circuitos capacitivos. As considerações a seguir são feitas para circuitos capacitivos. Para circuitos indutivos, as considerações são análogas.

### Circuitos de primeira ordem lineares com fontes arbitrárias

A equação diferencial do circuito de primeira ordem é

$$\dot{v}(t) = \frac{v_{aberto}(t)}{\tau} - \frac{v(t)}{\tau}.$$

Sua solução é única e vale

$$v(t) = e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} v(t_0) + \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(t-\tilde{t})}{\tau}} v_{aberto}(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

A validade dessa solução pode ser verificada por substituição. Os dois termos da solução recebem nomes especiais. O primeiro termo,

$$e^{-\frac{(t-t_0)}{\tau}} v(t_0),$$

é chamado *resposta à entrada nula*. É a resposta do circuito quando todas as fontes são nulas e o circuito responde apenas em função da condição inicial.

O segundo termo,

$$v(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t e^{-\frac{(t-\tilde{t})}{\tau}} v_{aberto}(\tilde{t}) d\tilde{t},$$

é chamado *resposta com condição inicial nula*. É a resposta do circuito quando a condição inicial é zero.

Se a condição inicial for nula e  $v_{aberto}$  for tomado como a função impulso (fonte de tensão impulsiva), então a resposta do circuito será

$$v(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Essa resposta usualmente é denotada por  $h(t)$  e recebe o nome de *resposta ao impulso (unitário)*. A resposta a impulso de um circuito é uma descrição interessante para ele, pois pode ser medida (aproximadamente) no laboratório e pode ser usada para calcular com boa aproximação a resposta do circuito a fontes arbitrárias usando a integral de convolução. Essa utilidade da resposta impulso pode ser verificada para um circuito linear qualquer de ordem arbitrária.

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-\tilde{t})}{\tau}} v_{aberto}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_{t_0}^t h(t-\tilde{t}) v_{aberto}(\tilde{t}) d\tilde{t}$$

Para a determinação experimental de  $h(t)$  usualmente recorre-se ao seguinte artifício: determina-se inicialmente  $s(t)$ , a resposta a degrau para condição inicial nula. Por resposta ao degrau entende-se a resposta a  $v_{aberto} = 1(t)$ . A seguir determina-se

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}.$$

### Circuitos de primeira ordem lineares com fontes DC

Para circuitos de primeira ordem lineares com fontes DC, a forma da equação diferencial que descreve o circuito é

$$\dot{x}(t) = \frac{x_{regime} - x(t)}{\tau}$$

Para  $\tau > 0$ ,  $x_{regime} = x(t \rightarrow \infty)$ . Para  $\tau < 0$ ,  $x_{regime} = x(t \rightarrow -\infty)$ . Dada a condição inicial  $x(t_0)$ , a solução da equação diferencial é

$$x(t) - x_{regime} = [x(t_0) - x_{regime}] e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau}}$$

Essa resposta encontra-se representada na Figura 5.10.

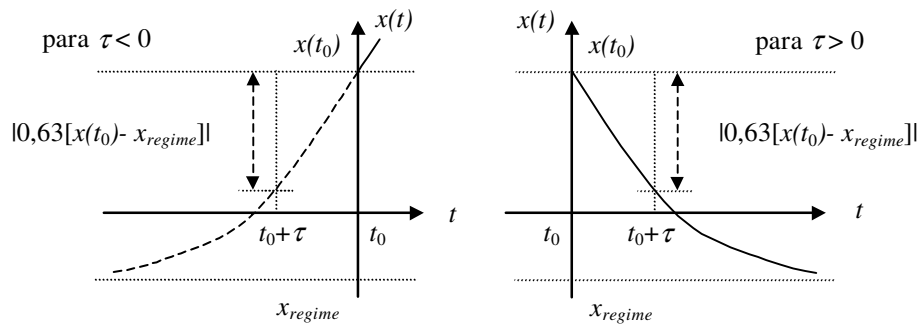


FIGURA 5.10 – Resposta de circuito de primeira ordem com fonte DC.

### Equacionamento por inspeção de circuitos de 1ª ordem lineares com fontes DC

O equacionamento por inspeção baseia-se nas seguintes constatações:

1. Todas as formas de onda num circuito de primeira ordem linear com fontes DC são exponenciais.
2. Em regime um capacitor é eletricamente equivalente a um circuito aberto (por ele não flui corrente) e um indutor equivale a um curto circuito (a queda de tensão sobre ele é nula).

Os passos para o equacionamento encontram-se resumidos na tabela abaixo:

Tabela 5.1 – Passos para o equacionamento por inspeção de circuitos de 1ª ordem lineares com fontes DC

Circuito com capacitor	Passo	Circuito com indutor
Substituir o capacitor por uma fonte de tensão (constante) $v_C(t_0)$ e calcular todas as tensões e correntes de ramos em $t_0$ (condições iniciais).	1	Substituir o indutor por uma fonte de corrente (constante) $i_L(t_0)$ e calcular todas as tensões e correntes de ramos em $t_0$ (condições iniciais).
Substituir o capacitor por um circuito aberto e calcular todas as tensões e correntes de ramos (valores de regime).	2	Substituir o indutor por um curto circuito e calcular todas as tensões e correntes de ramos (valores de regime).
Encontrar o equivalente de Thévenin do subcircuito resistivo e determinar a constante de tempo $\tau = R_{eq}C$ .	3	Encontrar o equivalente de Norton do subcircuito resistivo e determinar a constante de tempo $\tau = G_{eq}L$ .
Para $0 < t < \infty$ usar as informações acima para esboçar as correntes ou tensões de interesse (exponenciais), ou escrever suas expressões.	4	Para $0 < t < \infty$ usar as informações acima para esboçar as correntes ou tensões de interesse (exponenciais), ou escrever suas expressões.

### Circuitos de 1ª ordem lineares com fontes constantes por partes

O equacionamento de circuitos de primeira ordem lineares com fontes constantes por partes segue os dois passos abaixo, que consistem essencialmente na redução do problema a vários equacionamentos do tipo discutido na seção anterior para circuitos de primeira ordem lineares com fontes constantes.

1. Dividir o intervalo  $[t_0, \infty)$  em subintervalos  $[t_k, t_{k+1})$  de tamanhos quaisquer (possivelmente diferentes um do outro) tais que as fontes sejam constantes nestes intervalos.
2. Usar o método da Tabela 5.1, iniciando em  $t_k$  e aproveitando a solução apenas até  $t_{k+1}$ .

Observações:

- Entre os intervalos, a constante de tempo do circuito não muda, de forma que o Passo 3 da Tabela 5.1 precisa ser executado apenas uma vez.
- Em razão da propriedade da continuidade, a tensão no capacitor (ou a corrente no indutor) não sofrerá descontinuidade na transição de um intervalo para o outro. As tensões e correntes nos ramos resistivos de forma geral não serão contínuas.

*Exemplo:* Para o caso de um circuito com uma fonte constante por partes que altera seu valor em  $t_1, t_2, \dots$ , o procedimento é ilustrado na Figura 5.11. Os intervalos são  $[t_0, t_1), [t_1, t_2)$  etc.

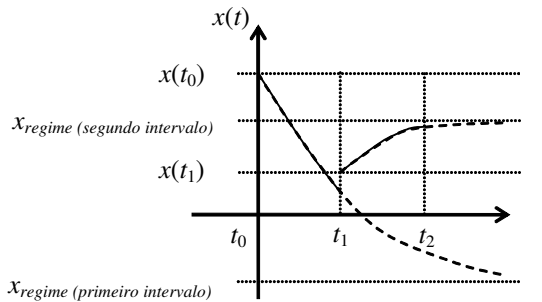


FIGURA 5.11 – Determinação da resposta de um circuito de primeira ordem com fonte constante por partes.

### Circuitos de primeira ordem lineares por partes

O procedimento sistemático de equacionamento é ilustrado a seguir com base num exemplo. Considere-se para isto o circuito da Figura 5.12(a). A característica do subcircuito resistivo é dada graficamente na Figura 5.12(b).

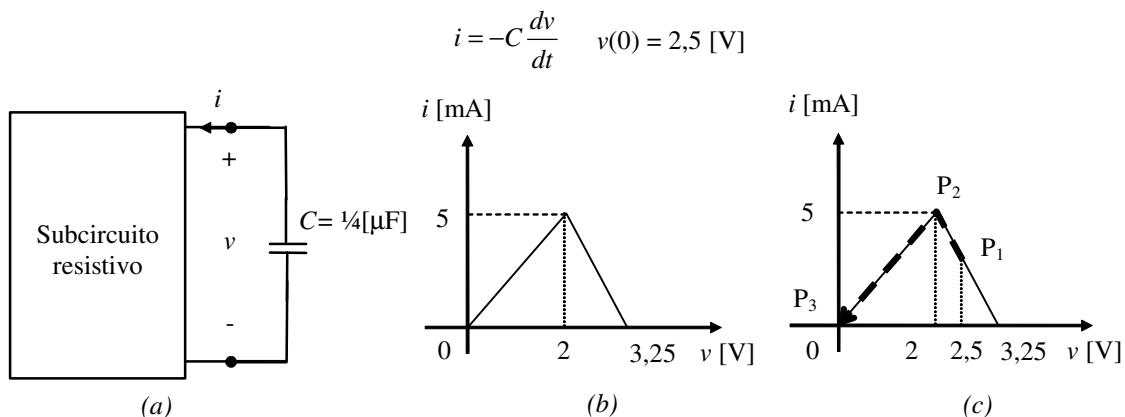


FIGURA 5.12 – Circuito de primeira ordem e característica do subcircuito resistivo.

Os passos para o equacionamento são:

- 1 Identificação do ponto inicial. Neste exemplo o ponto inicial é dado e vale  $v(0) = 2,5 \text{ [V]}$ .

- 2 Determinação da rota dinâmica. A rota dinâmica, que é o caminho percorrido no plano  $i \times v$ , é determinada com base nas informações extraídas da equação diferencial para o elemento reativo, no caso

$$i = -C \frac{dv}{dt}.$$

Dessa equação conclui-se que

$$\frac{dv}{dt} > 0 \text{ para } i < 0$$

$$\frac{dv}{dt} < 0 \text{ para } i > 0$$

Portanto, o sistema evoluirá da direita para a esquerda na característica resistiva  $i \times v$ , percorrendo os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  como mostrado na Figura 5.12(c).

- 3 Obtenção de uma solução  $v(t)$  para cada parte linear da característica resistiva substituindo  $N$  pelo equivalente de Thévenin (ou Norton) válido para o segmento. No caso do exemplo tem-se:

Para o segmento  $P_1P_2$  tem-se a situação da Figura 5.13.

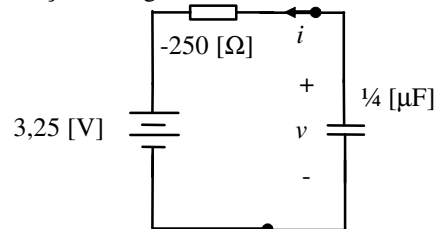


FIGURA 5.13 – Circuito com o primeiro equivalente de Thévenin para o circuito da Figura 5.12.

Para este circuito  $v(0) = 2,5$  [V];  $\tau = -62,5$  [ $\mu$ s];  $v_{regime} = 3,25$  [V]. Para o segmento  $P_2P_3$  tem-se a situação da Figura 5.14.

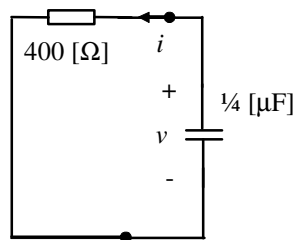


FIGURA 5.14 – Circuito com o segundo equivalente de Thévenin para o circuito da Figura 5.12.

Para este circuito  $v(t_0) = 2$  [V];  $\tau = 100$  [ $\mu$ s];  $v_{regime} = 0$  [V];  $t_0 = 31,9$  [ $\mu$ s]. O tempo inicial e a condição inicial são o tempo e a tensão ao final do segmento anterior.

Um esboço da solução  $v(t)$  encontra-se na Figura 5.15.

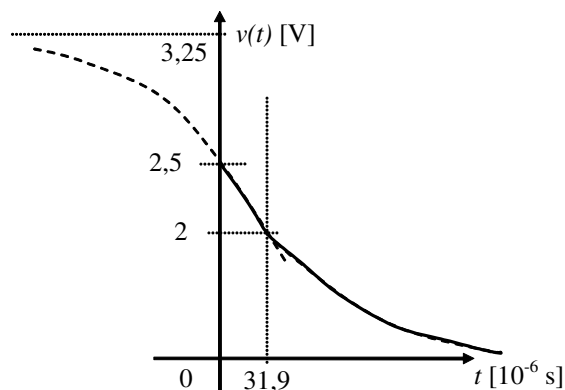


FIGURA 5.15 – Resposta do circuito da Figura 5.12.

### Fenômenos não-lineares em circuitos de primeira ordem (oscilações e biestabilidade)

Para ilustração dos fenômenos de oscilação e biestabilidade, considerem-se os seguintes circuitos que consistem do subcircuito resistivo da Figura 4.14 interligado com elementos reativos.

*Exemplo:* Aqui é discutido o circuito de primeira ordem da Figura 5.16 que funciona como oscilador. O tipo de oscilação produzida é denominada oscilação relaxada

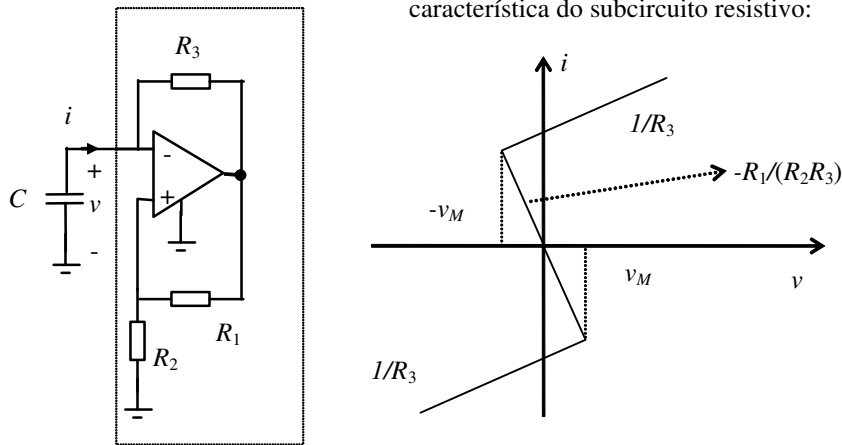


FIGURA 5.16 – Circuito oscilador de primeira ordem.

No capítulo anterior foi mostrado que  $v_M = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_{sat}$ , onde  $E_{sat}$  é a tensão de saturação do amplificador operacional.

A rota dinâmica percorrida pelo circuito é determinada a partir da equação diferencial para o capacitor,

$$i = -C \frac{dv}{dt}.$$

Portanto,

$$\frac{dv}{dt} > 0 \text{ para } i < 0$$

$$\frac{dv}{dt} < 0 \text{ para } i > 0$$

A conclusão é a de que o circuito irá oscilar produzindo o ciclo de oscilação e a resposta apresentada na Figura 5.17.

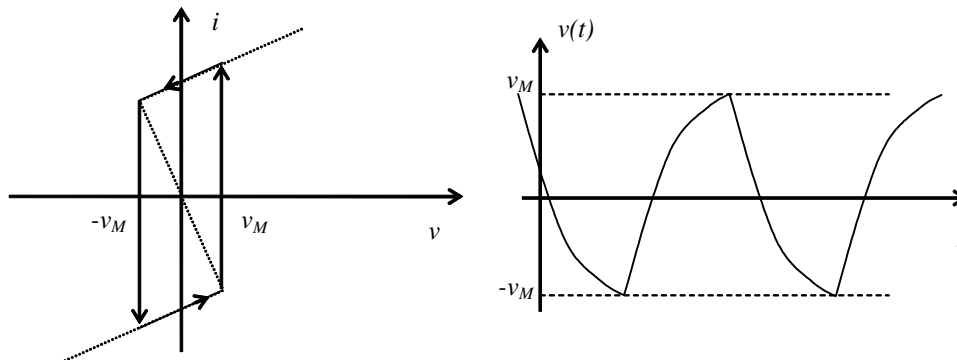


FIGURA 5.17 – Resposta do circuito da Figura 5.16.

A forma de onda de  $v(t)$  será composta de segmentos de exponenciais. Esse formato de onda é conhecido por "dente de serra".

*Exemplo:* Aqui é discutido um circuito de primeira ordem que possui dois pontos de equilíbrio estáveis. Tal característica é denominada biestabilidade. O circuito biestável em questão é o da Figura 5.18. O subcircuito resistivo é o mesmo do exemplo anterior.

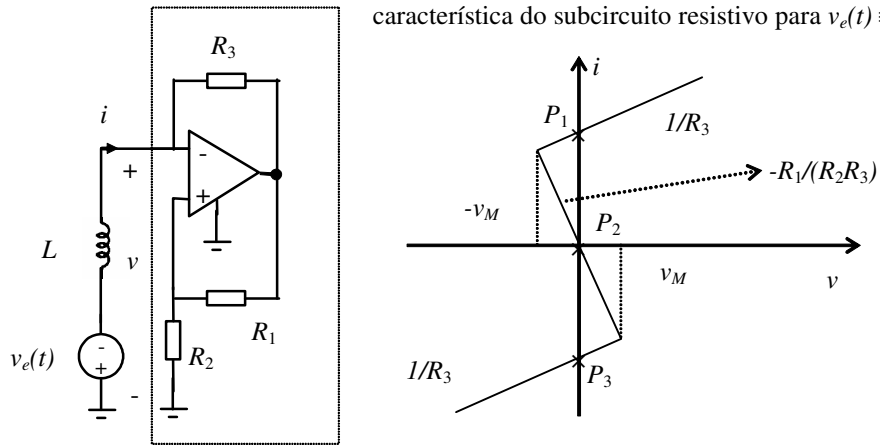


FIGURA 5.18 – Circuito biestável.

Considere-se inicialmente  $v_e(t) = 0$ . Como citado no exemplo anterior, vale  $v_M = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_{sat}$ .

A equação diferencial para o indutor é:

$$v = -L \frac{di}{dt}$$

Usando análise da rota dinâmica para  $v_e(t) \equiv 0$ , conclui-se que os pontos  $P_1$  e  $P_3$  são pontos de equilíbrio estáveis, isto é, pequenos deslocamentos em torno destes pontos terão como consequência um retorno do sistema ao ponto de equilíbrio. Pela mesma análise acha-se o ponto de equilíbrio instável  $P_2$ .

Com ajuda de um pulso aplicado por meio da fonte  $v_e(t)$  é possível fazer que o circuito mude de um ponto de equilíbrio estável para o outro, como ilustrado na Figura 5.19.

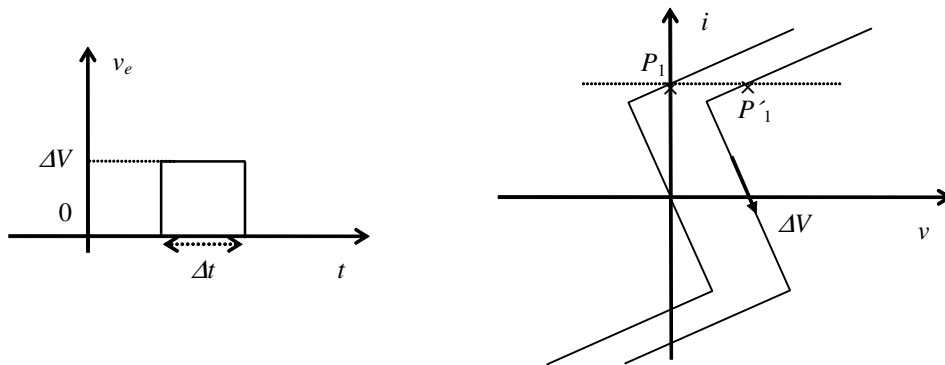


FIGURA 5.19 – Resposta do circuito da Figura 5.18.

Para que ocorra a transição entre os pontos de equilíbrio  $P_1$  e  $P_3$ , existem valores mínimos de  $\Delta V$  e  $\Delta t$  a obedecer. A transição inversa é obtida com aplicação de um pulso negativo por meio de  $v_e(t)$ .

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

No circuito abaixo determine o valor do capacitor de modo a ter o circuito da Figura 5.20 oscilando a frequência de 1 [kHz]. Esboce a forma de onda de  $v(t)$ .

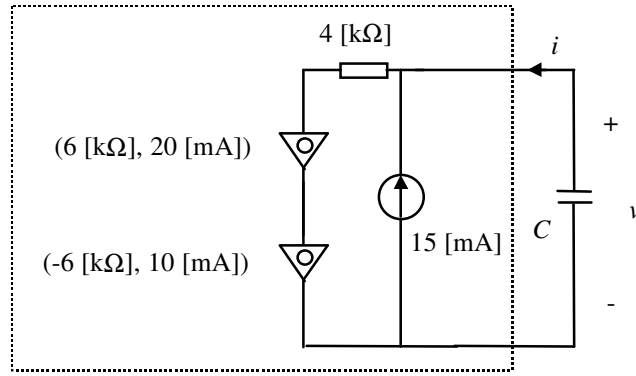


FIGURA 5.20

**Exercício 2:**

Qual a equação diferencial que define  $v_o$  em função de  $v_1$  e  $v_2$  no circuito da Figura 5.21? Considere inicialmente apenas o amplificador operacional na região linear. Posteriormente considere o caso geral.

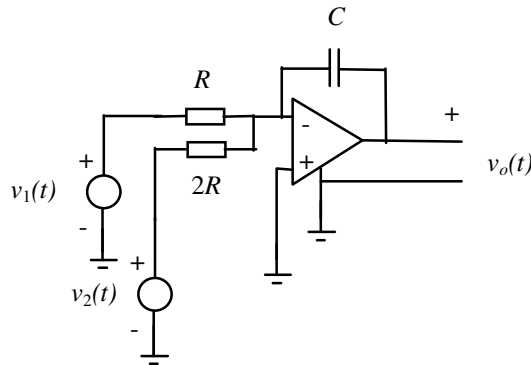


FIGURA 5.21

**Exercício 3:**

Determine o valor de  $L$  em função dos valores de  $G_1$ ,  $G_2$  e  $C$  tal que os dois circuitos da Figura 5.22 sejam equivalentes.

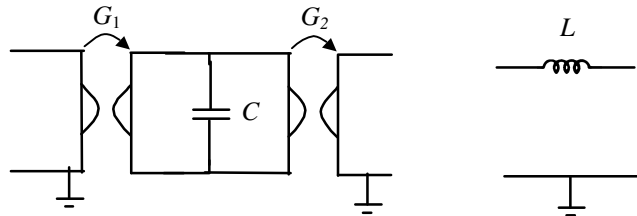


FIGURA 5.22

**Exercício 4:**

Sob que hipótese(s) sobre os valores de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $C$  os dois circuitos da Figura 5.23 podem ser considerados equivalentes do ponto de vista de engenharia? (Considere o amplificador operacional na região linear apenas.)

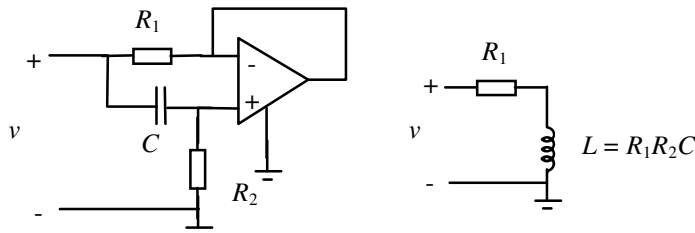


FIGURA 5.23

**Exercício 5:**

Em que circunstâncias o circuito da Figura 5.24 é preferível ao circuito da Figura 5.23?

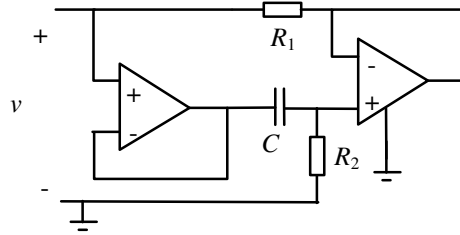


FIGURA 5.24

**Exercício 6:**

Qual a equação diferencial que define  $v_o$  em função de  $v_i$  no circuito da Figura 5.25? Considere apenas o amplificador operacional na região linear.

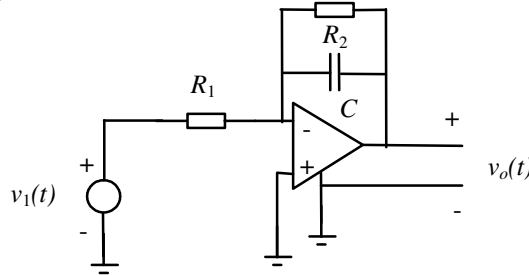


FIGURA 5.25

**Exercício 7:**

Determine todas as correntes e tensões de ramo dos circuitos da Figura 5.26 para condições iniciais nulas.

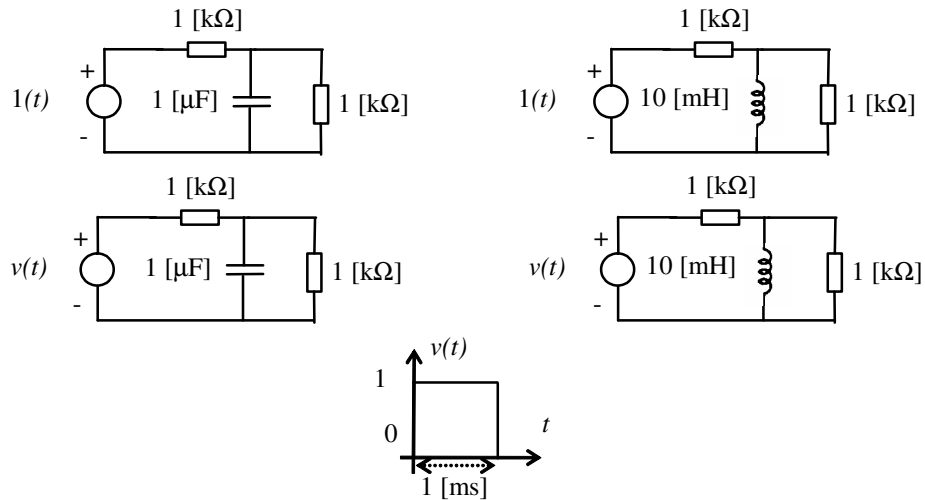


FIGURA 5.26

**Exercício 8:**

Na Figura 5.27,  $i(t)$  é uma corrente quadrada alternando entre 0 e 0,1 [mA] a cada 0,5 [ms]. Suponha que com  $v_{gs} = 10$  [V],  $v_{ds}$  é insignificante, pelo que o MOSFET irá funcionar como chave. Suponha que os tempos necessários para o ligamento e desligamento do MOSFET sejam desprezíveis. Determine  $v_2(t)$  em regime, isto é, após o decaimento suficiente da parcela referente a carga inicial do capacitor.

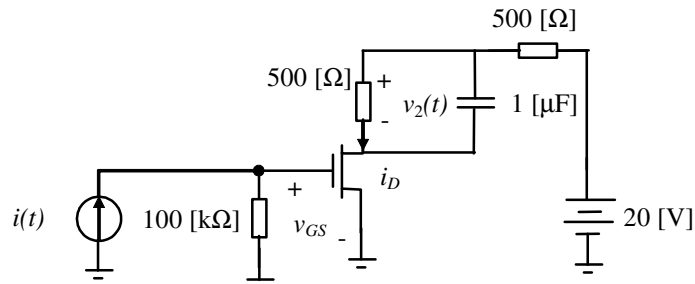


FIGURA 5.27



## 6. Circuitos de segunda ordem e ordem superior

De forma geral, a ordem de um circuito dinâmico é determinada pela quantidade de elementos reativos de dois terminais que ele contém. Este também será o número de condições iniciais para as equações diferenciais que o descrevem. O circuito sempre será descrito por um conjunto de equações algébricas e diferenciais do tipo:

$$\begin{aligned} Ai(t) &= 0 \quad \text{da Lei de Kirchoff das correntes} \\ A^T e(t) - v(t) &= 0 \quad \text{da Lei de Kirchoff das tensões} \\ f(\dot{v}, v, \dot{i}, i, t, u_f(t)) &= 0 \quad \text{das definições dos elementos de circuito} \end{aligned}$$

onde  $u_f(t)$  é a contribuição das fontes. O método de equacionamento usado até agora, que resulta nestas equações, é denominado *método geral de análise de circuitos*.

### Indutores acoplados

Além dos elementos de circuito dinâmicos de dois terminais apresentados no capítulo anterior, existem alguns elementos de circuito dinâmicos de significado prático com mais de dois terminais. Este é o caso dos indutores acoplados, que aparecem na prática quando bobinas compartilham o mesmo núcleo, por exemplo em transformadores (não ideais). Aqui será considerado apenas o caso de dois indutores acoplados. Situações com mais indutores acoplados são comuns e tratados de forma semelhante.

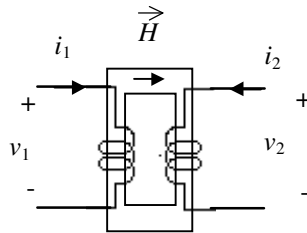


FIGURA 6.1 – Dois indutores acoplados.

