CURSO DE MATEMÁTICA FINANCIERA

TEORÍA Y EJERCICIOS

González-Vila Puchades, Laura

Ortí Celma, Francesc J.

Sáez Madrid, José B.

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Universitat de Barcelona

PRESENTACIÓN

En principio, todos somos conscientes del diferente valor que tiene el dinero según el momento en que se disponga de él, de forma que es preferible cobrar 1.000€ al final de cada mes que 12.000€ al final del año. Sin embargo, muchas veces, en la práctica y de forma inconsciente, se suman cantidades monetarias situadas en distintos momentos del tiempo (lo habitual es que se diga que se percibe un sueldo anual de 12.000€). En general, se hace poco hincapié en el momento concreto de la percepción del dinero y se centra la atención únicamente en las cantidades monetarias.

Justamente uno de los objetivos que nos hemos propuesto los autores de este manual es que los alumnos de los grados relacionados con la economía y la empresa, que en el futuro participarán en los mercados financieros, traten con una cierta profundidad el mundo de la matemática financiera y aprendan a valorar cantidades monetarias disponibles en diferentes instantes temporales y, con ello, productos financieros.

A partir de la idea básica del *valor temporal del dinero*, se estará en disposición de entender el significado de términos como capitalizar, actualizar, tipo de interés nominal, TAE, TIR, etc., y se habrá adquirido la capacidad de analizar distintos productos financieros, negociar con entidades financieras sobre las condiciones de una determinada operación, plantearse las mejores opciones de financiación para un particular o una empresa, analizar la viabilidad de distintos proyectos de inversión, etc.

Otro de los objetivos parte del nuevo entorno docente que plantea el Espacio Europeo de Educación Superior: no se desea simplemente transmitir un conjunto de conceptos financieros, sino que se pretende que el alumno sea el centro del proceso de aprendizaje. Para ello, consideramos imprescindible que los estudiantes puedan disponer de este material con antelación a las sesiones presenciales. Esto debe permitir el abandono de las tradicionales exposiciones magistrales con el fin de dinamizar las clases, hacer participar en ellas a los alumnos, fomentar un aprendizaje activo de los mismos y promover su trabajo autónomo.

En cada tema se realizará una exposición, sencilla pero rigurosa, de los conocimientos teóricos necesarios. Esta teoría siempre se acompañará de ejemplos resueltos, que han de servir de guía para poder afrontar con mayor garantía de éxito los ejercicios que en el transcurso de la clase se propondrán para que sean analizados, resueltos y discutidos entre alumnado y profesor. Por un lado se enunciarán ejercicios de perfil académico que ayudarán al estudiante a comprender los fundamentos teóricos y, por otro lado, se complementarán con ejercicios extraídos del mercado financiero para que el alumno entienda su aplicación práctica y profesional. La discusión y debate formarán parte del proceso de aprendizaje, pues en matemática financiera es frecuente que un problema pueda tener diferentes soluciones equivalentes.

La redacción de los temas que se especifican a continuación son el resultado de años de experiencia de los autores impartiendo docencia en la materia de matemática de las operaciones financieras, tanto en el ámbito universitario como en el ámbito profesional de los mercados financieros. El material se divide en dos bloques temáticos:

1) **Fundamentos del equilibrio financiero**: Incluye los conceptos básicos de la matemática financiera imprescindibles para comprender el funcionamiento de una operación. Entre otros, destacamos los de capital financiero, equivalencia financiera, precios financieros, regímenes financieros de interés simple vencido, descuento comercial e interés compuesto, suma financiera y clasificación y valoración de rentas financieras constantes, geométricas y aritméticas.

2) **Operaciones financieras**: En base a los fundamentos adquiridos en el primer bloque, se explican y valoran diferentes tipologías de préstamos financieros y también se detallan las características de algunos empréstitos de deuda pública y privada.

Evidentemente, no todo el proceso de aprendizaje debe realizarse en el aula. Para que los conceptos vistos en clase puedan ser asimilados adecuadamente se requiere un periodo de análisis, reflexión y refuerzo. Para conseguirlo, tras cada tema se propone un listado de ejercicios a resolver de forma autónoma y personal por cada alumno. Para comprobar la correcta resolución de dichos ejercicios, al final del manual se recoge la solución de cada uno de ellos. De esta forma, el alumno será consciente de sus progresos y sus deficiencias en la materia, que deberá resolver con ayuda de otros compañeros o del profesor.

A pesar de toda la información suministrada, creemos conveniente complementar este material con otros textos específicos del campo de la matemática financiera como los que exponemos en la bibliografía, así como orientar al alumno sobre páginas web donde pueda encontrar información actualizada sobre distintos productos del mercado financiero que se estén estudiando en cada momento.

Esperamos que este material pueda ser útil a los alumnos universitarios que actualmente cursan estudios de matemática financiera e, incluso, para personas que puedan estar interesadas en este tema.

LOS AUTORES

Diciembre de 2014

NOTA: Dado el carácter no lucrativo y la finalidad docente del contenido de este material, los autores se acogen al artículo 32 de la *Ley de Propiedad Intelectual* vigente, respecto al uso parcial de obras ajenas como imágenes, gráficos, textos, etc.

ÍNDICE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

1. **Operación financiera: definición, elementos y clasificación**
2. **Equilibrio de la operación financiera**
3. **Definición y clasificación de los regímenes financieros**
4. **Regímenes financieros simples**
5. **Regímenes financieros compuestos**

2. Valoración financiera

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Capital financiero

Aunque habitualmente se habla de capital haciendo referencia únicamente a una cantidad de dinero, financieramente hablando es necesario considerar que la valoración de un capital depende del momento en el tiempo que se considere. Así, resulta evidente que, 1.000€ de hace 5 años no tienen el mismo valor que 1.000€ actuales

Es decir, cualquier cantidad de dinero tiene un valor intrínseco derivado del número de unidades monetarias que representa, y otro valor como consecuencia del momento del tiempo en que esté situado

Este segundo valor es el que se conoce como **valor temporal del dinero**

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Se define **capital financiero** como cualquier **cantidad monetaria** disponible en un **instante temporal**

$$(C,T) \quad C \geq 0,\ T \geq 0$$

C se denomina **CUANTÍA** y representa cualquier cantidad monetaria expresada en euros, dólares, libras, etc. Por defecto la expresaremos en euros

T se denomina **DIFERIMIENTO** y representa el instante temporal en que se sitúa la cuantía, expresado en años, meses, días, etc. respecto a un determinado origen. Por defecto lo expresaremos en años

Ejemplo:

$\left(6.000, \frac{3}{12}\right)$ Representan 6.000€ disponibles dentro de 3 meses

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: ¿Qué representan los siguientes capitales financieros?

$$(2.500, 4)$$

$$\left(15.000, \frac{3}{4}\right)$$

$$\left(827, \frac{142}{365}\right)$$

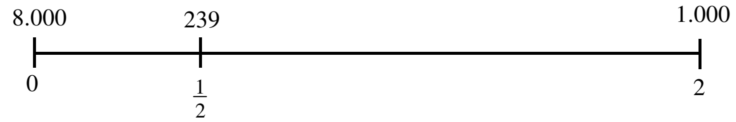
Gráficamente, fijando un origen y la unidad de tiempo, representaremos los capitales financieros en un eje horizontal, situando las cuantías en la parte superior del eje y los instantes en la parte inferior del eje:

En esta zona representaremos las cuantías

En esta zona representaremos los instantes

Ejemplo: Representar en el mismo eje temporal los siguientes capitales financieros

$$(1.000, 2) \qquad (8.000, 0) \qquad \left(239, \tfrac{1}{2}\right)$$



Ejercicio: A partir de hoy y durante un año se prevé cobrar 100€ al final de cada trimestre. Indicar y representar en el mismo eje temporal los capitales financieros

Ejercicio: Escribir y representar gráficamente los capitales financieros especificados en el siguiente conjunto

$$\left\{\left(430 + 5 \cdot (r-1), 2 + \tfrac{r}{12}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,6}$$

1.2 Definición de operación financiera

Es el acuerdo para el **intercambio de capitales financieros**, entre personas (físicas o jurídicas), en **diferentes momentos de tiempo**

Ejercicio: Indicar cuáles de las siguientes situaciones puede considerarse como operación financiera.

a) Depositar en una entidad financiera 5.000€ a cambio de que en 1 año nos devolverá 5.200€

b) Ir a un Banco y pedir cambio de 500€ en billetes de 10€

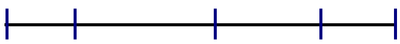
c) Ir a un concesionario de motos y comprar al contado una moto valorada en 3.000€

d) Concedernos el Banco un préstamo a devolver durante 3 años en pagos mensuales para poder comprarnos la moto anterior

Ejercicio: Indicar y representar en el eje temporal los capitales financieros de las siguientes operaciones financieras:

a) Una empresa compra hoy por 31.246€ un activo financiero de nominal 32.000€ que vence al cabo de 183 días

b) Una cuenta se abrió hace 2 años con una imposición inicial de 4.000€. A los 5 meses de su apertura se realizó un ingreso de 800€, hace 8 meses se realizó una nueva imposición de 2.000€ y dentro 3 meses se ingresarán 600€



1.3 Elementos de una operación financiera

Toda operación financiera tiene tres elementos:

1) Elemento personal:

Son las personas físicas o jurídicas que intervienen en la operación

SUJETO ACTIVO: Persona que posee los capitales financieros y decide cederlos durante un plazo a cambio del cobro de una retribución

SUJETO PASIVO: Persona que recibe los capitales financieros y se compromete a su devolución futura y al pago de una retribución

2) Elemento objetivo, material o real:

Son las capitales financieros que se intercambian. Los capitales que cede el sujeto activo se denominan PRESTACIÓN, mientras que los que retorna el sujeto pasivo se denominan CONTRAPRESTACIÓN

3) Elemento convencional o formal:

Es el conjunto de acuerdos o pactos que realizan los sujetos para llevar a cabo el intercambio. Habitualmente se refleja en un contrato mercantil que se firma

Ejemplo: Juan invierte hoy en un Plan de Pensiones del Banco Z la cantidad de 8.000€. A cambio, en el momento de su jubilación, dentro de 15 años, el Banco pagará a Juan la cantidad de 13.402,80€. Indicar los distintos elementos de la operación:

Elemento personal

Sujeto activo: Juan

Sujeto pasivo: Banco Z

Elemento objetivo, material o real

Prestación: 8.000€ hoy o $(8.000,0)$

Contraprestación: 13.402,80€ dentro de 15 años o $(13.402,80\ ,\ 15)$

Elemento convencional o formal

Plan de Pensiones, firmado por ambas partes, en el que se establecen las condiciones de esa operación financiera

1.4 Clasificación de las operaciones financieras

Según el número de capitales financieros existentes, una operación financiera se puede clasificar en:

1) Operación elemental:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación tienen un único capital financiero

2) Operación parcialmente compleja:

Aquellas en que la prestación o la contraprestación tienen un único capital financiero, estando la otra formada por un conjunto de capitales financieros

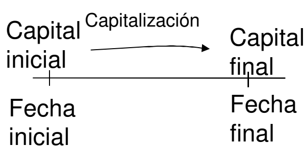
3) Operación totalmente compleja:

Aquella en que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un conjunto de capitales financieros

Según el sujeto en el que se centra el estudio de la operación:

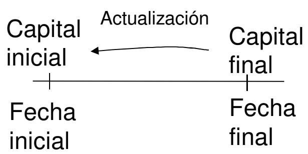
1) Operación de capitalización o de interés:

Operación en que el sujeto activo cede un capital en un determinado momento para recuperarlo en un instante posterior:



2) Operación de actualización o de descuento:

Operación en que al sujeto pasivo se le anticipa un capital disponible en el futuro a un momento anterior:



En muchos productos, a la fecha final también se la denomina **vencimiento**

2.1 Equivalencia financiera

Los sujetos que intervienen en una operación financiera de financiación (sujeto activo y sujeto pasivo) acuerdan, según unas determinadas condiciones o pactos, los capitales financieros que van a intercambiarse

Por tanto, los sujetos de la operación consideran que dichos capitales son financieramente equivalentes, es decir, se ha establecido una **equivalencia financiera** entre capitales financieros, y lo representaremos con el símbolo ≈

2.2 Representación de la equivalencia financiera

La equivalencia financiera entre capitales financieros se representa de las siguientes maneras:

1) Operación elemental:

Prestación: (C,T)

Contraprestación: (C',T')

Equivalencia financiera:

$$(C,T) \approx (C',T')$$

Ejemplo: Una empresa invierte hoy 3.500€ y prevé cobrar dentro de 2 años 3.750€. Indicar la prestación, la contraprestación y representar la equivalencia financiera

Prestación: $(3.500, 0)$

Contraprestación: $(3.750, 2)$

Equivalencia financiera:

$$(3.500, 0) \approx (3.750, 2)$$

2) Operación parcialmente compleja:

Prestación: (C,T)

Contraprestación: $\left\{(C_1^{'},T_1^{'}),(C_2^{'},T_2^{'}),\ldots,(C_n^{'},T_n^{'})\right\}$

Equivalencia financiera:

$$(C,T)\approx\left\{(C_1^{'},T_1^{'}),(C_2^{'},T_2^{'}),\ldots,(C_n^{'},T_n^{'})\right\}$$

O bien:

Prestación: $\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\}$

Contraprestación: (C',T')

Equivalencia financiera:

$$\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\}\approx(C',T')$$

Ejemplo: Una empresa financiera presta hoy 800€ y prevé cobrar 250€ al final de cada uno de los próximos 4 meses. Indicar la prestación, la contraprestación y representar la equivalencia financiera

Prestación: $(800,0)$

Contraprestación:

$$\left\{\left(250,\frac{1}{12}\right),\left(250,\frac{2}{12}\right),\left(250,\frac{3}{12}\right),\left(250,\frac{4}{12}\right)\right\}$$

Equivalencia financiera:

$$(800,0)\approx\left\{\left(250,\frac{1}{12}\right),\left(250,\frac{2}{12}\right),\left(250,\frac{3}{12}\right),\left(250,\frac{4}{12}\right)\right\}$$

Ejercicio: Una persona abrió hace 3 años una cuenta vivienda con 8.000€. Durante los 2 años siguientes ha ido realizando al final de cada semestre aportaciones constantes de 3.000€ y hoy retira el saldo acumulado en la cuenta por importe de 22.700€. Indicar la prestación, la contraprestación y representar la equivalencia financiera

Prestación:

Contraprestación:

Equivalencia financiera:

3) Operación totalmente compleja:

Prestación:

$$\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\}$$

Contraprestación:

$$\left\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_m')\right\}$$

Equivalencia financiera:

$$\left\{(C_1,T_1),(C_2,T_2),\ldots,(C_n,T_n)\right\} \approx \left\{(C_1',T_1'),(C_2',T_2'),\ldots,(C_n',T_m')\right\}$$

2.3 Precios financieros de interés

Dada la operación financiera elemental

$$(C,T) \approx (C',T') \quad \text{con} \quad T' > T$$

se definen los tres precios financieros de interés siguientes:

Precio (interés) total: Es el beneficio total de la operación en términos monetarios

$$\Delta C = C' - C$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calcular el precio total:

$$\Delta C = 1.120 - 1.000 = 120€$$

Esto significa que por los 1.000€ iniciales, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una retribución de 120€

Precio unitario o Interés efectivo: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C}$$

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calcular el precio unitario:

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{C' - C}{C} = \frac{1.120 - 1.000}{1.000} = \frac{120}{1.000} = 0,12 \equiv 12\%$$

Esto significa que por cada euro inicial, el sujeto activo recibe al final de los 2 años una remuneración de 0,12 € (o bien, que por cada 100€ iniciales, se perciben 12€. Por ello se habla del 12% bienal)

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Precio unitario y medio o Interés nominal: Es el beneficio de la operación por cada unidad monetaria y por año

$$i = \frac{I}{T'-T} = \frac{C'-C}{C\cdot(T'-T)} = \frac{C'-C}{C\cdot t}$$

siendo $T'-T = t$ el plazo de la operación expresado en años

Ejemplo: Dada la operación financiera elemental

$$(1.000, 0) \approx (1.120, 2)$$

calcular el precio unitario y medio:

$$i = \frac{I}{T'-T} = \frac{C'-C}{C\cdot(T'-T)} = \frac{1.120-1.000}{1.000\cdot(2-0)} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \equiv 6\%$$

Esto significa que por cada 100€ iniciales y por cada año, el sujeto activo recibe una retribución de 6€

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: En una operación financiera, invirtiendo hoy 10.000€ se obtienen al cabo de 3 meses 10.200€. Se pide:

a) Representar la equivalencia financiera de dicha operación

b) Calcular los tres precios financieros de dicha operación

Precio total =

Precio unitario =
(Interés efectivo)

Precio unitario y medio =
(Interés nominal)

IMPORTANTE: Cuando el plazo temporal de una operación financiera se expresa en días o en fechas de calendario, el valor de t (en años) dependerá del criterio o base que se utilice. En general hay 4 bases:

- Si el plazo es inferior a 1 año:

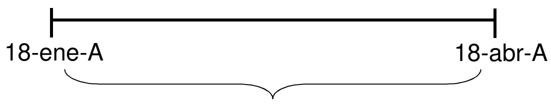
Criterio o Base	Significado
Base $\frac{30}{360}$	Numerador: Todos los meses tienen 30 días Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{360}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 360
Base $\frac{Act}{365}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: Siempre 365
Base $\frac{Act}{Act}$	Numerador: Días reales de la operación Denominador: 365 o 366 (si es bisiesto)

- Si el plazo es superior a 1 año, al número de años enteros se le añade la fracción de año restante calculada según alguna de las bases anteriores

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Equilibrio de la operación financiera
2.3 Precios financieros de interés

Ejemplo: ¿Qué plazo temporal t existe entre el 18 de enero y el 18 de abril de un año bisiesto?



$$T' - T = t$$

Criterio o Base	Valor de t
Base $\frac{30}{360}$	$t = \frac{12+30+30+18}{360} = \frac{90}{360} = \frac{1}{4} = 0,25$
Base $\frac{Act}{360}$	$t = \frac{13+29+31+18}{360} = \frac{91}{360} = 0,252\overset{\frown}{7}$
Base $\frac{Act}{365}$	$t = \frac{13+29+31+18}{365} = \frac{91}{365} = 0,249315$
Base $\frac{Act}{Act}$	$t = \frac{13+29+31+18}{366} = \frac{91}{366} = 0,248634$

3. Definición y clasificación de los regímenes financieros

3.1 Definición

Régimen financiero es la expresión formal del conjunto de características, pactos o acuerdos, que establecen los sujetos de una operación financiera. Estos pactos hacen referencia a cómo se calcula el precio de la operación y cuándo se hace efectivo

3.2 Clasificación

Clasificación de los regímenes financieros

1) Según el cálculo del precio:

- **R.F. SIMPLES**: Son aquéllos en que el plazo de la operación se considera como un único periodo, y por ello, el precio se calcula una sola vez. Se acostumbran a utilizar en operaciones a corto plazo
- **R.F. COMPUESTOS**: Son aquéllos en que el plazo de la operación se subdivide en periodos, y por ello, el precio se calcula para cada uno de ellos

3. Definición y clasificación de los regímenes financieros

3.2 Clasificación

2) Según el sujeto económico:

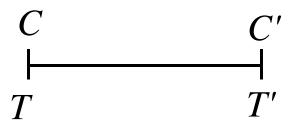
- **R.F. de INTERÉS o CAPITALIZACIÓN**: Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto activo
- **R.F. de DESCUENTO o ACTUALIZACIÓN**: Son aquéllos que aparecen cuando se estudia la operación financiera desde el punto de vista del sujeto pasivo

Como consecuencia de estas clasificaciones desarrollaremos los siguientes regímenes financieros:

<table>
<tr><th></th><th>R.F. INTERÉS O CAPITALIZACIÓN</th><th>R.F. DESCUENTO O ACTUALIZACIÓN</th></tr>
<tr><td>R.F. SIMPLES</td><td>R.F. INTERÉS SIMPLE VENCIDO</td><td>R.F. DESCUENTO SIMPLE O COMERCIAL</td></tr>
<tr><td rowspan="2">R.F. COMPUESTOS</td><td colspan="2">R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO CONSTANTE</td></tr>
<tr><td colspan="2">R.F. INTERÉS COMPUESTO A TANTO VARIABLE</td></tr>
</table>

4.1 R.F. interés simple vencido

En el R.F. de interés simple vencido, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El precio total de la operación, ΔC , es proporcional a la cuantía inicial, ***C***, y al plazo de la operación, ***T'-T* = *t***, mediante un tanto de proporcionalidad ***i*>0** (en tanto por uno)

$$\Delta C = C \cdot i \cdot (T' - T) = C \cdot i \cdot t$$

2) Dicho precio total se recibe al final de la operación ***T'*** junto con la cuantía inicial, obteniéndose en total ***C'***

$$C' = C + \Delta C$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, deducimos su **expresión formal**:

$$C' = C + \Delta C = C + \underbrace{C \cdot i \cdot (T' - T)}_{\Delta C} = C \cdot (1 + i \cdot (T' - T))$$

$$\boxed{C' = C \cdot (1 + i \cdot t)}$$

Precio (interés) total: $\Delta C = C' - C = C \cdot i \cdot t$

Precio unitario o Interés efectivo: $I = \dfrac{\Delta C}{C} = \dfrac{C \cdot i \cdot t}{C} = i \cdot t$

Precio unitario y medio o Interés nominal: $i = \dfrac{I}{t} = \dfrac{i \cdot t}{t} = i$

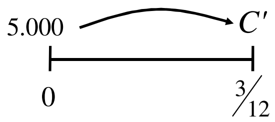
Este R.F. suele utilizarse en productos como cuentas corrientes, imposiciones a plazo fijo, libretas de ahorro, Letras del Tesoro, …

Ejemplo: En la cuenta corriente de un Banco, un cliente ha tenido la cantidad de 5.000€ durante 3 meses. Si esta cuenta ha liquidado los intereses en régimen financiero de interés simple vencido a un interés del 2% anual. Calcular:

a) Los intereses que al vencimiento habrá obtenido dicho cliente

b) El capital final que tendrá en la cuenta corriente

c) Los precios financieros



a) Los intereses (precio total) en R.F. de interés simple vencido son:

$$\Delta C = Intereses = C \cdot i \cdot t = 5.000 \cdot 0,02 \cdot \frac{3}{12} = 25€$$

NOTA: En el mercado estos intereses son brutos porque se les aplica una retención fiscal (actualmente del 21%), por lo que, realmente, lo que ingresa el cliente es menos. Este aspecto fiscal NO lo tendremos en cuenta

b) El capital final que tendrá el cliente en la cuenta corriente será:

$$C' = \begin{cases} C + \Delta C = 5.000 + 25 = 5.025€ \\ C \cdot (1 + i \cdot t) = 5.000 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{3}{12}\right) = 5.025€ \end{cases}$$

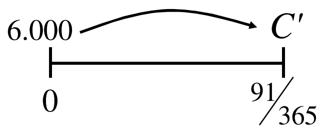
c) Los precios financieros son:

$$\Delta C = C' - C = 5.025 - 5.000 = 25€$$

$$I = \frac{\Delta C}{C} = \frac{25}{5.000} = 0,005 \equiv 0,5\% \quad \text{en 3 meses}$$

$$i = \frac{I}{t} = \frac{0,005}{3/12} = 0,02 \equiv 2\%$$

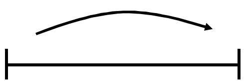
Ejercicio: Calcular el capital final y los precios financieros que se obtienen al colocar 6.000€ en un plazo fijo con vencimiento dentro de 91 días (Base Act/365) a un interés simple vencido del 1,75% anual



El capital final es:

Los precios financieros son:

Ejercicio: En un anuncio de prensa ofrecen una inversión en R.F. de interés simple vencido según la cual, colocando hoy un capital de 50.000€ se reciben al cabo de 9 meses 51.687,50€. Calcular el tipo de interés nominal al que resulta dicha inversión.



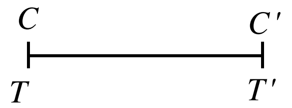
Sustituyendo todos los datos conocidos en la expresión formal del R.F. de interés simple vencido:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

Despejando se obtiene i:

4.2 R.F. descuento comercial

En el R.F. de descuento comercial, los sujetos de la operación financiera



acuerdan los siguientes **pactos**:

1) Se anticipa una cuantía disponible en el futuro a un momento anterior. El precio total de la operación, ΔC **,** es proporcional a la cuantía final, ***C'*****,** también llamada **valor nominal**, y al plazo de la operación, ***T'*-*T* = *t***, mediante un tanto de proporcionalidad expresado en tanto por uno ***d* >0** (denominado **tasa de descuento**)

$$\Delta C = C' \cdot d \cdot (T' - T) = C' \cdot d \cdot t$$

2) Dicho precio total se paga al inicio de la operación ***T*** deduciéndose de la cuantía final, recibiéndose la cuantía ***C*,** también llamada **líquido o efectivo**

$$C = C' - \Delta C$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas con los dos pactos, y desarrollando, deduciremos su **expresión formal**:

$$C = C' - \Delta C = C' - \underbrace{C' \cdot d \cdot (T' - T)}_{\Delta C} = C' \cdot (1 - d \cdot (T' - T))$$

$$\boxed{C = C' \cdot (1 - d \cdot t)}$$

Precio (descuento) total: $\Delta C = C' - C = C' \cdot d \cdot t$

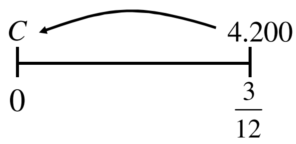
Precio unitario o Descuento efectivo: $D = \frac{\Delta C}{C'} = \frac{C' \cdot d \cdot t}{C'} = d \cdot t$

Precio unitario y medio o Descuento nominal: $d = \frac{D}{t} = \frac{d \cdot t}{t} = d$

Este R.F. se utiliza en productos financieros como efectos comerciales, letras de cambio,…

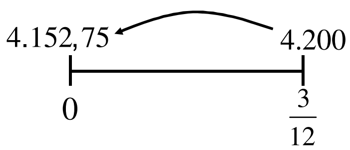
Ejercicio: Una empresa descuenta en régimen financiero de descuento comercial un efecto comercial de nominal 4.200€ y vencimiento dentro de 3 meses. Si la entidad financiera lo descuenta a una tasa del 4,50% anual, se pide:

a) Obtener el valor líquido o efectivo C que percibirá la empresa



NOTA: Si el plazo de la operación estuviera expresado en días o fechas de calendario, para el cálculo del plazo t, siempre que no se diga lo contrario, se utilizará el criterio Act/360

b) Calcular los precios financieros de descuento



Precio (descuento) total:

Precio unitario o Descuento efectivo:

Precio unitario y medio o Descuento nominal:

Mientras que en el R.F. de interés simple vencido se paga el precio de la operación al final a un tanto de interés i, en el R.F. de descuento comercial se paga el precio de la operación al inicio a un tanto de descuento d.

Vamos a encontrar la equivalencia entre ambos tantos:

Del R.F. de interés simple vencido: $C' = C \cdot (1 + i \cdot t)$

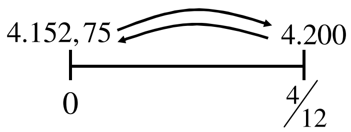
Del R.F. de descuento comercial: $C = C' \cdot (1 - d \cdot t)$

Sustituyendo la segunda expresión en la primera:

$$C' = C' \cdot (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) \Leftrightarrow (1 - d \cdot t)(1 + i \cdot t) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(1 + i \cdot t) = \frac{1}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow i \cdot t = \frac{1}{1 - d \cdot t} - 1 = \frac{d \cdot t}{1 - d \cdot t} \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{d}{1 - d \cdot t}}$$

Ejemplo: En el ejercicio anterior una empresa había recibido de la entidad financiera un valor efectivo de 4.152,75€ por descontar un efecto de valor nominal 4.200€ con vencimiento al cabo de 3 meses. Calcular el tanto de interés anual simple vencido al que le ha resultado la operación a la entidad financiera



Aplicando la expresión obtenida:

$$i = \frac{d}{1 - d \cdot t} = \frac{0,045}{1 - 0,045 \cdot \frac{3}{12}} = 0,0455 \equiv 4,55\%$$

Este tipo de interés también se podría haber obtenido a partir de la expresión del interés simple vencido:

$$4.200 = 4.152,75 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{3}{12}\right) \text{ de donde: } i = 0,0455 \equiv 4,55\%$$

A veces, las entidades financieras cobran en el descuento comercial un porcentaje de comisión g. Esta comisión se aplica **siempre** sobre el **valor nominal** del efecto, de tal forma que, para obtener el valor líquido o efectivo C que finalmente recibirá la empresa se calculará:

$$C = \underbrace{C'}_{\text{Valor nominal}} - \underbrace{C' \cdot d \cdot t}_{\text{Descuento}} - \underbrace{g \cdot C'}_{\text{Comisiones}} = C' \cdot (1 - d \cdot t - g)$$

Si una operación de descuento tiene comisiones, para calcular el tipo de interés simple vencido i al que ha resultado la operación necesariamente debe utilizarse la expresión conocida del R.F. de interés simple vencido y despejar el valor de i

Ejercicio: Una empresa tiene la siguiente letra de cambio de valor nominal 8.600€ y vencimiento el 14 de enero de 2015:

Barcelona | euros | 8.600,00€

12-7-2014 | 14 de enero de 2015

134,63€

Ocho mil seiscientos euros --

0 A 0250067

BANCO SIETEMIL
Oficina Principal
08034 Barcelona

7000-0000-77-1234567890

EMPRESA COMPRADORA
Avgda. Diagonal, 690
08034 Barcelona

EMPRESA VENDEDORA
Domicilio

Si hoy, día 10 de octubre de 2014, la empresa lo lleva al Banco, que se lo descuenta en R.F. de descuento comercial a una tasa del 6% anual y le cobra una comisión del 0,7% sobre el nominal, se pide:

a) Calcular el valor líquido o efectivo C que hoy percibirá la empresa

Valor nominal:
Descuento:
Comisiones:
Valor efectivo:

b) Obtener la tasa de interés simple vencido al que ha resultado la operación anterior (Usar criterio Act/365)

De donde:

Ejercicio: Obtener el valor nominal de un efecto que vence dentro de 2 meses si al descontarlo en R.F. de descuento comercial al 8% anual con una comisión del 0,4% sobre el nominal, se ha percibido una cuantía de 11.792€

A partir de la expresión deducida anteriormente:

Despejamos C':

El tipo de interés simple al que ha resultado la operación es:

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

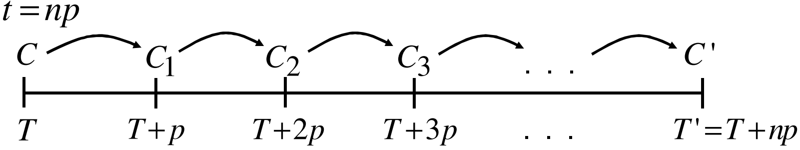
En el R.F. de interés compuesto a tanto constante, los sujetos de la operación financiera

acuerdan los siguientes **pactos**:

1) El plazo de la operación, ***T'-T = t***, se fracciona en periodos de duración ***p*** (expresado en años), calculándose el precio en cada uno de dichos periodos mediante un tanto de proporcionalidad ***i*>0** (expresado en tanto por uno) aplicado a la cuantía al inicio del periodo y a la duración del mismo ***p*.** Dicho precio se acumula a la citada cuantía
De este modo la cuantía acumulada al final de un periodo coincide con la cuantía inicial del siguiente

2) El precio total de la operación **sólo** se recibe al final del plazo de la misma, en ***T'***

Supongamos que al fraccionar el plazo de la operación ***T'-T = t*** en periodos de duración ***p*** el número de periodos es exacto e igual a ***n***, con $t = np$



El valor de las cuantías acumuladas en la operación al final de cada periodo serían:

En $T+p \Rightarrow C_1 = C\cdot(1+i\cdot p)$

En $T+2p \Rightarrow C_2 = C_1\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2$

En $T+3p \Rightarrow C_3 = C_2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^2\cdot(1+i\cdot p) = C\cdot(1+i\cdot p)^3$

. . .

