

TD

Calculs algébriques

EXERCICE 1 ☐ ☐ ☐

Soient a, b, c des réels et n, m deux entiers naturels. Développer ou simplifier les expressions suivantes, en faisant le maximum de calculs de tête :

- | | | |
|------------------------------|---------------------------|------------------------|
| ① $(a+b)^3$ | ⑤ $2^n + 2^n$ | ⑨ $4^m 2^n$ |
| ② $(a+b+c)^2$ | ⑥ $3^n 12^n$ | ⑩ $a^n b^{5n}$ |
| ③ $(1+b)^n$ | ⑦ $3 \times 4^n + 2^{2n}$ | ⑪ $5^{2n} 2^n$ |
| ④ $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)$ | ⑧ $2^{n+1} - 2^n$ | ⑫ $27^{2n} \times 3^n$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ☒ ☐ ☐

Montrez que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ☒ ☒ ☐

Soient x et y deux réels positifs.

- ① Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- ② En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.
- ③ Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. On l'appelle l'**Inégalité arithmético-géométrique**.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ☒ ☐ ☐

Résoudre sur $\mathbb{R}$ $||x-1|-2|=2$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ☒ ☐ ☐ Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donnez une forme factorisée de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ☒ (A) ☒

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

Avec la même méthode, simplifier les sommes

$$T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k! \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ☒ ☒ ☐

Calculer $S_1 = \sum_{k=1}^n k$, $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$, et $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Cela ne fait pas de mal de connaître ces résultats par coeur.

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ☒ ☐ ☐

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ☒ ☐ ☐

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes $S_n = \sum_{k=1}^n k^2(n-k)$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ☒ ☒ ☐

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■■■□

Soient $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $R_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■□□ Norme dans $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Démontrer que pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \text{ et } \|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■■■ Divergence de la série harmonique

① Montrer que pour tout entier n , $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$.

② Qu'en déduire sur la convergence de $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$?

On admet qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■■■□

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$A_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■■■□

Calculer

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij, & U_n &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij, & W_n &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij, \\ T_n &= \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} ij, & V_n &= \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij, & X_n &= \prod_{1 \leq j < i \leq n} ij. \end{aligned}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■■□

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 :

- en utilisant la factorisation de $a^n - b^n$,
- en utilisant la formule du binôme.

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■■■□

Montrer sans récurrence que

$$\textcircled{1} \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \quad \textcircled{2} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■■■

Le but du problème est le calcul, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, des sommes

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^p, \quad \varphi_{n,p}(u) = \sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k} u^k.$$

① 1.a Exprimer les nombres $k \binom{n}{k}, k(k-1) \binom{n}{k}, \dots, k(k-1) \dots (k-p+1) \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}, \dots, \binom{n-p}{k-p}$.

① 1.b Calculer alors les sommes $S_{n,0}, S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
On pourra remarquer que k^2 est combinaison linéaire de k et $k(k-1)$.

- 1.c) Trouver a, b, c telles que $\forall k \in \mathbb{N}, k^3 = ak + bk(k-1) + ck(k-1)(k-2)$.
En déduire $S_{n,3}$.
- 2) 2.a) Exprimer $\varphi_{n,p+1}(u)$ en fonction de $\varphi'_{n,p}(u)$.
- 2.b) En déduire les expressions simplifiées de $\varphi_{n,1}(u), \varphi_{n,2}(u), \varphi_{n,3}(u)$.
- 2.c) Retrouver ainsi les valeurs des sommes $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ ■

On désire calculer la somme $\sum_{k=j}^n \binom{k}{j}$, de deux manières différentes.

- 1) En recherchant le coefficient de x^j dans le polynôme $\sum_{i=0}^n (x+1)^i$
(Il y a une interversion de Σ à réaliser)
- 2) En réduisant "progressivement" les sommes $\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \dots + \binom{j+k}{j}$ grâce
à la formule $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

► Indication

► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Il y a des fonctions définies par morceaux, donc on fait ... une disjonction de cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Il faut supprimer les valeurs absolues ! On mets au carré, ou on multiplie par le conjugué.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Valeur absolue, donc disjonction de cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$**

Forçons l'utilisation de la factorisation très similaire du cours $a^n - b^n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Faire apparaître des somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Vous connaissez celle des k^2 . Il suffit de la montrer par récurrence. Pour k^3 , il faut retrouver la formule puis la montrer par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