Um conjunto de dois indutores acoplados é um elemento de circuito controlado por corrente, no qual os fluxos são dados por

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \varphi(t) = Li(t) = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}.$$

$L$  é chamada *matriz de indutância* e  $M$  de *indutância mútua*.  $L_{11}$  e  $L_{22}$  são as autoindutâncias. O sinal de  $M$  dependerá do arranjo físico das bobinas. Pela lei de Faraday sabe-se que o fluxo  $\phi_j$  para a bobina  $j$  está relacionado com a tensão nos terminais por

$$\dot{\phi}_j(t) = v_j(t).$$

Dessa forma

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

e no caso de  $L$  não singular

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_M \\ \Gamma_M & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \Gamma v(t).$$

A matriz  $\Gamma$  é chamada de *matriz de indutância recíproca*.

Um par de indutores acoplados é representado pelo símbolo mostrado na Figura 6.2. A mesma figura apresenta um circuito eletricamente equivalente aos indutores acoplados.

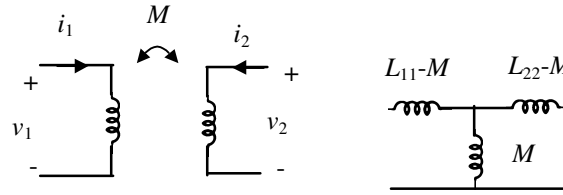


FIGURA 6.2 – Símbolo e circuito equivalentes para dois indutores acoplados.

### Energia armazenada num par de indutores acoplados

Considere-se um intervalo de tempo  $[0, T]$  e os seguintes valores de corrente nos tempos 0 e  $T$ :  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ ,  $i_1(T) = I_1$ ,  $i_2(T) = I_2$ .

A energia entregue ao conjunto de indutores acoplados no intervalo considerado será:

$$W = \int_0^T [v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)] dt = \int_0^T \left\{ L_{11}\dot{i}_1(t)i_1(t) + M[\dot{i}_1(t)i_2(t) + \dot{i}_2(t)i_1(t)] + L_{22}\dot{i}_2(t)i_2(t) \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ L_{11}i_1^2(T) + 2Mi_2(T)i_1(T) + L_{22}i_2^2(T) \right] = \frac{1}{2} i^T(T) \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} i(T)$$

$W$  é a energia armazenada no campo magnético e deve ser positiva para qualquer  $i(T) \neq 0$ . Dessa forma, a matriz de indutância precisa ser positiva definida, o que significa que as restrições para que isso ocorra, a saber:

$$L_{11} > 0, M^2 < L_{11}L_{22}, \text{ e portanto } L_{22} > 0,$$

são restrições físicas para o par de indutores acoplados.

### Relação com transformadores ideais

Por verificação, pode-se constatar que um par de indutores acoplados pode ser representado equivalentemente por:

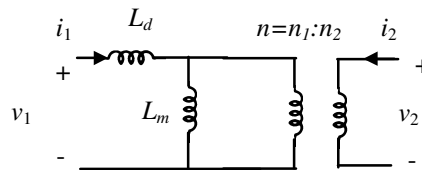


FIGURA 6.3 – Circuito equivalente de um transformador real (dois indutores acoplados).

O circuito da Figura 6.3 é descrito pela equação

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d + L_m & n^{-1}L_m \\ n^{-1}L_m & n^{-2}L_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Quando  $L_d \rightarrow 0$  e  $L_m \rightarrow \infty$  tem-se o transformador ideal. Isto aconteceria se o núcleo (comum) tivesse permeabilidade magnética infinita. A indutância  $L_d$  é chamada *indutância de dispersão* e  $L_m$  é chamada *indutância de magnetização*.

## Método geral de análise

Este método às vezes também recebe o nome *método "tableau"*. Para rever o método geral de análise, considere-se inicialmente o seguinte exemplo.

*Exemplo:* Aqui serão revistos os procedimentos de equacionamento de circuitos dinâmicos apresentados até este ponto do texto. Considere-se para tal o circuito da Figura 6.4.

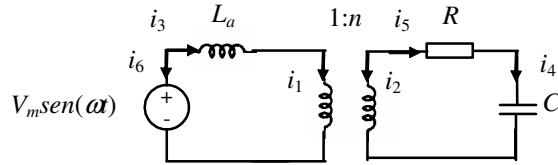


FIGURA 6.4 – Exemplo de circuito para discussão do método geral de análise.

Após a obtenção de um dígrafo conectado para este circuito, obtém-se com a aplicação a LKC:

$$Ai(t) = 0,$$

onde  $A$  é a matriz de incidência reduzida do dígrafo conectado e  $i$  o vetor das correntes de ramo. Da lei de Kirchhoff das tensões tem-se para os vetores das tensões nodais e das tensões de ramo ( $e$  e  $v$  respectivamente):

$$A^T e(t) - v(t) = 0$$

Das definições para os elementos de circuito de cada ramo resultam as seguintes equações dos ramos:

$$\begin{aligned} nv_1(t) - v_2(t) &= 0 \\ i_1(t) + ni_2(t) &= 0 \\ v_3(t) - L\dot{i}_3(t) &= 0 \\ C\dot{v}_4(t) - i_4(t) &= 0 \\ v_5(t) - Ri_5(t) &= 0 \\ v_6(t) &= V_m \text{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Introduzindo a letra  $D$  para denotar o operador  $d/dt$ , estas equações dos ramos podem ser colocadas na forma

$$(M_0 D + M_1)v(t) + (N_0 D + N_1)i(t) = u_f(t), \quad (6.1)$$

onde neste exemplo

$$u_f(t) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ V_m \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}$$

contém a contribuição da fonte independente.

Devem agora ser anotadas as condições iniciais:

- a tensão inicial no capacitor  $v_4(0) = V_C$  e
- a corrente inicial no indutor  $i_3(0) = I_L$ .

Caso o circuito da Figura 6.4 contivesse resistores, indutores e capacitores variantes no tempo, as equações dos ramos correspondentes seriam:

$$\begin{aligned} v_3(t) - \dot{L}(t)i_3(t) - L(t)\dot{i}_3(t) &= 0 \\ C(t)\dot{v}_4(t) + \dot{C}(t)v_4(t) - i_4(t) &= 0 \\ v_5(t) - R(t)i_5(t) &= 0 \end{aligned}$$

$C(t)$ ,  $R(t)$  e  $L(t)$  seriam funções conhecidas no tempo. (O mesmo aconteceria com suas derivadas.) Dessa

forma, o conjunto de equações resultantes para o circuito continuaria sendo linear e da mesma ordem do circuito invariante no tempo, mas com coeficientes variantes no tempo. (Por isso não haveria condições iniciais adicionais.)

No exemplo acima, é possível reconhecer o seguinte procedimento (algoritmo) de equacionamento que é denominado *método geral de análise*.

*Dados:*

- Diagrama de circuito com nós numerados e direções de referência para as correntes.
- Equações de ramos para cada elemento de circuito.

*Passos do equacionamento segundo o método geral de análise*

- Passo 1: Escolha um nó de referência, trace um dígrafo conectado para o circuito e determine a matriz de incidência reduzida  $A$ .
- Passo 2: Aplique a lei de Kirchhoff das correntes.
- Passo 3: Aplique a lei de Kirchhoff das tensões.
- Passo 4: Determine as equações dos ramos e coloque-as no formato da equação (6.1).

*Resultado:*

O resultado do procedimento descrito será um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & M_0 D + M_1 & N_0 D + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_f(t) \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ M_0 A^T D + M_1 A^T & N_0 D + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_f(t) \end{bmatrix}$$

Para circuitos não-lineares variantes no tempo as equações do método geral de análise estarão na forma:

$$\begin{aligned} Ai(t) &= 0 \\ A^T e(t) - v(t) &= 0 \\ f(\dot{v}, v, \dot{i}, i, t, u_f(t)) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} Ai(t) &= 0 \\ f(A^T \dot{e}(t), A^T e(t), \dot{i}, i, t, u_f(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Este tipo de equacionamento seria obtido no exemplo anterior caso  $L=L(i_3)$  e/ou  $C=C(v_4)$ . A situação é ligeiramente mais complicada se houver indutores não controlados por corrente ou capacitores não controlados por tensão, pois nestes casos os ramos correspondentes serão descritos por:

*Capacitor não controlado por tensão:*

$$\begin{aligned} f_C(q_C, v_C) &= 0 \\ \dot{q}_C(t) &= i_C(t) \end{aligned}$$

*Indutor não controlado por corrente*

$$\begin{aligned} f_L(\phi_L, i_L) &= 0 \\ \dot{\phi}_L(t) &= v_L(t) \end{aligned}$$

Em ambos os casos será necessário introduzir a variável (carga ou fluxo) e as equações adicionais indicadas acima.

## Análise nodal

A análise nodal pode ser entendida como uma particularização do método geral de análise para circuitos conectados cujos ramos contenham fontes de corrente independentes ou elementos de circuito controlados por tensão. Outros elementos de circuito não são admitidos.

Definem-se inicialmente os vetores das tensões e correntes dos ramos que não contenham fontes independentes, respectivamente:

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \dots \\ v_b(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad i(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \dots \\ i_b(t) \end{bmatrix}$$

Como todos estes ramos contêm elementos controlados por tensão, é possível escrever as equações dos ramos na forma:

$$i(t) = (Y_0 D + Y_1)v(t) = Y_b v(t), \quad (6.2)$$

onde  $Y_b$  é chamada de *matriz de admitância dos ramos*.

As contribuições das fontes independentes são colocadas no vetor

$$i_f(t) = \begin{bmatrix} i_{f1}(t) \\ \dots \\ i_{f(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

onde  $i_{fk}$  é a soma de todas correntes independentes *entrando* no nó  $k$ .  $n$  é o número de nós do circuito *conectado*. (Esta convenção de sinal para as correntes independentes é oposta à convenção adotada para as correntes de ramo na determinação da matriz de incidência do circuito.) Na montagem de  $i_f$  o nó de referência não é considerado.

Define-se agora um dígrafo associado a um circuito reduzido. O circuito reduzido é obtido a partir do circuito inicial abrindo-se todas as fontes de corrente independentes. Se o dígrafo deste circuito reduzido for conectado, o circuito certamente terá solução, mas isso é uma condição suficiente e não necessária.

Seja  $A$  a matriz de incidência reduzida deste último grafo, então para o circuito não reduzido valem

$$A i(t) = i_f(t)$$

e

$$A^T e(t) - v(t) = 0.$$

Combinando-se essas equações com as equações dos ramos escritas anteriormente em (6.2), obtém-se

$$(A Y_b A^T) e(t) = i_f(t), \quad (6.3)$$

ou

$$Y_n e(t) = i_f(t)$$

com

$$Y_n = (A Y_b A^T).$$

(6.3) é um conjunto de  $(n-1)$  equações e  $(n-1)$  incógnitas, cuja dimensionalidade depende apenas do número de nós do circuito (original).

É possível demonstrar que a matriz  $Y_n$  de dimensão  $(n-1) \times (n-1)$  pode ser construída da seguinte forma diretamente (por inspeção) a partir do grafo do circuito reduzido:

- o  $i$ -ésimo termo da diagonal é a soma das condutâncias que chegam ao nó  $i$ ;
- o termo  $ij$  é o somatório, com sinal oposto, de todas as condutâncias que interligam os nós  $i$  e  $j$ .

No caso de circuitos não-lineares, a formulação resulta em  $(n-1)$  equações não-lineares com  $(n-1)$  incógnitas.

$$A g[A^T e(t)] = i_f(t)$$

Aqui  $g(\cdot)$  é a função vetorial que caracteriza os  $b$  ramos com elementos de circuitos controlados por tensão.

### Análise nodal modificada

A análise nodal modificada é um método de equacionamento derivado da análise nodal numa tentativa de generalizá-lo. Serão admitidos todos os possíveis tipos de elementos de circuitos.

Pode-se resumir o método da análise nodal modificada da seguinte forma. Quando um elemento de circuito não é uma fonte de corrente independente nem um elemento controlado por tensão, encara-se a corrente daquele ramo como proveniente de uma "pseudo fonte". Ao final da análise nodal, acrescenta-se ao conjunto de equações uma nova equação correspondente ao ramo da "pseudo fonte". Dessa forma, a variável de corrente da "pseudo fonte" fica determinada.

*Exemplo:* Este exemplo será usado para apresentar a análise nodal modificada. Para tal considere-se o circuito da Figura 6.5.

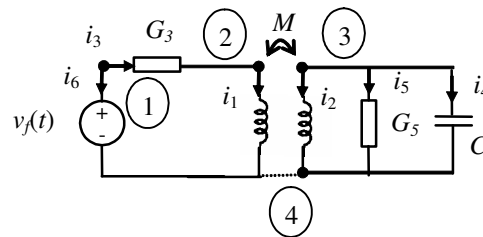


FIGURA 6.5 – Exemplo de circuito para ilustração do método da análise nodal modificada.

As correntes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_6$  são associadas a "pseudo fontes", pois os elementos de circuitos nos ramos 1, 2 e 6 não são fontes de corrente independentes nem elementos controlados por tensão. Assim, o dígrafo reduzido do conjunto (para a análise nodal) é:

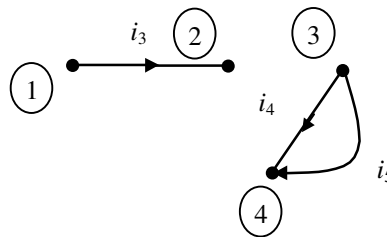


FIGURA 6.6 – Dígrafo do circuito reduzido associado ao circuito da figura 6.5.

Para o circuito e para o grafo da Figura 6.6, têm-se as matrizes:

$$Y_b = \begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 \\ 0 & CD & 0 \\ 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}, \quad A_a = \begin{array}{ccc|l} & i_3 & i_4 & i_5 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & \text{nó 1} \\ 2 & -1 & 0 & 0 & \text{nó 2} \\ 3 & 0 & 1 & 1 & \text{nó 3} \\ 4 & 0 & -1 & -1 & \text{nó 4} \end{array}$$

Além disso

$$i_f(t) = \begin{bmatrix} -i_6 \\ -i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

As equações relativas ao circuito reduzido da análise nodal modificada são portanto:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_3 & 0 & 0 \\ 0 & CD & 0 \\ 0 & 0 & G_5 \end{bmatrix}}_{Y_n} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_6(t) \\ -i_1(t) \\ -i_2(t) \end{bmatrix}.$$

A matriz  $Y_n$  pode também ser montada diretamente conforme descrito na seção sobre análise nodal:

$$Y_n = \begin{bmatrix} G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_5 + CD \end{bmatrix}.$$

Desta forma o conjunto de equações obtidos até este ponto é:

$$\begin{aligned} G_3 e_1(t) - G_3 e_2(t) + i_6(t) &= 0 \\ -G_3 e_1(t) + G_3 e_2(t) + i_1(t) &= 0 \\ C \dot{e}_3(t) + G_5 e_3(t) + i_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Para os ramos que contêm elementos de circuito que não são fontes de corrente independentes nem elementos controlados por tensão, as equações adicionais são:

$$\begin{bmatrix} e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & M \\ M & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix}$$

$$e_1(t) = v_f(t).$$

## Formas canônicas para circuitos lineares

O conjunto de equações que descreve um circuito dinâmico linear invariante no tempo (exceto pelas fontes) sempre pode ser colocado na forma de um conjunto de equações algébricas e um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem do tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t) \quad \text{ou} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{fontes}(t)$$

Essa forma é chamada de *equação de estado* ou *forma de estado*. O vetor  $x$  tem dimensão igual à ordem do circuito e é chamado *vetor de estado* ou simplesmente *estado*. A qualquer tempo todas as variáveis do circuito são combinações lineares das componentes de  $x$  e  $u$  (ou de  $x$  e  $u_{fontes}$ ).

Na primeira expressão, o vetor  $u(t)$  incorpora a contribuição das fontes independentes. Na segunda expressão,  $Bu_{fontes}(t)$  incorpora a contribuição das fontes independentes, das quais as componentes do vetor  $u_{fontes}(t)$  são os valores de correntes e tensões fornecidas pelas fontes independentes (como função do tempo).

Uma outra forma de representação é uma equação diferencial da ordem do circuito, na forma:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = f(t) \quad (6.4)$$

onde o termo forçante  $f(t)$  incorpora a contribuição das fontes independentes.

No caso particular de circuitos lineares de segunda ordem, a equação (6.4) pode ser escrita como:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\dot{y}(t) + \beta y(t) = f(t).$$

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são muito convenientes para estudo e caracterização do comportamento destes circuitos, como será visto mais adiante.

*Exemplo:* As formas de representação acima serão obtidas a seguir para um circuito *RLC* paralelo, isto é, um circuito onde um resistor ( $R$ ), um indutor ( $L$ ) e um capacitor ( $C$ ) estão ligados em paralelo. Este circuito é mostrado na Figura 6.7.

As equações que descrevem o circuito da Figura 6.7 são:

$$\begin{aligned} C\dot{v}(t) + \frac{1}{R}v(t) + i_L(t) &= i_s(t) \\ v(t) &= L\dot{i}_L(t) \end{aligned}$$

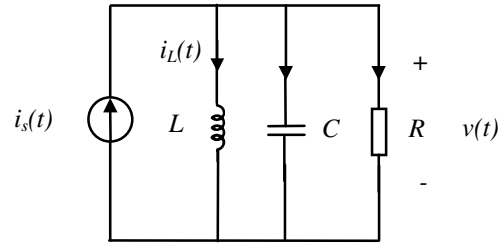


FIGURA 6.7 – Circuito RLC paralelo.

Fazendo as substituições adequadas, chega-se à forma

$$\ddot{i}_L(t) + \frac{1}{RC} \dot{i}_L(t) + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{LC} i_s(t).$$

Adotando-se  $x_1 = i_L, x_2 = \dot{i}_L$  obtém-se a equação de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{LC} x_1(t) - \frac{1}{RC} x_2(t) + \frac{1}{LC} i_s(t) \end{aligned} \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} i_s(t)$$

Uma equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, u \in \mathfrak{R}^{m \times 1}, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

com condição inicial  $x(t_0)$  possui a solução (única)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tilde{t})} B u(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (6.5)$$

O primeiro termo é a resposta do circuito à entrada nula. O segundo termo é a resposta do circuito com condições iniciais nulas. A validade desta solução pode ser verificada por substituição na equação de estado.

## Teorema da superposição para circuitos lineares dinâmicos

*Teorema*

A resposta de um sistema linear  $\dot{x}(t) = Ax(t) + u(t)$  a  $u(t) = au_{(1)}(t) + bu_{(2)}(t)$  é dada por  $x(t) = ax_{(1)}(t) + bx_{(2)}(t)$  onde  $x_{(1)}(t)$  é a solução para  $u(t) = u_{(1)}(t)$  e  $x_{(2)}(t)$  é a solução para  $u(t) = u_{(2)}(t)$ ;

*Demonstração*

Considerando inicialmente as respostas a  $u(t) = u_{(1)}(t)$  e  $u(t) = u_{(2)}(t)$  têm-se:

$$\dot{x}_{(1)}(t) = Ax_{(1)}(t) + u_{(1)}(t) \quad (6.6)$$

$$\dot{x}_{(2)}(t) = Ax_{(2)}(t) + u_{(2)}(t) \quad (6.7)$$

Multiplicando-se (6.6) por  $a$  e (6.7) por  $b$  e somando-se as duas equações resultantes tem-se:

$$a\dot{x}_{(1)}(t) + b\dot{x}_{(2)}(t) = aAx_{(1)}(t) + au_{(1)}(t) + bAx_{(2)}(t) + bu_{(2)}(t)$$

ou

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + au_{(1)}(t) + bu_{(2)}(t).$$



## Teorema da substituição

### Teorema

Na interligação de dois subcircuitos com uma porta, que interagem apenas através dos terminais que têm em comum, qualquer um dos dois circuitos pode ser substituído equivalentemente (do ponto de vista elétrico) por uma fonte que reproduz o histórico de tensão ou corrente nos terminais de interligação.

O teorema da substituição vale para circuitos lineares ou não. Sua aplicação é ilustrada na Figura 6.8. Afirma-se que o valor de todas as variáveis internas do circuito  $N_1$ , bem como as variáveis na porta, será numericamente igual nos três casos da figura. A demonstração é feita equacionando-se os três circuitos equivalentes com o método geral de análise e comparando-se os conjuntos de equações obtidos, que serão equivalentes.

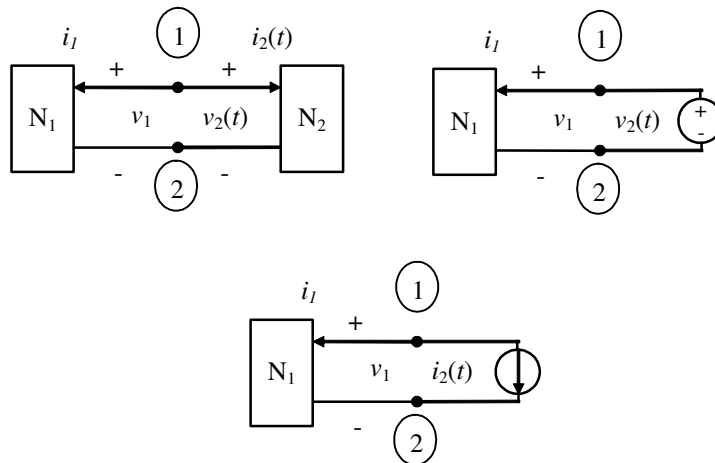


FIGURA 6.8 – Ilustração do teorema da substituição.

## Comportamento qualitativo de $dx/dt = Ax$ para circuitos de segunda ordem

A evolução de um circuito linear em função apenas das condições iniciais é determinado por uma equação diferencial do tipo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ . Caso a matriz  $A$  tenha dois autovetores  $\eta_1, \eta_2$  (linearmente independentes), a solução desta equação diferencial será dada por

$$x(t) = \left(k_1 e^{s_1 t}\right) \eta_1 + \left(k_2 e^{s_2 t}\right) \eta_2 \quad (6.8)$$

onde  $\eta_1, \eta_2$  são tais que

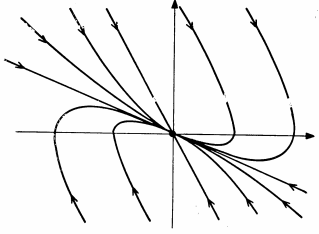
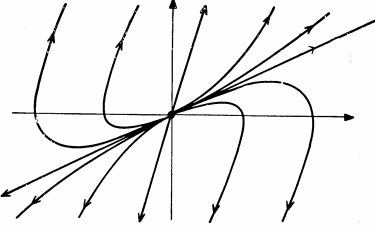
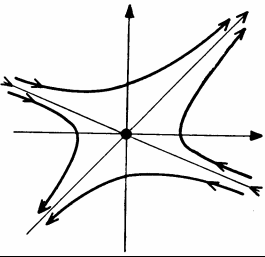
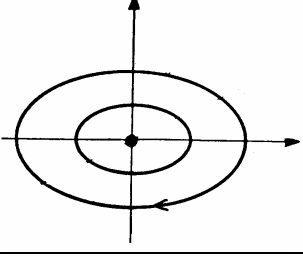
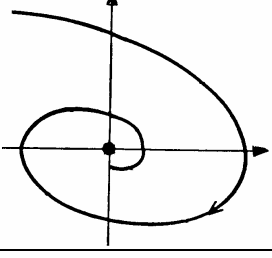
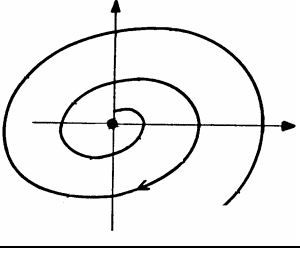
$$s_i \eta_i = A \eta_i; i = 1, 2$$

$s_1$  e  $s_2$  são autovalores de  $A$ . Esta solução corresponde ao primeiro termo da solução (6.5) e pode ser verificada por substituição.

### Observações:

- 1 Os autovalores de  $A$  são as raízes do seu polinômio característico  $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta$ .
- 2 Com base na solução (6.8) é possível esboçar trajetórias no plano  $x_1 \times x_2$ , às vezes também chamado plano de fase. Existem seis comportamentos qualitativos distintos e mais dois casos degenerados. Os casos degenerados são:
  - aqueles nos quais  $\det(A) = 0$ , isto é, há autovalores em zero;
  - aqueles nos quais há dois autovalores iguais sem autovetores linearmente independentes.
- 3  $x = 0$  é o único ponto de equilíbrio para  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  se e só se  $\det(A) \neq 0$ . No caso degenerado  $\det(A) = 0$  o conjunto com infinitos pontos de equilíbrio é descrito por  $x_1 a_{11} + x_2 a_{22} = 0$ .

Tabela 6.1 – Comportamento qualitativo de  $dx/dt = Ax$  para sistemas de segunda ordem

Nome	Autovalores (no plano complexo), condições	Comportamento qualitativo no plano $x_1 \times x_2$
Nó estável	Reais distintos no semiplano esquerdo do plano complexo $\alpha > 0$ $\beta < \alpha^2$	
Nó instável	Reais distintos no semiplano direito do plano complexo $\alpha < 0$ $\beta < \alpha^2$	
Ponto de sela	Reais, um no semiplano direito, o outro no semiplano esquerdo do plano complexo $\beta < 0$	
Centro	Complexos conjugados, no eixo imaginário $\alpha = 0$ $\beta > 0$	
Foco estável	Complexos conjugados, no semiplano esquerdo $\alpha > 0$ $\beta > \alpha^2$	
Foco instável	Complexos conjugados, no semiplano direito $\alpha < 0$ $\beta > \alpha^2$	

Os seis casos de comportamento qualitativo contemplados aqui estão resumidos na Tabela 6.1. O comportamento assintótico é obtido com a variável tempo tendendo a infinito (ou menos infinito). Nessa situação, apenas um dos modos (uma das exponenciais) da solução (6.8) é relevante e a direção da trajetória é definida pelo autovetor correspondente. Portanto, cada uma das assíntotas (retas inclinadas) nas figuras da tabela 6.1 tem sua direção definida por um dos autovetores  $\eta_1$  ou  $\eta_2$ .

O caso degenerado onde há dois autovalores iguais sem autovetores linearmente independentes, mas  $\det(A) \neq 0$ , pode ser entendido como caso limite de uma seqüência de circuitos com autovetores unitários cujo produto escalar está cada vez mais próximo de 1. No limite, ter-se-á um nó (estável ou instável) no qual a direção das assíntotas irá coincidir.

Na Figura 6.9 os casos da Tabela 6.1 são relacionados aos coeficientes do polinômio característico de  $A$ .

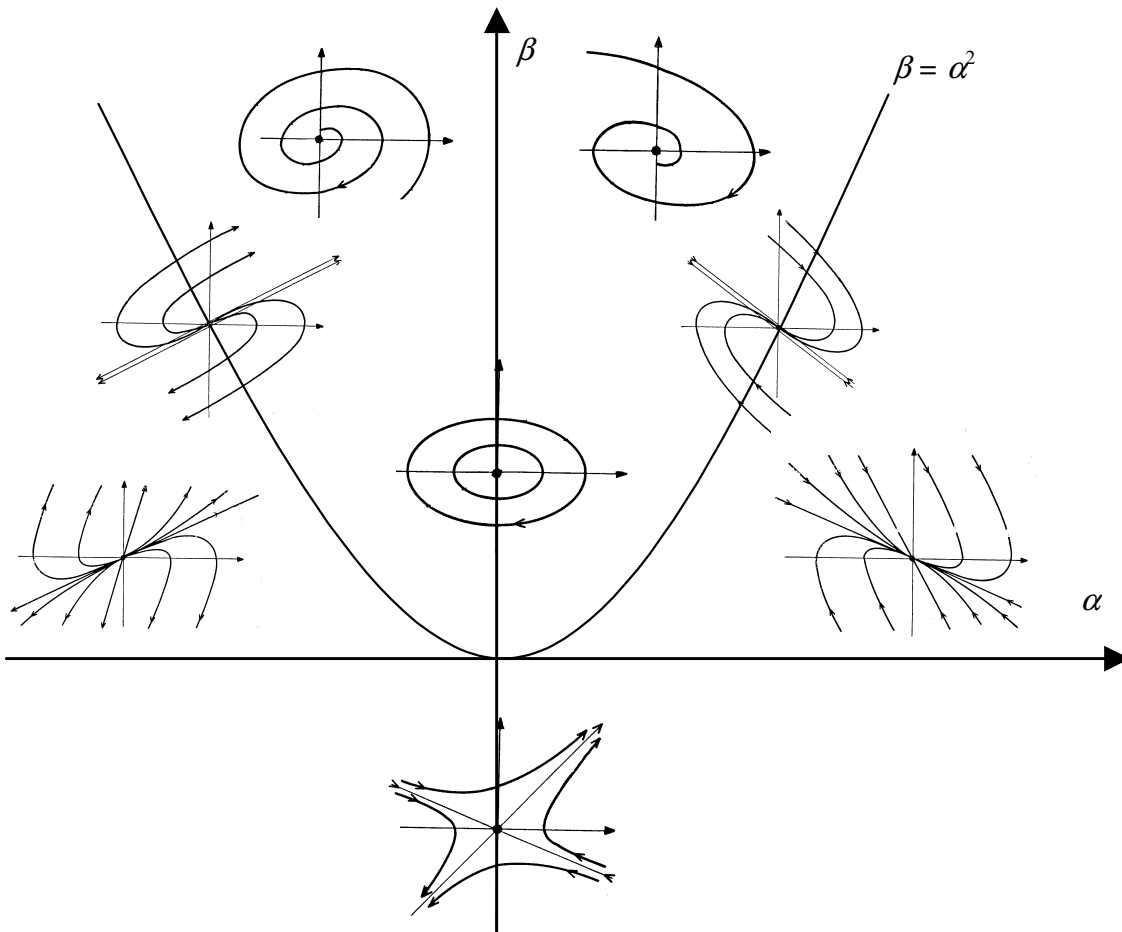


FIGURA 6.9 – Comportamento de sistemas lineares de segunda ordem como função dos coeficientes do polinômio característico.

