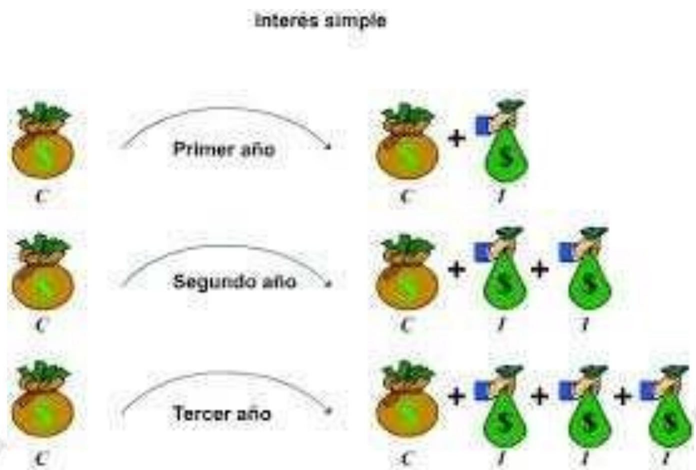
FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES Y ECONÓMICAS

Matemática Financiera: Teoría y ejercicios

Carlos Bresani
Alan Burns
Pablo Escalante
Giancarlo Medroa

2018-1

1 INTERES SIMPLE



1.1 Concepto de Interés Simple

El interés simple se refiere a los intereses que produce un capital inicial en un período de tiempo, el cual no se acumula al capital para producir los intereses del siguiente período; concluyéndose que el interés simple generado o pagado por el capital invertido o prestado será igual en todos los períodos de la inversión o préstamo mientras la tasa de interés y el plazo no cambien.

1.2 Características del Interés Simple

a. Los intereses no se capitalizan
b. Los intereses son directamente proporcionales al plazo, al capital invertido y a la tasa de interés.
c. La tasa de interés simple se puede dividir o multiplicar por algún factor numérico para cambiarle el periodo de tiempo, con la finalidad que la tasa de interés y el plazo estén siempre expresados en la misma unidad de tiempo.
   Por ejemplo, si deseamos convertir una tasa de interés simple anual del 12% a una tasa simple mensual la dividiremos entre 12, que es el número de meses que tiene un año.

$$\mathrm{i}_{\mathrm{mencuaS}} = \frac{\mathrm{i}_{\mathrm{anuaS}}}{12} = 1\%$$

   Y si queremos convertir una tasa de interés simple mensual del 1% a una tasa simple trimestral la multiplicaremos por 3, que es el número de meses que tiene un trimestre.

$$\mathrm{i}_{\mathrm{trimectraS}} = \mathrm{i}_{\mathrm{mencuaS}} * 3 = 3\%$$

1.3 Elementos del Interés Simple

- C: Capital o Principal o Valor Presente o Valor Actual.
- n: Plazo pactado para la inversión en días, meses, trimestres etc.
- i: Tasa de Interés expresada en % y está referida a un periodo de tiempo que puede ser diario, mensual, trimestral etc.
- I: Interés o ganancia producida por un capital durante un periodo de tiempo.
- S: Monto o Valor Futuro o Valor Nominal. Se obtiene al sumar los intereses al capital.

1.4 Fórmulas del Interés Simple

Para determinar el interés, lo definiremos como el producto del capital (C), el plazo (n) y la tasa de interés (i).

$$\mathrm{I} = \mathrm{Cni}$$

Para determinar el monto, lo definiremos como la suma del capital (C) más los intereses (I) generados en un periodo de tiempo determinado.

$$\mathrm{S} = \mathrm{C} + \mathrm{I}$$

De igual modo el monto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$\mathrm{S} = \mathrm{C} + \mathrm{I}$$

$$\mathrm{S} = \mathrm{C} + \mathrm{Cni}$$

Factorizando:

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}\,(1 + \mathrm{ni})$$

Para determinar el capital o valor presente (C), lo podemos hallar de la siguiente manera:

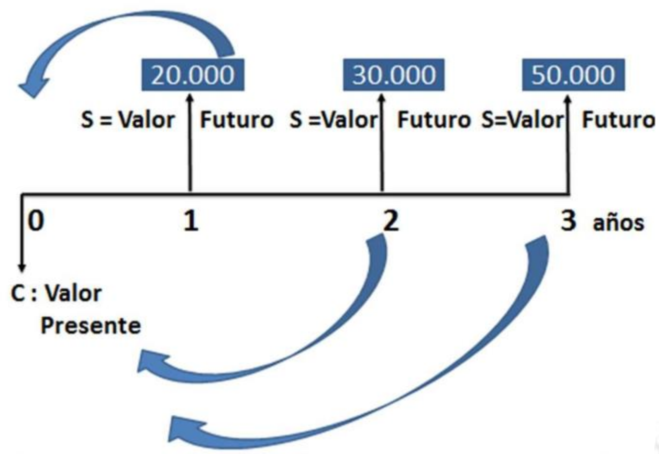
$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}}{1 + \mathrm{ni}} \quad \text{ó} \quad \mathrm{C} = \mathrm{S}(1 + \mathrm{ni})^{-1}$$

1.5 Ecuación de Valor Equivalente

Una Ecuación de Valor Equivalente es la igualdad de dos conjuntos de obligaciones en una fecha determinada, la cual se le llama fecha focal.
En el interés simple, el resultado que se obtenga de la ecuación de valor variará dependiendo de la fecha focal que se seleccione.

1.6 Línea de Tiempo o Diagrama de Flujos

Consiste en elaborar una línea para representar los flujos de dinero o flujo de caja en una escala de tiempo para facilitar la comprensión del problema.



1.6.1 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Se coloca un capital de S/. 30,000 en una cuenta a un plazo fijo de 6 meses con una tasa del 1% anual de interés simple. ¿Cuál es el interés?

   C = 30,000
   n = 6 meses
   i = 0.01 anual que se convierte a 0.01/12 mensual

$$\mathrm{I} = \mathrm{Cni} = 30{,}000 * 6 * \left(\frac{0.01}{12}\right) = 150$$

2. Un Banco le otorgó un préstamo por S/. 42,000 y usted deberá cancelarlo dentro de 5 meses al 12% anual de interés simple. ¿Cuánto deberá pagarle al Banco en la fecha de cancelación?

   C = 42,000
   n = 5 meses
   i = 0.12 anual que se convierte a 0.12/12 mensual

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}\,(1 + \mathrm{ni}) = 42{,}000\left[1 + 5 * \left(\frac{0.12}{12}\right)\right] = 44{,}100$$

3. Usted invirtió una cierta cantidad de dinero en un Banco que al cabo de 6 meses le permitió acumular la suma de S/. 2,862.28. La tasa pactada fue un 15% anual de interés simple. ¿Cuánto invirtió usted?

   C = ¿?

S = 2,862.28
n = 6 meses
i = 0.15 anual que se convierte a 0.15/12 mensual

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}}{1+\mathrm{ni}} = \frac{2{,}862.28}{1 + 6 \times (\frac{0.15}{12})} = 2{,}662.59$$

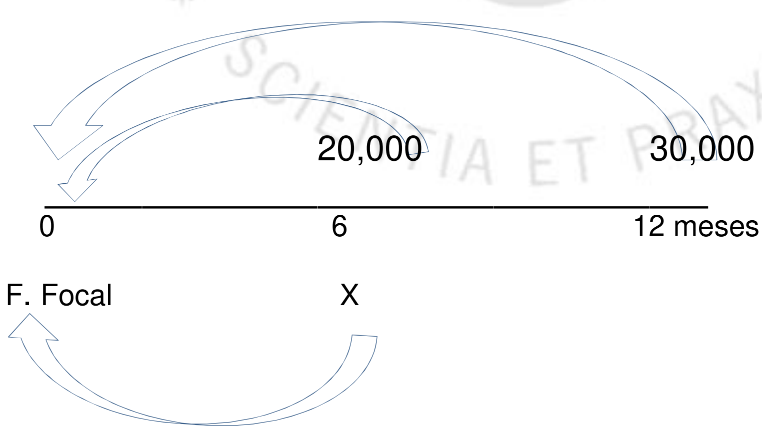
4. El 20 de marzo se abrió una cuenta con S/. 80,000 en un Banco que pagaba el 18% anual de interés simple. Se requiere conocer el interés que generó dicho capital hasta el 15 de abril del mismo año, fecha en que se canceló la operación.

   No. de días a considerar:
   Marzo: 31- 20 =11
   Abril: 15
   Total: 26 días

   C = 80,000
   n = 26 días
   i = 0.18 anual que se convierte a 0.18/360 diario

$$\mathrm{I} = \mathrm{Cni} = 80{,}000 * 26 * (\frac{0.18}{360}) = 1{,}040$$

5. Usted tiene 2 obligaciones que vencerán dentro de 6 meses y un año y cuyos montos son de S/. 20,000 y S/. 30,000 respectivamente, pero le solicita al Banco sustituir dichas obligaciones por una nueva obligación a ser pagada a los 6 meses. Si se establece como fecha focal el día de hoy y la tasa es 30% anual de interés simple. ¿Cuál es el valor de dicho pago único?



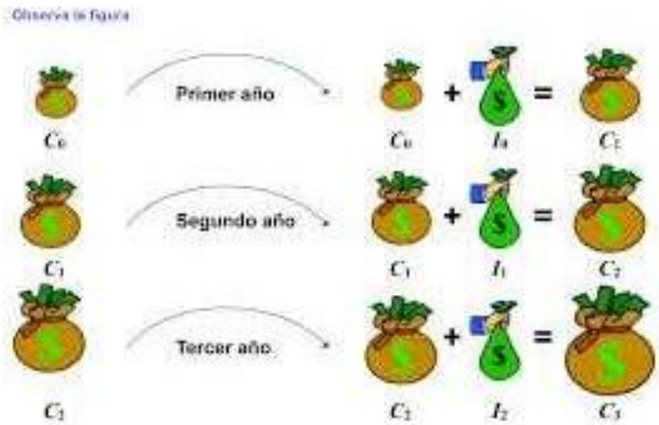
Aplicando fórmula de valor presente: $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}}{1+\mathrm{ni}}$

$$\frac{X}{1+6*(\frac{0.30}{12})}=\frac{20{,}000}{1+6*(\frac{0.30}{12})}+\frac{30{,}000}{1+12*(\frac{0.30}{12})}$$

$$0.869565\ X = 17{,}391.30435 + 23{,}076.92308$$

$$X \ = 46{,}538.47$$

2 INTERES COMPUESTO



2.1 Concepto de Interés Compuesto

Es la ganancia de dinero que se genera en una unidad de tiempo y se capitaliza, o sea, se incorpora al capital inicial de dicha unidad de tiempo, formando un nuevo capital para la siguiente unidad de tiempo y así sucesivamente durante el plazo pactado con la entidad financiera o empresa.

2.2 Características del Interés Compuesto

a. Los intereses se integran o adicionan sucesivamente al capital invertido inmediato anterior de cada período de capitalización.
b. Los intereses ganan intereses en todos los períodos que siguen al de su capitalización.
c. El capital impuesto cambia automáticamente al finalizar cada período de capitalización al adicionarse los intereses correspondientes.

2.3 Elementos del Interés Compuesto

- S: Monto. Se denomina también Valor Futuro o Valor Nominal. Se obtiene al sumar los intereses al capital.
- C: Capital inicial del aporte del dinero colocado. Se llama también Valor Presente o Valor Actual.
- n: Plazo de la operación o más propiamente número de capitalizaciones.
- i: Tasa de Interés efectiva o Tasa de Interés Compuesto por periodo de capitalización, expresada en % y está referida a un periodo de tiempo que puede ser diario, mensual, trimestral etc.

Téngase presente que los elementos i y n deben estar uniformados en su denominación y sujetos al régimen que indique la tasa i; vale decir, si ésta es anual, n tiene que ser años etc.

2.4 Tasa de Interés Compuesto

La tasa de interés compuesto, se compone de dos partes:

La primera parte “j” se denomina tasa nominal y se expresa en % referido a un período de tiempo. Ejemplo: 19 % nominal anual ($j = 19\%$ TNA).

La segunda parte es la frecuencia de capitalización “m” que indica el número de veces que se pueden capitalizar los intereses en el período de referencia de la tasa nominal. Ejemplo: 24% TNA con capitalización mensual; m = 12; los intereses se pueden capitalizar 12 veces en un año.

2.5 Características de la Tasa de Interés Compuesto

- La tasa de interés compuesto “i” no es fraccionable.
- La tasa de interés compuesto “i” está referida a la unidad de tiempo en que se expresa la frecuencia de capitalización.
- La tasa nominal “ j ” solo se puede dividir entre su frecuencia de capitalización “m” para determinar la tasa efectiva

2.6 Fórmulas del Interés Compuesto

Para determinar el interés (I), lo definiremos como la diferencia del monto (S) con el capital (C).

$$I = S - C$$

Para determinar el monto, lo definiremos como la suma del capital (C) más los intereses (I) generados en un periodo de tiempo determinado.

$$S = C + I$$

De igual modo el monto lo podemos expresar de la siguiente manera:

$$S = C(1 + i)^n$$

Seguidamente, para determinar el capital o valor presente (C), lo podemos hallar de la siguiente manera:

$$C = S(1 + i)^{-n}$$

Para determinar la tasa de interés (i), a partir de una tasa nominal “j” y periodos de capitalización “m” con relación a “j”, lo podemos hallar de la siguiente manera:

$$i = \frac{j}{m}$$

Donde “i” es la tasa efectiva o tasa de interés compuesto por unidad de tiempo, que se emplea en las fórmulas de la matemática financiera. Se expresa en decimal, para efectos de los cálculos financieros.
También se puede calcular así:

$$i = \left(\frac{S}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Para el cálculo del plazo (n) partimos de la siguiente fórmula:

$$S = C(1 + i)^n$$

De donde: $\frac{S}{C} = (1 + i)^n$, luego $\log\left(\frac{S}{C}\right) = n \log(1 + i)$ y finalmente.