En $T' = T+np \Rightarrow C' = C\cdot(1+i\cdot p)^n = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{t}{p}} = C\cdot(1+i\cdot p)^{\frac{T'-T}{p}}$

En el R.F. de interés compuesto no basta con dar información sobre cuál es el tanto de interés anual aplicable en la operación. Además es preciso conocer el periodo de capitalización. Como p es el **periodo de capitalización** de los intereses (expresado en años), se define $m = \frac{1}{p}$ como la **frecuencia de capitalización** de los intereses, es decir, el número de periodos que hay en un año

Así, pueden encontrarse expresiones como:

$$i\% \left\{ \begin{matrix} \text{nominal} \\ \text{anual} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{capitalizable} \\ \text{acumulable} \\ \text{pagadero} \\ \text{liquidable} \\ \text{con devengo} \\ \text{periodificable, ...} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{anualmente} \\ \text{semestralmente} \\ \text{trimestralmente} \\ \text{mensualmente, ...} \end{matrix} \right\}$$

En general, este tanto de interés que va acompañado de la información del periodo de capitalización se denomina **tanto de interés nominal** y se representa por i_m

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

El cociente entre el interés nominal y la frecuencia de capitalización se denomina **tanto de interés efectivo** y se representa por I_m:

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

Este tanto representa el interés que se cobra (o paga) por unidad monetaria en cada periodo de capitalización. En este caso, se enuncia:

$$I\%(\text{efectivo}) \left\{ \begin{matrix} \text{anual} \\ \text{semestral} \\ \text{trimestral} \\ \text{mensual, ...} \end{matrix} \right\}$$

Cualquier tipo de interés existente en el mercado, o es un interés nominal o es un interés efectivo

Ejercicio: Especificar a qué tipo de interés se refieren cada una de las siguientes expresiones indicando la correspondiente frecuencia:

a) Una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable semestralmente

b) Préstamo pactado al 6% de interés anual pagadero mensualmente

c) Plazo fijo que se ha pactado a un 0,8% efectivo trimestral

d) Depósito que ofrece un 2,75% anual

e) Cuenta corriente que rinde a un 1,20% anual liquidable bimestralmente

f) Producto financiero que remunera un 0,75% cuatrimestral

Con esta notación, la expresión formal del R.F. de interés compuesto a tanto constante, puesto que $p = \frac{1}{m}$, también se podría expresar:

$$C' = C \cdot (1 + i_m \cdot p)^{\frac{t}{p}} = C \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{m \cdot t} = C \cdot \left(1 + \frac{i_m}{m}\right)^{n}$$

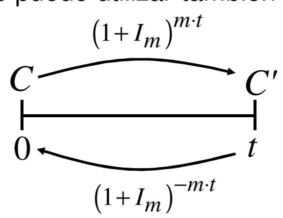
Y como la relación entre el interés efectivo y nominal es: $I_m = \frac{i_m}{m}$
Resulta que:

$$C' = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

Además de para **capitalizar**, la expresión del R.F. de interés compuesto a tanto constante se puede utilizar también para **actualizar** capitales

$$C = C' \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot t}$$

Actualización

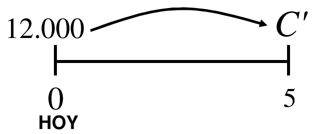


$$C' = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

Capitalización

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Calcular el capital final que se obtendrá al invertir 12.000€ durante 5 años en una cuenta que rinde el 3% de interés nominal acumulable trimestralmente



$C = 12.000$

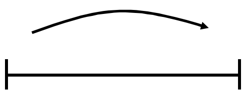
$t = 5$

$$\left.\begin{array}{l} i_m = 0{,}03 \\ m = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Por tanto, } \quad i_4 = 0{,}03 \qquad I_4 = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$$

$$C' = 12.000 \cdot (1 + 0{,}0075)^{4 \cdot 5} = 13.934{,}21€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Hace 2 años se invirtieron 6.000€ en un plazo fijo que ofrece un interés del 3,60% anual pagadero mensualmente. Calcular el importe que se habrá retirado hoy del plazo fijo



$C =$

$t =$

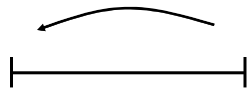
$i \; = \qquad \Rightarrow I \; =$

$C' =$

NOTA: Hay que destacar que en muchas operaciones del mercado financiero existe devengo pero no acumulación de intereses

5.1 R.F. interés compuesto a tanto constante

Ejercicio: Una persona desea tener un capital de 8.000 € dentro de 2 años y medio para comprarse una moto. Calcular el capital que debe ingresar hoy en una cuenta que ofrece el 2% de interés anual capitalizable bimestralmente para cumplir el objetivo



$C' =$

$t =$

$i \;=\qquad \Rightarrow I \;=$

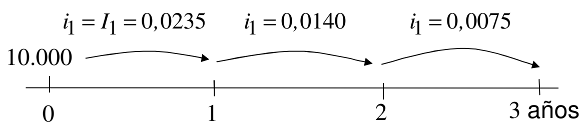
5.2 R.F. Interés compuesto a tanto variable

A lo largo del plazo de una operación, el tipo de interés puede ir variando. Llamando $I_m^{(s)}$ al tanto efectivo de cada uno de los n periodos, y considerando que las cuantías devengadas se vayan acumulando al capital, obtendremos el R.F. de interés compuesto a tanto variable:

$$C' = C \cdot \prod_{s=1}^{n} \left[1 + I_m^{(s)} \right]$$

Ejemplo: La entidad Z ofrece un depósito de 10.000€ durante 3 años a un interés liquidable anualmente y variable cada año. Si los tipos de interés nominales son del 2,35%, 1,40% y 0,75% respectivamente, ¿cuál será la cuantía final acumulada?

Esquema:

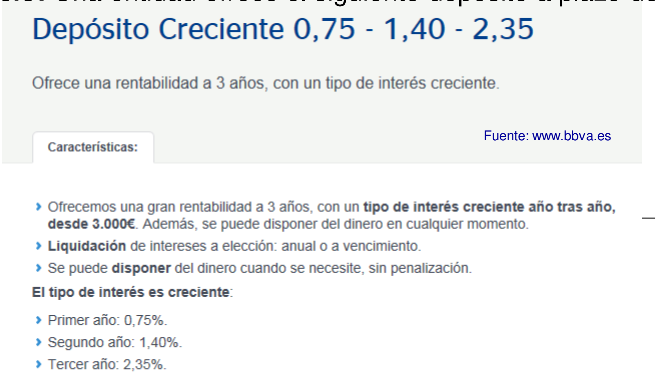


Cuantía acumulada a los tres años:

$$C' = \underbrace{\underbrace{10.000 \cdot (1+0{,}0235)^1}_{10.235} \cdot (1+0{,}0140)^1}_{10.378{,}29} \cdot (1+0{,}0075)^1 = 10.456{,}13€$$

5. Regímenes financieros compuestos
5.2 R.F. Interés compuesto a tanto variable

Ejercicio: Una entidad ofrece el siguiente depósito a plazo de 3 años:



En el caso de **liquidación de intereses a vencimiento**, ¿obtendremos mayor capital final con este depósito o con el ofrecido por la entidad Z del ejercicio anterior?

Ejemplo: Si en el depósito creciente del ejercicio anterior, la **liquidación de intereses se realizara anualmente y NO se acumularan,** un cliente que invirtiera 10.000€ recibiría anualmente y durante cada uno de los 3 años, respectivamente:

Al final del primer año: $10.000 \cdot 0,0075 \cdot 1 = 75€$

Al final del segundo año: $10.000 \cdot 0,0140 \cdot 1 = 140€$

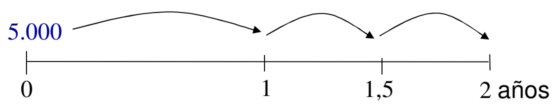
Al final del tercer año: $10.000 \cdot 0,0235 \cdot 1 = 235€$

Si esos intereses los ingresa en una cuenta vinculada que ofrece un interés del 0%, al final de los 3 años sólo dispondrá de:

$$10.000 + 75 + 140 + 235 = 10.450€$$

Obsérvese que este capital es inferior al obtenido en los ejercicios anteriores como consecuencia de la reinversión o acumulación de los intereses que provoca el interés compuesto

Ejercicio: Calcular la cuantía final que se obtendrá al invertir 5.000€ en un depósito a 2 años que rinde un 4% anual acumulable semestralmente el primer año, un 4,5% anual pagadero trimestralmente durante el primer semestre del segundo año y un 5% anual acumulable mensualmente durante el segundo semestre del segundo año



Cuantía acumulada a los dos años:

5.3 Tantos de interés efectivos equivalentes

Supongamos que en R.F. de interés compuesto tenemos una operación financiera de duración t años en la que, invirtiendo una cuantía inicial C al tanto efectivo de frecuencia m, I_m, se obtiene una cuantía final igual a C'. Es decir:

$$C' = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

Ahora queremos saber qué tanto efectivo de frecuencia k, I_k, debería aplicarse a la misma cuantía inicial C durante el mismo plazo de t años para obtener la misma cuantía final C', es decir:

$$C' = C \cdot (1 + I_k)^{k \cdot t}$$

Si igualamos ambas expresiones obtendremos la relación existente entre tantos efectivos de interés de diferentes frecuencias en R.F. de interés compuesto, también denominados **tantos efectivos equivalentes**:

$$\boxed{(1 + I_k)^k = (1 + I_m)^m} \quad \text{o bien} \quad \boxed{I_k = (1 + I_m)^{m/k} - 1}$$

Esto significa que **toda cuantía monetaria** valorada en R.F. de interés compuesto a cualquiera de los dos tantos efectivos generará el mismo capital final con independencia del **plazo temporal** de la operación y del **capital inicial**

Por ello se dice que I_m e I_k son **equivalentes**

Ejemplo: Calcular el tanto efectivo de interés semestral equivalente al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente

$$i_{12} = 0,04 \Rightarrow I_{12} = \frac{0,04}{12} \Rightarrow I_{12} = 0,00\widehat{3}$$

$$(1+I_2)^2 = (1+I_{12})^{12}$$

$$I_2 = \left(1+0,00\widehat{3}\right)^{12/2} - 1 = 0,02017 \equiv 2,017\%$$

Esto significa que cualquier cuantía monetaria invertida al 4% de interés nominal capitalizable mensualmente generará el mismo capital final que si se invirtiera al 2,017% efectivo semestral cualquiera que sea el plazo de la operación

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo de interés bimestral equivalente al 5% de interés anual pagadero trimestralmente

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo de interés trimestral equivalente al 1% mensual

5.4 Interés efectivo anual y TAE

Uno de los tantos de interés efectivo más utilizado en el mercado es el de frecuencia anual, es decir, el **tanto efectivo anual, I_1**

Utilizando la metodología anterior, podemos conocer el tanto efectivo anual equivalente a cualquier interés efectivo o nominal

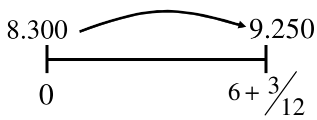
$$I_k = (1+I_m)^{m/k} - 1 \xrightarrow{si\ k=1} \boxed{I_1 = (1+I_m)^m - 1}$$

Ejercicio: Calcular el tanto efectivo anual equivalente al 2% de interés efectivo cuatrimestral

También se puede obtener el **tanto efectivo anual, I_1,** de cualquier operación a partir de la fórmula del R.F. de interés compuesto, una vez conocidas las cuantías inicial, final y el plazo de la operación

$$C' = C\cdot(1+I_1)^t \Rightarrow \boxed{I_1 = \sqrt[t]{\left(\frac{C'}{C}\right)} - 1 = \left(\frac{C'}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

Ejemplo: Obtener el interés efectivo anual de una operación por la que invirtiendo hoy 8.300€ se obtienen al cabo de 6 años y 3 meses 9.250€



$$8.300\cdot(1+I_1)^{6+\frac{3}{12}} = 9.250€$$

$$I_1 = \sqrt[6+\frac{3}{12}]{\frac{9.250}{8.300}} - 1 = \left(\frac{9.250}{8.300}\right)^{\frac{1}{6+\frac{3}{12}}} - 1 = 0,01749 \equiv 1,749\%$$

Desde el año 1990 el Banco de España obliga a que se publique la **TAE** de cualquier operación financiera. La TAE es el tanto efectivo anual de una operación una vez que se han tenido en cuenta en la misma los gastos y comisiones que indica el Banco de España

Los gastos y comisiones que deben formar parte de la TAE han ido cambiando desde 1990 hasta hoy

Actualmente se han de considerar la comisión de apertura, comisión de gestión, comisión de mantenimiento, etc. y, en cambio, no se tienen en cuenta los gastos de notaria

Si una operación no tiene comisiones ni gastos, la TAE será igual que el tanto efectivo anual

Resumen de todos los tipos de interés estudiados hasta ahora:

Interés nominal (de frecuencia *m*) $\boxed{i_m}$

$$\boxed{I_m = \frac{i_m}{m}}$$

NOTA: Si $m=1$ el interés nominal coincide con el interés efectivo anual

Interés efectivo (de frecuencia *m*) $\boxed{I_m}$

$$\boxed{I_k = (1+I_m)^{m/k} - 1}$$

Interés efectivo (de frecuencia *k*) $\boxed{I_k}$

Si $k=1$

Interés efectivo anual $\boxed{I_1}$

$$\boxed{I_1 = (1+I_m)^m - 1}$$

$$\boxed{I_1 = \left(\frac{C'}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1}$$

Conocidos C', C, y t

TAE (Tasa anual equivalente) $\boxed{TAE}$

$$\boxed{TAE = I_1 \text{ (con gastos y comisiones)}}$$

NOTA: Si NO hay gastos ni comisiones $TAE = I_1$

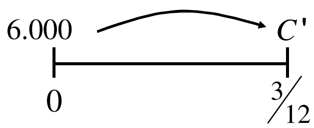
Ejemplo: Un banco concede hoy un préstamo de 6.000€ a devolver dentro de 3 meses a un interés del 8% nominal acumulable mensualmente. Si el Banco cobra una comisión de apertura de 100€, se pide:

a) Calcular la cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses

b) Calcular el tanto efectivo anual del préstamo

c) Calcular la TAE de esta operación de préstamo

a) La cuantía a devolver al Banco dentro de 3 meses será:



$$i_{12}=0{,}08$$

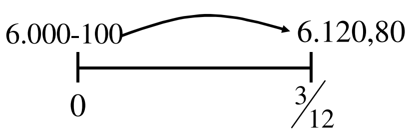
$$I_{12}=\frac{0{,}08}{12}=0{,}00\widehat{6}$$

$$C'=6.000\cdot\left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{3}=6.120{,}80€$$

b) El tanto efectivo anual del préstamo es:

$$I_1=\left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12}-1=0{,}0830\equiv 8{,}30\%$$

c) La TAE de esta operación de préstamo es:



$$6.120{,}80=5.900\cdot\left(1+TAE\right)^{3/12}\Rightarrow TAE=0{,}15831\equiv 15{,}831\%$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.4 Interés efectivo anual y TAE

Ejercicio: Una cuenta de ahorro ha mantenido un saldo constante de 1.527€ durante 1 año. Dicha cuenta abona un interés anual del 1,25% y tiene una comisión de mantenimiento de 10€ que se liquida a final de año. Calcular:

a) La cuantía acumulada en la cuenta al cabo de un año antes de pagar la comisión y después de haberla pagado

b) El tipo de interés efectivo anual de la cuenta

c) La TAE de la cuenta

a) La cuantía acumulada en la cuenta al año, antes de pagar la comisión será:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.4 Interés efectivo anual y TAE

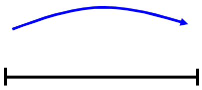
La cuantía después de haber pagado la comisión será:

b) El tanto efectivo anual es del

c) Para calcular la TAE debe considerarse la comisión de mantenimiento. Luego:

Ejercicio: Calcular la TAE del siguiente plan de pensiones, que por una aportación de 6.000€ el 20 de diciembre de 2012 garantiza, en el momento de la jubilación el día 17 de mayo de 2025, un capital de 9.609,91€:

Venciment	Termini	Interès garantit fins a venciment	Capital garantit a data de venciment	TAE
17/05/2025	Data jubilació (65 anys)	3,87%	9.609,91 €	3,87%



Fuente: www.lacaixa.es

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

5. Regímenes financieros compuestos

5.4 Interés efectivo anual y TAE

Ejercicio: A partir de los tipos de interés nominal que aparecen en el anuncio adjunto, verificar si cada TAE está bien calculada

		INTERESES NOMINALES SEGÚN PERIODO DE LIQUIDACIÓN	
DESDE	TAE	TRIMESTRAL	ANUAL
6000 €	3,25%	3,21%	3,25%
12000 €	3,50%	3,45%	3,50%
18000 €	3,75%	3,70%	3,75%

OPCIÓN A COBRAR INTERESES POR TRIMESTRE O POR AÑO SEGÚN TIPOS SEÑALADOS

$$i \ = 0{,}0321 \Rightarrow I \ =$$

$$i \ = 0{,}0345 \Rightarrow I \ =$$

$$i \ = 0{,}0370 \Rightarrow I \ =$$

Ejercicio: Una entidad financiera ofrece un depósito sin comisiones a una TAE del 1,50%. Si los intereses se pagan una sola vez al vencimiento de 6 meses, se pide:

a) Calcular los intereses que pagará la entidad al vencimiento por un depósito de 50.000€

b) Calcular el tanto de interés nominal capitalizable semestralmente equivalente a la TAE del depósito

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Para una inversión de 3.000€ a un plazo de 13 meses y sin ningún tipo de comisión, el mercado ofrece los siguientes productos con la misma TAE. ¿En cuál es preferible invertir?

Fuente: www.bancorreos.es

Depósito Solidez BanCorreos

Consigue un 2,25% TAE* a un plazo de 13 meses. Liquidación de intereses a vencimiento, toda la solidez que tu inversión necesita.

Ahorrar y ganar con total tranquilidad.

Importe mínimo: 3.000€

Capital final que se obtendrá al vencimiento:

Fuente: www.catalunyacaixa.com

e-Depósito

Importe	Plazo	Abono intereses	Tipo de interès nominal	TAE	Intereses brutos(EUR)	Retención fiscal(*)	
3.000,00 euros	13 meses	Mensual	2,227 %	2,250 %	72,38	21%	Contrata

5. Regímenes financieros compuestos
5.4 Interés efectivo anual y TAE

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

e-Depósito

Importe	Plazo	Abono intereses	Tipo de interès nominal	TAE	Intereses brutos(EUR)
3.000,00 euros	13 meses	Mensual	2,227 %	2,250 %	72,38

Verificación de la TAE:

Capital final que se obtendrá al vencimiento:

Intereses primer mes:

Intereses segundo mes:

0	1 mes	2 mes	.....	12 mes	13 mes
	5,5675€	5,5675€	.....	5,5675€	5,5675€

Ejercicio: Una persona desea comprarse un smartphone cuyo precio al contado es de 699€. ¿Cuál de estas 2 opciones le interesa más?

1) Pedir un préstamo a un Banco por dicho importe, sin comisiones, a un interés del 10% anual acumulable mensualmente y que deberá devolver en un solo pago al cabo de 4 meses

2) Que un colega suyo le preste el dinero sin intereses y al mismo plazo si le paga hoy una ronda de cubatas valorada en 40€.

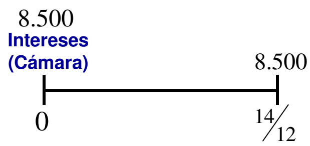
Interés efectivo anual de la operación del Banco:

O bien:

Interés efectivo anual de la operación del colega:

Ejemplo: Una entidad financiera ofrece un depósito retribuido en especie a un plazo de 14 meses. Colocando un capital de 8.500€ la entidad entrega una cámara de fotos digital en el momento de realizar el depósito. Sabiendo que la TAE de esta operación es del 1,10%, calcular el importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara digital)

El importe de los intereses brutos del depósito (valor de la cámara) es:



$$8.500 = \text{Intereses} + 8.500 \cdot (1+0{,}0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses} = 8.500 - 8.500 \cdot (1+0{,}0110)^{-14/12}$$

$$\text{Intereses (Cámara)} = 107{,}80€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejercicio: Una persona se plantea invertir en el siguiente depósito retribuido en especie. Calcular los intereses de este depósito y realizar un análisis de la decisión a tomar

Fuente: www.lacaixa.es

Decisión:

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sabiendo que la unidad monetaria está expresada en euros y la unidad temporal en años, explicar qué representan los siguientes capitales financieros:

   a) $(65.000,\ 0)$

   b) $\left(54.300,\ \dfrac{17}{12}\right)$

   c) $\left(397{,}12,\ \dfrac{14}{365}\right)$

   d) $\left(3.800,\ \dfrac{3}{2}\right)$

   e) $\left(2.000.000,\ \dfrac{5}{6}\right)$

2. Representar en un esquema temporal los capitales financieros del ejercicio anterior.

3. Sabiendo que la unidad monetaria está expresada en dólares y la unidad temporal en años, explicar qué representan los siguientes capitales financieros:

   a) $\left(85.700,\ \dfrac{5}{4}\right)$

   b) $\left(12.000,\ \dfrac{8}{12}\right)$

   c) $\left(815,\ \dfrac{200}{365}\right)$

   d) $\left\{\left(500,\ r\cdot\dfrac{1}{2}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,10}$

4. Representar en un esquema temporal todos los capitales financieros del ejercicio anterior.

5. Representar en un esquema temporal todos los capitales financieros del ejercicio 3 si las cuantías estuvieran representadas en euros en lugar de dólares.

6. Indicar cuál de las siguientes situaciones puede considerarse operación financiera. De las situaciones que sean una operación financiera indicar sus elementos (personal, material y convencional):

   a) Con 4.000€ que has ahorrado, abres en Bankia un plazo fijo con vencimiento dentro de 6 meses y por el que recibirás 4.120€.

b) Acabo de invitar a mis amigos a desayunar. He pagado al camarero con un billete de 50€ y me ha devuelto 38,45€.

c) Hace 3 años Manuel compró en Bolsa 10.000 acciones de la empresa Zeltia a 3,31€ cada una y hoy las ha vendido todas por 20.200€.

d) Acabo de comprar en una tienda MoviStar un iPhone de última generación que me ha costado 699€.

e) He ido a una sucursal del BBVA a pedir cambio de un billete de 200€ en billetes de 50€.

f) Mi padre ha decidido ir colocando cada año 5.000€ en un Plan de Pensiones de Catalunya Banc para que en el momento de su jubilación a los 67 años tenga un capital suficiente para mantener su nivel de vida actual.

g) La empresa Cementos S.A. ha vendido a un cliente 20.000€ en sacos de cemento que paga mediante un efecto comercial con vencimiento dentro de 60 días. La empresa lleva hoy mismo el efecto al Banco de Santander que se lo descuenta ingresando en la cuenta de la empresa la cantidad de 18.935€.

h) Para comprarse un ordenador portátil María ha solicitado en Bankinter un préstamo personal de 899€ por el que tendrá que pagar mensualmente una cuota de 121,85€ durante 10 meses.

i) El 3 de enero compré con la tarjeta VISA un regalo de 420€ que me lo cargarán en mi cuenta corriente el próximo 25 de enero.

j) Manuel ha encontrado un trabajo de contable en una empresa constructora y abre en la Caixa con 200€ una cuenta corriente donde ingresará mensualmente el sueldo de 1.400€ y otros cobros. De esta cuenta irá sacando dinero para comer, vestirse, pagar facturas, etc.

7. De las situaciones del ejercicio anterior que sean una operación financiera indicar si se trata de operaciones elementales, parcialmente complejas o totalmente complejas.

8. Calcular todos los precios financieros de interés de las operaciones financieras de los apartados a), c), i) del ejercicio 6

9. Se compra un activo financiero el 14 de marzo, por un valor de 12.000€, que tiene vencimiento el 18 de octubre del mismo año, por un importe de 12.450€. Se pide:

   a) Obtener el plazo de la operación según los criterios Act/365, Act/360 y 30/360.

   b) Obtener todos los precios financieros de interés de la operación según los 3 criterios mencionados.

10. Una persona compró por 850€, el día 8 de marzo de un determinado año, un producto financiero que vence el día 19 de mayo del siguiente año, por un valor de 1.000€. Se pide:

    a) Obtener el plazo de la operación según los criterios Act/365, Act/360 y 30/360.

    b) Obtener todos los precios financieros de interés de la operación según los 3 criterios mencionados.

11. Calcular los intereses brutos de una cuenta corriente que ofrece un interés del 1,80% nominal si su saldo medio, durante los 91 días de liquidación, ha sido de 14.560€.

12. En una cuenta corriente que remunera un interés anual del 1,60% se han ingresado el 2 de enero de este año 12.524,68€. Calcular el capital acumulado y los intereses brutos a fecha 31 de enero:

13. Una imposición a plazo fijo (IPF) ha pagado 36,90€ de intereses por un capital de 8.000€ durante el primer trimestre (91 días). Calcular el interés nominal al que está contratada dicha IPF.

14. De dos productos se ha extraído hoy la siguiente información sobre sus precios y vencimientos:

	Precio actual	Precio a vencimiento
Vencimiento a 3 meses	992,30€	1.000€
Vencimiento a 9 meses	976,34€	1.000€

Calcular el tipo de interés nominal de cada producto.

15. En una operación financiera se descuenta una letra de cambio de nominal 4.000€ y vencimiento a los 90 días, a una tasa de descuento comercial del 6% anual. Calcular el valor efectivo obtenido.

16. Calcular la cuantía pagada por descontar un efecto comercial de valor nominal 4.800€ y vencimiento a 64 días a una tasa de descuento anual del 6,5% simple comercial.

17. Al descontar al 7,25% anual de descuento comercial una letra de cambio con vencimiento al cabo de 115 días se ha obtenido un líquido de 32.549€. Se pide:

a) Calcular el valor nominal de la letra de cambio.

b) ¿Cuál será el valor nominal de la letra de cambio en el caso de que se haya pagado, además, una comisión del 0,3% sobre el valor nominal?

18. Por un efecto comercial de nominal 37.000€ y vencimiento al cabo de 130 días se ha obtenido un importe de 35.997,92€. Se pide:

a) ¿Cuál es la tasa de descuento simple comercial anual aplicada a la operación?

b) ¿Cuál sería la tasa de descuento simple comercial anual aplicada al efecto comercial si, además, se ha aplicado una comisión del 0,50% sobre el valor nominal?

19. Responder las siguientes cuestiones:

a) ¿A qué tasa de interés simple anual vencido resulta una operación de descuento simple comercial al 8% anual con vencimiento a los 3 meses?

b) ¿A qué tasa de interés anual simple vencido resulta si, además, hay una comisión del 0,6% sobre el nominal?

20. Una empresa desea comprar al contado dentro de 2 meses un coche valorado en 29.750€. Para hacer frente a dicho pago, hoy cancelará un plazo fijo que se abrió con 10.000€ hace 9 meses y que viene ofreciendo un interés simple vencido del 3,50% anual. También a fecha de hoy llevará a descontar a una tasa del 6% anual un efecto comercial de valor nominal 20.000€ que vence dentro de 6 meses y por el que pagará una comisión del 0,4%. Se pide:

    a) Cuantía obtenida hoy por la empresa al cancelar el plazo fijo

    b) Cuantía obtenida hoy por la empresa al descontar el efecto comercial

    c) ¿Tiene la empresa, a fecha de hoy, dinero suficiente para comprar el coche? En caso negativo, la empresa se plantea colocar hoy todo el dinero obtenido en una cuenta corriente hasta el momento de la compra del coche. ¿A qué tipo de interés simple anual debería, como mínimo, negociar la empresa la cuenta corriente para poder adquirir el coche?

21. Hoy se invierten 6.320€ al 3,20% anual capitalizable trimestralmente. Se pide:

    a) Calcular el capital final que se obtiene al cabo de 3 años y medio.

    b) ¿Durante cuántos años se deberían haber colocado los 6.320€ para obtener un capital final de 7.471,16€?

22. Calcular el precio que hay que pagar hoy por un activo de nominal 2.000€ que vence dentro de 5 años y 2 meses, si se valora a un interés del 2,75% nominal acumulable mensualmente.

23. Calcular el capital final que se obtiene al invertir 8.430€ durante 1 año y medio al 2,80% anual capitalizable semestralmente.

24. Actualizar a interés compuesto y criterio Actual/365 la cantidad de 1.042€ durante 28 días a un interés del 5,34% anual.

25. Calcular el capital final que se habrá obtenido al cabo de 1 año y 4 meses si se han invertido 7.500€ al 3,60% anual acumulable bimestralmente.

26. Calcular el interés efectivo anual al que resulta un activo de nominal 1.000€ y vencimiento a los 24 meses, que ha sido comprado por un precio de 945,73€.

27. Obtener el precio de adquisición de un título de nominal 1.000€ con vencimiento a los 2 años y 3 meses, si se valora a un interés del 2,53% anual:

28. Hallar el interés efectivo anual de una inversión de 40.000€ que rinde un 4,50% anual capitalizable mensualmente.

29. Calcular el interés efectivo anual de una operación a 25 meses que se ha pactado a un interés nominal del 6,75% anual capitalizable trimestralmente.

30. Calcular el tanto efectivo bimestral y el tanto efectivo semestral equivalentes a un 6% nominal pagadero semestralmente.

31. Si por una inversión de 20.000€ al cabo de 3 meses se obtienen 20.350€, calcular:

    a) El interés efectivo trimestral

    b) El interés nominal con abono trimestral de intereses

    c) El interés efectivo anual

32. Determinar el precio que hay que pagar por un activo de nominal 1.000€ y vencimiento dentro de 840 días, si se valora con criterio Actual/365 a un interés del 2,40% anual.