No caso de circuitos lineares com  $\det(A) \neq 0$  sujeitos a fontes constantes, o ponto de equilíbrio não mais será a origem. O novo ponto de equilíbrio  $x_{eq}$  será a solução da equação

$$0 = Ax_{eq} + Bu_{fontes}$$

O comportamento qualitativo em torno do novo ponto de equilíbrio continuará sendo determinado pelos autovalores e autovetores de  $A$ . Isto pode ser verificado definindo o novo vetor de estado  $\tilde{x} = x - x_{eq}$  e determinando a equação de estado nas novas coordenadas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_{fontes}(t) \xrightarrow{\tilde{x} = x - x_{eq}} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t)$$

## Análise de pequenos sinais para circuitos dinâmicos não-lineares

Assim como na análise de pequenos sinais para circuitos resistivos, também na análise de pequenos sinais para circuitos dinâmicos parte-se da premissa que além das fontes invariantes no tempo existem fontes contribuindo com sinais de corrente ou tensão de pequena amplitude. Por “pequena amplitude” entende-se uma amplitude tal que os valores dos pontos de operação do circuito não sofram uma alteração significativa.

Suponha-se o caso bastante geral no qual o equacionamento de um circuito dinâmico não-linear resulta em um sistema de equações do tipo:

$$A i(t) = 0 \quad \text{da Lei de Kirchhoff das correntes}$$

$$A^T e(t) - v(t) = 0 \quad \text{da Lei de Kirchhoff das tensões}$$

$$f(\dot{v}, v, \dot{i}, i) = u_f(t) \quad \text{das definições dos elemento de circuito}$$

onde  $u_f(t)$  é a contribuição das fontes.

Partindo da hipótese de que os sinais são de pequena amplitude, busca-se equacionar separadamente o ponto de operação (contribuição das fontes constantes), usando análise DC, e a contribuição do sinal, usando análise de pequenos sinais. A análise é feita em três passos:

- determinam-se os pontos de operação (pontos de equilíbrio do circuito dinâmico);
- estuda-se a estabilidade dos pontos de operação de interesse;
- calculam-se as tensões de ramo e correntes de ramo de pequenos sinais usando um circuito de pequenos sinais obtido por linearização.

### Determinação dos pontos de equilíbrio do circuito dinâmico (pontos de operação)

Estes são pontos nos quais  $\dot{v} = \dot{i} = 0$ . Cada um é caracterizado por uma tripla de vetores  $(E_Q, V_Q, I_Q)$ . Estes vetores são obtidos a partir de

$$A I_Q = 0$$

$$A^T E_Q - V_Q = 0$$

$$f(0, V_Q, 0, I_Q) = U_f(t)$$

onde  $U_f(t)$  contempla a contribuição das fontes DC apenas. Este é um sistema de equações algébricas que caracteriza um circuito resistivo obtido a partir do circuito dinâmico original no qual foram feitas as seguintes substituições:

- indutores substituídos por curto circuitos;
- capacitores substituídos por circuitos abertos;
- fontes de corrente (independentes) de pequenos sinais por circuitos abertos;
- fontes de tensão (independentes) de pequenos sinais por curto circuitos.

Para a análise de pequenos sinais, será considerada a seguinte decomposição:

$$e(t) = E_Q + \tilde{e}(t)$$

$$i(t) = I_Q + \tilde{i}(t)$$

$$v(t) = V_Q + \tilde{v}(t)$$

$\tilde{e}(t), \tilde{i}(t), \tilde{v}(t)$  são as contribuições das fontes de pequenos sinais aos potenciais dos nós e às correntes e tensões de ramos. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} A\tilde{i}(t) &= 0 \\ A^T \tilde{e}(t) - \tilde{v}(t) &= 0 \\ f(\dot{\tilde{v}}(t), V_Q + \tilde{v}(t), \dot{\tilde{i}}(t), I_Q + \tilde{i}(t)) &= u_f(t) \end{aligned}$$

A linearização é obtida aproximando-se  $f$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(\dot{v}, v, \dot{i}, i) \cong & f(\dot{v}, v, \dot{i}, i) \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{d\dot{v}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{v}} + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{dv} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{v} + \\ & + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{d\dot{i}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{i}} + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{di} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{i} \end{aligned}$$

Como  $f(0, V_Q, 0, I_Q) = U_f(t)$ , tem-se

$$\begin{aligned} f(\dot{v}, v, \dot{i}, i) \cong & U_f(t) + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{d\dot{v}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{v}} + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{dv} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{v} + \\ & + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{d\dot{i}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{i}} + \frac{df(\dot{v}, v, \dot{i}, i)}{di} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{i} \end{aligned}$$

Com essa aproximação obtém-se o sistema de equações para determinar  $\tilde{i}(t), \tilde{v}(t), \tilde{e}(t)$ :

$$\begin{aligned} A\tilde{i}(t) &= 0 \\ A^T \tilde{e}(t) - \tilde{v}(t) &= 0 \\ \frac{df}{d\dot{v}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{v}} + \frac{df}{dv} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{v} + \frac{df}{d\dot{i}} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \dot{\tilde{i}} + \frac{df}{di} \Big|_{(0, V_Q, 0, I_Q)} \tilde{i} &= \tilde{u}_f(t) \end{aligned}$$

onde  $\tilde{u}_f(t)$  contempla a contribuição das fontes de pequenos sinais apenas.

### Comportamento qualitativo de circuitos não-lineares próximo a pontos de equilíbrio

Pode-se demonstrar que o comportamento qualitativo de circuitos não-lineares de segunda ordem numa vizinhança suficientemente pequena de um ponto de equilíbrio ou operação é determinado pelos autovalores da matriz  $A$  do circuito linearizado em torno daquele ponto. Esse resultado para circuitos não-lineares de segunda ordem pode ser generalizado para circuitos de ordem arbitrária. Contudo, a análise de estabilidade é inconclusiva sempre que um dos autovalores da matriz  $A$  possui parte real nula. Por isso, não deve ser usada neste caso. O exemplo a seguir ilustra uma aplicação para um circuito de segunda ordem.

*Exemplo:* Para o circuito não-linear da Figura 6.10, determine os pontos de equilíbrio e o comportamento qualitativo em torno de cada um deles.

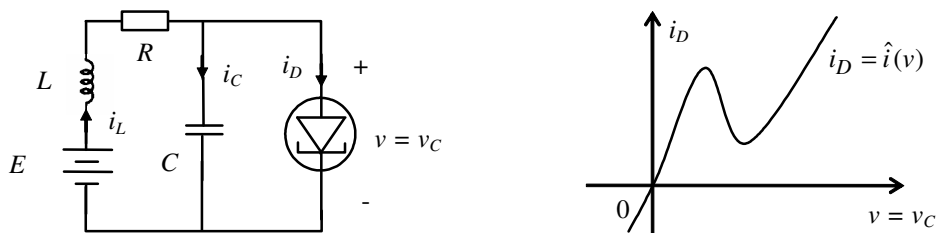


FIGURA 6.10 – Circuito dinâmico com diodo túnel.

A tensão no capacitor,  $v_C(t)$ , e a corrente pelo indutor,  $i_L(t)$ , serão escolhidas como as variáveis de estado. As duas equações que definem  $v_C(t)$  e  $i_L(t)$  são:

$$\dot{v}_C = \frac{1}{C} \{-\hat{i}(v_C) + i_L\} = f_1(v_C, i_L)$$

$$\dot{i}_L = \frac{1}{L} (E - Ri_L - v_C) = f_2(v_C, i_L)$$

Os pontos de equilíbrio são determinados por:

$$0 = f_1(v_C, i_L) \quad (6.9)$$

$$0 = f_2(v_C, i_L) \quad (6.10)$$

Isso equivale a considerar o circuito resistivo resultante do circuito original com indutores substituídos por curto circuitos e capacitores por circuitos abertos. (Pois indutores em regime comportam-se como curto-circuitos, e capacitores em regime comportam-se como circuitos abertos.) O circuito com estas modificações é mostrado na Figura 6.11.

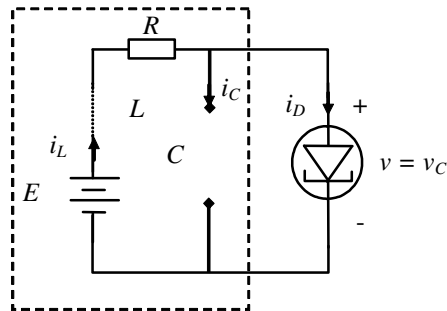


FIGURA 6.11 – Circuito resistivo associado ao circuito dinâmico da Figura 6.10.

Os pontos de equilíbrio são definidos pelos pontos de interseção das características do resistor não linear (equação 6.9) e do subcircuito linear no retângulo tracejado da Figura 6.11 (equação 6.10). A determinação dos pontos de equilíbrio pode também ser feita graficamente, o que é ilustrado na Figura 6.12.

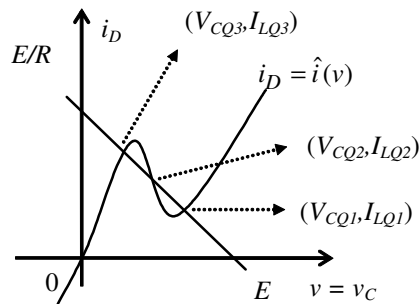


FIGURA 6.12 – Determinação dos pontos de equilíbrio do circuito da Figura 6.10.

Cada um dos três pontos de equilíbrio (os três pontos de interseção mostrados na Figura 6.12) pode ser analisado usando-se o circuito linearizado, cujas equações para o  $j$ -ésimo ponto de equilíbrio serão:

$$\dot{\tilde{v}}_C = \left. \frac{df_1(v_C, i_L)}{dv_C} \right|_{(v_{CQj}, I_{LQj})} \tilde{v}_C + \left. \frac{df_1(v_C, i_L)}{di_L} \right|_{(v_{CQj}, I_{LQj})} \tilde{i}_L$$

$$\dot{\tilde{i}}_L = \left. \frac{df_2(v_C, i_L)}{dv_C} \right|_{(v_{CQj}, I_{LQj})} \tilde{v}_C + \left. \frac{df_2(v_C, i_L)}{di_L} \right|_{(v_{CQj}, I_{LQj})} \tilde{i}_L$$

ou

$$\dot{\tilde{v}}_C = \frac{-\hat{i}'(v_C)|_{(v_{CQj}, I_{CQj})}}{C} \tilde{v}_C + \frac{1}{C} \tilde{i}_L$$

$$\dot{\tilde{i}}_L = -\frac{1}{L} \tilde{v}_C - \frac{R}{L} \tilde{i}_L$$

Considerando-se os valores numéricos  $C = 2$  [pF],  $L = 2$  [nH],  $R = 1,2$  [kΩ], tem-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{v}}_C \\ \dot{\tilde{i}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 10^{11} \hat{i}'(v_C)|_{(V_{CQ1}, I_{CQ1})} & 5 \cdot 10^{11} \\ -5 \cdot 10^8 & -6 \cdot 10^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_C \\ \tilde{i}_L \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Se a característica do diodo túnel (Figura 6.10) for tal que as derivadas de  $\hat{i}(v_C)$  nos pontos de operação sejam

$$\hat{i}'(v_C)|_{(V_{CQ1}, I_{CQ1})} = 8 \text{ [mS]}, \quad \hat{i}'(v_C)|_{(V_{CQ2}, I_{CQ2})} = -4 \text{ [mS]}, \quad \hat{i}'(v_C)|_{(V_{CQ3}, I_{CQ3})} = 3 \text{ [mS]}$$

então o comportamento em torno dos pontos de operação 1 e 3 será de nó estável e de ponto de sela no ponto de operação 2. Para essa constatação, basta a determinação do polinômio característico ou dos autovalores da matriz do circuito linearizado (equação 6.11) e consulta à Tabela 6.1.

## Oscilação não-linear

Considere um capacitor e indutor ligados em série, acoplados a um circuito não-linear resistivo  $N$  na forma da Figura 6.13.

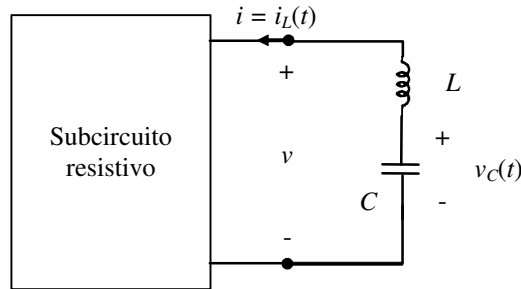


FIGURA 6.13 – Circuito de segunda ordem.

O conjunto é descrito pelas seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \dot{v}_C(t) &= -\frac{i_L}{C} = f_1(v_C, i_L) \\ \dot{i}_L(t) &= \frac{v_C(t) - \hat{v}(i_L)}{L} = f_2(v_C, i_L) \end{aligned}$$

onde  $\hat{v}(i)$  é a característica do subcircuito resistivo. No caso de se ter  $\hat{v}(0) = 0$ , o ponto de equilíbrio do circuito será dado por  $v_C = V_{CQ} = 0$  e  $i_L = I_{LQ} = 0$ .

Com a escolha das variáveis de estado  $x_1 = v_C$  e  $x_2 = i_L$ , pode-se analisar a natureza do ponto de equilíbrio determinado acima usando o circuito linearizado em torno de  $Q$ . A equação linearizada é:

$$\Delta \dot{x}(t) = \left[ \begin{array}{cc} \frac{df(v_C, i_L)}{dv_C} & \frac{df(v_C, i_L)}{di_L} \\ \frac{df(v_C, i_L)}{dv_C} & \frac{df(v_C, i_L)}{di_L} \end{array} \right]_{(V_{CQ}, I_{LQ})} \Delta x$$

onde  $\Delta x = x - [V_{CQ} \quad I_{LQ}]$  e

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{df(v_C, i_L)}{dv_C} & \frac{df(v_C, i_L)}{di_L} \\ \frac{df(v_C, i_L)}{dv_C} & \frac{df(v_C, i_L)}{di_L} \end{array} \right]_{(V_{CQ}, I_{LQ})} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial i_L} \Big|_{I_{LQ}} \right) \end{array} \right] = A$$

Os autovalores de  $A$  são as raízes de seu polinômio característico

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + \frac{\hat{v}'}{L} \lambda + \frac{1}{LC}.$$

onde  $\hat{v}' = \left. \frac{\delta \hat{v}}{\delta i_L} \right|_{I_{LQ}}$ . As raízes valem

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{\hat{v}'}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{\hat{v}'}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} \right)$$

Portanto, haverá raízes complexas conjugadas quando

$$|\hat{v}'| < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Raízes complexas conjugadas são aquelas de interesse para o movimento oscilatório. Portanto, caso  $\hat{v}'(0) < 0$ , pode-se conseguir um foco instável ou um nó instável, dependendo dos valores de  $L$  e  $C$ . No entanto, à medida que as trajetórias no plano de fase divergem, a linearização não é mais válida. Se o subcircuito não-linear passar a ser dissipador para valores maiores de  $i_L$ , as trajetórias irão limitar-se a uma região em torno da origem. Observando a equação diferencial para  $i_L$  verifica-se que isto ocorre se  $\hat{v}(i)$  tiver sinal adequado e for suficientemente grande em módulo. As condições de ocorrência de oscilação são:

$$\begin{cases} \hat{v}(0) = 0 \\ \hat{v}'(0) < 0 \\ \hat{v}(i) \rightarrow \infty \\ \quad \quad \quad i \rightarrow \infty \\ \hat{v}(i) \rightarrow -\infty \\ \quad \quad \quad i \rightarrow -\infty \end{cases}$$

O plano de fase típico para um circuito com estas características é mostrado na Figura 6.14, que apresenta trajetórias partindo de várias condições iniciais.

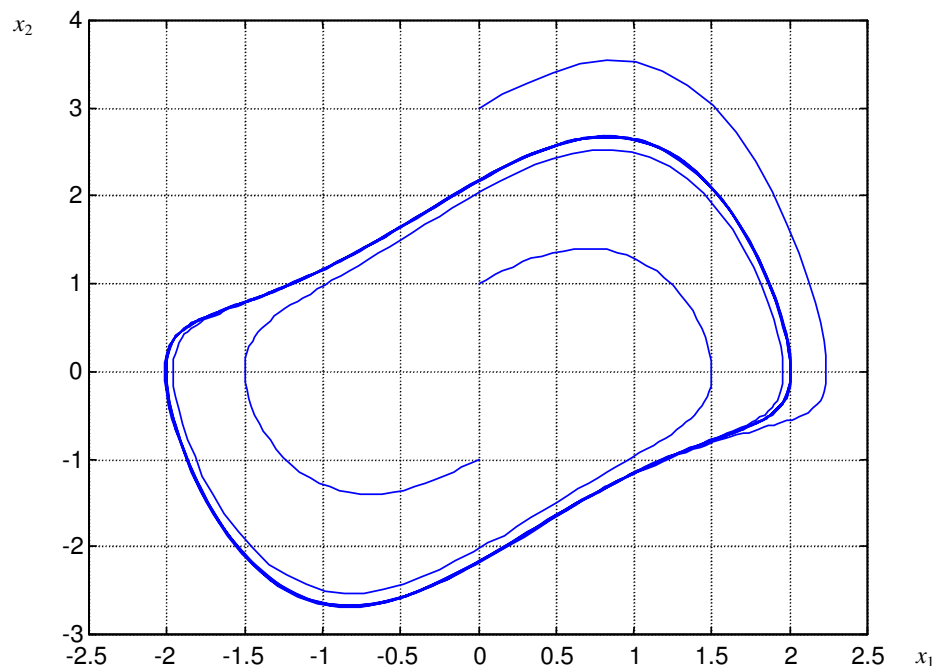


FIGURA 6.14 – Plano de fase do oscilador de Van der Pol.



*Exemplo:* Um oscilador famoso é o oscilador de Van der Pol. Ele é obtido com uma escolha do tipo

$\hat{v}(i) = \varepsilon \left( i^3/3 - i \right)$ . Nesse caso, as equações diferenciais para o circuito da Figura 6.13 serão:

$$\dot{v}_C(t) = -\frac{i_L}{C} \quad (6.12a)$$

$$\dot{i}_L(t) = \frac{1}{L} \left( v_C(t) - \frac{\varepsilon}{3} i_L^3 + \varepsilon i_L \right) \quad (6.12b)$$

Essas duas equações são equivalentes à equação de estado de Van der Pol. Para verificar isso, determina-se a equação de estado equivalente nas novas variáveis de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= LCi_L \\ x_2 &= LC\dot{i}_L \end{aligned}$$

Derivando (6.12b) em relação ao tempo, obtém-se:

$$\ddot{i}_L(t) = \frac{1}{L} \left( \dot{v}_C(t) - \varepsilon i_L^2 \dot{i}_L + \varepsilon \dot{i}_L \right).$$

Substituindo-se agora (6.12a) resulta:

$$LC\ddot{i}_L(t) = -i_L(t) - C\varepsilon i_L^2 \dot{i}_L + C\varepsilon \dot{i}_L$$

Denotando-se  $C\varepsilon = \mu$  e usando a definição das variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$ , obtém-se a equação de estado conhecida como equação de Van der Pol:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{aligned}$$

O comportamento no plano de fase para  $\mu = 1$  é o mostrado na Figura 6.14.

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

- Equacione o circuito da Figura 6.15 utilizando o método geral de análise.
- Equacione o circuito da Figura 6.15 utilizando análise nodal modificada.
- Encontre o ponto de operação do circuito.
- Linearize as equações do item (b) em torno do ponto de equilíbrio encontrado no item (c).

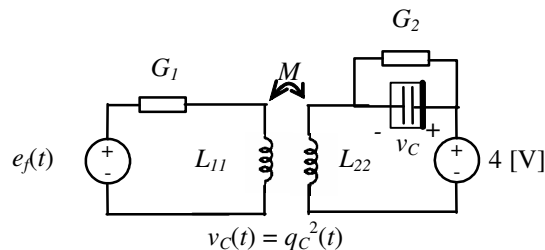


FIGURA 6.15

### Exercício 2:

- Suponha que os amplificadores operacionais do circuito da Figura 6.16 são ideais e operam na região linear. Adote  $v_1$  e  $v_o$  como variáveis de estado e determine a equação de estado do circuito.
- Tomando  $v_i \equiv 0$ , qual o ponto de equilíbrio do circuito?
- Este ponto de equilíbrio é estável?

- d) De que tipo é este ponto de equilíbrio? Esboce o comportamento (qualitativamente) no plano de fase.  
 e) Afirma-se que o circuito irá funcionar como um filtro linear. Discuta a veracidade dessa afirmação.

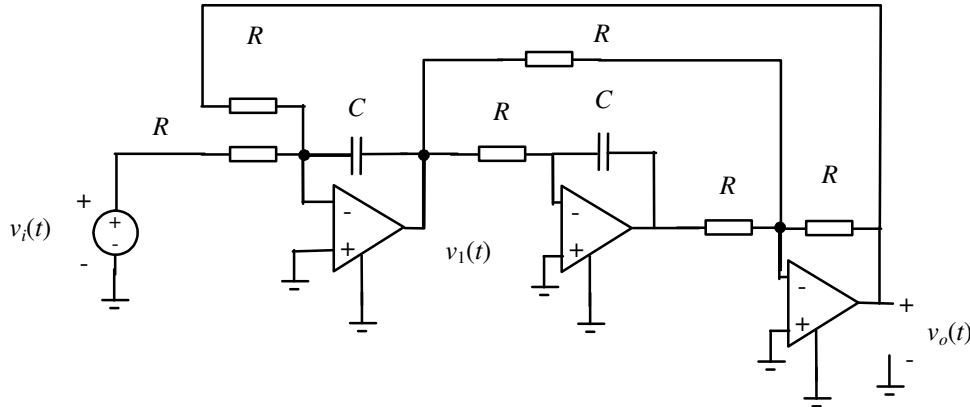


FIGURA 6.16

**Exercício 3:**

- a) Escreva equações de estado para cada um dos circuitos da Figura 6.17 usando análise nodal, o método geral de análise ou alguma forma de equacionamento por inspeção.  
 b) Escreva uma equação diferencial de segunda ordem para cada um dos circuitos e encontre  $\alpha$  e  $\beta$ .  
 c) Para diversas condições iniciais, esboce trajetórias no plano de fase para  $e_f(t) \equiv 0$  (ou  $i_f(t) \equiv 0$ ).

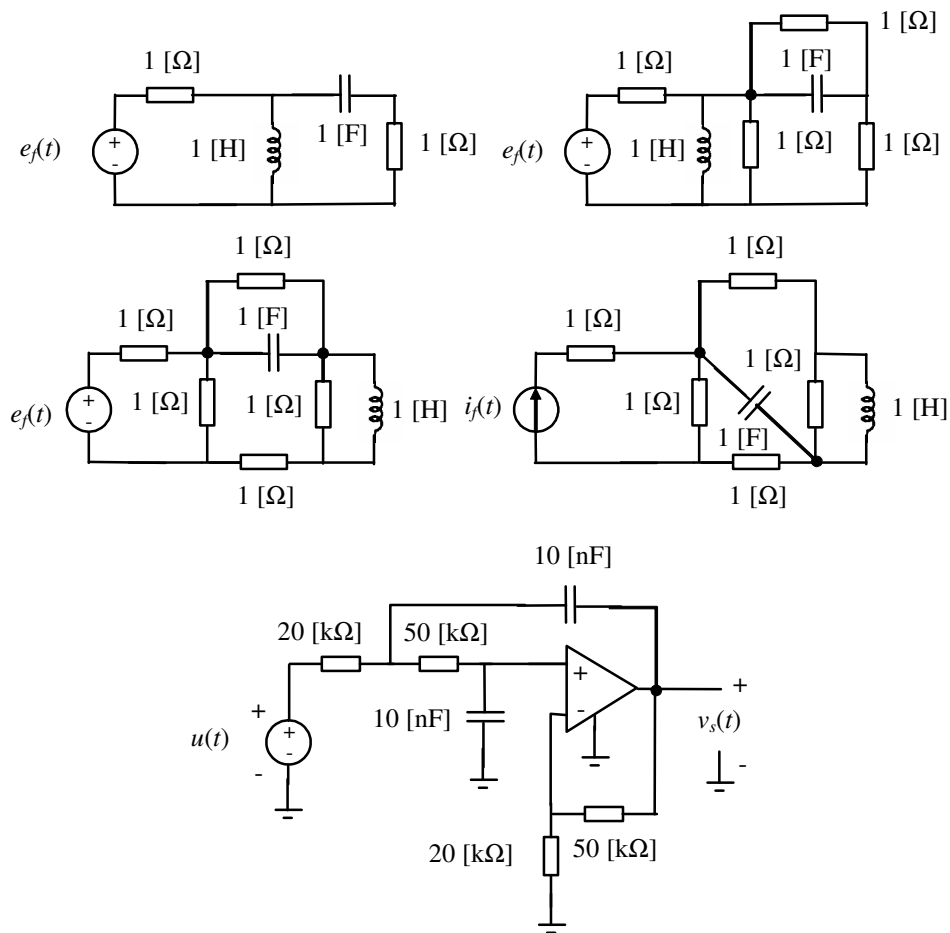


FIGURA 6.17

**Exercício 4:**

Considere um circuito dinâmico linear cuja resposta ao degrau unitário é  $y(t) = (3 - 2e^{-2t} - e^{-t})1(t)$ . Qual a resposta deste circuito ao sinal representado na Figura 6.18?

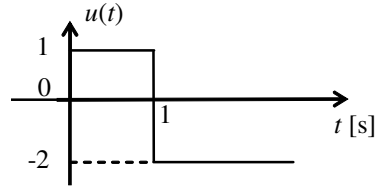


FIGURA 6.18

**Exercício 5:**

Considere um circuito dinâmico linear cuja resposta ao impulso é  $y(t) = (e^{-2t} - e^{-t})1(t)$ . Qual a resposta deste circuito ao sinal representado na Figura 6.18?

**Exercício 6:**

Considere o circuito da Figura 6.13. Pesquise (ou projete) algumas características  $v \times i$  que farão que o circuito funcione como oscilador.

**Exercício 7:**

Para que valores de  $R$  a resposta do circuito da Figura 6.19 a condições iniciais não nulas será uma oscilação amortecida?

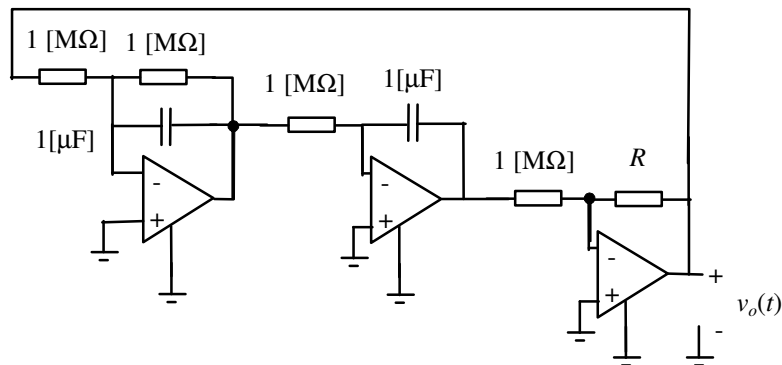


FIGURA 6.19

**Exercício 8:**

Para o circuito da Figura 6.20 faça o seguinte:

- Determine o ponto de operação Q.
- Desenhe o circuito equivalente de pequenos sinais.
- Determine a tensão de pequenos sinais  $\tilde{v}_2(t)$  como função de  $i_1(t)$ . Na sua opinião, para que amplitudes de  $i_1(t)$  o modelo de pequenos sinais fornece resultados razoáveis?

Dados:  $\beta = 0,64 \text{ [mA/V}^2\text{]}$ ;  $V_{th} = -4,0 \text{ [V]}$ .

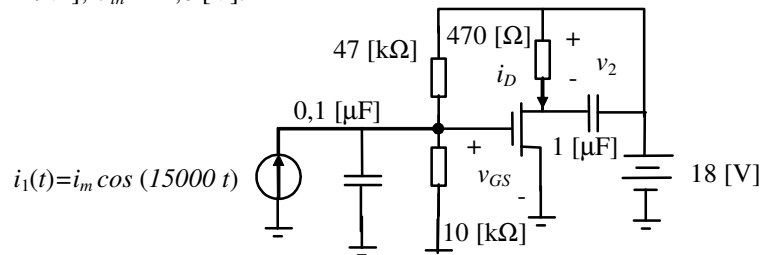


FIGURA 6.20

## 7. Transformada de Laplace e resposta em frequência

A transformada de Laplace é uma ferramenta matemática, cujo mérito principal, do ponto de vista de engenharia, é sua utilidade para transformar sistemas mistos de equações algébricas e diferenciais lineares em sistemas de equações algébricas.

### A transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathfrak{R}$  é definida por:

$$F(s) := \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

onde  $s$  é um argumento complexo. A transformada de Laplace de  $f$  existirá se a integral que a define convergir para pelo menos um valor de  $s$ . Condições *suficientes* para que isso aconteça são:

- $f(t)$  integrável localmente;<sup>1</sup> e
- $f(t)$  de ordem exponencial.<sup>2</sup>

A transformada de Laplace é um mapeamento de funções do domínio do tempo para o domínio complexo, e a transformada inversa de Laplace é a inversão deste mapeamento. A seguinte notação é usual:  $F(s) = L[f(t)]$ , ou para a *transformada inversa* de Laplace  $f(t) = L^{-1}[F(s)]$ .

Transformadas de Laplace de algumas funções importantes encontram-se na Tabela 7.1.