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{S}{C}\right)}{\log(1 + i)}\right]$$

2.6.1 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Un pequeño empresario depositó S/. 12,000 en su cuenta de ahorros en un Banco que le pagaba el 3.24% nominal anual con capitalización mensual. Después de 14 meses decide comprar una máquina cuyo precio al contado era de S/. 12,755 ¿Le alcanzará el dinero capitalizado en el Banco?

   $C = 12{,}000; \quad i = \frac{0.0324}{12}(\text{TEM}); \quad n = 14 \text{ meses}$

   $S = C\,(1 + i)^n = 12{,}000\left(1 + \frac{0.0324}{12}\right)^{14} = 12{,}461.64$

   No le alcanza el dinero capitalizado en el Banco para adquirir la máquina.

2. En el problema del ejemplo 1 ¿Cuánto dinero debió depositar el pequeño empresario en el banco para que pueda comprar la máquina sin tener que agregar nada?

   $S = 12{,}755; \quad i = \frac{0.0324}{12}(\text{TEM}); \quad n = 14 \text{ meses}$

   $C = S(1 + i)^{-n} = 12{,}755 * \left(1 + \frac{0.0324}{12}\right)^{-14} = 12{,}282.49$

3. En el problema del ejemplo 1 ¿Cuánto tiempo debieron estar depositados los S/. 12,000 para que con el monto capitalizado pueda comprar la máquina sin tener que agregar nada?

   $S = 12{,}755; \quad C = 12{,}000; \quad i = \frac{0.0324}{12}\text{TEM}$

$$n = \frac{\log\left(\frac{12755}{12000}\right)}{\log\left(1 + \frac{0.0324}{12}\right)} = 22.6293 \text{ meses} = 1 \text{ año}, 10 \text{ meses}, 19 \text{ días}$$

4. En el problema del ejemplo 1 ¿Qué tasa nominal le debió pagar el banco para que los S/. 12,000 en los 14 meses hubiese capitalizado los S/. 12,755 para comprar la máquina sin tener que agregar nada?

   $S = 12{,}755; \quad C = 12{,}000; \quad n = 14 \text{ meses}$

   Se pide la tasa nominal anual "j". Primero calcularemos la tasa efectiva mensual para luego calcular "j"

$$i = \left(\frac{S}{C}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{12755}{12000}\right)^{\frac{1}{14}} - 1 = 0.00436785 = 0.436785\% \ \text{(TEM)}$$

$$\text{Como } j = im = 0.436785\% * 12 = 5.241417\% \text{ TNA}$$

3 CLASIFICACION DE TASAS DE INTERES

3.1 Tasa Nominal

Es una tasa que siempre está asociada a un periodo de capitalización.
Ej: 24 % anual capitalizable bimestralmente.

Es una tasa susceptible de fraccionamiento o de división.

Ej: $\left(\frac{J}{m}\right) = \left(\frac{0.24}{6}\right)$

3.2 Tasa Efectiva

Es una tasa que se obtiene de dividir una tasa nominal con su frecuencia de capitalización $\left(i = \frac{J}{m}\right)$.

La tasa efectiva (i) no es susceptible de fraccionamiento o división para hallar otra tasa efectiva.

3.3 Tasas Equivalentes

Se considera que dos tasas efectivas diferentes (con distintos periodos de capitalización) son equivalentes si estas producen el mismo monto. A través de las siguientes fórmulas se puede realizar la conversión de una tasa efectiva a otra efectiva diferente equivalente a la anterior:

$$i_1 = (1 + i_2)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1 \quad \text{ó} \quad i_{equivalente} = (1 + i_{efectiva})^{n} - 1$$

3.3.1 Ejercicio Resuelto

Dada la tasa del 36 % nominal anual (36 % TNA) con capitalización mensual, calcule las tasas efectivas:

a. Mensual: TEM:
En este caso, como la capitalización es mensual, la tasa efectiva mensual (TEM), la obtenemos al dividir la nominal por su frecuencia de capitalización

$$\mathrm{i} = \frac{0.36}{12} = 0.03 \quad \text{ó} \quad 3\%\ \mathrm{TEM}$$

b. Anual: TEA:
En este caso, dada la tasa efectiva mensual, la convertimos a tasa efectiva anual

$$\text{Sea } j_2 = 0.36; \quad m_2 = 12 \quad \text{y} \quad m_1 = 1, \qquad \text{entonces:}$$

$$\mathrm{i}_{\mathrm{anuaS}} = \left[1 + \left(\frac{0.36}{12}\right)\right]^{\frac{12}{1}} - 1 = 0.42576 \text{ ó } 42.576\%$$

4 DESCUENTO

4.1 Definición

Es una operación financiera que consiste en obtener el pago anticipado de Títulos Valores: letras, pagarés, entre otros que son documentos generales de créditos por cobrar, por medio de la cesión o endoso del derecho del poseedor a otra persona, más común de una institución crediticia. Ésta paga el importe del documento deduciendo los intereses anticipadamente, por el tiempo que falta para el vencimiento de las obligaciones.

El descuento constituye esa diferencia entre el monto de la deuda a vencimiento, y el importe recibido adelantado al presente, valor que finalmente implica una ganancia a favor de la institución en mención.

4.2 Objetivo de realizar una operación de descuento

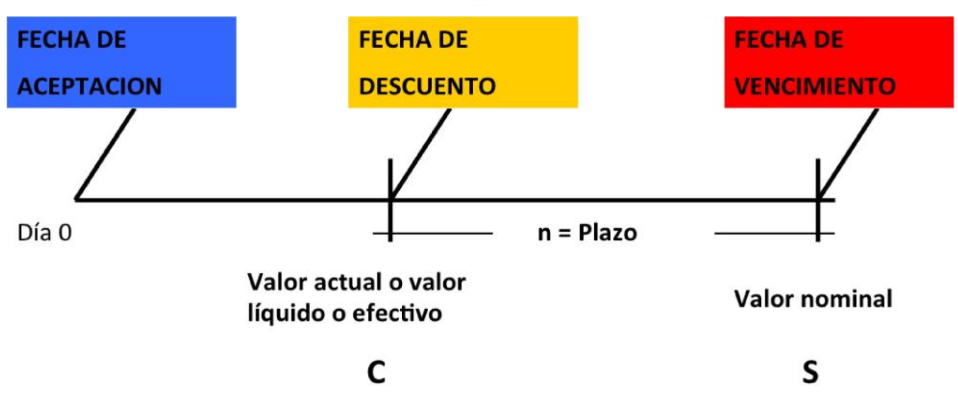
En la práctica habitual estas operaciones se deben a la necesidad de los acreedores de anticipar los cobros pendientes antes del vencimiento de los mismos acudiendo a los intermediarios financieros.

Los intermediarios financieros cobran una cantidad en concepto de intereses que se descuentan sobre el capital a vencimiento de la operación.

4.3 Elementos y Simbología

D = Descuento, es la deducción que se hace del valor nominal según la tasa de descuento y el plazo para el descuento
C = valor presente, liquido o efectivo del documento
S = Valor nominal, monto del documento a futuro
n = Períodos de tiempo que faltan para el vencimiento del título valor
d = tasa de descuento bancario (simple o compuesto)
i = tasa de interés por período de tiempo aplicable (racional simple o compuesto

4.4 Fórmulas de Aplicación y Diagrama de Flujo



4.5 Descuento Simple

4.5.1 Descuento Bancario Simple

El descuento bancario simple constituye el interés calculado sobre el valor nominal S de un título valor, importe a deducir de dicho monto para hallar el valor líquido C. Su cálculo nace del producto del valor nominal, la tasa de descuento y el número de periodos que faltan para el vencimiento de la operación.

(1) $$D = Snd$$

Como concepto sabemos que (2) S – C = D. Reemplazamos (2) en (1) y despejamos C, para el cálculo del valor líquido y obtenemos:

(3) $$C = S(1 - nd)$$

El valor líquido de un documento descontado por un banco es el importe neto recibido por el descontante por dicho valor. En este tipo de operación este valor líquido es menor a su respectivo valor presente, porque ha sido obtenido aplicando una tasa de descuento sobre el monto del documento, lo cual necesariamente es mayor al importe recibido por el que realiza la operación de descuento.

Igualmente obtenemos para el cálculo del valor nominal, despejamos S de (1)

(4) $$S = \frac{D}{nd}$$

4.5.2 Ejercicio Resuelto

¿Cuál será el valor líquido a obtener por el descuento bancario de una letra con valor nominal de S/.2,000?. La letra se descontó 38 días antes de su vencimiento con una tasa de descuento simple mensual del 5%.

Respuesta:

$$S = 2000;\ n = 38\ \text{días};\ i\ \text{diario} = \frac{0.05}{30}$$

$$C = 2000 * (1 - \frac{005}{30} * 38) = 1,873.33$$

4.5.3 Descuento Racional Simple

Es el valor presente del título valor que se calcula a interés simple. En una operación de descuento racional, el importe a recibir por el descontante es igual al valor presente calculado con tasa de interés i. El valor líquido coincide con este valor presente.

4.5.3.1 Fórmulas de Aplicación

$$C = S - D$$

De las fórmulas de Interés Simple

$$C = \frac{S}{1 + ni}$$

Reemplazando en la ecuación original

$$D_r = \frac{Sni}{1 + ni}$$

Se entiende de esta fórmula que el descuento es el interés aplicado a un valor futuro Sni, traído al valor actual al dividirlo por $1 + ni$.

4.5.3.2 Equivalencia del descuento racional simple y el interés simple

$$I = Cni$$

$$D_r = \frac{Sni}{1 + ni}$$

Por concepto de monto en Interés Simple

$$S = C(1 + ni)$$

Reemplazando S en D_r, llegamos a la conclusión que $D_r = I$, es decir:

$$D_r = Cni$$

4.5.3.3 Equivalencia de Tasas

De considerar lo anterior podemos aplicar una igualdad, llegando a la conclusión que entre las tasas de interés i aplicada en el descuento racional, y la tasa de descuento d, hay una equivalencia.

Despejando se llega a las siguientes fórmulas:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \; d = \frac{i}{1 + ni}$$

4.5.3.4 *Ejercicio Resuelto*

Una letra de S/. 20 000 con vencimiento dentro de 60 días se descuenta hoy a una tasa nominal anual del 24%. Calcule

a. El descuento racional simple
b. Su valor presente
c. El interés que se cobrará sobre el importe realmente desembolsado.

Respuesta:

$$S = 20{,}000;\ n = 60 \text{ días};\ i \text{ diario} = \frac{0.24}{360}$$

a. Aplicando:

$$D_r = \frac{Sin}{1 + ni}$$

$$D_r = \frac{20000 * 60 * \frac{0.24}{360}}{1 + 60 * \frac{0.24}{360}} = \frac{800}{1.04} = 769.23$$

b. $C = S - D = 20{,}000 - 769.23 = 19{,}230.77$

c. $I = Cni = 19{,}230.77 * \frac{0.24}{360} * 60 = 769.23 = D$

4.6 Descuento Compuesto

4.6.1 Descuento Bancario Compuesto

El descuento bancario compuesto consiste en una serie de descuentos simples, donde en primer término se aplica el descuento por un período sobre el valor nominal de la deuda a vencimiento, encontrando el valor líquido al final de este primer período, o al comienzo del segundo período.
A este valor obtenido se aplica el descuento por segunda vez, y así sucesivamente. De esto se entiende que el plazo tiene al menos dos periodos de descuento.
Aplicamos “tasas efectivas de descuento”.

4.6.2 Fórmulas de Aplicación

De aplicar al valor obtenido sucesivamente para todos los períodos del horizonte temporal, comprendido entre la fecha que se hace efectivo el abono del importe líquido del documento y la fecha de vencimiento de la deuda,

entendido como el plazo n, y considerar una tasa de descuento d efectiva compuesto.
Recopilando concepto de valor actual:

(1) $$C = S - D$$

4.6.2.1 Cálculo del valor actual o efectivo

(2) $$C = S(1 - d)^n$$

4.6.2.2 Cálculo del valor nominal

(3) $$S = C(1 - d)^{-n}$$

4.6.2.3 Cálculo del descuento

Si reemplazamos 2 en 1 y despejamos D, llegamos a la fórmula para calcular el valor del descuento D.

(4) $$D = S - C = S[1 - (1 - d)^n]$$

4.6.2.4 Cálculo del plazo n

De la misma manera despejamos de la Fórmula (2) y obtenemos:

(5) $$n = \frac{\log(\frac{C}{S})}{\log(1-d)}$$

4.6.2.5 Equivalencia entre la tasa de interés compuesto y la tasa de descuento compuesto

Partiendo de la fórmula base de Interés Compuesto:

$$S = C(1 + i)^n$$

Hacemos una igualdad con la fórmula (3) y obtenemos las siguientes equivalencias:

(6) $$d = \frac{i}{1+i}; \qquad i = \frac{d}{1-d}$$

4.6.2.6 Ejercicio Resuelto

Halle el descuento bancario compuesto de una letra cuyo valor nominal es S/.7,000 y vence dentro de 45 días. La tasa nominal anual es 36% con capitalización mensual.