33. Se invierte, durante un año, un capital de 9.000€. La operación ofrece durante el primer semestre un interés del 1,40% nominal acumulable mensualmente y durante el segundo semestre un 1,50% anual acumulable trimestralmente. Obtener:

    a) El capital final obtenido.

    b) ¿Qué tipo de interés efectivo anual debería haberse aplicado durante todo el plazo de la operación para obtener el mismo capital acumulado?

34. Calcular el interés efectivo mensual, el interés efectivo anual y la TAE de una operación que rinde un 4,50% anual capitalizable mensualmente.

35. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una operación que ofrece en 6 años y medio una rentabilidad acumulada del 25%.

36. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de un préstamo de 3.000€ a devolver en un solo pago dentro de 3 meses si se ha pactado un interés nominal del 6,75% acumulable mensualmente y existe una comisión de apertura del 2% sobre el nominal del préstamo.

37. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una inversión en la que al colocar 8.250€ el 8 de octubre de un determinado año se obtienen 9.156€ al 21 de octubre de dos años después. Considerar que en el momento de realizar la inversión se paga, además, una comisión de apertura del 3%. (Usar criterio Act/365).

38. Calcular el interés efectivo trimestral, el interés efectivo anual y la TAE de una operación a 3 años que se ha pactado a un interés nominal del 6,75% anual capitalizable trimestralmente.

39. Calcular el interés efectivo anual y la TAE de una operación que por un capital de 10.000€ ofrece en 4 años y medio una rentabilidad acumulada del 15% si al vencimiento hay que pagar a la entidad financiera que la ofrece una comisión de gestión del 1% sobre el capital invertido.

40. Se realiza una imposición de 15.342€ en un depósito a 2 años que acumula intereses trimestralmente. Si durante el primer año el interés nominal ha sido del 1,25% y durante el segundo año del 0,85%, se pide:

a) Calcular el saldo final del depósito

b) Calcular el interés efectivo anual y la TAE al que resulta el depósito

c) Calcular el interés efectivo anual y la TAE al que resulta el depósito si al vencimiento se ha de pagar una comisión de mantenimiento de 50€

41. Un capital de 6.000€ se coloca en un depósito A que rinde el 6% nominal acumulable por bimestres, y otro capital de 3.000€ se coloca en un depósito B que ofrece un interés del 0,6% efectivo mensual. Se pide:

    a) ¿Qué capital debería invertirse en otro depósito C al 8% anual pagadero cuatrimestralmente para obtener al cabo de 5 años la misma cuantía que con los depósitos A y B juntos?

    b) Calcular el interés efectivo anual de los 3 depósitos.

42. Una persona, al nacimiento de su hijo, deposita 10.000€ en un Fondo de Inversión que garantiza un interés efectivo del 8% anual. Al cabo de 7 años tiene otro hijo y decide dividir la cantidad acumulada en el Fondo hasta entonces en dos partes, asignando al recién nacido el 40% y el resto al hijo mayor. ¿Qué cantidad retirará cada hermano del Fondo al cumplir respectivamente 25 años?

43. Una persona deposita 30.000€ en un Fondo que rinde el 4% nominal capitalizable mensualmente. Se pide:

    a) Sabiendo que no existen comisiones, obtener la TAE del Fondo.

    b) ¿Cuántos años deben transcurrir para que el fondo tenga un saldo de 50.000€?

    c) ¿Qué tipo de interés nominal de capitalización semestral debería ofrecer el Fondo para duplicar el capital en 15 años?

44. Una persona ha ahorrado 20.000€ y una entidad financiera le ofrece 3 alternativas:

    1) Colocar el capital en un depósito a plazo fijo que rinde el 4% nominal acumulable mensualmente.
    2) Adquirir un efecto comercial de valor nominal 20.500€ y vencimiento dentro de 8 meses.
    3) Invertirlo en una cuenta corriente que ofrece un interés anual simple vencido del 7%, pero donde los primeros 8.000€ están sin remunerar.

Se pide:

a) Obtener la cuantía acumulada a los 8 meses según las 3 alternativas.

b) Calcular la TAE de las 3 alternativas si ninguna tiene comisiones.

Bloque temático 1.
Fundamentos del equilibrio financiero

1. Operación financiera. Regímenes financieros

2. Valoración financiera

    1. Definición
    2. Rentas financieras

1.1 Suma financiera

Hasta ahora se ha estado trabajando con operaciones financieras elementales en las que aparece un solo capital en la prestación y contraprestación

Para las operaciones financieras complejas (parcial o totalmente) en las que aparecen conjuntos de capitales puede ser conveniente **valorar dicho conjunto en un instante** determinado. Es decir, sustituir el conjunto de capitales por un único capital que lo represente

Dicho capital es **equivalente** al conjunto de capitales y se denomina **suma financiera** (o valor financiero)

Es evidente que para sumar capitales financieros, hay que tener en cuenta la idea del valor temporal del dinero. En adelante, y salvo que se indique lo contrario, utilizaremos el **R.F. de interés compuesto** para valorar

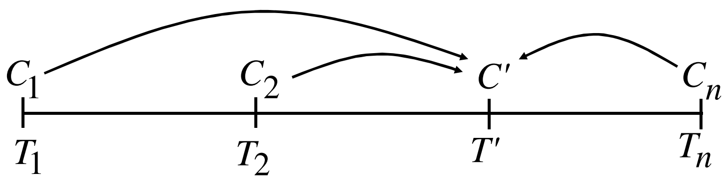
Dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\dots,n}$$

y el tipo de interés de valoración I_m

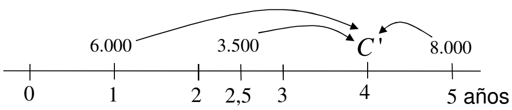
Definimos **suma financiera** en ***T'*****,** según el tipo de interés dado, como el capital financiero **(*C'*,*T'*)** donde:

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m\cdot(T'-T_r)}$$



Ejemplo: Calcular la suma financiera en *T'*=4 de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:

$$\{(6.000,\ 1),(3.500,\ 2{,}5),(8.000,\ 5)\}$$



$i_1 = I_1 = 0{,}05$

$$C' = 6.000\cdot(1+0{,}05)^{3} + 3.500\cdot(1+0{,}05)^{1{,}5} + 8.000\cdot(1+0{,}05)^{-1}$$

$$C' = 18.330{,}55€$$

La suma financiera en *T'*=4 de los pagos anteriores será el capital financiero:

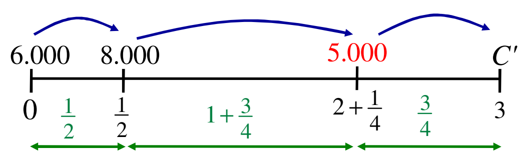
$$(C', T') = (18.330{,}55\ ,\ 4)$$

Ejercicio: Una persona abrió hace 3 años una cuenta con 6.000€. Al cabo de 6 meses hizo otro ingreso de 8.000€. Si hace 9 meses retiró de la cuenta 5.000€, calcular el saldo que a fecha de hoy existe en la cuenta si ésta ha ofrecido un interés anual del 4% capitalizable trimestralmente

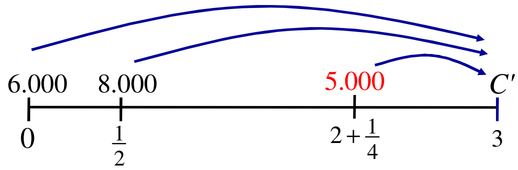
En primer lugar vamos a colocar gráficamente todos los capitales financieros de la operación:

Vamos a resolver este ejemplo de 2 formas distintas

Primera forma:

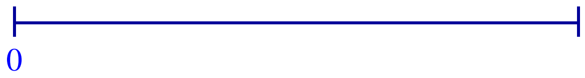


Segunda forma:



Ejercicio: Calcular hoy el saldo de una cuenta abierta hace 6 años con una imposición inicial de 15.000€. A los 9 meses de su apertura se ingresaron 6.000€ y hace un año y medio 8.000€. Esta cuenta ha proporcionado un interés del 0,25% mensual los 4 primeros años y un 2,5% anual capitalizable semestralmente hasta hoy

En primer lugar vamos a colocar gráficamente todos los capitales y tipos de interés de la operación:



Plantear la ecuación que permite obtener el tanto efectivo anual al que ha resultado la operación anterior

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

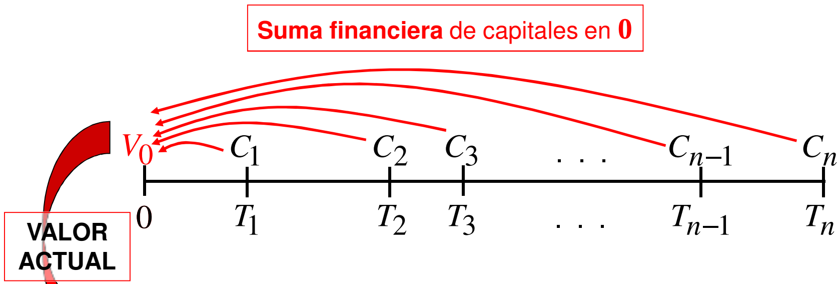
Cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un origen considerado, que generalmente se expresa como $\mathbf{0}$, la cuantía resultante se denomina **VALOR ACTUAL,** y se representa por V_0

Análogamente, cuando se realiza la suma financiera de un conjunto de capitales financieros en un instante final, que generalmente se expresa como T_n, la cuantía resultante se denomina **VALOR FINAL,** y se representa por V_n

Es decir, dado el conjunto de capitales financieros:

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés de valoración I_m

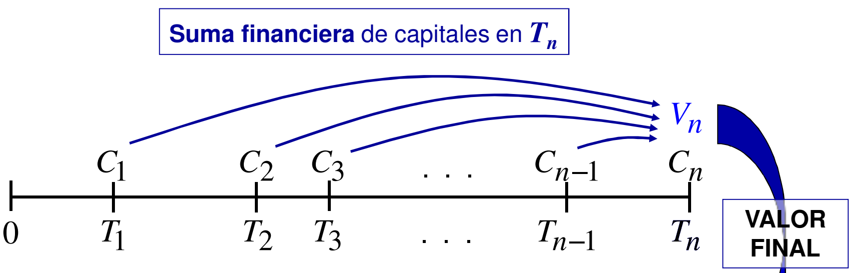


$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{-m \cdot T_r}$$

Análogamente, dado el conjunto de capitales financieros:

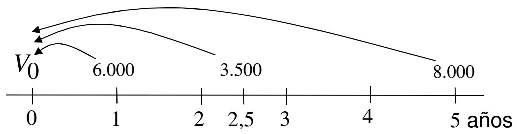
$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y el tipo de interés de valoración I_m



$$V_n = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_m)^{m \cdot (T_n - T_r)}$$

Ejemplo: Calcular el valor actual de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:



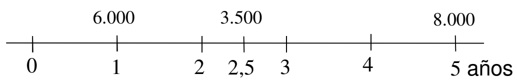
$$i_1 = I_1 = 0,05$$

$$V_0 = 6.000 \cdot (1+0,05)^{-1} + 3.500 \cdot (1+0,05)^{-2,5} + 8.000 \cdot (1+0,05)^{-5}$$

$$V_0 = 15.080,59€$$

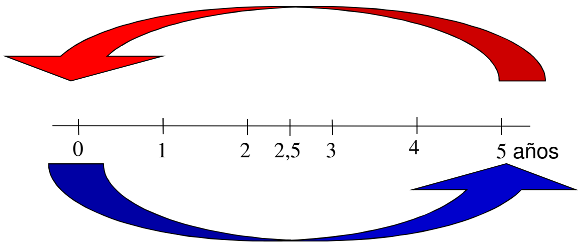
Esta cuantía representa el valor actual de dichos pagos futuros, es decir, lo que hay que abonar hoy para cancelar la deuda al tipo de interés considerado

Ejercicio: Calcular el valor final (en el instante 5) de unos pagos a realizar por unas cuantías de 6.000€ dentro de 1 año, 3.500€ dentro de 2 años y medio y de 8.000€ dentro de 5 años, si se valora a un 5% anual de interés:



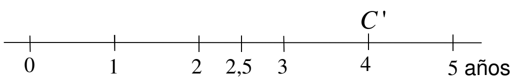
Esta cuantía representa el valor final de dichos pagos futuros, es decir, lo que hay que abonar dentro de 5 años para cancelar la deuda, si no se realizasen los pagos previstos, al tipo de interés considerado

Ejercicio: Demostrar que la cuantía del valor actual y la del valor final obtenidas en los ejemplos anteriores son equivalentes si se valoran a un interés del 5% anual:



CONCLUSIÓN: Una vez se ha obtenido el valor actual (o el valor final) de un conjunto de capitales, podemos conocer su suma financiera en cualquier diferimiento

Ejercicio: Demostrar que la cuantía de la suma financiera en el instante 4 obtenida para los pagos de los ejemplos anteriores (y que recordemos es de 18.330,55€) puede obtenerse a partir del valor actual y del valor final si se valoran a un interés del 5% anual:



1.2 Suma financiera versus Suma aritmética

En finanzas es muy importante no confundir la suma financiera con la suma aritmética de capitales

Ejemplo: Supongamos que usted puede comprar un coche a plazos y le ofrecen dos opciones:

a) Pagar dentro de 6 meses 5.000€, dentro de 2 años 6.000€ y dentro de 3 años 9.000€

b) Pagar dentro de 6 meses 9.000€, dentro de 1 año 7.000€ y dentro de 3 años 3.000€

¿Qué opción le interesa más como comprador si el tipo de interés de la operación fuese de un 6% anual?

En términos de suma aritmética parece mejor la opción b) pues si sumamos aritméticamente sus cuantías obtenemos:

$$9.000 + 7.000 + 3.000 = 19.000€$$

Por el contrario, con la opción a) la suma de sus cuantías es:

$$5.000 + 6.000 + 9.000 = 20.000€$$

En términos de suma financiera, lo que debemos hacer es calcular el valor actual (o el valor final o en cualquier otro diferimiento) de los capitales de ambas opciones a un interés del 6% anual y ver cuál es menor (ya que somos los compradores)

El valor actual de la opción a) sería:

$$V_0 = 5.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 6.000 \cdot (1+0,06)^{-2} + 9.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.752,98€$$

El valor actual de la opción b) sería:

$$V_0 = 9.000 \cdot (1+0,06)^{-1/2} + 7.000 \cdot (1+0,06)^{-1} + 3.000 \cdot (1+0,06)^{-3}$$

$$V_0 = 17.864,20€$$

En consecuencia, **al tipo de interés considerado**, le interesaría más realizar los pagos según la opción a)

Ejercicio: Para un negocio se han de invertir hoy 30.000€ y dentro de 1 año 20.000€. Los ingresos que se prevén obtener son de 8.000€ al cabo de 2 años y medio, 14.000€ dentro de 3 años y medio, 18.000€ de aquí a 5 años y, finalmente, 22.000 al cabo de 6 años. Si por el riesgo asumido se exige un interés del 8% anual, ¿interesa invertir en dicho negocio?

2.1 Concepto de renta financiera

Un conjunto de capitales financieros

$$\{(C_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

es una **renta financiera** si:

$$\forall r > 1, \quad T_r - T_{r-1} = P \quad \text{constante,}$$

donde:

P es el periodo de renta

$M = \frac{1}{P}$ es la frecuencia de renta

n es el número de términos de la renta

C_r es la cuantía de la renta correspondiente al periodo r

2.2 Clasificación de las rentas financieras

1) Según el número de términos:
- **Renta temporal**: Cuando n es finito
- **Renta perpetua**: Cuando tiene infinitos términos

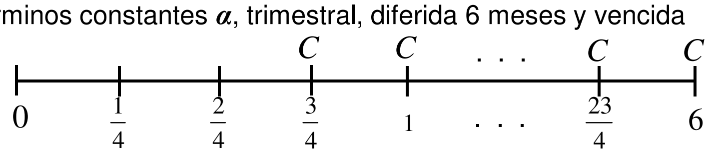
2) Según las cuantías (o términos):
- **Renta constante**: Cuando $\forall r, \quad C_r = C$ constante
- **Renta variable**: Cuando C_r NO constante

3) Según el origen considerado:
- **Renta inmediata**: El origen considerado es igual al origen de la renta
- **Renta diferida**: El origen considerado es anterior al origen de la renta

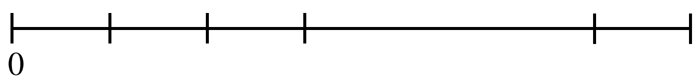
4) Según el periodo de la renta:
- **Renta mensual**: Cuando M=12
- **Renta trimestral**: Cuando M=4
- **Renta anual**: Cuando M=1, …

5) Según el vencimiento de la cuantía dentro de cada periodo:
- **Renta vencida** o **postpagable**: Cuando el término se sitúa al final
- **Renta anticipada** o **prepagable**: Cuando el término se sitúa al inicio

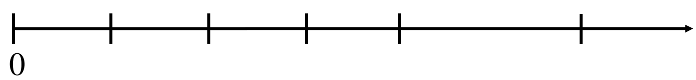
Ejemplo: Representar gráficamente una renta temporal de 22 términos constantes α, trimestral, diferida 6 meses y vencida



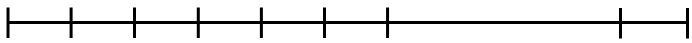
Ejercicio: Representar gráficamente una renta temporal de 120 términos variables, mensual, inmediata y vencida



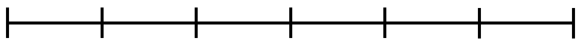
Ejercicio: Representar gráficamente una renta perpetua, constante de 50€, mensual, diferida 3 meses y anticipada



Ejercicio: Representar gráficamente las cuotas constantes y anticipadas de 400€, a devolver mensualmente, de un préstamo solicitado hoy, por un plazo de 4 años, si existe un diferimiento de 5 meses

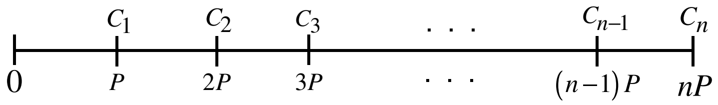


Ejercicio: Representar gráficamente los ingresos semestrales que, desde hoy y por anticipado, proporciona un activo financiero durante los próximos 3 años, si el primer ingreso es de 300€ y aumenta 25€ semestrales



2.3 Rentas financieras constantes

Dada una renta financiera con estructura temporal:



Diremos que es constante si todas las cuantías C_r son del mismo importe, es decir:

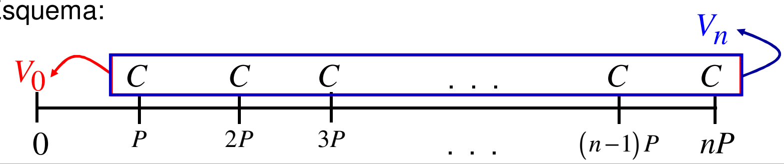
$$\forall r, \quad C_r = C \quad \text{constante}$$

Valoración de la renta de periodo P, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros:

$$\{(C,P),(C,2P),(C,3P),\ldots,(C,nP)\} \quad \text{o bien} \quad \{(C,r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Esquema:



Con independencia del momento en que queramos valorar un conjunto de capitales financieros, nos vamos a centrar en la **valoración de las rentas en el origen considerado (Valor actual)** y, a partir de éste, capitalizaremos o actualizaremos dicho valor actual al momento considerado

A la hora de valorar rentas, hay que tener muy presente que el tipo de interés efectivo que aparecerá en las fórmulas ha de tener la misma frecuencia que la que tenga la renta; es decir, M

En el caso de que el tipo de interés efectivo de la operación tuviera una frecuencia diferente, por ejemplo k, debería transformarse este tanto efectivo I_k en I_M, a partir de la expresión ya conocida:

$$(1+I_k)^k = (1+I_M)^M$$

Es decir:

$$I_M = (1+I_k)^{k/M} - 1$$

Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C\cdot(1+I_M)^{-r} = C\cdot\sum_{r=1}^{n}(1+I_M)^{-r} = C\cdot\left[(1+I_M)^{-1}+\ldots+(1+I_M)^{-n}\right]$$

Se trata de la suma de términos que varían en progresión geométrica:

$$\text{Suma} = \frac{\text{Primer término - Último término}\cdot\text{Razón}}{\text{1 - Razón}}$$

$$V_0 = C\cdot\frac{(1+I_M)^{-1}-(1+I_M)^{-n}\cdot(1+I_M)^{-1}}{1-(1+I_M)^{-1}} = C\cdot\frac{(1+I_M)^{-1}\cdot\left[1-(1+I_M)^{-n}\right]}{(1+I_M)^{-1}\cdot\left[(1+I_M)-1\right]}$$

Simplificando:

$$\boxed{V_0 = C\cdot\frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta constante, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:

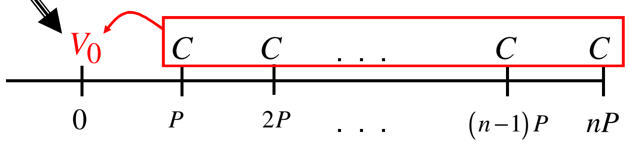
$$V_0 = C \cdot \frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Importe del término constante

Interés efectivo de valoración de frecuencia M (igual a la de la renta)

Número de términos constantes (debe ser un número natural, es decir, no puede tener decimales)

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta



La expresión $\frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$ también se representa como $a_{\overline{n|}I_M}$

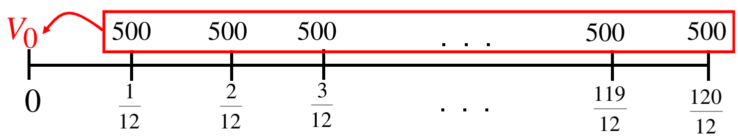
Por tanto, en general $V_0 = C \cdot a_{\overline{n|}I_M}$

2. Rentas financieras

2.3 Rentas financieras constantes

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata y vencida de 500€ mensuales durante 10 años a un interés del 6% anual capitalizable semestralmente



Puesto que la renta es mensual, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo mensual:

$$i_2 = 0{,}06 \Leftrightarrow I_2 = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03$$

$$(1+I_{12})^{12} = (1+0{,}03)^2$$

$$I_{12} = (1+0{,}03)^{2/12} - 1 = 0{,}0049386$$

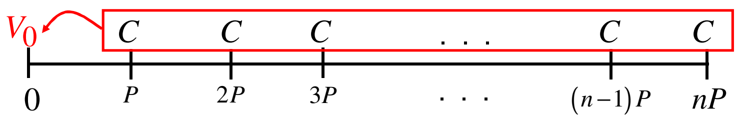
$$V_0 = 500 \cdot \frac{1-(1+0{,}0049386)^{-120}}{0{,}0049386}$$

$$V_0 = 500 \cdot a_{\overline{120|}0{,}0049386}$$

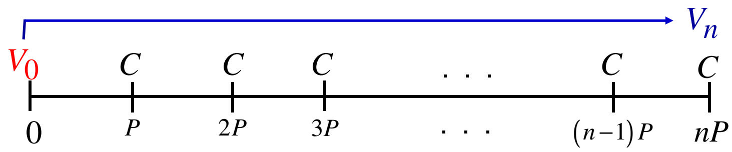
$$V_0 = 45.187{,}12€$$

Cálculo del **valor final**:

En primer lugar se calculará el valor actual de la renta:



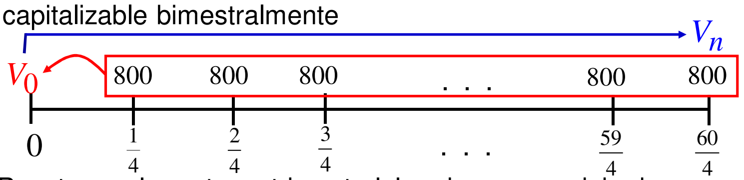
Y posteriormente se capitalizará dicho valor actual V_0 hasta el instante final



$$\boxed{V_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n}$$

2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Ejemplo: Calcular el valor final de una renta inmediata y vencida de 800€ trimestrales durante 15 años a un interés del 5% anual capitalizable bimestralmente



Puesto que la renta es trimestral, lo primero que debe hacerse es buscar el tanto efectivo trimestral:

$$i_6 = 0{,}05 \Leftrightarrow I_6 = \frac{0{,}05}{6} = 0{,}008\widehat{3} \qquad I_4 = \left(1+0{,}008\widehat{3}\right)^{6/4} - 1 = 0{,}012526$$

Calculamos el valor actual: $V_0 = 800 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}012526)^{-60}}{0{,}012526} = 33.604{,}54€$

Capitalizamos este valor hasta el año 15 (o 60 trimestres):

$$V_n = 33.604{,}54 \cdot (1+0{,}012526)^{60} = 70.920{,}04€$$

NOTA IMPORTANTE:

Hasta ahora hemos obtenido el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida

Para obtener el valor actual del resto de rentas temporales:

- **diferidas y vencidas**
- **inmediatas y anticipadas**
- **diferidas y anticipadas**

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese y, a partir de éste, también se podrá obtener su valor final

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta de 50€ semestrales pagadera durante 15 años, diferida 2 años y vencida, con un interés del 1% efectivo mensual

Calculamos el tanto efectivo semestral:

Valor actual:

Valor final:

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta trimestral, inmediata y anticipada de 300€ cada término, pagadera durante 5 años a un interés del 4% anual liquidable trimestalmente

El tanto efectivo trimestral es:

Valor actual:

Valor final:

Ejercicio: Calcular el valor actual y el valor final de una renta anticipada de 350€ mensuales pagadera durante 8 años y diferida 6 meses a un interés del 4% anual liquidable mensualmente

El tanto efectivo mensual es:

Valor actual:

Valor final:

Ejercicio: Un depósito bancario se abrió hace 5 años con 6.000€ y en él se han ido realizando imposiciones trimestrales constantes de 400€. La primera imposición se hizo a los 6 meses de abrir el depósito, y la última hace 3 meses. Si el tipo de interés aplicado al depósito ha sido del 0,75% bimestral, calcular el saldo que hoy tiene el depósito

El tanto efectivo trimestral es:

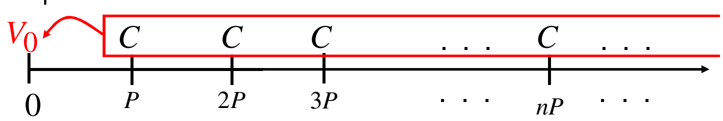
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Valoración de la renta de periodo P, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(C, r \cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

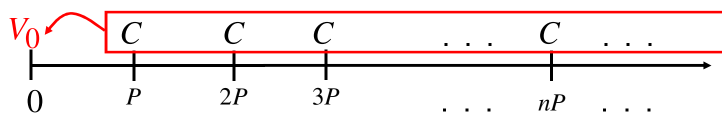
Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{\infty} C \cdot (1+I_M)^{-r}$$



Cálculo del **valor actual**:

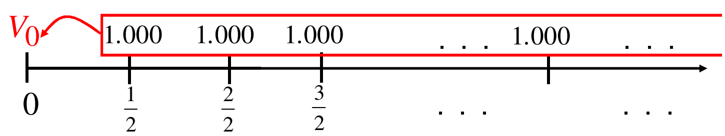
$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C\cdot(1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} C\cdot(1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} C\cdot\frac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M}$$

Por tanto:

$$\boxed{V_0 = \frac{C}{I_M}}$$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta inmediata, vencida y perpetua de 1.000€ semestrales a un interés del 8% anual capitalizable mensualmente



Buscamos el tanto efectivo semestral:

$$\left.\begin{array}{l} i_{12} = 0{,}08 \Leftrightarrow I_{12} = \dfrac{0{,}08}{12} = 0{,}00\widehat{6} \\ \\ I_2 = \left(1+0{,}00\widehat{6}\right)^{12/2} - 1 = 0{,}0406726 \end{array}\right\} \quad V_0 = \frac{1.000}{0{,}0406726} = 24.586{,}56€$$

Ejercicio: Calcular el valor actual de una renta diferida 1 año, vencida y perpetua de 675€ trimestrales a un interés del 3% anual pagadero semestralmente

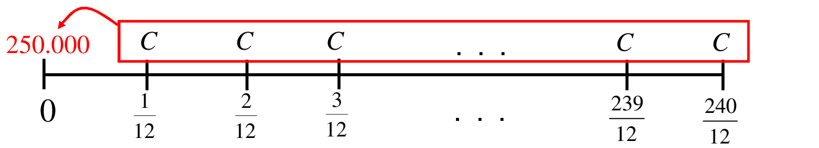
El tanto efectivo trimestral es:

Existen bastantes aplicaciones financieras de las rentas constantes. Ahora veremos dos:

- **Amortización periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cuota constante que debe pagarse periódicamente por la concesión de un préstamo
  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor actual de la renta correspondiente

- **Constitución periódica de un capital.** Es decir, obtención de la cantidad constante que debe aportarse periódicamente a una cuenta para alcanzar una cantidad determinada
  En este caso se trata de despejar α en la fórmula del valor actual capitalizado de la renta correspondiente

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo hipotecario de 250.000€ a devolver en cuotas mensuales inmediatas y vencidas durante 20 años a un interés del 3% nominal pagadero mensualmente. Calcular el importe de la cuota mensual constante que amortiza el préstamo



El tanto efectivo mensual será:

$$i_{12} = 0{,}03$$

$$I_{12} = \frac{0{,}03}{12} = 0{,}0025$$

La mensualidad será:

$$250.000 = C \cdot \frac{1-(1+0{,}0025)^{-240}}{0{,}0025}$$

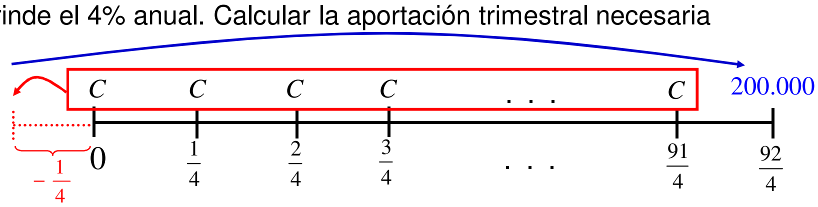
$$250.000 = C \cdot a_{\overline{240}|0{,}0025}$$

$$C = 1.386{,}49€$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Rentas financieras
2.3 Rentas financieras constantes

Ejemplo: Una persona querría obtener el día de su jubilación, dentro de 23 años, una cantidad de 200.000€. Para ello realizará desde hoy aportaciones constantes, trimestrales y anticipadas en un plan que rinde el 4% anual. Calcular la aportación trimestral necesaria