Tabela 7.1 – Transformada de Laplace de algumas funções importantes

Função $f(t)$	Transformada de Laplace $F(s)$
Impulso unitário $\delta(t)$	1
Degrau unitário $1(t)$	$s^{-1}$
Rampa unitária $t$	$s^{-2}$
$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{[s+(a+j\omega)][s+(a-j\omega)]}$
$e^{-at} \text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{[s+(a+j\omega)][s+(a-j\omega)]}$

*Exemplo:* Determine a transformada de Laplace de  $f(t) = e^{at}$

Pela definição tem-se

<sup>1</sup> Uma função será integrável localmente se  $\int_0^a |f(t)| dt < \infty$  para todo  $\infty > a > 0$ .

<sup>2</sup> Uma função será de ordem exponencial se existirem constantes reais e positivas  $K, t_0 > 0$  e um real  $\alpha$  tais que  $|f(t)| \leq Ke^{\alpha t}$  para todo  $t \geq t_0$ .

$$F(s) := \int_{0_-}^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{(s-a)}.$$

Esta expressão de  $F(s)$  em princípio é válida para  $Re(s) > Re(a)$ , mas  $F(s)$  é adotada em todo plano complexo, exceto no ponto  $s = a$ . Tal continuação da função é denominada "continuação analítica" e é rotineiramente adotada.

### Algumas propriedades da transformada de Laplace

- 1 *Unicidade*: a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é única, e a transformada inversa de Laplace de  $F(s)$  também é única.
- 2 *Linearidade*:  $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)]$ .
- 3  $L[df(t)/dt] = sF(s) - f(0_-)$
- 4  $L\left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau\right] = s^{-1}F(s)$
- 5  $L\left[\int_{0_-}^t f(t-\tau)h(\tau) d\tau = (f * h)(t)\right] = F(s)H(s)$

### A transformada de Laplace e o método geral de análise de circuitos

O resultado do método geral de análise para um circuito linear invariante no tempo é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & M_0 D + M_1 & N_0 D + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_f(t) \end{bmatrix}$$

ou do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ M_0 A^T D + M_1 A^T & N_0 D + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_f(t) \end{bmatrix}.$$

Estes são conjuntos de equações diferenciais de primeira ordem e equações algébricas. (As condições iniciais são as correntes pelos indutores e tensões nos capacitores no tempo inicial.) Aplicando-se a transformada de Laplace a ambos os lados das equações matriciais acima, obtêm-se os seguintes conjuntos de equações algébricas respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & M_0 s + M_1 & N_0 s + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ V(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_f(s) + U_i \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ M_0 A^T s + M_1 A^T & N_0 s + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(s) \\ I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_f(s) + U_i \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos vale

$$U_i = M_0 v(0_-) + N_0 i(0_-)$$

$v(0_-), i(0_-)$  são os valores iniciais das tensões e correntes de ramos, definidas pelas condições iniciais nos capacitores e indutores presentes no circuito. Portanto,  $U_i$  contém a contribuição das condições iniciais.

Os sistemas de equações em  $s$  acima terão solução se e só se

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & M_0s + M_1 & N_0s + N_1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 0 & A \\ M_0A^T s + M_1A^T & N_0s + N_1 \end{bmatrix}$$

tiverem determinantes não identicamente nulos.

Assim será possível determinar as transformadas de Laplace das tensões e correntes de ramo e das tensões nodais. Aplicando-se a transformada inversa de Laplace, obtêm-se as respectivas funções no tempo. Para realizar a transformada inversa de Laplace com auxílio de tabelas de transformadas, como a Tabela 7.1, normalmente é necessário expandir as soluções obtidas em frações parciais (ver Apêndice A).

No caso do método da análise nodal ou da análise nodal modificada, as equações originais para o circuito também podem ser transformadas em equações algébricas em  $s$ , de forma semelhante à apresentada para o método geral de análise.

## A transformada de Laplace e equações de estado

Quando a equação de estado de um circuito é conhecida, pode-se aplicar a transformada de Laplace para determinar sua solução de forma muito semelhante àquela utilizada na seção anterior. Dada a equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \text{ onde } x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, u \in \mathfrak{R}^{m \times 1}, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

aplica-se a transformada de Laplace e obtêm-se

$$sX(s) - x(0_-) = AX(s) + BU(s)$$

ou

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0_-).$$

## Função de transferência

Via de regra nem todas as variáveis de um circuito têm interesse direto como "variáveis de saída" do circuito. Considerando o caso mais comum de uma variável de saída  $y(t)$  apenas e uma única variável de entrada  $u(t)$ , tem-se, em adição à equação de estado, a seguinte equação de saída:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

onde  $C \in \mathfrak{R}^{1 \times n}$ ,  $D \in \mathfrak{R}$ . No domínio  $s$  tem-se:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s).$$

Dessa forma, existe uma relação direta entre  $Y(s)$  e  $U(s)$  para condições iniciais nulas dada por:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) = G(s)U(s). \quad (7.1)$$

Esta função  $G(s)$  recebe o nome de *função de rede* ou *função de transferência*. Uma função de transferência descreve de forma completa a característica de transferência entre dois pontos de um circuito dinâmico. No caso de um circuito resistivo, uma característica de transferência é uma característica algébrica envolvendo diretamente as duas variáveis de interesse. No caso de um circuito dinâmico linear invariante no tempo, tal característica é uma característica algébrica que relaciona as transformadas de Laplace das duas variáveis de interesse.

No caso de muitas entradas e muitas saídas,  $Y(s)$  e  $U(s)$  são vetores e  $G(s)$  é uma matriz denominada *matriz de transferência*.

Exemplo: A título de exemplo, considere-se o circuito de segunda ordem da Figura 7.1.

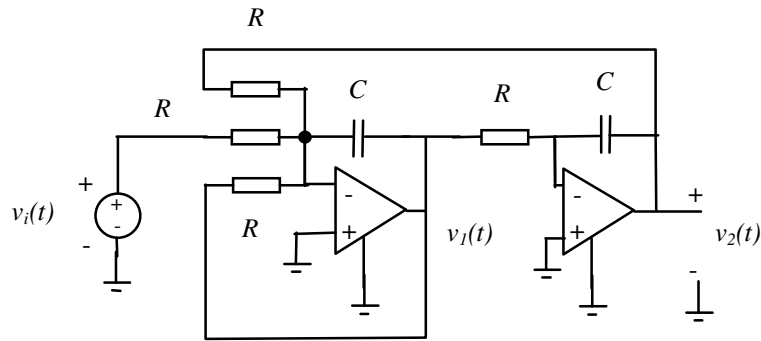


FIGURA 7.1 – Circuito ativo de segunda ordem.

Este circuito pode ser descrito pela equação de estado

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix}}_B v_i(t) \cdot u(t)$$

Assim

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} V_i(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{RC}s - \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} \\ 0 \end{bmatrix} V_i(s)$$

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{RC}s - \left(\frac{1}{RC}\right)^2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC}s \\ \left(\frac{1}{RC}\right)^2 \end{bmatrix} V_i(s)$$

Caso a variável de saída de interesse seja  $y(t) = v_2(t)$  tem-se  $C = [0 \ 1]$ ,  $D = 0$  e

$$G(s) = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{s^2 + \frac{1}{RC}s - \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

Caso a variável de saída de interesse seja  $y(t) = v_1(t)$  tem-se  $C = [1 \ 0]$ ,  $D = 0$  e

$$G(s) = \frac{-\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s - \left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

Pode-se constatar que as raízes do polinômio do denominador de  $G(s)$  em ambos os casos são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2RC}(-1 \pm \sqrt{5})$$

Estas raízes coincidem com os autovalores da matriz  $A$  deste circuito e permitem concluir que o ponto de equilíbrio do circuito para  $v_i(t)$  constante será instável. Uma vez que uma das raízes é real positiva e a outra é

real negativa, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela, com comportamento no plano  $v_2 \times v_1$  de acordo com o que foi visto no Capítulo 6.

Da relação entre equação de estado e função de transferência conclui-se que:

- Uma função de transferência será sempre uma função racional. (Exceções ocorrem quando o circuito linear envolver atrasos puros no tempo, também chamados *atrasos de transporte*. Este caso não será tratado aqui.)
- O conjunto das raízes do polinômio do denominador da função de transferência será sempre um subconjunto do conjunto de autovalores da matriz  $A$  da equação de estado do circuito.
- A função de transferência é útil na determinação da resposta de um circuito com condições iniciais nulas.

As raízes do numerador da função de transferência são denominadas *zeros da função de transferência*. As raízes do denominador da função de transferência são denominadas *polos da função de transferência*.

*Exemplo:* Determine a resposta do circuito da Figura 7.2 ao degrau unitário  $1(t)$ . Considere condição inicial nula e amplificador operacional operando na região linear.

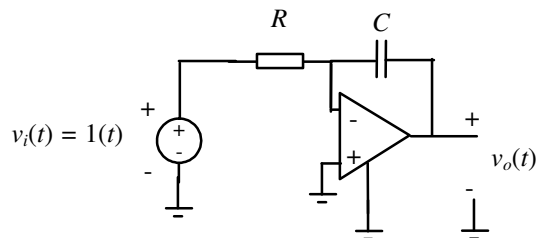


FIGURA 7.2 – Circuito integrador-inversor.

Para este circuito tem-se:

$$V_o(s) = -\frac{1}{sRC} V_i(s).$$

Considerando a transformada de Laplace para  $1(t)$  dada na tabela 7.1, obtém-se:

$$V_o(s) = -\frac{1}{s^2 RC}.$$

Consultando novamente a tabela de transformadas de Laplace conclui-se que:

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} t.$$

## Admitância e impedância

Para resistores lineares invariantes no tempo vale

$$V(s) = RI(s) \quad \text{ou} \quad I(s) = GI(s)$$

onde  $R$  é a resistência e  $G$  a condutância.

Para capacitores lineares invariantes no tempo com condições iniciais nulas vale

$$I(s) = sCV(s).$$

Para indutores lineares invariantes no tempo com condições iniciais nulas vale

$$V(s) = sLI(s).$$



Como no domínio  $s$  para todos estes casos a relação entre as transformadas de Laplace de tensão e corrente é algébrica, define-se  $V(s)/I(s)$  como a *impedância* e  $I(s)/V(s)$  como a *admitância* de um elemento de circuito linear invariante no tempo. Esses conceitos são muito úteis, entre outras aplicações, no equacionamento por inspeção de circuitos lineares.

*Exemplo:* Determine a resposta do circuito da Figura 7.3 ao impulso e ao degrau unitário. Considere condição inicial nula,  $R = 100$  [kΩ] e  $C = 0,1$  [μF].

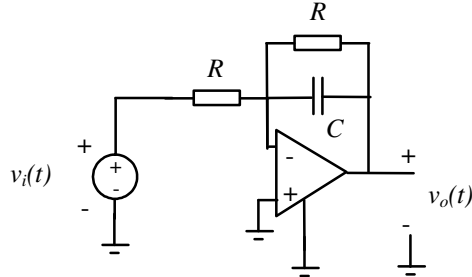


FIGURA 7.3 – Circuito de primeira ordem.

Considerando que o amplificador operacional está sendo usado na configuração inversora pode-se escrever:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{\text{impedância de } R // C}{\text{impedância de } R} = - \frac{\frac{1}{\frac{1}{R} + sC}}{R} = - \frac{1}{1 + sCR} = - \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Usando-se os valores numéricos dados obtém-se:

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = - \frac{100}{s + 100}$$

A resposta ao impulso será:

$$v_o(t) = L^{-1}\left[-\frac{100}{s + 100}\right] = -100e^{-100t}.$$

A resposta ao degrau unitário será:

$$v_o(t) = L^{-1}\left[-\frac{100}{s(s+100)}\right] = L^{-1}\left[\frac{-1}{s} + \frac{1}{(s+100)}\right] = -1 + e^{-100t}.$$

## Solução da equação de estado no domínio do tempo e no domínio transformado

Como foi visto no Capítulo 6, a equação de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}, u \in \mathfrak{R}^{m \times 1}, A \in \mathfrak{R}^{n \times n}, B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$$

com condição inicial  $x(t_0)$  possui a solução

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tilde{t})}Bu(\tilde{t})d\tilde{t}.$$

Por outro lado, já foi mostrado que a transformada de Laplace de  $x(t)$  é dada por

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(t_0) + (sI - A)^{-1}BU(s).$$

Por comparação das duas soluções (em  $t$  e  $s$ ), verifica-se que

$$e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}].$$

## Soluções em regime estacionário para entradas senoidais

A resposta de um circuito linear invariante no tempo com função de transferência

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

a uma entrada  $u(t) = m \cdot \text{sen}(\omega t)$  é calculada como sendo

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \frac{\omega m}{s^2 + \omega^2}.$$

Expandindo em frações parciais e considerando-se apenas circuitos estáveis (raízes de  $d(s)$  no semiplano esquerdo), obtém-se:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \frac{\omega m}{s^2 + \omega^2} = \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \Sigma(s),$$

onde  $\Sigma(s)$  é uma soma de frações parciais cujas transformadas inversas de Laplace são funções que tendem a zero à medida que o tempo cresce. (Isso ocorre porque todas as partes reais de raízes de  $d(s)$  são negativas por hipótese.)

Em regime estacionário, isto é, para  $t$  suficientemente grande, pode-se pois escrever:

$$y(t) \cong a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t}.$$

Os valores  $a_1$  e  $a_2$  podem ser calculados pelo método dos resíduos para expansão em frações parciais:

$$a_1 = G(s) \frac{\omega m}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega) \Big|_{s=-j\omega} = -\frac{mG(-j\omega)}{2j}$$

$$a_2 = G(s) \frac{\omega m}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega) \Big|_{s=j\omega} = \frac{mG(j\omega)}{2j}$$

Lembrando que  $G(j\omega)$  é uma função complexa e considerando que

$$|G(-j\omega)| = |G(j\omega)| \quad \text{e} \quad \angle G(-j\omega) = -\angle G(j\omega)$$

tem-se

$$y(t) \cong m |G(j\omega)| \frac{e^{-j[\omega t + \angle G(j\omega)]} + e^{j[\omega t + \angle G(j\omega)]}}{2j} = m |G(j\omega)| \text{sen}[\omega t + \angle G(j\omega)]. \quad (7.2)$$

Conclui-se que a resposta de qualquer circuito linear estável a um sinal de entrada senoidal será também um sinal senoidal, possivelmente de amplitude diferente e defasado do sinal de entrada. A variação de amplitude e a mudança na fase dependem tão somente de  $G(j\omega)$ .

## Diagrama de Bode

Na seção anterior, verificou-se que  $G(j\omega)$  determina como sinais senoidais são afetados por um circuito em regime estacionário. Diagramas de módulo e fase de  $G(j\omega)$  em função da frequência acabam-se revelando de grande utilidade prática por este e por outros motivos. Quando traçamos o diagrama de  $20 \log |G(j\omega)| \times \omega$  e  $\angle G(j\omega) \times \omega$  usando em ambos os casos a escala logarítmica para  $\omega$ , damos a este diagrama o nome de *diagrama de Bode*, em homenagem a Hendrik W. Bode, que nas décadas de 1940-1950 foi o primeiro a usar as técnicas de esboço apresentadas nesta seção.

Em alguns lugares da literatura, o diagrama de Bode é entendido exclusivamente como o diagrama de *resposta em frequência* do circuito ou do sistema, isto é do ganho  $|G(j\omega)|$  e da fase  $\angle G(j\omega)$  acrescidas a um sinal de entrada senoidal, conforme indicado na equação (7.2). Neste texto, o diagrama de Bode é entendido

simplesmente como o gráfico de  $20 \log|G(j\omega)| \times \omega$  e  $\angle G(j\omega) \times \omega$  usando em ambos os casos a escala logarítmica para  $\omega$ . A diferença entre os dois entendimentos é sutil, porém relevante. No primeiro caso não faz sentido traçar o diagrama de resposta em frequência para circuitos instáveis, pois não existe sinal senoidal de regime na saída de um circuito instável submetido a uma entrada senoidal. No segundo entendimento, não se comete qualquer absurdo traçando o diagrama de Bode para sistemas instáveis. De fato, tal diagrama poderá ser uma ferramenta útil em várias situações.

No diagrama de Bode, usam-se graus, [°], para a fase de  $G(j\omega)$ . O valor  $20 \log|G(j\omega)|$  é medido na pseudounidade decibel, [dB], que pode ser entendida como uma unidade de ganho relativo.

### Regras para o esboço do diagrama de Bode

O diagrama de Bode pode ser esboçado usando-se as assíntotas de módulo e fase de  $G(j\omega)$ . Para algumas considerações sobre essas assíntotas, considere-se inicialmente uma função de transferência  $G(s)$  dada por:

$$G(s) = \frac{\prod_i (s + a_i)}{\prod_k (s + b_k)}$$

Todos os zeros e polos desta função de transferência são reais. Então tem-se:

$$20 \log|G(j\omega)| = \left[ \sum_i 20 \log \left( \left| a_i \left| \frac{j\omega}{a_i} + 1 \right| \right) \right] - \left[ \sum_k 20 \log \left( \left| b_k \left| \frac{j\omega}{b_k} + 1 \right| \right) \right]$$

$$\angle G(j\omega) = \left[ \sum_i \angle(j\omega + a_i) \right] - \left[ \sum_k \angle(j\omega + b_k) \right]$$

Contribuições dos termos no numerador e denominador de  $G(s)$  têm sinais trocados, mas com exceção disto são de mesma natureza. Considere-se, pois, inicialmente apenas a contribuição de módulo (ou magnitude) de um dos termos do tipo  $(s + a)$  do numerador.

$$20 \log \left( \left| a \left| \frac{j\omega}{a} + 1 \right| \right) \right) = 20 \log|a| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{a} + 1 \right|$$

Para valores baixos de frequência a assíntota é

$$20 \log|a| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{a} + 1 \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 20 \log|a|$$

Para valores elevados de frequência a assíntota é

$$20 \log|a| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{a} + 1 \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 20 \log|a| + 20 \log \frac{\omega}{|a|}$$

Para o ponto  $\omega = a$  tem-se o seguinte valor (exato) para o módulo:

$$20 \log \left( \left| a \left| \frac{j\omega}{a} + 1 \right| \right) \right) = 20 \log|a| + 20 \log \sqrt{2} \cong 20 \log|a| + 3$$

De posse dessas considerações, pode-se traçar um gráfico de assíntotas. Na Figura 7.4 encontra-se o gráfico de assíntotas para a contribuição de módulo de  $(s + 2)$  sobre o qual encontra-se superposta a característica real (em linha pontilhada).

A contribuição dos termos do denominador é determinada de modo idêntico, exceto pelo sinal.

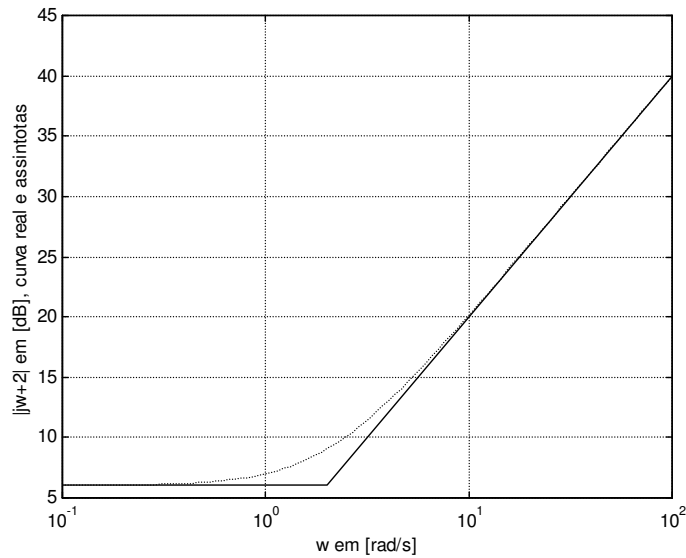


FIGURA 7.4 – Assíntotas e valor real da contribuição de módulo de  $(s + a)$ .

Para a contribuição de fase, o raciocínio é semelhante. Considere-se a contribuição de fase de um dos termos do tipo  $(s + a)$  do numerador:

Caso  $a > 0$ :

$$\angle(j\omega + a) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ$$

$$\angle(ja + a) = 45^\circ$$

$$\angle(j\omega + a) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 90^\circ$$

Caso  $a < 0$ :

$$\angle(j\omega + a) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 180^\circ$$

$$\angle(j|a| + a) = 135^\circ$$

$$\angle(j\omega + a) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 90^\circ$$

De posse destas considerações, pode-se traçar um gráfico de assíntotas para esta contribuição de fase. Na Figura 7.5 encontra-se o gráfico de assíntotas para a contribuição de fase de  $(s + 2)$  sobre o qual encontra-se superposta a característica real (em linha pontilhada).

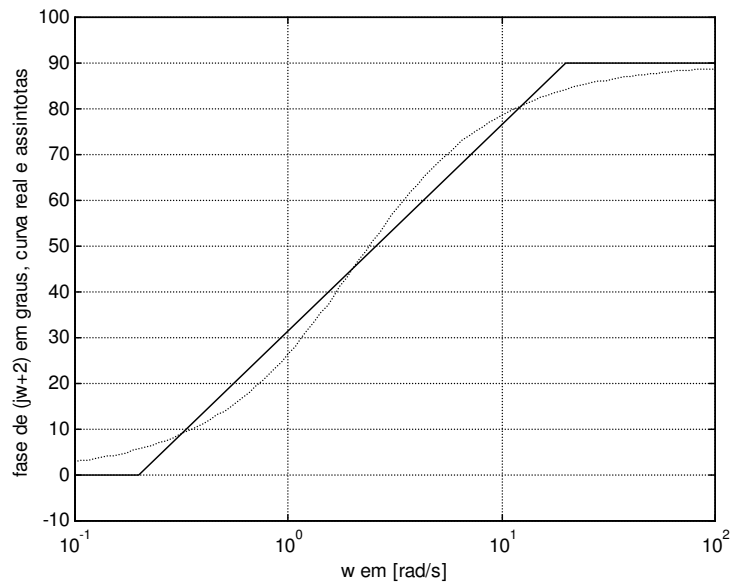


FIGURA 7.5 – Assíntotas e valor real da contribuição de fase de  $(s + a)$ .

A contribuição dos termos do denominador é determinada de modo idêntico, exceto pelo sinal.

Exemplo: Esboce o diagrama de Bode de

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}.$$

As assíntotas de magnitude podem ser esboçadas como explicado anteriormente. A contribuição de cada um dos termos de  $G(s)$  encontra-se esboçada na Figura 7.6.

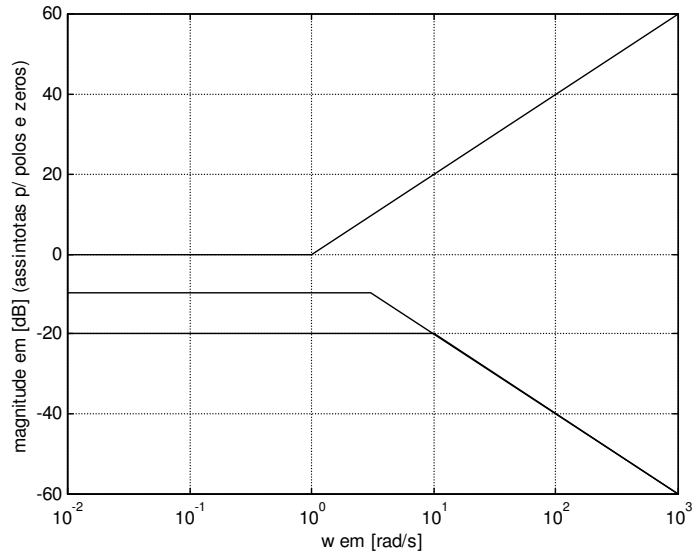


FIGURA 7.6 – Assíntotas de magnitude para os termos de  $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}$ .

Podem-se traçar assíntotas de magnitude na versão alternativa da Figura 7.7, que é obtida consolidando o termo de contribuição DC (para baixas frequências).

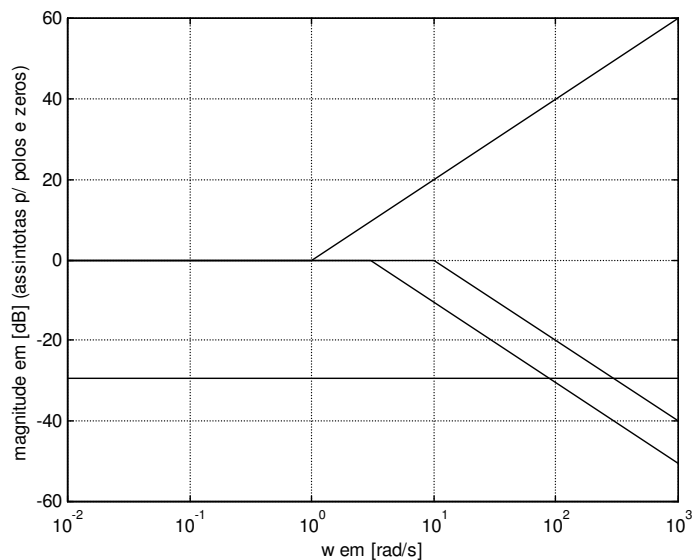


FIGURA 7.7 – Assíntotas de magnitude em versão alterativa para os termos de  $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}$ .

Somando-se as contribuições em magnitude, obtêm-se as assíntotas de magnitude consolidadas mostradas na Figura 7.8. Na mesma figura a característica real é mostrada com linha pontilhada.

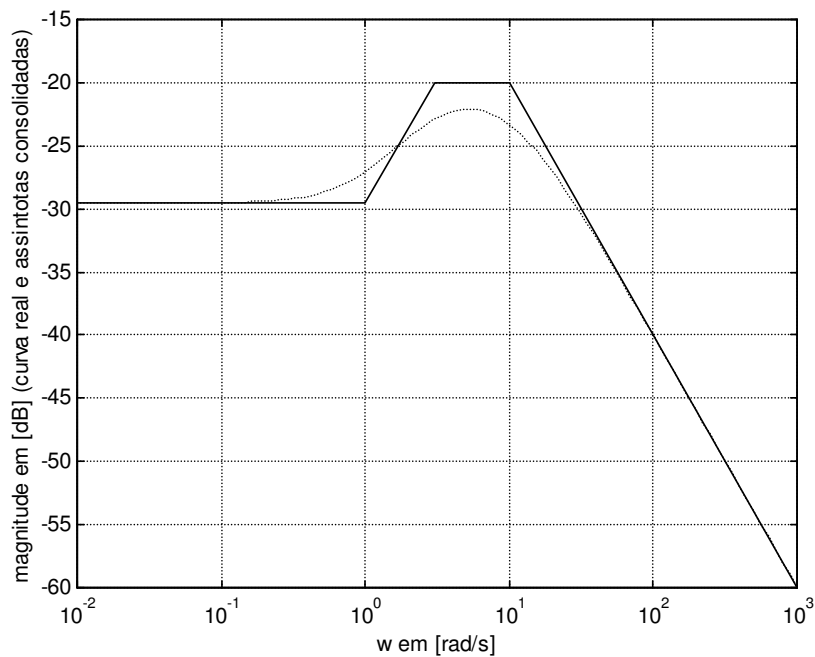


FIGURA 7.8 – Assíntotas consolidadas de magnitude (linha sólida) e característica real (linha pontilhada)

para  $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}$ .

Também as assíntotas de fase podem ser esboçadas como explicado anteriormente. A contribuição de cada um dos termos de  $G(s)$  encontra-se esboçada na Figura 7.9.

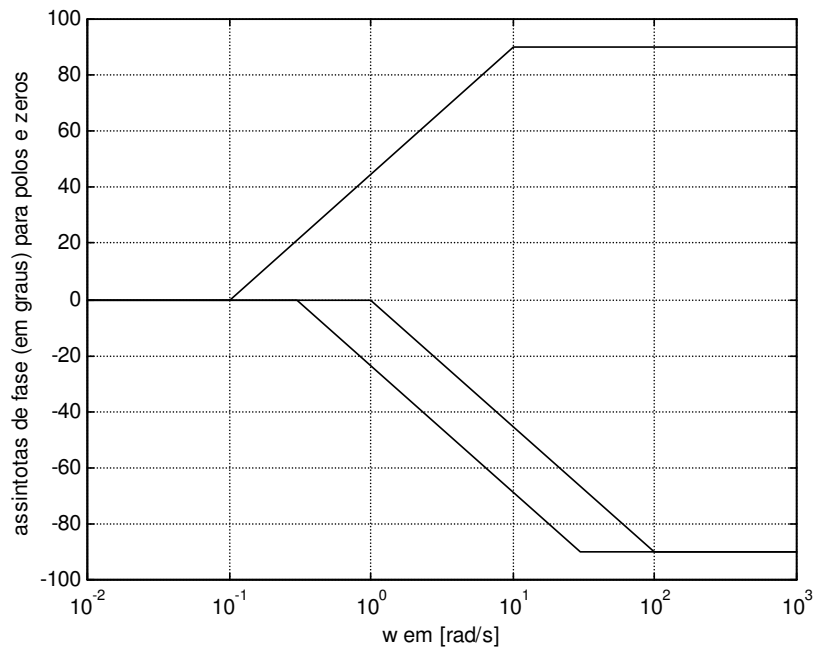


FIGURA 7.9 – Assíntotas de fase para os termos de  $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}$ .

Somando-se as contribuições em fase, obtêm-se as assíntotas de fase consolidadas mostradas na Figura 7.10.

Na mesma figura a característica real é mostrada com linha pontilhada.