Respuesta:

$$S = 7{,}000;\ n = 45\ \text{días};\ d\ \text{mensual (TEM)} = \frac{0.36}{12}$$

$$D_b = S - C = S[1 - (1 - d)^n]$$

$$D_b = 7000 * \left[1 - \left(1 - \frac{0.36}{12}\right)^{\frac{45}{30}}\right] = 312.63$$

4.6.3 Descuento Racional Compuesto

La tasa que se aplica es una tasa de interés compuesta "i", por lo que el descuento es igual a los intereses que devenga el valor actual durante el tiempo que falte para su vencimiento. Este valor presente del título valor se calcula a interés compuesto.
Donde su valor se calcula de la siguiente manera:

(1) $$D_r = S - C$$

Del cálculo del valor actual sabemos que:

(2) $$C = S(1 + i)^{-n}$$

Reemplazamos en la primera fórmula, despejamos y factorizamos para obtener el cálculo del descuento racional aplicando la tasa de interés efectiva correspondiente.

$$D_r = S - C = S[1 - (1 + i)^{-n}]$$

4.6.3.1 Ejercicio Resuelto

¿Por qué monto deberá aceptarse un pagaré con vencimiento a 60 días, para descontarlo racionalmente hoy, si se requiere disponer un importe de S/.10,000? Utilice una tasa efectiva mensual del 4% y compruebe la respuesta.

Respuesta:

$$S = ?;\ n = 2\ \text{meses}$$

Aplicamos $$S = C(1 + i)^n$$

$$S = 10000 * (1 + 0.04)^2 = 10816$$

Comprobamos $\quad D_r = S — C = S[1 — (1 + i)^{-n}]$

$$D_r = 10816 * (1 - (1 + 0.04)^{-2}) = 816$$
$$C = S - D = 10816 - 816 = 10000.$$

5 TEORIA DE RENTAS

5.1 Definición y Elementos

Una RENTA está formada por una serie de pagos periódicos para constituir un monto o para cancelar una deuda.
Los pagos constituyen un flujo de capitales cuyos valores pueden ser uniformes (pagos de igual valor) o variables (con variación en progresión aritmética o progresión geométrica).
La frecuencia de los pagos puede ser quincenal, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral o anual, etc.

Elementos:

RENTA (R o R_k): Es el importe de cada pago; se le llama también termino o cuota.

PERIODO: Es el tiempo transcurrido entre dos pagos consecutivos. Por ejemplo, en pagos mensuales el período es un mes; en pagos anuales el periodo es un año.

PLAZO (n): Es el intervalo de tiempo entre el comienzo del primer período y el final del último. El plazo expresa el número total de periodos o el número total de pagos.

MONTO (S): Es el importe total de todos los pagos más sus intereses. En términos operativos es la suma de los montos de los pagos valorados al final del plazo.

VALOR ACTUAL (A): Se considera que es la cantidad de dinero que impuesta al empezar el plazo, al mismo tipo de interés que los pagos, es capaz de sustentarlos a todos y cada uno de ellos en sus respectivos vencimientos. En términos operativos, es la suma del valor actual de los pagos valorados en la fecha de inicio del plazo.

5.2 TIPOS DE RENTAS Y/O ANUALIDADES

5.2.1 SEGÚN EL NUMERO DE TERMINOS:

a. RENTAS TEMPORALES: Las que tienen un número finito de pagos; tiene comienzo y final definidos.
b. RENTAS PERPETUAS: Su número de pagos es infinito, ilimitado, tiene comienzo definido pero final incierto.

5.2.2 SEGÚN LA FECHA DE INICIO DE LOS PAGOS:

a. RENTAS INMEDIATAS: En este tipo de rentas, la primera se hace efectiva o se ejecuta en el primer período de la serie de la operación contratada.
b. RENTAS DIFERIDAS: En este tipo de rentas, la primera se hace efectiva o se ejecuta, cuando menos, a partir del segundo período de la serie de la operación contratada.

5.2.3 SEGÚN LA FECHA DE HACERLAS EFECTIVA:

a. RENTAS VENCIDAS U ORDINARIAS: Cuando las rentas se ejecutan al final de cada PERIODO del plazo.
b. RENTAS ANTICIPADAS O ADELANTADAS: Cuando las rentas se ejecutan al inicio de cada PERIODO del plazo.

5.2.4 SEGÚN LA CUANTIA DE LAS RENTAS:

a. RENTAS UNIFORMES: todos los términos de la anualidad tienen el mismo valor, su valor es constante.
b. RENTAS VARIABLES: En este caso el valor de las rentas cambia con respecto a la inmediata anterior; el cambio es de una a una en progresión aritmética (P.A.) o geométrica (P.G.).

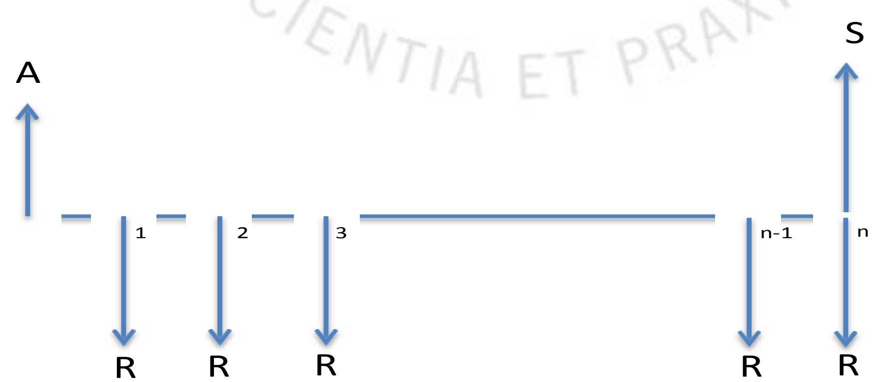
6 RENTAS UNIFORMES

6.1 RENTAS VENCIDAS U ORDINARIAS

6.1.1 Definición

Se ejecutan al finalizar cada periodo del plazo.

DIAGRAMA DE FLUJO



6.1.2 FORMULAS DE APLICACION

6.1.2.1 CALCULO DEL VALOR FUTURO (MONTO)

De la definición del monto:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1} + S_n$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$S = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-3} + \cdots + R(1+i) + R$$

Si multiplicamos cada termino por una razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$rS = R(1+i)^{n} + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \cdots + R(1+i)^{2} + R(1+i)$$

$$rS - S = R(1+i)^{n} - R$$

$$S(r-1) = R\,[(1+i)^{n} - 1]$$

Entonces:

$$S = R\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

6.1.2.2 CALCULO DEL VALOR ACTUAL

De la definición del valor actual:

$$A = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{n-1} + C_n$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \cdots + R(1+i)^{-(n-1)} + R(1+i)^{-n}$$

Si multiplicamos cada termino por la razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$Ar = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-(n-2)} + R(1+i)^{-(n-1)}$$

$$rA - A = R - R(1+i)^{-n}$$

$$A(r-1) = R[1 - (1+i)^{-n}]$$

Entonces:

$$A = R\ \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$$

6.1.2.3 RESUMEN DE FORMULAS

Monto y Valor Actual	$S = R\ \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$	$A = R\ \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$
Valor de la Renta	$R = S\ \frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$	$R = A\ \frac{i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$
Plazo	$n = \frac{\mathrm{Log}\ (1 + \frac{iS}{R})}{\mathrm{Log}(1+i)}$	$n = -\frac{\mathrm{Log}\ (1 - \frac{iA}{R})}{\mathrm{Log}(1+i)}$
Factor Financiero	$FCS = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$	$FAS = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$
	$FDFA = \frac{i}{[(1+i)^n - 1]}$	$FRC = \frac{i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$

FCS : Factor de Capitalización de la Serie
FAS : Factor de Actualización de la Serie
FDFA : Factor de Deposito al Fondo de Amortización
FRC : Factor de Recuperación del Capital

6.1.3 EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuánto dinero se podrá capitalizar y cuanto se obtiene de intereses en 4.5 años si se hacen abonos de S/.1,000 cada fin de mes en una cuenta de ahorros del Banco Financiero que ofrece una tasa de interés pasiva del 0.37% efectivo mensual?
   Solución:
   R = S/.1,000 n = 4.5 años = 54 meses i = 0.37% TEM

   $$S = 1000\ [\frac{(1+0.0037)^{54} - 1]}{0.0037} = 59,650.90$$

   Intereses: I = Monto (S) – n R
   I = 59,650.90 – 54x 1000 = S/.5.650.90

2. Una empresa importante acaba de adquirir un equipo de computación comprometiéndose a hacer siete pagos mensuales de \$.80,000 cada uno; costo del dinero 15%TEA. ¿Cuál es el valor al contado del referido equipo?

Solución:
R = $.80,000 n = 7 meses i = 15% TEA

$$\text{TEM} = (1+15\%)^{1/12} - 1 = 0.011715$$

El valor al contado que corresponde al valor actual de los próximos 7 pagos mensuales será:

$$A = 80000\,\frac{[1-(1+0.011715)^{-7}]}{0.011715} = \$.534{,}654.30$$

6.2 RENTAS ANTICIPADAS

6.2.1 Definición

Las rentas anticipadas o adelantadas están constituidas por una sucesión de imposiciones o pagos o cuotas que se abonan al principio de cada unidad de tiempo del plazo establecido.
Considerando que:

$\bar{S}$ = Monto; $\bar{A}$ = Valor Actual; R_a = Renta Anticipada.

DIAGRAMA DE FLUJO

6.2.2 CALCULO DEL MONTO

De la definición del monto:

$$\bar{S} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$\bar{S} = R_a(1+i)^n + R_a(1+i)^{n-1} + R_a(1+i)^{n-2} + \cdots + R_a(1+i)^2 + R_a(1+i)$$

Si multiplicamos cada termino por una razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$r\bar{S} = R_a(1+i)^{n+1} + R_a(1+i)^n + R_a(1+i)^{n-1} + \cdots + R_a(1+i)^3 + R_a(1+i)^2$$

$$r\bar{S} - \bar{S} = R_a(1+i)^{n+1} - R_a(1+i)$$

$$\bar{S}(r-1) = R_a(1+i)[(1+i)^n - 1]$$

Entonces:

$$\bar{S} = R_a \ (1+i)\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

6.2.3 CALCULO DEL VALOR ACTUAL

De la definición del valor actual:

$$\bar{A} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_{n-1} + C_n$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$\bar{A} = R_a + R_a(1+i)^{-1} + R_a(1+i)^{-2} + \cdots + R_a(1+i)^{-(n-2)} + R_a(1+i)^{-(n-1)}$$

Si multiplicamos cada termino por la razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$r\bar{A} = R_a(1+i) + R_a + R_a(1+i)^{-1} + \cdots + R_a(1+i)^{-(n-3)} + R_a(1+i)^{-(n-2)}$$

$$r\bar{A} - \bar{A} = R_a\,(1+i) - R_a(1+i)^{-(n-1)}$$

$$\bar{A}(r-1) = R_a(1+i)[1 - (1+i)^{-n}]$$

Entonces:

$$\bar{A} = R_a(1+i)\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

6.2.4 RESUMEN DE FORMULAS

Monto y Valor Actual	$\bar{S} = R_a(1+i)\dfrac{[(1+i)^n - 1]}{i}$	$\bar{A} = R_a(1+i)\dfrac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$
Valor de la Renta	$R_a = \dfrac{S}{(1+i)}\dfrac{i}{[(1+i)^n - 1]}$	$R_a = \dfrac{A}{(1+i)}\dfrac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$
Plazo	$n = \dfrac{\text{Log}\left(1 + \dfrac{i\bar{S}}{R_a(1+i)}\right)}{\text{Log}(1+i)}$	$n = -\dfrac{\text{Log}\left(1 - \dfrac{iA}{R_a(1+i)}\right)}{\text{Log}(1+i)}$

6.2.5 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Usted deposita S/. 500 a principios de mes en un banco que abona el 8% nominal anual con capitalización mensual. Calcule el monto de los depósitos al cabo de 3.5 años, ¿cuánto gana de intereses?

   Solución:

   Ra=S/.500; n = 3.5 años = 42 meses; i = $\frac{0.08}{12}$ (TEM)

   $\bar{S} = 500\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)\dfrac{[(1+\frac{0.08}{12})^{42} - 1]}{\frac{0.08}{12}}$ = S/.24,303.70 Monto Capitalizado

   I = Ingreso final – Egresos = $S/.24,303.70 - 42\ (S/.500)$

   Intereses Obtenidos = $S/.3,303.70$

2. Se conviene en pagar una deuda con abonos de $.800 a comienzos de cada trimestre, durante 8 años. Calcule el valor de la deuda con una tasa nominal anual del 4% con capitalización mensual.

   Solución:

   Ra=$.800; n = 8 años = 32 trimestres; i = $\frac{0.04}{12}$ (TEM)

   $$\text{TET} = (1 + 0.04/12)^{12/4} - 1 = 0.010033$$

   $\bar{A} = 800(1 + 0.010033)\dfrac{[1-(1+0.010033)^{-32}]}{0.010033}$ = 22,023.28

   Valor de la deuda: $.22,023.28

3. Se estima que dentro de 4 meses deberá adquirirse una máquina cuyo precio será de S/. 25,000. ¿Cuánto deberá depositarse en un banco el primer día de cada mes al 5% TEM a fin de comprar la máquina con los ahorros capitalizados?