El tanto efectivo trimestral será: $I_1 = 0{,}04$

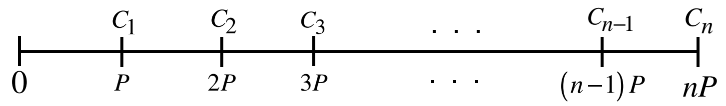
$$I_4 = (1+0{,}04)^{1/4} - 1 = 0{,}0098534$$

$$\underbrace{C \cdot \frac{1-(1+0{,}0098534)^{-92}}{0{,}0098534}}_{\text{Valor en } T=-\frac{1}{4}} \cdot (1+0{,}0098534)^{93} = 200.000$$

$$C = 1.332{,}31€$$

2.4 Rentas financieras geométricas

Dada una renta financiera con estructura temporal:



Diremos que es variable en progresión geométrica si cada cuantía C_r se obtiene multiplicando la cuantía anterior $C_{r\text{-}1}$ por una constante positiva q denominada razón de la progresión, es decir:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} \cdot q \quad \text{con } q > 0$$

Por recurrencia: $C_r = C_{r-1} \cdot q = \left(C_{r-2} \cdot q\right) \cdot q = C_{r-2} \cdot q^2 = \ldots = C_1 \cdot q^{r-1}$

Por tanto, otra forma de expresar las cuantías de una renta variable en progresión geométrica en función de su primera cuantía C_1 y su razón q es: $\quad \forall r > 1, \quad C_r = C_1 \cdot q^{r-1} \quad \text{con } q > 0$

Si $q > 1$ **la renta geométrica es creciente**

Si $0 < q < 1$ **la renta geométrica es decreciente**

Ejemplo: Una persona inicia hoy con 1.000€ un plan de pensiones en el que, durante los próximos 10 años, realizará aportaciones trimestrales anticipadas y crecientes un 2% trimestral acumulativo. Determinar la estructura de las aportaciones al plan

La primera aportación es de 1.000€: $C_1 = 1.000$

La segunda aportación es de:

$$C_2 = 1.000 + 1.000 \cdot 0,02 = 1.000 \cdot \left(1 + 0,02\right) = 1.000 \cdot 1,02$$

La tercera aportación es de: $C_3 = \left(1.000 \cdot 1,02\right) \cdot 1,02 = 1.000 \cdot 1,02^2$

Y así sucesivamente

Por tanto, las aportaciones forman una renta variable en progresión geométrica de razón $q = 1,02$ y primer término $C_1 = 1.000$. Es decir,

$$C_r = 1.000 \cdot 1,02^{r-1} \quad \text{con} \quad r = 1, 2, \ldots, 40$$

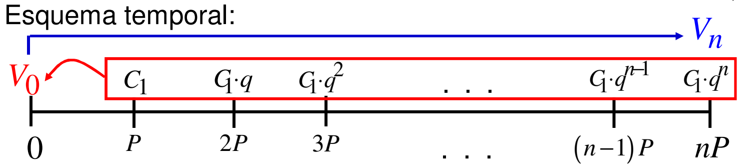
Y la última aportación será de:

$$C_{40} = 1.000 \cdot 1,02^{40-1} = 2.164,74$$

Valoración de la renta de periodo P, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1 \cdot q^{r-1}, r \cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema temporal:



Cálculo del **valor actual**: $V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r}$

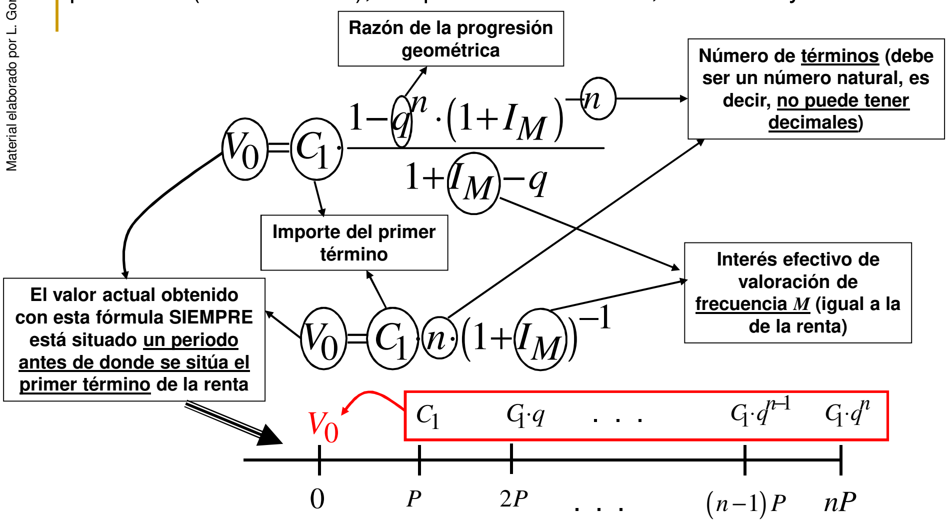
Desarrollando resulta:

$$\boxed{V_0 = \begin{cases} C_1 \cdot \dfrac{1-q^n \cdot (1+I_M)^{-n}}{1+I_M-q} & \text{si } q \neq 1+I_M \\ C_1 \cdot n \cdot (1+I_M)^{-1} & \text{si } q = 1+I_M \end{cases}}$$

Cálculo del **valor final**: $\boxed{V_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n}$

2. Rentas financieras
2.4 Rentas financieras geométricas

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta geométrica, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:



Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta temporal de 5 años, inmediata y vencida cuyo primer término es 5.000€ y aumenta un 1% mensual acumulativo en los dos casos siguientes:

a) A un interés del 10% anual

V_0	5.000	5.050	5.100,50	. . .	8.904,50	8.993,55
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	. . .	$\frac{59}{12}$	$\frac{60}{12}$

El tanto efectivo mensual es: $I_1 = 0{,}10 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}10)^{1/12} - 1 = 0{,}007974$

como $q = 1{,}01 \neq 1{,}007974 = 1 + I_M$

$$V_0 = 5.000 \cdot \frac{1 - 1{,}01^{60} \cdot (1+0{,}007974)^{-60}}{1 + 0{,}007974 - 1{,}01} = 315.978{,}76€$$

b) A un interés del 12% anual capitalizable mensualmente

$i_{12} = 0{,}12 \Rightarrow I_{12} = \frac{0{,}12}{12} = 0{,}01$ y como $q = 1{,}01 = 1 + I_M$

$$V_0 = 5.000 \cdot 60 \cdot (1+0{,}01)^{-1} = 297.029{,}70€$$

2. Rentas financieras
2.4 Rentas financieras geométricas

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

NOTA IMPORTANTE:

Hasta ahora hemos obtenido el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida

Para obtener el valor actual del resto de rentas temporales:

- **diferidas y vencidas**
- **inmediatas y anticipadas**
- **diferidas y anticipadas**

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese y, a partir de éste, también se podrá obtener su valor final

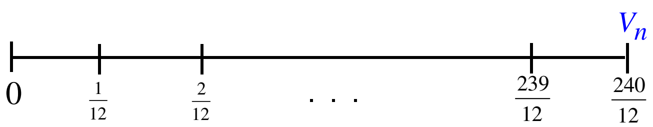
Ejercicio: Una persona inicia hoy, al cumplir 45 años, un plan de ahorro en el que realizará aportaciones mensuales, crecientes un 0,5% mensual acumulativo, con el objetivo de disponer de un capital al cumplir los 65. Si la primera imposición es de 100€ y el plan de ahorro rinde un interés del 3% efectivo anual. Se pide:

a) Determinar la expresión general de las cuantías de los ingresos

b) Calcular el importe de la última aportación que se realizará
(Considerar que en el momento de cumplir los 65 años no se realiza ingreso)

2. Rentas financieras
2.4 Rentas financieras geométricas

c) Calcular el capital acumulado cuando la persona cumpla los 65 años



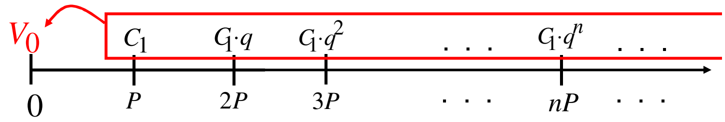
El tanto efectivo mensual es:

como

Valoración de la renta de periodo P, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{\left(C_1 \cdot q^{r-1}, r \cdot P\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema:



En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual

Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} C_1 \cdot q^{r-1} \cdot (1+I_M)^{-r}$$

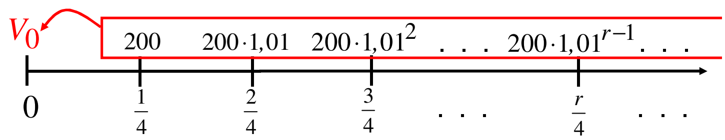
2. Rentas financieras
2.4 Rentas financieras geométricas

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

De donde: $\boxed{V_0 = \dfrac{C_1}{1+I_M-q} \quad \text{si} \quad q<1+I_M}$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado un periodo antes de donde se sitúa el primer término de la renta

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta trimestral, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen trimestralmente un 1% acumulativo siendo el primer término de 200€ a un tipo de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente



$$\left.\begin{array}{l} i_4 = 0{,}06 \Rightarrow I_4 = \dfrac{0{,}06}{4} = 0{,}015 \\ q = 1{,}01 \end{array}\right\}$$

Como: $q = 1{,}01 < 1{,}015 = 1 + I_4$

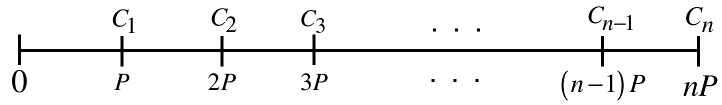
$$V_0 = \frac{200}{1+0{,}015-1{,}01} = 40.000€$$

Ejercicio: A final del año 2013, Banco STD había pagado un dividendo de 0,64€ por cada acción. El consejo de Administración piensa incrementar cada año dicho dividendo un 4% acumulativo. Si para comprar acciones de STD los inversores exigen un interés del 14% anual y suponiendo que STD tendrá una vida ilimitada, calcule el valor actual (final del año 2013) de los futuros dividendos de STD

Puesto que:

2.5. Rentas financieras aritméticas

Dada una renta financiera con estructura temporal:



Diremos que es variable en progresión aritmética (o lineal) si cada cuantía C_r se obtiene sumando a la cuantía anterior $C_{r\text{-}1}$ una constante h denominada razón de la progresión, es decir:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_{r-1} + h$$

Por recurrencia:

$$C_r = C_{r-1} + h = \left(C_{r-2} + h\right) + h = C_{r-2} + 2 \cdot h = \ldots = C_1 + \left(r-1\right) \cdot h$$

Por tanto, otra forma de expresar las cuantías de una renta variable en progresión aritmética en función de su primera cuantía C_1 y su razón h es:

$$\forall r > 1, \quad C_r = C_1 + \left(r-1\right) \cdot h$$

Si $h > 0$ **la renta aritmética es creciente**

Si $h < 0$ **la renta aritmética es decreciente**

Ejemplo: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, ¿cuál es la estructura de los gastos trimestrales previstos?

El primer gasto es de 6.000€: $C_1 = 6.000$

El segundo gasto es de: $C_2 = 6.000 + 350 = 6.350$

El tercer gasto es de:

$$C_3 = 6.350 + 350 = (6.000 + 350) + 350 = 6.000 + 2 \cdot 350 = 6.700$$

Y así sucesivamente

Por tanto, las aportaciones forman una renta variable en progresión aritmética de razón h =350 y primer término $C_1 = 6.000$. Es decir,

$$C_r = 6.000 + 350 \cdot (r-1) \quad con \quad r = 1, 2, \ldots, 20$$

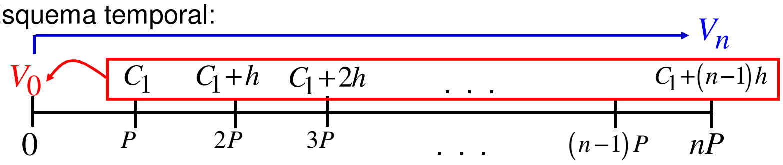
Y la última aportación será de:

$$C_{20} = 6.000 + 350 \cdot (20-1) = 12.650$$

Valoración de la renta de periodo P, temporal, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\left\{ \left(C_1 + (r-1) \cdot h,\ r \cdot P \right) \right\}_{r=1,2,\ldots,n}$

Esquema temporal:



Cálculo del **valor actual**:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot (1+I_M)^{-r} = \sum_{r=1}^{n} \left(C_1 + (r-1) \cdot h \right) \cdot (1+I_M)^{-r}$$

Desarrollando resulta: $\boxed{V_0 = \left(C_1 + \frac{h}{I_M} + nh \right) \cdot a_{\overline{n}|I_M} - \frac{nh}{I_M}}$

Cálculo del **valor final**: $\boxed{V_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n}$

Explicación de la fórmula del valor actual de la renta aritmética, de periodo P (frecuencia M), temporal de n términos, inmediata y vencida:

Razón de la progresión aritmética

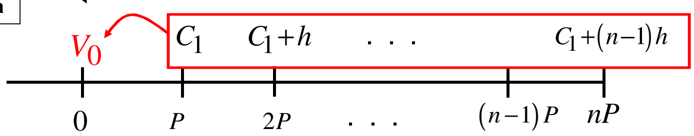
Número de **términos** (debe ser un número natural, es decir, **no puede tener decimales**)

$$V_0 = \left(C_1 + \frac{h}{I_M} + nh \right) \cdot a_{\overline{n|}I_M} - \frac{nh}{I_M}$$

Importe del primer término

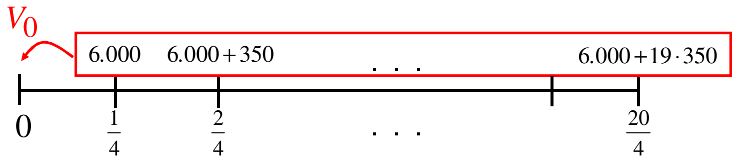
Interés efectivo de valoración de **frecuencia M** (igual a la de la renta)

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado **un periodo antes de donde se sitúa el primer término** de la renta



Ejemplo: Una pequeña empresa prevé, para los próximos 5 años, unos gastos trimestrales y vencidos que crecerán linealmente a razón de 350€ cada trimestre. Si para el primer trimestre los gastos ascienden a 6.000€, determinar el valor de los gastos, a día de hoy, para un tipo de interés del 4% nominal pagadero trimestralmente

Como sabemos, estos gastos forman una renta variable en progresión aritmética de razón $h = 350$ y primer término $C_1 = 6.000$



El tanto efectivo trimestral es: $i_4 = 0{,}04 \Leftrightarrow I_4 = \frac{0{,}04}{4} = 0{,}01$

$$V_0 = \left(6.000 + \frac{350}{0{,}01} + 20 \cdot 350 \right) \cdot a_{\overline{20|}0{,}01} - \frac{20 \cdot 350}{0{,}01} = 166.186{,}54€$$

NOTA IMPORTANTE:

Hasta ahora hemos obtenido el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida

Para obtener el valor actual del resto de rentas temporales:

- **diferidas y vencidas**
- **inmediatas y anticipadas**
- **diferidas y anticipadas**

capitalizaremos o actualizaremos la cuantía obtenida en el valor actual de la renta temporal, inmediata y vencida al instante que nos interese y, a partir de éste, también se podrá obtener su valor final

Ejercicio: Dado el conjunto de capitales financieros

$$\left\{\left(300+25\cdot(r-1),3+\frac{r}{2}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,11}$$

Se pide:

a) Representarlo gráficamente

b) A un interés del 3% anual pagadero semestralmente, calcular su valor actual (en T=0) y su valor final

El tanto efectivo semestral es:

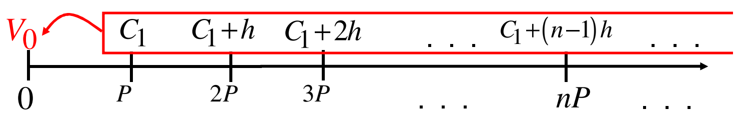
El valor actual en T=0 es:

El valor final es:

Valoración de la renta de periodo P, perpetua, inmediata y vencida

Estructura de los capitales financieros: $\{(C_1+(r-1)\cdot h, r\cdot P)\}_{r=1,2,\ldots,\infty}$

Esquema temporal:



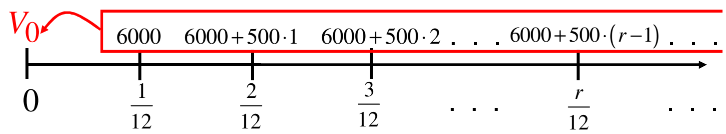
En el caso de **rentas perpetuas** sólo tiene sentido calcular su valor actual
Para su cálculo se seguirá el mismo procedimiento que para las rentas temporales, es decir, se obtendrá el valor actual de la renta de periodo P inmediata y vencida:

$$V_0 = \sum_{r=1}^{\infty}(C_1+(r-1)\cdot h)\cdot(1+I_M)^{-r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}(C_1+(r-1)\cdot h)\cdot(1+I_M)^{-r}$$

De donde: $$\boxed{V_0 = \frac{C_1}{I_M} + \frac{h}{I_M^2}}$$

El valor actual obtenido con esta fórmula SIEMPRE está situado <u>un periodo antes de donde se sitúa el primer término</u> de la renta

Ejemplo: Calcular el valor actual de una renta mensual, inmediata, vencida y perpetua cuyos términos crecen linealmente 500€ mensuales siendo el primer término de 6.000€ a un tipo de interés del 8% anual

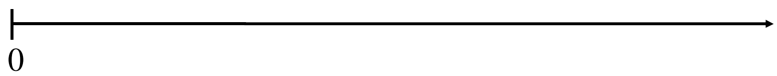


$$I_1 = 0{,}08 \Rightarrow I_{12} = (1+0{,}08)^{1/12} - 1 = 0{,}006434 \qquad h = 500$$

$$V_0 = \frac{6.000}{0{,}006434} + \frac{500}{0{,}006434^2} = 13.010.786{,}25€$$

2. Rentas financieras
2.5 Rentas financieras aritméticas

Ejercicio: Calcular el valor actual de una renta trimestral, diferida 1 año, anticipada y perpetua cuyos términos crecen linealmente 200€ trimestrales siendo el primer término de 700€ a un tipo de interés del 6% anual liquidable trimestralmente



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Una persona debe pagar 6.000€ dentro de 1 año y 5.000€ dentro de 4 años y medio. Calcular el capital que deberá pagar dentro de 2 años a un interés del 5% anual para cancelar ambas deudas.

2. Una persona compra una finca y abona al contado el 50% de su valor. Para el pago del resto, el vendedor ofrece dos opciones:

   Opción A): Pagar 12.000€ dentro de 2 años y 6 meses y 50.000€ al cabo de 5 años.

   Opción B): Pagar 60.000€ dentro de 3 años.

   Si el tipo de interés se fija en el 6% anual, indicar cuál es el precio de la finca en cada una de las opciones y qué opción es más conveniente para el comprador.

3. Hace 3 años se abrió una cuenta con 3.000€. Al cabo de 9 meses se ingresaron 2.000€ y hace 6 meses se ingresaron 5.500€. Se pide:

   a) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta si el tipo de interés es del 6% nominal acumulable semestralmente.

   b) Plantear la ecuación que permitiría obtener el interés efectivo anual para el inversor en el apartado anterior.

   c) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta si el tipo de interés es del 4% anual durante un año y medio y del 0,5% mensual durante el resto del plazo.

   d) Plantear la ecuación que permitiría obtener el interés efectivo anual para el inversor en el apartado anterior.

4. Hace 4 años se abrió un depósito con 6.000€. Pasados 18 meses se ingresaron 5.200€ y hace 9 meses se retiraron 1.500€. Los tipos de interés aplicados han sido del 4% anual capitalizable trimestralmente durante el primer año, el 1,90% efectivo semestral el segundo año y el 2,4% anual capitalizable mensualmente los dos últimos años. Calcular:

   a) El saldo del depósito a día de hoy.

   b) Plantear la ecuación que permitiría obtener al inversor el interés efectivo anual al que le resulta el depósito.

5. Una persona abrió una cuenta bancaria **A** hace 3 años con un ingreso inicial de 5.000€ en la que ingresó al año de su apertura 2.000€ más. Dicha cuenta ha rendido un interés del 5% anual pagadero mensualmente el primer año y un 4% anual capitalizable semestralmente el resto del plazo.

   Además hoy dispone de una cartera de efectos comerciales de 30.000€ de nominal, que vence a los 90 días la cuarta parte y a 270 días el resto.

   Hoy, con el saldo acumulado en la cuenta bancaria **A**, más el líquido obtenido de descontar la cartera de efectos comerciales, en régimen financiero de descuento comercial al 6% anual para los efectos con vencimiento a 90 días, y al 8% anual para los efectos con vencimiento superior, abre una cuenta bancaria **B** que rinde un 3,5% anual pagadero trimestralmente.

   Se pide:

   a) Calcular el saldo acumulado hoy en la cuenta bancaria **A.**

b) Calcular el líquido obtenido con el descuento de la cartera de efectos comerciales.

c) Calcular el saldo acumulado en la cuenta bancaria **B** dentro de 2 años.

6. Calcular el valor actual y el valor final, en régimen financiero de interés compuesto, de las siguientes rentas constantes:

   a) Renta anual de 2.500€ inmediata, vencida y de 10 años de duración. Tanto de interés 5% anual.

   b) Renta mensual, vencida, de 50€ pagadera durante 5 años tras un diferimiento de 6 meses. Tanto de interés 1% efectivo mensual.

   c) Renta inmediata y anticipada de 100€ trimestrales y de 15 años de duración. Tanto de interés 8% anual pagadero trimestralmente.

   d) Renta diferida 2 años y anticipada de 35€ semestrales pagadera durante 5 años. Tanto de interés 2% efectivo semestral los 4 primeros años de la operación financiera y 4% anual el resto del plazo.

   e) Renta perpetua, vencida, anual y diferida 2 años de 100€ cada término. Tanto de interés 3% efectivo anual.

7. Calcular el capital final que tendrá una cuenta vivienda que se ha abierto con una aportación inicial de 3.500€ y en la que se realizarán aportaciones vencidas cada 2 meses de 800€ durante 4 años a un interés anual del 3,40%.

8. Se ha abierto un plan de jubilación con 3.000€ que pagará un interés del 2% nominal acumulable mensualmente con el objetivo de alcanzar al cabo de 18 años un capital de 50.000€. Si durante dicho plazo se piensan realizar aportaciones mensuales, constantes y vencidas, calcular el importe de la mensualidad que permite alcanzar el objetivo.

9. Una persona solicita un préstamo por el que deberá pagar durante 40 años mensualidades constantes y vencidas de 823,15€. Sabiendo que se ha pactado a un interés efectivo anual del 6%, calcular la cantidad solicitada en préstamo.

10. Para la financiación de la compra de un televisor cuyo precio es de 2.000€, una cadena de electrodomésticos ofrece el producto denominado “Fórmula 10”. Consiste en pagar 10 cuotas mensuales y vencidas por un importe igual a la décima parte del precio del producto más una comisión inicial del 10% sobre dicho precio. Plantear la ecuación que permite determinar el tanto efectivo mensual al que resulta la financiación.

11. Se abre hoy con 4.000€ un plan de jubilación en el que a final de cada trimestre se aportarán 1.000€. Si el plan ofrece un interés del 3% anual. Determinar:

    a) Capital que se habrá acumulado al cabo de 22 años.

    b) Capital acumulado a los 22 años en el plan si a los 10 años de haberse iniciado el plan, el tipo de interés hubiera aumentado al 4% nominal capitalizable mensualmente.

12. Calcular el valor actual y el valor final de las siguientes rentas variables en progresión geométrica, valorando en régimen financiero de interés compuesto:

a) Renta inmediata y vencida de 10 términos anuales crecientes anualmente un 8% acumulativo. Primer término 500€. Tanto de interés 10% nominal capitalizable trimestralmente.

b) Renta semestral, inmediata y anticipada de 12 términos decrecientes en un 3% semestral acumulativo. La cuantía del tercer término es de 7.000€. Tanto de interés 9,5% anual pagadero mensualmente.

c) Renta mensual de términos crecientes en un 2% mensual acumulativo, pagadera por vencido durante 5 años tras un diferimiento de 5 meses. Primer término 700€.

c.1) Tanto de interés 6% efectivo semestral.

c.2) Tanto de interés 2% mensual.

d) Renta perpetua trimestral, diferida un año, anticipada y creciente un 1,20% trimestral acumulativo, con primer término de 1.000€ y a un interés del 6% anual acumulable trimestralmente.

13. Dado el conjunto de capitales financieros $\left\{\left(800\cdot 1,05^{r-1}, \frac{5+r}{4}\right)\right\}_{r=1,2,\ldots,15}$ se pide:

a) Indicar qué tipo de renta representa.

b) Calcular su valor actual a un interés del 5% anual.

14. En un plan de ahorro se harán aportaciones a final de cada año que se incrementarán un 4% anual durante 15 años. Si el primer año se aportan 2.000€, calcular:

a) Capital final acumulado si el plan ofrece un interés del 5% anual.

b) Capital final acumulado en el plan si el interés fuese del 4% anual.

15. Para la compra de un determinado bien se ha acordado pagar 10 anualidades. El primer pago es de 2500 € y se contemplan incrementos anuales del 12% acumulativo. Si el tanto de valoración es del 6% efectivo anual, calcular el valor del citado bien hoy, pagado al contado, suponiendo que:

a) La primera anualidad vence dentro de un año.

b) La primera anualidad vence hoy.

c) La primera anualidad vence dentro de 4 años.

16. Según la actual normativa contable, para valorar en el balance las construcciones de una empresa destinadas al alquiler se calcula el valor actual de todos los cobros futuros. Una empresa inmobiliaria española dedicada al alquiler de locales para oficinas cobra actualmente, y al inicio de cada mes, unos alquileres mensuales de 80.000€. Debido a la crisis, dichos alquileres se prevé que se reduzcan cada mes un 0,2% acumulativo. Si el tipo de interés que debe aplicarse para valorar las construcciones es del 15% anual, calcular el valor que hoy debe figurar de dicha partida en el balance (se supone que los alquileres se cobrarán de forma perpetua).

17. Hallar el valor actual y el valor final de las siguientes rentas variables en progresión aritmética, valorando en régimen financiero de interés compuesto:

a) Renta inmediata y vencida de 20 términos mensuales crecientes en 50€ cada mes. Primer término 300€. Tanto de interés 6% efectivo semestral.

b) Renta trimestral, diferida 9 meses, vencida y decreciente un 6% lineal cada trimestre, pagadera durante 3 años. La cuantía del primer término es de 5.000€. Tanto de interés 8% nominal pagadero trimestralmente.

c) Renta inmediata, semestral y anticipada de 15 términos, crecientes en 100€ cada semestre. Importe del tercer término 2.750€. Tanto de interés 10% efectivo anual.

d) Renta perpetua anual, diferida 6 meses, vencida y creciente 50€ cada año, con primer término de 1.000€ y a un interés del 6% anual.

18. Una empresa solicita un préstamo por el que deberá pagar durante 10 años trimestralidades vencidas. La primera será de 1.000€ e irán creciendo cada trimestre en 50€. Sabiendo que se ha pactado a un interés del 8% nominal pagadero trimestralmente, calcular:

a) El importe de la última trimestralidad.

b) La cantidad solicitada en préstamo.

19. Una persona abrió una cuenta hace 10 años en la que ha ingresado anualidades anticipadas. El primer ingreso fue de 700 € y cada año aumentó la anualidad en 100 €. Si el tanto pactado en la cuenta fue del 8% anual, ¿qué saldo tiene hoy la cuenta?

20. Una empresa debe decidir hoy entre dos proyectos de inversión que suponen los siguientes desembolsos:

<u>Proyecto 1</u>:

- Desembolso inicial de 100.000€.
- Durante los 2 primeros años, trimestralidades de 2.500€ venciendo la primera al final del primer semestre.
- 10 pagos anuales: el primero será de 3.000€ al cabo de 5 años del inicio de la operación y los próximos irán aumentando a razón de 250 € cada año.

<u>Proyecto 2</u>:

- Pago de 20 anualidades de 10.000€ venciendo la primera en el momento del contrato.
- 15 pagos anuales: el primero, de 2.500€, vence a los 3 años y los demás irán aumentando el 3% sobre la cuantía del año anterior.
- 5 pagos anuales de 3.000€ venciendo el primero de ellos al cabo de 3 años.

Valorar hoy los desembolsos utilizando un tipo efectivo anual del 5%, y decidir qué proyecto es el más económico.

Formulario

$C_r = C$	$C \cdot \frac{1-(1+I_m)^{-n}}{I_m}$	$C \cdot \frac{1}{I_m}$
$C_r = C_1 \cdot q^{r-1}$	$\begin{cases} C_1 \cdot \frac{1-q^n \cdot (1+I_m)^{-n}}{1+I_m-q} & 1+I_m \neq q \\ C_1 \cdot n \cdot q^{-1} & 1+I_m = q \end{cases}$	$\frac{C_1}{1+I_m-q}$ $\quad q<1+I_m$
$C_r = C_1 + h \cdot (r-1)$	$\left(C_1 + \frac{h}{I_m} + h \cdot n\right) \cdot \frac{1-(1+I_m)^{-n}}{I_m} - \frac{h \cdot n}{I_m}$	$\frac{C_1}{I_m} + \frac{h}{{I_m}^2}$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 2.
Operaciones financieras

1. Préstamos

   1. Definición y clasificación
   2. Reserva matemática. Magnitudes
   3. Préstamos con amortización única de capital
   4. Préstamos con amortización periódica: Préstamo francés
   5. Modificación de condiciones

2. Empréstitos

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1. Definición y clasificación

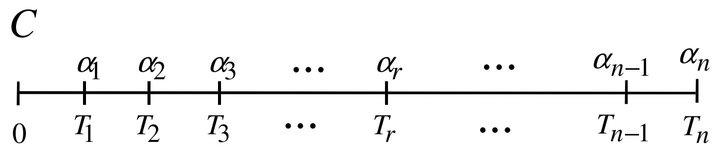
Un préstamo es una operación financiera en la que una persona, llamada **prestamista o sujeto activo**, entrega a otra persona, llamada **prestatario o sujeto pasivo**, una cuantía monetaria denominada **nominal del préstamo,** C. A cambio el sujeto pasivo se compromete a reembolsar o amortizar en un plazo concreto, ya sea mediante un único pago o mediante desembolsos sucesivos, la cantidad prestada y el pago de un precio o interés.

Por tanto, en el momento de concertarse el préstamo se establece una equivalencia financiera a interés compuesto entre el capital que cede el sujeto activo (**prestación**) y el capital o capitales que retorna el sujeto pasivo (**contraprestación**), fruto de los acuerdos que han adoptado.