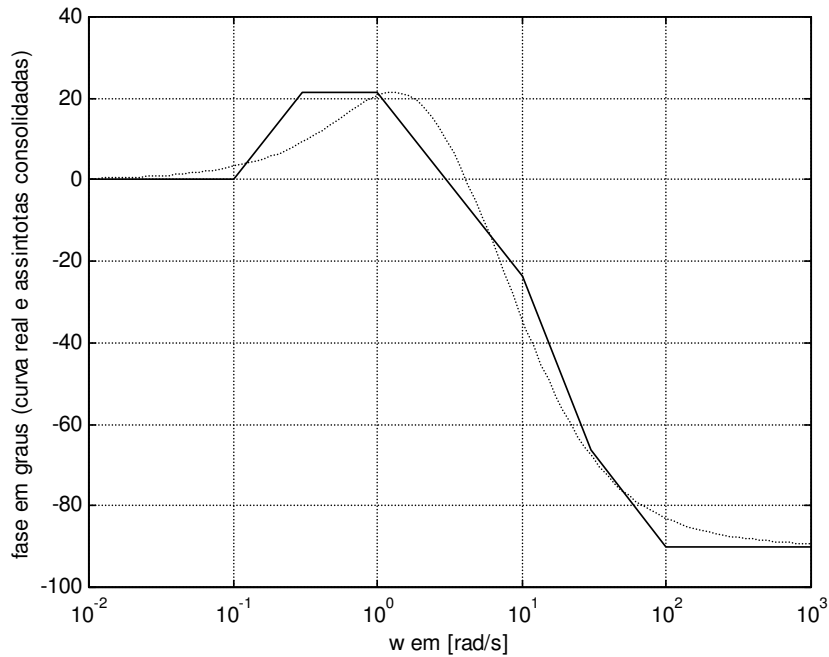


FIGURA 7.10 – Assíntotas consolidadas de fase (linha sólida) e característica real (linha pontilhada) para

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+3)(s+10)}.$$

Para polos e zeros complexos conjugados é mais difícil obter um esboço razoável do diagrama de Bode. Considere-se para efeito de estudo o caso de um circuito com par de polos complexos conjugados:<sup>3</sup>

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$$

As seguintes restrições são aplicáveis:  $0 < \xi < 1$ ,  $\omega_n > 0$ .

Para  $s = j\omega$  tem-se:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n}}$$

Para a contribuição em fase, podem-se fazer as seguintes considerações:

$$\angle G(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0^\circ$$

$$\angle G(j\omega_n) = -90^\circ$$

$$\angle G(j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} -180^\circ$$

<sup>3</sup> Os parâmetros  $\xi$  e  $\omega_n$  relacionam-se com  $\alpha$  e  $\beta$  usados na parametrização de polinômios característicos de circuitos de segunda ordem por meio de  $\xi\omega_n = \alpha$  e  $\omega_n = (\beta)^{1/2}$ .

Ao contrário do que acontece com os polos reais simples, a transição de fase de 0 a  $-180$  graus pode não ser suave. Conforme mostrado no gráfico da Figura 7.11, a transição pode ser bastante abrupta para valores pequenos de  $\xi$ . Assim sendo, as assíntotas indicadas na Figura 7.11 (linha cheia) podem não ser uma boa aproximação da característica real (linhas pontilhadas para  $\xi = 0,1; 0,2; 0,8$ ), dependendo do valor de  $\xi$ .

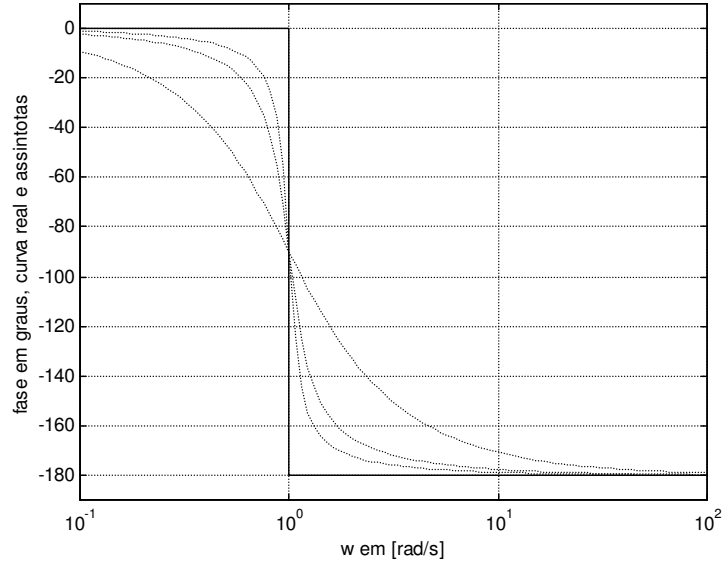


FIGURA 7.11 – Assíntotas de fase (linha sólida) para um par de polos complexos conjugados e características reais (linhas pontilhadas) para  $\xi = 0,1; 0,2; 0,8$ .

Para a contribuição em magnitude vale:

$$20 \log |G(j\omega)| = -20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right|$$

Para valores baixos de frequência a assíntota é

$$-20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

Para valores elevados de frequência a assíntota é

$$-20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

Para o ponto  $\omega = \omega_n$  tem-se o seguinte valor para o módulo:

$$-20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n} \right|_{\omega=\omega_n} = -20 \log(2\xi)$$

As assíntotas de magnitude (traço sólido) juntamente à característica real (para valores de  $\xi = 0,1; 0,2; 0,8$ ) (linhas pontilhadas) encontram-se na Figura 7.12. Como no caso da fase, as assíntotas podem não ser uma boa aproximação da característica real para valores pequenos de  $\xi$ .

O valor máximo de  $|G(j\omega)|$  ocorre em

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071$$



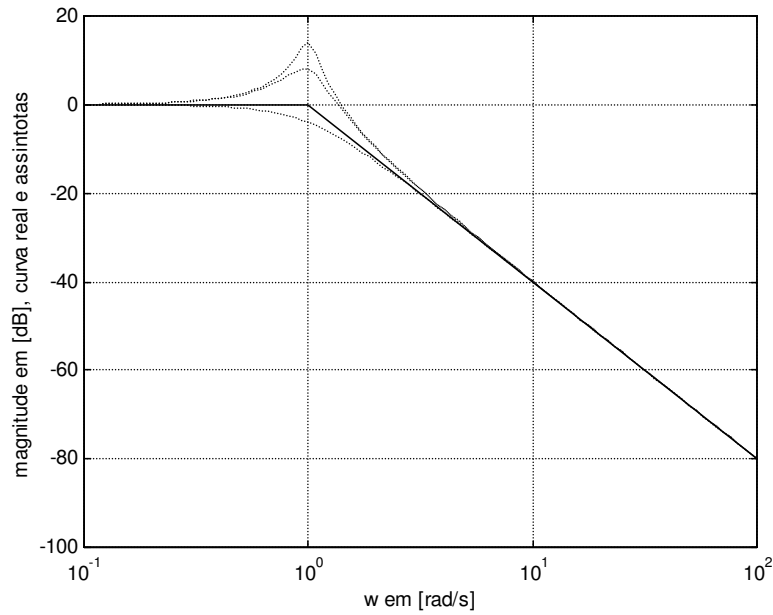


FIGURA 7.12 – Assíntotas de fase (linha sólida) e característica real (linha pontilhada) para um par de polos complexos conjugados.

Neste ponto tem-se

$$-20 \log \left| \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) + j \frac{2\zeta\omega}{\omega_n} \right|_{\omega=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}} = -20 \log(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}).$$

Reparametrizando  $G(s)$  com a parametrização  $(Q_0, \omega_0)$  discutida no Apêndice B, constata-se que um circuito com alto fator de mérito  $Q_0$  possui picos de ressonância acentuados e estreitos.

## Exercícios propostos

### Exercício 1:

Usando a definição, determine a transformada de Laplace das funções abaixo:

a)  $f(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$

b)  $f(t) = 1 - e^{-t} + e^{-2t} \cos 3t$

c)  $f(t) = t^3 + t^2 + 1$

### Exercício 2:

Mostre que  $L[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}L[f(t)]$ . Considere  $\alpha \geq 0$ , e  $f(t) = 0$  para  $t < 0$ .

### Exercício 3:

Dada a resposta a impulso  $h(t) = 2e^{-t} + e^{-3t}$  de um circuito, determine sua função de transferência.

**Exercício 4:**

Para os circuitos da Figura 7.13

- ache as funções de transferência de  $u(t)$  para  $y(t)$ ;
- determine as respostas dos circuitos a impulso e a degrau .

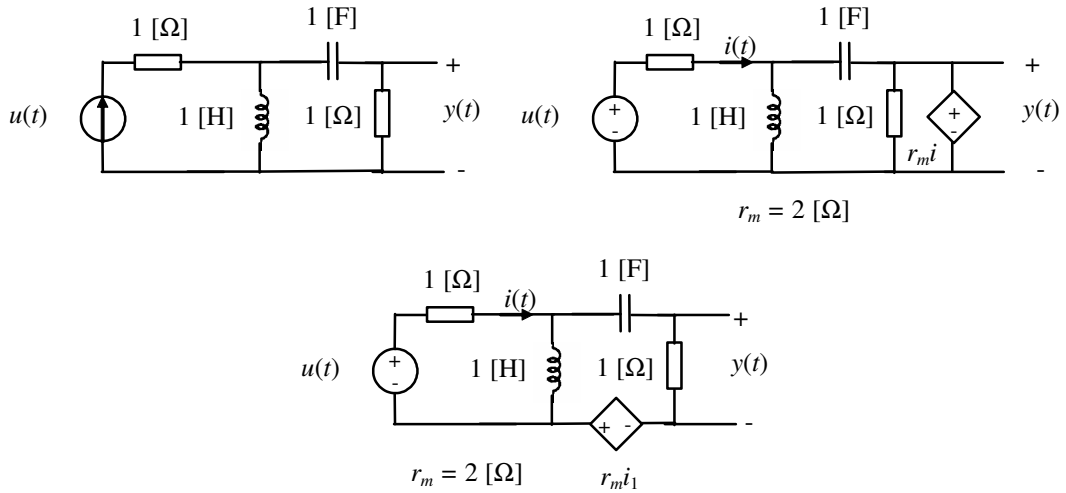


FIGURA 7.13

**Exercício 5:**

Para o circuito de segunda ordem de Sallen e Key da Figura 7.14:

- ache a função de transferência de  $u(t)$  para  $y(t)$ ;
- determine as respostas do circuito a impulso e a degrau .

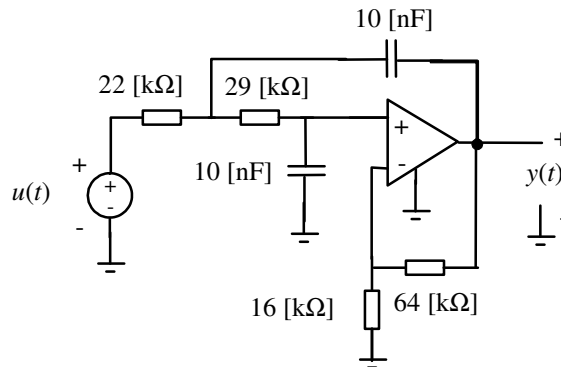


FIGURA 7.14

**Exercício 6:**

Esboce os diagramas de Bode das funções de transferência abaixo:

- $G(s) = \frac{5s + 5}{s^2 + 2s + 5}$
- $G(s) = \frac{(10s + 10)}{(s + 3)(s + 10)}$
- $G(s) = \frac{(s - 1)}{(s - 3)(s + 10)}$

**Exercício 7:**

- Determine uma equação de estado para o circuito da Figura 7.15. Use  $R_1 = R_2$ .
- Usando a transformada de Laplace, resolva a equação de estado para  $v_i(t) = 1(t)$ .
- Encontre a função de transferência de  $v_i(t)$  para  $v_o(t)$ .

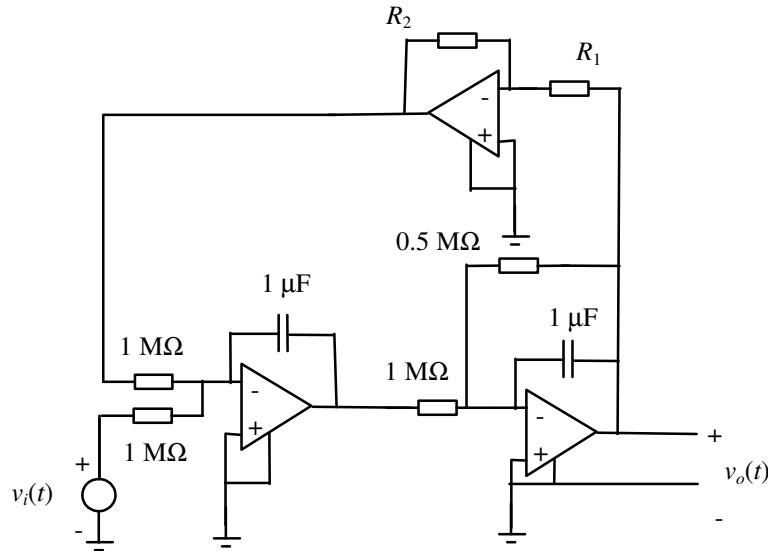


FIGURA 7.15

**Exercício 8:**

Determine as funções de transferência de  $u(t)$  para  $y(t)$  dos circuitos da Figura 7.16.

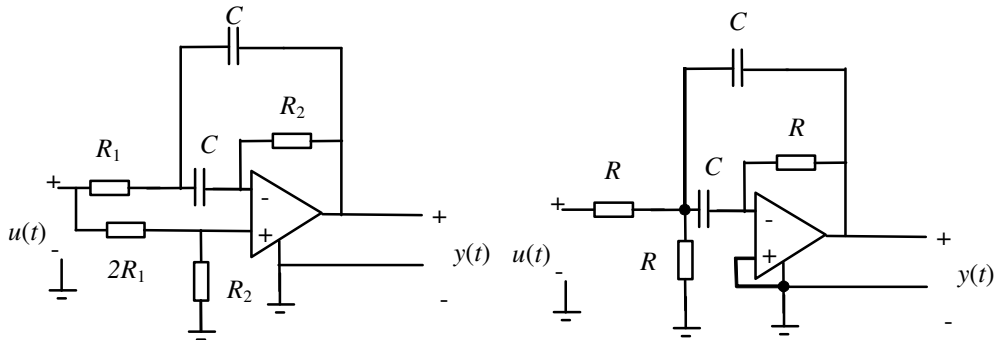


FIGURA 7.16

**Exercício 9:**

Considere o circuito da Figura 7.17, onde a função de transferência  $(s-2)/[(s+2)(s+2)]$  deve ser entendida como ganho de tensão de um subcircuito.

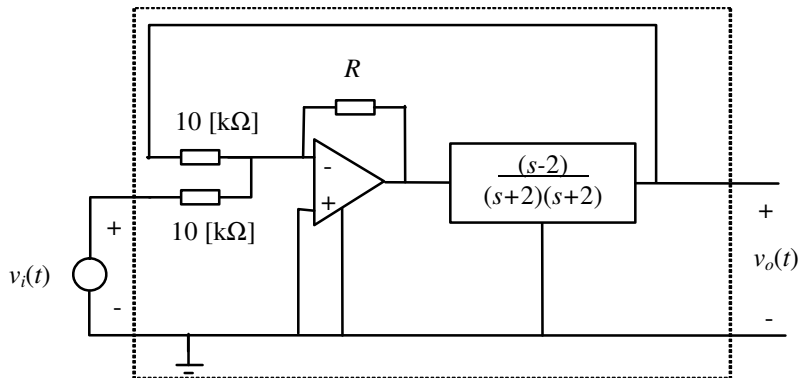


FIGURA 7.17

- Para  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , encontre a função de transferência de  $v_i(t)$  para  $v_o(t)$ .
- Plote o diagrama de Bode da função de transferência encontrada no item a.
- Utilizando a transformada de Laplace, encontre a resposta a degrau do circuito para condições iniciais nulas.
- No circuito da Figura 7.18, o conteúdo do bloco pontilhado é o mesmo do bloco pontilhado no circuito da Figura 7.17. Determine o valor de  $Z_L$  tal que em regime a corrente  $i(t)$  esteja em fase com o sinal  $v_i(t)$  e tenha o mesmo valor numérico que este.

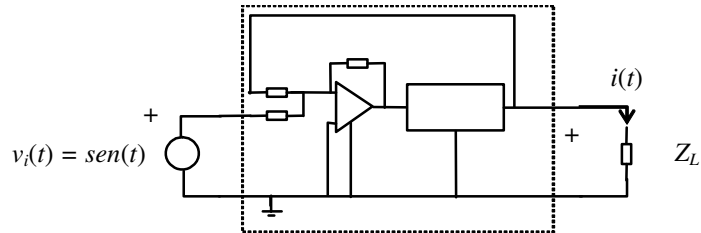


FIGURA 7.18

**Exercício 10:**

Qual a função de transferência do circuito da figura 6.16?

## 8. O critério de Nyquist

O critério de Nyquist é um critério prático para a análise da estabilidade de circuitos (e outros sistemas dinâmicos) lineares realimentados, de ordem qualquer. O critério faz uso da função de transferência do circuito (antes da realimentação) e é uma aplicação de engenharia do princípio do argumento. Por isso, a discussão do critério será precedida de uma revisão do princípio do argumento, um resultado bastante conhecido da análise complexa.

### O princípio do argumento

#### Conceito

Um ponto será denominado um *ponto circundado* por um caminho fechado no plano complexo se e só se o ponto estiver contido na região interior ao caminho.

#### Teorema (Princípio do Argumento)

Seja  $F(s)$  uma função complexa de variável complexa (isto é,  $F: C \rightarrow C$ ) analítica sobre um caminho fechado  $\Gamma$  no plano complexo e dentro da região por ele circundada (isto é, na região interior ao caminho), exceto em um número finito de pontos no interior de  $\Gamma$ . Então  $\Gamma$  mapeado por  $F(s)$  circundará a origem  $N$  vezes,

$$N = Z - P, \quad (8.1)$$

onde:

- $Z$  é o número de zeros de  $F(s)$  no interior de  $\Gamma$ .
- $P$  é o número de polos de  $F(s)$  no interior de  $\Gamma$ .
- $N$  é positivo se o circundamento da origem for no mesmo sentido de  $\Gamma$ .
- $N$  é negativo se o circundamento da origem for em sentido contrário ao de  $\Gamma$ .

*Ilustração:* Para fins de ilustração, considere-se um caminho fechado  $\Gamma$  no plano complexo sendo mapeado para o plano complexo pela função  $F(s)$ , conforme mostrado na Figura 8.1.

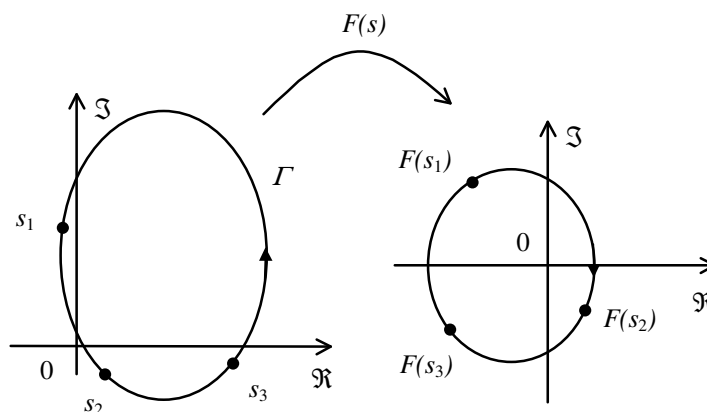


FIGURA 8.1 – Um caminho fechado  $\Gamma$  sendo mapeado por uma função  $F(s)$ .

O mapeamento direto é único. O mapeamento inverso pode não ser, o que acontecerá por exemplo no caso de

$$F(s) = \frac{1}{(s+b)(s+a)} .$$

Neste caso  $F(s)$  terá o mesmo valor para dois valores diferentes de  $s$ .

*Ilustração:* O porquê da validade do princípio do argumento pode ser entendido com base no exemplo a seguir. Considere-se a função de transferência

$$F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+b)(s+a)} .$$

A fase de  $F(s)$  será dada por

$$\angle F(s) = \angle(s+z) - \angle(s+b) - \angle(s+a)$$

ou

$$\angle F(s) = \gamma - \alpha - \beta$$

usando a notação

$$\gamma = \angle(s+z), \alpha = \angle(s+a), \beta = \angle(s+b) .$$

A situação é ilustrada na Figura 8.2.

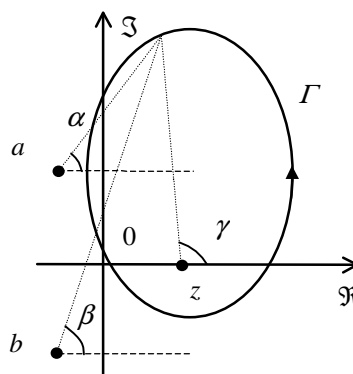


FIGURA 8.2 – Um caminho fechado  $\Gamma$  e os polos e zeros de uma função racional  $F(s)$ .

Após uma volta completa pelo caminho fechado  $\Gamma$ , o ângulo  $\gamma$  terá variado de  $360^\circ$ , pois o ponto  $z$  está no interior do caminho. O mesmo teria acontecido para qualquer contribuição de fase de outros zeros ou polos no interior de  $\Gamma$ . Para os polos e zeros fora da região circundada por  $\Gamma$ , a contribuição de fase não terá variado de  $360^\circ$ . No caso deste exemplo teremos para a uso na expressão (8.1) os seguintes valores:  $Z = 1$ ,  $P = 0$  e  $N = Z - P = 1$ .

Numa demonstração do princípio do argumento o arrazoado usado na ilustração acima é formalizado.

### Contando o número de circundamentos

Para contar o número de circundamentos de um ponto de interesse, traça-se uma semirreta *qualquer* deste ponto ao infinito. Conta-se então o número de interseções do mapeamento  $F(I)$  com esta reta, observando o sentido das interseções (horário ou anti-horário).

O procedimento é ilustrado na Figura 8.3. Nesta figura, o ponto  $-0,2$  do eixo horizontal é circundado duas vezes no sentido horário. (A semirreta inclinada da direita é interceptada duas vezes em um só sentido, e no caso o sentido é o horário.) O ponto  $-0,37$  do eixo horizontal é circundado zero vezes, pois a semirreta da esquerda é interceptada duas vezes, mas em sentidos opostos.

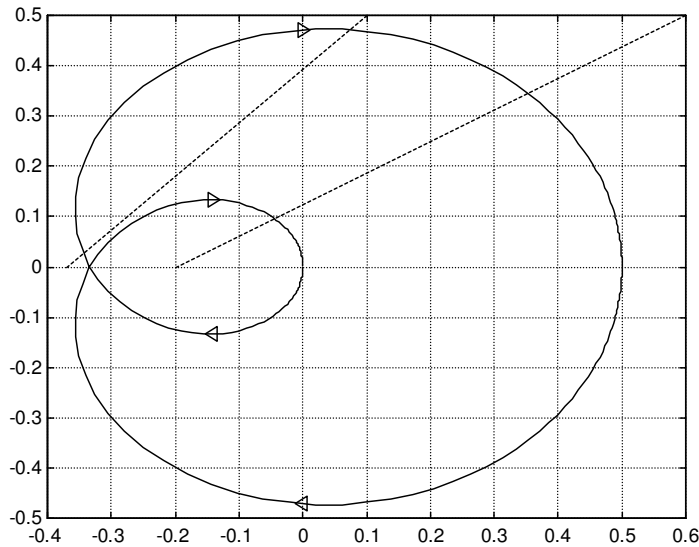


FIGURA 8.3 – Contando circundamentos.

### O critério de Nyquist

O critério de Nyquist é uma aplicação de engenharia do princípio do argumento ao caso da estabilidade de circuitos e outros sistemas realimentados. Para tal aplicação é inicialmente preciso definir o caminho fechado  $\Gamma$  adequado. Para o critério de Nyquist, este caminho é a chamada *curva de Nyquist*.

### A curva de Nyquist

A curva de Nyquist é um caminho fechado no plano complexo que engloba todo o semiplano complexo direito, percorrendo também o eixo imaginário. No eixo imaginário, a curva de Nyquist contorna as singularidades da função analisada.

*Exemplo:* Seja dada a função de transferência

$$A(s) = \frac{(s+a)}{s(s^2+b^2)(s+c)}, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

A curva de Nyquist para  $A(s)$  é mostrada na Figura 8.4.

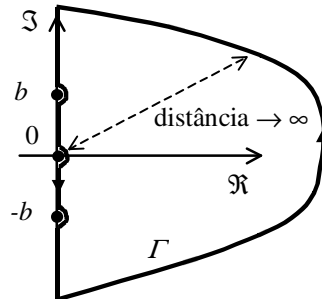


FIGURA 8.4 – Curva de Nyquist para  $A(s) = \frac{(s+a)}{s(s^2+b^2)(s+c)}$ .

### O diagrama de Nyquist

O diagrama de Nyquist é a representação gráfica do mapeamento da curva de Nyquist no plano complexo pela função em análise. No caso do exemplo dado, este diagrama seria o mapeamento  $A(j\omega)$ , sendo  $\Gamma$  o caminho fechado mostrado na Figura 8.4. Para a construção do diagrama de Nyquist, o esboço prévio do diagrama de Bode da função  $A(s)$  pode ser proveitoso. O diagrama de Bode é útil para esboçar a parte do diagrama de Nyquist oriundo dos segmentos da curva de Nyquist sobre o eixo imaginário. Muitas vezes, o esboço do diagrama de Bode é bem mais simples do que a determinação algébrica de pontos relevantes do diagrama de Nyquist em número suficiente para permitir seu esboço com qualidade razoável.

### O critério

#### Teorema

Uma função de transferência de um dos tipos

$$G(s) = \frac{A(s)}{1+kA(s)} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{1}{1+kA(s)} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{kA(s)}{1+kA(s)}$$

é estável se e somente se o diagrama de Nyquist de  $A(s)$  circundar o ponto  $-1/k$  no sentido contrário ao da curva de Nyquist tantas vezes quantos polos  $A(s)$  tiver no semiplano complexo direito.

Neste texto, optou-se pelo sentido anti-horário como sentido padrão para a curva de Nyquist. Contudo, o enunciado do teorema é tal que o sentido horário também poderia ser usado. Neste caso, bastaria contar corretamente os circundamentos do ponto  $-1/k$  pelo diagrama, considerando a relação existente entre o sentido do circundamento e seu sinal no cômputo do total de circundamentos. Um enunciado alternativo para o teorema de Nyquist é o seguinte.

#### Teorema (enunciado alternativo)

Seja  $P$  o número de polos de uma função de transferência  $A(s)$  no semiplano complexo direito. Então uma função de transferência de um dos tipos

$$G(s) = \frac{A(s)}{1+kA(s)} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{1}{1+kA(s)} \quad \text{ou} \quad G(s) = \frac{kA(s)}{1+kA(s)}$$

terá  $Z = N + P$  polos no semiplano complexo direito, onde  $N$  é o número de circundamentos do ponto  $-1/k$  pelo diagrama de Nyquist de  $A(s)$  no sentido da curva de Nyquist, e  $P$  é o número de polos de  $A(s)$  no semiplano complexo direito.

### Aplicação a circuitos

A seguir serão considerados alguns exemplos de aplicação do critério de Nyquist a circuitos.

*Exemplo:* Considere a configuração inversora da Figura 8.5 e o circuito equivalente dado, que inclui um modelo dinâmico para o amplificador operacional empregado.

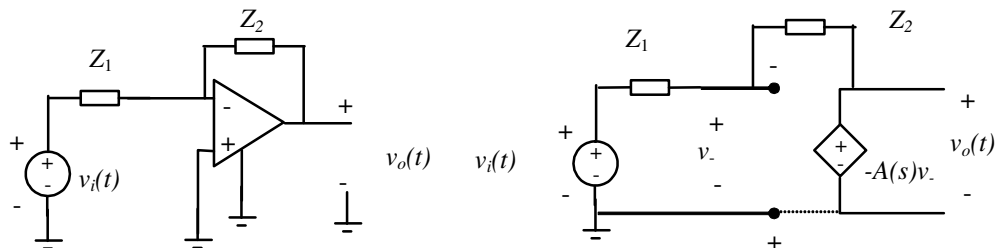


FIGURA 8.5 – Circuito com amplificador operacional na configuração inversora e modelo equivalente.

Para o circuito equivalente na Figura 8.5, tem-se:



$$V_o(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)} \frac{\left[ \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \right] A(s)}{1 + \left[ \frac{Z_1(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} \right] A(s)} V_i(s).$$

Conhecidas as funções  $Z_1(s)$ ,  $Z_2(s)$  e  $A(s)$ , pode-se estudar a estabilidade do circuito valendo-se do diagrama de Nyquist de  $Z_1(s)A(s)/[Z_1(s) + Z_2(s)]$ .

*Exemplo:* Estude a estabilidade de

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + kA(s)}$$

dado

$$A(s) = \frac{1}{s(s+a)}, \quad a > 0.$$

A curva de Nyquist para este exemplo é dado na Figura 8.6.

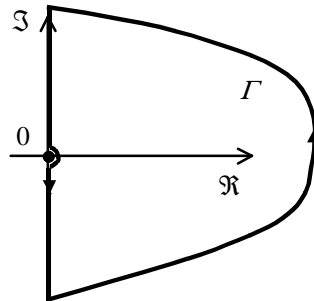


FIGURA 8.6 – Curva de Nyquist para  $A(s) = 1/[s(s+a)]$ .

