CUADERNO DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

Sergio Roberto Arzamendi Pérez
Francisco Barrera García
Érik Castañeda de Isla Puga
Juan Velázquez Torres

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

CUADERNO DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

Sergio Roberto Arzamendi Pérez
Francisco Barrera García
Érik Castañeda de Isla Puga
Juan Velázquez Torres

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

INTRODUCCIÓN

Una frase muy conocida es "la práctica hace al maestro". A pesar de la antigüedad de esta sentencia, sigue vigente. Por ello los cuatro autores de esta obra, nos propusimos poner a la disposición de los estudiantes una selección de ejercicios de álgebra, con el objetivo de que los conceptos aprendidos en sus cursos los puedan utilizar para resolverlos y la práctica adquirirla con su desarrollo para lograr un aprendizaje significativo. El libro tiene como orígenes un cuaderno de ejercicios de álgebra, primera parte, que durante varios años ha publicado esta Facultad y otro material inédito con los temas no incluidos en el anterior. La conjunción de estas dos obras y el trabajo en equipo de los cuatro ha dado por resultado este material que anhelamos sea de utilidad tanto para nuestros estudiantes como para los profesores que busquen un apoyo para sus cursos. Estamos conscientes de que, aún cuando hayamos revisado exhaustivamente el material, todavía puedan existir errores u omisiones, por ello agradeceremos enormemente a aquellas personas que nos hagan saber de estas deficiencias para que en futuras ediciones la obra pueda ser más confiable y de mayor utilidad.

El cuaderno de ejercicios consta de seis capítulos. En los dos primeros se presenta lo relativo a los sistemas numéricos más comúnmente empleados en ingeniería; es decir, en el primer capítulo se presentan ejercicios sobre números reales y en el segundo, sobre números complejos. En el tercer capítulo se trabaja con el álgebra de los polinomios, para utilizarla en lo relativo a la determinación de sus raíces. El cuarto capítulo está dedicado a los sistemas de ecuaciones lineales. Las matrices y los determinantes se trabajan en el quinto capítulo y se termina con el sexto en el que el objeto de estudio son las estructuras algebraicas. Cabe la aclaración de que no pocos autores consideran que los conceptos tratados en los capítulos cuatro, cinco y seis, forman parte ya del álgebra lineal.

Es de justicia manifestar un agradecimiento infinito a la Maestra María Cuairán Ruidíaz por su apoyo inconmensurable y a la señorita Ana María Sánchez Téllez por la captura de una parte muy importante del material. Sin su ayuda, seguramente esta obra hubiese tardado mucho más tiempo en poder salir a la luz.

LOS AUTORES

Ciudad Universitaria, Distrito Federal, a 3 de noviembre de 2010

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

NÚMEROS REALES

A través de la historia, pocos conceptos han sido tan utilizados desde épocas tan remotas como el concepto de número. No obstante su antigüedad y su continuo y variado empleo, su definición y su formalización no se pudieron establecer de manera satisfactoria hasta fechas relativamente recientes. Aún en nuestros días es común confundir este concepto, puramente abstracto, con su representación escrita llamada *numeral*.

Es hasta finales del siglo XIX cuando las ideas Weierstrass, Boole, Cantor, Dedekind y Peano, entre otros, cristalizaron en la concepción formal de la estructura algebraica llamada *campo de los números reales*. Esto no quiere decir que se haya llegado a colmar este *casillero* del conocimiento matemático. Actualmente en muchas partes del mundo, son varios los científicos preocupados en profundizar más en esta apasionante rama del saber. Pero para el lector estudioso de la ingeniería, que utilizará las matemáticas como una herramienta en su vida dentro de las aulas y, posteriormente, en sus actividades profesionales, el objetivo en este capítulo será la determinación precisa y rigurosa de las estructuras numéricas de mayor relevancia, hasta concluir con el campo de los *números reales*; también se pretende propiciar el adecuado manejo de los elementos numéricos que conforman estas estructuras algebraicas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean los conjuntos:

$A = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$

$B = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

a) $(B \cap C) \subseteq A$

b) $(A \cap B) \subseteq C$

c) $9 \subseteq B$

d) $A \subseteq B$

e) $C \in (A \cup B)$

f) $3 \in C$

Solución

a) Falso

$(B \cap C) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \not\subseteq A$, pues existen elementos de $(B \cap C)$ que no pertenecen a A, ejemplo: $4 \notin A$

b) Verdadero

$(A \cap B) = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\} \subseteq C$

c) Falso

9 es elemento de B, pero no subconjunto de él.

d) Falso

Existen muchos elementos de A que no pertenecen a B; ejemplo: $12 \in A$; $12 \notin B$

e) Falso

El conjunto C está contenido en la unión de los conjuntos A y B; es decir, C es subconjunto de $(A \cup B)$, pero un conjunto no pertenece a otro, a menos que este último sea un conjunto de conjuntos y no es el caso.

f) Verdadero

3 sí es elemento de C

2. Sean los conjuntos:

$A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas

a) $A = B$

b) $A \cap C = \{1\}$

c) $A \cap B = \phi$

d) $1 \in C$

e) $(A \cup B) - C = \phi$

Solución

a) Falso
A es un conjunto de conjuntos y B es un conjunto de números. Por lo tanto no pueden ser iguales, pues sus elemenentos no son de la misma naturaleza.

b) Verdadero
Tanto A como C son conjunto de conjuntos y el conjunto $\{1\}$ es el único que es elemento común de A y de C.

c) Verdadero
No existe ningún elemento común entre los conjuntos A y B

d) Falso
El número 1 no pertenece al conjunto C, mientras que el conjunto $\{1\}$ sí.

e) Falso
$(A \cup B) - C = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. Dada la siguiente tabla, contestar en cada cuadro con un sí, si cumple la propiedad y un no en caso contrario

Propiedad / Conjunto	Cerradura Adición	Cerradura Multiplicación	Existencia Inverso Aditivo	Existencia Inverso Multiplicativo para $z \neq 0$	Densidad
Naturales					
Enteros					
Racionales					
Irracionales					
Reales					

Solución

N	SÍ	SÍ	NO	NO	NO
Z	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO
Q	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Q'	NO	NO	NO	NO	NO
$\mathbb{R}$	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ

4. Sean los conjuntos de números N, Z, Q, Q' e $\mathbb{R}$. Considerando al conjunto $\mathbb{R}$ como el conjunto universo, determinar el resultado de:

$$\left[(\mathbb{R}-Q)\cup(Q'-Z)\right]\cup\left[(Q\cap Q')\cup IR\cup N\right]-\left[(\mathbb{R}\cap Q)\cap(Z\cup N)\right]$$

Solución

El primer paréntesis rectangular se resuelve de la siguiente manera:

$$\left[(\mathbb{R}-Q)\cup(Q'-Z)\right]=\left[Q'\cup Q'\right]=Q'$$

Del segundo paréntesis se obtiene:

$$\begin{aligned}\left[(Q\cap Q')\cup\mathbb{R}\cup N\right]&=\left[\phi\cup\mathbb{R}\cup N\right]\\&=\left[\mathbb{R}\cup N\right]\\&=\mathbb{R}\end{aligned}$$

y del tercero:

$$\begin{aligned}\left[(\mathbb{R}\cap Q)\cap(Z\cup N)\right]&=\left[Q\cap Z\right]\\&=Z\end{aligned}$$

sustituyendo

$$\underbrace{Q'\cup\mathbb{R}}-Z=\mathbb{R}-Z$$

5. En los paréntesis de la derecha escribir V o F, según la aseveración de la izquierda sea verdadera o falsa.

a) $Q\cup Q'\subseteq\mathbb{R}$ ( )

b) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ ( )

c) $\sqrt{2}\in Q$ ( )

d) $Q\cap Q'=\phi$ ( )

Solución

a) (V) El conjunto unión de los racionales y de los irracionales, sí es un subconjunto de los reales.

b) (V) Se trata de una de las leyes de De Morgan.

c) (F) Es un número irracional.

d) (V) La intersección de un conjunto con su complemento siempre es el conjunto vacío. Además, no es posible encontrar un número que sea a la vez racional e irracional.

6. Para cada una de las siguientes afirmaciones, escribir en el paréntesis correspondiente una F o una V según sea falsa o verdadera.

   a) El número 1 es un número racional. ( )

   b) $\sqrt{25}$ es un número irracional. ( )

   c) 6 y $\frac{18}{3}$ indican (representan) números diferentes. ( )

   d) Cualquier número irracional es también un número trascendente, como el número π . ( )

   e) La suma algebraica de dos números irracionales es otro irracional. ( )

Solución

a) (V) El número 1 se puede escribir 1/1 y cumple con la definición de número racional.

b) (F) $\sqrt{25} = 5$ ya que $5 \cdot 5 = 25$ y, por lo tanto es racional.

c) (F) 6 es la mínima expresión del número racional $\frac{18}{3}$

d) (F) El número $\sqrt{2}$ es irracional, pero no es trascendente.

e) (F) $\sqrt{3} + \left(-\sqrt{3}\right) = 0$ y el número cero no es irracional.

7. Demostrar, por medio de inducción matemática, que:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(1+2+\ldots+n\right)^2\ ;\ \forall\ n\in N \qquad (1)$$

Solución

El miembro derecho de la expresión 1, es el cuadrado de la suma de los primeros n números naturales. Así que, también por inducción matemática, primero se demostrará que:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n\left(n+1\right)}{2}\ ;\ \forall\ n\in N \qquad (2)$$

La expresión debe satisfacerse para $n=1$

$$1=\frac{1\left(1+1\right)}{2}$$

$1\equiv 1\ \therefore$ sí se cumple para $n=1$

Ahora, se supone válida para $n=k$

$$1+2+\ldots+k=\frac{k\left(k+1\right)}{2} \qquad \text{(3) hipótesis}$$

Si 3 es cierta por hipótesis, la expresión 2 también debe cumplirse para $n=k+1$:

$$1+2+\ldots+k+\left(k+1\right)=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2} \qquad \text{(4) tesis}$$

sustituyendo 3 en 4

$$\frac{k\left(k+1\right)}{2}+\left(k+1\right)=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}$$

tomando como factor común $\left(k+1\right)$ en el miembro izquierdo

$$\left(k+1\right)\left[\frac{k}{2}+1\right]=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}$$

$$\left(k+1\right)\left[\frac{k+2}{2}\right]=\frac{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}{2}$$

finalmente

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}, \qquad \forall\, k \in N$$

con lo cual queda demostrado la validez de la expresión 2.

Ahora, como ya se tiene la certeza de que la expresión 2 es válida para todos los números naturales, ésta será sustituida en 1

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2; \qquad \forall\, n \in N \tag{5}$$

Para demostrar la expresión (5), se procede a verificar su validez para $n=1$

$$1^3=\left[\frac{1\,(1+1)}{2}\right]^2$$

$1 \equiv 1 \therefore$ sí se cumple para $n=1$.

Se supone que la expresión es válida para $n=k$

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2 \qquad \text{(6) hipótesis}$$

Tomando como cierta la hipótesis de inducción numerada con 6, se tendrá que demostrar que 5 se cumple para $n=k+1$:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right]^2; \forall\, k \in N \qquad \text{(7) tesis}$$

Dado que el miembro izquierdo de la expresión 7 contiene $k+1$ sumandos y el de 6 sólo k sumandos, se sumará en ambos miembros de 6 el término $(k+1)^3$ y sólo quedará demostrar que los miembros derechos de 6 y 7 también son iguales:

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k\,(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

es decir

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2\,(k+1)^2}{2^2}+(k+1)^3$$

Tomando como factor común $(k+1)^2$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1 \right]$$

entonces

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left[\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right]$$

finalmente al factorizar se tiene

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right]^2 \ ; \qquad \forall\, k \in N$$

que es la misma expresión 7, por lo tanto queda esto demostrado.

8. Demostrar que $x^n - y^n$ tiene como factor $x - y$ para cualquier n natural.

Solución

Por inducción matemática

Para $n = 1$:

$$x^1 - y^1 \text{ sí tiene como factor a } x - y.$$

Suponiendo válida la proposición para $n = k$

$x^k - y^k$ tiene como factor a $x - y$ hipótesis

Ahora, para $n = k + 1$:

$x^{k+1} - y^{k+1}$ es divisible entre $x - y$ tesis

En la tesis pude sumarse y restarse el término $x^k y$ y no se altera:

$$x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} = x^k\,(x - y) + y\,(x^k - y^k)$$

El primer sumando es divisible entre $x - y$, ya que lo contiene como factor, y el segundo también lo es por hipótesis.

Q.E.D.

9. Sean $m, n, p \in N$, demostrar que:

$$m+(n+p)=(m+n)+p$$

tomando en cuenta la definición:

i) $n+1=n^*$ para toda $n \in N$.
ii) $n+m^*=(n+m)^*$, siempre que $n+m$ esté definida.

Solución

Por inducción matemática.

Para $p = 1$

$$m+(n+1)=(m+n)+1$$

por la primera parte de la definición de adición en N, se tiene

$$m+n^*=(m+n)^*$$

Esta expresión es cierta por la segunda parte de la definición de adición en N.

Se supone válida para $p = k$

$$m+(n+k)=(m+n)+k \qquad \text{hipótesis}$$

Si la hipótesis es cierta, la proposición debe serlo también para $p = k + 1$, es decir para $p = k^*$

$$m+(n+k^*)=(m+n)+k^* \qquad \text{tesis}$$

$$m+(n+k^*)=[(m+n)+k]^* \qquad \text{por la definición de adición en } N.$$

$$m+(n+k^*)=[m+(n+k)]^* \qquad \text{por la hipótesis de inducción.}$$

$$m+(n+k^*)=m+(n+k)^* \qquad \text{por la definición de adición en } N.$$

$$m+(n+k^*)=m+(n+k^*) \qquad \text{por la definición de adición en } N.$$

Q.E.D.

10. Demostrar por inducción matemática que $7 \cdot 16^{n-1} + 3$ es divisible entre 5, para todo $n \in N$.

Solución

Para $n = 1$

$$7 \cdot 16^{1-1} + 3 = 7 \cdot 16^0 + 3$$
$$= 7 \cdot 1 + 3$$
$$= 7 + 3$$
$$= 10$$

Como 10 sí es divisible entre 5, la proposición sí se cumple para $n = 1$.

Ahora, se supone válida para $n = k$

$7 \cdot 16^{k-1} + 3$ es divisible entre 5 por hipótesis de inducción. (1)

Tomando como cierta la hipótesis, se demostrará a continuación, que la expresión resultante para $n = k + 1$ también es divisible entre 5

$7 \cdot 16^{k+1-1} + 3$ debe ser divisible entre 5 tesis

$$7 \cdot 16^{k+1-1} + 3$$

al simplificar

$$7 \cdot 16^{k} + 3 \qquad (2)$$

Sumando y restando el término $7 \cdot 16^{k-1}$ en la expresión 2

$$7 \cdot 16^{k} + 3 + 7 \cdot 16^{k-1} - 7 \cdot 16^{k-1}$$

Ordenando los sumandos de tal manera que los dos primeros correspondan con los de la hipótesis, tenemos:

$$7 \cdot 16^{k-1} + 3 + 7 \cdot 16^{k} - 7 \cdot 16^{k-1}$$

Tomando como factor común en los dos últimos términos de esta expresión a 16^{k-1}

$$7 \cdot 16^{k-1} + 3 + 16^{k-1}\left(7 \cdot 16 - 7\right)$$

finalmente

$$\underbrace{7\cdot 16^{k-1}+3}+\underbrace{16^{k-1}\,(105)}$$

La suma de los primeros términos, agrupados en la primera llave, es divisible entre 5 por la hipótesis de inducción y el último también lo es, ya que está multiplicado por 105 que es divisible entre 5.

Q.E.D.

11. Demostrar que

$$\operatorname{sen}\left[\theta+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^{n-1}\cos\theta; \qquad \forall\, n\in N$$

Solución

La demostración se efectuará por medio de inducción matemática.

Para $n=1$

$$\operatorname{sen}\left[\theta+\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^{0}\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

es cierta, pues se trata de una identidad trigonométrica.

Ahora, se supondrá válida la expresión para $n=k$

$$\operatorname{sen}\left[\theta+(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^{k-1}\cos\theta \qquad \text{hipótesis}$$

Si la hipótesis de inducción es cierta, la expresión original debe cumplirse para $n=k+1$

$$\operatorname{sen}\left[\theta+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^{k}\cos\theta \qquad \text{tesis}$$

Si se multiplica por -1 ambos miembros de la hipótesis, la expresión resultante seguirá siendo válida y su miembro derecho será igual al de la tesis. Por ello, sólo se tendrá que demostrar que sus miembros izquierdos también lo son.

$$-\operatorname{sen}\left[\theta+(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^{k-1}(-1)\cos\theta$$

por las leyes de los exponentes

$$-\operatorname{sen}\left[\theta+(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k\cos\theta$$

tomando en cuenta que

$$\operatorname{sen}(\alpha+\pi)=-\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\left[\theta+(2\,\mathrm{k}-1)\frac{\pi}{2}+\pi\right]=(-1)^k\cos\theta$$

desarrollando

$$\operatorname{sen}\left[\theta+\frac{2\,\mathrm{k}\,\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\pi\right]=(-1)^k\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\left[\theta+\frac{2\,\mathrm{k}\,\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k\cos\theta$$

finalmente

$$\operatorname{sen}\left[\theta+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]=(-1)^k\cos\theta$$

Q.E.D.

12. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{n+2}{2(n+1)};\qquad\forall\, n\in N$$

Solución

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)};\quad\forall\, n\in N$$

$n = 1$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1+2}{2(2)}; \qquad \frac{3}{4}\equiv\frac{3}{4} \text{ se cumple.}$$

$n = k$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)} \qquad \text{hipótesis}$$

$n = k+1$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+3}{2(k+2)} \qquad \text{tesis}$$

multiplicando por $\left(1-\dfrac{1}{(k+2)^2}\right)$ en ambos miembros de la hipótesis

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}\left(1-\frac{1}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\left(\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}\right)$$

$$=\frac{(k+2)^2-1}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2 + 4k + 4 - 1}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2 + 4k + 3}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+3}{2(k+2)}$$

Q.E.D.

13. Demostrar, por inducción matemática, que:

$$n! > n^2 \qquad \forall\, n \geq 4, \qquad n \in N$$

se tiene que

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n: \qquad 0! = 1$$

Solución

a) Para $n = 4$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$4^2 = 16$$

$$\therefore\ 24 > 16 \qquad \text{sí se cumple}.$$

b) La hipótesis de inducción, la cual se supondrá válida, se tiene para $n = k$

$$k! > k^2 \qquad\qquad \text{hipótesis}$$

Se demostrará la validez de la proposición para $n = k + 1$, tomando como válida la hipótesis

$$(k+1)! > (k+1)^2 \qquad\qquad \text{tesis}$$

Utilizando la definición de factorial, se tiene

$$(k+1)! = (k+1)\,k!$$

Si se multiplica en la hipótesis por $(k + 1)$ en ambos miembros de la desigualdad, como $k \geq 4$ la relación de orden mayor que no se altera

$$(k+1)\,k\,!>(k+1)\,k^2$$
$$(k+1)\,!>(k+1)\,k^2 \qquad \text{(A)}$$

Esta desigualdad proviene de la hipótesis que se tomó como válida, así que debe seguir siendo cierta y observando las expresiones de la tesis y las de la expresión A

$$(k+1)\,!>(k+1)\,k^2 \qquad \text{(A)}$$
$$(k+1)\,!>(k+1)^2 \qquad \text{tesis}$$

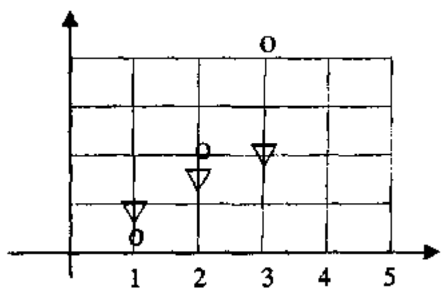
es fácil demostrar que

$$(k+1)\,k^2>(k+1)^2$$

dividiendo entre $(k + 1)$

$$k^2>k+1$$

gráficamente



la gráfica de $y = k^2$, corresponde a la de una parábola discontinua y la de $y = k + 1$ a la de una recta discontinua con pendiente 1 y esta desigualdad se cumple para $k > 2$.

Por tanto

$$\text{si } (k+1)\,!>(k+1)\,k^2 \qquad \text{por hipótesis}$$
$$\text{y } (k+1)\,k^2>(k+1)^2$$
$$(k+1)\,!>(k+1)^2 \qquad \text{por transitividad}$$

Q.E.D.

14. Demostrar que en un polígono de n lados, la suma de los ángulos interiores es igual a

$$S = (n-2) \cdot 180°$$

Solución

Dado que no existen polígonos de uno o de dos lados, la expresión podría ser cierta para $n \geq 3$.

a) Para $n = 3$

$$S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°$$

lo cual es cierto, tomando en cuenta un teorema de geometría elemental.

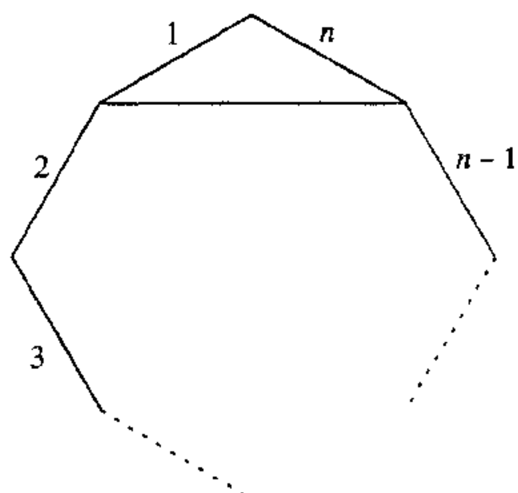
b) Se supone válida la expresión para $n = k$

$$S_k = (k-2) \cdot 180° \qquad \text{hipótesis}$$

Tomando como base la validez de la hipótesis, debe demostrarse que la expresión es cierta para $n = k + 1$

$$S_{k+1} = (k-1) \cdot 180° \qquad \text{tesis}$$

Sea un polígono de n lados



si se unen con un segmento el punto origen del lado n con el punto extremo del lado 1, considerando este segmento y desechando los lados n y 1, se forma un polígono de $n - 1$ lados. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces la suma de los ángulos interiores de un polígono de $(n - 1)$ lados y la suma de un polígonos de n lados tienen una diferencia de 180°.

De acuerdo con este razonamiento, si en la hipótesis de inducción se tomó como cierto que la suma de los ángulos internos de un polígono de k lados es $S_k = (k-2) \cdot 180°$, si le agregamos un lado al polígono, se tendrá

$$S_{k+1} = S_k + 180°$$

$$= (k-2) \cdot 180° + 180°$$

$$= k \cdot 180° - 2 \cdot 180° + 180°$$

$$= k \cdot 180° - 180°$$

$$= (k-1) \cdot 180°$$

Q.E.D.

15. Demostrar, por medio de inducción matemática, que:

$$2+4+8+\ldots+2^n > 2^n - 1 \qquad \forall\, n \in N$$

Solución

Para $n = 1$

$$2^1 > 2^1 - 1$$

evidentemente

$$2 > 1 \text{ sí se cumple.}$$

Ahora se supone válido para $n = k$

$$2+4+8+\ldots+2^k > 2^k - 1 \qquad \text{hipótesis}$$

Tomando como cierta la hipótesis, la expresión debe cumplirse para $n = k+1$

$$2+4+8+\ldots+2^k + 2^{k+1} > 2^{k+1} - 1 \qquad \text{tesis}$$

Si en la hipótesis se suma el término 2^{k+1} en ambos miembros, la desigualdad sigue siendo válida

$$2+4+8+\ldots+2^k + 2^{k+1} > 2^k - 1 + 2^{k+1} \qquad (1)$$

considerando el miembro derecho de la tesis y la expresión 1, evidentemente $2^{k+1} - 1 + 2^k > 2^{k+1} - 1$, entonces por transitividad se cumple la tesis.

Q.E.D.

16. Demostrar la validez de

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{n+1}, \qquad \forall\, n\in N$$

Solución

Por inducción matemática.

Para $n = 1$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{1+1}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1 \qquad \text{lo cual es cierto;}$$

ahora, para $n = k$, se supone válida

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1} \qquad \text{hipótesis}$$

para $n = k + 1$ debe verificarse si la hipótesis es válida

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2(k+1)\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{k+2}$$

simplificando

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi+\pi}{2}\right)=(-1)^{k+2} \qquad \text{tesis}$$

Con el objeto de hacer iguales miembros derechos de la hipótesis y de la tesis, se multiplica la hipótesis en ambos miembros por (-1)

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}(-1)$$

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}\right)=(-1)^{k+2}$$

Tomando en cuenta la identidad

$$-\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\pi)$$

en la expresión anterior

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}+\pi\right)$$

sustituyendo

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi}{2}+\pi\right)=(-1)^{k+2}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi-\pi+2\pi}{2}\right)=(-1)^{k+2}$$

finalmente

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi+\pi}{2}\right)=(-1)^{k+2}$$

Q.E.D.

17. Sea la expresión decimal $2.29838383\ldots=2.29\overline{83}$ determinar un par de valores $a,\ b\in Z$, tales que

$$\frac{a}{b}=2.29838383\ldots=2.29\overline{83}$$

Solución

Multiplicando en primer término ambos miembros de la ecuación anterior por 10^2, para que los dos dígitos anteriores al período pasen a la parte entera

$$\frac{a}{b}10^2=10^2\left(2.29838383\ldots\right)$$

$$\frac{a}{b}10^2=229.838383\ldots \qquad (1)$$

Como el periodo consta de dos dígitos, se multiplicará la expresión 1 por 10^2.

$$\frac{a}{b}10^4=22983.8383\ldots \qquad (2)$$

Restando miembro a miembro la ecuación 1 de la 2, se tiene:

$$\frac{a}{b}10^4-\frac{a}{b}10^2=22754$$

Factorizando

$$\frac{a}{b}\left(10^4-10^2\right)=22754$$

de donde

$$\frac{a}{b}=\frac{22754}{10^4-10^2}=\frac{22754}{9900}=\frac{11377}{4950}$$

$$\therefore \qquad \frac{a}{b}=\frac{11377}{4950}=2.29\overline{83}$$

18. Determinar el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2}+3x<-4x+\frac{1}{3}$$

Solución

Sumando $-1/2$ en ambos miembros de la desigualdad, se tiene

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+3x<-4x+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$3x<-4x-\frac{1}{6}$$

sumando $4x$ en ambos miembros

$$4x+3x<-4x-\frac{1}{6}+4x$$

$$7x<-\frac{1}{6}$$

multiplicando en ambos miembros por $\frac{1}{7}$, se tiene

$$\frac{1}{7}(7x)<\left(-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{7}$$

$$x<-\frac{1}{42}$$

por lo tanto, el conjunto de valores de x que satisfacen a la desigualdad planteada es

$$\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbb{R} \text{ con } x<-\frac{1}{42}\right\}$$

19. Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$, que satisface la siguiente desigualdad:

$$\frac{2x-1}{x+2} < 5$$

Solución

Dado que $x + 2$ tiene que ser diferente de cero para evitar la división entre cero, se considerarán los siguientes dos casos:

Caso 1: $x+2>0$
Caso 2: $x+2<0$

Resolviendo cada uno de los casos:

Caso 1: si $x+2>0 \Rightarrow x>-2$

Multiplicando ambos miembros de la desigualdad original por $x + 2$, y como se está considerando que $x+2$ es positivo, la relación de orden no cambia.

$$(x+2)\frac{2x-1}{x+2} < 5(x+2)$$

$$2x-1<5x+10$$

sumando $(-2x)$ en ambos miembros, se tiene

$$(-2x)+2x-1<5x+10+(-2x)$$

$$-1<3x+10$$

sumando -10 se tiene

$$-10-1<3x+10+(-10)$$

$$-11<3x$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$ en ambos miembros

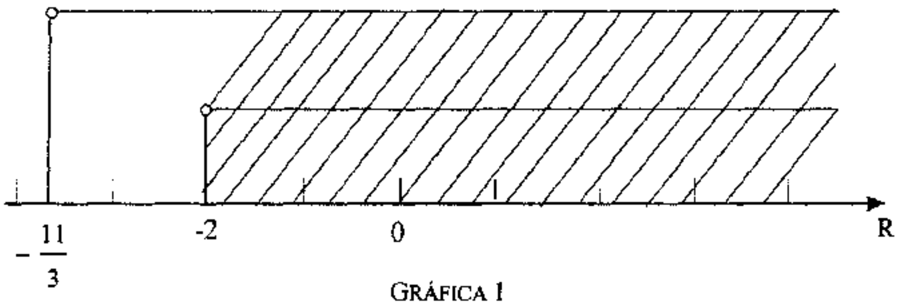
$$\frac{1}{3}(-11)<(3x)\frac{1}{3}$$

$$-\frac{11}{3}<x \Rightarrow x>-\frac{11}{3}$$

La solución del caso 1 se obtiene con la intersección de los conjuntos que definen las condiciones

$$x > -2 \text{ y } x > -\frac{11}{3}$$

Gráficamente



GRÁFICA 1

por lo que, la solución al caso 1 es

$$-2 < x < \infty$$

Caso 2 si $x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$

Multiplicando la desigualdad original por $x + 2$, la relación de orden cambia, dado que para este caso $x + 2$ se está considerando negativo.

$$(x+2)\frac{2x-1}{x+2} > 5(x+2)$$

$$2x - 1 > 5x + 10$$

sumando $(-2x)$ y (-10) en ambos miembros de la desigualdad, se tiene

$$(-2x) + 2x - 1 + (-10) > (-2x) + 5x + 10 + (-10)$$

$$-11 > 3x$$

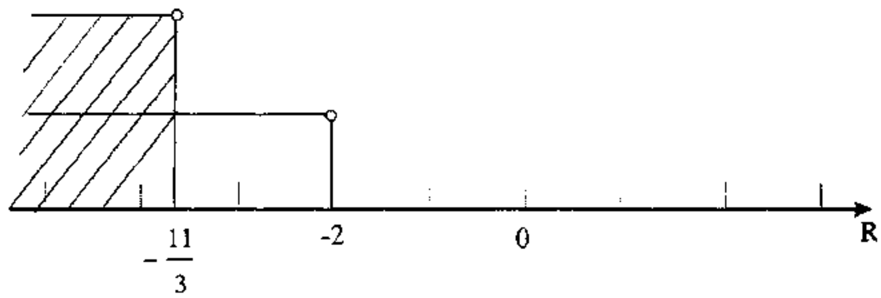
multiplicando por $\frac{1}{3}$, se tiene

$$\frac{1}{3}(-11) > (3x)\frac{1}{3}$$

$$-\frac{11}{3} > x \Rightarrow x < -\frac{11}{3}$$

la solución al caso 2 queda definida por las condiciones $x < -2$ y $x < -\frac{11}{3}$.

Gráficamente



GRÁFICA 2

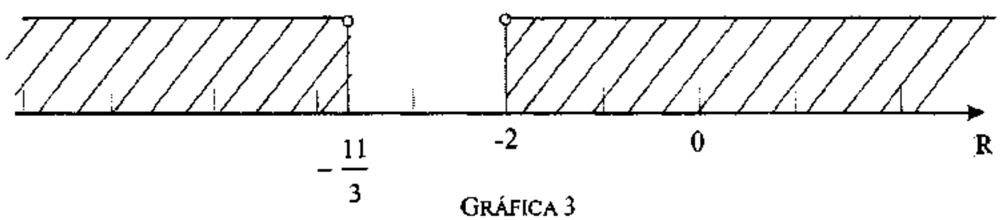
por lo que, la solución al caso 2 es

$$x < -\frac{11}{3}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la unión de los conjuntos solución de los dos casos considerados, esto es:

$$\left\{x \mid x < -\frac{11}{3},\, x \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{x \mid x > -2,\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

o bien gráficamente



GRÁFICA 3

20. Resolver la siguiente desigualdad:

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Solución

Expresando al polinomio de segundo grado en forma factorizada, se tiene

$$(x+1)(x-2) > 0$$

dado que el producto de factores debe ser positivo, se deben considerar los dos siguientes casos:

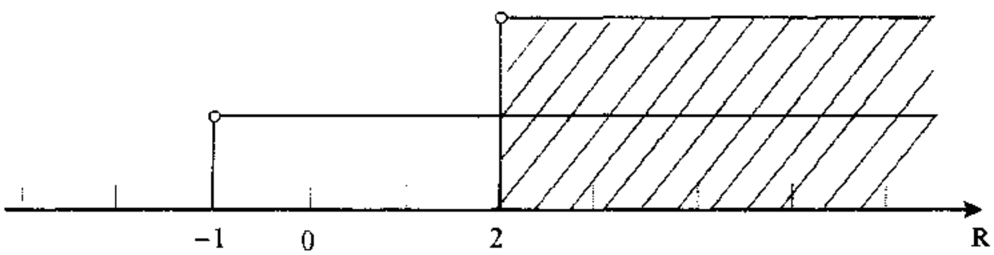
Caso 1: $x + 1 > 0$ y $x - 2 > 0$

de donde se tiene que

$$x > -1 \quad \text{y} \quad x > 2$$

por consiguiente, la solución al caso 1 será la intersección de ambas condiciones.