Entonces, se puede representar una operación de préstamo:

Prestación: $(C,0)$

Contraprestación: $\{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$



Si dicho préstamo ha sido pactado al tipo de interés efectivo I_m, de la prestación y contraprestación anterior resulta la siguiente **equivalencia financiera**:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

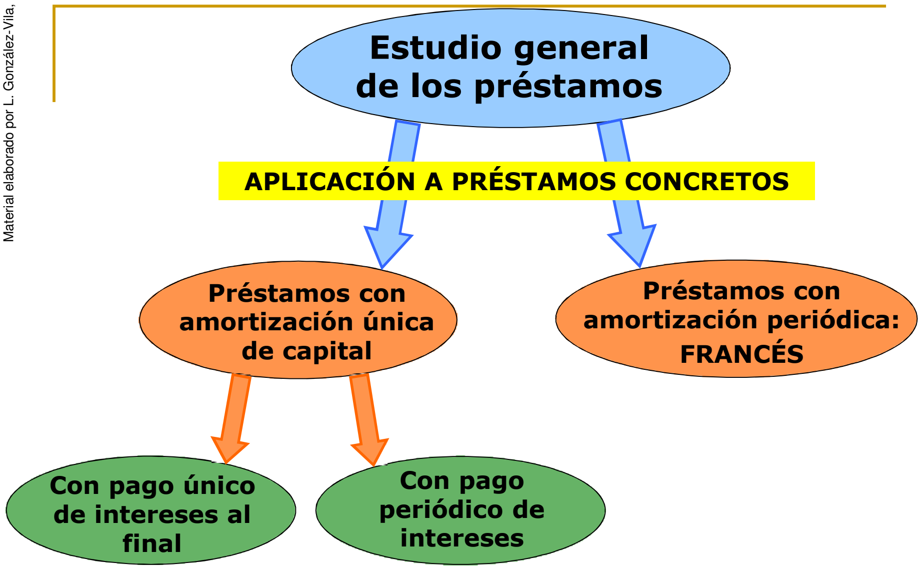
De los posibles criterios de clasificación de los préstamos destacamos los siguientes:

a) Según la forma de amortización del nominal del préstamo:
- Préstamo con amortización única de capital
- Préstamo con amortización periódica de capital

b) Según las formas de pago de los intereses:
- Préstamo con pago único de intereses
- Préstamo con pago periódico de intereses

Y, en concreto, estudiaremos los 3 préstamos siguientes:

- Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses
- Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses
- Préstamo con amortización periódica de capital y pago periódico de intereses: Préstamo francés



Estudio general de los préstamos

1. Reserva matemática
2. Término amortizativo
3. Cuota de interés
4. Cuota de amortización
5. Total amortizado
6. Capital pendiente
7. Valor del préstamo
8. Tanto efectivo prestatario
9. TAE del préstamo

2. Reserva matemática. Magnitudes

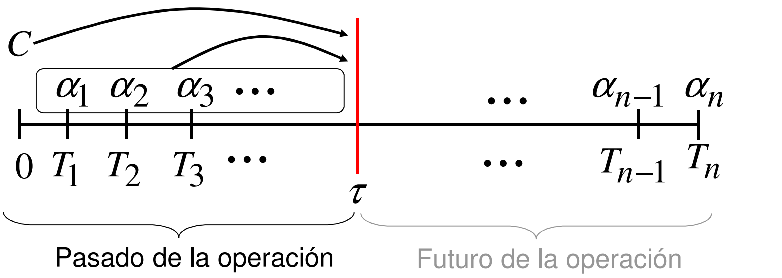
La **reserva matemática** en un instante cualquiera de la vida del préstamo es el importe que el prestatario debe entregar al prestamista, para cancelar la operación en dicho instante, considerando únicamente los capitales que intervienen en la equivalencia financiera

Existen dos formas de calcular la reserva matemática en un instante determinado:

- Analizando el pasado de la operación hasta ese instante (incluido)
  Reserva **retrospectiva**
- Analizando el futuro desde dicho instante
  Reserva **prospectiva**

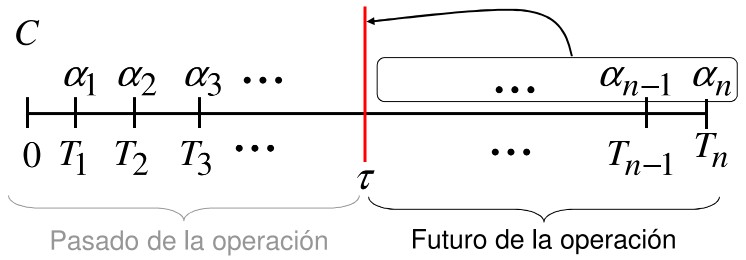
Vamos a estudiar la reserva matemática y las magnitudes de un préstamo con la siguiente equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$



La **reserva matemática retrospectiva** en τ es el valor financiero en τ del capital de la prestación, C, menos el valor financiero en τ de los capitales de la contraprestación que han habido desde el origen de la operación hasta dicho instante (incluido) al mismo tipo de interés I_m pactado en el préstamo. Es decir:

$$R_\tau^{ret} = C \cdot (1+I_m)^{m \cdot \tau} - \sum_{\forall T_r \leq \tau} \alpha_r \cdot (1+I_m)^{m \cdot (\tau - T_r)}$$



La **reserva matemática prospectiva** en τ es el valor financiero en τ de los capitales de la contraprestación que hay desde dicho instante (no incluido) hasta el final de la operación al mismo tipo de interés I_m pactado en el préstamo. Es decir:

$$R_\tau^{pro} = \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot (T_r - \tau)}$$

PROPIEDAD:
La reserva matemática retrospectiva y prospectiva en un instante τ son **iguales**. Vamos a demostrarlo a partir de la equivalencia financiera inicial del préstamo:

$$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

Valorando todos los capitales en el origen del préstamo tenemos:

$$C = \sum_{\forall T_r} \alpha_r \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot T_r}$$

A continuación separamos el sumatorio según que el instante T_r sea inferior o superior a τ :

$$C = \sum_{\forall T_r \le \tau} \alpha_r \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot T_r} + \sum_{\forall T_r > \tau} \alpha_r \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot T_r}$$

2. Reserva matemática. Magnitudes

Multiplicamos a ambos miembros de la igualdad por $(1+I_m)^{m\cdot\tau}$:

$$C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} = \sum_{\forall T_r\le\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{-m\cdot T_r}\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} +$$

$$+\sum_{\forall T_r>\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{-m\cdot T_r}\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau}$$

$$C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} = \sum_{\forall T_r\le\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{m\cdot(\tau-T_r)} + \sum_{\forall T_r>\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T_r-\tau)}$$

Y pasando el primer miembro de la suma a la otra parte de la igualdad:

$$\underbrace{C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau} - \sum_{\forall T_r\le\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{m\cdot(\tau-T_r)}}_{R_\tau^{ret}} = \underbrace{\sum_{\forall T_r>\tau} \alpha_r\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T_r-\tau)}}_{R_\tau^{pro}}$$

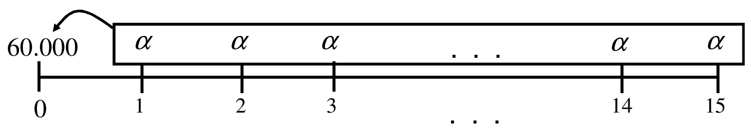
$$\boxed{R_\tau^{ret} = R_\tau^{pro}}$$

2. Reserva matemática. Magnitudes

Ejemplo: Una persona solicita un préstamo de 60.000€ que debe devolver mediante el pago de anualidades constantes y vencidas, pagaderas durante 15 años. Si el tanto de interés pactado es del 6% efectivo anual, se pide:

a) Importe de la anualidad

b) Reserva matemática retrospectiva y prospectiva a los 5 años y a los 5 años y medio de solicitado el préstamo

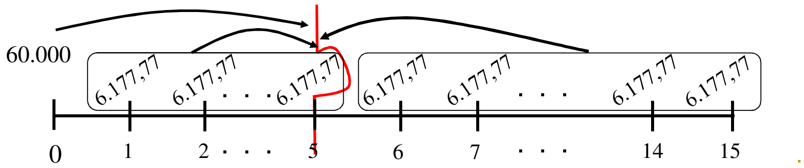


El tanto efectivo anual es: $I_1 = 0{,}06$

La anualidad se obtendrá de:

$$60.000 = \alpha\cdot\frac{1-(1+0{,}06)^{-15}}{0{,}06} \qquad \alpha = 6.177{,}7658 \cong 6.177{,}77€$$

b) Para calcular la reserva matemática retrospectiva a los **5 años**, al valor financiero en 5 del capital de la prestación se le resta el valor financiero en 5 de los capitales de la contraprestación habidos desde el origen de la operación hasta dicho instante (incluido) al 6% anual

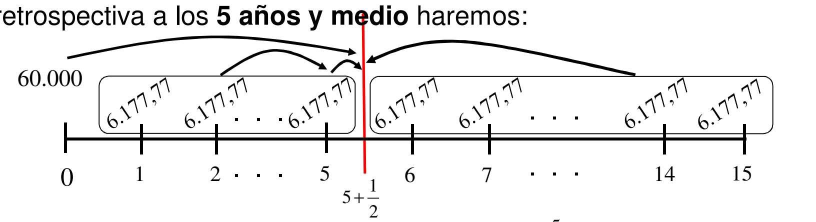


$$R_5^{ret} = 60.000 \cdot (1+0{,}06)^5 - 6.177{,}77 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^5 = 45.468{,}89€$$

Para calcular la reserva matemática prospectiva a los **5 años**, calculamos el valor financiero en 5 de los capitales de la contraprestación que habrán desde dicho instante (no incluido) hasta el final de la operación al 6% anual

$$R_5^{pro} = 6.177{,}77 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-10}}{0{,}06} = 45.468{,}89€$$

De forma análoga, para calcular la reserva matemática retrospectiva a los **5 años y medio** haremos:



$$R_{5,5}^{ret} = 60.000 \cdot (1+0{,}06)^{5,5} - 6.177{,}77 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-5}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^{5,5} = 46.813{,}09€$$

Obsérvese que también puede calcularse a partir de la reserva a 5 años:

$$R_{5,5}^{ret} = R_5^{ret} \cdot (1+0{,}06)^{0,5} = 45.468{,}9 \cdot (1+0{,}06)^{0,5} = 46{,}813{,}09€$$

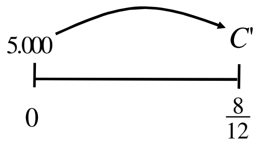
La reserva matemática prospectiva a los **5,5 años** será:

$$R_{5,5}^{pro} = 6.177{,}77 \cdot \frac{1-(1+0{,}06)^{-10}}{0{,}06} \cdot (1+0{,}06)^{0,5} = 46.813{,}09€$$

2. Reserva matemática. Magnitudes

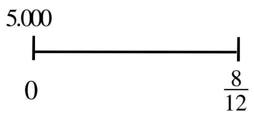
Ejercicio: Una persona solicita un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Si el tanto de interés pactado es del 5% anual acumulable mensualmente, se pide:

a) Importe que debe devolver la persona dentro de 8 meses



El tipo de interés del préstamo es:

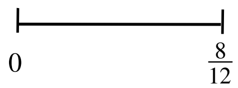
b) Reserva matemática retrospectiva a los 4 meses de solicitado el préstamo



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Reserva matemática. Magnitudes

c) Reserva matemática prospectiva a los 4 meses de solicitado el préstamo



d) Reserva matemática retrospectiva y prospectiva a los 4 meses y medio de solicitado el préstamo

A partir de la equivalencia financiera:

$$\underset{I_m}{(C,0) \underset{\downarrow}{\approx}} \{(\alpha_r, T_r)\}_{r=1,2,\ldots,n}$$

y considerando que los pagos realizados por el prestatario tienen periodicidad p, es decir $T_r = rp$, con $m = \frac{1}{p}$, además de la reserva matemática definimos las siguientes **magnitudes del préstamo**:

α_r : **Término amortizativo (Cuota total) correspondiente al periodo *r*-ésimo**

Importe del pago total realizado por el prestatario en el periodo r

$\alpha_r = Y_r + A_r$ donde:

Y_r **: Cuota de interés correspondiente al periodo *r***

Parte del término amortizativo destinada al pago de intereses

A_r **: Cuota de amortización correspondiente al periodo *r***

Parte del término amortizativo destinada a amortizar parte del nominal del préstamo. Se cumple:

$$\sum_{r=1}^{n} A_r = C$$

La suma de todas las cuotas de amortización debe coincidir con el nominal del préstamo

M_τ **: Total amortizado en τ**

Parte del nominal del préstamo amortizada hasta el instante τ

Denotaremos por M_r al total amortizado tras el pago del término amortizativo correspondiente al periodo r:

$$M_r = \sum_{s=1}^{r} A_s = M_{r-1} + A_r$$

Además: $M_0 = 0 \qquad M_n = C$

CP_τ **: Capital pendiente en** τ

Parte del nominal del préstamo pendiente de amortizar en el instante τ

Denotaremos por CP_r al capital pendiente tras el pago del término amortizativo correspondiente al periodo r:

$$CP_r = \sum_{s=r+1}^{n} A_s = C - M_r$$

El capital pendiente es el nominal del préstamo menos el total amortizado

Además:

$$CP_0 = C$$

$$CP_n = 0$$

Todas estas magnitudes pueden recogerse, periodo a periodo, en el **cuadro de amortización del préstamo**

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0				$M_0 = 0$	$CP_0 = C$
1	$\alpha_1 = Y_1 + A_1$	Y_1	A_1	$M_1 = A_1$	$CP_1 = C - M_1$
2	$\alpha_2 = Y_2 + A_2$	Y_2	A_2	$M_2 = M_1 + A_2$	$CP_2 = C - M_2$
3	$\alpha_3 = Y_3 + A_3$	Y_3	A_3	$M_3 = M_2 + A_3$	$CP_3 = C - M_3$
…	…	…	…	…	…
n	$\alpha_n = Y_n + A_n$	Y_n	A_n	$M_n = C$	$CP_n = 0$

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, hemos calculado anteriormente que dicho pago único asciende a 5.169,12€. Se pide:

a) Desglosar el pago único del mes 8 en cuota de interés y cuota de amortización

$$\alpha_n = Y_n + A_n$$

b) Indicar el total amortizado del préstamo en los 3 instantes siguientes:

b.1) En el momento de concederse el préstamo

b.2) A los 5 meses de haberse concedido el préstamo

b.3) Tras haber realizado el pago único a los 8 meses

c) Indicar el capital pendiente del préstamo en los 3 instantes siguientes:

c.1) En el momento de concederse el préstamo

c.2) A los 5 meses de haberse concedido el préstamo

c.3) Tras haber realizado el pago único a los 8 meses

d) Construir el cuadro de amortización de este préstamo

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interés Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0					
n					

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

V_τ **: Valor del préstamo en el instante** τ

Valor financiero en τ de los términos amortizativos **pendientes de pagar** a partir del instante τ a un tipo de interés de mercado (que no tiene porque coincidir con el pactado para el préstamo)

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, sabemos que el pago único asciende a 5.169,12€

Si a los 6 meses de haberse concedido el préstamo, el tipo de interés del mercado para este tipo de operaciones ha aumentado al 6% anual acumulable mensualmente, calcular el valor financiero del préstamo a los 6 meses

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

En toda operación de préstamo suelen existir una serie de gastos y comisiones como, por ejemplo, los gastos de tasación, comisión de apertura, comisión de estudio, gastos de notario, registro, etc.

Según los gastos y comisiones que se consideren aparecen:

Tanto efectivo prestatario (sujeto pasivo)

Tipo de interés efectivo al que le resulta el conjunto de la operación de préstamo al prestatario. Se obtiene de considerar la equivalencia:

$$\boxed{\text{Prestación efectiva para el prestatario}} \underset{\downarrow}{\approx} \boxed{\text{Contraprestación efectiva para el prestatario}}$$

Tanto efectivo prestatario

Tanto efectivo anual (TAE) del préstamo

Tipo de interés efectivo anual al que resulta la operación financiera en sus condiciones iniciales y siguiendo la normativa establecida por el Banco de España (Circular 5/2012):

En el cálculo de la TAE se incluirán los intereses, comisiones y demás gastos que el cliente esté obligado a pagar a la entidad como contraprestación por el crédito o préstamo recibido o los servicios inherentes al mismo

Ejercicio: A una persona le han concedido un préstamo de 5.000€ que debe devolver mediante un único pago de capital e intereses dentro de 8 meses. Al interés pactado del 5% anual acumulable mensualmente, sabemos que el pago único asciende a 5.169,12€

Los gastos asociados a dicho préstamo son:

- La persona debe pagar a la entidad una comisión de apertura del préstamo del 2% sobre el valor nominal
- La persona debe pagar 330€ al notario en el momento de la firma del préstamo

Con la información anterior, se pide:

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Reserva matemática. Magnitudes

a) Calcular el tanto efectivo anual prestatario

Prestación efectiva para el prestatario	$\approx$ $\downarrow$	Contraprestación efectiva para el prestatario

Tanto efectivo prestatario

Si valoramos en el origen de la operación:

b) Calcular la TAE del préstamo

Según la normativa establecida por el Banco de España, de todos los gastos de esta operación, el único que puede formar parte de la TAE del préstamo es la comisión de apertura

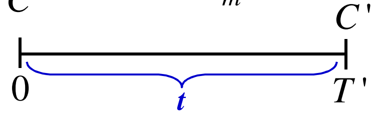
Si valoramos en el origen de la operación:

3.1. Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza mediante un único pago al final de la operación
2. La cuota de interés es única y se hace efectiva al final del plazo, según el tipo de interés del préstamo I_m

Equivalencia financiera $(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} (C',T')$



La cuantía total que se tendrá que pagar al final de la operación es:

$$C' = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t}$$

donde t es el plazo de la operación en años

De dicha cuantía total, la **cuota de interés** asciende a:

$$Y = C' - C = C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot t} - C$$

Y la **cuota de amortización** es $A = C$

A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 3 instantes concretos:

- En el origen del préstamo: 0
- En un instante cualquiera dentro del plazo del préstamo:
  $$\tau \in (0, T')$$
- En el instante final del préstamo: ***T'***

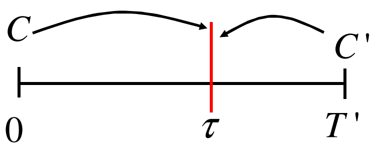
3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Reserva matemática

- En 0 : $R_0 = C$

- En τ : $R_\tau = \begin{cases} \xrightarrow{\text{retrosp.}} C \cdot (1 + I_m)^{m \cdot \tau} \\ \xrightarrow{\text{prosp.}} C' \cdot (1 + I_m)^{-m \cdot (T' - \tau)} \end{cases}$



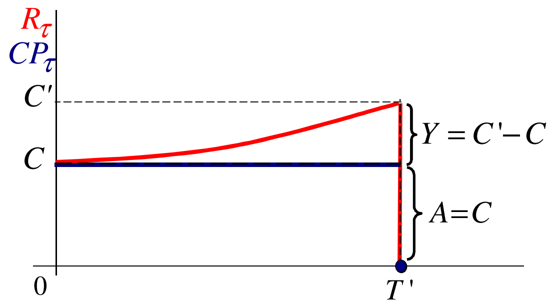
- En ***T'*** : $R_{T'} = 0$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En τ : $CP_\tau = C$
- En ***T'*** : $CP_{T'} = 0$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



La reserva matemática y el capital pendiente solo coinciden en 0 y *T'*

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Préstamos con amortización única de capital
3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En τ : $M_\tau = 0$
- En ***T'*** : $M_{T'} = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
τ	**Retrospectiva**	$C\cdot(1+I_m)^{m\cdot\tau}$	C	0
	Prospectiva	$C'\cdot(1+I_m)^{-m\cdot(T'-\tau)}$		
T'	0		0	C

3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

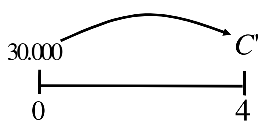
Para determinar el **tanto efectivo prestatario** y **TAE** procederemos de la forma ya descrita en el apartado 2

3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 30.000€ a amortizar mediante un solo pago, comprensivo de capital e intereses, a los 4 años de su concesión pactado al 7,5% efectivo anual. El prestatario paga en el momento de la concesión una comisión de apertura de 300€ y un pago de 600€ al notario. Se pide:

a) Cantidad a devolver a los 4 años para cancelar el préstamo



El tipo de interés del préstamo es:

b) Cuota de amortización y cuota de interés

La cuota de interés es

La cuota de amortización es

3. Préstamos con amortización única de capital

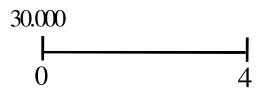
3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

c) Reserva matemática a los 2 años y medio de su concesión

$$R_{2,5} = \begin{cases} \text{retrosp.} \\ \text{prosp.} \end{cases}$$

d) Capital pendiente a los 2 años y medio de su concesión

e) Valor del préstamo a los 2 años y medio de su concesión si el tanto de interés del mercado es del 6% anual



3. Préstamos con amortización única de capital

3.1 Préstamo con amortización única de capital y pago único de intereses

f) Tanto efectivo anual prestatario

Prestación efectiva para el prestatario	$\approx$	Contraprestación efectiva para el prestatario

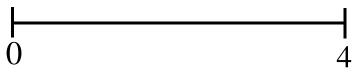
$\downarrow$

Tanto efectivo prestatario

Si valoramos en el origen de la operación:

g) TAE del préstamo

O de forma equivalente:



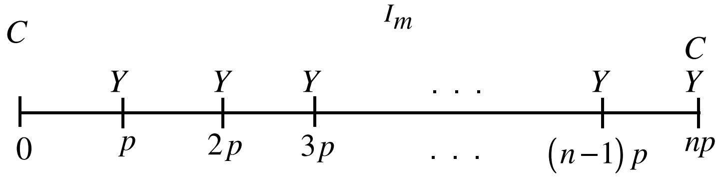
Si valoramos en el origen de la operación:

3.2. Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza mediante un único pago al final de la operación
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas con periodicidad p, por vencido, según el tipo de interés del préstamo I_m

Equivalencia financiera $$(C,0) \underset{\substack{\downarrow \\ I_m}}{\approx} \{(Y,rp),(C,np)\}_{r=1,2,\ldots n}$$



$$C = Y \cdot a_{\overline{n}|I_m} + C \cdot (1+I_m)^{-n}$$

La **cuota de interés** periódica es $Y = C \cdot I_m$

La **cuota de amortización** que se hace efectiva al final del préstamo es

$$A = C$$

A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 4 instantes concretos:

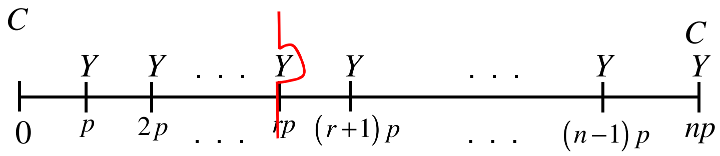
- En el origen del préstamo: 0
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: rp
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:
  $$\tau \in \left(rp, (r+1)p\right)$$
- En el instante final del préstamo: np

3. Préstamos con amortización única de capital

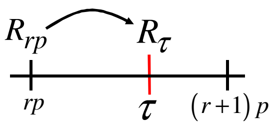
3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Reserva matemática

- En 0: $R_0 = C$
- En rp: $R_{rp} =$
  - retrosp. $C \cdot (1+I_m)^r - Y \cdot a_{\overline{r}|I_m} \cdot (1+I_m)^r = C$
  - prosp. $Y \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} + C \cdot (1+I_m)^{-(n-r)} = C$



- En τ:

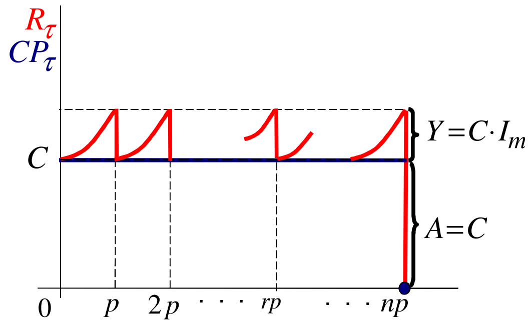


- En np: $R_{np} = 0$

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = C$
- En τ : $CP_\tau = CP_r = C$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



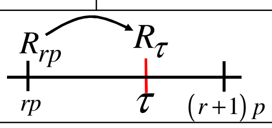
La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago de la cuota de interés)

3. Préstamos con amortización única de capital
3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = 0$
- En τ : $M_\tau = M_r = 0$
- En ***np*** : $M_n = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	C	C	0
	Prospectiva	C		
τ			C	0
np	0		0	C

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Además, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

Para determinar el **tanto efectivo prestatario y TAE** procederemos de la forma ya descrita en el apartado 2

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 5.000€ pactado al 12% anual pagadero trimestralmente con abono trimestral de intereses por vencido y amortización única de capital a los 2 años. Para su concesión el prestatario paga una comisión de apertura del 1,5% y 135€ de gastos notariales. Determinar:

a) Importe de la cuota de interés a pagar trimestralmente

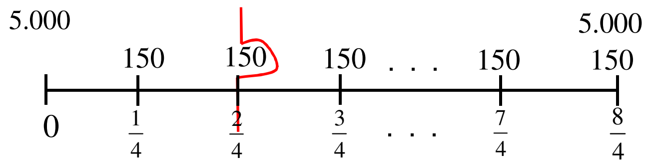
El tipo de interés efectivo del préstamo es:

Por tanto, la cuota de interés trimestral es:

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

b) Reserva matemática y capital pendiente a los 6 meses (2 trimestres) de concederse el préstamo

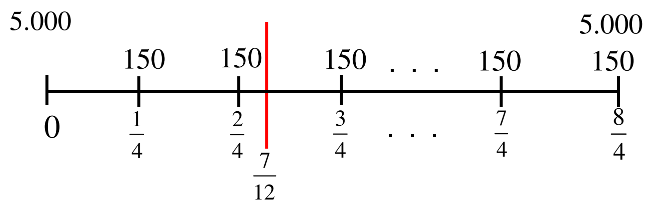


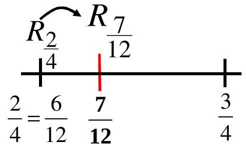
Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

c) Reserva matemática y capital pendiente a los 7 meses de concederse el préstamo





3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

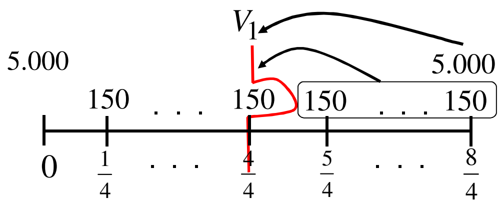
d) Cuadro de amortización

r	Término Amortizativo α_r	Cuota de Interes Y_r	Cuota de Amortización A_r	Total Amortizado M_r	Capital Pendiente CP_r
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

e) Valor del préstamo al año de concederse el préstamo si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual



El tipo de interés de valoración es

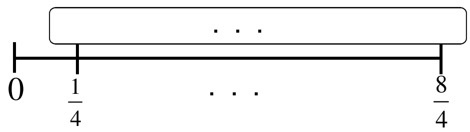
Luego

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

f) Plantear la ecuación que permite determinar el tanto efectivo prestatario

Para calcular el **tanto efectivo prestatario** consideramos la prestación y contraprestación efectivamente realizada por éste



Como el pago de intereses tiene frecuencia trimestral, debe valorarse con un interés efectivo trimestral. Si valoramos en el origen:

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

g) Plantear la ecuación que permite determinar la TAE del préstamo

Para obtener la **TAE** del préstamo, del total de gastos que paga el prestatario, únicamente se ha de considerar la comisión de apertura, es decir, 75€

Como el pago de intereses tiene frecuencia trimestral, debe valorarse con un interés efectivo trimestral. Si valoramos en el origen:

A partir de esta expresión, y con software adecuado, se obtendría el tipo de interés efectivo trimestral, I_4. Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo

3. Préstamos con amortización única de capital

3.2 Préstamo con amortización única de capital y pago periódico de intereses

Ejercicio: Por un préstamo de 50.000€ pactado al 6% de interés nominal pagadero mensualmente se está pagando una cuota mensual de 250€. Tras 20 años de pagar dichas cuotas, el prestatario considera que el capital pendiente ya debe ser pequeño o nulo y acude a la entidad para liquidarla definitivamente

Aquel día los ordenadores de la agencia bancaria no funcionan debido a una subida de tensión. Calcular el capital pendiente de su préstamo

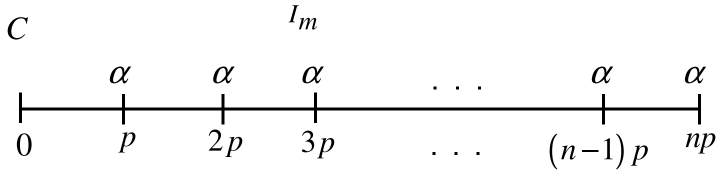
4. Préstamo con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Características

1. La amortización del nominal del préstamo se realiza con periodicidad p, por vencido
2. Las cuotas de interés se hacen efectivas con periodicidad p, por vencido, según el tipo de interés del préstamo I_m
3. Los términos amortizativos, que son la suma de la cuota de interés y la cuota de amortización, son constantes y vencidos

Equivalencia financiera

$$(C,0) \underset{I_m}{\overset{\downarrow}{\approx}} \left\{(\alpha, rp)\right\}_{r=1,2,\ldots n}$$



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

El término amortizativo del préstamo se obtendrá:

$$C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \quad \text{de donde:} \quad \alpha = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_m}}$$

La cuota de interés que se hace efectiva al final de cada periodo es:

$$Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$$

La cuota de amortización que se hace efectiva al final de cada periodo es:

$$A_r = \alpha - Y_r$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 1.000€ a devolver en 3 años por el sistema francés, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente

r	α_r	Y_r	A_r	M_r	CP_r
0					
1					
2					
3					
4					
5					
6					

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

En el cuadro de amortización anterior puede observarse que, a pesar de que el término amortizativo es constante, conforme va pasndo el tiempo **la cuota de interés disminuye** y la **cuota de amortización aumenta**. Esto es así porque la cuota de interés pagada a final de un periodo se calcula aplicando el tipo de interés del préstamo sobre el capital pendiente al inicio de dicho periodo, y éste va disminuyendo progresivamente periodo a periodo

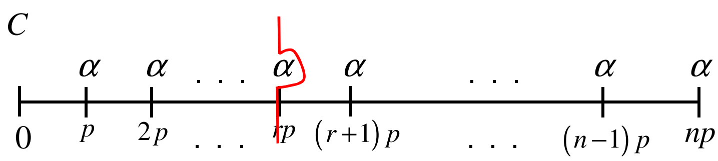
A continuación vamos a estudiar la reserva matemática, el capital pendiente y el total amortizado de este préstamo en 4 instantes concretos:

- En el origen del préstamo: **0**
- Al final de cada uno de los periodos del préstamo: ***rp***
- Dentro de un periodo concreto del préstamo:
$$\tau \in \left(rp, (r+1)\,p\right)$$
- En el instante final del préstamo: ***np***