En regroupant judicieusement les termes, on peut se ramener à la somme d'une constante.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Il suffit de bien séparer les sommes pour se ramener à des sommes connues.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Il y a plusieurs manières de faire. Une est de faire apparaître une somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

On peut poser la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On calcule de deux manières différentes sa dérivée 1 ou 2 fois, que l'on évalue en 1.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 **Norme dans $\mathbb{R}^n$**

Utiliser l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 **Divergence de la série harmonique**

La question 1 est la plus difficile. On peut le montrer par récurrence en regroupant les termes qui s'ajoutent au rang supérieur et faire une minoration grossière.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Pour la première somme, il faut séparer aux endroits où l'on connaît la formule du maximum.

Pour la seconde, il faut calculer une somme, puis l'autre.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Il faut calculer S_n en calculant un produit, puis l'autre.

Faites un dessin (comme en cours) pour comprendre quelles sont les facteurs qui interviennent dans les autres sommes.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

L'imparité de la puissance permet de faire apparaître un signe "-".

On force l'apparition du 7 et on utilise le binôme. Il faut ensuite sortir les termes de la somme qui ne sont pas des multiples de 7.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Méthode du "bourrin". On fait apparaître les facteurs manquants.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

- ① Le calcul de la somme est immédiat, mais il faut montrer que le coefficient que l'on cherche est bien le coefficient devant x^j en intervertissant les sommes, après avoir utilisé le binôme.
- ② C'est juste un calcul à faire.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

- ① $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ② $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- ③ $(1 + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k$
- ④ $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = ab - ac + bc - ab + ca - cb = 0$
- ⑤ $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
- ⑥ $3^n \cdot 12^n = (3 \cdot 12)^n = 36^n$
- ⑦ $3 \cdot 4^n + 2^{2n} = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} = 4 \cdot 2^{2n} = 2^{2n+2}$
- ⑧ $2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = (2 - 1)2^n = 2^n$
- ⑨ $4^m \cdot 2^n = 2^{2m} \cdot 2^n = 2^{2m+n}$
- ⑩ $a^n b^{5n} = (ab^5)^n$
- ⑪ $5^{2n} \cdot 2^n = (5^2)^n \cdot 2^n = 25^n \cdot 2^n = (25 \cdot 2)^n = 50^n$
- ⑫ $27^{2n} \cdot 3^n = 3^{6n} \cdot 3^n = 3^{7n}$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

Cas $x \geq y$. Alors $|x - y| = x - y$.

- Pour le minimum

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min(x, y).$$

- Pour le maximum

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + (x - y)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x, y).$$

Cas $x < y$. Alors $|x - y| = y - x$.

- Pour le minimum

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (y - x)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min(x, y).$$

- Pour le maximum

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + (y - x)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x, y).$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

- ① Comme $\sqrt{x + y}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sont deux quantités positives, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$x + y \leq x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Comme $2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$, l'égalité est démontrée.

- ② Supposons $x \geq y$. Alors $\sqrt{x} = \sqrt{y + x - y} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$, donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Supposons $x \leq y$. Alors $\sqrt{y} = \sqrt{x + y - x} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$, donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

- ③ Prenons le carré des deux côtés de l'inégalité (les deux quantités sont positives) : l'équation est équivalente à

$$xy \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4},$$

c'est à dire, à

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy \geq 0$$

Or,

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy = \frac{(x - y)^2}{4} \geq 0$$

L'inégalité est donc démontrée.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

Correction de l'EXERCICE 4

La disjonction de cas est $1 < x < 3$, $x \geq 3$, $x \leq -1$ puis $-1 \leq x \leq 1$.

On obtient les solutions $x = -3, 1, 5$.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

Correction de l'EXERCICE 5 Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$

On a $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$. Ainsi, en appliquant la formule de factorisation de $a^n - b^n$, on a

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a - (-b)) \sum_{k=0}^{2n} a^k (-b)^{2n-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k} . \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$. On est donc devant une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) .$$

De même, $T_n = (n+1)! - 1$ et

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} . \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

Il suffit de faire les récurrences. Pas de difficulté particulière. Faisons le pour S_3 .

Pour $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$.