   Solución:

   S = 25,000; n = 4 meses; i = 5% (TEM)

$$\text{Ra} = \frac{25000}{(1+0.05)}\frac{0.05}{[(1+0.05)^4 - 1]} = \text{S/.5,524.09 mensuales}$$

7 RENTAS PERPETUAS

7.1 Definición

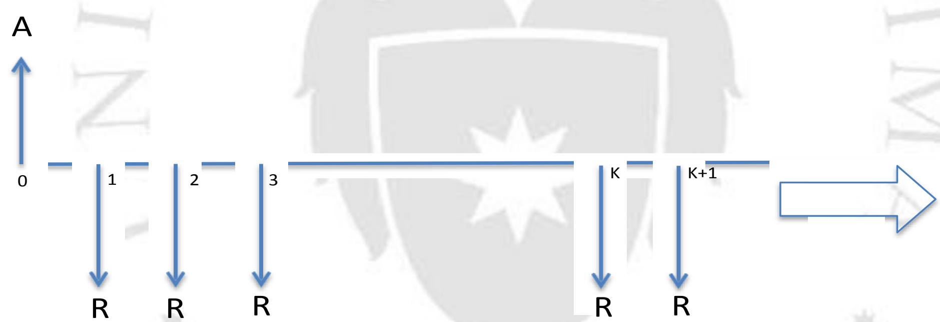
Las rentas perpetuas o perpetuidades están constituidas por una serie de términos periódicos cuyo número de pagos o cobros es infinito o ilimitado.
La fuente que les da sustento **no sufre agotamiento**

Las rentas perpetuas se emplean en operaciones financieras que tienen fines especiales como **:**

- Las fundaciones de carácter educativo o de beneficencia,
- En seguridad social,
- En el análisis de alternativas de inversión,
- En el análisis de la reposición de bienes de capital, etc.

7.2 VALOR ACTUAL DE RENTAS PERPETUAS VENCIDAS

DIAGRAMA DE FLUJO



Garantizar la perpetuidad significa que su valor actual A sea inagotable y, y para que esto ocurra, será necesario que el valor máximo de las rentas R sea igual al interés que puede producir A en cada período.

De la definición del valor actual:

$$A = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_k + C_{k+1} + \cdots$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$A = R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-3} + \cdots + R(1+i)^{-k} + R(1+i)^{-(k+1)} + \cdots$$

Si multiplicamos cada termino por la razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$rA = R + R(1+i)^{-1} + R(1+i)^{-2} + \cdots + R(1+i)^{-(k-1)} + R(1+i)^{-k} + \cdots$$

$$rA - A = R$$

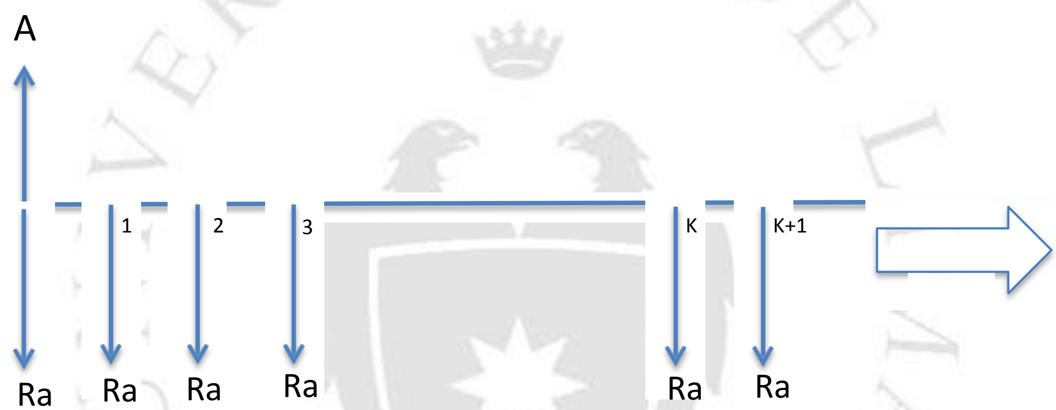
$$A(r-1) = R$$

Entonces:

$$A = \frac{R}{i}$$

7.3 VALOR ACTUAL DE RENTAS PERPETUAS ADELANTADAS

DIAGRAMA DE FLUJO



De la definición del valor actual:

$$\bar{A} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_k + C_{k+1} + \cdots$$

Del diagrama de flujo se deduce:

$$\bar{A} = R_a + R_a(1+i)^{-1} + R_a(1+i)^{-2} + R_a(1+i)^{-3} + \cdots + R_a(1+i)^{-k} + R_a(1+i)^{-(k+1)} + \cdots$$

Si multiplicamos cada termino por la razón matemática $r = (1+i)$, obtendremos:

$$r\bar{A} = R_a(1+i) + R_a + R_a(1+i)^{-1} \ldots + R_a(1+i)^{-(k-1)} + R_a(1+i)^{-k} + \cdots$$

$$\bar{A}r - \bar{A} = R_a(1+i)$$

$$\bar{A}(r-1) = R_a(1+i)$$

Entonces después de ejecutarse la primera renta queda de saldo $A — Ra$:
Entonces el valor de la segunda y de las que siguen será:

$$R_a = i(\bar{A} - R_a) \qquad R_a = \frac{i\bar{A}}{1+i} \qquad \bar{A} = \frac{R_{a(1+i)}}{i}$$

7.4 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Se desea establecer un fondo cuyo producto anual al 6% TEA sea de \$.60,000, ¿cuál será el valor actual de la perpetuidad?
   Solución:
   R = 60,000; i =6% TEA

$$A = \frac{60000}{0.06} = 1\,000{,}000$$

2. Un terreno agrícola está produciendo hace muchos años un ingreso neto anual de \$. 300,000. ¿En cuánto se podrá vender dicho terreno agrícola si el costo del dinero es del 5% TEA?
   Solución:
   $R = 300000$ anual permanente ; $i = 5\%$ TEA

$$A = \frac{300000}{0.05} = 6\,000{,}000$$

3. Se abonan rentas de \$ 4,000 cada fin de mes durante 20 años en un fondo que paga el 0.11% efectivo mensual con la finalidad de cobrar una renta perpetua al comenzar cada mes 5 años después de constituido dicho fondo, calcular:
   a. El monto constituido que dará origen a la renta perpetua.
   b. El valor de la renta perpetua mensual a cobrar.
   Solución:
   a. $R = 4000$ mensual; $n = 20$ años $= 240$ meses; $i = 0.11\%$ TEM

$$S_{240} = R\,\frac{[(1+i)^n - 1]}{i} = 4000\,\frac{[(1+0.0011)^{240} - 1]}{0.0011} = 1\,097{,}961$$

Calculo del monto al finalizar los 5 años posteriores de constituido el fondo:

$$S = 1097961 * (1 + 0.0011)^{60} = 1172{,}828.73$$

Que es la cantidad de dinero que dará sustento a las rentas perpetuas adelantadas (al comenzar cada periodo mensual)

b. Calculo del valor de las rentas perpetuas

$$_aR = \frac{iA}{1+i} = \frac{0.0011x1172828.73}{1+0.0011} = \$1{,}288.69$$

8 RENTAS VARIABLES

ANUALIDADES CON TERMINOS VARIABLES: GRADIENTES

- Las rentas tienen valor variable.
- La variación está sujeta a una ley específica predeterminada.
- Las variaciones pueden ser de tipo aritmético o de tipo geométrico.

8.1 RENTAS EN PROGRESION ARITMETICA

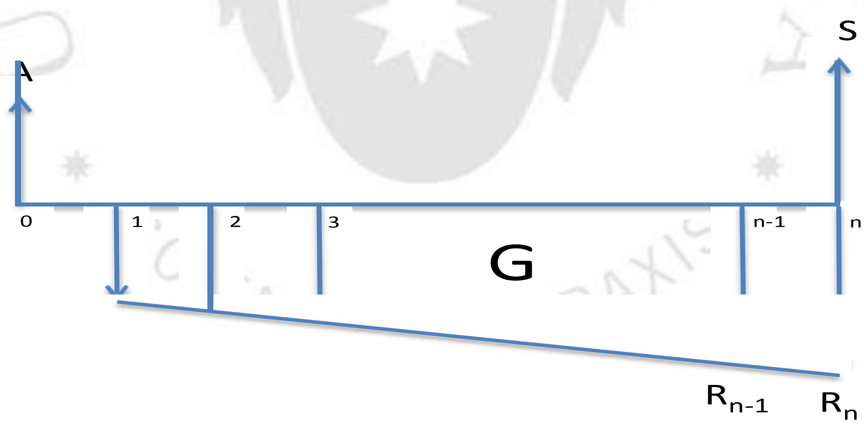
8.1.1 Definición

Cada renta aumenta o disminuye en una misma cantidad respecto a la inmediata anterior.

8.1.2 Gradiente en progresión aritmética (PA)

En una renta o anualidad en PA, “cada término” es igual al inmediato anterior más o menos una cantidad constante denominada razón a la que le denominaremos “G” y se le denominara gradiente aritmético.

DIAGRAMA DE FLUJO



De manera general tenemos que:

$$G = \frac{R_b - R_a}{b - a}\ ;\ b\ \Sigma\ a$$

Por definición $G = R_k - R_{k-1}$; y de manera general $R_k = R_{k-1} + G$

Entonces como conclusión:

$$R_n = R_1 + (n - 1)G$$

De tal manera, como ejemplo,:

Si $R_1 = 950$ y $R_8 = 1545$; entonces $G = \frac{1545-950}{8-1} = 85$

$R_2 = 950 + 85 = 1035 = R_1 + G$

$R_3 = 1035 + 85 = 1120 = R_1 + 2G$

$R_4 = 1120 + 85 = 1205 = R_1 + 3G$

$R_8 = 1460 + 85 = 1545 = R_1 + (8 - 1)G$

8.1.3 Calculo de la suma de los desembolsos de una parte o de todos los abonos o términos (en PA)

Del diagrama de flujo tenemos que:

$$\sum R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{n-1} + R_n$$

Y tomando en cuenta que $R_n = R_1 + (n - 1)G$

$$\sum R_k = R_1 + (R_1 + G) + (R_1 + 2G) \ldots + (R_1 + (n - 2)G) + (R_1 + (n - 1)G)$$

ó en términos de R_n:

$$\sum R_k = (R_n - (n - 1)G) + (R_n - (n - 2)G) + (R_n - (n - 3)G) \ldots + (R_n - G) + R_n$$

entonces si sumamos ambas ecuaciones:

$$2\sum R_k = nR_1 + nR_n$$

$$\sum R_k = \frac{n}{2}(R_1 + R_n) \qquad \mathbf{o} \qquad \sum R_k = \frac{n}{2}(2R_1 + (n - 1)G)$$

8.1.4 CALCULO DEL VALOR ACTUAL (A)

Del diagrama de flujo tenemos que:

a Ø	R_1	R_2	R_3	...	R_{n-1}	R_n	Nº de Términos
0	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	n
1		G	G	G	G	G	n-1
2			G	G	G	G	n-2
...				G	G	G	...
n-2					G	G	2
n-1						G	1

$$A = R_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + G\frac{(1-(1+i)^{-(n-1)})}{i}(1+i)^{-1} + G\frac{(1-(1+i)^{-(n-2)})}{i}(1+i)^{2} + \cdots + G\frac{(1-(1+i)^{-2})}{i}(1+i)^{-(n-2)} + G\frac{(1-(1+i)^{-1})}{i}(1+i)^{-(n-1)}$$

Empleando la identidad $v = (1+i)^{-1}$ simplificaremos nuestra formula:

$$A = R_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}[(1-v^{(n-1)})v + (1-v^{(n-2)})v^2 + \cdots + (1-v^2)v^{(n-2)} + (1-v)v^{(n-1)}]$$

$$A = R_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}[(v-v^n) + (v^2-v^n) + \cdots + (v^{(n-2)}-v^n) + (v^{(n-1)}-v^n) + (v^n-v^n)]$$

$$A = R_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}[(v + v^2 + \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} + v^n) - nv^n]$$

$$A = R_1 \frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}\left[\frac{(1-(1+i)^{-n})}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

8.1.5 CALCULO DEL MONTO (S)

Por definición: $S = A(1+i)^n$

$$S = A(1+i)^n = R_1 \frac{((1+i)^n - 1)}{i} + \frac{G}{i}\left[\frac{((1+i)^n - 1)}{i} - n\right]$$

8.1.6 CALCULO DE LOS INTERESES (I)

Conociendo el valor actual (A) o el monto (S):

$I = S - \sum R_k$; si se trata de un monto acumulado.

$I = \sum R_k - A$; si se trata del pago de un préstamo.

8.1.7 EJERCICIOS RESUELTOS

1. M.T tiene una deuda de S/.60,000 que cancelará con 16 abonos crecientes en S/.386 trimestrales respecto del inmediato anterior, siendo el primero de S/.2,800; ¿cuánto pagará en intereses?

   Solución:

   $$R_1 = 2800;\ G = 386;\ n = 16 \text{ trimestres}$$

   $$\sum R_k = \frac{n}{2}(2R_1 + (n-1)G) = \frac{n}{2}(2x2800 + (15)x386) = 91{,}120$$

$$I = \sum R_k - A = 91{,}120 - 60{,}000 = 31{,}120$$

2. Al adquirir una máquina se da una cuota inicial de S/.10,000 y los pagos periódicos crecientes con S/.1,200 el primer mes y 150 más cada mes, hasta el décimo mes a una tasa del 36% anual con capitalización mensual. Calcule:
   a. El precio de venta al contado,
   b. El precio de venta a plazos.