Gráficamente



GRÁFICA 4

por lo tanto, la solución al caso 1 es

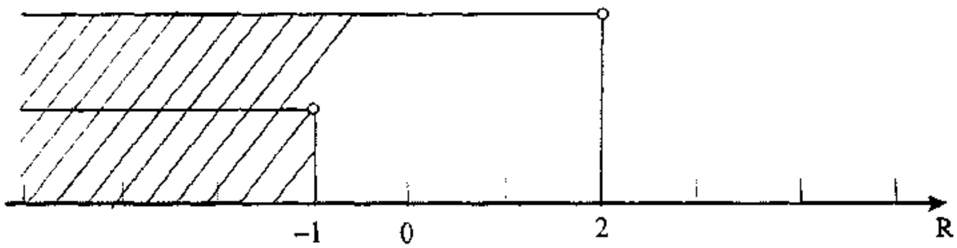
$$x > 2$$

Caso 2: $x + 1 < 0$ y $x - 2 < 0$

de donde:

$$x < -1 \quad \text{y} \quad x < 2$$

Definiendo la intersección de ambas condiciones, se tiene gráficamente:



GRÁFICA 5

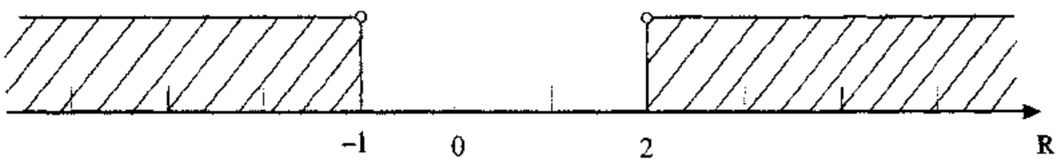
por lo que, la solución al caso 2 es

$$x < -1$$

En consecuencia, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la unión de las soluciones correspondientes a los dos casos, esto es

$$\{x \mid x < -1,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x > 2,\ x \in \mathbb{R}\}$$

o bien gráficamente



GRÁFICA 6

21. Resolver la siguiente desigualdad:

$$(3x+2)^2 < x(x-6)$$

Solución

Desarrollando en primera instancia el binomio y el producto indicado, se tiene

$$9x^2 + 12x + 4 < x^2 - 6x$$

sumando en ambos miembros $-x^2$ y $6x$, se obtiene

$$9x^2 + 12x + 4 - x^2 + 6x < 0$$

$$8x^2 + 18x + 4 < 0$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$4x^2 + 9x + 2 < 0$$

factorizando

$$(4x+1)(x+2) < 0$$

Dado que el producto de factores debe ser negativo, ahora se considerarán los siguientes casos:

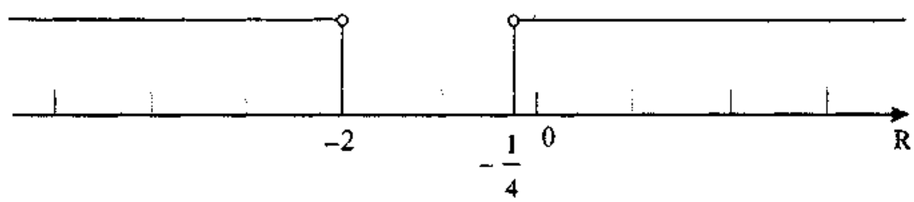
Caso 1: $4x+1 > 0 \quad \text{y} \quad x+2 < 0$

de donde:

$$x > -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad x < -2$$

La intersección es el conjunto vacío.

Gráficamente



GRÁFICA 7

por lo tanto, la solución al caso 1 es el conjunto vacío

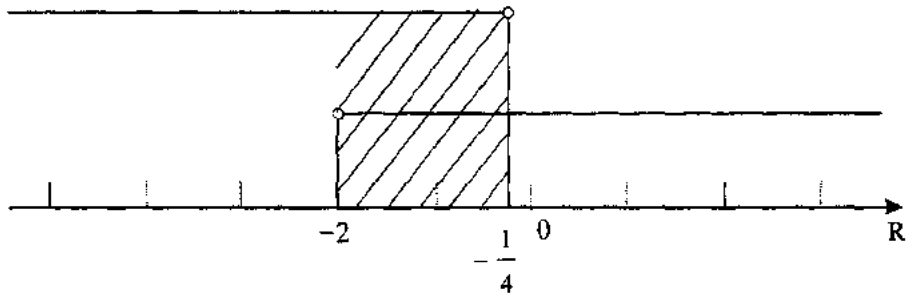
$$\phi$$

Caso 2 $4x+1 < 0 \quad \text{y} \quad x+2 > 0$

Entonces

$$x < -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad x > -2$$

por lo que, gráficamente



GRÁFICA 8

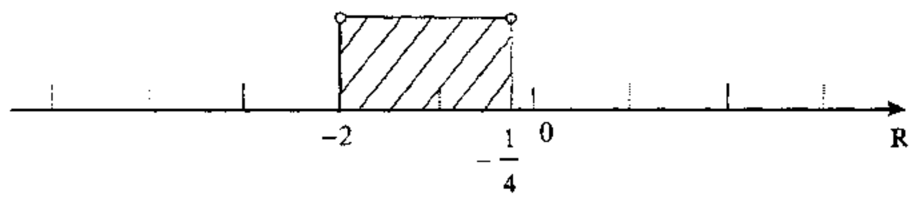
en consecuencia la solución al caso 2 es

$$-2 < x < -\frac{1}{4}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada será

$$\phi \cup \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R}, \quad -2 < x < -\frac{1}{4} \right\}$$

o bien gráficamente



GRÁFICA 9

22. Determinar el valor o los valores de $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la siguiente igualdad:

$$|x-2| = |3-2x|$$

Solución

Se consideran los siguientes casos:

Caso 1: $x-2=3-2x$

Caso 2: $x-2=-(3-2x)$

Caso 3: $-(x-2)=3-2x$

Caso 4: $-(x-2)=-(3-2x)$

Como se puede observar, la ecuación del caso 1 es equivalente a la del caso 4, al igual que la ecuación del caso 2 lo es con la del caso 3, por consiguiente, de los cuatro casos, sólo se considerarán dos de ellos (caso 1 y caso 2).

Caso 1 $\qquad x-2=3-2x$

sumando 2 en ambos lados

$$x=5-2x$$

de donde:

$$3x=5$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$

$$x=\frac{5}{3}$$

Caso 2 $\qquad x-2=-(3-2x)$

simplificando

$$x-2=-3+2x$$

agrupando términos, se tiene

$$3-2=2x-x$$

$$\Rightarrow \quad x=1$$

por lo que, los valores de x que satisfacen a la igualdad planteada son

$$x=\frac{5}{3} \qquad \text{y} \qquad x=1$$

23. Obtener el conjunto de valores de $x\in\mathbb{R}$, para los cuales se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left|x^2-16\right|>0$$

Solución

Como se puede observar, esta desigualdad se cumple para todo número real, excepto para 4 y –4, con los cuales el valor absoluto se hace cero. Para llegar a esta solución analíticamente se considerarán los siguientes dos casos:

Caso 1 $x^2 - 16 > 0$

Caso 2 $x^2 - 16 < 0$

Caso 1 $x^2 - 16 > 0$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados como un producto de binomios conjugados, se tiene:

$$(x+4)(x-4) > 0$$

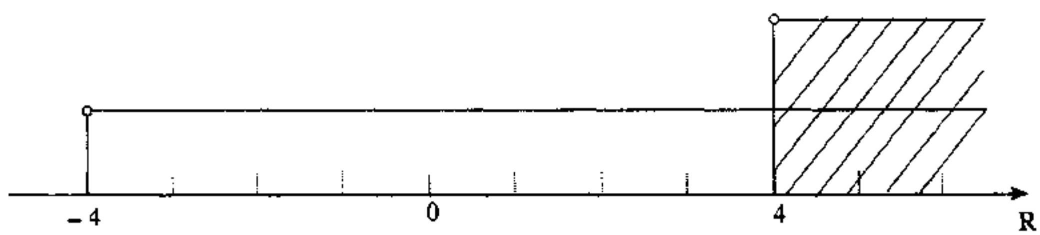
Resolviendo esta desigualdad en forma análoga a la planteada en el ejercicio resuelto número 20, se tiene:

a) Si $\quad x+4 > 0 \quad$ y $\quad x-4 > 0$

entonces

$$x > -4 \quad \text{y} \quad x > 4$$

de donde la solución a este inciso, será:



GRÁFICA 10

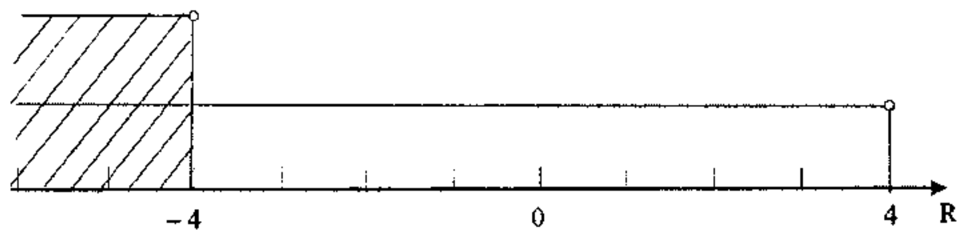
$$x > 4$$

b) Si $\quad x+4 < 0 \quad$ y $\quad x-4 < 0$

entonces

$$x < -4 \quad \text{y} \quad x < 4$$

de donde la solución a este inciso, será



GRÁFICA 11

$$x < -4$$

por lo tanto, la solución al caso 1, vendrá dada por la unión de las soluciones a los incisos a y b, esto es

$$\{x \mid x > 4,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x < -4,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Caso 2 $\qquad x^2 - 16 < 0$

Descomponiendo la diferencia de cuadrado

$$(x+4)(x-4) < 0$$

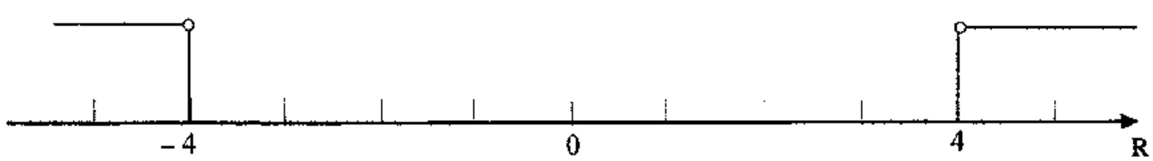
de donde se tiene

c) Si $\qquad x+4 < 0 \quad$ y $\quad x-4 > 0$

entonces

$$x < -4 \qquad \text{y} \qquad x > 4$$

por lo que, la solución a este inciso será el conjunto vacío, como puede observarse en la siguiente gráfica:



GRÁFICA 12

la intersección es

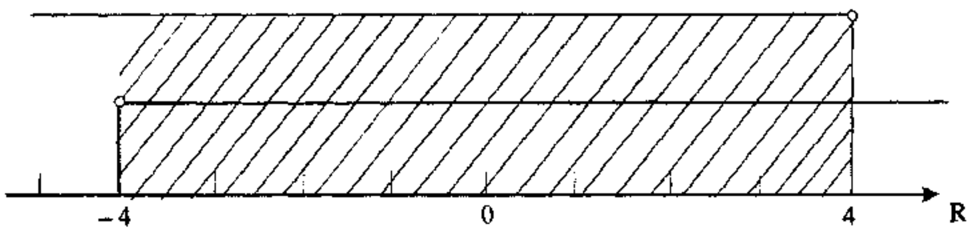
$$\phi$$

d) Si $\quad x+4>0 \quad$ y $\quad x-4<0$

entonces

$$x>-4 \quad \text{y} \quad x<4$$

por lo que, la solución a este inciso será



GRÁFICA 13

$$-4<x<4$$

de donde la solución al caso 2, vendrá dada por la unión de las soluciones a los incios c y d, esto es

$$\phi \cup \{x \mid -4<x<4,\ x \in \mathbb{R}\}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada viene dada por la unión de las soluciones de los casos 1 y 2, esto es

$$\{x \mid x<-4,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x>4,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid -4<x<4,\ x \in \mathbb{R}\}$$

lo cual se puede expresar como

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ con } x \neq 4 \text{ y } x \neq -4\}$$

24. Determinar el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se cumple la siguiente desigualdad:

$$-|3x-2|>-2$$

Solución

Al multiplicar en ambos miembros de la desigualdad por (–1), se tiene:

$$|3x-2| < 2$$

empleando una de las propiedades del valor absolulto se puede plantear la siguiente doble desigualdad:

$$-2 < 3x-2 < 2$$

Resolviendo la primera de ellas, se tiene

$$-2 < 3x - 2$$

de donde

$$0 < 3x$$

y por lo tanto

$$x > 0$$

Resolviendo la segunda desigualdad, se tiene

$$3x-2 < 2$$

de donde

$$3x < 4$$

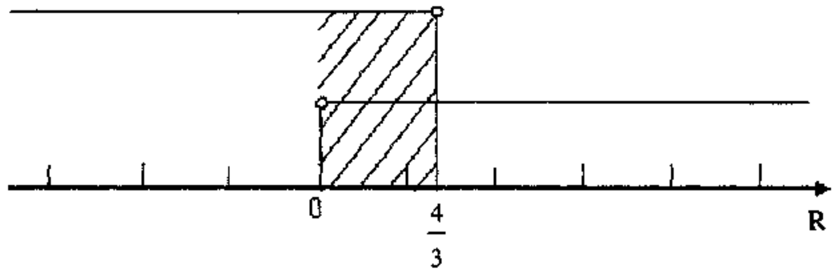
por lo tanto

$$x < \frac{4}{3}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la intersección de los conjuntos solución de la primera y segunda desigualdad, esto es

$$\{x \mid x>0,\ x\in\mathbb{R}\}\cap\left\{x \mid x<\frac{4}{3},\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

o bien, gráficamente



GRÁFICA 14

por lo tanto, el conjunto solución será

$$\left\{ x \middle| \, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad 0 < x < \frac{4}{3} \right\}$$

25. Resolver la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{x}{2} - 1 \right| \geq 5x + 1$$

Solución

Haciendo uso de una de las propiedades del valor absoluto, la desigualdad se puede plantear de la siguiente forma:

$$\frac{x}{2} - 1 \leq -(5x+1) \qquad \text{o} \qquad \frac{x}{2} - 1 \geq 5x + 1$$

Resolviendo la primera de estas desigualdades, se tiene

$$\frac{x}{2} - 1 \leq -5x - 1$$

sumando uno en ambos miembros

$$\frac{x}{2} \leq -5x$$

multiplicando en ambos miembros por dos, se tendrá

$$x \leq -10x$$

de donde

$$11x \leq 0$$

y por lo tanto

$$x \leq 0$$

Resolviendo la segunda desigualdad, se tiene

$$\frac{x}{2} - 1 \geq 5x + 1$$

sumando uno en ambos miembros

$$\frac{x}{2} \geq 5x + 2$$

multiplicando por dos en ambos miembros, se tiene

$$x \geq 10x + 4$$

sumando $(-x)$ y (-4) en ambos miembros, se obtiene

$$-4 \geq 9x$$

o bien

$$9x \leq -4$$

de donde

$$x \leq -\frac{4}{9}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada, vendrá dada por la unión de los conjuntos solución de las dos desigualdades resueltas, esto es

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x \leq 0\} \cup \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x \leq -\frac{4}{9}\right\}$$

que es el conjunto

$$\{x \mid x \leq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$$

26. Obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$|4x-1| < |2-x|$$

Solución

Resolviendo esta desigualdad por dos procedimientos distintos se tiene:

PRIMER PROCEDIMIENTO

Al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por el recíproco de $|2-x|$ con $x \neq 2$, se tendrá:

$$\frac{1}{|2-x|}|4x-1| < |2-x|\frac{1}{|2-x|}$$

simplificando

$$\frac{|4x-1|}{|2-x|} < 1$$

por propiedades del valor absoluto, se puede escribir

$$\left|\frac{4x-1}{2-x}\right| < 1$$

de donde se puede plantear la siguiente doble desigualdad:

$$\underbrace{-1 < \frac{4x-1}{2-x}}_{1^{a}\text{ desigualdad}} \quad \frac{4x-1}{2-x} < 1 \;\; (2^{a}\text{ desigualdad})$$

resolviendo la primera desigualdad, se tiene

Primera desigualdad

$$-1 < \frac{4x-1}{2-x}$$

Como se trata de un coeficiente donde aparece la variable en el denominador, se considerarán dos casos.