Donc la formule est vraie au rang $n = 1$.

On suppose la formule $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ vraie pour un certain entier n fixé.

Calculons alors.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = S_n + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

C'est bien la formule attendue au rang $n+1$, donc la propriété est héréditaire. Par

principe de récurrence, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

En découpant entre pairs et impairs, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{p=0}^n (-1)^{2p} 2p + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{2i+1} (2i+1) \\
&= \sum_{p=0}^n 2p - \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) \\
&= \sum_{p=0}^n 2p - \sum_{i=0}^{n-1} 2i - \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= 2n + \cancel{\sum_{p=0}^{n-1} 2p} - \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} 2i} - n \\
&= n.
\end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

Il suffit de bien séparer les sommes pour se ramener à des sommes connues :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n k^2(n-k) = \sum_{k=1}^n nk^2 - k^3 = n \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \\
&= n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) \\
&= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12}.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{4^{k+1}} - \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \frac{3^n}{4^n}}{1 - \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3^n}{4^n}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}}.
\end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

Pour $S_{n,p}$, en regardant quelques exemples, on conjecture que $S_{n,p} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$. On peut le démontrer par récurrence, mais on va proposer une méthode plus rapide : soient n dans $\mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
S_{n,p} &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^p -(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^p -a_{k-1} + a_k
\end{aligned}$$

où $a_k = (-1)^k \binom{n-1}{k}$, donc, par télescopage, $S_{n,p} = a_p - a_{-1} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

① On utilise $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, c'est à dire,

$$\begin{aligned}
R_n &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k - 1$. Quand $k = 1, \ell = 0$, et quand $k = n, \ell = n - 1$. Donc

$$R_n = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = n 2^{n-1}$$

par la formule de la somme des coefficients binomiaux (cf. cours). De même, on écrit que

$$T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k - 1$. Quand $k = 1, \ell = 0$, et quand $k = n, \ell = n - 1$. Donc

$$\begin{aligned} T_n &= n \sum_{\ell=0}^n (\ell+1) \binom{n-1}{\ell} \\ &= n \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^n \binom{n-1}{\ell} \\ &= n \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \quad (\text{on a éliminé les termes nuls}) \\ &= n \sum_{\ell=1}^{n-1} (n-1) \binom{n-2}{\ell-1} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \end{aligned}$$

- ② Autre méthode : posons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Alors $f' : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$. Alors $R_n = f'(1)$. Or, $f : x \mapsto (x+1)^n$, donc $f' : x \mapsto n(x+1)^{n-1}$, donc $R_n = f'(1) = n2^{n-1}$. Ensuite pour T_n , il faut remarquer que pour tout x

$$f''(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^n k^2 x^{k-2} - \sum_{k=0}^n k x^{k-2}$$

donc $f''(1) = \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k$, i.e. $n(n-1)2^{n-2} = T_n - S_n$, d'où T_n !

↪ retour à l'EXERCICE 11

Correction de l'EXERCICE 12 Norme dans $\mathbb{R}^n$

Pour $\|\cdot\|_1$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

En appliquant l'inégalité triangulaire à chaque composante $x_i + y_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$.

En sommant ces n inégalités on obtient

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Pour $\|\cdot\|_1$.

De même, pour tout $i = 1, \dots, n$, comme $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ et $|y_i| \leq \|y\|_\infty$,

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

Comme $|x_i + y_i|$ est majoré par $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i|$ est majoré par $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Donc

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

↪ retour à l'EXERCICE 12

Correction de l'EXERCICE 13 Divergence de la série harmonique

Voir DS1.

↪ retour à l'EXERCICE 13

Correction de l'EXERCICE 14

Pour la première somme, on écrit la somme double et on la sépare en trois:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^i \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} j \\ &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j \\ &= 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \sum_{i=2}^n i^2 - i + \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 - i + \sum_{i=1}^n i \\ &= 2 \sum_{i=1}^n i^2 = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on met à l'intérieur la somme sur i :

$$B_n = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j - 1 = \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} = n(n-1).$$