   Solución:

   $R_1 = 1200;\ G = 150;\ n = 10 \text{ meses};\ i = \frac{j}{m} = \frac{36\%}{12} = 3\%$ TEM

$$\text{Precio Contado} = \text{Cuota Inicial} + A = 10000 + A$$

$$A = R_1 \frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i} + \frac{G}{i}\left[\frac{(1 - (1+i)^{-n})}{i} - n(1+i)^{-n}\right]$$

$$A = 1200 \frac{(1 - (1+3\%)^{-10})}{3\%} + \frac{150}{3\%}\left[\frac{(1 - (1+3\%)^{-10})}{3\%} - 10(1+3\%)^{-10}\right] = 15{,}682.56$$

$$\text{Precio Contado} = 10{,}000 + 15{,}682.56 = 25{,}682.56$$

$$\text{Precio a plazos} = \text{Cuota Inicial} + \sum R_k$$

$$\text{Precio a plazos} = 10{,}000 + \frac{10}{2}(2 * 1200 + (9) * 150) = 28{,}750$$

8.2 RENTAS EN PROGRESION GEOMETRICA

8.2.1 Definición

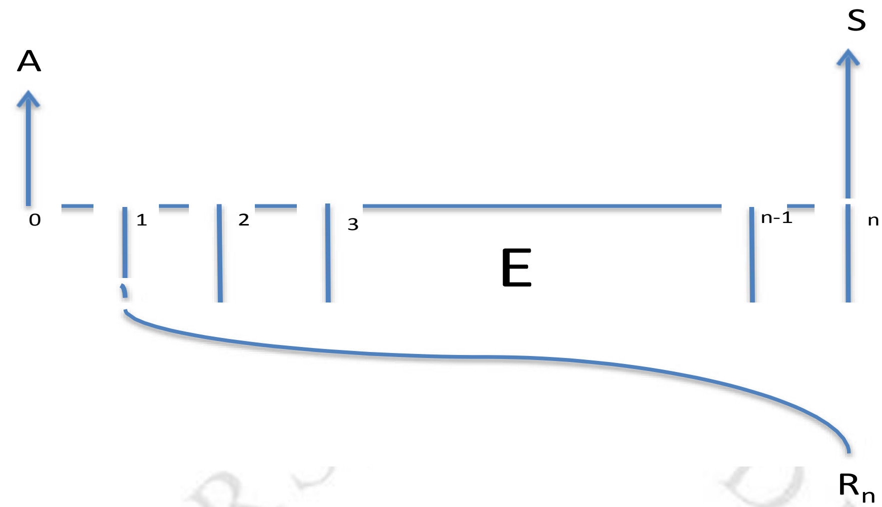
En este caso de rentas variables, la cuantía de sus términos varía en progresión geométrica de tal forma que cada término es un porcentaje mayor o menor que el inmediato anterior o cada uno es directa o inversamente proporcional al inmediato anterior.

Consideremos que " g ", ($g = 1 + E$) es la razón de variación, entonces

El valor del termino de orden "n" es:

$$R_n = R_1 g^{n-1} = R_1(1 + E)^{n-1}$$

DIAGRAMA DE FLUJO



8.2.2 Calculo de la suma de los desembolsos de una parte o de todos los abonos o términos (en PA)

Del diagrama de flujo tenemos que:

$$\sum R_k = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{n-1} + R_n$$

Y tomando en cuenta que $R_n = R_1 g^{n-1} = R_1(1+E)^{n-1}$

$$\sum R_k = R_1 + R_1 g + R_1 g^2 \ldots + R_1 g^{(n-2)} + R_1 g^{(n-1)}$$

Si multiplicamos esta ecuación por g, tendremos:

$$g \sum R_k = R_1 g + R_1 g^2 + R_1 g^3 \ldots + R_1 g^{(n-1)} + R_1 g^n$$

$$g \sum R_k - \sum R_k = R_1 g^n - R_1$$

$$(g-1) \sum R_k = R_1 (g^n - 1)$$

$$\sum R_k = \frac{R_1(g^n - 1)}{g-1} = \frac{R_1((1+E)^n - 1)}{E}$$

8.2.3 CALCULO DEL VALOR ACTUAL (A)

Del diagrama de flujo tenemos que:

$$A = \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_1 g}{(1+i)^2} + \frac{R_1 g^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R_1 g^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R_1 g^{n-1}}{(1+i)^n}$$

$$A = \frac{R^1}{(1+i)^n}[(1+i)^{n-1} + g(1+i)^{n-2} + g^2(1+i)^{n-3} + \cdots + g^{n-2}(1+i) + g^{n-1})]$$

que es también una progresión geométrica, entonces si lo multiplicamos por g^{-1} y por $r = (1+i)$ tendremos:

$$g^{-1}\,rA = \frac{R^1}{(1+i)^n}[g^{-1}(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + g(1+i)^{n-2} + \cdots + g^{n-3}(1+i)^2 + g^{n-2}(1+i)]$$

$$A - g^{-1}rA = \frac{R_1}{(1+i)^n}\,[g^{n-1} - g^{-1}(1+i)^n] = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{g^n}{g} - \frac{(1+i)^n}{g}] = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{g^n - (1+i)^n}{g}]$$

$$A(1 - g^{-1}r) = A\,[\frac{g-(1+i)}{g}] = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{g^n-(1+i)^n}{g}]$$

$$A = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}] = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{(1+E) - (1+i)}] = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}]$$

$$A = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}]\ ;\ \text{si } g \text{ G } 1+i$$

$$A = \frac{R_1}{(1+i)^n}[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}]\ ;\ \text{si } E \text{ G } i$$

En caso de que $g = 1 + i$, la expresión se reduce a :

$$A = \frac{R_1 n}{g} = \frac{R_1 n}{1+E}\ ;\ \text{para } g = 1 + i$$

8.2.4 CALCULO DEL MONTO (S)

Por definición: $S = A(1+i)^n$

$$S = R_1\,[\frac{g^n - (1+i)^n}{g - (1+i)}]\ ;\ \text{si } g \text{ G } 1+i$$

$$S = R_1\,[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}]\ ;\ \text{si } E \text{ G } i$$

En caso $g = 1 + i$, se reduce a:

$$S = \frac{R_1 n(1+i)^n}{g} = \frac{R_1 n(1+i)^n}{1+E}; \text{ para } g = 1 + i$$

8.2.5 CALCULO DE LOS INTERESES (I)

Conociendo el valor actual (A) o el monto (S):

$I = S - \sum R_k$; si se trata de un monto acumulado.

$I = \sum R_k - A$; si se trata del pago de un préstamo.

8.2.6 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una maquinaria pesada tiene un valor de contado de S/. 475,000 y puede adquirirse con una cuota inicial de S/. 52,020.00 y el resto financiado a dos años con cuotas mensuales a una tasa de interés del 30% capitalizable mensualmente. Si las cuotas aumentan cada mes en 3% con respecto al inmediato anterior, Calcule:
   a. el valor de las 3 últimas cuotas,
   b. el saldo de la deuda inmediatamente después de realizar el pago 21,
   c. el valor de las cuotas uniformes equivalentes, y;
   d. el total de intereses.

   Solución:

$$J = 30\%;\ m = 12;\ TEM = \frac{30\%}{12} = 2.5\%;$$

$$n = 2x12 \text{ meses} = 24 \text{ meses};\ g = 1 + 0.03$$

$$A = 47{,}5000.00 - 52{,}020.00 = 422{,}980.00$$

$$A = \frac{R_1}{(1+i)^n}\left[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}\right] = 422980 = \frac{R_1}{(1+0.025)^{24}}\left[\frac{(1+0.03)^{24} - (1+0.025)^{24}}{0.03 - 0.025}\right]$$

$$R_1 = \frac{422980}{24.77635} = 17071.92$$

   a. el valor de las 3 últimas cuotas,

$$R_{24} = 17071.92x1.03^{23} = 33692.91$$
$$R_{23} = 17071.92x1.03^{22} = 32711.56$$
$$R_{22} = 17071.92x1.03^{21} = 31758.80$$

   b. Calculamos el valor presente de los tres últimos términos, que es el saldo de la deuda inmediatamente después de cancelar el pago 21.

$$A = \frac{R_1}{(1+i)^n}\left[\frac{(1+E)^n - (1+i)^n}{E - i}\right] = \frac{31758.80}{(1+0.025)^3}\left[\frac{(1+0.03)^3 - (1+0.025)^3}{0.03 - 0.025}\right] = 93{,}406.75$$

c. Si las cuotas son uniformes (vencidas)

$$R = A \frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]} = 422{,}980 \frac{0.025}{[1-(1+0.025)^{-24}]} = 23{,}650.00$$

d. El total de intereses los obtenemos de:

$$I = \sum R_k - A = \frac{R_1((1+E)^n - 1)}{E} - A$$

$$I = \frac{17071.92((1+0.03)^{24} - 1)}{0.03} = 164{,}745.95$$

9 AMORTIZACIÓN: MÉTODO PROGRESIVO

Es una operación financiera que tiene como objetivo resolver o cancelar una deuda mediante una serie de cuotas o pagos periódicos uniformes.
En todo proceso de amortización intervienen dos elementos que actúan en direcciones opuestas o antagónicos; son :

- Los intereses que tienden a que la deuda aumente, y
- La amortización que tiende a que la deuda disminuya .

Estos dos elementos se encuentran presentes en cada servicio o abono de deuda (pago periódico) y su cuantía da lugar a los diferentes métodos de amortización.

9.1 ELEMENTOS:

- Deuda inicial o Importe del Préstamo **(P)** Es la cantidad de dinero que se financia por la que el deudor tendrá que pagar intereses.
- Servicio de Deuda **(R o R_k)** Es el importe de cada cuota o pago, está constituido por la cuota de interés y la cuota de capital.
- Cuota de Interés **(I_k)** Son los intereses devengados en el período "k" que generalmente se calculan tomando como base el saldo de deuda del período inmediato anterior.
- Cuota de Capital **(C_k)** Es la AMORTIZACIÓN o parte de la deuda que se cancela en el período "k".
- Plazo **(n)** Es el tiempo efectivo para la cancelación de la deuda, expresa el número de cuotas, servicios o pagos.
- Tasa de Interés **(i)** Es una tasa efectiva referida a la periodicidad que tienen las cuotas o servicios.
- Deuda Extinguida **(E_k)** Es el total de deuda cancelada hasta el período "k" , resulta de la suma de las k primeras cuotas de capital.
- Deuda Residual **(D_k)** Es el saldo de deuda o deuda pendiente de pago desde el período "k + 1" y resulta de sumar las "n - k" últimas cuotas de capital.

9.2 METODOS DE AMORTIZACION

1. Método de servicios uniformes: La cuantía de cada servicio es la misma durante todo el plazo; los intereses son sobre los saldos, la cuota de interés disminuye en tanto la cuota de capital aumenta (METODO FRANCES).

2. Método de Amortización Constante. La cuota de capital o amortización en cada período, es constante y como los intereses son sobre los saldos, estos disminuyen en progresión aritmética, los servicios son también decrecientes (METODO ALEMAN).

3. Método de Interés constante y Cancelación de Deuda al final del Plazo. En cada período del plazo solo se pagan los intereses devengados por toda la

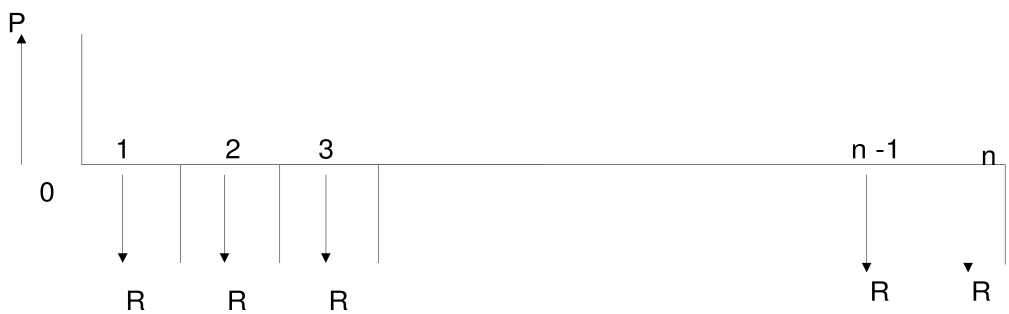
deuda en el período que termina y al finalizar el último período se cancela el total de la deuda así como los intereses del último período. (METODO AMERICANO).

4. Método de la Tasa Flat. Le llaman también sistema comercial, los servicios son uniformes y resultan de prorratear el monto que generará la deuda total en todo el plazo a una tasa de interés simple denominada Tasa Flat.

9.3 EL MÉTODO DE SERVICIOS UNIFORMES:

Se sustenta en la teoría del cálculo del valor actual para rentas constantes, inmediatas, temporales, de pago vencido.

Diagrama de flujo:



Se extingue la deuda de manera gradual
Cada "servicio de deuda" R comprende la amortización de la deuda y los intereses devengados en el período "k" por el saldo de deuda pendiente de pago a una tasa pactada " i ".

$$R = I_k + C_k$$

Además como el método se sustenta en la teoría de rentas se tendrá que:

$$R = \frac{iP}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

El cálculo de los intereses que son parte de "R" se hace mediante la regla llamada de "intereses al rebatir" por qué los intereses son calculados sobre el saldo de deuda del periodo inmediato anterior.

$$I_k = i * D_{k-1}$$

El saldo de deuda o deuda pendiente de pago inmediatamente después del período " k " se obtendrá con:

$$D_k = \frac{R * [1 - (1 + i)^{-(n-k)}]}{i}$$

El número de cuotas o pagos se obtendrá con:

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{iP}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

La deuda extinguida o deuda amortizada o deuda cancelada hasta el período " k " es:

$$E_k = D_o - D_k$$

9.3.1 Ejercicios Resueltos:

1. Una deuda de s/. 50 000 se debe amortizar con 6 pagos semestrales con un interés del 8 % capitalizable al semestre.
   Elabore la tabla de pagos.