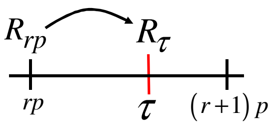
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Reserva matemática

- En 0 : $R_0 = C$
- En ***rp*** : $R_{rp} =$ retrosp. $C\cdot(1+I_m)^r - \alpha\cdot a_{\overline{r}|I_m}\cdot(1+I_m)^r$ / prosp. $\alpha\cdot a_{\overline{n-r}|I_m}$



- En τ :



- En ***np*** : $R_{np} = 0$

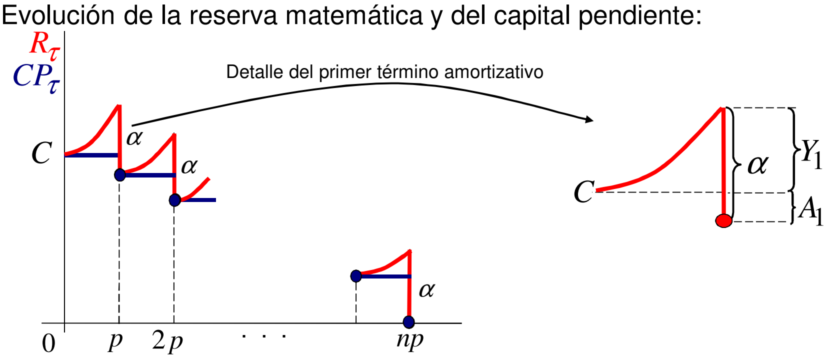
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Capital pendiente

- En 0 : $CP_0 = C$
- En ***rp*** : $CP_r = R_{rp}$
- En τ : $CP_\tau = CP_r$
- En ***np*** : $CP_n = 0$

La reserva matemática y el capital pendiente coinciden en el origen, en el final de la operación y al final de cada periodo (una vez efectuado el pago del término amortizativo)

Evolución de la reserva matemática y del capital pendiente:



4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Total amortizado

- En 0 : $M_0 = 0$
- En ***rp*** : $M_r = C - CP_r = C - R_{rp}$
- En τ : $M_\tau = M_r$
- En ***np*** : $M_n = C$

En resumen:

Instante	Reserva matemática		Capital pendiente	Total amortizado
0	C		C	0
rp	**Retrospectiva**	$C\cdot(1+I_m)^r - \alpha\cdot a_{\overline{r}\vert I_m}\cdot(1+I_m)^r$	R_{rp}	$C - R_{rp}$
	Prospectiva	$\alpha\cdot a_{\overline{n-r}\vert I_m}$		
τ	$R_{rp} \longrightarrow R_\tau$; rp τ $(r+1)p$		R_{rp}	$C - R_{rp}$
np	0		0	C

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Desmostremos que, en un préstamo amortizable por el sistema francés, las **cuotas de amortización** A_r varían en progresión geométrica, es decir, su expresión es del tipo $A_r = A_1 \cdot q^{r-1}$:

A partir del término amortizativo $\alpha = Y_r + A_r$ tenemos $A_r = \alpha - Y_r$

Además sabemos que $Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$ luego:

$$A_r = \alpha - CP_{r-1} \cdot I_m = \left\{ CP_r = R_{rp} = \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_m} \right\} =$$

$$= \alpha - \alpha \cdot a_{\overline{n-(r-1)}|I_m} \cdot I_m = \alpha \cdot \left(1 - \frac{1-(1+I_m)^{-(n-r+1)}}{I_m} \cdot I_m \right) =$$

$$= \alpha \cdot (1+I_m)^{-n+r-1} = \alpha \cdot \frac{1}{(1+I_m)^n} \cdot (1+I_m)^{r-1}$$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Hemos llegado a la conclusión de que:

$$A_r = \alpha \cdot \frac{1}{(1+I_m)^n} \cdot (1+I_m)^{r-1}$$

Tomando r=1, obtendremos el valor de A_1:

$$A_1 = \alpha \cdot \frac{1}{(1+I_m)^n} \cdot (1+I_m)^0 = \alpha \cdot \frac{1}{(1+I_m)^n}$$

Y sustituyendo queda:

$$A_r = A_1 \cdot (1+I_m)^{r-1}$$

Por tanto, queda demostrado que las cuotas de amortización siguen una progresión geométrica de primer término $A_1 = \frac{\alpha}{(1+I_m)^n} = \alpha - Y_1 = \alpha - C \cdot I_m$ y razón $q = 1 + I_m$

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejemplo: En el cuadro de amortización del préstamo francés de nominal 1.000€ a devolver en 3 años, con términos amortizativos semestrales, al 8% nominal acumulable semestralmente se ha obtenido:

$$A_1 = 150{,}76 \quad A_2 = 156{,}79 \quad A_3 = 163{,}07 \quad A_4 = 169{,}59 \quad A_5 = 176{,}37 \quad A_6 = 183{,}42$$

Se cumple que: $\boxed{A_r = A_1 \cdot (1 + I_m)^{r-1} = 150{,}76 \cdot 1{,}04^{r-1}}$

Así, por ejemplo: $A_3 = 150{,}76 \cdot 1{,}04^{3-1} = 163{,}07$

$$A_6 = 150{,}76 \cdot 1{,}04^{6-1} = 183{,}42$$

En un préstamo amortizable por el sistema francés, también puede calcularse el **valor financiero**, para un determinado tipo de interés de mercado, en cualquier momento de la vida del préstamo

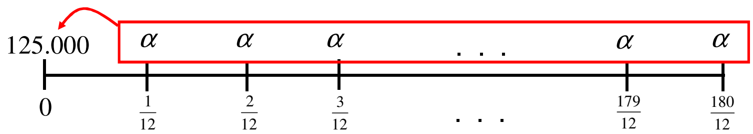
Para determinar el **tanto efectivo prestatario y TAE** procederemos de la forma descrita en el apartado 2

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 125.000€, amortizable por el sistema francés, en cuotas mensuales, duración 15 años, pactado al 6% nominal acumulable mensualmente.

Si el prestatario paga una comisión de apertura del 2% sobre el nominal y unos gastos iniciales de notario de 550€, se pide:

a) Calcular el **término amortizativo**

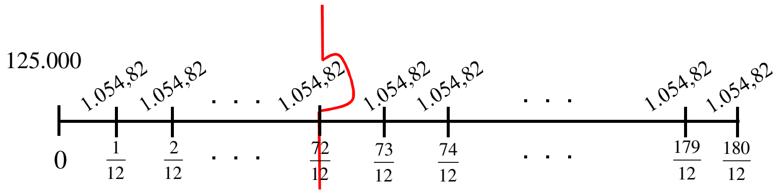


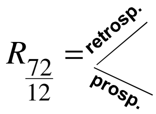
El tipo de interés del préstamo es:

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

b) **Reserva matemática** y **capital pendiente** a los 6 años (o 72 meses) de concertado el préstamo





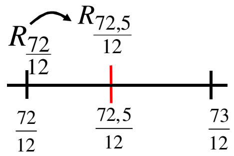
Este instante coincide con el final de un periodo, por tanto, la reserva matemática y el capital pendiente son iguales

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

c) **Reserva matemática** y **capital pendiente** a los 6 años y 15 días (o 72,5 meses) de concertado el préstamo

Para calcular la reserva matemática a los 6 años y 15 días basta con tomar la reserva matemática a los 6 años (o 72 meses) y capitalizarla 15 días (medio mes)



El capital pendiente a los 72,5 meses coincide con el capital pendiente a los 72 meses

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

d) Desglosar el término amortizativo que se paga a los 2 años

A los 2 años se paga el término amortizativo número 24

Vamos a obtener A_{24} a partir de $A_r = A_1 \cdot (1+I_m)^{r-1}$

$$A_1 = \alpha - Y_1 = \alpha - C \cdot I_m$$

En este caso

Luego y, entonces

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Otra forma alternativa de desglosar el término amortizativo número 24 sería obtener la cuota de interés 24, Y_{24}, a partir del capital pendiente en el mes 23 según la expresión

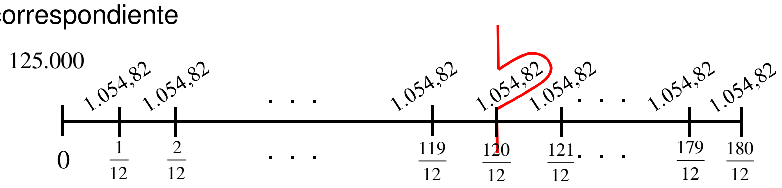
$$Y_r = CP_{r-1} \cdot I_m$$

En este caso $Y_{24} = CP_{23} \cdot 0,005$

Y, entonces

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

e) Calcular el **capital pendiente** de amortizar y el **total amortizado** a los 10 años de su concesión tras el pago del término amortizativo correspondiente



A los 10 años de la concesión del préstamo han transcurrido 120 meses y aún quedan 5 años de plazo. Por tanto,

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

f) Plantear la ecuación que permite determinar el tanto efectivo prestatario

Para calcular el **tanto efectivo prestatario** consideramos la prestación y contraprestación efectiva para éste

Como el pago del término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Si valoramos en el origen:

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

g) Plantear la ecuación que permite determinar la TAE del préstamo

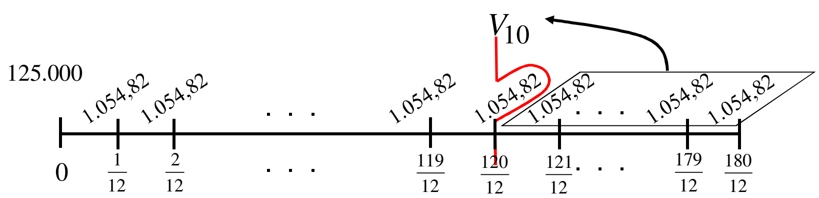
Para determinar la **TAE** del préstamo, del total de gastos que paga el prestatario, únicamente se ha de considerar la comisión de apertura, es decir, 2.500€

Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

A partir de esta expresión, y con software adecuado, se obtendría el tipo de interés efectivo mensual, I_{12} Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

h) Si el tanto de interés del mercado es del 10% efectivo anual, calcular el valor financiero del préstamo a los 10 años de haberse concedido, tras el pago del término amortizativo correspondiente



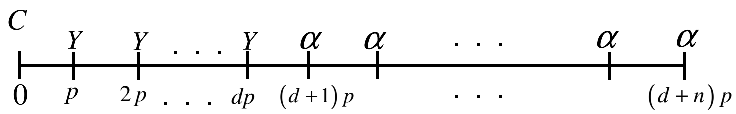
El tipo de interés de valoración es

Luego

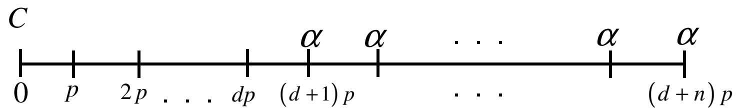
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

El préstamo francés puede pactarse con:

• **Carencia parcial:** Existe un plazo inicial de d periodos durante el cual solo se abona periódicamente la cuota de interés. Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes comprensivos de capital e intereses

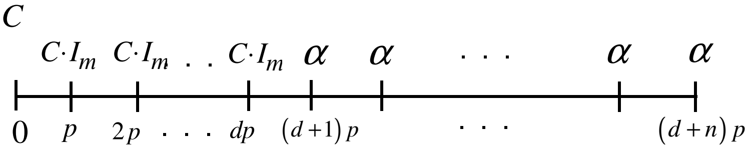


• **Carencia total:** Existe un plazo inicial de d periodos durante el cual no se abona ninguna cantidad (ni cuota de interés ni cuota de amortización). Finalizado dicho plazo comienzan a pagarse n términos amortizativos constantes comprensivos de capital e intereses



4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

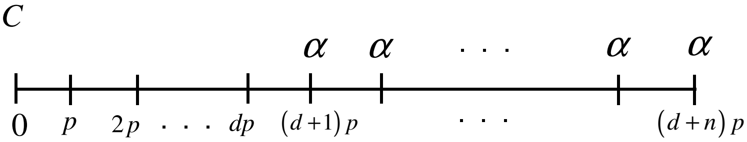
• **Carencia parcial:**



$$C = C \cdot I_m \cdot a_{\overline{d}|I_m} + \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$$

Y simplificando: $C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m}$

• **Carencia total:**



$C = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m} \cdot (1+I_m)^{-d}$ o bien: $C \cdot (1+I_m)^{d} = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_m}$

4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

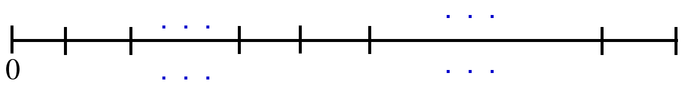
Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000€, amortizable mediante términos amortizativos semestrales, constantes y vencidos. La duración del préstamo es de 10 años siendo los 2 primeros de carencia parcial. Si el tanto de interés pactado es del 5% semestral, se pide:

a) Calcular el importe de la cuota semestral de interés a pagar durante el plazo de carencia parcial

b) El importe del término amortizativo a partir del plazo de carencia

Como el capital pendiente al final del plazo de carencia es de

c) Representar gráficamente la operación de préstamo



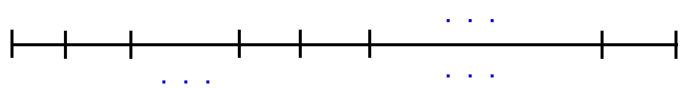
4. Préstamos con amortización periódica de capital: Préstamo francés

Ejercicio: Sea un préstamo de nominal 10.000 € a amortizar mediante el pago de 60 términos amortizativos mensuales, constantes y vencidos, tras un plazo de 2 años de carencia total. A un tipo de interés del 8% efectivo anual, se pide:

a) Calcular el importe del término amortizativo

O de forma equivalente:

b) Representar gráficamente la operación de préstamo



5. Modificación de condiciones

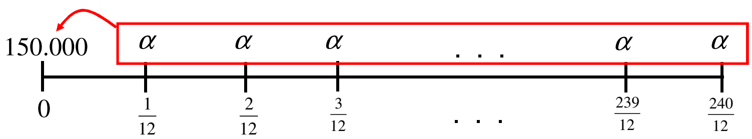
Durante el plazo de vigencia de un préstamo es posible que se produzcan algunas modificaciones respecto a las condiciones inicialmente pactadas. Estas modificaciones pueden ser, entre otras:

- Variación del importe del término amortizativo
- Variación del plazo de la operación
- Variación del tipo de interés
- Amortización o cancelación parcial del capital pendiente
- Cancelación total anticipada del préstamo

En todas estas situaciones deberá considerarse cuál es el capital pendiente de amortizar del préstamo en el momento de la modificación de la condición y, en su caso, recalcular las magnitudes correspondientes

Ejercicio: Sea un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente. Se pide:

a) Calcular el término amortizativo



El tipo de interés del préstamo es:

Por tanto, el término amortizativo se obtendrá de:

b) A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario acuerdan que a partir de ese momento el término amortizativo pase a ser de 1.500€, ¿cuál será el nuevo plazo de la operación?

En primer lugar calculamos el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses):

El nuevo término amortizativo pasa a ser de 1.500€. Se trata de determinar durante cuántos meses debe pagarse este importe para amortizar el capital pendiente, es decir:

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, prestamista y prestatario pactan reducir el plazo de la operación en 6 años, ¿cuál será el importe del nuevo término amortizativo?

Sabemos, del ejercicio anterior, que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

A los 5 años de pactado el préstamo quedan aún 15 años, pero si se pacta reducir el plazo en 6 años, a partir de este momento, quedarán 9 años (108 meses). Se trata de determinar el nuevo importe constante mensual que debe pagarse para amortizar el capital pendiente, es decir:

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, se produce una revisión del tipo de interés pasando a ser el Euribor más un diferencial del 2,25%. Determinar el importe del nuevo término amortizativo si en el momento de la revisión el índice Euribor es del 0,55% y si se mantienen el resto de las condiciones del préstamo

El nuevo tipo de interés a aplicar a partir del 5º año es:

Ya sabemos que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

El nuevo término amortizativo mensual constante que debe pagarse para amortizar dicho capital pendiente considerando el nuevo tipo de interés es:

Ejercicio: En un préstamo francés amortizable mensualmente, de nominal 150.000€, duración 20 años, pactado al 5,64% nominal acumulable mensualmente, se ha visto que el término amortizativo es de 1.043,73€. A los 5 años de pactado el préstamo, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, el prestatario decide realizar una amortización parcial de 25.000€. Se pide:

a) Determinar el importe del nuevo término amortizativo si se mantiene el resto de las condiciones del préstamo

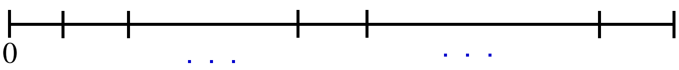
Sabemos, de ejercicios anteriores, que el capital pendiente al cabo de 5 años (o 60 meses) es:

El nuevo término amortizativo mensual constante que debe pagarse durante los 15 años restantes será:

b) A los 2 años y 3 meses de haber realizado la cancelación parcial anterior, una vez realizado el pago del término amortizativo correspondiente, el prestatario decide cancelar totalmente el préstamo. Suponiendo que no existe comisión de cancelación, determinar la cuantía que el prestamista debe abonar al prestatario

Como la cancelación parcial de 25.000€ se realizó a los 5 años (60 meses) de pactado el préstamo y han pasado desde entonces 2 años y 3 meses (27 meses), aún quedan pendientes 153 meses hasta llegar a los 20 años. Por tanto, la cuantía que deberá pagar el prestatario para cancelar el préstamo será la reserva matemática, que en este caso, coincidirá con el capital pendiente en el mes 87:

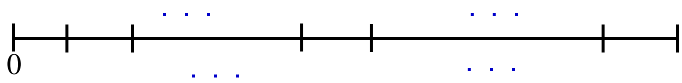
c) Si el préstamo tuvo una comisión de apertura del 2% sobre el valor nominal y unos gastos notariales de 2.000€, plantear la ecuación que permite obtener el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta todas las amortizaciones realizadas



Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

d) Con toda la información anterior, plantear la ecuación que permite obtener la TAE del préstamo

Para obtener la TAE del préstamo sólo hay que tener en cuenta las condiciones iniciales con las que se pactó el préstamo, salvo los gastos de notario que por normativa legal no deben tenerse en cuenta



Como el término amortizativo tiene frecuencia mensual, debe valorarse con un interés efectivo mensual. Valorando en el origen:

A partir de esta expresión, y con software adecuado, se obtendría el tipo de interés efectivo mensual, I_{12} Calculando el efectivo anual equivalente se obtiene la TAE del préstamo

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo de nominal 18.000€ a devolver mediante un único pago, a los 3 años de su concesión, que comprende el capital prestado más los intereses devengados durante el plazo. El tanto de interés del préstamo es del 5,5% efectivo anual. El prestatario ha de pagar una comisión de apertura del 1,5% sobre el nominal del préstamo y unos gastos iniciales al notario de 150€. Se pide:

   a) Importe que se deberá pagar al final de la operación.

   b) Cuota de interés y cuota de amortización de capital.

   c) Tanto efectivo anual del préstamo, tanto efectivo anual prestatario y TAE del préstamo.

   d) Capital pendiente y total amortizado al año y 2 meses de su concesión.

   e) Cuantía que cancela anticipadamente el préstamo al año y 2 meses de su concesión.

   f) Valor financiero del préstamo al año y 2 meses de su concesión si el tipo de interés aplicable es:

      f.1) 5,5% efectivo anual.

      f.2) 6,25% anual.

2. Hace 2 años un particular solicitó un préstamo de nominal 50.000€, a amortizar mediante un solo pago comprensivo de capital e intereses a los 4 años de su concesión, a un interés del 1% efectivo mensual. Además pagó una comisión de apertura del 2% sobre el nominal del préstamo. Determinar:

   a) Importe que debería pagar el prestatario a los 4 años de la concesión del préstamo.

   b) Desglose en cuota de interés y cuota de amortización de capital.

   c) Cantidad que cancelaría hoy el préstamo.

   d) Tanto efectivo anual del préstamo, tanto efectivo anual prestatario y TAE del préstamo.

   e) Hoy dispone de 15.000€ y decide destinarlos a pagar los intereses generados hasta este momento y, si hay algún excedente, a amortizar parte del nominal del préstamo. Calcular la cuantía que cancelará el préstamo al vencimiento teniendo en cuenta la entrega realizada hoy.

   f) Plantear la ecuación que permite obtener el nuevo tanto efectivo anual prestatario teniendo en cuenta la entrega de los 15.000€.

   g) ¿Cambia el valor de la TAE del préstamo considerando la entrega de los 15.000€?

3. Se concede un préstamo de 90.000€ a amortizar mediante un único pago al cabo de 5 años pero con pago trimestral de intereses. El tipo de interés pactado es del 6% nominal pagadero trimestralmente. Se pide:

   a) Importe de la cuota de interés trimestral.

   b) Importe que deberá pagar el prestatario en el último trimestre.

   c) Importe que cancela el préstamo a los 3 años de su concesión después del pago de la cuota de interés correspondiente.

   d) Importe que cancela el préstamo a los 3 años y 1 mes de su concesión.

e) Si a los 4 años de la concesión del préstamo cambia el tipo de interés del préstamo que pasa a ser del 6,80% nominal pagadero trimestralmente, ¿cuál sería la nueva cuota de interés?

4. Hace 6 años se solicitó un préstamo de 48.000€ de nominal, al 4,5% anual pagadero mensualmente. Los intereses se pagan cada mes y debe amortizarse el nominal a los 10 años de su concesión. Hoy, después del pago de la correspondiente cuota de interés, se realiza una amortización parcial de capital de 5.000€. Determinar:

   a) Importe de la cuota mensual de interés de los 6 primeros años.

   b) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática hace 1 mes, después del pago de la cuota de interés correspondiente.

   c) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática a los 5 años y 11,5 meses de su concesión.

   d) Importe de la cuota mensual de interés que se pagará a partir de hoy.

   e) Plantear la ecuación que permite calcular la TAE del préstamo si la comisión de apertura a cargo del prestatario fue del 1%.

   f) Plantear la ecuación que permite calcular el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta la comisión de apertura, la amortización parcial realizada hoy, y sabiendo que en el momento de realizar dicha amortización se ha pagado una comisión por amortización parcial (compensación por desistimiento) del 0,25% sobre los 5.000€.

5. Sea un préstamo de nominal 170.000€ a amortizar durante 20 años mediante términos amortizativos constantes, mensuales y vencidos a un interés del 3,60% nominal pagadero mensualmente. Determinar:

   a) Importe del término amortizativo.

   b) Tres primeras y tres últimas filas del cuadro de amortización.

   c) Capital pendiente de amortizar y total amortizado al año de su concesión, tras el pago del término amortizativo correspondiente.

   d) Capital pendiente de amortizar y reserva matemática al cabo de 1 año y medio mes de su concesión.

   e) Desglose del término amortizativo correspondiente al decimoquinto mes.

   f) Valor financiero del préstamo al año de su concesión para un tipo de interés de valoración del:

      f.1) 3,84% nominal pagadero mensualmente.

      f.2) 0,27% mensual.

   g) Plantear la ecuación para obtener la TAE del préstamo si existe una comisión de apertura, estudio, etc. del 3% sobre nominal del préstamo.

6. Hace 3 años se concedió un préstamo de 150.000€ de nominal, a amortizar mediante el pago de 48 trimestralidades constantes y vencidas, al 5,20% efectivo anual. La comisión de apertura a cargo del prestatario fue del 1,5% sobre el nominal. Determinar:

   a) Importe de las trimestralidades.

   b) Cuota de interés y de amortización del vigésimo término amortizativo.

   c) Ecuación que permite determinar la TAE del préstamo.

d) Hoy el prestatario decide hacer una amortización parcial de capital de 12.000€. La entidad financiera le cobra una comisión por amortización parcial del 0,5% sobre el capital amortizado anticipadamente.

d.1) ¿Cuál será el importe de las nuevas trimestralidades si se mantiene el plazo del préstamo?

d.2) Ecuación que permite obtener el tanto efectivo prestatario teniendo en cuenta la amortización parcial, y suponiendo que se mantiene la trimestralidad calculada en el apartado anterior hasta el final del plazo de la operación.

7. Hace 1 año se solicitó un préstamo de 95.000€ de nominal, a amortizar mediante el pago de mensualidades constantes y vencidas, durante 15 años. Tipo de interés 6% nominal capitalizable mensualmente. Se pide:

a) Importe de la mensualidad que amortiza el préstamo.

b) Cuota de interés y de amortización de capital de la primera y última mensualidad.

c) Hoy se procede a una revisión del tipo de interés pasando a ser del 4,25% nominal pagadero mensualmente, calcular el importe de la nueva mensualidad si se mantiene el plazo del préstamo.

8. Hace 1 año se concedió un préstamo hipotecario de nominal 220.000€ a amortizar mediante semestralidades constantes y vencidas pagaderas durante 30 años. El tipo de interés pactado fue del 4% nominal pagadero semestralmente pero revisable anualmente. Para la revisión se acordó tomar como índice de referencia el último EURIBOR a 1 año publicado a la fecha de revisión. A dicho índice se le añade un diferencial del 2,50%. Se pide:

a) Importe de las semestralidades correspondientes al primer año.

b) Capital pendiente de amortizar hoy, tras el pago de la semestralidad correspondiente.

c) Importe de la semestralidad a pagar durante el próximo año, manteniendo el plazo del préstamo, si el último EURIBOR a 1 año publicado a fecha de hoy es del 1,837%.

9. A una persona se le concede un préstamo de 180.000€ de nominal, al 6% anual, a devolver mediante pagos anuales, constantes y vencidos. Duración del préstamo 15 años, siendo los dos primeros de carencia total. Se pide:

a) Importe de los términos amortizativos.

b) Si el prestatario debe abonar unos gastos de apertura del 1% sobre el nominal y 3.200€ en concepto de gastos notariales, plantear las ecuaciones que permiten obtener la TAE del préstamo y el tanto efectivo prestatario.

c) Importe que cancela anticipadamente el préstamo a los 7 años de su concesión, una vez pagado el término amortizativo correspondiente

d) Importe que cancela anticipadamente el préstamo a los 7 años y 2 meses.

10. A un particular se le concede un préstamo con las siguientes características:

- Nominal: 60.000€.
- Tipo de interés: 4,8% anual capitalizable bimestralmente.
- Amortización mediante términos amortizativos bimestrales, constantes y vencidos.

- Duración 12 años, siendo los 2 primeros de carencia parcial, pagándose sólo las cuotas de interés, también bimestralmente y por vencido.
- Comisión de apertura: 1% sobre el nominal.
- Comisión por cancelación anticipada: 0,25% sobre el capital amortizado anticipadamente.

Determinar:

a) El importe de las cuotas de interés a pagar durante el plazo de carencia y de los términos amortizativos.

b) Ecuación que permite determinar la TAE de la operación.

c) Total amortizado a los 6 años de la concesión del préstamo, una vez pagado el término amortizativo correspondiente.

d) Total amortizado a los 6 años y 1 mes de la concesión del préstamo.

e) Si a los 6 años y 1 mes se decide cancelar el préstamo en su totalidad:

e.1) Calcular la reserva matemática del préstamo en ese momento.

e.2) Plantear la ecuación que permite determinar el tipo de interés al que le ha resultado la operación al prestatario.

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Bloque temático 2. Operaciones financieras

1. Préstamos

2. Empréstitos

1. Definición, magnitudes y clasificación
2. Empréstitos cupón cero
3. Empréstitos con cupón periódico

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

1.1 Definición. Conceptos previos

¿Quién puede necesitar mucho dinero?

El Tesoro Público (Estado), las Comunidades Autónomas, grandes empresas públicas y privadas, etc.

¿Qué hacen estas entidades para obtener ese dinero?

Emitir un empréstito, es decir, un préstamo en el que el sujeto activo está formado por un conjunto de prestamistas y el sujeto pasivo es un único prestatario (la entidad emisora del empréstito)

¿Cómo se materializa un empréstito?