↪ retour à l'EXERCICE 14

Correction de l'EXERCICE 15

On calcule S_n , en l'écrivant comme un produit double :

$$\begin{aligned} S_n &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij \\ &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij \\ &= \prod_{i=1}^n i^n \prod_{j=1}^n j \text{ car } i \text{ est une constante dans le produit interne sur } j \\ &= \prod_{i=1}^n (i^n n!) \\ &= (n!)^n \prod_{i=1}^n i^n \\ &= (n!)^n \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n \\ &= (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}. \end{aligned}$$

Pour calculer T_n , on peut faire les dessins comme en TD ou bien remarquer que

$$T_n = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} ij = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij}{\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} ij} = \frac{S_n}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{S_n}{n!^2} = (n!)^{2n-2}.$$

Ensuite, on remarque plusieurs choses : si l'on appelle $D_n = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} ij$, on a $U_n =$

$W_n \times D_n$ (on sépare le produit pour $1 \leq i \leq j \leq n$ en le produit pour $1 \leq i < j \leq n$ fois le produit pour $1 \leq i = j \leq n$). Ensuite, comme les variables sont muettes et que l'expression ij est symétrique en i et en j ,

$$U_n = \prod_{1 \leq a \leq b \leq n} ab = \prod_{1 \leq a \leq b \leq n} ba = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij = V_n$$

et, de même, $W_n = X_n$. Enfin, $T_n = W_n \times X_n = W_n^2$, donc $W_n = \sqrt{T_n} = \sqrt{(n!)^{2n-2}} = (n!)^{n-1}$, donc $U_n = (n!)^{n-1} \times (n!)^2 = (n!)^{n+1}$, et, de même, $V_n = (n!)^{n+1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

- On a

$$3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} = (3 - (-4)) \sum_{k=0}^2 n 3^k (-4)^{2n-k},$$

$$\text{d'où } 3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 7 \times \sum_{k=0}^{2n} 3^k (-4)^{2n-k}.$$

$$\text{C'est un multiple de 7, car } \sum_{k=0}^{2n} 3^k (-4)^{2n-k} \in \mathbb{N}.$$

- Avec le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 2^{4n+2} &= 3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 3^{2n+1} + (7-3)^{2n+1} \\ &= 3^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-3)^{2n+1-k} \\ &= \cancel{3^{2n+1}} + \cancel{\binom{2n+1}{0} 7^0 (-3)^{2n+1-0}} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-3)^{2n+1-k} \\ &= 7 \times \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^{k-1} (-3)^{2n+1-k}. \end{aligned}$$

$$\text{De même, } \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} 7^{k-1} (-3)^{2n+1-k} \in \mathbb{N}, \text{ donc } 3^{2n+1} + 2^{4n+2} \text{ est un multiple de } 7.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) &= \frac{\prod_{k=0}^n (2k+1) \times \prod_{k=0}^n (2k)}{\prod_{k=0}^n (2k)} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{2n+1} k}{2^n \prod_{k=0}^n k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=k+1}^n l = \prod_{l=1}^n \prod_{k=0}^{l-1} l = \prod_{l=1}^n l^l$$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

- ① Considérons le polynôme

$$\sum_{i=0}^n (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{i-1}.$$

Ici le coefficient devant x^j est $\binom{n+1}{j}$.

En le calculant en intervertissant les sommes, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (1+x)^i &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \left(\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \right) \end{aligned}$$

Ici le coefficient devant x^j est $\sum_{k=j}^n \binom{k}{j}$.

Par unicité des coefficients, on obtient le résultat voulu.

② On rappelle que, pour tout $m, p \in \mathbb{N}$, $\binom{m+1}{p} = \binom{m}{p} + \binom{m}{p-1}$.

Posons pour $k \geq 0$,

$$S_{n,j} = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{j+i}{j} = \binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \cdots + \binom{n}{j}.$$

Utilisons la formule de Pascal sous la forme $\binom{j+i+1}{j+1} - \binom{j+i}{j+1} = \binom{j+i}{j}$.

En sommant cette identité pour $i = 0, 1, \dots, n-j$ on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-j} \binom{j+i}{j} = \sum_{i=0}^{n-j} \left(\binom{j+i+1}{j+1} - \binom{j+i}{j+1} \right)$$

Le membre de droite est télescopique ; tous les termes intermédiaires s'annulent et il reste

$$S_{n,j} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{j}{j+1}.$$

Mais $\binom{j}{j+1} = 0$, d'où $S_{n,j} = \binom{n+1}{j+1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)