   SOLUCION:

   P = 50 000 ; R semestral ; n=6 servicios ; i =4 % TES

   1º Servicio de deuda: $R = \frac{0.04*50000}{1-(1+0.04)^{-6}} = 9538.10$

   2º Cuota de interés: $I_k = 0.04 * 50{,}000 = 2000$

   3º Cuota Capital $C_k = 9538.10 - 2000 = 7538.10$

   4º Deuda extinguida $E_k = 0 + 7538.10 = 7538.10$

   5º Deuda residual $D_k = 50000 - 7538.10 = 42461.90$

   6º Reinicio del proceso desde el 2º paso

TABLA DE AMORTIZACION

k	R	I_k	C_k	E_k	D_k
0					50,000.00
1	9538.10	2000.00	7538.10	7538.10	42,461.90
2	9538.10	1698.48	7839.62	15377.72	34622.28
3	9538.10	1384.89	8153.20	23,530.92	26469.08
4	9538.10	1058.76	8479.33	32010.25	17989.75
5	9538.10	719.59	8818.51	40828.76	9171.24
6	9538.10	366.85	9171.25	50000.00	0.00

2. Se desea cancelar un préstamo de S/.2´000,000 al 3.5 % TET con servicios trimestrales de S/.108,743, calcule:

a. El número de servicios necesarios;
b. Total de intereses en la operación;
c. Capital amortizado durante el 5to año;
d. Intereses solo durante el 5to año;
e. ¿Con cuánto se cancelaría la deuda inmediatamente después del último servicio del 7mo año?.

Solución
$P = 2000000;\ i = 3.5\%\ \text{TET};\ R = 108{,}743\ \text{trimestral}$

a. Cálculo del número de servicios o abonos

$$n = -\frac{\log\left(1 - \frac{0.035 * 2000000}{108743}\right)}{\log 1.035} = 30\ \text{trimestres}$$

b. Total de intereses: $I = 30 * 108743 - 2000000 = 1262290$

c. Capital amortizado durante el quinto año:

$$E_{5to.Año} = E_{20} - E_{16} = D_{16} - D_{20}$$

$$E_{5to.Año} = \frac{108743(1 - 1.035^{-14})}{0.035} - \frac{108743(1 - 1.035^{-10})}{0.035}$$

$$E_{5to.Año} = 1187530.14 - 904372.61 = 283157.53$$

d. Intereses durante el quinto año:

$$I_{5to.Año} = 4 * 108743 - 283157.53 = 151814.47$$

e. Al finalizar el 7mo. Año faltan cancelar 2 abonos:

$$D_{28} = 108743 * (1.035^{-1} + 1.035^{-2}) = 206578.45$$

10 Aplicaciones

10.1 COSTO CAPITALIZADO " K "

El Costo Capitalizado se emplea cuando los flujos de caja, recurrentes o no recurrentes, son solo egresos.

Flujos Recurrentes son los que se presentan periódicamente durante toda la vida útil del activo.

Se asume que el proyecto de inversión tiene una "vida útil indefinida".

Como en la mayoría de casos, los activos físicos se deben reemplazar después de un número definido de años de uso, se asume que el número de reemplazos es indefinido.

EL "K" es el valor que garantiza la vida permanente de un activo.

Calcular el "K" de un activo, significa calcular el valor presente de todos sus costos (recurrentes y no recurrentes) incluyendo su valor de salvamento o de rescate, de tal forma que se garantice su vida a perpetuidad con reposiciones en un número indefinido de veces.

$$K = \sum_{t=0}^{\infty} VA_{\text{costos recurrentes}} + \sum VA_{\text{costos no recurrentes}}$$

Calcular el COSTO CAPITALIZADO implica calcular el valor actual de series de rentas perpetuas.

10.1.1 Ejercicios Resueltos:

1. Una máquina selladora de envases tiene un costo de $ 25 000; se estima que tendrá una vida útil de 15 años y un valor residual del 8% de su costo. Considerando un costo de mantenimiento de $. 125 anuales, calcule el "K" de la máquina al 3 % TEA.

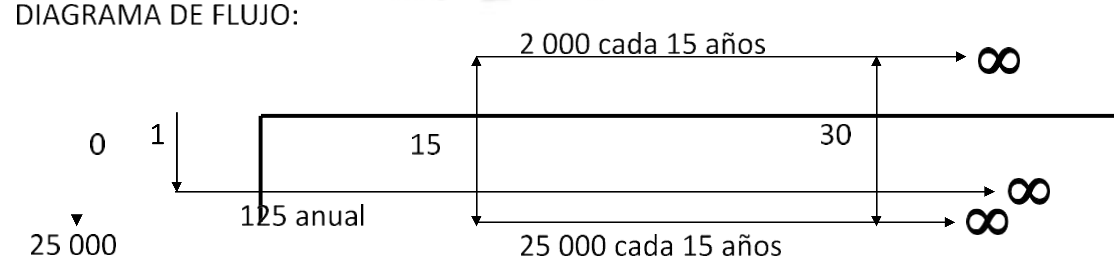
   SOLUCION:

   C = 25 000 ; k = 15 años;

   $\text{Valor residual} = 0.08 * 25000 = 2000$

   Costo anual de mantenimiento = 125; i = 3 % TEA ;

   DIAGRAMA DE FLUJO:



   Costos recurrentes:

   25000 cada 15 años

   —2000 cada 15 años

Costos recurrentes netos 23000 cada 15 años

Costos no recurrentes: los primeros 25000

$$K = 25000 + \frac{125}{i_1} + \frac{23000}{i_{15}}$$

$$K = 25000 + \frac{125}{0.03} + \frac{23000}{1.03^{15}-1} = 70387.71$$

2. Un equipo industrial tiene un costo de $ 800 000; un valor de salvamento del 15 % de su valor inicial y se le estima 12 años de vida útil, ¿cuál será su costo capitalizado al 8 % con capitalización trimestral?

   Solución:

   En este caso, el único costo recurrente es su valor de uso.

   $$W = C - VS = 85\% * 800000 = 680000$$

   $$K = 800000 + \frac{680000}{i_{12}} = 800000 + \frac{680000}{\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{48} - 1} = 1228462.40$$

3. Una empresa pesquera, ubicada, como es de suponer, a orillas del mar tiene que ser pintada periódicamente con pinturas especiales. El costo de aplicarle un esmalte químicamente tratado es de $6700, este esmalte evita la corrosión por un periodo de aproximadamente 5 años; la alternativa presenta un esmalte normal con un costo de $3000 y protege la superficie recubierta por un tiempo aproximado de 2 años, considerando un 7% TEA calcule el costo de mantener a perpetuidad la empresa si se emplea:

   a. El esmalte químicamente tratado
   b. El esmalte normal
   c. ¿cuál de los dos esmaltes es más favorable?
   d. ¿Hasta qué costo se podría aceptar la oferta normal para que sea equivalente al esmalte químicamente tratado?

   Solución:

a. $K_1 = 6700 + \frac{6700}{1.07^5-1} = 23343.82$

b. $K_2 = 3000 + \frac{3000}{1.07^2-1} = 23703.93$

c. Dado que K_1 € K_2 entonces: Es mas favorable el esmalte químicamente tratado.

d. Sea C el costo del esmalte NORMAL, su costo capitalizado será:

$$K_2 = C + \frac{C}{1.07^2 - 1} = 7.9013 * C$$

Si deseamos que el esmalte normal sea igualmente favorable como el esmalte químicamente tratado, los COSTOS CAPITALIZADOS deben ser iguales, $K_1 = K_2$ entonces: $23343.82 = 7.9013 * C$

$$C=2954.42$$

10.2 COSTO ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE CAUE

Esta técnica de evaluación se aplica de manera especial a aquellos casos en los que algunos activos de una empresa solo significan gastos o costos.
El proceso se sustenta en reemplazar todos los flujos recurrentes y no recurrentes que se presentan durante la vida útil del activo por una cantidad periódica (**anual**) uniforme.

10.2.1 CALCULO DEL CAUE

Tenemos más de una forma de calcular el CAUE:
Primera: CAUE = iK
Segunda: haciendo uso de la teoría de rentas temporales uniformes o variables, convertimos todos los costos recurrentes y no recurrentes , incluyendo el valor de salvamento, en una serie anual uniforme.

$$CAUE = \sum R_A + \sum R_B + \sum R_C$$

Tercera: Se calcula el valor presente de los costos (VPC) de uno o más períodos de vida útil del activo y a continuación, el valor actual se convierte en una serie anual uniforme:

$$CAUE = \frac{i\,VPC}{1 - (1+i)^{-n}}$$

10.2.2 Ejercicios Resueltos:

1. Una máquina selladora de envases tiene un costo de \$ 17 500 y se le estima una vida útil de 6 años y un valor residual del 9 % de su valor inicial. Si sus costos operativos y de mantenimiento suman \$. 400 en promedio anual, calcule su CAUE al 7.5 % TEA.
   Solución:

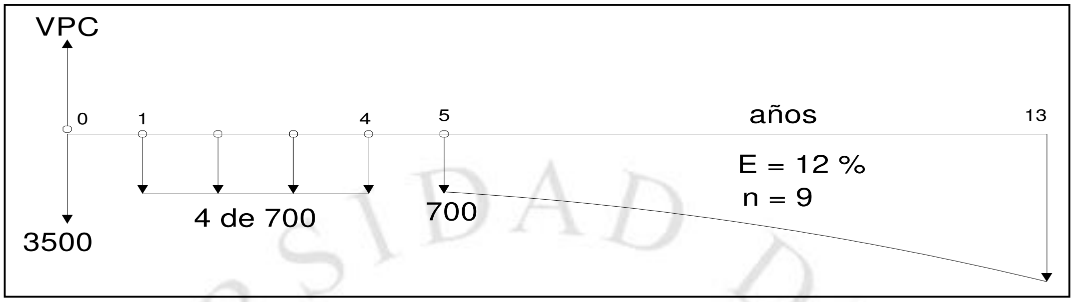
   $R_{Æ} = 400$

   $$R_{B1} = \frac{0.075 * 17500}{1 - (1+0.075)^{-6}} = 3728.29$$

   $$R_{B2} = \frac{0.075 * 1575}{(1+0.075)^{6} - 1} = 217.42$$

   $CAUE = 400 + 3728.29 - 217.42 = 3910.87$

2. Un activo tiene un costo inicial de $. 3 500 con una vida útil estimada de 13 años y costos operativos y de mantenimiento estimados de $. 700 anuales durante 5 años y a continuación con un incremento del 12 % respecto al inmediato anterior hasta el final. Calcule el costo presente equivalente, así como, el costo anual uniforme equivalente (CAUE): Considere una Tasa 15% TEA



$$\text{Valor presente de los costos} = \text{VPC} = 3500 + \text{P}$$
$$\text{P} = \text{A 1} + \text{A 2}$$

Consideramos que A1 es el valor actual de 4 términos de 700 (en lugar de 5) para que los siguientes, que van en PG, sean 9 empezando con uno de 700, el valor actual de estos 9 términos será A2:

$$A_1 = 700 * \left(\frac{1 - 1.15^{-4}}{0.15}\right) = 1998.49$$

$$A_2 = \frac{700}{1.15^9} * \left(\frac{1.129 - 1.15^9}{0.12 - 0.15}\right) * 1.15^{-4} = 2824.51$$

$$\text{VPC} = 3500 + 1998.49 + 2824.51 = 8323$$

$$\text{CAUE} = \text{R} = \frac{\text{i} * \text{VPC}}{1 - (1 + \text{i})^{-\text{n}}}$$

$$\text{CAUE} = \frac{0.15 * 8323}{1 - (1 + 0.15)^{-13}} = 1490.74$$

10.3 Factoring

10.3.1 Definición

El factoring es una operación de cesión del crédito a cobrar por la empresa a favor de una entidad financiera normalmente. Los créditos que son parte de cesión, están instrumentados en operaciones corrientes de la empresa, normalmente del flujo de venta de sus productos o servicios a terceros. En el caso de ventas a plazo, se genera un crédito a favor de la empresa apoyado en la operación comercial que es susceptible de ser transferido a un tercero.

10.3.2 Beneficios

1. Acceso a nueva fuente de financiamiento que complementa las líneas de crédito tradicionales.
2. Mejora la liquidez de las empresas.
3. Reduce los tiempos de cobro y riesgo de no pago de las cuentas por cobrar.
4. Se tiene el soporte que da la entidad financiera en la clasificación del crédito del cliente y la externalización de las labores administrativas de cobro.

Cabe mencionar que también se presentan inconvenientes como con el alto coste financiero que puede presentar la operación comparando con otros métodos para la financiación del circulante, la negativa por parte de la entidad financiera a anticipar determinados créditos de algunos clientes y el bloqueo contractual que puede imponer nuestro cliente a la cesión de créditos; punto muy usual en algunos contratos mercantiles.

10.3.3 Agentes

1. El Deudor: quien registra una obligación que cumplir con el cliente por haber recibido de él mercaderías por ventas al crédito (quien hace la compra).
2. El Cliente: quien tiene una factura por cobrar al deudor y requiere liquidez para cubrir sus necesidades de caja.
3. La empresa que hace Factoring (Factor): banco o entidad financiera, que, a cambio de quedarse con el derecho de cobro de la factura, le paga al cliente el monto adeudado sujeto a un descuento, para posteriormente cobrarle al deudor en el plazo consignado en la factura.

10.3.4 Clases de Factoring

1. Factoring sin Recurso: Cuando la compañía de Factoring (Factor) asume el riesgo de insolvencia de los compradores. En caso de no pago, el Banco asume.
2. Factoring con Recurso: Cuando el vendedor es quien soporta el riesgo de insolvencia de sus compradores (deudores). El Factor no asume riesgo crediticio. En caso de no pago, el Banco carga al cliente, los intereses, gastos y monto adelantado.

La operación usual de factoring contempla el anticipo parcial o total del crédito cedido a la entidad financiera y salvo deudores de primera calidad y con muy buena calificación crediticia, las entidades financieras realizan factoring con recurso, factoring que no recoge el riesgo de impago en la entidad financiera.

10.3.5 El coste del factoring

El proceso que hemos descrito de factoring tiene un coste financiero importante, dado que las entidades financieras suelen aplicar una comisión por cada operación; también un tipo de interés por el anticipo de los créditos y pueden repercutir en simultáneo el coste de otros servicios asociados, como puede ser un seguro de tipo de cambio o un informe comercial previo de la empresa con la que se va a trabajar.