Caso 1 $\qquad 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$

Al multiplicar en ambos miembros de la desigualdad por $(2-x)$, se tendrá

$$(2-x)(-1) < \frac{4x-1}{2-x}(2-x)$$

simplificando

$$x-2 < 4x - 1$$

de donde se obtiene

$$3x > -1$$

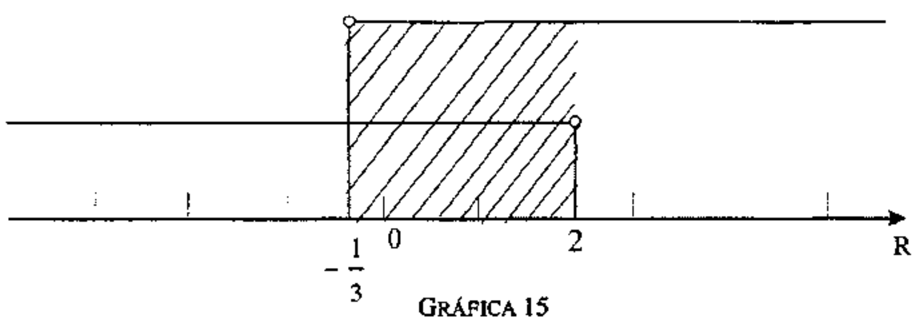
por lo tanto

$$x > -\frac{1}{3}$$

en consecuencia, la solución al caso 1 estará dada por por

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x < 2\} \cap \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x > -\frac{1}{3}\right\}$$

o bien, gráficamente:



GRÁFICA 15

por lo que, la solución al caso 1 es

$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

Caso 2 $\qquad 2-x < 0 \Rightarrow x > 2$

Multiplicando en ambos miembros de la desigualdad por $(2-x)$, se tendrá:

$$(2-x)(-1) > \frac{4x-1}{2-x}(2-x)$$

simplificando

$$x-2 > 4x - 1$$

de donde se obtiene

$$3x < -1$$

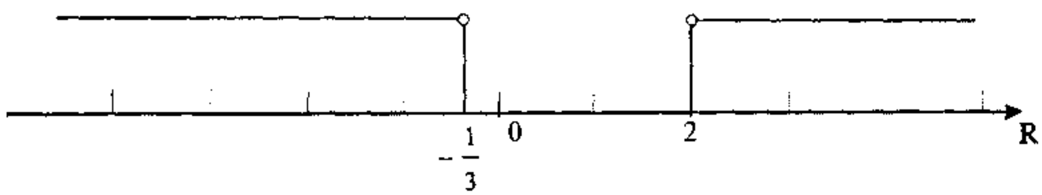
por lo tanto

$$x < -\frac{1}{3}$$

En consecuencia, la solución al caso 2 estará dada por

$$\{x | x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x > 2\} \cap \left\{x | x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x < -\frac{1}{3}\right\}$$

o bien, gráficamente



GRÁFICA 16

por lo que, la solución al caso 2 será el conjunto vacío

$$\phi$$

Dado que la solución a la primera desigualdad se obtiene con la unión de las soluciones al caso 1 y al caso 2, entonces se tiene

Solución a la primera desigualdad:

$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

Segunda desigualdad

$$\frac{4x-1}{-2-x} < 1$$

Al igual que para la primera desigualdad, se considerarán los siguientes dos casos:

Caso 1 $\qquad 2-x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x < 2$

Al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por $(2-x)$, se tendrá

$$(2-x)\frac{4x-1}{2-x} < 1(2-x)$$

simplificando

$$4x-1 < 2-x$$

de donde se obtiene

$$5x < 3$$

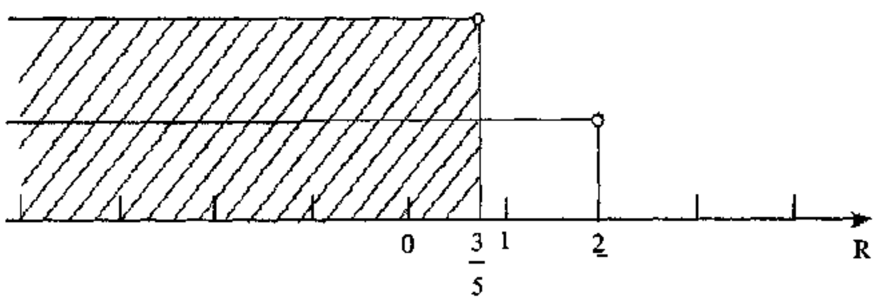
por lo tanto

$$x < \frac{3}{5}$$

En consecuencia, la solución al caso 1 de la segunda desigualdad será

$$\{x | x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x < 2\} \cap \left\{x | x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x < \frac{3}{5}\right\}$$

o bien, gráficamente:



GRÁFICA 17

por lo que, la solución al caso 1 es

$$x < \frac{3}{5}$$

Caso 2 Si $2-x < 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2$

Al multiplicar en ambos lados de la desigualdad por $(2-x)$, se tendrá

$$(2-x)\,\frac{4x-1}{2-x} > 1\,(2-x)$$

simplificando

$$4x-1 > 2-x$$

de donde se obtiene

$$5x > 3$$

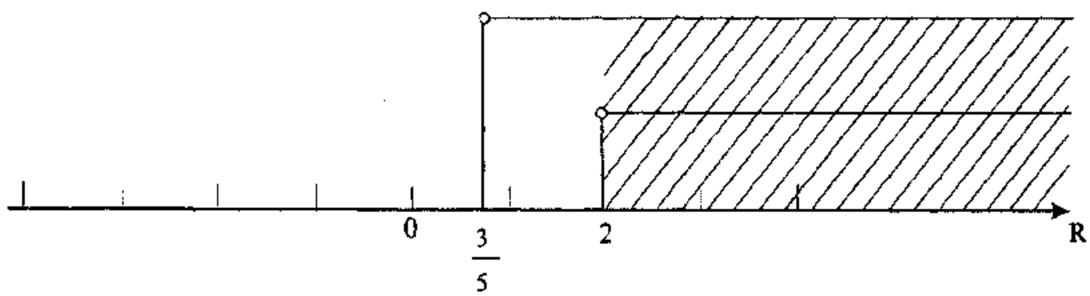
por lo tanto

$$x > \frac{3}{5}$$

En consecuencia la solución al caso 2 de la segunda desigualdad estará dada por

$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x > 2\} \cap \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x > \frac{3}{5}\right\}$$

o bien, gráficamente



GRÁFICA 18

por lo que, la solución al caso 2 es

$$x > 2$$

Dado que la solución a la segunda desigualdad está dada por la unión de las soluciones al caso 1 y al caso 2, entonces se tiene

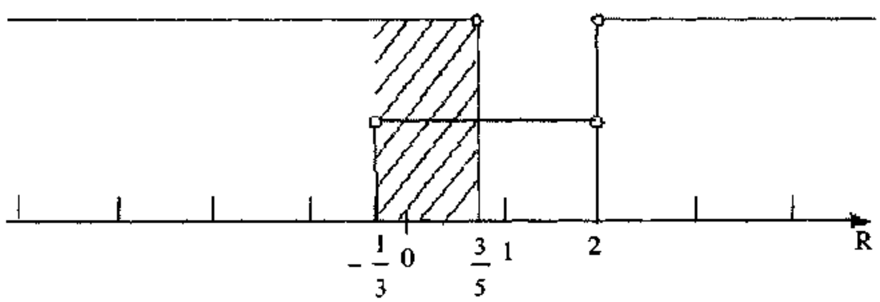
Solución a la segunda desigualdad

$$\left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(2, \infty\right)$$

Finalmente, se tiene que la solución a la desigualdad originalmente planteada, estará dada por la intersección de los conjuntos solución de la 1ª y 2ª desigualdad, esto es

$$\left(-\frac{1}{3}, 2\right) \cap \left(-\infty, \frac{3}{5}\right) \cup \left(2, \infty\right)$$

o bien, gráficamente



GRÁFICA 19

por lo tanto, la solución será:

$$\left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5} \right\}$$

Segundo procedimiento

La desigualdad a resolver es:

$$|4x - 1| < |2 - x|$$

Elevando al cuadrado en ambos miembros de la desigualdad la relación de orden de la misma no cambia. Es importante mencionar que esta aseveración es cierta solamente si en ambos miembros de la desigualdad se tienen valores absolutos, ya que se tienen cantidades positivas en ambos miembros, por lo que se tiene

$$|4x-1|^2 < |2-x|^2$$

por propiedades del valor absoluto se puede escribir

$$\left|(4x-1)^2\right| < \left|(2-x)^2\right|$$

dado que en ambos miembros de la desigualdad se tienen términos cuadráticos, éstos siempre serán positivos, por lo que los valores absolutos se pueden omitir, esto es

$$(4x-1)^2 < (2-x)^2$$

desarrollando los binomios, se tiene

$$16x^2-8x+1 < x^2-4x+4$$

de donde se obtiene

$$15x^2-4x-3 < 0$$

obteniendo las raíces

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{30}=\frac{4\pm 14}{30}=\begin{cases} x_1=\dfrac{3}{5} \\ \\ x_2=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

por lo que se puede escribir la desigualdad anterior en forma factorizada de la siguiente forma:

$$15\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0$$

multiplicando en ambos miembros por $\frac{1}{15}$, se tiene

$$\left(x-\frac{3}{5}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0$$

Para la solución de esta desigualdad se considerarán los siguientes dos casos:

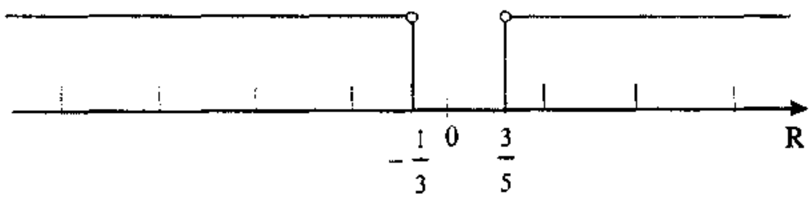
Caso 1 $\qquad x-\dfrac{3}{5}>0 \qquad y \qquad x+\dfrac{1}{3}<0$

Entonces

$$x > \frac{3}{5} \qquad y \qquad x < -\frac{1}{3}$$

de donde la solución al caso 1 estará dada por la intersección de ambas condiciones.

Gráficamente



GRÁFICA 20

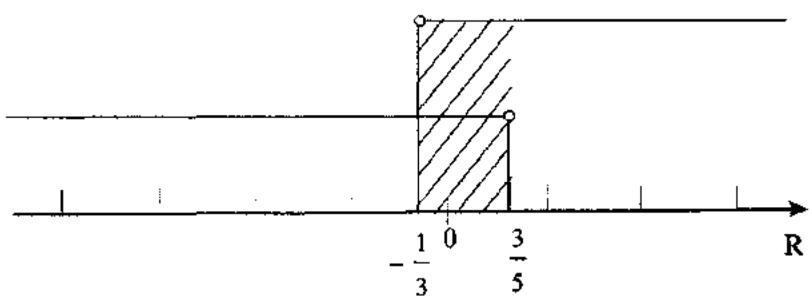
por lo que la solución para este caso es ϕ.

Caso 2 $\qquad x-\dfrac{3}{5}<0 \qquad y \qquad x+\dfrac{1}{3}>0$

Entonces

$$x < \frac{3}{5} \qquad y \qquad x > -\frac{1}{3}$$

definiendo gráficamente la intersección de ambas condiciones, se tiene



GRÁFICA 21

por lo que, la solución al caso 2 es

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5}$$

En consecuencia, la solución a la desigualdad originalmente planteada, estará dada por la unión de las soluciones a los dos casos, esto es

$$\phi \cup \left\{ x \middle| \, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5} \right\}$$

o bien

$$\left\{ x \middle| \, x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5} \right\}$$

Resultado que coincide con el del primer procedimiento.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean los conjuntos

   $A=\{-17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5\}$

   $B=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

   $C=\{\ldots -17, -16, -15, -14, -13, -12, -11, -10, -9, -8, -7, -6\}$

   $D=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$

   Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

   a) $A \cap B = B \cap C$

   b) $A \cup D = (A \cap C) \cup B$

   c) $(A - C) \cup (C \cup D) = A \cup B$

   d) $A \cup C = (B \cup D)'$

2. Con los siguientes conjuntos:

   $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

   $B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

   $C=\{x \mid x \text{ es una vocal}\}$

   $U = A \cup B \cup C$

   Obtener

   a) $(A \cup C)' \cap B$

   b) $(A \cap C) \cup B$

   y, representar la respuesta empleando diagramas de Venn.

3. Dados los siguientes conjuntos:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$

$B=\{\{3\},\{4\},\{5\}\}$

$C=\{\{3,4,5,6,7,8,9\}\}$

$D=\{\,p,\;$ tal que p es un entero positivo mayor que 2 y menor que $10\}$

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

Justificar las respuestas.

a) $A \in C$

b) $\{3\} \in A$

c) $B \in D$

d) $C = D$

e) $A \subset D$

f) $A = D$

g) $D \notin C$

h) $\{3, 4\} \subseteq D$

i) $A \subseteq C$

j) $A \cap B = \phi$

4. Sean los conjuntos de números N, Z, Q, Q' y $\mathbb{R}$. Considerando el conjunto $\mathbb{R}$ como el conjunto universo, determinar el resultado de:

$$\left[(\mathbb{R}-Q')\cap(Z-N)\right]\cup\left[(\mathbb{R}\cap Z)-(Q'-N)\right]\cup\left[(Q'\cup Q)-(Z\cap N)\right]$$

5. Indicar con una V si la afirmación es verdadera o con una F si es falsa.

a) Si $a \in Z$, entonces $a \in Q$ .... ( )

b) $N \in \mathbb{R}$ .... ( )

c) $\{0\} = \phi$ .... ( )

d) $Z \subseteq Q$ .... ( )

e) $Q \cap Q' \notin \mathbb{R}$ .... ( )

6. En las siguientes proposiciones indicar mediante una V si dichas propuestas son ciertas o con una F en caso de ser falsas.

a) $\mathbb{R} - Q' = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$ .... (   )

b) $Q \cap Q' = \mathbb{R}$ .... (   )

c) $Q \subseteq Z$ .... (   )

d) $Z - Z' = N$ .... (   )

e) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ .... (   )

f) $|x| = x \Leftrightarrow x < 0$ .... (   )

g) $(A \cap B)' = (A - B)' \cup (A - C)'$ .... (   )

h) $\pi \notin Q$ .... (   )

i) $Q \cup \phi = \phi$ .... (   )

j) $(A')' = A$ .... (   )

7. El origen del juego de ajedrez es muy incierto. La hipótesis más difundida es que fue en la India donde se inventó. Aunada a esta teoría existe una leyenda en cuanto a un premio que el rey hindú Sheram o Shirham, insistió que el inventor recibiese por su genial creación. La recompensa solicitada consistía en una cierta cantidad de granos de trigo calculada de la siguiente manera: un grano de trigo en el primer cuadro, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, y así sucesivamente hasta completar los sesenta y cuatro cuadros. La leyenda habla del desaliento del monarca al escuchar semejante petición que, por *modesta*, era indigna de su generosidad. No obstante su disgusto, ordenó a sus matemáticos el cálculo de la cantidad demandada para proceder a su pago. La leyenda termina con la narración del tiempo extraordinario que utilizaron los sabios para dicho cálculo y de la sorpresa del soberano al no poder pagar su deuda. Mucho se ha hablado de la cantidad fabulosa de trigo que se necesitaría para cubrir tal petición; para no repetir lo que se ha escrito, solamente se indicará que el número de granos era de

$2^{64} - 1$, es decir 18 446 744 073 709 551 615 granos.

Si se considera que un metro cúbico de trigo tiene un promedio de quince millones de granos y que la producción promedio anual de México es de 2 650 000 toneladas (Agenda estadística 1979, SPP), nuestro país necesitaría de aproximadamente 464 años de producción para pagar.

Pero, dejando a un lado la leyenda y enfocando la atención en lo matemático, seguramente si los sabios de aquella época hubieran conocido el método de inducción matemática y hubieran observado el comportamiento de la suma de los granos en los primeros cuadros, hubieran podido establecer y demostrar la expresión siguiente, que le pudo dar el resultado para $n = 64$ o aun para todo número natural.

$$1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$$

Como ejercicio, se pide demostrar la validez de esta expresión.

8. Utilizando el método de inducción matemática, demostrar:

a) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\dfrac{n\left(n+1\right)\left(6n^3+9n^2+n-1\right)}{30}$; $\forall\ n\in N$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ para $n>2$; $n\in N$

c) $\cos n\pi=\left(-1\right)^n$; $\forall n\in N$

d) $\left(a+x\right)^n=a^n+na^{n-1}x+\ldots+\dfrac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-r+2\right)}{\left(r-1\right)!}a^{n-r+1}x^{r-1}+\ldots+x^n$; $\forall\ n\ \in\ N$

e) $1\cdot3+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\ldots+n\cdot3^n=\dfrac{\left(2n-1\right)\cdot3^{n+1}+3}{4}$; $\forall\ n\in N$

f) $2a+4a+6a+\ldots+2na=n\left(n+1\right)a$; $\forall\ n\in N\quad a\in\mathbb{R}$

g) $3\cdot1\cdot2+3\cdot2\cdot4+3\cdot3\cdot4+\ldots+3n\left(n+1\right)=n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$; $\forall\ n\in N$

h) $1-4+9-16+\ldots+\left(-1\right)^{n+1}n^2=\left(-1\right)^{n+1}\left(1+2+3+\ldots+n\right)$; $\forall\ n\in N$

i) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\left(n+1\right)=\dfrac{1}{3}n\left(n+1\right)\left(n+2\right)$; $\forall\ n\in N$

j) $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\ldots+\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)=\dfrac{1}{3}n\left(4n^2+6n-1\right)$; $\forall\ n\in N$

k) $\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\ldots+\dfrac{1}{\left(3n-1\right)\left(3n+2\right)}=\dfrac{n}{6n+4}$; $\forall\ n\in N$

l) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$; $\forall\ n\in N$

m) $1\cdot5+5\cdot9+9\cdot13+\ldots+\left(4n-3\right)\left(4n+1\right)=\dfrac{1}{3}n\left(16n^2+12n-13\right)$; $\forall\ n\in N$

n) $1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^{n-1}=1+\left(n-1\right)\cdot2^n$; $\forall\ n\in N$

o) $\left(-1\right)^1+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^3+\ldots+\left(-1\right)^n=\dfrac{\left(-1\right)^n-1}{2}$; $\forall\ n\in N$

p) $a+\left(a+d\right)+\left(a+2d\right)+\ldots+\left[a+\left(n-1\right)d\right]=\dfrac{n\left[2a+\left(n-1\right)d\right]}{2}$;

$\forall\ n\in N\quad a,d,\in\mathbb{R}$

9. Demostrar por inducción matemática que $10^{n+1}+3\bullet 10^{n}+5$ es divisible entre 9 para todo $n\in N$.

10. Demostrar, por inducción matemática, que un polígono de n lados tiene exactamente un número de diagonales igual a

$$D=\frac{1}{2}n\left(n-3\right) \quad ; \quad \forall\, n>3, \quad n\in N$$

11. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática

$$\text{Si } a\neq 1 \text{ entonces } 1+a+a^{2}+\ldots+a^{n-1}=\frac{a^{n}-1}{a-1} \quad ; \quad \forall\, n\in \mathbb{N}$$

12. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática

$$\frac{1}{(1)(2)(3)}+\frac{1}{(2)(3)(4)}+\frac{1}{(3)(4)(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \quad ; \quad \forall\, n\in \mathbb{N}$$

13. Demostrar, utilizando el método de inducción matemática que

$$\text{Si } n\in N, \text{ entonces } \frac{2}{3}\left(2n^{3}+3n^{2}+n\right)\in N$$

14. Demostrar, por inducción matemática que, para todo

$$n\in N,\ a^{n}<b^{n} \ \text{ si } \ a,b,\in \mathbb{R} \ \text{ tales que } \ 0<a<b$$

15. Demostrar, utilizando inducción matemática, que:

$$\cos x\bullet \cos 2x\bullet \cos 4x\bullet\ldots\bullet \cos 2^{n-1}x=\frac{\operatorname{sen} 2^{n}x}{2^{n}\operatorname{sen} x} \quad ; \quad \forall\, n\in \mathbb{N}$$

16. Demostrar la siguiente desigualdad, llamada la *desigualdad de Bernoulli*, utilizando inducción matemática

$$\left(1+\ell\right)^{n}>1+n\ell$$

donde

$$n\geq 2,\ n\in N;\ \ell>1,\ \ell\in \mathbb{R}$$

17. Para cada uno de los siguientes incisos, obtener un par de valores $a, b \in Z$, tales que:

a) $\dfrac{a}{b} = 2.272727\ldots = 2.\overline{27}$

b) $\dfrac{a}{b} = 3.936936\ldots = 3.\overline{936}$

c) $\dfrac{a}{b} = 35.88533\ldots = 35.885\overline{33}$

18. Para cada una de las siguientes desigualdades, obtener el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$, que las satisfacen.

a) $\dfrac{1}{x+4} > 0$

b) $\dfrac{4-x}{x} + 6 > 14$

c) $\dfrac{4}{x-3} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{3-x}$

d) $\dfrac{3}{x+2} < \dfrac{2}{x-3}$

e) $\dfrac{x}{8} < \dfrac{2}{x}$

f) $0 > x^2 + 4x$

g) $(3x-1)(2x-4) > (3x-1)(x+5)$

h) $|x+9| = |6-2x|$

i) $|2x-3| = 4-x$

j) $\left|\sqrt{2x}\right| < 4$

k) $\left|\dfrac{20}{x}\right| - 5 < 0$

l) $|x+2| \leq 4$

m) $\dfrac{2}{|x-1|} \leq 1$

n) $\left|\dfrac{2}{1+x}\right| \geq 1$

o) $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| < 6$

p) $|x+1| < x$

q) $|3-2x| < |2+x|$

r) $|5-3x|>|1+x|$

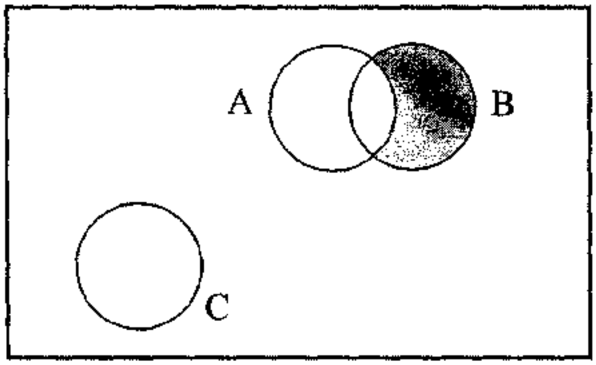
s) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}>2$

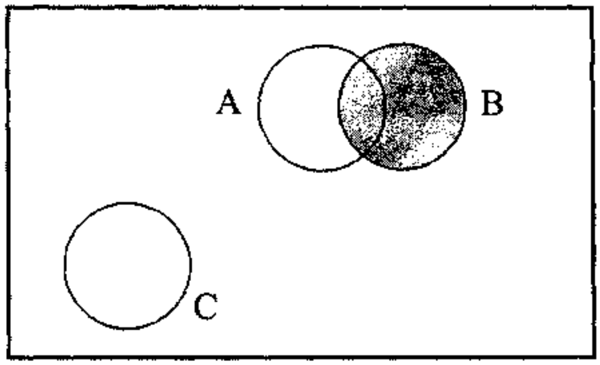
t) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}>0$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) V
   b) F
   c) F
   d) V

2. a) $\left(A\cup C\right)'\cap B=\{2,\,4\}$ b) $\left(A\cap C\right)\cup B=\{1,\,2,\,3,\,4,\,5\}=B$





3. a) V
   b) F
   c) F
   d) F
   e) V
   f) V
   g) F
   h) V
   i) F
   j) V

4. a) $\mathbb{R}$

5. a) V
   b) F
   c) F
   d) V
   e) V

6. a) V
   b) F
   c) F
   d) F
   e) F
   f) F
   g) F

h) V
i) F
j) V

17. a) $\frac{75}{33}$
b) $\frac{437}{111}$
c) $\frac{13\,457}{375}$

18. a) $x > -4$
b) $0 < x < \frac{4}{9}$
c) $\{x \mid x < 3,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x > 5,\ x \in \mathbb{R}\}$
d) $\{x \mid x < -2,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid 3 < x < 13,\ x \in \mathbb{R}\}$
e) $\{x \mid x < -4,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid 0 < x < 4,\ x \in \mathbb{R}\}$
f) $-4 < x < 0$
g) $\left\{x \mid x < \frac{1}{3},\ x \in \mathbb{R}\right\} \cup \{x \mid x > 1,\ x \in \mathbb{R}\}$
h) $x = -1$ o $x = 15$
i) $x = -1$ o $x = \frac{7}{3}$
j) $0 \le x < 8$
k) $\{x \mid x < -4,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x > 4,\ x \in \mathbb{R}\}$
l) $-6 \le x < 2$
m) $\{x \mid x \le -1,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x \ge 3,\ x \in \mathbb{R}\}$
n) $-3 \le x < -1$
o) $\left\{x \,\middle|\, x < -\frac{1}{3},\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \,\middle|\, > \frac{1}{9},\ x \in \mathbb{R}\right\}$
p) ϕ

q) $\frac{1}{3} < x < 5$
r) $3 < x < 1$ o $\{x \mid x < 1,\ x \in \mathbb{R}\} \cup \{x \mid x > 3,\ x \in \mathbb{R}\}$
s) $\frac{11}{4} < x < 3$
t) $\{x \mid x > 0,\ x \in \mathbb{R}\}$

CAPÍTULO 2

NÚMEROS COMPLEJOS

El primer asomo de la raíz cuadrada de un número negativo se presentó en la *stereometría de Herón de Alejandría* (año 50), y más tarde en la *aritmética de Diofanto* (año 275).

La historia de los números complejos ha ocasionado reacciones muy encontradas en quienes, a través de los tiempos, han tenido contacto con ellos.

Así se encuentra la negación de su existencia en Mahavira (año 850) y Bhaskara (año 1150), ante la imposibilidad de tener un número real que al elevarse al cuadrado diera como resultado un número negativo.

Pero ante la necesidad de crear unos números que respondieron a la verificación de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + c = 0$, muchos estudiosos de la ciencia de las formas y de los números se dedicaron a este problema. Entre ellos están Gerolamo Cardano (1501-1576), Raphael Bombelli (1572), Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y William Rowan Hamilton (1805-1865).

Al hablar de *términos y símbolos*, Cardano habló de soluciones de la forma $5+\sqrt{-15}$ como *cantidades sofisticadas*; Bombelli llamó a los números $+\sqrt{-n}$ y $-\sqrt{-n}$ como *piu di meno* y *meno di meno*; y fue Descartes (1637) quien contribuyó con los términos *real* e *imaginario.* Muchos de los escritores de los siglos XVII y XVIII hablaron de expresiones $a+b\sqrt{-1}$ como cantidades imaginarias. A Gauss se debe el nombre de *números complejos*, y el uso de i para $\sqrt{-1}$ se le reconoce a Euler en 1748. Cauchy sugirió los términos *conjugados* para $a+bi$ y $a-bi$ y módulo para $\sqrt{a^2+b^2}$. Weierstrass utilizó el término *valor absoluto* y lo representó con $|a+bi|$, y Gauss bautizó a $\sqrt{a^2+b^2}$ como *norma.*

Fue asombroso constatar que el número i, no era natural, tampoco positivo, negativo, fraccionario, algebraico o trascendente. En una palabra, no era real. Se sabía que todos los números reales podían ser representados por puntos situados sobre una recta, pero el número i no figuraban ahí. La representación gráfica de estos *números complejos* se debe a Wallis, Kuhn, Wessel, Truel, Buée, J. R. Argand, Gauss, Français y Warren.

La fórmula, $e^{i\pi}=-1$ atribuida a De Moivre (1667-1757) y a Euler (1707-1783), asombro del mundo matemático pues relaciona la unidad de los números imaginarios, i, con la unidad de los reales, 1, y los números trascendentes cargados de historia e y π. Esta expresión está grabada sobre una puerta del museo *El palacio del descubrimiento* en París.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean los números complejos

$$z_1 = 1 - i, \qquad z_2 = -1 + i, \qquad z_3 = -i, \qquad z_4 = 1, \qquad z_5 = 2 - i$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5}$

b) $\dfrac{z_3 z_4 - z_2}{\left(z_1 z_5 - z_3\right)^2}$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right)$

Solución

a) Sustituyendo valores

$$\frac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5} = \frac{(-i)^2 - 1}{(1-i)(-1+i) - (2-i)}$$

como $(-i)^2 = -1$ y $(1-i)(-1+i) = 2i$, entonces se tiene

$$\frac{-1-1}{2i - (2-i)} = \frac{-2}{-2+3i}$$

para efectuar la división se multiplicará numerador y denominador por el conjugado del denominador, entonces

$$\frac{-2}{-2+3i} \bullet \frac{-2-3i}{-2-3i} = \frac{4+6i}{4+6i-6i-9i^2} = \frac{4+6i}{4+9} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}\,i$$

por tanto

$$\frac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}\,i$$

b) Sustituyendo valores y desarrollando se tiene

$$\frac{z_3z_4 - z_2}{\left(z_1z_5 - z_3\right)^2} = \frac{(-i)(1)-(-1+i)}{\left[(1-i)(2-i)-(-i)\right]^2} = \frac{-i+1-i}{\left(2-i-2i+i^2+i\right)^2}$$

como $i^2 = -1$ entonces

$$\frac{z_3z_4 - z_2}{\left(z_1z_5 - z_3\right)^2} = \frac{1-2i}{(1-2i)^2} = \frac{1-2i}{(1-2i)(1-2i)} = \frac{1}{1-2i}$$

multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador

$$\frac{z_3z_4 - z_2}{\left(z_1z_5 - z_3\right)^2} = \frac{1}{1-2i} \bullet \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+2i}{1-4i^2} = \frac{1+2i}{5}$$

por tanto

$$\frac{z_3z_4 - z_2}{\left(z_1z_5 - z_3\right)^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right) = \dfrac{1-i}{-1+i} - \left(-i-1+2-i\right) = \dfrac{1-i}{-1+i} - \left(1-2i\right)$

efectuando la división se tiene

$$\frac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right) = \frac{1-i}{-1+i} - (1-2i) =$$

$$= \frac{1-i}{-(1-i)} - (1-2i)$$

$$= -1 - (1-2i)$$

$$\frac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right) = -1 - 1 + 2i = -2 + 2i$$

por tanto

$$\frac{z_1}{z_2} - \left(z_3 - z_4 + z_5\right) = -2 + 2i$$

2. Transformar el número $z = 2 + 4i$ a la forma polar.

Solución

$$r = \sqrt{2^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{2} = \text{ang tan } 2$$

$$= 63.4349°$$

es decir

$$(63.4349 - 63) \times 60 = 26.0969'$$

finalmente

$$(26.0969 - 26) \times 60 = 5.82''$$

entonces

$$\theta = 63°26'5.82''$$

$$z = \sqrt{20} \text{ cis } 63°26'5.82''$$

3. Transformar el número $z = 3 + 4i$ a la forma trigonométrica.

Solución

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = 5$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{3} =$$

$$\theta = 53.13°$$

finalmente

$$z = 5 \text{ cis } 53.13°$$

4. Transformar el número $z = -3 + 4i$ a la forma polar o trigonométrica.

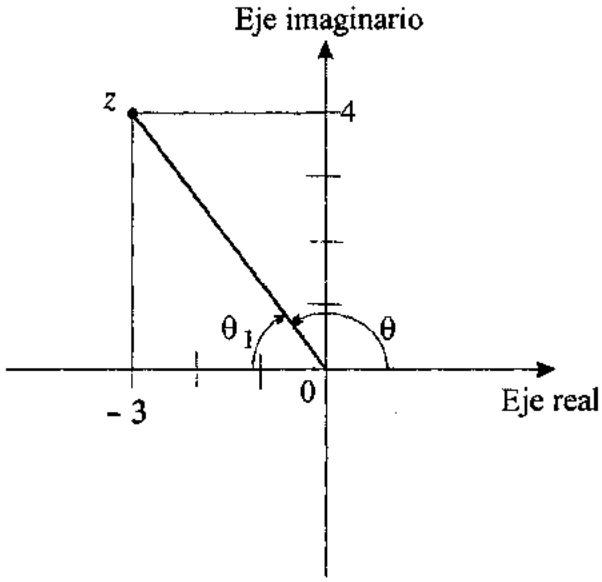
Solución

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$r = \sqrt{9+16}$$

$$r = 5$$

Para calcular el argumento de este número, es necesario observar que su representación en el diagrama de Argand se localiza en el segundo cuadrante



si se intenta obtener este argumento con una calculadora, se tiene:

$$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{4}{-3} = -53.13°$$

Esto se debe a que las calculadoras sólo dan el resultado de esta función con variaciones entre – 90° y 90°. Entonces, el resultado dado por la calculadora es el ángulo θ_1 mostrado en la figura y el argumento principal es

$$\theta = 180° - 53.13°$$

$$= 126.87°$$

donde

$$z = 5 \text{ cis } 126.87°$$

5. Transformar el número $z = -3 - 4i$ a la forma polar.

Solución

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$r = 5$$

$$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{-4}{-3} = 53.13°$$

Sin embargo, el número complejo z tiene abscisa y ordenada negativas, lo cual significa que su representación en el diagrama de Argand se localiza en el tercer cuadrante, entonces

$$\theta = 180° + 53.13°$$

$$= 233.13°$$

$$\therefore z = 5 \text{ cis } 233.13°$$

6. Transformar el número $z = 3 - 4i$ a la forma polar.

Solución

$$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$r = 5$$

$$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{-4}{3} = -53.13°$$

Este resultado se obtuvo con calculadora, pero el número z se localiza en el cuarto cuadrante del diagrama de Argand, por tener abscisa positiva y ordenada negativa, así que el valor del argumento principal es:

$$\theta = 360° - 53.13°$$
$$\theta = 306.87°$$

entonces

$$z = 5 \text{ cis } 306.87°$$

7. Transformar el número $z = 2 \text{ cis } 60°$ a la forma binómica o algebraica.

Solución

$$a = 2 \cos 60° = 1$$
$$b = 2 \text{ sen } 60° = \sqrt{3}$$

entonces

$$z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

8. Transformar el número $z = \sqrt[3]{2} \text{ cis } 202.5°$ a la forma binómica.

Solución

$$a = \sqrt[3]{2} \cos 202.5° = -1.16$$

$$b = \sqrt[3]{2} \text{ sen } 202.5° = -0.48$$

finalmente

$$z = -1.16 - 0.48i$$

Como puede observarse, el argumento principal de este número es 202.5°; es decir, su representación geométrica se localiza en el tercer cuadrante, lo cual se comprueba al obtener los valores de a y b negativos.

9. Transformar el número $z = 4 \text{ cis } 720°$ a la forma algebraica.

Solución

$$a = 4 \cos 720° = 4$$

$$b = 4 \text{ sen } 720° = 0$$

$$\therefore z = 4$$

Obsérvese que el argumento 720° no es el principal de este número. Al restarle 2×360 al argumento, da como resultado 0° como argumento principal, esto indica que su representación geométrica está sobre el eje real y se trata de un número real.

10. Efectuar las siguientes operaciones y expresar el resultado en la forma trigonométrica

$$\frac{4\overline{z}_1 \bullet z_2^2}{z_3 + z_4}$$

si $\quad z_1 = i \qquad z_3 = \sqrt{8} \text{ cis } 45°$

$\qquad z_2 = 3 + i \qquad z_4 = 5 \text{ cis } 0°$

Solución

Para obtener el numerador de la fracción pedida se tiene

$$\overline{z}_1 = -i$$

$$z_2^2 = (3+i) \bullet (3+i) = 9 + 6i + i^2$$

$$= 8 + 6i \text{ dado que } i^2 = -1$$

es decir

$$4\overline{z}_1 \bullet z_2^2 = (-4i) \bullet (8+6i)$$

$$= -32i - 24i^2$$

$$= 24 - 32i$$

Por otra parte, dado que en el denominador se debe realizar una suma, se procede a convertir los números a la forma binómica

Para $\quad z_3$: $\qquad a = \sqrt{8} \cos 45° = \sqrt{8}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}}$

$$a = 2$$

$$b = \sqrt{8} \text{ sen } 45°$$

$$b = 2$$

$$\therefore z_3 = 2 + 2i$$

Para $\quad z_4$: $z_4 = 5$, pues el argumento es cero y ello indica que se trata de un número real.