Esta curva de Nyquist pode ser dividida em 4 setores:

- 1º setor: de  $s \rightarrow j\infty$  até  $j0^+$
- 2º setor:  $s = \varepsilon e^{j\theta}$  com  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\theta$  variando de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$
- 3º setor: de  $s = j0^-$  até  $s \rightarrow -j\infty$
- 4º setor:  $s = R e^{j\theta}$  com  $R \rightarrow \infty$  e  $\theta$  variando de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$

Para o 2º setor tem-se:

$$A(s)|_{\text{setor 2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta} (\varepsilon e^{j\theta} + a)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon e^{j\theta}}.$$

Isto corresponde ao arco da Figura 8.7.

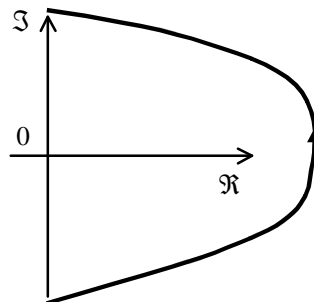


FIGURA 8.7 – Parte do diagrama de Nyquist de  $A(s) = 1/[s(s+a)]$  referente ao setor 2.

Para o setor 4, tem-se:

$$A(s)|_{\text{setor 4}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Re}^{j\theta} (\text{Re}^{j\theta} + a)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^2 e^{j2\theta}}.$$

Isto corresponde ao arco da Figura 8.8. No caso de funções de transferência  $A(s)$  estritamente próprias (isto é, com mais polos do que zeros) este setor sempre será mapeado para o entorno da origem.

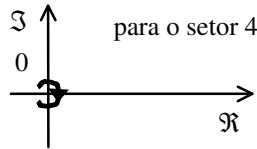


FIGURA 8.8 – Parte do diagrama de Nyquist de  $A(s) = 1/[s(s+a)]$  referente ao setor 4.

Para os setores 1 e 3, tem-se:

$$A(s)|_{\text{setores 1 e 3}} = \frac{1}{j\omega(j\omega+a)} = \frac{-\omega^2 - ja\omega}{\omega^4 + a^2\omega^2} = -\frac{1}{\omega^2 + a^2} - j\frac{a}{\omega^3 + a^2\omega}$$

Nestes setores os limites são obtidos como sendo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A(s)|_{\text{setores 1 e 3}} = -\frac{1}{a^2} - j.\text{sign}(\omega) \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{a}{|\omega|^3}$$

Informações extraídas de um esboço prévio do diagrama de Bode de  $A(s)$  podem ser úteis no esboço dos segmentos do diagrama de Nyquist correspondentes aos setores 1 e 3.

O esboço do diagrama de Nyquist completo é o dado na Figura 8.9.

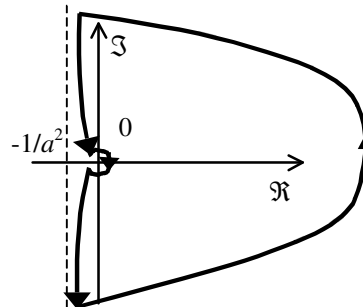


FIGURA 8.9 – Diagrama de Nyquist de  $A(s) = 1/[s(s+a)]$ .

Do esboço da Figura 8.9 conclui-se que o circuito será estável para todo  $k$  positivo, pois neste caso o ponto  $-1/k$  não é circundado nem uma única vez. Para todo  $k$  negativo, o ponto  $-1/k$  será circundado uma vez, o que significa que para todo  $k$  negativo o circuito será instável.

*Exemplo:* Utilizando o critério de Nyquist, determine os valores de  $R$  para os quais o circuito da Figura 8.10 é estável.

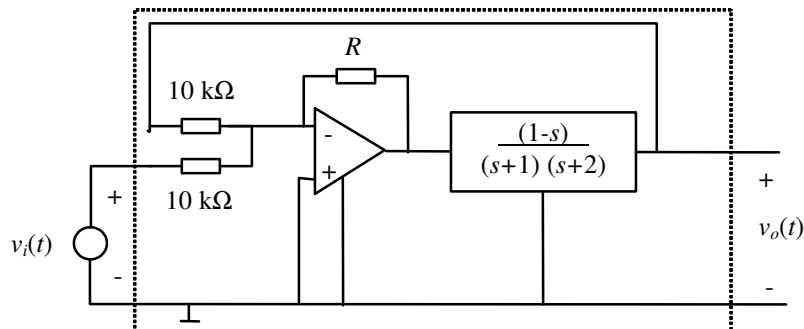


FIGURA 8.10 – Circuito linear de segunda ordem.

Definindo

$$A(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+2)},$$

a relação entre entrada e saída do circuito da Figura 8.10 pode ser escrita como

$$V_o(s) = \left( -\frac{R}{10k\Omega} V_i(s) - \frac{R}{10k\Omega} V_o(s) \right) A(s)$$

$$V_o(s) = \frac{-KA(s)}{1+KA(s)} V_i(s)$$

com

$$K = \frac{R}{10k\Omega} > 0.$$

A curva de Nyquist para  $A(s)$  é dada na Figura 8.11.

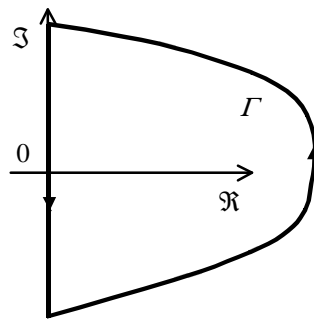


FIGURA 8.11 – Curva de Nyquist para  $A(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+2)}$ .

No eixo imaginário  $A(s)$  vale:

$$A(j\omega) = \frac{1-j\omega}{-\omega^2+3j\omega+2} = \frac{-4\omega^2+2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} + j \frac{\omega(-5+\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2}$$

As frequências para as quais acontecem cruzamentos do diagrama de Nyquist com o eixo imaginário são as soluções de:

$$\Re[A(j\omega)] = \frac{-4\omega^2+2}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} = 0$$

ou

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Os pontos de interseção com o eixo imaginário são:

$$\Im[A(\pm j\sqrt{1/2})] = \pm j \frac{\sqrt{1/2}(-5+1/2)}{(2-1/2)^2+9.1/2} = \mp j0,47$$

As frequências para as quais acontecem cruzamentos do diagrama de Nyquist com o eixo real são as soluções de:

$$\Im[A(j\omega)] = \frac{\omega(-5+\omega^2)}{(2-\omega^2)^2+9\omega^2} = 0$$

ou

$$\omega = 0; \pm \sqrt{5}$$

Os pontos de interseção com o eixo real são:

$$\Re[A(\pm j\sqrt{5})] = \frac{-4.5 + 2}{(2-5)^2 + 9.5} = -\frac{1}{3}$$

$$\Re[A(j0)] = 1/2$$

Finalmente tem-se o seguinte limite:

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(j\omega) = j0^\pm$$

É agora possível esboçar o diagrama de Nyquist para este exemplo. O diagrama encontra-se na Figura 8.12.<sup>1</sup>

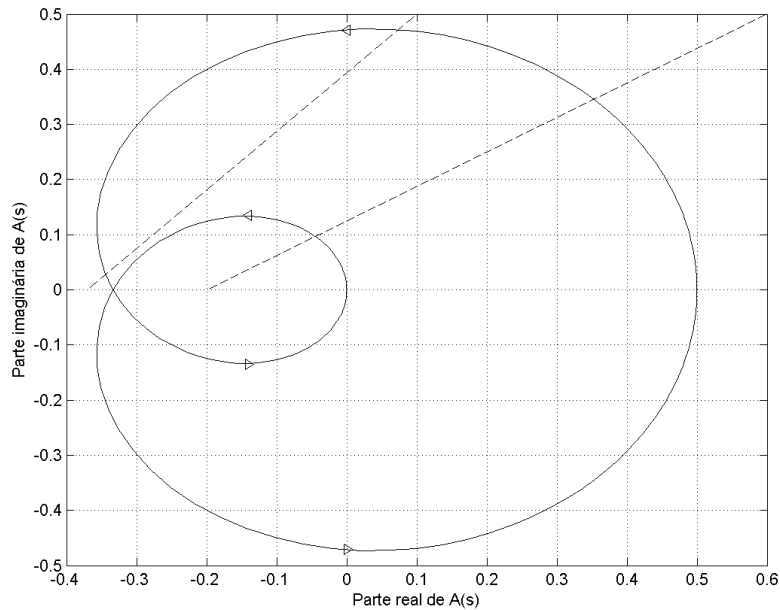


FIGURA 8.12 – Diagrama de Nyquist para  $A(s) = \frac{1-s}{(s+1)(s+2)}$ .

O número de circundamentos do ponto  $-1/K$  será

- $N = 2$  para  $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{K} < 0$ ;
- $N = 0$  para  $-\infty < -\frac{1}{K} < -\frac{1}{3}$ .

Por isso, o circuito será estável para  $K < 3$ , ou  $R < 30$  [kΩ].

### Propriedades de simetria do diagrama de Nyquist

Como para funções de transferência racionais com coeficientes reais valem as propriedades

$$|G(j\omega)| = |G(-j\omega)| \quad \text{e} \quad \angle G(j\omega) = -\angle G(-j\omega),$$

o diagrama de Nyquist de uma função de transferência será sempre simétrico em relação ao eixo real.

<sup>1</sup> Alternativamente se poderia esboçar o diagrama de Nyquist com ajuda de um esboço prévio do diagrama de Bode do circuito, que é uma representação polar de  $A(s)$ ,  $s = j\omega$

### Exercícios propostos

#### Exercício 1:

Utilizando o critério de Nyquist, determine os valores de  $R$  para os quais o circuito da Figura 7.17 é estável.

#### Exercício 2:

Utilizando o critério de Nyquist, determine as relações entre os valores de  $R_1$  e  $R_2$  para os quais o circuito da Figura 7.15 é estável.

#### Exercício 3:

Determine os valores de  $R$  para os quais o circuito da Figura 8.13 será estável. Considere os casos:

- a)  $A(s) = \frac{s+1}{s(s+5)}$
- b)  $A(s) = \frac{s+1}{s^2(s+5)}$
- c)  $A(s) = \frac{s+1}{(s^2 - 2s + 5)}$

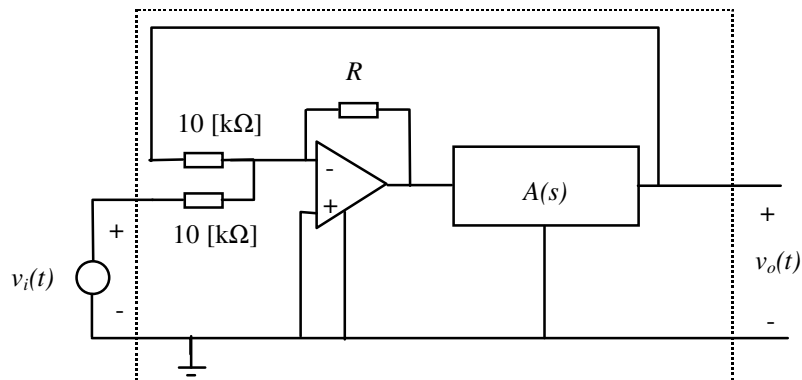


FIGURA 8.13

#### Exercício 4:

Estude a estabilidade do circuito da Figura 8.5 (amplificador inversor) em função dos valores de  $k = R_1 / (R_1 + R_2)$ , isto é, determine a(s) faixa(s) de valores de  $k$  para os quais o circuito é estável. Use o seguinte modelo realista para o ganho  $A(s)$  do amplificador operacional:

$$A(s) = \frac{10^{26}}{(s + 6 \cdot 10^6)(s + 2,4 \cdot 10^7)(s + 2,4 \cdot 10^8)}$$

#### Exercício 5:

Refaça o estudo do exercício 4 para o amplificador não inversor da Figura 4.7.

## 9. Regime permanente senoidal

Foi demonstrado no capítulo anterior que, em regime permanente, as tensões e correntes num circuito linear estável submetido a entradas senoidais são também sinais senoidais (da mesma frequência). Dessa forma, as informações relevantes para cada sinal no circuito passam a ser apenas sua amplitude e fase. Essas informações podem ser convenientemente representadas por fasores.

### Fasores

Fasores são números complexos que representam sinais senoidais com as seguintes convenções:

- a amplitude do sinal é representada pelo módulo do fador;
- a fase do sinal (tendo como referência o sinal cossenoidal com fase nula) é representada pela fase do fador.

Dessa forma, o sinal

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V)$$

será representado pelo fador

$$V = V_m e^{j\angle V}$$

Dado um fador  $V$ , o sinal no tempo pode ser determinado se a frequência  $\omega$  for conhecida. A expressão para este cálculo é:

$$v(t) = \Re[V e^{j\omega t}] = \Re[V_m e^{j\angle V} e^{j\omega t}] = \Re[V_m e^{j(\omega t + \angle V)}] = V_m \cos(\omega t + \angle V).$$

As leis de Kirchhoff das correntes e tensões são também válidas em termos de fasores. Por isso, dada a matriz de incidência  $A$  do grafo conectado de um circuito em regime permanente senoidal, vale:

$$\begin{aligned} Ai(t) = 0 &\Leftrightarrow AI = 0 \\ v(t) = A^T e(t) &\Leftrightarrow V = A^T E \end{aligned}$$

onde  $I$ ,  $V$  e  $E$  são os fasores que representam os sinais  $i(t)$ ,  $v(t)$  e  $e(t)$  em regime senoidal respectivamente.

### Fasores e elementos de circuito lineares

Para elementos de circuito lineares, valem as relações da Tabela 9.1.

Tabela 9.1 – Elementos de circuito lineares de dois terminais e fasores.

Elemento de circuito	Domínio do tempo	Domínio $s$	Regime permanente senoidal
Resistores:	$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$	$V = RI$
Indutores:	$v(t) = L\dot{i}(t)$	$V(s) = sLI(s)$	$V = j\omega LI$
Capacitores	$i(t) = C\dot{v}(t)$	$I(s) = sCV(s)$	$I = j\omega CV$

As impedâncias, definidas no domínio  $s$  como uma função da frequência generalizada  $s$ , podem, portanto, ser calculadas para o regime permanente senoidal tomando-se  $j\omega$  no lugar de  $s$ . As impedâncias complexas  $j\omega L$  e  $1/(j\omega C)$  são também denominadas reatâncias.

### Representação gráfica de fasores

Para resistores, indutores e capacitores, a representação gráfica dos fasores corrente e tensão é mostrada na Figura 9.1.

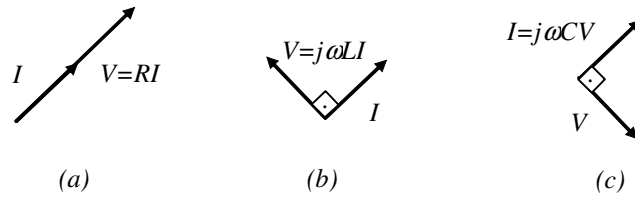


FIGURA 9.1 – Fasores de tensão e corrente para resistores (a), indutores (b) e capacitores (c).

### Equacionamento de circuitos em regime permanente senoidal

Nos equacionamentos de circuitos usando o método geral de análise, análise nodal e análise nodal modificada, o caso especial do regime permanente senoidal é também obtido substituindo-se  $s$  (ou o mais precisamente o operador  $D$ ) por  $j\omega$ . Portanto, para o método geral de análise, as equações serão do tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ -A^T & I & 0 \\ 0 & j\omega M_0 + M_1 & j\omega N_0 + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_f \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ j\omega M_0 A^T + M_1 A^T & j\omega N_0 + N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_f \end{bmatrix}$$

onde  $E$ ,  $I$  e  $U_f$  são vetores complexos (de fasores).

Para a análise nodal, a equação será do tipo:

$$[AY_b(j\omega)A^T]E = I_f \quad \text{ou} \quad Y_n(j\omega) = I_f$$

onde  $E$  e  $I_f$  são vetores complexos (de fasores) e  $Y_n(j\omega)$  é uma matriz complexa de admitâncias.

### Potência em regime permanente senoidal

A potência instantânea fornecida a um elemento de circuito ou subcircuito com dois terminais e impedância  $Z$  é  $p(t) = v(t)i(t)$ . Para um circuito em regime permanente senoidal tanto  $v(t)$  quanto  $i(t)$  são sinais senoidais:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V) \quad (9.1a)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \angle I) \quad (9.1b)$$

Considerando que o período dos sinais é  $2\pi/\omega$ , a potência média vale

$$P_m = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p(t) dt = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) = \frac{1}{2} I_m^2 \Re(Z) = \frac{1}{2} I_m^2 |Z| \cos(\angle Z) \quad (9.2)$$

A grandeza  $\cos(\angle V - \angle I)$  é denominada *fator de potência* e a diferença de fase ( $\angle V - \angle I$ ) entre o sinal de tensão e o de corrente é freqüentemente representado pela letra grega  $\phi$ . Por isso identifica-se corriqueiramente "o  $\cos(\phi)$ " com "o fator de potência".

A expressão (9.2) para a potência média pode ser reescrita de forma mais simples usando-se o conceito de valor eficaz de um sinal periódico de período  $T$ .

#### Definição

O valor eficaz  $V_{eficaz}$  de um sinal periódico  $v(t)$  com período  $T$  é

$$V_{eficaz} := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} .$$

Considerando que para tensão e corrente dados em (9.1) resulta

$$V_{eficaz} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ ou } I_{eficaz} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} ,$$

pode-se reescrever (9.2) como

$$P_m = I_{eficaz}^2 \Re(Z) .$$

Existem autores que representam um sinal senoidal pelo fasor

$$V = V_{eficaz} e^{j\angle V} .$$

Esta convenção *não* é adotada neste texto.

### Potência complexa

#### Definição

A potência complexa é definida por

$$P := \frac{1}{2} VI^* .$$

Com essa definição tem-se

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\angle V - \angle I) + j \frac{V_m I_m}{2} \text{sen}(\angle V - \angle I) = P_m + jQ .$$

$P_m$ , a parte real da potência complexa, é denominada *potência ativa* e coincide com a potência média.  $Q$ , a parte imaginária de  $P$ , é denominada *potência reativa*.

Em sistemas de potência é usual definir-se o *triângulo de potência* mostrado na Figura 9.2.

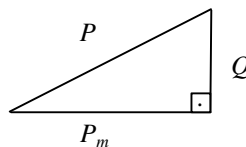


FIGURA 9.2 – Triângulo de potência.

O módulo de  $P$  é também denominado *potência aparente*. Tanto  $P$  quanto  $Q$  geralmente têm como unidade o Volt-Ampere, [VA], e para  $Q$  às vezes também se emprega o Volt-Ampere reativo, [VAR]. O Watt, [W], é empregado para a potência ativa.

Para buscar uma interpretação física para a potência reativa, considere-se novamente a expressão para a potência instantânea:

$$p(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) [1 + \cos 2(\omega t + \angle I)] - \frac{1}{2} V_m I_m \text{sen}(\angle V - \angle I) \text{sen} 2(\omega t + \angle I) .$$

Ao integrar  $p(t)$  para determinar a potência média, o primeiro termo de  $p(t)$  irá contribuir com

$$\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I)$$

enquanto o segundo termo não irá contribuir, pois seu valor médio é nulo. De fato



$$\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\angle V - \angle I) \sin 2(\omega t + \angle I) dt = 0.$$

Por outro lado a amplitude de

$$\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\angle V - \angle I) \sin 2(\omega t + \angle I)$$

é

$$\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\angle V - \angle I).$$

Este valor coincide com a potência reativa definida anteriormente. Portanto, a potência reativa pode ser entendida como uma potência que é transferida para a impedância  $Z$  e novamente de volta para o circuito, tudo dentro de um mesmo período. Do ponto de vista energético, este tipo de parcela é indesejável, pois não haverá realização de trabalho, embora recursos de geração e transmissão sejam necessários para disponibilizar potência reativa para a impedância  $Z$ .

A conservação de potência entendida no Capítulo 1 como resultado do teorema de Tellegen vale também para a potência complexa.

### Otimização da transferência de potência

Uma problemática de interesse prático é a determinação da relação ideal entre as impedâncias de um gerador e da sua carga, visando maximizar a disponibilidade de potência na carga. Considere-se para tal estudo o circuito da Figura 9.3.

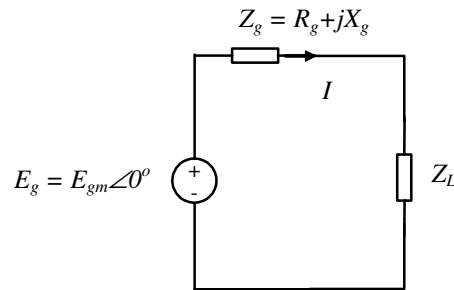


FIGURA 9.3 – Fonte senoidal e carga em regime permanente.

A potência ativa disponibilizada para a carga  $Z_L$  da Figura 9.3 é

$$P_m = \frac{1}{2} \Re\{E_g I^*\} - \frac{1}{2} R_g |I|^2.$$

O primeiro termo é a potência média fornecida pela fonte e o segundo termo é a potência dissipada em  $Z_g$ , a impedância da fonte. Convencionando a fase de  $E_g$  como nula, pode-se escrever

$$P_m = \frac{1}{2} E_{gm} I_m \cos(\angle I) - \frac{1}{2} R_g I_m^2.$$

Considerando agora o problema

$$\max_{I_m, \angle I} P_m = \max_{I_m, \angle I} \left( \frac{1}{2} E_{gm} I_m \cos(\angle I) - \frac{1}{2} R_g I_m^2 \right),$$

tem-se que (para  $E_{gm}$  e  $R_g$  dados) o máximo de  $P_m$  em  $\angle I$  é obtido para  $\angle I = 0$ . Isso ocorre quando

$$\Im(Z_L) = -\Im(Z_g).$$

Portanto,

$$\max_{I_m, \angle I} P_m = \max_{I_m, 0} P_m = \max_{I_m} \left( \frac{1}{2} E_{gm} I_m - \frac{1}{2} R_g I_m^2 \right).$$

Um gráfico típico da função quadrática a ser otimizada é mostrado na Figura 9.4.

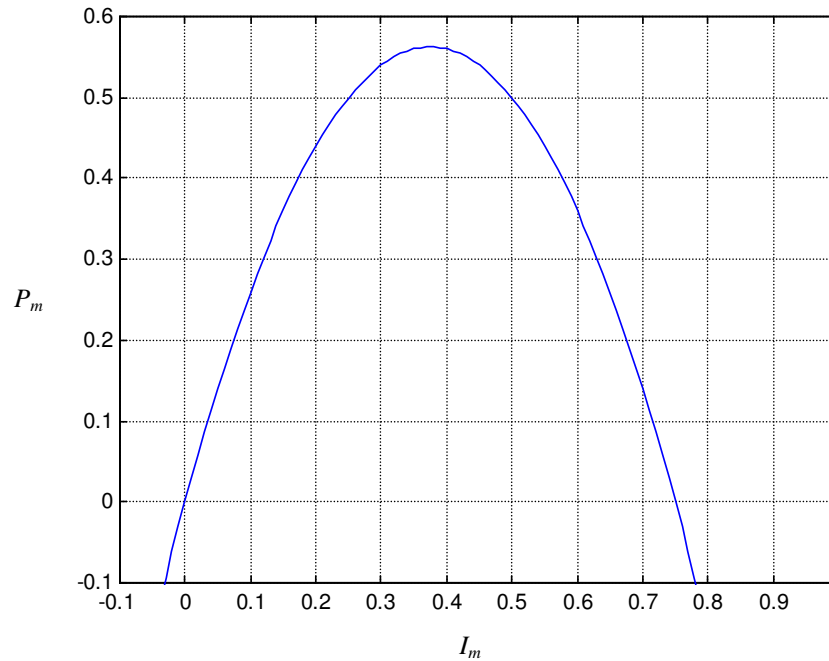


FIGURA 9.4 – Gráfico típico de  $\left(\frac{1}{2} E_{gm} I_m - \frac{1}{2} R_g I_m^2\right)$ .

O valor ótimo de  $I_m$  pode agora ser facilmente determinado, pois

$$\frac{\partial P_m}{\partial I_m} = \frac{1}{2} E_{gm} - R_g I_m = 0 \Rightarrow I_m = \frac{E_{gm}}{2R_g}.$$

Esse valor de  $I_m$  será conseguido se

$$\Re(Z_L) = \Re(Z_g).$$

Assim a condição para máxima disponibilização de potência da fonte na carga é

$$Z_L = Z_g^*.$$

E o valor da máxima potência média transferida será

$$P_{m_{max}} = \frac{E_{gm}^2}{8R_g}.$$

### Circuitos trifásicos

Em circuitos de potência, o uso de correntes/tensões alternadas senoidais é particularmente interessante pelos seguintes motivos:

- tensões/correntes alternadas podem ser convertidas facilmente usando transformadores (não ideais), que são dispositivos eficientes e de baixa manutenção;
- geradores de corrente alternada são de construção relativamente simples, pois:
  - ◆ enrolamentos de alta tensão ficam no estator (parte fixa do gerador);
  - ◆ tensões induzidas são oscilantes por natureza.

Circuitos trifásicos são circuitos de tensão alternada de interesse prático por motivos adicionais expostos mais adiante. Trata-se de circuitos alimentados com três tensões senoidais de mesma amplitude, defasadas entre si de 120 graus.

Um circuito trifásico simples é mostrado na Figura 9.5. O tipo de ligação usado ali é chamado *ligação estrela-estrela*, pois há um ponto (terminal) em comum, tanto para as fontes quanto para as cargas. Quando os pontos comuns (das fontes e das cargas) estão interligados, chama-se a ligação de estrela-estrela *com neutro*. Caso contrário, chama-se a ligação de estrela-estrela *sem neutro*.

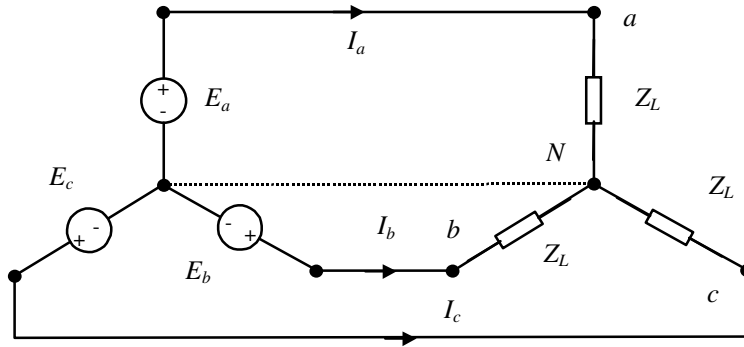


FIGURA 9.5 – Circuito trifásico na ligação estrela-estrela.

O diagrama dos fasores de tensão para a fonte trifásica ligada em estrela é mostrado na Figura 9.6.

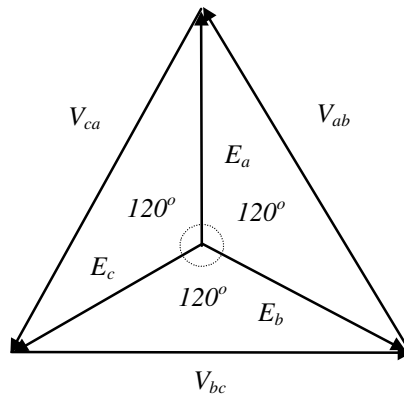


FIGURA 9.6 – Diagrama de fasores de tensão para fontes trifásicas ligadas em estrela.

As tensões  $E_a$ ,  $E_b$  e  $E_c$  são denominadas *tensões de fase*. Por definição

$$E_b = E_a e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad E_c = E_a e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

As tensões  $V_{ab}$ ,  $V_{ca}$  e  $V_{bc}$  são denominadas *tensões de linha*. Do diagrama de fasores, conclui-se que:

$$\begin{aligned} V_{ab} &= E_a \sqrt{3} \angle 30^\circ = \sqrt{3} V_m \angle 30^\circ \\ V_{ca} &= \sqrt{3} V_m \angle 150^\circ \\ V_{bc} &= \sqrt{3} V_m \angle 270^\circ \end{aligned}$$

Circuitos trifásicos são particularmente interessantes, pois, usando bobinas convenientemente dispostas, é simples criar um campo girante, o que barateia a construção de motores elétricos. Além disso, com carga trifásica balanceada ou equilibrada (isto é, cargas iguais nas três fases) têm-se as seguintes vantagens adicionais.

- *Vantagem 1:* Para fins de transmissão são necessários 3 fios apenas, em vez de 6 para um conjunto equivalente de três circuitos independentes de uma só fase.

- *Vantagem 2*: O torque no gerador é constante, o que significa nível reduzido de vibração mecânica.

A seguir demonstraremos estas duas afirmações.

#### *Demonstração da vantagem 1*

Para um circuito trifásico tem-se

$$E_a + E_b + E_c = 0.$$

Dessa forma, para as correntes por uma carga balanceada (como a do circuito da figura 9.5) vale

$$\frac{E_a}{Z_L} + \frac{E_b}{Z_L} + \frac{E_c}{Z_L} = 0.$$

Este valor zero de corrente corresponde à corrente que fluirá pela conexão tracejada (o neutro) da Figura 9.5. A conclusão é que o fio em questão é desnecessário. Assim, demonstramos que a alimentação de uma carga trifásica balanceada pode de fato ser feita com apenas três fios. A "economia" dos outros dois fios ocorreu com a definição de um nó (referência) comum para as três fontes.