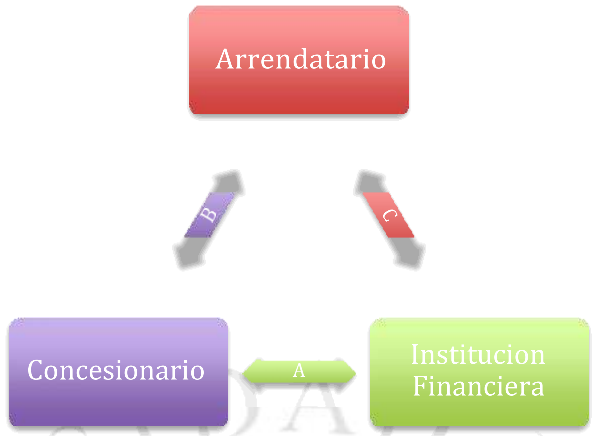
A efectos de la pyme (pequeña y mediana empresas), el factoring sólo se suele aceptar por parte de las entidades financieras en los casos en que estas pequeñas empresas trabajan con grandes empresas, por ejemplo con alguna de las empresas que cotizan en Bolsa, y se han formalizado plazos de pago muy extendidos, por lo cual aplicarlo es realmente un beneficio.
En el caso de que se formalice dicha operación de factoring, la entidad financiera que adquiere los derechos del crédito; que se denomina factor, paga a la empresa cedente en el momento de hacerse cargo de la operación de cobro y también se encargará de cobrarle al cliente a la fecha de vencimiento del crédito comercial.

10.4 ARRENDAMIENTO FINANCIERO

10.4.1 INTRODUCCION

Es un tipo de arrendamiento en el que se transfieren sustancialmente todos los riesgos, ventajas y beneficios inherentes a la propiedad del activo en favor de una institución financiera. La titularidad del mismo puede o no ser eventualmente transferida al término del convenio.
Es un contrato mercantil en el que una institución financiera (arrendador) entrega a una empresa/persona (arrendatario) un bien en uso o goce a cambio de pagos (capital e intereses): pagos mínimos. Se debe de concretar por escritura pública, para que surta efecto ejecutivo en caso de incumplimiento de la obligación.
Al final se realiza un pago simbólico (opción de compra) y el bien pasa a propiedad del arrendatario.

10.4.1.1 FIGURA 1: "INTERACCION DE ELEMENTOS DE UN ARRENDAMIENTO FINANCIERO"



La figura 1, muestra la interacción entre los elementos de esta fuente de financiamiento de largo plazo.

El flujo "A" indica como operación inicial, el desembolso del costo total del activo fijo a favor de la empresa proveedora o concesionario de activos fijos por parte de la institución financiera. Con esta operación, la institución financiera obtiene la propiedad del activo.

El flujo "B" indica la entrega del activo fijo al arrendatario para que este disponga de sus beneficios y pase a formar parte de sus activos. Con esta operación el arrendatario asume la posesión del activo y sus beneficios más no de la propiedad.

El flujo "C" indica los pagos periódicos uniformes que el arrendatario debe pagar a favor de la institución financiera que lo ha apalancado. Los pagos periódicos son calculados de acuerdo al convenio entre las partes. En este acuerdo se debe definir el plazo, la tasa de interés, los costos relacionados al financiamiento y la opción de compra.

10.4.2 CARACTERISTICAS

1. Los activos en arrendamiento financiero son de tal naturaleza especializada que sólo el arrendatario puede usarlo sin la necesidad de efectuar modificaciones importantes.
2. El arrendatario puede rescindir el contrato de arrendamiento, y las pérdidas del arrendador asociadas a la rescisión son cubiertas por el arrendatario.
3. Las ganancias o pérdidas derivadas de la fluctuación en el valor razonable residual del activo corresponden al arrendatario.
4. El arrendatario tiene la posibilidad de continuar con el arrendamiento por un periodo adicional con un alquiler que es sustancialmente menor que el valor de mercado.

10.4.3 ELEMENTOS

PLAZO “n”; Es el periodo acordado del financiamiento en donde se precisa la cantidad de y el periodo de los pagos.
TASA “i”; Es la tasa efectiva anual acordada para el cálculo de los intereses sobre el valor del contrato.
CAPITAL “C”; Es el valor comercial del activo fijo que el proveedor o concesionario asigna.
CUOTA “R”; Es el pago periódico uniforme a favor de la institución financiera por parte del arrendatario.
OPCION DE COMPRA “O/C”; Es el último pago para la cancelación de la operación. Al generarse la opción de compra, el arrendatario pasa a ser el propietario del activo fijo. Este pago es optativo.

10.4.4 VENTAJAS

- Depreciación acelerada de los bienes con un plazo mínimo de 2 años para bienes muebles y de 5 años para inmuebles. El plazo usual permitido de depreciación es de 10 años y 33 años respectivamente.
- Estructuración de cuotas de acuerdo con el flujo de caja esperado.
- Desembolsos parciales para realizar la compra o construcción de los bienes.
- Acceso a financiamiento de mediano plazo manteniendo los bienes en el balance del Arrendatario.
- Financiamiento bastante flexible para las empresas debido a las oportunidades que ofrece.
- Evita riesgo de una rápida obsolescencia para la empresa ya que el activo no pertenece a ella.
- Los arrendamientos dan oportunidades a las empresas pequeñas en caso de quiebra.

10.4.5 DESVENTAJAS

- Algunas empresas usan el arrendamiento como medio para eludir las restricciones presupuestarias cuando el capital se encuentra racionado.
- Un contrato de arrendamiento obliga una tasa costo por concepto de intereses más alta lo que por lo general resulta más costoso que la compra de activo.
- Por el contrato de arrendamiento financiero, el arrendatario se obliga a pagar unas cuotas al arrendador, que están destinadas a:
- Pagar el precio del bien objeto del contrato.
- Pagar los gastos financieros de la operación.
- Pagar el IGV.
- Se debe de pagar además un seguro obligatorio al arrendatario.

10.4.6 FORMULAS

10.4.6.1 CALCULO DEL VALOR ACTUAL DE UN ARRENDAMIENTO FINANCIERO"

$$C = \frac{R[1-(1+i)^{-n}]}{i} + \frac{"O/C"}{(1+i)^n}$$

La fórmula muestra el procedimiento para el cálculo del valor actual del arrendamiento financiero. Como se aprecia, la formula recurre a dos conceptos antes vistos en este libro.

a. Valor Actual Rentas Vencidas; la primera parte de la ecuación utiliza este argumento para obtener el valor actual de todos los desembolsos generados en esta operación.
b. Valor Actual de Interés Compuesto; este argumento es usado para calcular el valor actual de la opción de compra.

La suma de ambos argumentos da como resultado el valor actual del arrendamiento financiero. Cabe resaltar que al tomar la teoría de rentas vencidas, estamos **sobreponiendo un sistema de amortización creciente (método francés)** para la amortización de los capitales en cada fecha de vencimiento de cada cuota.

Analice el siguiente ejemplo;
Se firma un contrato de arrendamiento financiero con las siguientes características:

- Capital: $25,000.00
- Plazo: 4 años.
- Pagos: Vencidos Anuales.
- TEA: 10%.
- Opción de compra: $3,500.00

¿Cuál será la cuota vencida anual que se genere por este financiamiento?

$$\$25,000 = \frac{R[1 - (1 + 0.10)^{-4}]}{0.10} + \frac{\$3,500}{(1 + 0.10)^4}$$

$$\$25,000 = R(3.169865446) + \$2,390.55$$

$$R = \$7,132.62$$

De esta manera resolvemos que la cuota anual que se deberá pagar para cumplir con esta obligación tiene un valor de $7,132.62. Nótese que esta cuota está cubriendo todos los costos que demanda el financiamiento, excepto la opción de compra, de tal forma que al momento del desembolso de la última cuota, el saldo pendiente de pago será equivalente a la opción de compra, será decisión del arrendatario ejercerla o no.
Comprobemos lo antes mencionado con la tabla de amortización correspondiente a este ejemplo.

10.4.6.2 TABLA DE AMORTIZACION

La tabla de amortización para un arrendamiento financiero se generara aplicando el sistema de amortización creciente (método francés).

TABLA 1: "TABLA DE AMORTIZACION DEL ARRENDAMIENTO FINANCIERO"

PERIODO	CAPITAL	INTERES	CUOTA	AMORTIZACION	SALDO
1	$25,000.00	$2,500.00	$7,132.62	$4,632.62	$20,367.38
2	$20,367.38	$2,036.74	$7,132.62	$5,095.88	$15,271.50
3	$15,271	$1,527.15	$7,132.62	$5,605.47	$9,666.02
4	$9,666.03	$966.60	$7,132.62	$6,166.02	$3,500.00

La tabla 1 muestra la disminución de capitales en relación a cada pago uniforme vencido.

10.4.7 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Se ha adquirido un vehículo mediante un arrendamiento financiero con las siguientes características:

   - Pagos: mensuales uniformes vencidos.
   - Plazo: 3 años.
   - Tasa: efectiva anual 15%.
   - Capital: $45,000
   - Opción de compra: $5,000

   Calcule el pago mensual producto de este financiamiento.

   SOLUCIÓN
   TEA = 15%

   $$\mathrm{TEM} = [(1+0.15)^{\frac{1}{12}}] - 1 = 1.1714917\%$$

   $$\$45{,}000 = \frac{\mathrm{R}[1 - (1+0.01714917)^{-36}]}{0.01714917} + \frac{\$5,000}{(1+0.15)^{3}}$$

   $$\mathrm{R} = \$1,426.80$$

2. La empresa MG, necesita un sistema de vigilancia para su almacén ubicado al sur de la ciudad. Para tal fin tiene dos alternativas:

   a. Alquilar los servicios de la empresa PROSEGURO, este servicio consiste en la instalación de cámaras y el monitoreo de estas. El costo de este servicio mensual será de $3,000.

b. Adquirir los equipos por un valor de $80,000 mediante un arrendamiento financiero con el BANCO DE LIMA a un plazo de 3 años a una TET 5%, con cuotas vencidas mensuales y una opción de compra de $8,000.

Calcule el pago mensual producto del arrendamiento financiero e indique que alternativa conviene.

SOLUCIÓN

TET = 5%

$$\mathrm{TEM} = [\ (1 + 0.05)^{\frac{1}{3}}] - 1 = 1.6396357\%$$

$$\$80,000 = \frac{R[1 - (1 + 0.016396357)^{-36}]}{0.016396357} + \frac{\$8,000}{(1 + 0.05)^{12}}$$

$$R = \$2,795.06$$

CONVIENE ADQUIRIR LOS EQUIPOS MEDIANTE ARRENDAMIENTO FINANCIERO

3. El BANCO PACIFICO ha otorgado un equipo a la empresa ATLANTICO mediante la firma de un contrato de arrendamiento financiero. Este financiamiento se ha pactado con las siguientes características:

- Pagos: trimestrales uniformes vencidos.
- Plazo: 4 años.
- Tasa: efectiva anual 12%.
- Opción de compra: 10% del valor del capital
- Cuota: $3,500.

Calcule el importe del financiamiento y de la opción de compra.

SOLUCIÓN

TEA = 12%

$$\mathrm{TET} = [(1 + 0.12)^{\frac{1}{4}}] - 1 = 2.8737345\%$$

$$A = \frac{\$3,500[1 - (1 + 0.028737345)^{-16}]}{0.028737345} + \frac{A * 0.10}{(1 + 0.12)^{4}}$$

$$A = \$47,403.85$$

$$\mathrm{OC} = \$4,740.39$$

4. SUPERMERCADOS LIDER ha firmado 20 contratos de arrendamiento financiero con el BANCO CCI para la adquisición de 20 frigoríficos. Cada contrato se firmó aceptando las siguientes condiciones

- Pagos: semestrales uniformes vencidos.
- Plazo: 5 años.
- Tasa: efectiva anual 10%.
- Valor presente de opción de compra: $1,862.76
- Valor de cada frigorífico: $13,700.

Calcule el valor de cuota por pagar por cada contrato.