Entonces

$$z_3 + z_4 = 2 + 2i + 5 = 7 + 2i$$

finalmente

$$\frac{4\overline{z}_1 \cdot z_2^2}{z_3 + z_4} = \frac{24 - 32i}{7 + 2i}$$

$$= \frac{24 - 32i}{7 + 2i} \cdot \frac{7 - 2i}{7 - 2i} =$$

$$= \frac{168 - 224i - 48i + 64i^2}{49 - 4i^2}$$

entonces

$$\frac{4\overline{z}_1 \cdot z_2^2}{z_3 + z_4} = \frac{104 - 272i}{53} = R$$

Para expresar el resultado R en la forma polar

$$r = \sqrt{\left(\frac{104}{53}\right)^2 + \left(\frac{-272}{53}\right)^2} = 5.47$$

$$\theta = 360° - \text{ang tan} \frac{\frac{272}{53}}{\frac{104}{53}} = 290.92°$$

$$\therefore R = 5.47 \text{ cis } 290.92°$$

11. Sea la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, determinar y demostrar una fórmula que permita elevar esta unidad a cualquier exponente par.

Solución

Si se eleva i al cuadrado

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

ahora, al elevarlo a la cuarta potencia

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

a la sexta potencia

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$

Como la tendencia al parecer, es la alternación de signos, se puede suponer que la expresión buscada es

$$i^{2n} = (-1)^n \; ; \qquad \forall n \in N$$

Para efectuar su demostración, se utilizará inducción matemática:

Verificación para $n = 1$

$$i^{2(1)} = (-1)^1$$

$$i^2 = -1 \therefore \text{ sí se cumple.}$$

Se supone válida la expresión para $n = k$

$$i^{2k} = (-1)^k \qquad \text{hipótesis de inducción}$$

Debe cumplirse para $n = k + 1$

$$i^{2(k+1)} = (-1)^{k+1} \qquad \text{tesis}$$

Si en la hipótesis, supuestamente válida, se multiplica en ambos miembros por i^2, seguirá siendo válida

$$i^{2k} \cdot i^2 = (-1)^k \cdot i^2$$

Por leyes de los exponentes

$$i^{2k+2} = (-1)^k \cdot i^2$$

$$i^{2(k+1)} = (-1)^k \cdot i^2$$

pero $i^2 = -1$ como se comprobó

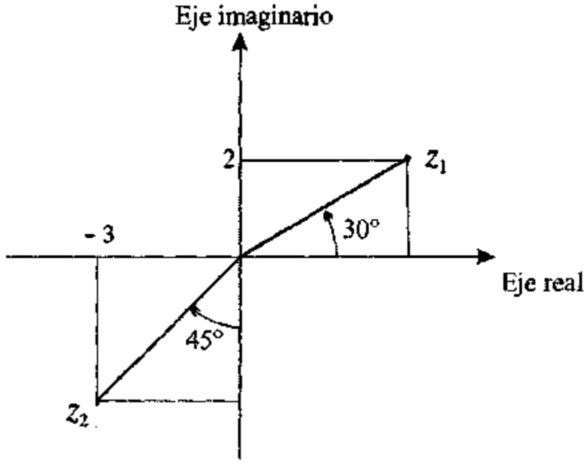
$$i^{2(k+1)} = (-1)^k \cdot (-1)$$

por leyes de los exponentes

$$i^{2(k+1)} = (-1)^{k+1}$$

Q.E.D.

12. Obtener en forma trigonométrica el resultado de $z_1 \cdot z_2$, donde z_1 y z_2 son los números complejos que se muestran en la siguiente figura:



Solución

En la figura se observa

Para z_1:

$$\theta_1 = 30°$$

Se tiene que

$$\text{sen } 30° = \frac{2}{r_1}$$

$$r_1 = \frac{2}{\text{sen } 30°} = 4$$

$$\therefore z_1 = 4 \text{ cis } 30°$$

para z_2:

$$\theta_2 = 270° - 45° = 225°$$

$$r_2 = \frac{3}{\text{sen } 45°} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore z_2 = 3\sqrt{2} \text{ cis } 225°$$

entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2) \\ &= (4)\left(3\sqrt{2}\right) \text{ cis } (30° + 225°) \\ &= 12\sqrt{2} \text{ cis } 255° \end{aligned}$$

13. Determinar un número complejo z, tal que multiplicado por $\sqrt{2}$ cis 315° sea igual a uno.

Solución

Si se hace $z = x + yi$ y como $\sqrt{2}$ cis $315° = 1 - i$, entonces se plantea la siguiente ecuación

$$(1 - i)(x + yi) = 1 + 0i$$

efectuando el producto

$$x + yi - ix - yi^2 = 1 + 0i$$

agrupando

$$(x + y) + (-x + y)\, i = 1 + 0i$$

por igualdad de complejos se tiene

$$x + y = 1 \qquad (1)$$
$$-x + y = 0 \qquad (2)$$

resolviendo el sistema por sumas y restas

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ \underline{-x + y = 0} \end{array}$$

$$2y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

sustituyendo $y = \frac{1}{2}$ en la ecuación 1

$$x + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

por lo que el número buscado es

$$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$$

A continuación se resolverá este mismo ejercicio, pero trabajando con los números complejos en forma polar. Se tiene que

$$\left(\sqrt{2}\text{ cis }315°\right)\left(r_1\text{ cis }\theta_1\right)=1$$

$$\sqrt{2}\,r_1=1 \quad ; \quad r_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$315°+\theta_1=0 \Rightarrow \theta_1=-315°+k\,360°; \qquad k\in Z$$

Considerando el argumento principal

$$\therefore z=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ cis }\left(-315°\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ cis }45°$$

o bien

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ sen }45°=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

entonces

$$z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$$

14. Representar en el plano de Argand las soluciones de la ecuación

$$z^{1/5}=\left(2-2i\right)^{1/3}$$

Solución

Para despejar z se elevará a la quinta potencia en ambos miembros de la ecuación

$$\left(z^{1/5}\right)^5=\left[\left(2-2i\right)^{1/3}\right]^5$$

$$z=\left(2-2i\right)^{5/3}=\sqrt[3]{\left(2-2i\right)^5}$$

transformando $(2-2i)$ a su forma polar, por facilidad de manejo, se tiene

$$2-2i=\sqrt{8}\text{ cis }315°$$

entonces

$$z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\text{ cis }315°\right)^5}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^5\text{ cis }5\,(315°)}$$
$$z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^5\text{ cis}1575°}$$

considerando el argumento principal se tendrá

$$z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^5\text{ cis }135°}$$

obteniendo la raíz cúbicas:

$$z=\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}\right)^5}\text{ cis }\frac{135°+k\,(360°)}{3}=4\sqrt{2}\text{ cis }\frac{135°+k\,(360°)}{3}$$

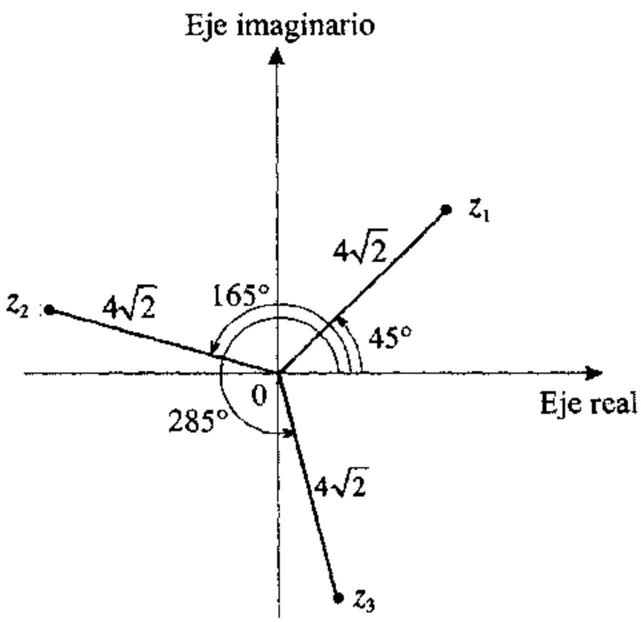
de donde los valores buscados son

para $k=0$: $\quad z_1=4\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{135°}{3}=4\sqrt{2}\text{ cis }45°$

para $k=1$: $\quad z_2=4\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{135°+360°}{3}=4\sqrt{2}\text{ cis }165°$

para $k=2$: $\quad z_3=4\sqrt{2}\text{ cis }\dfrac{135°+720°}{3}=4\sqrt{2}\text{ cis }285°$

Representando en el plano de Argand, los números complejos obtenidos



15. Resolver la siguiente ecuación y expresar el resultado en forma binómica, polar y exponencial.

$$\frac{(3-5i)+\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}}{z^{1/4}} = 2 \text{ cis } 180°$$

Solución

Despejando $z^{1/4}$ de la ecuación, se tendrá

$$z^{1/4} = \frac{(3-5i)+\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}}{2 \text{ cis } 180°}$$

transformando el número complejo $\sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i}$ a su forma binómica para poder efectuar la suma del numerador, se tiene

$$z^{1/4} = \frac{(3-5i)+(1+i)}{2 \text{ cis } 180°} = \frac{4-4i}{2 \text{ cis } 180°}$$

como $2 \text{ cis } 180° = -2$, entonces

$$z^{1/4} = \frac{4-4i}{-2} = -2+2i = \sqrt{8} \text{ cis } 135°$$

elevando a la cuarta potencia en ambos miembros de la ecuación

$$\left(z^{1/4}\right)^4 = \left(\sqrt{8} \text{ cis } 135°\right)^4$$

$$z = \left(\sqrt{8}\right)^4 \text{ cis } 4\,(135°) = 64 \text{ cis } 540°$$

considerando el argumento principal

$$z = 64 \text{ cis } 180°$$

por lo tanto, el resultado pedido en sus tres formas de expresión será

$$z = -64$$

$$z = 64 \text{ cis } 180°$$

$$z = 64\ e^{\pi i}$$

16. Obtener los valores de $z \in C$ para los cuales se satisface la siguiente ecuación:

$$(i)^2 z^2 - 1 + z^2 \left(\text{cis}\, \frac{\pi}{2} \right)^2 = (1 \text{ cis } 180°) + \frac{2}{i} \left(e^{2\pi i} \right)^4$$

Solución

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica se tiene

$$\text{cis}\, \frac{\pi}{2} = i$$

$$1 \text{ cis } 180° = -1$$

$$e^{2\pi i} = 1 \text{ cis } 360° = 1$$

sustituyendo en la ecuación se tendrá

$$(i)^2 z^2 - 1 + z^2 (i)^2 = -1 + \frac{2}{i} (1)^4$$

sumando uno en ambos miembros de la ecuación y factorizando z^2, se obtiene

$$z^2 \left(i^2 + i^2 \right) = \frac{2}{i} (1)^4$$

así

$$\left(2i^2 \right) z^2 = \frac{2}{i}$$

por lo que

$$z^2 = \frac{2}{2i^3}$$

como $i^3 = -i$ entonces

$$z^2 = \frac{1}{-i}$$

multiplicando por el conjugado del denominador para efectuar la división, se tiene

$$z^2 = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$$

por lo que

$$z^2 = 1 \text{ cis } 90°$$

entonces

$$z = \sqrt{1 \text{ cis } 90°} = 1 \text{ cis } \frac{90° + k\left(360°\right)}{2}$$

de donde los valores buscados son

$$\text{para } k = 0: \qquad z_1 = 1 \text{ cis } 45°$$

$$\text{para } k = 1: \qquad z_2 = 1 \text{ cis } 225°$$

17. Resolver la siguiente ecuación y expresar el resultado en la forma polar

$$i\,x^2 - 3\,ix - 1 + 3\,i = 0$$

Solución:

De la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{3i \pm \sqrt{\left(-3i\right)^2 - 4\left(i\right)\left(-1+3i\right)}}{2i}$$

Se obtiene primero el resultado del radicando

$$\begin{aligned}
&\left(-3i\right)^2 - 4\left(i\right)\left(-1+3i\right) = -9 - 4\left(-i-3\right)\\
&= -9 + 12 + 4i\\
&= 3 + 4i
\end{aligned}$$

Para extraer raíz cuadrada, se convierte este radicando a la forma trigonométrica

$$r = \sqrt{\left(3\right)^2 + \left(4\right)^2} = 5$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{3} = 53.13°$$

ahora

$$\left(5 \text{ cis } 53.13°\right)^{\frac{1}{2}} = \left(5\right)^{\frac{1}{2}} \text{ cis } \frac{53.13° + k(360°)}{2}$$

$$k = 0, 1$$

para $k = 0$: $\left(5 \text{ cis } 53.13°\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ cis } 26.57°$

para $k = 1$: $\left(5 \text{ cis } 53.13°\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ cis } 206.57°$

En la fórmula, el utilizar el signo positivo es equivalente a considerar la raíz para $k = 0$, y el signo negativo equivale a la raíz para $k = 1$.

Entonces

$$x_1 = \frac{3i + \sqrt{5} \text{ cis } 26.57°}{2i}$$

para poder sumar los números complejos del numerador, se convierte el segundo sumando a la forma binómica

$$x_1 = \frac{3i + \sqrt{5} \cos 26.57° + i\sqrt{5} \text{ sen } 26.57°}{2i}$$

$$= \frac{3i + 2 + i}{2i} = \frac{2 + 4i}{2i}$$

$$= \frac{\left(2 + 4i\right) i}{\left(2i\right) i} = \frac{2i - 4}{-2} = 2 - i \qquad \therefore \; x_1 = 2 - i$$

Por otra parte:

$$x_2 = \frac{3i + \sqrt{5}\ \text{cis}\ 206.57°}{2i}$$

$$= \frac{3i + \sqrt{5}\ \cos 206.57° + i\sqrt{5}\ \text{sen}\ 206.57°}{2i}$$

$$= \frac{3i - 2 - i}{2i}$$

$$= \frac{-2 + 2i}{2i}$$

$$= \frac{(-2+2i)\,i}{(2i)(i)}$$

$$= \frac{-2 - 2i}{-2}$$

$$= 1 + i \qquad \therefore\ x_2 = 1 + i$$

18. Determinar las expresiones, en términos de k, de β_0 y β_1 que cumplen con

$$(1+i)^k = \beta_0 + (1+i)\,\beta_1$$

donde k es una constante, $k \in N$.

Solución

Dado que con la fórmula de *De Moivre* es posible elevar un número complejo a una potencia natural cualquiera, se procede a convertir el número $1+i$ a la forma trigonométrica

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan}\ \frac{1}{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

sustituyendo

$$\left(\sqrt{2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}\right)^k = \beta_0 + (1+i)\ \beta_1$$

$$2^{k/2}\ \text{cis}\ \frac{\pi}{4}\,k = \beta_0 + \beta_1 + \beta_1\ i$$

es decir

$$2^{k/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\,k + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k\right) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_1\ i$$

$$2^{k/2}\cos\frac{\pi}{4}\,k + \left(2^{k/2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k\right)i = (\beta_0 + \beta_1) + \beta_1\ i$$

por igualdad de números complejos

$$\beta_0 + \beta_1 = 2^{k/2}\cos\frac{\pi}{4}\,k \qquad (1)$$

$$\beta_1 = 2^{k/2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k \qquad (2)$$

sustituyendo la ecuación 2 en 1

$$\beta_0 + 2^{k/2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k = 2^{k/2}\cos\frac{\pi}{4}\,k$$

despejando β_0

$$\beta_0 = 2^{k/2}\cos\frac{\pi}{4}\,k - 2^{k/2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k$$

finalmente

$$\beta_0 = 2^{k/2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\,k - \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k\right)$$

$$\beta_1 = 2^{k/2}\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4}\,k$$

19. Determinar las expresiones, en términos de t, de β_0 y β_1 que cumplan

$$e^{(2+3i)t} = \beta_0 + (2+3i)\,\beta_1$$

donde t es una constante, $t \in \mathbb{R}$.