#### *Demonstração da vantagem 2*

Para as potências instantâneas fornecidas em cada fase tem-se:

$$p_a(t) = e_a(t)i_a(t) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z_L|} \left[ \cos(\angle Z_L) + \cos(2\omega t - \angle Z_L) \right]$$

$$p_b(t) = e_b(t)i_b(t) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z_L|} \left[ \cos(\angle Z_L) + \cos\left(2\omega t - \angle Z_L - \frac{4\pi}{3}\right) \right]$$

$$p_c(t) = e_c(t)i_c(t) = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{|Z_L|} \left[ \cos(\angle Z_L) + \cos\left(2\omega t - \angle Z_L - \frac{8\pi}{3}\right) \right]$$

O valor total da potência instantânea fornecida pela fonte à carga é, portanto:

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) = \frac{3}{2} \frac{V_m^2}{|Z_L|} \cos(\angle Z_L)$$

Este valor é constante. Como torque no eixo  $\tau(t)$  e potência fornecida por um gerador se relacionam por meio de

$$p(t) = \tau(t)\omega,$$

conclui-se que uma carga trifásica balanceada fará que o gerador trabalhe sob condições mecânicas favoráveis, pois potência e torque instantâneos serão constantes.

Além da ligação em estrela, cargas trifásicas e fontes podem também estar ligadas em delta, como mostrado na Figura 9.7 para a carga. As correntes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  são denominadas *correntes de fase*. As correntes nos ramos  $ab$ ,  $ca$  e  $bc$  são chamadas *correntes de linha*.

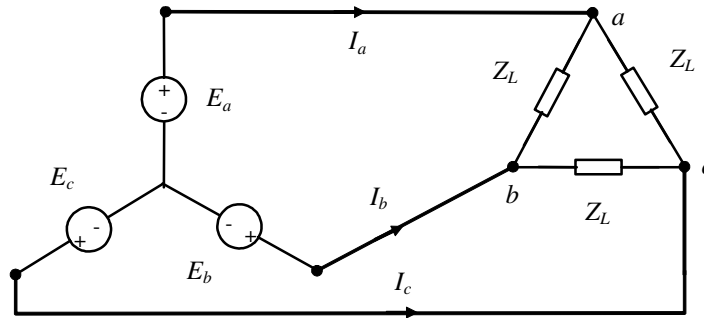


FIGURA 9.7 – Circuito trifásico na ligação estrela-delta.

Da lei de Kirchoff das correntes sabe-se que

$$I_a = I_{ab} + I_{ac}$$

$$I_b = I_{ba} + I_{bc}$$

$$I_c = I_{ca} + I_{cb}$$

Da definição das impedâncias obtém-se:

$$I_{ab} = \frac{V_{ab}}{Z_L}, I_{ca} = \frac{V_{ca}}{Z_L}, I_{bc} = \frac{V_{bc}}{Z_L}$$

Portanto,

$$I_a = \frac{\sqrt{3}V_m}{Z_L} (1\angle 30^\circ - 1\angle 150^\circ) = \frac{3V_m}{Z_L} \angle 0^\circ$$

$$I_b = \frac{\sqrt{3}V_m}{Z_L} (-1\angle 30^\circ + 1\angle 270^\circ) = \frac{3V_m}{Z_L} \angle -120^\circ$$

$$I_c = \frac{3V_m}{Z_L} \angle -240^\circ$$

De posse dessas expressões, é possível estabelecer uma equivalência (elétrica) entre cargas ligadas em estrela e delta na forma da Figura 9.8.

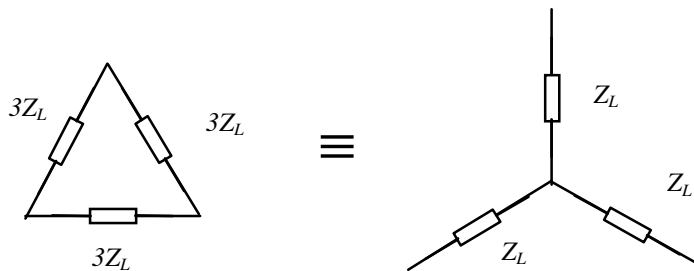


FIGURA 9.8 – Equivalência delta – estrela para cargas trifásicas balanceadas.

Pode-se derivar uma relação semelhante de equivalência entre fontes trifásicas ligadas em estrela e em delta.

Se a impedância  $Z_l$  da linha de transmissão for relevante, ela pode ser considerada diretamente no caso da carga ligada em estrela. A impedância da linha de transmissão pode ser vista como ligada em série com a impedância de carga da fase ( $Z_L$ ); portanto, basta somar a impedância da linha de transmissão com a da carga para obter a impedância que de fato está presente em cada fase do gerador ( $Z_l + Z_L$ ).

No caso da carga ligada em delta, pode-se transformar a carga balanceada ( $Z_L$  em cada fase) numa carga estrela equivalente de valor  $Z_L/3$ . Daí procede-se como no caso da carga estrela. O gerador estará "vendo" uma carga estrela com impedância por fase de ( $Z_l + Z_L/3$ ). Isso, por sua vez, é equivalente a uma carga delta com valor ( $3Z_l + Z_L$ ).

Exemplo: Para o circuito da Figura 9.9 calcule a potência e uma compensação de fator de potência.

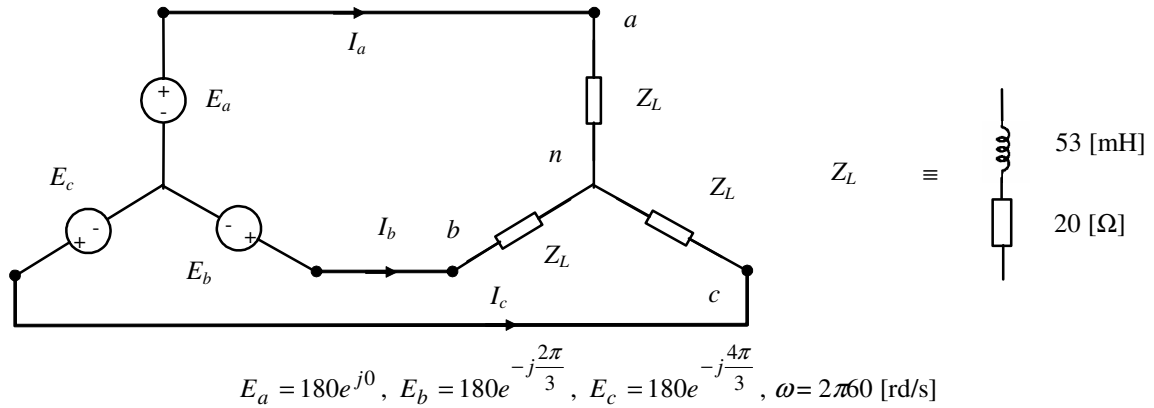


FIGURA 9.9: Exemplo de circuito trifásico com carga em estrela sem neutro.

Para o equacionamento do circuito trifásico acima, basta considerar um fase, pois trata-se de um circuito com carga balanceada. O circuito de uma fase correspondente é o da Figura 9.10.

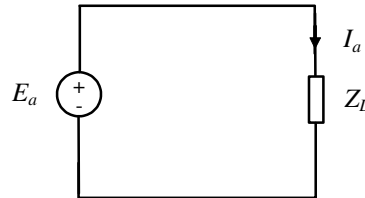


FIGURA 9.10 – Uma fase do circuito da Figura 9.9.

Dos dados do problema tem-se

$$Z_L = 20 + j(2\pi 60)0,053 = 20 + j20 = 20\sqrt{2}e^{j\pi/4},$$

$$I_a = \frac{E_a}{Z_L} = \frac{180e^{j0}}{20\sqrt{2}e^{j\pi/4}} = 6,36e^{-j\pi/4}.$$

Portanto, a potência complexa por fase vale:

$$P = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}E_a I_a^* = \frac{1}{2}180e^{j0} \cdot 6,36e^{j\pi/4} = 572,4e^{j\pi/4}.$$

Os valores totais são

$$P_m = 3.572,4 \cdot \cos(\pi/4) = 1214 \text{ [W]}$$

$$Q = 3.572,4 \cdot \sin(\pi/4) = 1214 \text{ [VA]}$$

O fator de potência é  $\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Sua correção é conseguida colocando-se em paralelo com a carga de cada fase uma admitância  $Y_{comp}$  adequada (Figura 9.11).

A admitância a ser acrescentada deve ser tal que o fator de potência se torne um, o que é alcançado se  $Y_{comp}$  for igual ao oposto da parte imaginária de  $Y_L$ .

$$Y_L = \left(20\sqrt{2}e^{j\pi/4}\right)^{-1} \Rightarrow Y_{comp} = -j \frac{1}{20\sqrt{2}} \sin(-\pi/4) = j \frac{1}{40}$$

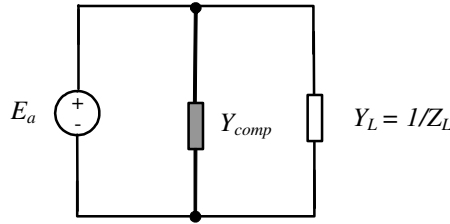


FIGURA 9.11 – Uma fase do circuito da figura 9.9 com compensação de fator de potência.

Isso é conseguido com um capacitor cujo valor é determinado da seguinte forma

$$Y_{comp} = j \frac{1}{40} = j\omega C \Rightarrow C = \frac{1}{40 \cdot 2\pi \cdot 60} = 66,3 [\mu F]$$

Portanto, a compensação é conseguida ligando-se em paralelo com a carga em estrela um conjunto de três capacitores em estrela com 66,3  $[\mu F]$  cada um. Alternativamente, usando a equivalência estrela-delta da Figura 9.8, podem-se usar três capacitores de 66,3/3  $[\mu F]$  cada um ligados em delta. Nesse caso, a tensão sobre os capacitores será maior; o valor da capacitância requerida será menor. Os diagramas de circuito para as duas ligações equivalentes encontram-se nas Figuras 9.12 e 9.13, respectivamente.

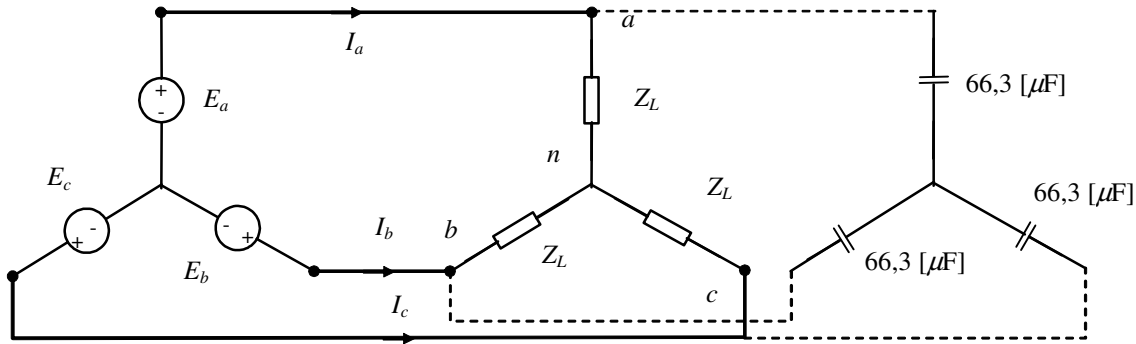


FIGURA 9.12 – Circuito da Figura 9.9 com compensação de fator de potência em estrela.

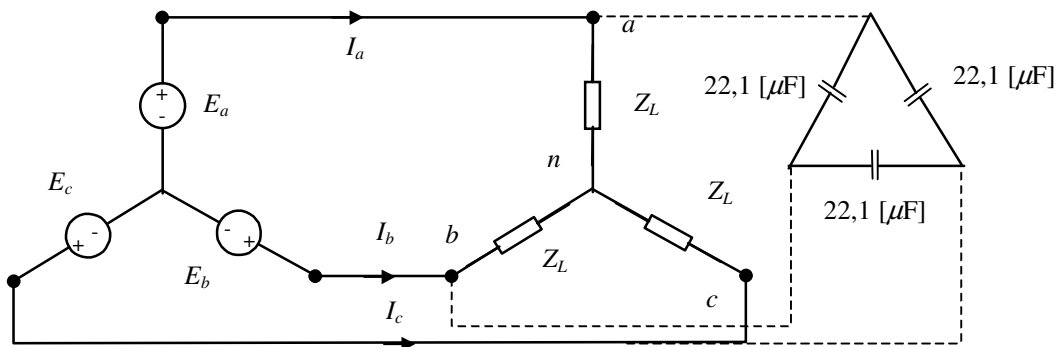


FIGURA 9.13 – Circuito da Figura 9.9 com compensação de fator de potência em delta.

### Cargas trifásicas desbalanceadas

Uma carga trifásica genérica na ligação delta é mostrada na Figura 9.14. Para essa carga, tem-se:

$$I_{ab} = \frac{\sqrt{3}V_m \angle 30^\circ}{Z_{ab}}, I_{ca} = \frac{\sqrt{3}V_m \angle 150^\circ}{Z_{ca}}, I_{bc} = \frac{\sqrt{3}V_m \angle 270^\circ}{Z_{bc}}$$

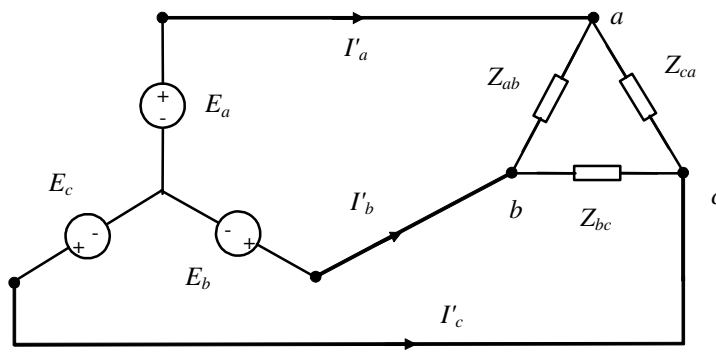


FIGURA 9.14 – Circuito com carga trifásica genérica ligada em delta.

A conclusão é que o diagrama dos fasores de corrente apresentar-se-á "repuxado" em função de diferenças entre as impedâncias  $Z_{ab}$ ,  $Z_{bc}$  e  $Z_{ca}$ .

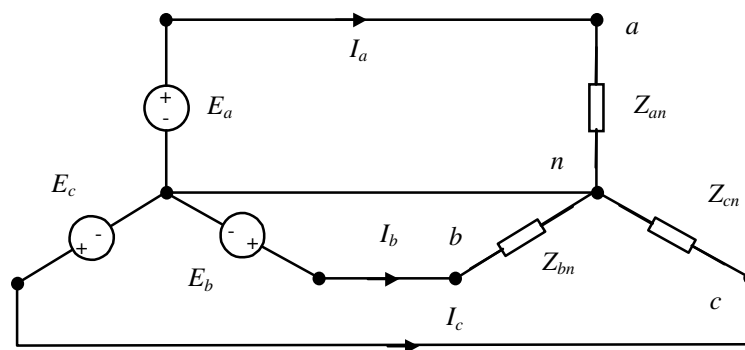


FIGURA 9.15 – Circuito trifásico com carga genérica ligada em estrela com neutro.

Para a ligação de uma carga desbalanceada em estrela com neutro (Figura 9.15), tem-se:

$$I_a = \frac{E_a}{Z_{an}}, I_b = \frac{E_b}{Z_{bn}}, I_c = \frac{E_c}{Z_{cn}}$$

A corrente pelo neutro é dada por  $I_N = -(I_a + I_b + I_c) \neq 0$ . Por isso, além do diagrama de fasores de corrente "repuxado", haverá uma corrente de neutro não nula.

Para a ligação de uma carga desbalanceada em estrela sem neutro, haverá ainda um diagrama de fasores de tensão "repuxado" em razão da ausência do neutro. O equacionamento pode ser feito como mostrado a seguir.

Da lei de Kirchhoff das correntes tem-se:

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

Da lei de Kirchhoff das tensões e da definição das impedâncias tem-se:

$$\begin{aligned} Z_a I_a - Z_b I_b &= V_{ab} \\ -Z_a I_a + Z_c I_c &= V_{ca} \\ -Z_c I_c + Z_b I_b &= V_{bc} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} Z_a I_a - Z_b I_b &= V_{ab} \\ -Z_c (-I_a - I_b) + Z_b I_b &= V_{bc} \end{aligned}$$

Ou em forma matricial

$$\begin{bmatrix} Z_a & -Z_b \\ Z_c & Z_b + Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ab} \\ V_{bc} \end{bmatrix}.$$



### Exercícios propostos

**Exercício 1:**

Qual o fasor que representa o sinal  $v_o(t)$  do circuito da Figura 7.15 em regime permanente senoidal, quando  $v_i(t) = \cos 5t$ ? Considere  $R_2 = R_1$ .

**Exercício 2:**

Qual o fasor que representa o sinal  $v_i(t)$  do circuito da Figura 7.15 em regime permanente senoidal, quando  $v_o(t) = \cos(t + 0,2)$ ? Considere  $R_2 = R_1$ .

**Exercício 3:**

Para o circuito da Figura 7.18, o conteúdo do bloco pontilhado é o mesmo do bloco pontilhado no circuito da Figura 7.17. Determine o valor da impedância  $Z_L$  para que em regime permanente senoidal a corrente  $i(t)$  e o sinal  $v_i(t)$  sejam representados pelo mesmo fasor (exceto pelas unidades).

**Exercício 4:**

Esta questão trata de uma carga trifásica balanceada alimentada por um gerador trifásico defeituoso. Determine os fasores  $I_a, I_b, I_c$  para a situação da Figura 9.16, na qual  $E_a$  e  $E_b$  são parte de uma fonte trifásica ideal.

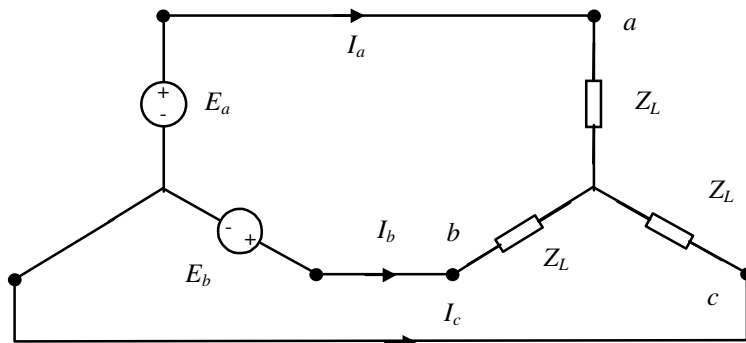


FIGURA 9.16

**Exercício 5:**

Esta questão trata de uma carga trifásica balanceada (a carga por fase é  $Z_L$ , impedância da linha é  $Z_l$ ) que está sendo alimentada por um gerador trifásico defeituoso conforme indicado na Figura 9.17. Determine os fasores  $I'_a, I'_b, I'_c$  para a situação abaixo, na qual  $E_a$  e  $E_b$  são parte de uma fonte trifásica ideal:

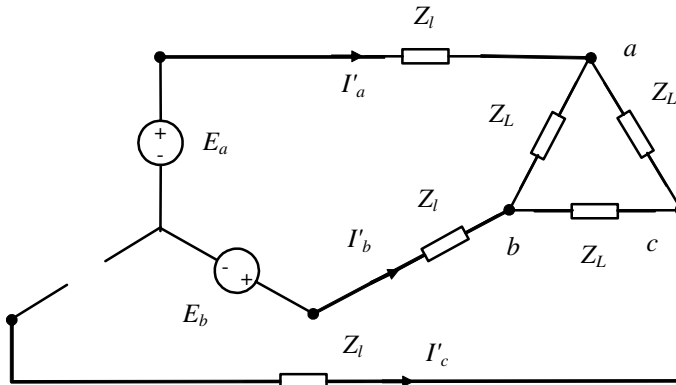


FIGURA 9.17

**Exercício 6:**

Considerando os dois circuitos da Figura 9.18, deduza a relação existente entre os fasores  $I_a$  e  $I'_a$ ,  $I_b$  e  $I'_b$ ,  $I_c$  e  $I'_c$ . Considere  $E_a$ ,  $E_b$ ,  $E_c$  um gerador trifásico perfeito.

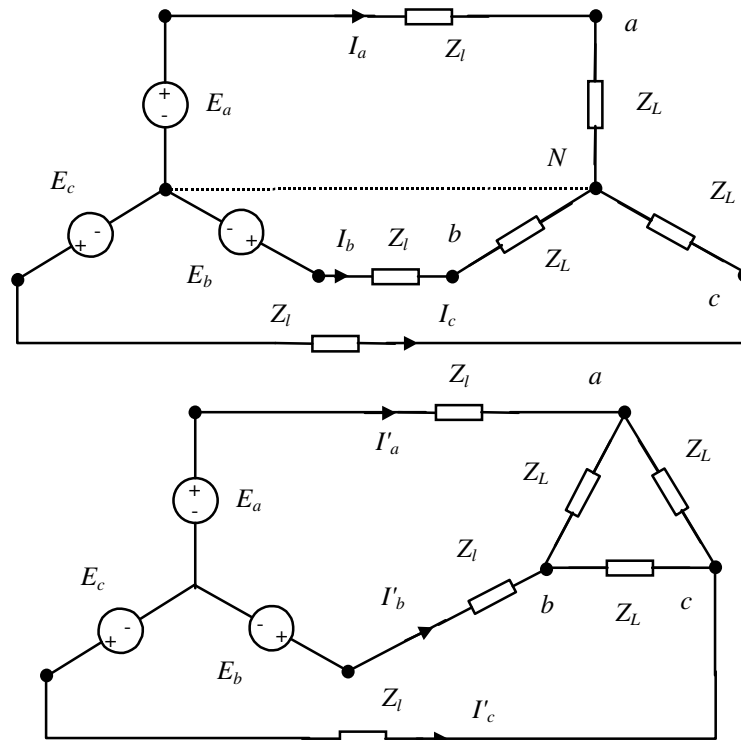
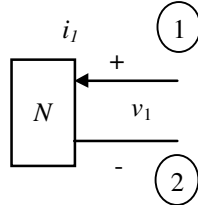


FIGURA 9.18

## 10. Circuitos com várias portas de acesso; reciprocidade

Em capítulos anteriores circuitos resistivos com uma porta de acesso foram representados como indicado na Figura 10.1.



$$h(v, i, t) = 0$$

FIGURA 10.1 – Circuito resistivo com uma porta de acesso.

Para circuitos resistivos lineares, sempre existe o equivalente de Norton e o de Thévenin (Figura 10.2).

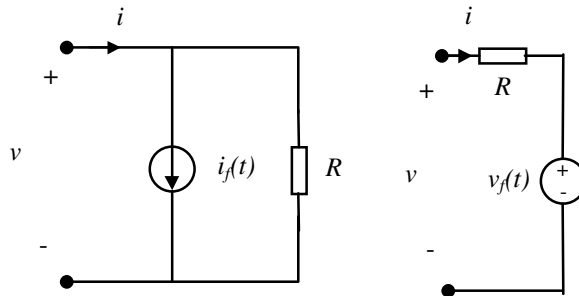


FIGURA 10.2 – Equivalentes de Norton e Thévenin.

Para o equivalente de Thévenin vale

$$v(t) = Ri(t) + v_f(t) .$$

Para o equivalente de Norton vale

$$i(t) = Gv(t) + i_f(t) .$$

No caso de uma classe muito abrangente de circuitos dinâmicos com uma porta de acesso, uma representação na forma de estado pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t], \quad x(0) = x_0 \\ w(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned}$$

onde  $x$  é o vetor de estado,  $f$  é uma função vetorial,  $u$  é a variável tensão  $v$  (ou corrente  $i$ ), e  $w$  é a corrente  $i$  (ou tensão  $v$ ). Para o caso de circuitos lineares invariantes no tempo (exceto as fontes independentes, que podem ser variantes no tempo), esta equação de estado será do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u(t) + B_2u_f(t), \quad x(0) = x_0 \\ w(t) &= Cx(t) + D_1u(t) + D_2u_f(t) \end{aligned}$$

onde  $u_f$  representa a contribuição das fontes independentes. Para condições iniciais nulas, uma representação equivalente no domínio  $s$  é:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} W(s) \\ \text{ou} \\ I(s) \end{Bmatrix}}_{\begin{Bmatrix} Z(s) \\ \text{ou} \\ Y(s) \end{Bmatrix}} = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B_1 + D_1]}_{\begin{Bmatrix} I(s) \\ \text{ou} \\ V(s) \end{Bmatrix}} U(s) + \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B_2 + D_2]}_{\begin{Bmatrix} V_f(s) \\ \text{ou} \\ I_f(s) \end{Bmatrix}} U_f(s)$$

$Z(s)$  pode ser vista como uma impedância equivalente do circuito. Alternativamente  $Y(s)$  pode ser vista como uma admitância equivalente do circuito. Essas noções permitem a generalização do conceito de equivalente de Norton e Thévenin para o caso de circuitos lineares dinâmicos, como mostrado na Figura 10.3.

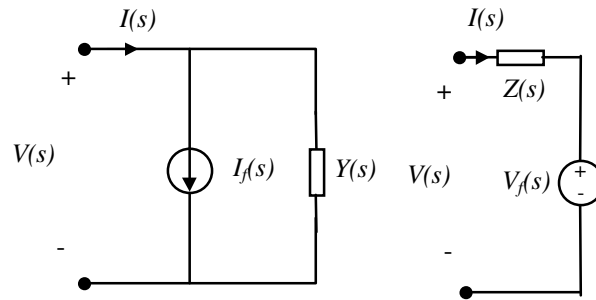


FIGURA 10.3 – Equivalentes generalizados de Norton e Thévenin.

### Circuitos com duas portas de acesso

Circuitos com duas portas de acesso podem ter três ou quatro terminais (Figura 10.4).

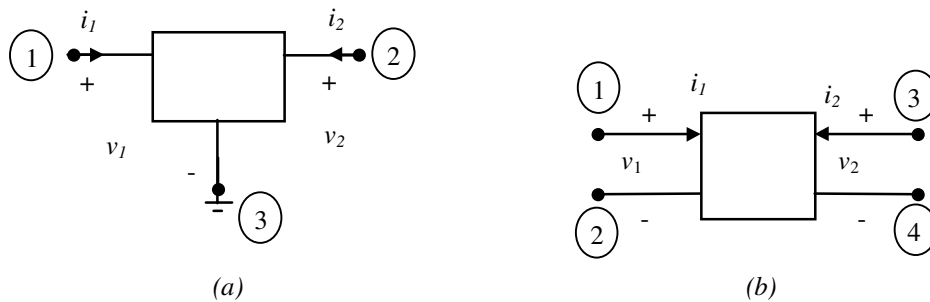


FIGURA 10.4 – Circuitos com duas portas de acesso, com (a) e sem (b) terminal comum.

No caso de circuitos resistivos, a descrição continua sendo do tipo  $f(v, i, t) = 0$ , mas agora com os vetores

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Como no caso de circuitos com apenas uma porta de acesso, muitos circuitos dinâmicos possuem uma representação na forma de estado do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t], & x(0) &= x_0 \\ w(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned}$$

onde  $x$  é o vetor de estado. Nos circuitos com duas portas de acesso, os vetores  $u(t)$  e  $w(t)$  terão dimensão  $2 \times 1$ . Para  $u(t)$  e  $w(t)$  pode-se ter os seguintes casos (além daqueles obtidos por troca das componentes dentro destes vetores):

1.  $w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$
2.  $w = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
3.  $w = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
4.  $w = \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

$$5. \quad w = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad w = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Para o caso de circuitos lineares invariantes no tempo (exceto as fontes independentes, que podem ser variantes no tempo), a equação de estado é:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t) + B_2u_f(t), \quad x(0) = x_0$$

$$w(t) = Cx(t) + D_1u(t) + D_2u_f(t)$$

onde  $u_f$  representa a contribuição das fontes independentes do circuito. As possibilidades para as componentes dos vetores  $u(t)$  e  $w(t)$  são aquelas discutidas acima. Para condições iniciais nulas, uma representação equivalente no domínio  $s$  é:

$$W(s) = [C(sI - A)^{-1} B_1 + D_1]U(s) + [C(sI - A)^{-1} B_2 + D_2]U_f(s)$$

Se para um circuito linear específico tivermos uma representação controlada por corrente, isto é

$$w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v, \quad u = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = i,$$

então vale

$$W(s) = V(s) = [C(sI - A)^{-1} B_1 + D_1]I(s) + [C(sI - A)^{-1} B_2 + D_2]U_f(s) = Z(s)I(s) + V_{aberto}(s)$$

$$V(s) = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} I(s) + \begin{bmatrix} V_{aberto1}(s) \\ V_{aberto2}(s) \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

Com base na expressão (10.1), pode-se desenhar o diagrama do circuito equivalente da Figura 10.5 usando os elementos da matriz  $Z(s)$ , que também é denominada *matriz de impedância* do circuito.

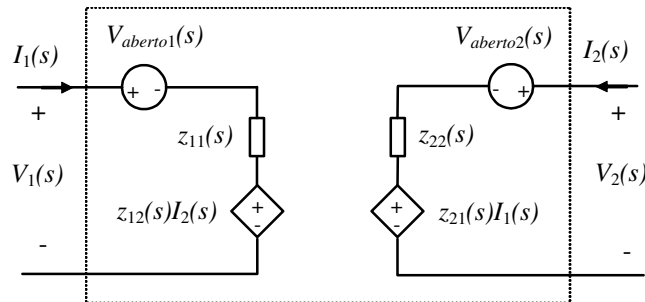


FIGURA 10.5 – Circuito equivalente para circuitos controlados por corrente.

De forma análoga para um circuito linear específico com representação controlada por tensão

$$w = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$W(s) = I(s) = [C(sI - A)^{-1} B_1 + D_1]V(s) + [C(sI - A)^{-1} B_2 + D_2]U_f(s) = Y(s)V(s) + I_{curto}(s)$$

$$I(s) = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} V(s) + \begin{bmatrix} I_{curto1}(s) \\ I_{curto2}(s) \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Com base na expressão (10.2), pode-se desenhar o diagrama de um circuito equivalente usando os elementos

da matriz  $Y(s)$ , também denominada *matriz de admitância* do circuito.