SOLUCIÓN

TEA = 10%

$$\mathrm{TES} = [\ (1+0.10)^{\frac{1}{2}}] - 1 =$$

$$\$13{,}700 = \frac{\mathrm{R}[1 - (1+0.048808848)^{-10}]}{0.048808848} + \$1{,}862.76$$

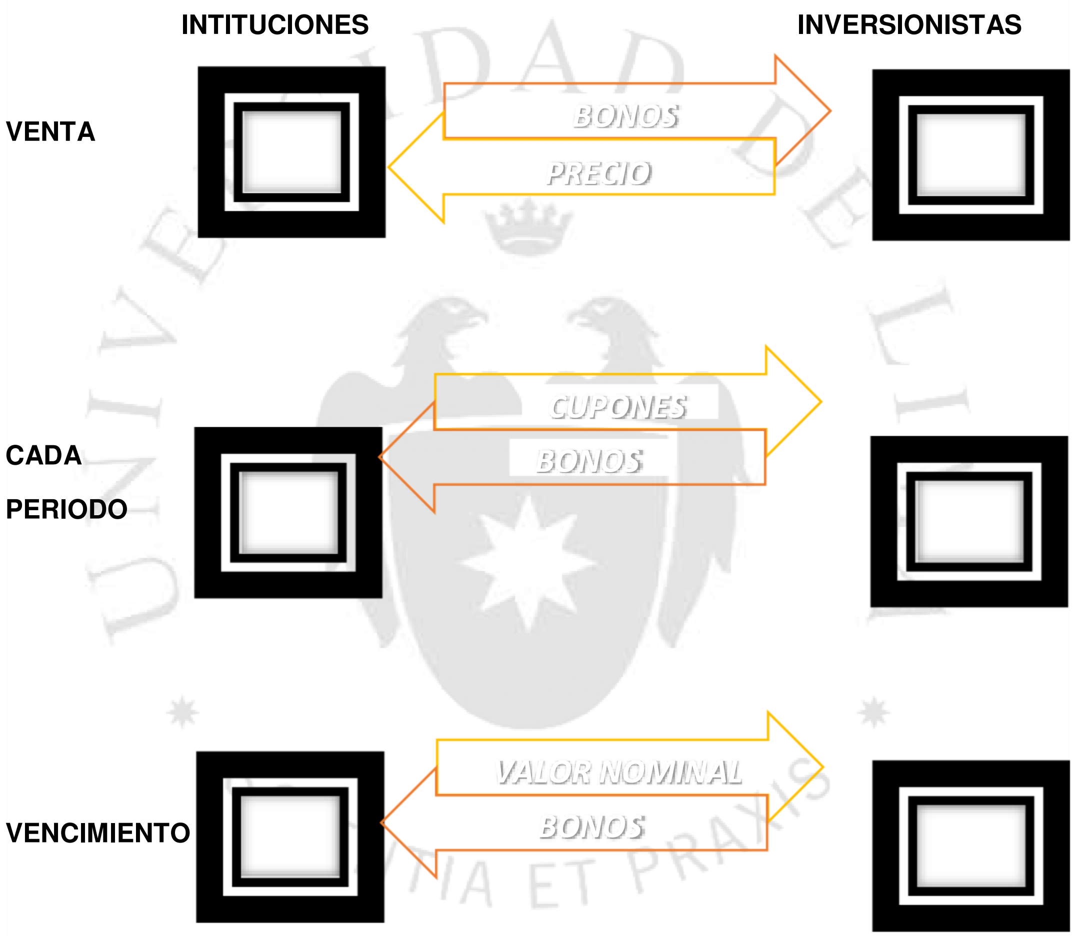
$$\mathrm{A} = \$47{,}403.85$$

10.5 BONOS

10.5.1 INTRODUCCION

Es una forma de generar financiamiento a largo plazo para la organización. Las organizaciones que requieran de capital externo pueden recurrir a la emisión de bonos. Los inversionistas externos adquieren estos bonos con la finalidad de recuperar su inversión más los intereses pactados en un determinado tiempo.

FIGURA 1: "INTERACCION DE ELEMENTOS DE UN ARRENDAMIENTO FINANCIERO"



La figura 1, muestra la interacción entre los elementos de esta fuente de financiamiento de largo plazo.

En el momento de la venta de bonos, las instituciones emiten los bonos en el mercado de valores. El mercado de valores, en función a los niveles de riesgo, asigna un precio y los inversionistas compran el título valor.

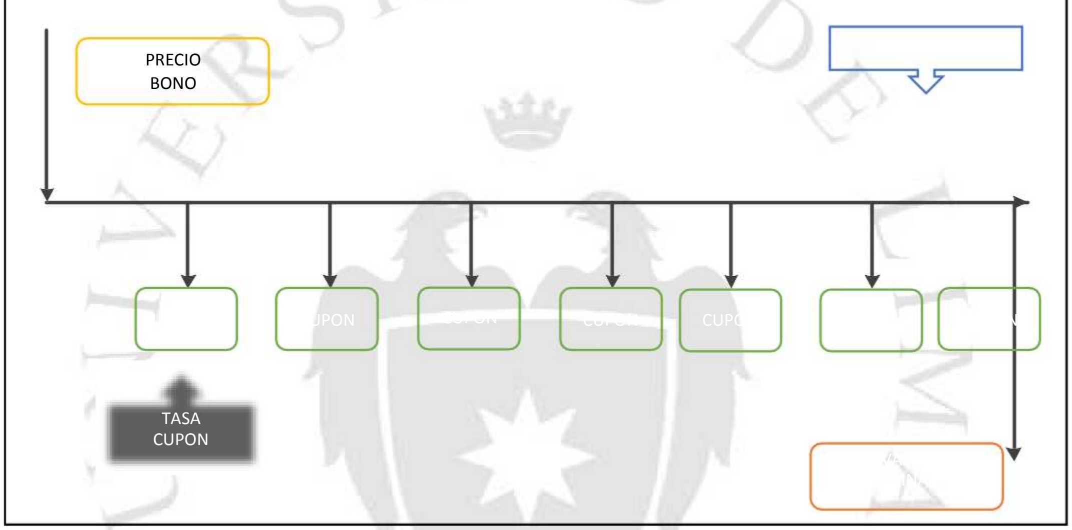
Entre la fecha de venta y la del vencimiento, las instituciones emisoras de bonos, pagan de manera frecuente cupones. Estos cupones que se pagan hasta el vencimiento del bono, son para el uso y libre disponibilidad de los inversionistas.

En el momento de vencimiento, las instituciones pagan el valor nominal a los inversionistas, quedando así finalizado la operación de financiamiento.

10.5.2 ELEMENTOS

Valor Nominal (VN): valor del bono al vencimiento del contrato. (Valor a la par)
Precio del Bono (PV): valor del bono al inicio del contrato.
Tasa Cupón (TN): valor porcentual de los intereses cobrados por la tenencia del bono.
Cupón (C): valor monetario del pago de los intereses pactados en base a la tasa cupón.
Vencimiento (N): fecha del término del contrato.

FIGURA 2: "DIAGRAMA DE FLUJO"



La deuda asumida se amortiza en su totalidad en la fecha de vencimiento (método de amortización americano). Los cupones no representan pago de amortización alguno.
En este punto es preciso indicar que la emisión y venta de un bono, requiere de una entidad intermediaria que cumpla con el rol de comercializar estos títulos valores emitidos por instituciones hacia los inversionistas.
A su vez, en esta comercialización, influye la opinión y estudios de riesgo hecha por calificadoras de riesgo a las empresas emisoras. Son estos estudios de riesgo que influyen en el precio de venta de los bonos, precio que cambia constantemente en función a los cambios del mercado.
Al tener todos los elementos identificados en la adquisición de un bono, los inversionistas pueden calcular la tasa de rendimiento que obtendrán con esta inversión. En ese sentido se puede afirmar que un elemento adicional a los ya mencionados es la tasa de rendimiento.

10.5.3 Tasa de Rendimiento (TE)

Tasa que representa de manera efectiva cual es el rendimiento obtenido al momento de adquirir el título valor. Esta tasa también es llamada "tasa de descuento".

10.5.4 PRECIO Y RENTABILIDAD DE UN BONO

Considerando el hecho que el inversionista tiene total conocimiento de los flujos de efectivo que recibirá por la tenencia y cobro del bono; se debe preguntar lo siguiente:

- ¿Cuál es el ***máximo precio*** dispuesto a pagar por el bono?

- ¿Cuál es la ***rentabilidad al vencimiento*** que obtendrá teniendo en cuenta el precio del bono?

Procederemos al cálculo del precio de un bono en función a la siguiente fórmula:

10.5.5 FORMULAS

10.5.5.1 CALCULO DEL PRECIO DE UN BONO

$$PV = \frac{C[1-(1+TE)^{-n}]}{i} + \frac{VN}{(1+TE)^{n}}$$

La fórmula muestra el procedimiento para el cálculo del precio de un bono.
Como se aprecia, la formula recurre a dos conceptos antes vistos en este libro.

a. Valor Actual Rentas Vencidas; la primera parte de la ecuación utiliza este argumento para obtener el valor actual de todos los desembolsos generados en esta operación.

b. Valor Actual de Interés Compuesto; este argumento es usado para calcular el valor actual del valor nominal.

La suma de ambos argumentos da como resultado el valor del precio de un bono.

10.5.5.2 CALCULO DEL CUPON

$$C = TN * VN$$

La fórmula muestra el procedimiento para el cálculo del valor del cupón. Como se aprecia, la formula recurre a un concepto antes vistos en este libro.

a. Interés Simple; la ecuación utiliza este argumento para obtener el valor del pago de un cupón. Esta valorización se estable bajo el régimen de interés simple.

Analicemos el siguiente ejemplo;
Se firma un contrato de arrendamiento financiero con las siguientes características:

- Valor Nominal: $1,000.00
- Plazo: 5 años.
- Pagos Cupones: Anual.
- Tasa Cupón: 10% nominal anual.
- Tasa de Descuento: 9%

¿Cuál será el precio de venta de este bono?

En primera instancia se calcula el valor del cupón:

$$C = 10\% * \$1,000 = \$100$$

En segunda instancia se calcula el valor del precio del bono:

$$PB = \frac{\$100(1 - (1 + 0.09)^{-5})}{0.09} + \frac{\$1,000}{(1 + 0.09)^5}$$

$$PB = \$1,038.90$$

De esta manera resolvemos que el precio que deberá pagar el inversionista para la adquisición del bono es de $1,038.90. Dado que la venta de este título valor se ha realizado por encima de su valor nominal, a la venta se le da el nombre de “Sobre la Par”.

10.5.6 EJERCICIOS RESUELTOS

1. Se han emitido bonos a un valor nominal de $1,000 en un plazo de 10 años para pagar cupones cada trimestre a una TNA del 10%. ¿Cuál es el precio que un inversionista debe pagar por este bono si espera un rendimiento efectivo anual del 15%?

SOLUCIÓN

Plazo: 10 AÑOS N: 40 Pagos (10 X 4)

VN: $1,000

TNA: 10% TNT:2.5%

CUPON: $2.5\% * \$1,000 = \$25$

TEA: 15% $TET = [(1 + 0.15)^{\frac{1}{4}}] - 1 = 3.5558076\%$

$$PB = \frac{\$25(1 - (1 + 0.035558076)^{-20})}{0.035558076} + \frac{\$1,000}{(1 + 0.035558076)^{20}}$$

$$PB = \$776.47$$

2. Una empresa inmobiliaria requiere la suma de $20´000,000 para la inversión de un nuevo proyecto. Como forma de financiamiento ha emitido bonos a un valor nominal de $1,000 en un plazo de 5 años pagando cupones cada semestre por un valor de $50. Se pide:
   a. Calcular el precio de venta del bono si se tiene que considerar una TEA de 12%.
   b. Calcular la cantidad de bonos a emitir para cubrir el financiamiento.

SOLUCIÓN

Plazo: 5 AÑOS N: 10 Pagos (10 X 2)

VN: $1,000

CUPON: $50

TEA: 12% $TES = [(1 + 0.12)^{\frac{1}{2}}] - 1 = 5.8300524\%$

$$PB = \frac{\$50(1 - (1 + 0.058300524)^{-10})}{0.058300524} + \frac{\$1,000}{(1 + 0.058300524)^{10}}$$

$$PB = \$938.41$$

Cantidad de bonos a emitir:

$$\text{unds} = \frac{\$20'000,000}{\$938.41}$$

$$\text{unds} = 21,313$$

3. Se tiene la información de 2 emisiones de bonos hecha por una empresa para un plazo de 8 años. Se requiere saber el valor de las incógnitas considerando que ambas emisiones utilizaron una TEA del 9%.

	Bono "A"	**Bono "B"**
Valor Nominal	$1,000	¿?
Cupones	¿?	$100
Pagos	Cada 4 meses	Cada 6 meses
Precio	$1,100	$9,500

SOLUCIÓN
BONO "A"

Plazo: 8 AÑOS   N: 24 Pagos (8 X 3)
VN: $1,000
PB: $1,100
TEA: 9% $TEC = [(1 + 0.09)^{\frac{1}{3}}] - 1 = 2.9142467\%$

$$\$1,100 = \frac{C(1 - (1 + 0.029142467)^{-24})}{0.029142467} + \frac{\$1,000}{(1 + 0.029142467)^{24}}$$

$$C = \$34.99$$

BONO "B"

Plazo: 8 AÑOS   N: 16 Pagos (8 X 2)
C: $390
PB: $9,500
TEA: 9% $TES = [(1 + 0.09)^{\frac{1}{2}}] - 1 = 4.4030651\%$

$$\$9,500 = \frac{\$390(1 - (1 + 0.044030651)^{-16})}{0.044030651} + \frac{VN}{(1 + 0.044030651)^{16}}$$

$$VN = \$10,137.76$$

4. Hace 5 años se emitieron bonos con un valor nominal de $1,000 con cupones de valor $50 cada trimestre, esta emisión fue hecha para 10 años. El día de hoy los tenedores de este bono están evaluando su venta en el mercado secundario. ¿Cuánto recibirán por esta venta si el mercado aplica una TEA del 11%?

SOLUCIÓN

Plazo: 5 AÑOS N: 20 Pagos (5 X 4)
C: $50
VN: $1,000
TEA: 11% $\mathrm{TET} = [(1+0.011)^{\frac{1}{4}}] - 1 = 2.6433327\%$

$$\mathrm{PB} = \frac{\$50(1 - (1+0.026433327)^{-20})}{0.026433327} + \frac{\$1,000}{(1+0.026433327)^{20}}$$

$$\mathrm{PB} = \$1,362.46$$

5. Un inversionista desea adquirir bonos a valor nominal de $1,000 a 5 años con pagos de cupones de $35 a pagarse cada inicio de semestre. Si se aplica una TEA de 7% para la adquisición de este título valor, ¿Cuál deberá ser el precio apropiado a pagar?

SOLUCIÓN

Plazo: 5 AÑOS N: 10 Pagos (5 X 2)
C: $35
VN: $1,000
TEA: 7% $\mathrm{TES} = [(1+0.07)^{\frac{1}{2}}] - 1 = 3.4408043\ \%$

$$\mathrm{PB} = \frac{\$35(1+0.034408043)(1 - (1+0.034408043)^{-10})}{0.034408043} + \frac{\$1,000}{(1+0.034408043)^{10}}$$

$$\mathrm{PB} = \$\mathbf{1,014.98}$$