Solución

El miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse

$$e^{(2+3i)t} = e^{2t} e^{3ti}$$

por propiedades de la función exponencial,

convirtiendo la expresión e^{3ti} a la forma polar

$$e^{2t} e^{3ti} = e^{2t}\,[\cos 3t + i \text{ sen } 3t]$$

llevando este valor a la expresión original

$$e^{2t}\,[\cos 3t + i \text{ sen } 3t] = \beta_0 + (2+3i)\,\beta_1$$

desarrollando

$$e^{2t} \cos 3t + \left(e^{2t} \text{ sen } 3t\right) i = \left(\beta_0 + 2\beta_1\right) + \left(3\beta_1\right) i$$

por igualdad entre números complejos

$$e^{2t} \cos 3t = \beta_0 + 2\beta_1 \qquad (1)$$

$$e^{2t} \text{ sen } 3t = 3\beta_1 \qquad (2)$$

de la ecuación 2

$$\beta_1 = \frac{e^{2t} \text{ sen } 3t}{3}$$

sustituyendo este valor en la ecuación 1

$$\beta_0 + \frac{2}{3}\left(e^{2t} \text{ sen } 3t\right) = e^{2t} \cos 3t$$

despejando

$$\beta_0 = e^{2t} \cos 3t - \frac{2}{3} e^{2t} \text{ sen } 3t$$

finalmente

$$\beta_0 = e^{2t} \left(\cos 3t - \frac{2}{3} \text{ sen } 3t \right)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3} e^{2t} \text{ sen } 3t$$

20. Obtener los valores de r y θ que satisfacen la ecuación

$$(r \text{ cis } \theta)^2 = \overline{z}_1 \, (z_2 - z_3)$$

donde

$$z_1 = \sqrt{8} \text{ cis } 315°$$
$$z_2 = 2\, e^{5\pi i/2}$$
$$z_3 = 25 + 27i$$

Solución

Primeramente se trabajará con el miembro derecho

$$z_1 = \sqrt{8} \text{ cis } 315°$$

$$a_1 = \sqrt{8} \cos 315°$$

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = \sqrt{8} \text{ sen } 315°$$

$$b_1 = -2$$

$$\therefore z_1 = 2 - 2i \Rightarrow \overline{z}_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = 2e^{5\pi i/2} = 2e^{\pi i/2}$$

$$a_2 = 2\cos\frac{\pi}{2}$$

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = 2\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2}$$

$$b_2 = 2$$

$$\therefore\ z_2 = 2i$$

sustituyendo

$$\begin{aligned}(r\ \text{cis}\ \theta)^2 &= (2+2i)\left[2i-(25+27i)\right]\\ &= (2+2i)(-25-25i)\\ &= \left(-50-50i-50i-50i^2\right)\\ (r\ \text{cis}\ \theta)^2 &= -100\ i\end{aligned}$$

si se convierte el segundo miembro a la forma trigonométrica

$$(r\ \text{cis}\ \theta)^2 = 100\ \text{cis}\ \frac{3}{2}\pi$$

elevando al cuadrado el primer miembro

$$r^2\ \text{cis}\ 2\theta = 100\ \text{cis}\ \frac{3}{2}\pi$$

finalmente

$$r = 10$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi; \qquad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

si $n = 0$ se trata del argumento principal.

21. Demostrar que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

Solución

El número complejo expresado en la forma de Euler $e^{\theta i}$, tiene como módulo $r = 1$ y argumento θ.

Entonces

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

De la misma manera, el número $e^{-\theta i}$ puede expresarse

$$e^{-\theta i} = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) \tag{2}$$

pero

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \tag{3}$$

por ser una función par.

Además

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \tag{4}$$

por ser una función impar.

Sustituyendo 3 y 4 en 2:

$$e^{-\theta i} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta \tag{5}$$

restando la expresión 5 a la expresión 1:

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - (\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)$$

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

reduciendo términos semejantes

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = 2i\operatorname{sen}\theta$$

finalmente

$$\operatorname{sen}\,\theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

Q.E.D.

22. Obtener los valores de x, y $\in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple la siguiente igualdad:

$$(x + yi)^2 = (x - yi)^2$$

Solución

Desarrollando los cuadrados, se tiene

$$x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = x^2 - 2xyi + y^2 i^2$$

agrupando partes reales y partes imaginarias

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = (x^2 - y^2) - 2xyi$$

por igualdad de complejos puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 - y^2 = x^2 - y^2 \qquad (1)$$

$$2xy = -2xy \qquad (2)$$

una de las soluciones al sistema será

multiplicando la ecuación 2 por $\frac{1}{2y}$ se tiene

$$\frac{1}{2y}(2xy) = \frac{1}{2y}(-2xy); \qquad \text{con } y \neq 0$$

$$x = -x$$

$$2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

sustituyendo $x = 0$ en la ecuación 1

$$-y^2 = -y^2$$

de modo que

$$y = y$$

por lo tanto, esta igualdad se cumple para todo valor de $y \in \mathbb{R}$

Finalmente los valores buscados son

$$x = 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

Otra solución sería

$$x \in \mathbb{R}$$

$$y = 0$$

si la ecuación 2 se multiplica por $\dfrac{1}{2x}$ y se sigue el mismo procedimiento.

23. Obtenga los valores de x, y que satisfacen la siguiente ecuación, considerando el argumento principal.

$$e^{x+yi} - \frac{2 \text{ cis } 210° + \sqrt{3}}{e^{-3\pi i/2}} = 0$$

Solución

Como $2 \text{ cis } 210° = -\sqrt{3} - i$ y $e^{-3\pi i/2} = 1 \text{ cis } 90° = i$, entonces

$$e^{x+yi} - \frac{\left(-\sqrt{3} - i\right) + \sqrt{3}}{i} = 0$$

simplificando

$$e^{x+yi} - \frac{-i}{i} = 0$$

$$e^{x+yi} + 1 = 0$$

así

$$e^{x+yi} = -1$$

$$e^{x+yi} = 1 \text{ cis } 180°$$

$$e^{x+yi} = 1e^{\pi i}$$

por igualdad de números complejos en su forma binómica, se tiene que

$$x + yi = \pi i$$

por lo que

$$x = 0$$

$$y = \pi$$

24. Determinar los valores de $x, y \in \mathbb{R}$, para los cuales se satisface la siguiente igualdad:

$$(x - 2i) \text{ cis } 180° + (2 + yi)\, e^{\pi i/4} = 4e^{\pi i/2}$$

Solución

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica, se tiene

$$\text{cis } 180° = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{4}i} = 1 \text{ cis } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$$

$$4e^{\pi i/2} = 4 \text{ cis } 90° = 4i$$

sustituyendo en la ecuación:

$$(x - 2i)(-1) + (2 + yi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right) = 4i$$

desarrollando los productos

$$-x+2i+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}i+\frac{y}{\sqrt{2}}i+\frac{y}{\sqrt{2}}i^2=4i$$

agrupando

$$\left(-x+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)+\left(2+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)i=4i$$

por igualdad de números complejos se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-x+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{y}{\sqrt{2}}=0 \qquad (1)$$

$$2+\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}=4 \qquad (2)$$

de la ecuación 2 se obtiene

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=4-2-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=2-\frac{2}{\sqrt{2}}$$

así

$$y=2\sqrt{2}-2$$

por lo que, sustituyendo el valor de y en la ecuación 1, se obtiene

$$-x+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}-2\right)=0$$

$$-x+\frac{2}{\sqrt{2}}-2+\frac{2}{\sqrt{2}}=0$$

así

$$x=\frac{4}{\sqrt{2}}-2$$

por lo tanto, los valores pedidos son

$$x=\frac{4}{\sqrt{2}}-2$$

$$y=2\sqrt{2}-2$$

25. Obtener los valores de $z,\ z\in C$, que satisfacen la siguiente ecuación:

$$4z\left(2+e^{\pi i}\right)=\frac{8i\ z+e^{\pi i/2}\left(1-\sqrt{3}\ i\right)}{-2\ \text{cis}\ 270°-0.5\ e^{3\pi i}z}$$

Solución

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica, se tiene

$$e^{\pi i/2}=i$$

$$e^{\pi i}=-1$$

$$e^{3\pi i}=-1$$

$$\text{cis}\ 270°=-i$$

sustituyendo en la ecuación

$$4z\left(2-1\right)=\frac{8i\ z+i\left(1-\sqrt{3}\ i\right)}{-2\left(-i\right)-0.5\left(-1\right)z}$$

simplificando

$$4z=\frac{8i\ z+i-\sqrt{3}\ i^2}{2i+0.5z}=\frac{8i\ z+i+\sqrt{3}}{2i+0.5z}$$

se obtiene que

$$4z\left(2i+0.5z\right)=8i\ z+i+\sqrt{3}$$

$$8iz+2z^2=8i\ z+\sqrt{3}+i$$

restando $8iz$ en ambos miembros de la ecuación

$$2z^2 = \sqrt{3} + i$$

entonces

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

como $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \text{ cis } 30°$ entonces

$$z^2 = 1 \text{ cis } 30°$$

de modo que

$$z = \sqrt{1 \text{ cis } 30°} = 1 \text{ cis } \frac{30° + k\left(360°\right)}{2}$$

por lo que, los valores pedidos son

$$\text{para } k = 0: \qquad z_1 = 1 \text{ cis } 15°$$
$$\text{para } k = 1: \qquad z_2 = 1 \text{ cis } 195°$$

26. Calcular el valor o los valores de $z \in C$ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$z^{3/2}e^{\pi i/2} - \left(1+i\right)\left(-1-i\right) = -\left(4+3i\right)z^{3/2}$$

Solución

En primera instancia, se procede a despejar z de la ecuación

$$z^{3/2}e^{\pi i/2} + \left(4+3i\right)z^{3/2} = \left(1+i\right)\left(-1-i\right)$$

factorizando $z^{3/2}$, se tiene

$$z^{3/2}\left[e^{\pi i/2} + \left(4+3i\right)\right] = \left(1+i\right)\left(-1-i\right)$$

donde

$$z^{3/2} = \frac{\left(1+i\right)\left(-1-i\right)}{e^{\pi i/2} + \left(4+3i\right)}$$

transformando y efectuando operaciones

$$z^{3/2}=\frac{-1-i-i-i^2}{i+\left(4+3i\right)}=\frac{-2i}{4+4i}$$

como

$$-2i=2\text{ cis }270°$$

y

$$4+4i=\sqrt{32}\text{ cis }45°$$

entonces

$$z^{3/2}=\frac{2\text{ cis }270°}{\sqrt{32}\text{ cis }45°}=\frac{2}{\sqrt{32}}\text{ cis }\left(270°-45°\right)$$

$$z^{3/2}=\frac{1}{\sqrt{8}}\text{ cis }225°$$

elevando a la $\frac{2}{3}$ en ambos miembros de la ecuación

$$\left(z^{3/2}\right)^{2/3}=\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\text{ cis }225°\right)^{2/3}$$

así

$$z=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\text{ cis }225°\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\text{ cis }450°}$$

$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\text{ cis }90°}$$

obteniendo la raíz cúbica se tiene

$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\text{ cis }\frac{90°+k\left(360°\right)}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{90°+k\left(360°\right)}{3}$$

para $k=0$: $\quad z_1=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{90°}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }30°$

para $k=1$: $\quad z_2=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{90°+360°}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{450°}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }150°$

para $k=2$: $\quad z_3=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{90°+720°}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }\frac{810°}{3}=\frac{1}{2}\text{ cis }270°$

por tanto, los valores pedidos son

$$z_1 = \frac{1}{2} \text{ cis } 30°$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \text{ cis } 150°$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \text{ cis } 270°$$

27. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-3x + i\,y = -1 + 4i$$

$$(1+i)\,x - 2y = 4i$$

Solución

Aplicando el método de sumas y restas, tenemos

$$-3x + i\,y = -1 + 4i \qquad (1)$$

$$(1+i)\,x - 2y = 4i \qquad (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por 2 y la ecuación(2) por i, tenemos

$$-6x + 2iy = -2 + 8i \qquad (3)$$

$$(-1+i)\,x - 2iy = -4 \qquad (4)$$

Al sumar las ecuaciones (3) y (4) se tiene

$$(-7+i)\,x = -6 + 8i$$

de modo que

$$x = \frac{-6+8i}{-7+i}$$

al dividir se obtiene

$$x = \frac{-6+8i}{-7+i} \cdot \frac{-7-i}{-7-i} = \frac{42+6i-56i+8}{50} = \frac{50-50i}{50}$$

por lo cual

$$x = 1 - i$$

al sustituir $x = 1 - i$ en la ecuación (1), tenemos

$$-3\left(1 - i\right) + iy = -1 + 4i$$

$$-3 + 3i + iy = -1 + 4i$$

$$iy = 2 + i$$

$$y = \frac{2 + i}{i}$$

Al dividir se obtiene

$$y = \frac{2 + i}{i} \bullet \frac{-i}{-i} = \frac{1 - 2i}{1}$$

por lo que

$$y = 1 - 2i$$

Finalmente, la solución al sistema de ecuaciones es

$$x = 1 - i$$

$$y = 1 - 2i$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar y demostrar una fórmula que permita elevar a la unidad imaginaria $i=\sqrt{-1}$ a un exponente impar cualquiera.

2. Transformar los siguientes números a la forma trigonométrica o polar:

   a) $1+i$
   b) i
   c) $1-\sqrt{3}\,i$
   d) $-2+2\sqrt{3}\,i$
   e) $-3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,i$

3. Transformar los siguientes números a la forma binómica o algebraica:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ cis 210°
   b) 16 cis 270°
   c) 1 cis 1845°
   d) 3 cis−45°
   e) $\sqrt{3}$ cis 248.37°

4. Determinar

$$z=\sqrt[3]{\frac{z_1\bullet\overline{z}_2}{z_3}}$$

   donde

$$z_1=2-2i$$

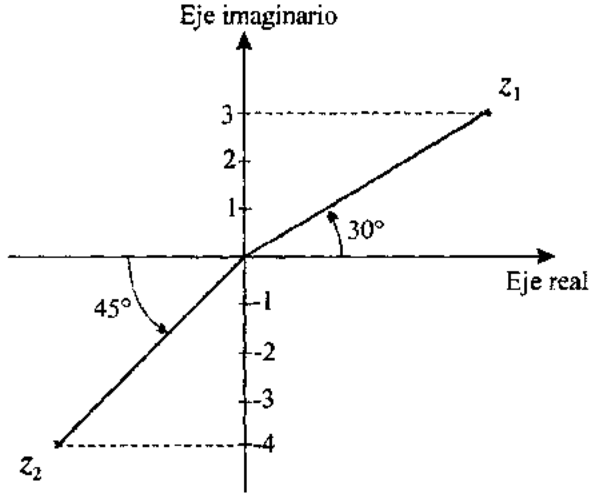
$$z_2=-\sqrt{3}+i$$

$$z_3=2\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

5. Resolver la ecuación

$$(2+i)\,x^2-(5-i)\,x+(2-2i)=0$$

6. Obtener en la forma Euler el resultado de $z_1 \bullet z_2$, donde z_1 y z_2 son los números complejos que se muestran en la siguiente figura:



7. Obtener los valores de x, y que satisfacen la ecuación

$$e^{x+iy} - \frac{2 \text{ cis } 300° + \sqrt{3}\, i}{e^{5\pi i/2}} = 0$$

8. Demostrar que

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$

9. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplen con

$$\left(1+\sqrt{3}\, i\right)^k = \beta_0 + \left(1+\sqrt{3}\, i\right)\beta_1$$

donde k es una constante que pertenece a los naturales

10. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplen con

$$e^{(-3+4i)t} = \beta_0 + \left(-3+4i\right)\beta_1$$

donde t es una constante, $t \in R$

11. Dados los números complejos

$$z_1 = 3 + 2i; \qquad z_2 = 2 - 2i; \qquad z_3 = -1; \qquad z_4 = 2 - 3i; \qquad z_5 = i$$

efectuar las siguientes operaciones:

a) $(z_5)^{100}$

b) $\left[\dfrac{(z_1 - z_2)\, z_3 z_2}{z_4 + z_5} \right]^2$

12. Obtener el o los valores de z, $z \in C$, que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt[3]{16z} = \dfrac{\left(\sqrt{8}\ e^{-5\pi i/4}\right)(6 \text{ cis } 90°)(0 - i)}{\sqrt{8}\ e^{5\pi i/12}}$

b) $\left(\sqrt{3} + i\right) - e^{\pi i/6} = \dfrac{(1 \text{ cis } 30°)(16 \text{ cis } 30°)}{z^{3/2}}$

c) $z^{4/3}\, z_1 + z^{4/3} z_2 - z_3 z_4 = 0$

donde:

$$z_1 = -2 + 4\sqrt{3}\ i;\ z_2 = 6e^{2\pi i};\ z_3 = 2 \text{ cis } 90°;\ z_4 = 4e^{-3\pi i/2}$$

d) $z^2 - iz + e^{\pi i} = 0$

e) $\dfrac{(4 + 4i)\left(8e^{\pi i/2}\right)}{\sqrt{2} \text{ cis } 270° + 5\sqrt{2}\ i} = z^2 \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i\right)$

f) $z^{3/2}\, (2 \text{ cis } 270°)\left(e^{\pi i}\right) = \dfrac{4e^{-\pi i/2}}{2 \text{ cis } 270°} + z^{3/2}\, (-2 + 4 \text{ cis } 90°)$

g) $z^{3/2} z_1 - z^{3/2} z_2 + z_3 z_2 - z_3 z_1 = z_4$

donde: $z_1 = -4 + 3i;\ z_2 = -3 + 2i;\ z_3 = 4 + 4i;\ z_4 = 8e^{\pi i/2}$

h) $\dfrac{-\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right) \text{cis } 45°}{z^{3/4}\left[\text{cis } 60° + e^{\pi i/3} - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right)\right]} = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$

i) $\left(-0.5 \text{ cis } 540°\right) z - 2e^{3\pi i/2} = \dfrac{\text{cis } 90° \left(1-\sqrt{3}\, i\right) + 8i\, z}{4z \left(\text{cis } 180° + 2\right)}$