El prestatario emite títulos con el mismo valor nominal, que entrega a cada uno de sus prestamistas como reconocimiento de la deuda contraída, de tal forma que, el producto del número de títulos emitidos por el valor efectivo cobrado por cada uno de ellos debe cubrir las necesidades monetarias del prestatario

Estos títulos se conocen genéricamente en el mercado con el nombre de activos de renta fija, pero concretamente reciben distintas denominaciones como pagarés, letras, bonos, obligaciones, …

Emisor, sujeto pasivo o prestatario: Entidad que recibe el dinero en el momento de la emisión del empréstito

Suscriptor, sujeto activo o prestamista: Cada una de las personas que entrega el dinero al emisor en el momento de la emisión del empréstito

Título valor, bono, obligación, letra, cédula, pagaré, etc.: Documento que el emisor entrega al suscriptor como reconocimiento de la deuda contraída. Todos los títulos de una misma emisión tienen el mismo **valor nominal** C

Tras la emisión, estos títulos se pueden comprar y vender a los precios que coticen en los mercados organizados. Para que los títulos de cada emisión puedan ser identificados de forma inequívoca en cualquier mercado, se le asigna una referencia alfanumérica de 12 caracteres denominada Código ISIN *(International Securities Identification Number)*

Por tanto, un empréstito **es un préstamo** en que la figura del sujeto activo está formada por un conjunto de prestamistas, denominados **suscriptores**, y en que el sujeto pasivo es un único prestatario que recibe el nombre de **emisor**

Obligacionista: Persona que posee un titulo del empréstito. Como un título puede haber sido comprado en el mercado con posterioridad al momento de su emisión, no todo obligacionista tiene porque ser suscriptor

Cupón del empréstito: Es el importe que en concepto de interés debe pagar el emisor a los obligacionistas. Unas veces se expresa en unidades monetarias y otras veces en función de un tipo de interés (**tipo de interés de la emisión**)

1.2 Magnitudes de un empréstito

Cuando se trabaja con **un solo título** del empréstito:

Nominal de un título: C

Prima de emisión de un título (P_e) es el valor que se suma o resta al nominal para obtener el **precio de emisión** de un título (C_e):

$$C_e = C \pm P_e$$

- Si $C_e > C$ se habla de emisión sobre la par
- Si $C_e = C$ se habla de emisión a la par
- Si $C_e < C$ se habla de emisión bajo la par

Fecha o momento de emisión o liquidación de un título: 0

Prima de amortización de un título (P_a) es el valor que se suma o resta al nominal para obtener el **precio de amortización** de un título (C_a):

$$C_a = C \pm P_a$$

- Si $C_a > C$ se habla de amortización sobre la par
- Si $C_a = C$ se habla de amortización a la par
- Si $C_a < C$ se habla de amortización bajo la par

Fecha o momento de amortización de un título: T'

Cuando se trabaja con **todos los títulos** del empréstito:

Número de títulos emitidos: N

Nominal del empréstito: S, es el producto del valor nominal de un título por el número de títulos emitidos, es decir:

$$S = C \cdot N$$

Efectivo del empréstito: S_e, es el producto del precio de emisión de un título por el número de títulos emitidos, es decir:

$$S_e = C_e \cdot N$$

Fecha o momento de emisión o liquidación del empréstito: 0

Amortización del empréstito: S_a, es el producto del valor de amortización de un título por el número de títulos emitidos, es decir:

$$S_a = C_a \cdot N$$

Fecha o momento de amortización del empréstito: T'

Al intervenir tantas personas diferentes en un empréstito, y cada uno de ellos tener una perspectiva diferente de la operación en cuanto a los cobros y pagos realizados, es lógico que aparezcan diferentes tipos de interés:

Tanto emisor: Es el tipo de interés al que resulta la operación al sujeto pasivo o emisor del empréstito teniendo en cuenta exclusivamente los capitales de la prestación y contraprestación asociados a él

Tanto suscriptor: Es el tipo de interés al que resultaría la operación a un suscriptor del empréstito en el supuesto de que:

- Mantenga los títulos valores hasta su vencimiento
- Todos los suscriptores compren y amorticen sus títulos en las mismas condiciones

Los dos tantos anteriores son únicos para cada empréstito y pueden obtenerse en el momento de su emisión

Tanto obligacionista: Es el tipo de interés al que resulta la operación a cada obligacionista concreto en función de los capitales de la prestación y contraprestación asociados a él desde el momento de adquirir los títulos valores hasta el momento de venderlos

Luego, este tanto puede ser diferente para cada obligacionista del empréstito

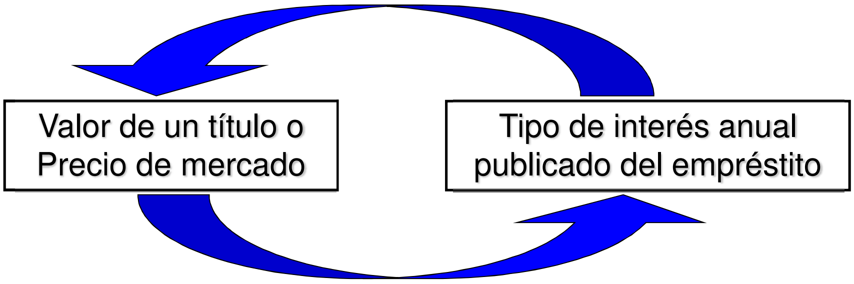
Tipo de interés anual publicado del empréstito: Tras la emisión de un empréstito los títulos pueden venderse y comprarse en un mercado organizado. Cuando esto ocurre, al final de la sesión del mercado, se calcula y publica el interés anual al que resulta la operación a un obligacionista que adquiere un título al precio del mercado, cobrase todos los cupones pendientes y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Por tanto, este tipo de interés anual puede cambiar cada día, y en el mercado se denomina **TIR, rendimiento interno medio, tipo de interés medio, …**

V_τ : Valor de un título en el instante τ

Es el valor financiero en τ de todos los cobros futuros a que da derecho el título a partir de ese instante y hasta su vencimiento, al tipo de interés anual publicado del empréstito

Este valor coincide con el precio que el título tiene en ese instante en el mercado



1.3 Clasificación de los empréstitos

➢ **Según el número de cupones del empréstito**:

- **Empréstitos cupón cero** o **empréstitos emitidos al descuento** o **empréstitos con rendimiento implícito**:

  Son aquéllos en que el emisor no paga nada hasta el vencimiento del empréstito. En dicho vencimiento el emisor sólo paga el valor nominal del título y, en contrapartida, en la fecha de emisión cobra un precio inferior a éste

- **Empréstitos con cupón periódico**:

  Son aquéllos en que el emisor paga periódicamente y por vencido los cupones del empréstito hasta el vencimiento, momento en que también paga el precio de amortización

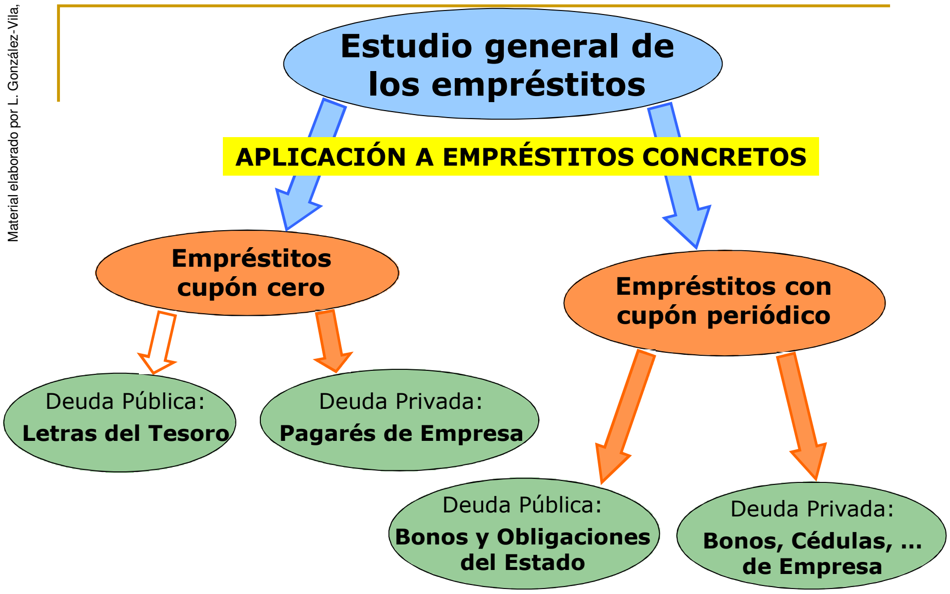
➢ **Según la titularidad del emisor del empréstito**:

- **Empréstitos de deuda pública**:

  Son aquéllos en que el emisor es un ente público como por ejemplo la Generalitat de Catalunya, un Ayuntamiento, el Tesoro Público, etc.

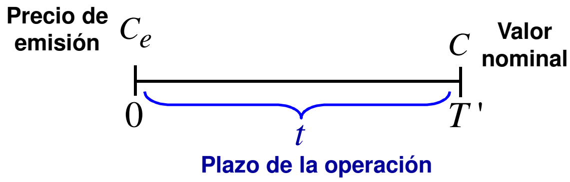
- **Empréstitos de deuda privada**:

  Son aquéllos en que el emisor es una empresa privada como por ejemplo un Banco (BBVA), una empresa de energía (Iberdrola), una empresa de comunicaciones (Telefónica), etc.



2. 1 Características

1. El empréstito cupón cero se amortiza de una sola vez a su vencimiento T' por su valor nominal
2. El precio de emisión del empréstito es inferior a su nominal
   Por esta razón, este tipo de empréstitos es frecuente encontrarlos con la denominación de **empréstitos emitidos al descuento**
3. En el momento de la emisión, los suscriptores pagan por cada título un precio (C_e) inferior a su nominal (C). La diferencia entre este precio y el valor nominal permite determinar el rendimiento que, de forma implícita, ofrece el empréstito
   Por esta razón, este tipo de empréstitos también se conoce con la denominación de **empréstitos con rendimiento implícito**



Para calcular los siguientes tantos:

- El tanto emisor
- El tanto suscriptor
- El tanto obligacionista
- Tipo de interés anual publicado del empréstito

se ha de considerar el plazo t de la operación:

- Si t es inferior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés simple vencido
- Si t es superior a un año se obtendrá, cada uno de ellos, valorando la prestación y la contraprestación en régimen financiero de interés compuesto

Nosotros estudiaremos los empréstitos que se materializan en los siguientes títulos valores:

- Letras del Tesoro
- Pagarés de Empresa

2. 2 Letras del Tesoro

Características principales de las **Letras del Tesoro**:

- Es un activo de deuda pública que emite el Tesoro Público
- Su valor nominal C siempre es de 1.000€
- El precio de emisión de las Letras se establece en el mercado primario mediante subasta
- En la actualidad existen emisiones con vencimientos a 3, 6, 9 y 12 meses (aproximadamente), aunque también han existido emisiones a 18 meses
- Para el cálculo del plazo de la operación t se utiliza el criterio Actual/360

Las condiciones de emisión de las Letras pueden consultarse en la web www.tesoro.es. Una vez se encuentran circulando por el mercado secundario (Mercado de Deuda Pública) la información de un día en concreto se encuentra en la página web www.bde.es

Ejercicio: Calcular el tipo de interés de la siguiente Letra del Tesoro a 12 meses el día de su liquidación en el mercado primario

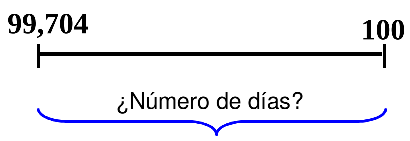
Resultados de la última subasta de Letras a 12 meses

Fecha de la subasta: 15/07/2014

Fecha de vencimiento: 17/07/2015

Importe en millones de Euros

LETRAS A 12 MESES	
Fecha de liquidación	18/07/2014
Nominal solicitado	7.154,89
Nominal adjudicado	3.509,78
Nominal adjudicado (2ª vuelta)	544,12
Precio mínimo aceptado	99,696
Tipo de interés marginal	0,302
Precio medio	99,704
Tipo de interés medio	
Adjudicado al marginal	70,00
1er precio no admitido	99,693
Volumen peticiones a ese precio	165,00
Peticiones no competitivas	54,78
Efectivo solicitado	7.129,04
Efectivo adjudicado	3.499,30



Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Letras del Tesoro

Ejemplo: Explicar la siguiente información extraída el día 19 de agosto de 2014 de la web www.bde.es, y encontrar el codigo ISIN de la Letra del Tesoro del ejercicio anterior:

BANCO DE ESPAÑA
Eurosistema

Boletín del Mercado de Deuda Pública

IBERCLEAR

Año 27 Número 6602 19 de agosto de 2014

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento

I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO

1. DEUDA DEL ESTADO

EMISION	NUMERO OPERACNS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX-CUPON) MEDIO	MAXIMO	MINIMO	RENDTO. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
ES00000120G4 O EST 3.15 31.01.16	1	13,00	104,290	104,290	104,290	0,17	104,310 (18/08/2014)
ES00000123W5 B EST 3.30 30.07.16	1	0,05	105,820	105,820	105,820	0,29	105,870 (15/08/2014)
ES0L01410171 L EST CUP-0 17.10.14	2	25,00	99,994	99,994	99,994	0,04	99,994 (18/08/2014)
ES0L01502209 L EST CUP-0 20.02.15	3	73,00	99,955	99,955	99,952	0,09	99,970 (18/08/2014)
ES0L01507174 L EST CUP-0 17.07.15	1	50,00	99,879	99,879	99,879	0,13	99,876 (18/08/2014)
ES0L01508214 L EST CUP-0 21.08.15	4	160,00	99,830	99,833	99,828	0,17	NO HAY

Código ISIN

Letras Tesoro cupón cero

Fecha Vencimiento

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

2. Empréstitos cupón cero

2.2 Letras del Tesoro

Ejercicio: A partir de la información recogida en la diapositiva anterior, comprobar el precio medio de mercado de la emisión de Letras del Tesoro, cuyo código ISIN de referencia es ES0L01507174, sabiendo que desde la fecha de liquidación (que fue el 21 de agosto de 2014) hasta su vencimiento hay 330 días y que el tipo de interés medio es del 0,132% (aunque se publica redondeada a 2 decimales):

C — 100

21-Ago-14 — **17-Jul-15**

Fecha Liquidación — **Fecha Vencimiento**

Base $\frac{\text{Act}}{360}$ ⇒ 0 — $\frac{330}{360}$

El precio medio de mercado de cada Letra del Tesoro será de

Ejercicio: Un inversor compró hace 143 días 28 Letras del Tesoro a un precio de 98,93%. Hoy las vende en el mercado secundario a un precio del 99,52%. Se pide:

a) Importe total obtenido por el inversor por la venta de las Letras

Vender a un precio del 99,52% significa que por cada Letra del Tesoro ha obtenido

Por tanto, en total habrá obtenido

b) Calcular el interés anual al que resulta la operación de compra-venta de Letras del Tesoro al inversor

Lo resolveremos para una sola Letra

Base $\frac{\text{Act}}{360}$ ⇒ 0

2. 3 Pagarés de Empresa

Características de los **Pagarés de Empresa**:

- Es un activo de deuda privada que emiten grandes empresas del sector privado
- Pueden tener cualquier valor nominal (aunque suele ser múltiplo de 1.000€)
- Pueden tener cualquier vencimiento (aunque lo más habitual es que sea inferior a 2 años)
- Suelen ofrecer un rendimiento superior al que ofrecen las Letras del Tesoro debido a los riesgos de crédito y liquidez asociados a la empresa emisora
- Para el cálculo del plazo de la operación t se utiliza normalmente el criterio Actual/365

Las condiciones de emisión de los Pagarés de Empresa se encuentran en la web www.cnmv.es, y su cotización en el Mercado secundario de Renta Fija Privada (AIAF) en la web www.aiaf.es

2. Empréstitos cupón cero

2.3 Pagarés de Empresa

Ejercicio: Los datos más significativos de una emisión de Pagarés de empresa emitidos por TRONIC S.A. son:

- Nominal del empréstito: 450.000.000€
- Nominal del título: 10.000€
- Precio al que se ha emitido un título: 98,05%
- Fecha emisión y desembolso: 28-Septiembre-2014
- Fecha amortización: 9-Mayo-2015

Se pide:

a) Número de títulos emitidos en el empréstito

b) Indicar el importe efectivo que recibirá TRONIC de los suscriptores

	Por cada título	Por todo el empréstito
Importe efectivo:		

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

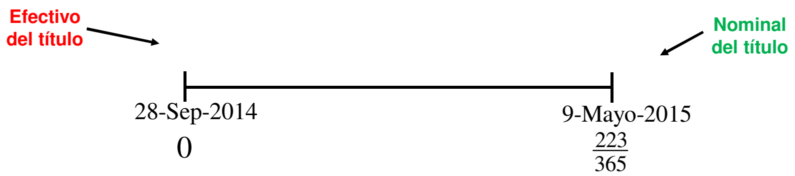
2. Empréstitos cupón cero

2.3 Pagarés de Empresa

c) Tipo de interés anual publicado del empréstito en el momento de la emisión

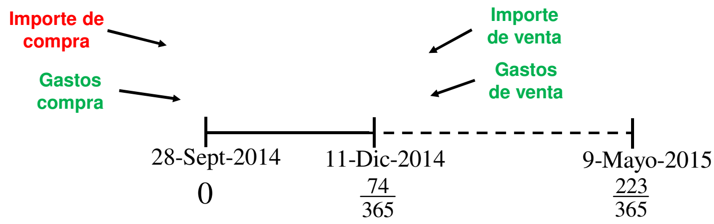
Este tipo de interés es el que obtendría un obligacionista que adquiriese en el momento de la emisión un título, y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el **tipo de interés anual publicado el 28-sep-2014** sería:



Por ser el plazo de la operación inferior a un año resolveremos la siguiente ecuación:

d) Interés anual del obligacionista que adquiere 10 títulos en el momento de la emisión y los vende el 11-Diciembre-2014 al 98,74% cada uno pagando en ese momento unos gastos del 0,1% sobre el valor de venta



Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tanto anual del obligacionista** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación :

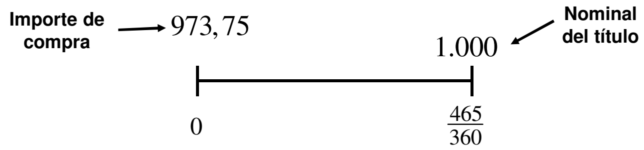
e) Tipo de interés anual publicado del empréstito a fecha 11-dic-2014

Este tipo de interés es el que obtendría un obligacionista que adquiriese el 11 de diciembre de 2014 al precio de mercado (ver apdo. d) un título, y lo mantuviese hasta el vencimiento sin tener en cuenta ningún tipo de gastos

Por ser el plazo de la operación inferior a un año, el **tipo de interés anual publicado el 11 de Diciembre de 2014** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación:

Ejercicio: Un título de un empréstito cupón cero de rendimiento implícito tiene hoy un precio de compra de 973,75€. Sabiendo que el nominal de dicho título es de 1.000€ y que vence dentro de 465 días, se pide calcular el interés anual del empréstito publicado hoy en los dos casos siguientes:

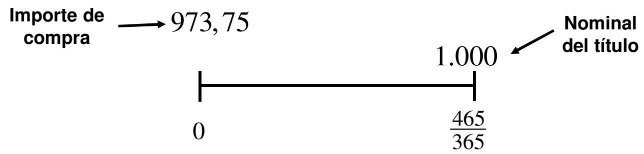
a) Si el título es una Letra del Tesoro



Por ser el plazo de la operación superior a un año, el **tipo de interés anual publicado** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

o bien:

b) Si el título es un Pagaré de Empresa



Por ser el plazo de la operación superior a un año, el **tipo de interés anual publicado** se obtendrá al despejar de la siguiente ecuación de equilibrio valorada en régimen financiero de interés compuesto:

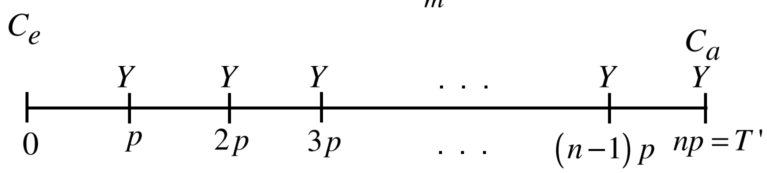
o bien:

3 Empréstitos con cupón periódico

Características

1. El precio de emisión del empréstito puede coincidir o no con su valor nominal
2. El empréstito se amortiza de una sola vez a su vencimiento. El precio de amortización puede coincidir o no con su valor nominal
3. El emisor abona al obligacionista por vencido y con una periodicidad p, por cada título, un cupón Y calculado sobre el valor nominal C según el interés efectivo de la emisión, I_m

Gráficamente, considerando que $p = \frac{1}{m}$:



donde: $Y = C \cdot I_m$

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

Estos empréstitos con cupón periódico se materializan, entre otros, en los siguientes títulos valores:

- Bonos y Obligaciones del Estado para el caso de empréstitos de deuda pública del Estado
- Bonos, Obligaciones, Participaciones, Cédulas de Empresa (y otras denominaciones) para el caso de empréstitos de deuda privada

En ambos tipos de empréstitos, para obtener:

- El tanto efectivo emisor
- El tanto efectivo suscriptor
- El tanto efectivo de un determinado obligacionista
- El tipo de interés publicado del empréstito

bastará con valorar prestación y contraprestación, para cada caso, en régimen financiero de interés compuesto

Además, también se podrá calcular el valor financiero o precio de mercado de un título en un instante τ como se indica a continuación:

3. Empréstitos con cupón periódico

Si tras la emisión de un empréstito con cupón periódico, un inversor acude, en un momento τ, al mercado secundario para comprar o vender un título, ha de pagar o cobrar **su valor financiero o precio de mercado**. Este valor se puede obtener de dos formas:

1) Calculando, en dicho momento, la suma del valor de los cupones pendientes y del valor nominal del título al tipo de interés anual publicado del empréstito en el mercado

2) Sumando el importe del cupón corrido del título más su precio o cotización ex-cupón, siendo:

Cupón corrido (CC): Parte proporcional del cupón periódico del título generado desde que se pagó el último cupón hasta el momento de compra o venta

Cotización ex-cupón (P^{ex}): Precio que se fija en el mercado sobre un título por la interacción de la oferta y la demanda

Valor financiero o **Precio de mercado** = Valor actual cupones pendientes + Valor actual valor nominal

Valor financiero o **Precio de mercado** = Cupón corrido + Cotización ex-cupón

3. Empréstitos con cupón periódico

Características de los **Bonos y Obligaciones del Estado**:

- Es un activo de deuda pública que emite el Tesoro Público
- Su valor nominal C siempre es de 1.000€ y se abona al vencimiento
- El precio de emisión se establece en el mercado primario mediante subasta
- En la actualidad existen emisiones de Bonos con vencimientos a 3 y 5 años (aproximadamente) y de Obligaciones a 10, 15 y 30 años (aproximadamente)
- Los cupones se pagan anualmente y por vencido, coincidiendo el último cupón con el vencimiento de la operación (o amortización de los títulos)
- Para el cálculo del plazo se utiliza el criterio Actual/Actual

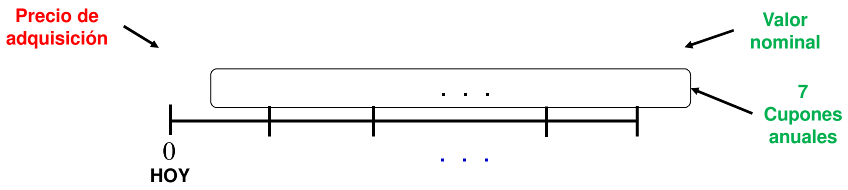
Las condiciones de emisión de estos activos pueden consultarse en la web www.tesoro.es. Una vez se encuentran circulando por el mercado secundario (Mercado de Deuda Pública) la información de un día en concreto se encuentra en la web www.bde.es

Ejercicio: Hoy se ha adquirido por 1.015,80€ una Obligación del Estado con vencimiento dentro de 6 años y 3 meses que paga un cupón anual del 5,40%. Se pide:

a) Calcular el importe del cupón anual para un solo título

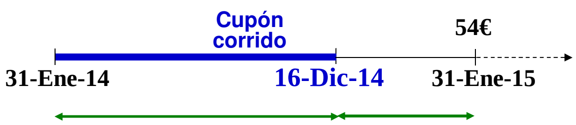
b) Representar gráficamente esta operación para un solo título

Puesto que el último cupón coincide con el momento de amortización de la Obligación, contaremos años enteros hacia atrás desde el vencimiento y el periodo residual quedará al inicio de la operación



3. Empréstitos con cupón periódico

Ejercicio: El 31 de enero de cada año, un Bono del Estado con vencimiento el 31 de enero de 2016 paga un cupón anual del 5,40%. Calcular el importe del cupón corrido de dicho bono a fecha 16 de diciembre de 2014 para un solo título



NOTA: Si entre el pago de 2 cupones hubiese 366 días por encontrarse el 29 de febrero, para el cálculo del cupón corrido se dividiría entre 366

3. Empréstitos con cupón periódico

Ejemplo: Explicar la siguiente información extraída de la web www.bde.es, y calcular el valor financiero de la Obligación del Estado con ISIN ES0000012932 si la fecha liquidación es el 22-agosto-2014:

BANCO DE ESPAÑA Eurosistema — **Boletín del Mercado de Deuda Pública** — IBERCLEAR

Año 27 Número 6602 19 de agosto de 2014

Importes en millones de euros y precios en tanto por ciento

I. OPERACIONES DE COMPRAVENTA SIMPLE AL CONTADO

1. DEUDA DEL ESTADO

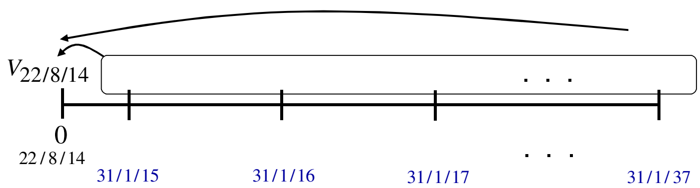
EMISIÓN	NÚMERO OPERACS	IMPORTE CONTRATADO	PRECIO (EX CUPÓN) MEDIO	MÁXIMO	MÍNIMO	RENDIMTO. INTERNO MEDIO	ANTERIOR PRECIO MEDIO (FECHA)
ES0000012[illegible] D EST 3.15 31.01.16	1	15,00	104,290	104,290	104,290	0,17	104,310 (18/08/2014)
ES0000012[illegible] D EST 3.30 30.07.16	1	0,05	105,820	105,820	105,820	0,29	105,870 (15/08/2014)
ES00000124C5 O EST 5.15 31.10.28	2	0,40	124,300	124,300	124,300	3,02	123,927 (18/08/2014)
ES0000012932 D EST 4.20 31.01.37	1	0,10	112,810	112,810	112,810	3,38	112,932 (15/08/2014)
ES00000120N0 O EST 4.90 30.07.40	2	2,00	123,390	123,390	123,390	3,51	120,065 (12/08/2014)

Cupón/ Tanto Emisión — Vencimiento — Precio ex-cupón — TIR

3. Empréstitos con cupón periódico

Calcularemos el valor financiero por los dos métodos:

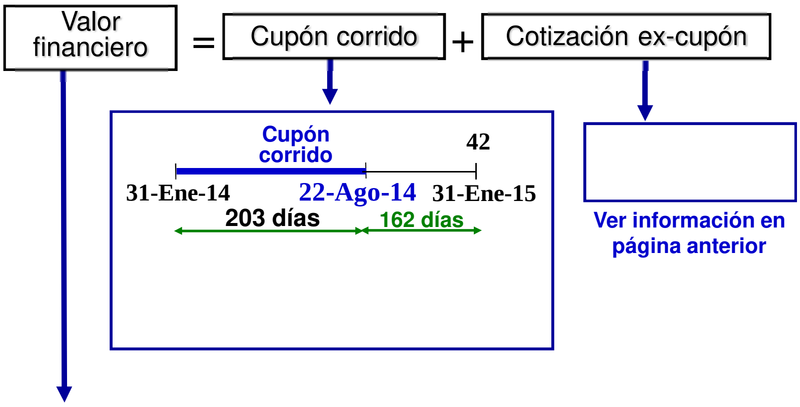
$$\boxed{\text{Valor financiero}} = \boxed{\text{Valor actual cupones pendientes}} + \boxed{\text{Valor actual valor nominal}}$$



En este primer método, tanto el valor actual de los cupones como del valor nominal deben calcularse a la TIR anual publicada del 3,3757% (aunque se publica redondeada a 2 decimales):

3. Empréstitos con cupón periódico

Calcularemos ahora el valor financiero por el segundo método:



3. Empréstitos con cupón periódico

Características de los **Bonos, Obligaciones, Cédulas** (y otras denominaciones) **de Empresa**:

- Son activos de deuda privada que emiten grandes empresas del sector privado
- Pueden tener cualquier valor nominal
- Pueden tener cualquier vencimiento superior a 2 años
- Los cupones se pagan periódicamente y por vencido, coincidiendo el último cupón con el vencimiento de la operación

Las condiciones de emisión de estos activos pueden consultarse en la página web www.cnmv.es, pero una vez se encuentran circulando por el Mercado secundario de Renta Fija Privada (AIAF) la información se encuentra en la web www.aiaf.es

Ejercicio: Para financiar una obra, la empresa de construcción FONSA emitió hace 4 años y 3 meses un empréstito con títulos de renta fija privada de las siguientes características:

- Nominal de cada título (Obligación): 200€
- Número de títulos emitidos: 40 millones
- Gastos de emisión del empréstito para FONSA: 0,32% del nominal
- El empréstito se emitió bajo la par con una prima de emisión del 3%
- Fecha de amortización del empréstito: A los 8 años de su emisión
- El empréstito tiene una prima de amortización sobre la par de 2€ por cada Obligación
- Cupón periódico semestral
- Tipo de interés nominal de la emisión: 5,40%
- Los suscriptores de títulos de este empréstito pagarán al intermediario financiero una comisión del 0,2% del efectivo de los títulos adquiridos
- Al vencimiento, no existen gastos de amortización del empréstito ni para el emisor ni para los obligacionistas

Con toda la información anterior, se pide:

3. Empréstitos con cupón periódico

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

a) Importe nominal del empréstito y efectivo recibido por FONSA:

Nominal del empréstito:

Efectivo del empréstito:

b) Plantear la ecuación que permite obtener el interés efectivo emisor:

PRESTACIÓN (Cobros) del emisor:

Efectivo del empréstito:

CONTRAPRESTACIÓN (Pagos) del emisor:

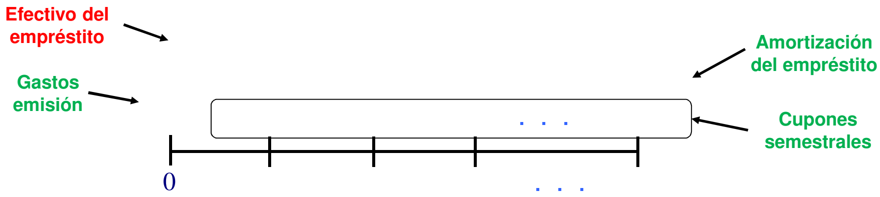
Gastos de emisión:

Cupón semestral que se paga al final de cada semestre natural:

Amortización empréstito:

3. Empréstitos con cupón periódico

Gráficamente, la ubicación de la prestación y contraprestación para calcular el tanto efectivo del emisor sería:



Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo semestral I_2:

Resolviendo, con el software adecuado, se obtendría el **tanto efectivo emisor**

3. Empréstitos con cupón periódico

c) Plantear la ecuación que permite obtener el tanto efectivo suscriptor (realizar los cálculos para un solo título):

PRESTACIÓN (Pagos) del suscriptor:

Precio de emisión:

Comisión de suscripción:

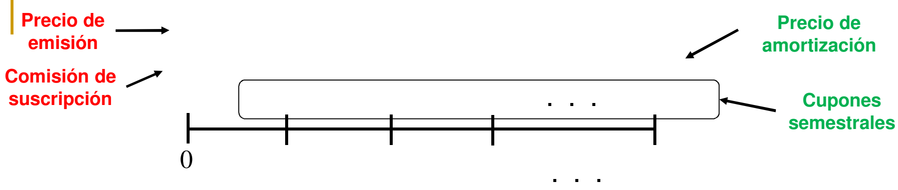
CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) del suscriptor:

Cupón semestral:

Gastos amortización:

Precio de amortización:

Gráficamente sería:

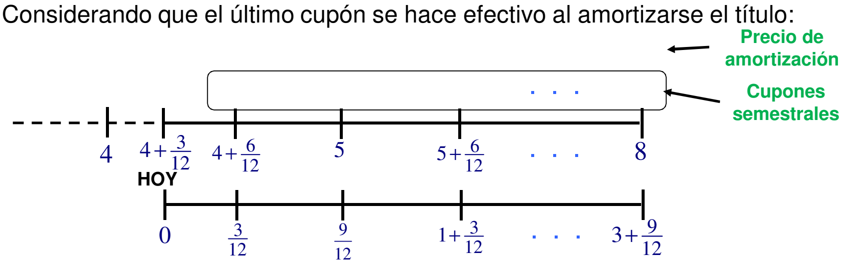


Como el pago de cupones tiene frecuencia semestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo semestral I_2:

Resolviendo, con el software adecuado, se obtendría el **tanto efectivo suscriptor**

d) Precio hoy de las Obligaciones de este empréstito si el tipo de interés efectivo anual vigente en el mercado (TIR) en este momento es del 5,20%

Como las Obligaciones fueron emitidas hace 4 años y 3 meses y se amortizan a los 8 años de la emisión, aún faltan 3 años y 9 meses hasta su vencimiento. Considerando que el último cupón se hace efectivo al amortizarse el título:



El interés efectivo semestral equivalente al 5,20% anual es:

El **valor hoy de una Obligación** de FONSA en el mercado será:

Ejercicio: Juan vende hoy en el mercado secundario, justo después de haber cobrado el cupón correspondiente, 10 cédulas de una emisión de renta fija de la empresa privada ZANIO a un precio unitario de 1.568,35€, que adquirió en el momento de su emisión hace 2 años y medio. Las características de la emisión fueron:

- Valor nominal de cada cédula: 1.500€
- Prima de emisión bajo la par de 20€ por título
- En el momento de la emisión, los suscriptores no tuvieron ningún tipo de gastos
- Amortización de los títulos a la par y libre de gastos
- Pago trimestral del cupón
- Tipo de interés nominal de la emisión: 4%
- Vencimiento: Dentro de 3 años y medio (a partir de hoy)

Con toda la información anterior, se pide:

a) Plantear la ecuación que permite a Juan obtener el tanto efectivo de interés obtenido en la operación de compra-venta de las cédulas, sabiendo que en el momento de la venta ha pagado unos gastos del 1% sobre el valor de venta

Los pagos y cobros que ha realizado Juan hasta el día de hoy como obligacionista de la empresa ZANIO han sido:

PRESTACIÓN (Pagos) del obligacionista:

Precio de compra:

Gastos de compra:

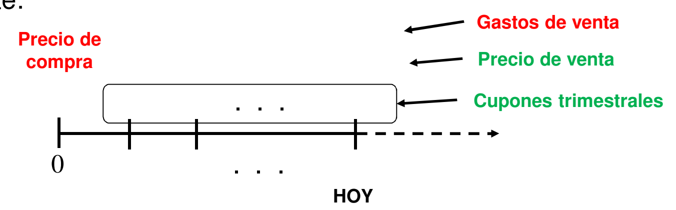
Gastos de venta:

CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) del obligacionista:

Cupón trimestral:

Precio de venta:

Gráficamente:



Como el pago de cupones tiene frecuencia trimestral, plantearemos la ecuación de equilibrio en el origen utilizando como incógnita el interés efectivo trimestral I_4:

Resolviendo, con el software adecuado, se obtendría el **tanto efectivo de este obligacionista** (Juan)

Material elaborado por L. González-Vila, F.J. Ortí y J. Sáez

3. Empréstitos con cupón periódico

b) Plantear la ecuación que permite obtener la TIR anual publicada del empréstito a fecha de hoy

PRESTACIÓN (Pagos) de un obligacionista que compre hoy sin gastos:

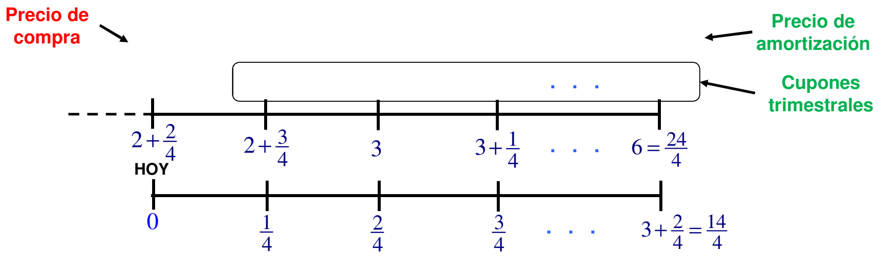
Precio de compra:

CONTRAPRESTACIÓN (Cobros) de un obligacionista que compre hoy y mantenga hasta el vencimiento sin gastos:

Cupón trimestral:

Precio de amortización:

Gráficamente sería:



Como el pago de cupones tiene frecuencia trimestral, plantearemos la ecuación de equilibrio a día de hoy para obtener el interés efectivo trimestral I_4:

A partir de I_4 obtendríamos la **TIR anual publicada de este empréstito** a fecha de hoy haciendo:

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. El precio medio de una emisión de Letras del Tesoro, con vencimiento dentro de 184 días, es del 99,142%, ¿cuál es el interés medio anual resultante de la emisión?

