

TD

Changement de bases

EXERCICE 1 ■ □ □

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, e'_2 = e_3 + e_1, e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

① Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

② Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases?

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Donner le rang de $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

① Donner le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ ainsi que des bases de $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$.

② Si A est la matrice d'une application linéaire dans des " $\mathbb{R}^n$ " bien choisis, trouver alors une base de l'ensemble de départ et une de l'ensemble d'arrivée, telles que la matrice de cette application linéaire soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

③ Exhiber les matrices de passage.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ ■ ■

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D , en utilisant un changement de bases. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □

Étant donné un paramètre complexe m , déterminer le rang de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & m & -1 & 3 \\ m & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

① Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par $u : P(X) \mapsto P(X+1)$. Montrer que u est un automorphisme et expliciter u^{-1} .

② Que représente A vis-à-vis de u ? En déduire l'inversibilité de A et expliciter A^{-1} .

③ Démontrer la **formule d'inversion de Pascal** : Si $(x_n)_{0 \leq k \leq n-1}$ et $(y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ sont deux familles de scalaires telles que $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y_k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x_i$,

$$\text{alors on a } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} y_i.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

① Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Par quelles opérations élémentaires sur M obtient-on,

1.a) la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1 = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$?

1.b) la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_1, e_3, e_4, \dots, e_n)$?

② Quels sont les endomorphismes de l'espace vectoriel E dont les matrices sont indépendantes de la base choisie?

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■■■

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■■□

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■■■

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

① Calculer A^2 .

② En déduire que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

③ Expliciter $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■■□ Trace d'une symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et s une symétrie de E .

Montrer que $\text{Tr}(s)$ est un entier de même parité que n .

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■■■

Déterminer la trace de l'application transposition $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \longmapsto A^T.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■■■

① Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

② Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

► Indication

► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Application directe de la définition de la matrice associée à une application linéaire dans une certaine base.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Un rappel du calcul du rang : Dimension de l'image de l'application linéaire associée, ou calcul direct par opérations sur les lignes et les colonnes.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Un rappel du calcul du rang : Dimension de l'image de l'application linéaire associée, ou calcul direct par opérations sur les lignes et les colonnes.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

On trouve une base de P puis de D . L'union de ces bases forme une base de $\mathbb{R}^3$. On écrit ensuite la matrice de la projection dans cette base, puis on fait un changement de base vers la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Calculs déjà faits du rang. Attention aux disjonctions de cas possibles sur m .

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

En notant $X = \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{n-1} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} \end{pmatrix}$, trouver une relation faisant intervenir X, Y et A .

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

- ① Il suffit d'utiliser la définition de la matrice d'une application linéaire dans une base.
- ② Prenez deux bases, et montrer que la matrice doit être alors diagonale, puis que tous les coefficients diagonaux doivent être égaux. N'oubliez pas la synthèse !

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Construire une base du noyau, puis une base de vecteurs qui sont envoyés sur l'image, par le théorème de la base incomplète. On obtient une matrice avec une sur diagonale de 1 et des 0 ailleurs.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

On peut utiliser les matrices J_r du cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Dans la question ①, il faut remarquer que A est la matrice d'une application très particulière, dont on connaît la matrice dans une base bien choisie, et que cette matrice ressemble étrangement à D .

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 **Trace d'une symétrie**

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

On pourra montrer que φ est une symétrie.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

Raisonner par récurrence sur la taille de la matrice.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Corrections