No caso da representação controlada por corrente e quando  $V_{aberto1}(s)$  e  $V_{aberto2}(s)$  forem nulos, as impedâncias  $z_{11}(s)$ ,  $z_{12}(s)$ ,  $z_{21}(s)$  e  $z_{22}(s)$  podem ser interpretadas como impedâncias de circuito aberto, pois

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{12}(s) = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad z_{21}(s) = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{22}(s) = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} .$$

$z_{11}(s)$ ,  $z_{22}(s)$  são denominadas *impedâncias das portas* e  $z_{12}(s)$ ,  $z_{21}(s)$  são *denominadas impedâncias de transferência*. No caso da representação controlada por tensão, existe uma interpretação semelhante para as admitâncias (de curto circuito).

Além das representações controladas por corrente ou tensão nas quais se trabalha com matrizes de impedância ou admitância respectivamente, existem as formas híbridas e de transmissão caracterizadas pelas matrizes  $H(s)$ ,  $H'(s)$  e  $T(s)$ ,  $T'(s)$  respectivamente, definidas abaixo para o caso  $U_f = 0$ .

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11}(s) & h'_{12}(s) \\ h'_{21}(s) & h'_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}(s) & t_{12}(s) \\ t_{21}(s) & t_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t'_{11}(s) & t'_{12}(s) \\ t'_{21}(s) & t'_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix}$$

A conversão de uma representação na outra nem sempre é possível. Por exemplo a conversão  $T(s) = T^{-1}(s)$  só é possível se  $\det[T'(s)]$  não for identicamente nulo. O caso do transformador ideal ilustra o fato de que, às vezes, algumas representações das listadas acima inexistem para um dado circuito.

*Exemplo:* Verificaremos que circuitos com duas portas de acesso, controlados por corrente e com terminação em uma das portas, possuem a mesma descrição de circuitos com uma porta de acesso. Para tal, considere o circuito da Figura 10.6.

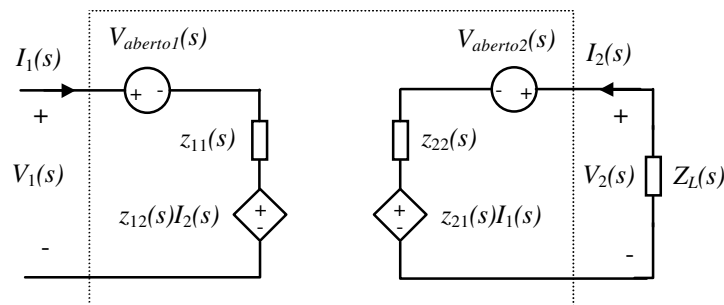


FIGURA 10.6 – Circuito controlado por corrente com terminação na porta 2.

Os dados do problema são:

$$V_2(s) = -Z_L(s)I_2(s)$$

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{aberto1}(s) \\ V_{aberto2}(s) \end{bmatrix}$$

Substituindo a primeira expressão na segunda obtém-se:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ -Z_L(s)I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{aberto_1}(s) \\ V_{aberto_2}(s) \end{bmatrix}$$

$$I_2(s) = [-Z_L(s) - z_{22}(s)]^{-1} [z_{21}(s)I_1(s) + V_{aberto_2}(s)]$$

E finalmente

$$V_1(s) = \left\{ z_{11}(s) - z_{12}(s)[Z_L(s) + z_{22}(s)]^{-1} z_{21}(s) \right\} I_1(s) - z_{12}(s)[Z_L(s) + z_{22}(s)]^{-1} V_{aberto_2}(s) + V_{aberto_1}(s)$$

que é a descrição de um circuito com uma porta de acesso controlado por corrente.

---

## Circuitos com múltiplas portas de acesso

A generalização dos conceitos expostos acima para circuitos com mais portas de acesso é simples. Suponhamos inicialmente que para o circuito em estudo exista uma representação na forma de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t], \quad x(0) = x_0 \\ w(t) &= g[x(t), u(t), t] \end{aligned}$$

onde  $x$  é o vetor de estado. Os vetores  $u(t)$  e  $w(t)$  terão dimensão  $m \times 1$ , onde  $m$  é o número de portas. Nesses vetores estarão distribuídas as tensões e correntes nas portas.

Para circuitos dinâmicos lineares, uma representação controlada por corrente continuará tendo o formato

$$V(s) = Z(s)I(s) + V_{aberto}(s),$$

e uma representação controlada por tensão continuará tendo a forma

$$I(s) = Y(s)V(s) + I_{curto}(s).$$

A dimensão das matrizes de impedância e admitância será  $m \times m$ .

## Reciprocidade

### Definição

Um circuito de duas portas recíproco é um circuito que contém exclusivamente elementos de dois terminais lineares invariantes no tempo (resistores, capacitores e indutores lineares), indutores acoplados e transformadores ideais.

### Observação

Fontes e giradores são exemplos de elementos de circuitos não admitidos num circuito recíproco.

### Teorema da reciprocidade

Para um circuito recíproco e cada representação associada (existente) vale:

$$\begin{aligned} z_{21}(s) &= z_{12}(s) \\ y_{21}(s) &= y_{12}(s) \\ h_{21}(s) &= -h_{12}(s) \\ h'_{21}(s) &= -h'_{12}(s) \end{aligned}$$

### Observações

- 1) Para circuitos compostos apenas por resistores lineares invariantes no tempo, o teorema da reciprocidade vale também no domínio do tempo.
- 2) Para circuitos recíprocos  $\det(T) = \det(T') = 1$ .

*Exemplo:* O teorema da reciprocidade pode simplificar o equacionamento de circuitos. Para um exemplo ilustrativo considere-se o circuito recíproco da Figura 10.7.

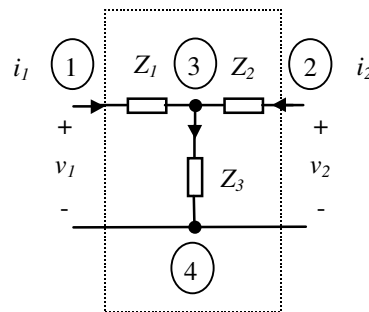


FIGURA 10.7 – Exemplo de circuito linear recíproco.

Neste caso, a lei de Kirchhoff das tensões na formulação nodal resulta nas equações:

$$\begin{aligned} V_1(s) - Z_1(s)I_1(s) - Z_3(s)[I_1(s) + I_2(s)] &= 0 \\ V_2(s) - Z_2(s)I_2(s) - Z_3(s)[I_1(s) + I_2(s)] &= 0 \end{aligned}$$

das quais obtém-se a descrição controlada por corrente:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(s) + Z_3(s) & Z_3(s) \\ Z_3(s) & Z_2(s) + Z_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V(s) = Z(s)I(s)$$

O mesmo resultado pode ser obtido por inspeção usando-se o teorema da reciprocidade e a interpretação dos elementos da matriz de impedância  $Z(s)$ :

$$\begin{aligned} z_{11}(s) &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1(s) + Z_3(s) & z_{12}(s) &= \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_3(s) = z_{21}(s) \\ z_{22}(s) &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2(s) + Z_3(s). \end{aligned}$$

Já para o circuito da Figura 10.8, o equacionamento usando a lei de Kirchhoff das tensões na formulação nodal é análogo, mas o equacionamento por inspeção é (conceitualmente) diferente, pois o circuito não é recíproco.

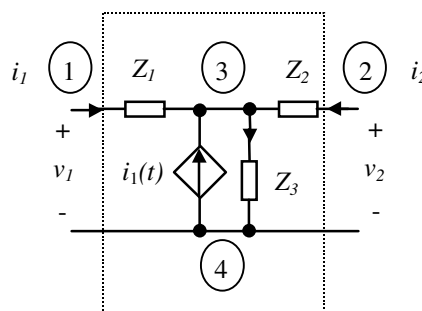


FIGURA 10.8 – Exemplo de circuito linear não-recíproco.

Usando a lei de Kirchhoff das tensões na formulação nodal resulta

$$\begin{aligned} V_1(s) - Z_1(s)I_1(s) - Z_3(s)[2I_1(s) + I_2(s)] &= 0 \\ V_2(s) - Z_2(s)I_2(s) - Z_3(s)[2I_1(s) + I_2(s)] &= 0 \end{aligned}$$

Destas equações obtém-se uma descrição controlada por corrente (claramente não recíproca):



$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1(s) + 2Z_3(s) & Z_3(s) \\ 2Z_3(s) & Z_2(s) + Z_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V(s) = Z(s)I(s)$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente por inspeção usando-se a interpretação para os elementos da matriz de impedâncias, mas o teorema da reciprocidade não pode ser aplicado:

$$z_{11}(s) = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_1(s) + 2Z_3(s) \quad z_{12}(s) = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_3(s) \neq z_{21}(s) = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$z_{21}(s) = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = 2Z_3(s) \quad z_{22}(s) = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_2(s) + Z_3(s).$$

### Exercícios propostos

#### Exercício 1:

Determine os equivalentes generalizados de Norton e de Thévenin para os circuitos da Figura 10.9.

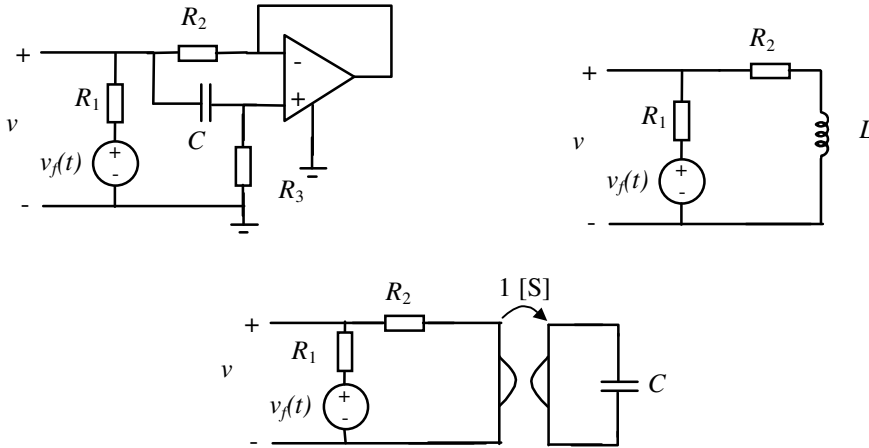


FIGURA 10.9

#### Exercício 2:

Determine as representações possíveis para os circuitos das Figuras 10.10 e 10.11. Quais destes circuitos são recíprocos?

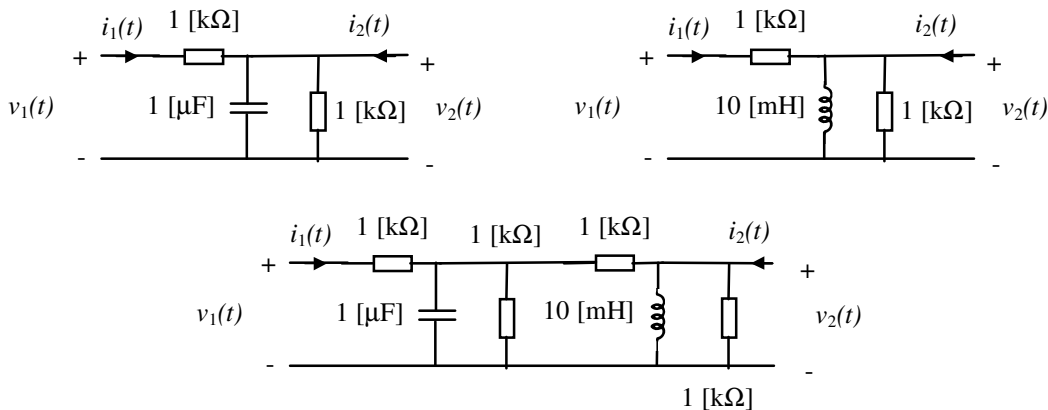


FIGURA 10.10

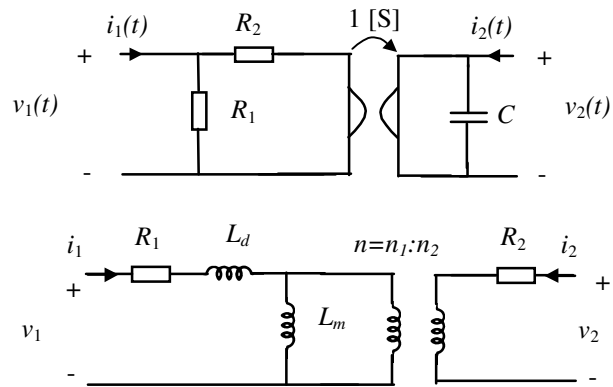


FIGURA 10.11

**Exercício 3:**

Determine as representações possíveis para os circuitos das Figuras 10.10 e 10.11 ligados em paralelo, dois a dois, conforme diagrama da Figura 10.12. Quais destas interconexões são circuitos recíprocos?

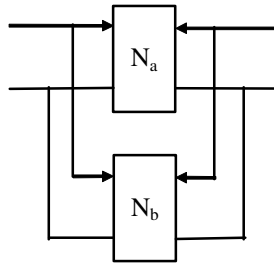


FIGURA 10.11

## Apêndice A – Frações parciais

---

Uma função racional

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

com grau do denominador maior do que o grau do numerador pode ser expandida em frações parciais na forma

$$G(s) = \frac{a_1}{s - r_1} + \dots + \frac{a_N}{s - r_N} \quad (\text{A.1})$$

quando as raízes  $r_1, \dots, r_N$  de  $d(s)$  forem simples, e na forma

$$G(s) = \frac{a_1}{s - r_1} + \frac{a_2}{(s - r_1)^2} + \dots + \frac{a_p}{(s - r_1)^p} + \frac{a_{p+1}}{s - r_{p+1}} + \dots + \frac{a_N}{s - r_N} \quad (\text{A.2})$$

quando a primeira raiz,  $r_1$ , de  $d(s)$  tiver multiplicidade  $p$  (com as demais raízes simples).

Os coeficientes  $a_j$  são denominados resíduos. O coeficiente  $a_j$  do  $j$ -ésimo termo em (A.1) ou em (A.2) relativo a uma raiz simples de  $d(s)$  pode ser calculado por

$$a_j = \left[ (s - r_j) \frac{n(s)}{d(s)} \right]_{s=r_j}.$$

Para as raízes múltiplas de  $d(s)$ , os coeficientes dos primeiros  $p$  termos em (A.2) valem

$$a_j = \frac{1}{(p - j)!} \left\{ \frac{d^{p-j}}{ds^{p-j}} \left[ (s - r_1)^p \frac{n(s)}{d(s)} \right] \right\}_{s=r_j}, \quad j = 1, \dots, p$$

Alternativamente todos os coeficientes podem ser encontrados reescrevendo-se a expressão expandida em frações parciais, usando o denominador comum e comparando-se os coeficientes do numerador com os coeficientes de  $n(s)$ .

## Apêndice B – Fator de mérito

Um conceito bastante tradicional em circuitos é o de fator de mérito definido no contexto da resposta de circuitos a sinais senoidais (com condições iniciais nulas). A fator de mérito  $Q$  de um circuito com elementos reativos é (por definição) o múltiplo  $2\pi$  da razão entre a máxima energia armazenada pelo circuito,  $W_{max}$ , e a energia  $W_d$  por ele dissipada num ciclo do sinal.

$$Q = 2\pi \frac{W_{max}}{W_d}$$

O fator de mérito é muitas vezes também chamado de fator de qualidade.

### Circuito RL série

Seja  $I = I_m e^{j\omega t}$  o fasor corrente de frequência  $\omega$  [rd/s] num circuito RL série (Figura B.1).

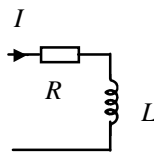


FIGURA B.1 – Circuito RL série.

A energia dissipada num ciclo vale

$$W_d = \frac{2\pi}{\omega} I_{eficaz}^2 R = \frac{\pi I_m^2}{\omega} R.$$

A máxima energia armazenada será

$$W_{max} = \frac{1}{2} L I_m^2.$$

Portanto,

$$Q = 2\pi \frac{W_{max}}{W_d} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{\frac{\pi I_m^2}{\omega} R} = \frac{\omega L}{R}.$$

### Circuito RC série

Sejam  $V_C = V_{Cm} e^{j\omega t}$  e  $I = I_m e^{j\omega t}$  os fasores de tensão e corrente de frequência  $\omega$  [rd/s] no circuito RC série da Figura B.2.

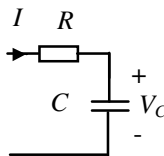


FIGURA B.2 – Circuito RC série.

A energia dissipada num ciclo vale

$$W_d = \frac{2\pi}{\omega} I_{eficaz}^2 R = \frac{\pi I_m^2}{\omega} R.$$

A máxima energia armazenada será

$$W_{max} = \frac{1}{2} C V_{Cm}^2 = \frac{1}{2\omega^2} C I_m^2.$$

Portanto,

$$Q = 2\pi \frac{W_{max}}{W_d} = 2\pi \frac{\frac{1}{2\omega^2} CI_m^2}{\frac{\pi I_m^2}{\omega} R} = \frac{1}{\omega RC}.$$

### Circuito RLC série

O diagrama do circuito RLC série para o qual será determinado o fator de mérito encontra-se na Figura B.3.

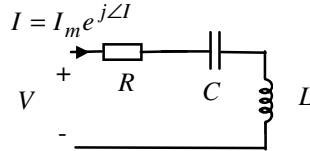


FIGURA B.3 – Circuito RLC série.

A relação entre tensão e corrente vale

$$V(s) = (sL + \frac{1}{sC} + R)I(s).$$

Em regime permanente senoidal ( $s = j\omega$ ) valerá, portanto

$$V = (j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R)I.$$

Quando o circuito da Figura B.3 estiver conectado a uma fonte de tensão senoidal, o módulo do fasor de corrente terá um máximo em frequência para  $\omega = \omega_0$ . Essa frequência é chamada de *frequência de ressonância*. Nesta frequência

$$j\omega_0 L = -\frac{1}{j\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Na frequência de ressonância, a energia armazenada será igual a

$$W_{max} = \frac{1}{2} LI_m^2 = \frac{1}{2\omega_0^2} CI_m^2.$$

Portanto,

$$Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2\omega_0^2} CI_m^2}{\frac{\pi I_m^2}{\omega_0} R} = \frac{1}{\omega_0 RC}, \text{ ou ainda } Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2} LI_m^2}{\frac{\pi I_m^2}{\omega_0} R} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

A quantidade  $Q_0$  tem relação direta com a resposta em frequência. Para verificar isso, vamos determinar as frequências à direita e à esquerda de  $\omega_0$ , nas quais a potência média dissipada  $I_{eficaz}^2 R$  cai à metade do seu valor máximo (que ocorre em  $\omega_0$ ). Estes são chamados de *pontos de meia potência*. Nessas frequências, o módulo do fasor corrente cai a  $(1/\sqrt{2})$  vezes seu valor máximo. Para tais frequências tem-se

$$\left| j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right| = \left| \omega L - \frac{1}{\omega C} \right| = R,$$

com as duas possibilidades

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R \quad \text{e} \quad \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R.$$

Daí calcula-se

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}.$$

Como  $\omega_2 - \omega_1 = R/L$  conclui-se que

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

### Circuito RLC paralelo

O diagrama do circuito RLC paralelo para o qual será determinado o fator de mérito encontra-se na Figura B.4.

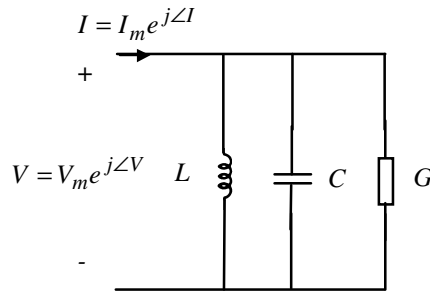


FIGURA B.4 – Circuito RLC paralelo.

A relação entre corrente e tensão vale

$$I(s) = (sC + \frac{1}{sL} + G)V(s).$$

Em regime permanente senoidal ( $s = j\omega$ ) valerá, portanto

$$I = (j\omega C + \frac{1}{j\omega L} + G)V$$

Quando o circuito da Figura B.4 estiver conectado e uma fonte de corrente senoidal, o módulo do fasor de tensão terá um máximo em frequência para  $\omega = \omega_0$ . Esta é a frequência de ressonância. Nessa frequência

$$j\omega_0 C = \frac{1}{j\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Na frequência de ressonância, a energia armazenada será igual a

$$W_{max} = \frac{1}{2} CV_m^2 = \frac{1}{2\omega_0^2 L} V_m^2.$$

A energia dissipada num ciclo vale, em termos de  $V_m$

$$W_d = \frac{2\pi}{\omega_0} V_{eficaz}^2 G = \frac{\pi V_m^2}{\omega_0} G$$

Portanto,

$$Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2} CV_m^2}{\frac{\pi V_m^2}{\omega_0} G} = \frac{\omega_0 C}{G}, \quad \text{ou ainda} \quad Q_0 = 2\pi \frac{\frac{1}{2\omega_0^2 L} V_m^2}{\frac{\pi V_m^2}{\omega_0} G} = \frac{1}{\omega_0 LG}$$

Também neste caso a quantidade  $Q_0$  tem relação direta com a resposta em frequência. Para verificar isso, vamos determinar as frequências à direita e à esquerda de  $\omega_0$  nas quais a potência média dissipada  $V_{eficaz}^2 G$  cai à metade do seu valor máximo (que ocorre em  $\omega_0$ ). Nessas frequências, o módulo do fasor tensão cai a  $(1/\sqrt{2})$  vezes seu valor máximo. Para tais frequências tem-se

$$\left| j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \right| = \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right| = G,$$

com as duas possibilidades

$$\frac{1}{\omega_1 L} - \omega_1 C = G \quad \text{e} \quad \omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = G.$$

Daí calcula-se

$$\omega_1 = \frac{-LG + \sqrt{(LG)^2 + 4LC}}{2LC} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{LG + \sqrt{(LG)^2 + 4LC}}{2LC}.$$

Como  $\omega_2 - \omega_1 = G/C$  conclui-se que

$$Q_0 = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

### Parametrização $Q, \omega_0$

No caso do circuito RLC série (Figura A.3), a função de transferência de  $v(t)$  para  $i(t)$  é

$$G_s(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{(sL + \frac{1}{sC} + R)} = \left( \frac{1}{L} \right) \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \left( \frac{1}{L} \right) \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}$$

No caso do circuito RLC paralelo (Figura A.4) a função de transferência de  $i(t)$  para  $v(t)$  é

$$G_p(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{(sC + \frac{1}{sL} + G)} = \left( \frac{1}{C} \right) \frac{s}{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}} = \left( \frac{1}{C} \right) \frac{s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q_0}s + \omega_0^2}$$

Em ambos os casos, as quantidades  $Q_0$  e  $\omega_0$  podem ser entendidas como parâmetros da família dos circuitos RLC série ou paralelo. Esses parâmetros relacionam-se diretamente com os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  usados no estudo de circuitos dinâmicos no Capítulo 6. As expressões que definem  $\alpha$  e  $\beta$  em função de  $Q_0$  e  $\omega_0^2$  são obtidas por inspeção

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}, \quad \beta = \omega_0^2.$$

Estendendo o conceito, pode-se utilizar uma parametrização  $(Q_0, \omega_0)$  para denominadores de funções de transferência de circuitos de segunda ordem em geral. Porém, neste caso, existem algumas diferenças importantes entre a parametrização  $(Q_0, \omega_0)$  e a parametrização  $(\alpha, \beta)$ . Na parametrização  $(\alpha, \beta)$  não se estabeleceu restrição sobre o sinal dos parâmetros. Na parametrização  $(Q_0, \omega_0)$ , casos com  $\alpha$  e  $\beta$  negativos (portanto,  $Q_0$  e  $\omega_0^2$  negativos) não fazem sentido, pois a parametrização  $(Q_0, \omega_0)$  está vinculada a uma interpretação física do fator de mérito e da frequência de ressonância. Esta interpretação demanda valores positivos para  $Q_0$  e  $\omega_0^2$ . Do ponto de vista de estudo do comportamento de um circuito de segunda ordem no tempo e no plano de fase, a parametrização  $(\alpha, \beta)$  leva vantagem, em razão da relação mais simples dos parâmetros com as raízes do denominador da função de transferência, que são as quantidades que determinam o comportamento do circuito.

## Referências

---

- BURIAN, Y.; LYRA, A. C. C. *Circuitos elétricos*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- CHUA, L. O.; DESOER, C. A.; KUH, E. S. *Linear and nonlinear circuits*. New York: McGraw-Hill, 1987.
- DESOER, C. A.; KUH, E. S. *Teoria básica de circuitos*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.
- DICKINSON, B. W. *Systems: analysis, design and computation*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1991.
- DORF, R. C. (Ed.). *The electrical engineering handbook*. Boca Raton: CRC Press: IEEE Press, 1993.
- GOTTLING, J. G. *Matrix analysis of circuits using MATLAB®*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1995.
- HAYT, W. H. et al. *Análise de circuitos em engenharia*. 7ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
- LATHI, B. P. *Sinais e sistemas lineares*. 2ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.
- LEVINE, W. S. (Ed.) *The control handbook*. Boca Raton: CRC Press: IEEE Press, 1996.
- MILLMAN, J.; HALKIAS, C. *Eletrônica: dispositivos e circuitos*. São Paulo: McGraw-Hill, 1981. 2v.
- RASHID, M. H. *SPICE for circuits and electronics using PSpice®*. 2ª ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.
- WIEGERINK, R. J. *Analysis and synthesis of MOS translinear circuits*. Boston: Kluwer, 1993.
- ZWILLINGER, D. (Ed.). *Standard mathematical tables and formulae*. 30ª ed. Boca Raton: CRC Press, 1996.



## Índice remissivo

---

- Admitância, 89
- Amplificador operacional, 42
  - configuração inversora, 43, 45
  - configuração não-inversora, 44
  - região não linear, 48
- Amplificador diferencial, 47
- Análise
  - AC, 21-22
  - DC, 20
  - nodal, 70
  - nodal modificada, 71
  - pequenos sinais, 21, 77
- Capacitor
  - controlado por carga, 53
  - controlado por tensão, 53
  - linear, 1, 2, 52
  - não linear, 53
- Característica
  - bilateral, 11
  - de transferência, 24
  - dual, 11
- Cargas trifásicas, 116
  - desbalanceadas, 120
  - ligação estrela (ou Y), 116
  - ligação delta (ou triângulo), 117
- Circuito
  - biestável, 61
  - com várias portas de acesso, 128
  - concentrado, 3
  - de primeira ordem, 52
  - de segunda ordem, 66, 136
  - dinâmico, 52
  - distribuído, 3
  - equivalente, 17, 31, 126
  - RC, 133
  - RL, 133
  - RLC, 72, 134, 135
  - trifásico, 115
- Circulador, 37
- Código de cores, 1
- Condutância, 11
- Conversão triângulo-estrela (ou delta-Y), 118
- Corrente, 1
  - de fase, 117
  - de linha, 117
- Critério de Nyquist, 102
- Diagrama de Bode, 91
- Diodo, 13
- Dispositivo de circuito, 1
- Elemento de circuito, 2
  - reativo, 52
- Equação de estado, 72
  - solução, 73, 90
- Equivalente
  - de Thévenin, 17, 124, 125
  - de Norton, 17, 124, 125
- Estabilidade, 63, 75
- Fasor, 111
- Fator de potência, 112
  - correção, 119
- Fator de qualidade (Q), 133
- Fontes
  - controladas, 30
  - não controladas, 14
- Frações parciais, 132
- Função de transferência, 87
- Ganho, 23
- Girador, 33, 46
- Grafo, 5
- Lei de Ohm, 11
- Leis de Kirchhoff, 3
  - notação matricial, 7

- Impedância, 89
- Indutor
  - acoplado, 66
  - controlado por fluxo, 53
  - controlado por corrente, 53
  - eletrônico, 54
  - linear, 2, 52
  - não linear, 53
- Método geral de análise, 68, 86
- Neutro, 116
- Nó, 2
- Oscilador
  - de primeira ordem, 62
  - relaxação, 62
  - de segunda ordem, 80
- Plano de fase, 74-76
- Polinômio característico, 74, 81, 96
- Pontos
  - de equilíbrio, 63, 74, 77
  - de operação, 20, 77
- Porta, 17
- Potência, 6
  - aparente, 113
  - ativa, 113
  - complexa, 113
  - em regime permanente senoidal, 112
  - em circuitos trifásicos, 117
  - otimização da transferência, 114
  - reativa, 113
- Princípio do argumento, 102
- Princípio translinear MOS, 35
- Reciprocidade, 128
- Regime permanente senoidal, 91, 111
- Resistência, 11
- Resistor
  - ativo, 12
  - com duas portas, 28
  - côncavos, 18
  - controlado por corrente, 11
  - controlado por tensão, 11
  - convexos, 18
  - linear, 1, 2
  - não linear, 11
  - multiportas, 36
  - passivo, 12
- Resposta em frequência, 91-98
- Ressonância, 134-135
- Substituição, 74
- Superposição, 73
- Tableau (veja método geral de análise)
- Tensão, 1
  - de fase, 116
  - de linha, 116
- Teorema de Tellegen, 9
- Terminal, 2
- Terra virtual, 43
- Transformada de Laplace, 85
- Transformador ideal, 32, 37
- Transformador não ideal, 66
- Transistor MOS, 33
- Trifásico, 115
- Valor eficaz, 112