2. En una emisión de Letras del Tesoro, con vencimiento al cabo de 546 días, el tipo de interés medio es del 3,265% anual, ¿cuál es el precio de compra de cada Letra?

3. Una empresa vende hoy 10 Letras del Tesoro de una emisión que vence dentro de 235 días. Si, según publica el Banco de España, el rendimiento interno medio de una Letra de dicha emisión es del 2,40% anual, se pide:

   a) Importe que obtendrá la empresa por la venta de las Letras.

   b) Obtener la cotización de una Letra de dicha emisión en el mercado secundario.

4. Un inversor dispone de 15 Pagarés de empresa de 1.000€ de nominal cada uno. Hoy, cuando faltan 435 días para su vencimiento, decide venderlos. Si la cotización en el momento de la venta es del 95,60%, determinar:

   a) TIR publicada hoy para los pagarés de esta emisión.

   b) Interés anual al que resulta la operación al obligacionista que hoy compra los pagarés, suponiendo que los mantiene hasta su vencimiento, si hoy paga una comisión del 0,60% sobre el nominal de los títulos.

5. Una empresa privada realizó una emisión de Pagarés de empresa con las siguientes características:

   - Nominal del empréstito: 300.000.000€.
   - Nominal del título: 3.000€.
   - Precio de emisión de cada título: 98,75%.
   - Fecha emisión y desembolso: 4 de mayo.
   - Fecha de amortización: 15 de febrero del año siguiente.

   Determinar:

   a) Número de títulos emitidos en el empréstito.

   b) Interés anual de un obligacionista que adquiere 15 títulos en el momento de la emisión, sin ningún tipo de gastos, y los vende a los 213 días al 99,72% pagando una comisión por la venta del 0,1% sobre el nominal de los títulos.

   c) Si en fecha 10 de octubre del año de emisión un pagaré cotizaba en el mercado secundario al 99,45%, ¿qué precio debía pagarse por él?, ¿cuál era el tipo de interés anual publicado en ese momento?

   d) Si el 14 de enero del año siguiente al de su emisión el tipo de interés publicado para este empréstito era del 1,59%, ¿qué valor, en porcentaje sobre el nominal, tenía un pagaré en esa fecha?

6. Una persona vende hoy 75 Bonos del Estado y 24 Letras del Tesoro cuyas características son:

- Los Bonos del Estado pagan cupones anuales del 4,35% y tienen su vencimiento dentro de 4 años y medio.
- Las Letras del Tesoro vencen al cabo de 117 días y cotizan en el mercado secundario a un precio del 98,86%.

Se pide:

a) Valor financiero de 1 Bono del Estado si el tipo de interés de mercado (rendimiento interno) es del 1,82% anual.

b) Rendimiento interno medio publicado a fecha de hoy de las Letras del Tesoro.

c) Importe total obtenido con la venta de los Bonos y las Letras.

7. Una empresa tiene invertido parte de sus ahorros en los siguientes activos:

- 16 Letras del Tesoro que hoy cotizan en el mercado a un precio del 99,37% y que vencen dentro a 164 días.
- 84 Obligaciones del Estado que están pagando un cupón anual del 3,25% y cuyo vencimiento será dentro de 6 años y 195 días.

Se pide:

a) Rendimiento interno medio publicado a fecha de hoy de las Letras del Tesoro.

b) Si la empresa adquirió todas las Letras del Tesoro hace 110 días por un importe total de 15.800€, calcular el rendimiento que obtendrá si hoy vendiese las Letras (utilizar criterio Act/360).

c) Calcular el cupón corrido de 1 Obligación del Estado a fecha de hoy si hace 170 días que se cobró el último cupón.

d) Si hoy el precio ex-cupón de 1 Obligación del Estado es del 102,45%, calcular el importe total que obtendría la empresa si hoy vendiese todas sus Obligaciones.

e) Plantear la ecuación que permitiría obtener a fecha de hoy la TIR anual publicada de la Obligación del Estado.

8. Sea una emisión de Obligaciones del Estado con vencimiento el 30 de abril de dentro de 11 años, cupón anual del 4,75% y fecha de pago del cupón cada 30 de abril. Se pide:

a) Determinar el precio medio ex-cupón de la Obligación, en el mercado secundario, el 30 de abril de este año (justo después de haberse hecho efectivo el cupón correspondiente) si el rendimiento interno medio publicado por el Banco de España en esa fecha es del 4,56%.

b) Determinar el cupón corrido y el precio medio ex-cupón de la Obligación en el mercado secundario, a fecha 20 de febrero de este año, si el rendimiento interno medio publicado por el Banco de España en esa fecha era del 4,42%.

9. Un particular dispone de 5 obligaciones de una emisión de renta fija privada, adquiridas hace 2 años en el momento de la emisión y que vencen dentro de 3 años, con las siguientes características:

- Nominal: 2.500€/título.
- Prima de emisión bajo la par: 50€/título.
- Prima de amortización sobre la par: 25€/título.

- Pago semestral del cupón.
- Tipo de interés efectivo de la emisión: 2,20% semestral.

Se pide (para un título):

a) Ecuación de la que se deduce el tanto efectivo suscriptor sabiendo que, en el momento de la emisión, tuvo unos gastos del 0,5% sobre el valor efectivo.

b) Si hoy, tras el cobro del cupón correspondiente, vende las obligaciones por 2.473,82€ cada una, sin ningún tipo de gastos, ecuación de la que se deduce el tanto efectivo obligacionista.

10. Un inversor dispone de una cartera formada por 200 Bonos de deuda privada de nominal 1.000€/título, emitidos con un vencimiento de 5 años, con pago anual de cupones al 4%, que compró en la fecha de emisión, al 98,5%, hace 3 años y 130 días.

    Se pide:

    a) Plantear la ecuación que permite determinar la rentabilidad anual obtenida por el inversor por la venta de los Bonos, si hoy los vende a un precio de 970,05€ por título.

    b) Plantear la ecuación que permite calcular el coste anual al que le resulta al emisor el empréstito, sabiendo que puso en circulación 15.000 títulos, que se amortizan por su nominal, y tuvo unos gastos totales de emisión de 12.000€.

11. Hace 2 años una empresa emitió un empréstito con las siguientes características:

    - Nominal: 1.000€/título.
    - Número de títulos emitidos: 40.000.
    - Gastos de emisión del empréstito: 0,32% del nominal.
    - Emisión bajo la par con una prima de emisión del 3%.
    - Pago trimestral de cupones.
    - Tipo de interés nominal de la emisión: 5,40%.
    - Vencimiento: a los 10 años de la emisión.
    - Amortización sobre la par con una prima de amortización del 1%.
    - Los suscriptores de títulos de este empréstito pagarán al intermediario financiero, en el momento de la emisión, una comisión del 0,2% del efectivo de los títulos adquiridos.
    - Al vencimiento, no existen gastos de amortización del empréstito ni para el emisor ni para los obligacionistas.

    Se pide:

    a) Importe nominal y efectivo del empréstito recibido por la empresa emisora.

    b) Ecuación que permite obtener el interés efectivo emisor.

    c) Ecuación de la que se obtiene el interés efectivo suscriptor.

    d) Ecuación para determinar el tanto efectivo de un obligacionista que adquirió títulos en el momento de la emisión y los vende hoy, tras el cobro del cupón correspondiente y sin ningún tipo de gasto, por 978,35€.

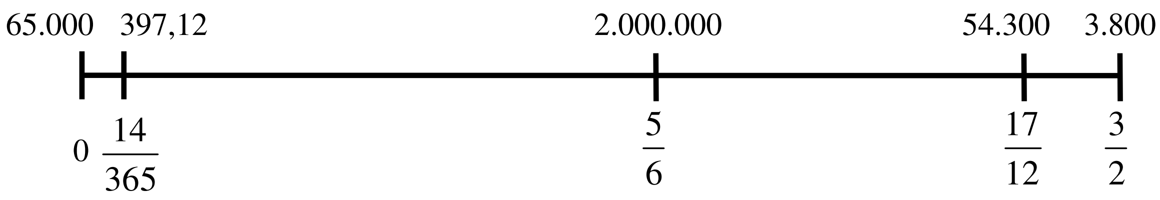
    e) Ecuación para determinar el tanto efectivo de un obligacionista que adquiere hoy títulos, al precio indicado, los mantiene hasta su vencimiento y tiene unos gastos de compra del 0,45% sobre su valor nominal.

SOLUCIÓN EJERCICIOS PROPUESTOS

BLOQUE TEMÁTICO 1. TEMA 1

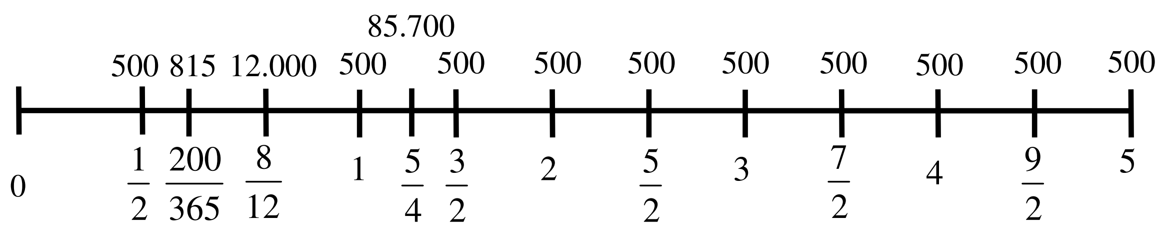
1. a) Representan 65.000€ hoy
   b) Representan 54.300€ al cabo de 17 meses
   c) Representan 397,12€ dentro de 14 días
   d) Representan 3.800€ al cabo de 3 semestres
   e) Representan 2.000.000€ dentro de 5 bimestres

2.

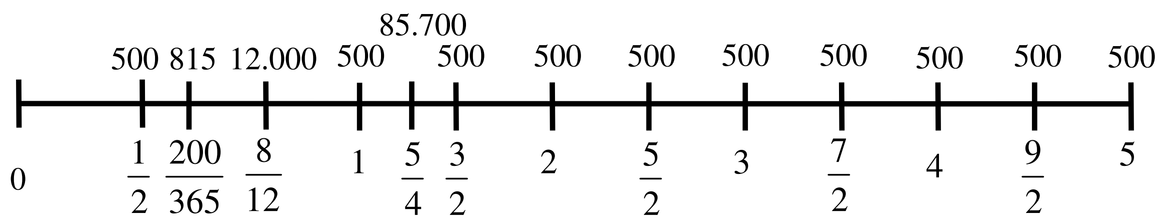


3. a) Representan 85.700$ dentro de 5 trimestres
   b) Representan 12.000$ al cabo de 8 meses
   c) Representan 815$ dentro de 200 días
   d) Representan 500$ al final de cada semestre durante 5 años

4.



5.



6.

Situación	Elemento personal		Elemento objetivo		Elemento formal
	Sujeto Activo	Sujeto Pasivo	Prestación	Contraprestación	
a)	Yo	Bankia	$(4.000, 0)$	$\left(4.120, \frac{1}{2}\right)$	Condiciones firmadas en el plazo fijo
b)	NO es operación financiera				
c)	Manuel	Persona física o jurídica que compra acciones	$(33.100, 0)$	$(20.200, 3)$	Condiciones pactadas en la compra venta
d)	NO es operación financiera				
e)	NO es operación financiera				
f)	Padre	Catalunya Banc	5.000€ cada año hasta la jubilación	Capital acumulado en el Plan de Pensiones en el momento de la jubilación	Condiciones firmadas en el Plan de Pensiones
g)	Banco Santander	Cementos S.A.	$(18.935, 0)$	$\left(20.000, \frac{2}{12}\right)$	Condiciones firmadas para el descuento comercial
h)	Bankinter	María	$(899, 0)$	121,85€ durante 10 meses	Condiciones firmadas del Préstamo
i)	Entidad financiera que tiene concertada la VISA	Yo	420€ el día 3 de enero	420€ el día 25 de enero	Condiciones firmadas en el contrato VISA
j)	Manuel	la Caixa	$(200, 0)$ más sueldo mensual de 1.400€ más otros cobros	Reintegros para comer, vestir, pagar facturas, etc.	Condiciones firmadas de la Cuenta Corriente

7. Operaciones elementales: a), c), g), i)

   Operaciones parcialmente complejas: f), h)

   Operaciones totalmente complejas: j)

8.

Operación financiera	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
a)	120€	3%	6%
c)	-12.900€	-38,97%	-12,99%
i)	0€	0%	0%

9. a)

Criterio	Plazo de la operación $\boldsymbol{t}$
$\frac{Act}{365}$	$\frac{17+30+31+30+31+31+30+18}{365}=\frac{218}{365}=0,59726$
$\frac{Act}{360}$	$\frac{17+30+31+30+31+31+30+18}{360}=\frac{218}{360}=0,60\widehat{5}$
$\frac{30}{360}$	$\frac{16+30+30+30+30+30+30+18}{360}=\frac{214}{360}=0,59\widehat{4}$

b)

Criterio	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
$\frac{Act}{365}$	450€	3,75%	6,27867%
$\frac{Act}{360}$	450€	3,75%	6,19266%
$\frac{30}{360}$	450€	3,75%	6,30841%

10. a)

Criterio	Plazo de la operación $\boldsymbol{t}$
$\frac{Act}{365}$	$1+\frac{23+30+19}{365}=1+\frac{72}{365}=1,19726$
$\frac{Act}{360}$	$1+\frac{23+30+19}{360}=1+\frac{72}{360}=1,20$
$\frac{30}{360}$	$1+\frac{22+30+19}{360}=1+\frac{71}{360}=1,197\widehat{2}$

b)

Criterio	Precio Total	Interés efectivo	Interés nominal
$\frac{Act}{365}$	150€	17,647%	14,7395%
$\frac{Act}{360}$	150€	17,647%	14,7059%
$\frac{30}{360}$	150€	17,647%	14,7400%

11. 65,34€

12. Capital acumulado: 12.540,60€
Intereses brutos: 15,92€

13. 1,85%

14. Interés nominal vencimiento 3 meses: 3,104%
Interés nominal vencimiento 9 meses: 3,231%

15. 3.940€

16. 55,47€

17. a) 33.320,70€
b) 33.423,35€

18. a) 7,50%
b) 6,115%

19. a) 8,163%
b) 10,678%

20. a) 10.262,50€
b) 19.320€
c) No tiene dinero suficiente. Interés simple anual mínimo:3,397%

21. a) 7.065,85€
b) 5,25 años

22. 1.735,38€

23. 8.789,04€

24. 1.037,85€

25. 7.867,65€

26. 2,829%

27. 945,33€

28. 4,59%

29. 6,923%

30. Interés efectivo bimestral: 0,9902%
Interés efectivo semestral: 3%

31. a) 1,75%
b) 7%
c) 7,186%

32. 946,88€

33. a) 9.131,29€
b) 1,4588%

34. Interés efectivo mensual: 0,375%
Interés efectivo anual: 4,594%
TAE: 4,594%

35. Interés efectivo anual: 3,493%
TAE: 3,493%

36. Interés efectivo anual: 6,963%
TAE: 15,965%

37. Interés efectivo anual: 5,252%
TAE: 3,735%

38. Interés efectivo trimestral: 1,6875%
Interés efectivo anual: 6,923%
TAE: 6,923%

39. Interés efectivo anual: 3,155%
TAE: 2,955%

40. a) 15.667,14€
b) Interés efectivo anual 1,054% y TAE 1,054%
c) Interés efectivo anual 1,054% y TAE 0,893%

41. a) 8.343,82€
b) Interés efectivo anual depósito A: 6,152%
Interés efectivo anual depósito B: 7,442%
Interés efectivo anual depósito C: 8,215%

42. Cantidad que retira hijo mayor: 41.090,83€
Cantidad que retira hijo menor: 46.948,33€

43. a) 4,074%
b) 12,79 años
c) 4,675%

44. a) Cuantía acumulada alternativa 1: 20.539,60€
Cuantía acumulada alternativa 2: 20.500€
Cuantía acumulada alternativa 3: 20.560€
b) TAE alternativa 1: 4,074%
TAE alternativa 2: 3,773%
TAE alternativa 3: 4,229%

BLOQUE TEMÁTICO 1. TEMA 2

1. 10.725,85€

2. Precio hoy finca Opción A: 95.472,40€
   Precio hoy finca Opción B: 100.754,31€
   Para el comprador es más conveniente la opción A

3. a) 11.531,69€
   b) $3.000\cdot(1+I_1)^3+2.000\cdot(1+I_1)^{2,25}+5.500\cdot(1+I_1)^{0,5}=11.531,69$
   c) 11.400,90€
   d) $3.000\cdot(1+I_1)^3+2.000\cdot(1+I_1)^{2,25}+5.500\cdot(1+I_1)^{0,5}=11.400,90$

4. a) 10.833,45€
   b) $6.000\cdot(1+I_1)^4+5.200\cdot(1+I_1)^{2,5}-1.500\cdot(1+I_1)^{0,75}=10.833,45$

5. a) 7.853,92€
   b) 28.537,50€
   c) 39.018,21€

6. a) Valor actual: 19.304,34€
   Valor final: 31.444,73€
   b) Valor actual: 2.117,48€
   Valor final: 4.083,48€
   c) Valor actual: 3.545,61€
   Valor final: 11.633,26€
   d) Valor actual: 296,34€
   Valor final: 390,56€
   e) Valor actual: 3.141,99€
   Valor final: No tiene

7. 24.486,74€

8. 175,95€

9. 152.668,48€

10. $$2.000 = 200 + 200 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-10}}{I_{12}} \text{ o } 2.000 = 200 \cdot \frac{1-(1+I_{12})^{-11}}{I_{12}} \cdot (1+I_{12})$$

11. a) 131.177,22€
    b) 144.829,25€

12. a) Valor actual: 4.114,37€
    Valor final: 11.047,35€
    b) Valor actual: 60.326,30€
    Valor final: 106.433,85€
    c)
    c.1) Valor actual: 54.180,09€
    Valor final: 101.855,99€
    c.2) Valor actual: 37.294,80€
    Valor final: 135.101,27€
    d) Valor actual: 318.772,33€
    Valor final: No tiene

13. a) Renta temporal de 15 términos trimestrales, diferida 5 trimestres, vencida, con primer término 800 y creciente un 5% trimestral acumulativo
    b) 14.589,99€

14. a) 55.596,93€
    b) 51.950,29€

15. a) 30.595,39€
    b) 32.431,12€
    c) 25.688,48€

16. 5.901.398,73€

17. a) Valor actual: 13.727,45€
    Valor final: 16.670,28€
    b) Valor actual: 34.088,85€
    Valor final: 45.879,10€

c) Valor actual: 34.698,99€

Valor final: 70.918,91€

d) Valor actual: 29.678,18€.

Valor final: No tiene

18. a) 2.950€

b) 50.455,14€

19. 17.008,70€

20. Valor actual Proyecto 1: 142.037,64€

Valor actual Proyecto 2: 171.045,78€

El proyecto más económico es el Proyecto 1

BLOQUE TEMÁTICO 2. TEMA 1

1. a) 21.136,34€

   b) Cuota de interés: 3.136,34€

   Cuota de amortización de capital: 18.000€

   c) Tanto efectivo anual del préstamo: 5,5%

   Tanto efectivo anual prestatario: 6,3335%.

   TAE: 6,0328%

   d) Capital pendiente: 18.000€.

   Total amortizado: 0€

   e) 19.160,21€

   f)

   f.1) 19.160,21€

   f.2) 18.912,98€

2. a) Importe a pagar a los 4 años: 80.611,30€

   b) Cuota de interés: 30.611,30€

   Cuota de amortización: 50.000€

   c) 63.486,73€

   d) Tipo efectivo anual del préstamo: 12,6825%

   Tanto efectivo anual prestatario: 13,2531%

   TAE: 13,2531%

   e) 61.565,28€

   f) $50.000 = 1.000 + 15.000 \cdot (1 + I_1)^{-2} + 61.565,28 \cdot (1 + I_1)^{-4}$

   g) La TAE no varía al considerar la entrega de los 15.000€

3. a) 1.350€

   b) 91.350€

   c) 90.000€

   d) 90.447,77€

   e) 1.530€

4. a) 180€

   b) Capital pendiente de amortizar: 48.000€

   Reserva matemática: 48.000€

c) Capital pendiente de amortizar: 48.000€

Reserva matemática: 48.089,92€

d) 161,25€

e) $48.000 = 480 + 180 \cdot a_{\overline{120}|I_{12}} + 48.000 \cdot (1+I_{12})^{-120}$ y $TAE = (1+I_{12})^{12} - 1$

f) $$48.000 = 480 + 180 \cdot a_{\overline{72}|I_{12}} + 5.012,5 \cdot (1+I_{12})^{-72} + \\ +161,25 \cdot a_{\overline{48}|I_{12}} \cdot (1+I_{12})^{-72} + 43.000 \cdot (1+I_{12})^{-120}$$

5. a) 994,69€

b)

Periodo	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de capital	Total amortizado	Capital pendiente
					170.000,00
1	994,69	510,00	484,69	484,69	169.515,31
2	994,69	508,55	486,14	970,83	169.029,17
3	994,69	507,09	487,60	1.458,44	168.541,56
…					
238	994,69	8,90	985,79	168.019,54	1.980,46
239	994,69	5,94	988,75	169.008,29	991,71
240	994,69	2,98	991,71	170.000,00	0,00

c) Capital pendiente: 164.086,87€

Total amortizado: 5.913,13€

d) Capital pendiente: 164.086,87€

Reserva matemática: 164.332,82€

e) Cuota de amortización: 505,49€

Cuota de interés: 489,20€

f)

f.1) 160.809,14€

f.2) 169.183,87€

g) $170.000 = 5.100 + 994,69 \cdot a_{\overline{240}|I_{12}}$ y $TAE = (1+I_{12})^{12} - 1$

6. a) 4.197,82€

b) Cuota de amortización: 2.906,76€

Cuota de interés: 1.291,06€

c) $150.000 = 2.250 + 4.197,82 \cdot a_{\overline{48}|I_4}$ y $TAE = (1+I_4)^4 - 1$

d)

d.1) 3.780,04€

d.2)

$$150.000 = 2.250 + 4.197{,}82 \cdot a_{\overline{12}|I_4} + 12.060 \cdot \left(1+I_4\right)^{-12} + 3.780{,}04 \cdot a_{\overline{36}|I_4} \cdot \left(1+I_4\right)^{-12}$$

7. a) 801,66€

b) Cuota amortización primera mensualidad: 326,66€

Cuota interés primera mensualidad: 475€

Cuota amortización última mensualidad: 797,67€

Cuota interés última mensualidad: 3,99€

c) 719,39€

8. a) 6.328,95€

b) 216.103,43€

c) 6.583,10€

9. a) 22.845,96€

b) Ecuación TAE: $180.000 = 1.800 + 22.845{,}96 \cdot a_{\overline{13}|TAE} \cdot \left(1+TAE\right)^{-2}$

Ecuación tanto efectivo prestatario: $180.000 = 5.000 + 22.845{,}96 \cdot a_{\overline{13}|I_1} \cdot \left(1+I_1\right)^{-2}$

c) 141.868,70€

d) 143.253,17€

10. a) Importe de las cuotas de interés: 480€

Importe de los término amortizativo: 1.263,05€

b) $60.000 = 600 + 480 \cdot a_{\overline{12}|I_6} + 1.263{,}05 \cdot a_{\overline{60}|I_6} \cdot \left(1+I_6\right)^{-12}$ y $TAE = \left(1+I_6\right)^{6} - 1$

c) 20.627,77€

d) 20.627,77€

e)

e.1) 39.529,41€

e.2) $60.000 = 600 + 480 \cdot a_{\overline{12}|I_6} + 1.263{,}05 \cdot a_{\overline{24}|I_6} \cdot \left(1+I_6\right)^{-12} +$

$$+39.627{,}84 \cdot \left(1+I_6\right)^{-36{,}5}$$

BLOQUE TEMÁTICO 2. TEMA 2

1. 1,693%

2. 952,44€

3. a) 9.845,70€
   b) 98,457%

4. a) 3,848%
   b) 3,304%

5. a) 100.000
   b) 1,5097%
   c) Precio pagaré: 2.983,50€
      Interés anual publicado: 1,577%
   d) 99,86%

6. a) 1.130,02€
   b) 3,548%
   c) 108.477,90€

7. a) 1,392%
   b) 2,055%
   c) 15,137€
   d) 87.329,51€
   e) $1.039,637 = \left(32,50 \cdot a_{\overline{7}|I_1} + 1.000 \cdot (1+I_1)^{-7}\right) \cdot (1+I_1)^{\frac{170}{365}}$

8. a) 1.016,15€
   b) Cupón corrido a 20 febrero de este año: 38,52€
      Precio ex-cupón a 20 de febrero de este año: 1.028,49€

9. a) $2.450 + 12,25 = 55 \cdot a_{\overline{10}|I_2} + 2.525 \cdot (1+I_2)^{-10}$
   b) $2.450 + 12,25 = 55 \cdot a_{\overline{4}|I_2} + 2.473,82 \cdot (1+I_2)^{-4}$

10. a) Para un título: $985 = 40 \cdot a_{\overline{3}|I_1} + 970,05 \cdot \left(1 + I_1\right)^{-\left(3+\frac{130}{365}\right)}$

b) $15.000 \cdot 985 = 12.000 + 15.000 \cdot 40 \cdot a_{\overline{5}|I_1} + 15.000 \cdot 1.000 \cdot \left(1 + I_1\right)^{-5}$

11. a) Importe nominal: 40.000.000€

Importe efectivo: 38.800.000€

b) Para un título: $970 = 3,2 + 13,50 \cdot a_{\overline{40}|I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-40}$

c) Para un título: $970 + 1,94 = 13,50 \cdot a_{\overline{40}|I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-40}$

d) Para un título: $970 + 1,94 = 13,50 \cdot a_{\overline{8}|I_4} + 978,35 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-8}$

e) Para un título: $978,35 + 4,50 = 13,50 \cdot a_{\overline{32}|I_4} + 1.010 \cdot \left(1 + I_4\right)^{-32}$

BIBLIOGRAFÍA DE REFERENCIA

ALEGRE, P. [et al.]. *Ejercicios resueltos de matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid: AC, 2005

BADÍA, C. [et al.]. *Introducción a la matemática financiera*. 4ª ed. Barcelona: Universidad de Barcelona. Dep. de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, 2005

GIL, L. *Matemática de las operaciones financieras*. 2ª. ed. Madrid: AC, 1993

MARTÍN, M.; TRUJILLO, A. *Manual de mercados financieros*. Madrid: Thomson, 2004

NAVARRO, E.; NAVE, J.M. *Fundamentos de matemáticas financieras*. Barcelona: Bosch, 2001

RODRÍGUEZ, A. *Matemática de la financiación*. Barcelona: Ediciones S, 1994

TERCEÑO, A. [et al.]. *Matemática financiera*. Barcelona: Pirámide, 1997