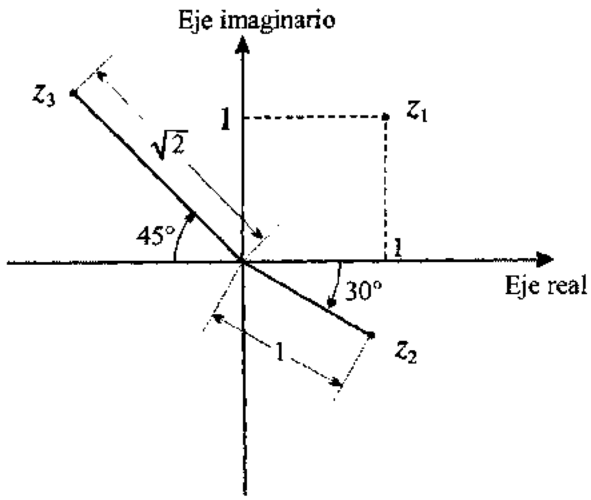
13. Obtener los valores de m y n que satisfacen la siguiente igualdad:

$$\left(3 \text{ cis } 60°\right) m - 2n\, e^{5\pi i/2} = 2 - 3i$$

14. Dados $z_1 = 4 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = \gamma_2 \text{ cis}\left(-45°\right)$ obtener θ_1 y γ_2 si se tiene que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-\sqrt{3}}{1.5\sqrt{2}} + \frac{2+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\, i$$

15. Con los números complejos que se ilustran en el siguiente diagrama de Argand:



calcular el valor de z, $z \in C$, que satisface la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{\left(\overline{z}_2\right)^6}{z_2} + z_1\right] z_2\, z_3 = z_1\, z_2\, z_3 - z\, z_3$$

16. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left(1+i\right) z_1 - z_2 = 0$$

$$i z_1 + z_2 = 3 - i$$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $i^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}\, i; \qquad \forall n \in N$

2. a) $\sqrt{2}$ cis 45°
   b) cis 90°
   c) 2 cis 300°
   d) 4 cis 120°
   e) 3.67 cis 215.26°

3. a) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\, i$
   b) $-16i$
   c) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\, i$
   d) $\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}\, i$
   e) $-0.639-1.61\, i$

4. $z_1 = \sqrt{2}$ cis 40°
   $z_2 = \sqrt{2}$ cis 160°
   $z_3 = \sqrt{2}$ cis 280°

5. $x_1 = 1-i$
   $x_2 = \frac{4}{5}-\frac{2}{5}\, i$

6. $z_1 \bullet z_2 = 24\sqrt{2}\; e^{\frac{17\pi}{12} i}$

7. $x = 0$

   $y = \frac{3}{2}\pi \pm 2n\pi; \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

9. $\beta_0 = \frac{2^k}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}k - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}k\right)$

   $\beta_1 = \frac{2^k}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}k$

10. $\beta_0 = \dfrac{4e^{-3t}\ \cos\ 4t + 3e^{-3t}\ \text{sen}\ 4t}{4}$

$\beta_1 = \dfrac{e^{-3t}\ \text{sen}\ 4t}{4}$

11. a) $(z_5)^{100} = 1$

b) $-15+8i$

12. a) $z = 13.5$ cis $180°$

b) $z_1 = \sqrt[3]{256}$ cis $20°$

$z_2 = \sqrt[3]{256}$ cis $140°$

$z_3 = \sqrt[3]{256}$ cis $260°$

c) $z_1 = i$

$z_2 = -1$

$z_3 = -i$

$z_4 = 1$

c) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

e) $z_1 = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ cis $0°$

$z_2 = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ cis $180°$

f) $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ cis $30°$

$z_2 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ cis $150°$

$z_3 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ cis $270°$

g) $z_1 = 4$ cis $0°$

$z_2 = 4$ cis $120°$

$z_3 = 4$ cis $240°$

h) $z_1 = 1$ cis $0°$

$z_2 = 1$ cis $120°$

$z_3 = 1$ cis $240°$

i) $z_1 = 1$ cis $15°$

$z_2 = 1 \text{ cis } 195°$

13. $m = \frac{4}{3}$

$n = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$

14. $\theta_1 = 30°$

$\gamma_2 = 3$

15. $z = 1$

16. $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5} i$

$z_2 = \frac{8}{5} - \frac{6}{5} i$

CAPÍTULO 3

POLINOMIOS

La palabra polinomio está compuesta por los vocablos poli (del griego *polys* que significa mucho, pluralidad) y nomio (del griego *nómos* que significa división). Es decir una expresión, en este caso algebraica, que consta de más de un término.

En la hierática egipcia del *Papiro de Ahmes* en el año 1550 a.C. ya se habla de una cantidad desconocida o incógnita, cuyo valor debe encontrarse para resolver una ecuación de primer grado.

En el año 275 de esta era, Diofanto de Alejandría fue el primero en desarrollar un método de simbolismos para las potencias de expresiones algebraicas. En sus trabajos propuso la ecuación con dos miembros y el signo igual.

A partir de este método griego se basaron los árabes y persas para desarrollar los suyos; asimismo los chinos e hindúes tuvieron métodos para escribir ecuaciones.

Por otra parte, Bhaskara en el año 1150 encontró una representación para una ecuación de segundo grado.

En manuscritos de la Edad Media ya se reconocen letras para representar cantidades algebraicas en el estudio de las ecuaciones. Entre los científicos que trabajaron en el desarrollo de simbolismos para ecuaciones, desde finales del siglo XV hasta finales del siglo XVII, se puede citar a Pacioli en 1494, Vander Hoecke en 1514, Ghaligai en 1521, Rudolff en 1525, Cardano en 1545, Sheubel en 1551, Tartaglia en 1556, Buteo en 1559, Stevin en 1585, Ranus y Schoner en 1586, Viète en 1590, Clavius en 1608, Girard en 1629, Oughtred en 1631, Herigone en 1534, Descartes en 1637 y Wallis en 1693.

Posiblemente el primero en igualar a cero el segundo miembro de una ecuación polinominal fue el matemático escocés Napier, y el primero en clasificar las ecuaciones de acuerdo con su grado fue Khayyam en el siglo XII.

Si se habla de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, se puede citar a los griegos, quienes fueron capaces de resolver algunos casos, mediante métodos geométricos. Euclides cita en sus obras problemas que involucran este tipo de ecuaciones.

En la India quienes estudiaron con mayor éxito las ecuaciones cuadráticas fueron Ayabhata, Brahmagupta, Mahuaira y Sridhara en los siglos VI, VII, IX y XI, respectivamente.

Asimismo, el matemático persa Al-Khowarizm en el siglo IX utilizó métodos generales para resolver la ecuación cuadrática $x^2 + px = q$, expresión en la que también trabajó Khayyam siglos más tarde.

El primer tratamiento importante para la solución de ecuaciones cuadráticas y de otros tipos utilizando la factorización, se encuentra en el *Artis Analyticae Praxis*, del matemático inglés Harriot y que se publicó en 1631.

La expresión utilizada hoy en día para resolver una ecuación cuadrática se basa en un método que usa determinantes y que se atribuye a Euler y Bezout.

La más antigua ecuación cúbica o de tercer grado se debe posiblemente a Menaechmus, contemporáneo de Platón y discípulo de Eudoxo. Otras referencias antiguas de ecuaciones cúbicas se tienen en algunos problemas del griego Arquímides y del persa Khayyman.

En la Edad Media quienes más estudiaron el caso de la ecuación cúbica fueron los italianos Fibonacci, Pacioli, Cardano, Tartaglia y Petri, el alemán Rodolff y el francés Viète.

El primer intento infructuoso de resolver una ecuación de cuarto grado lo efectuaron los árabes. Siglos más tarde, Ferrari en Italia propuso un método de solución que Cardano publicó en su *Ars Magna* y que fue utilizado por Petri. Viète y Descartes también trabajaron en la solución de una ecuación de cuarto grado.

Euler y posteriormente Lagrange intentaron resolver una ecuación de quinto grado, reduciéndola a una de cuarto grado; sin embargo fracasaron. En 1803, el físico italiano Ruffini fue el primero en demostrar que una ecuación de quinto grado no se puede resolver por métodos algebraicos.

Actualmente la teoría de ecuaciones se sitúa a partir de los matemáticos Abel (noruego) y Galois (francés), quienes demostraron que las raíces de una ecuación de quinto grado o mayor no pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de la ecuación por medio de radicales.

La ley de los signos, que asocia los tipos de raíces para una ecuación, con los cambios de signo para sus coeficientes, fue conocida por Cardano, pero su justificación plena se le atribuye a Harriot y, ciertamente, también a Descartes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dadas las siguientes expresiones, indicar si son o no polinomios; en caso negativo decir por qué; en caso afirmativo determinar su grado.

   a) $p(x) = 7x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 10x^2 + x - 4$

   b) $f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25\,\text{sen}^2\,\theta - 4.84\cos\theta$

   c) $h(x) = x^3 - 2x^{-2} + 4x - 7$

   d) $f(y) = 5y^6 - 7y^5 - 3y^4 + 2y^3$

   e) $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

   f) $m^2 = 4x^5 - 8x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

   g) $q(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x + 4}$

   h) $g(x) = 3x^0 + 8x - 7x^2$

   i) $\alpha(x) = -4 + 6x^5 + 2x^3 - 5x + 8x^2 + 6x^4$

Solución

a) Sí es un polinomio en x, donde $gr(p) = 7$

b) Sí es un polinomio con variable independiente $\cos\theta$, ya que puede escribirse

$$f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25\left(1 - \cos^2\theta\right) - 4.84\cos\theta$$

$$= 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25 - 8.25\cos^2\theta - 4.84\cos\theta$$

finalmente

$$f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 11.39\cos^2\theta - 4.84\cos\theta + 8.25 \qquad gr(f) = 3$$

c) No es un polinomio por tener un término con exponente negativo.

d) Sí es un polinomio en y, donde $gr(f) = 6$

e) No es un polinomio, se trata de una ecuación.

f) No es un polinomio por no ser una función.

g) No es un polinomio, es un cociente de polinomios y $x + 4$ no es un factor del dividendo.

h) Sí es un polinomio, donde $gr(g) = 2$

i) Sí es un polinomio, aunque sus términos están desordenados; ordenando:

   $\alpha(x) = 6x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 5x - 4$

   $gr(\alpha) = 5$

2. Determinar los valores de A, B y C para que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ sean iguales

$$p(x) = 4x^2 + 14x + 8$$

$$q(x) = A(3x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 1) + C(-x^2 + 4x + 1)$$

Solución

$$4x^2 + 14x + 8 = A(3x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 1) + C(-x^2 + 4x + 1)$$

Para que dos polinomios sean iguales, sus coeficientes correspondientes deben ser iguales, desarrollando

$$4x^2 + 14x + 8 = 3Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + B - Cx^2 + 4Cx + C$$

agrupando términos semejantes

$$4x^2 + 14x + 8 = (3A + B - C)x^2 + (2A + 4C)x + (A + B + C)$$

entonces

$$3A + B - C = 4 \quad (1)$$

$$2A + 4C = 14 \quad (2)$$

$$A + B + C = 8 \quad (3)$$

Para resolver el sistema, tomando en cuenta que en la ecuación 2 no interviene B, se eliminará B de las ecuaciones 1 y 3; así que, restando 3 a 1:

$$\begin{array}{r} 3A + B - C = 4 \\ -(A + B + C) = -8 \\ \hline 2A \quad - \quad 2C = -4 \end{array} \quad (4)$$

despejando $2A$ de la expresión 4 y sustituyendo en la ecuación 2:

$$2C - 4 + 4C = 14$$

reduciendo términos semejantes

$$6C = 18$$

entonces

$$C = 3$$

sustituyendo este valor en la ecuación 4

$$2A = 2(3) - 4$$

$$\therefore\ A = 1$$

Sustituyendo los valores A y C en la expresión 3

$$1 + B + 3 = 8$$

despejando

$$B = 4$$

finalmente

$$A = 1$$

$$B = 4$$

$$C = 3$$

3. Determinar los valores de A, B, C, D y E, de tal manera que se cumpla la igualdad

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$$

Solución

Obsérvese que este ejercicio es parte del método de descomposición en fracciones parciales, comúnmente empleado en integración.

Multiplicando ambos miembros por $(x+1)\left(x^2 + x + 1\right)^2$:

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = A\left(x^2 + x + 1\right)^2 + (Bx + C)(x+1)\left(x^2 + x + 1\right) + (Dx + E)(x+1) \qquad (1)$$

si se le da a x el valor -1

$$-1 + 4 - 5 + 3 = A\left(1 - 1 + 1\right)^2 \Rightarrow A = 1$$

desarrollando ahora la ecuación 1

$$x^3+4x^2+5x+3=A\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)+$$

$$\left(Bx+C\right)\left(x^3+2x^2+2x+1\right)+Dx^2+Dx+Ex+E$$

agrupando términos y tomando en cuenta que $A=1$

$$x^3+4x^2+5x+3=\left(1+B\right)x^4+\left(2+2B+C\right)x^3+$$

$$\left(3+2B+2C+D\right)x^2+\left(2+B+2C+D+E\right)x+\left(1+C+E\right)$$

por igualdad de polinomios

$$0=1+B \qquad (2)$$

$$1=2+2B+C \qquad (3)$$

$$4=3+2B+2C+D \qquad (4)$$

$$5=2+B+2C+D+E \qquad (5)$$

$$3=1+C+E \qquad (6)$$

de la ecuación 2

$$B=-1$$

tomando en cuenta este valor en (3):

$$C=1$$

sustituyendo en (6) y despejando:

$$E=1$$

finalmente de la expresión 5

$$D=1$$

4. Demostrar que el polinomio $p(x) = x^2 + (a+bi)x + c + di$ tiene una raíz real cuando $abd = d^2 + b^2c$. ¿En qué caso el polinomio tiene dos raíces reales?

Solución

Sea $x_1 \in R$ una raíz del polinomio, entonces

$$x_1^2 + (a+bi)x_1 + c + di = 0$$

desarrollando

$$x_1^2 + ax_1 + bx_1 i + c + di = 0$$

factorizando

$$\left(x_1^2 + ax_1 + c\right) + \left(bx_1 + d\right)i = 0$$

Por igualdad de números complejos

$$x_1^2 + ax_1 + c = 0 \qquad (1)$$

$$bx_1 + d = 0 \qquad (2)$$

de la ecuación 2

$$x_1 = -\frac{d}{b}$$

llevando este valor a la expresión 1

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0$$

desarrollando

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$$

multiplicando por b^2 en ambos miembros

$$d^2 - abd + b^2c = 0$$

finalmente

$$abd = d^2 + b^2 c$$

Q.E.D.

Por otra parte, para que el polinomio tenga dos raíces reales, se debe cumplir que $b = d = 0$ para que el polinomio quede

$$x^2 + ax + c = 0$$

Pero también se deberá cumplir que el discriminante no sea negativo, es decir

$$a^2 - 4c \geq 0.$$

Obsérvese que en el enunciado se habla de una raíz real y no de dos. Esto es posible ya que existe un teorema que señala la existencia de raíces complejas conjugadas, pero solamente en el caso de que los coeficientes del polinomio sean reales y no es el caso.

5. Determinar los números reales a y b de manera que $z = 1 + i$ sea raíz del polinomio

$$p(x) = x^5 + ax^3 + b$$

Solución

Dado que $z = 1 + i$ es raíz del polinomio, $(x - 1 - i)$ es factor del polinomio, entonces

$$\begin{array}{c|cccccc}
1+i & 1 & 0 & a & 0 & 0 & b \\
 & & 1+i & 2i & (a-2)+(a+2)i & -4+2ai & -(4+2a)+(2a-4)i \\
\hline
 & 1 & 1+i & a+2i & (a-2)+(a+2)i & -4+2ai & (b-4-2a)+(2a-4)i
\end{array}$$

Como $1 + i$ es raíz, entonces el residuo debe ser igual a cero, es decir

$$(b - 4 - 2a) + (2a - 4)i = 0 + 0i$$

Por igualdad de números complejos

$$b - 4 - 2a = 0 \qquad (1)$$
$$2a - 4 = 0 \qquad (2)$$

de la ecuación 2

$$a = 2$$

sustituyendo este valor en la expresión 1

$$b-4-2(2)=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=8$$

6. ¿Cuál es la relación que debe existir entre a y b para que el polinomio $p(x)=x^3+ax+b$ sea divisible entre $(x-c)^2$?

Determinar una expresión de la constante c en términos de las constantes a y b.

Solución

Efectuando la división

$$\begin{array}{r|l} & x+2c \\ \hline x^2-2cx+c^2 & x^3+0x^2+ax+b \\ & \quad 2cx^2+\left(a-c^2\right)x+b \\ & \qquad \left(a+3c^2\right)x+b-2c^3 \end{array}$$

Como debe ser divisible, el residuo vale cero

$$a+3c^2=0 \qquad (1)$$

$$b-2c^3=0 \qquad (2)$$

despejando c de la expresión 1

$$c^2=-\frac{a}{3}; \qquad c=\pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

entonces, $c^3=\pm\left(-\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

llevando este valor a la ecuación 2 y despejando b

$$b=\pm\ 2\left(-\frac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Por otra parte, multiplicando por $2c$ la ecuación 1, por 3 la 2 y sumando

$$\begin{array}{rl} 2ac+6c^3=0 & (1') \\ \underline{3b\ \ -6c^3=0} & (2') \\ 2ac+3b\ \ =0 & \end{array}$$

finalmente, despejando c

$$c = \frac{-3b}{2a}$$

7. Verificar que $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (bc+ac+ab)x - abc$ es divisible entre $(x-a)(x-b)$. ¿Cuál es el cociente?

Solución

Si el polinomio $p(x)$ es divisible entre $(x-a)(x-b)$, por el teorema del factor, también es divisible entre $x-a$. Así que, empleando división sintética primero con ese factor

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -(a+b+c) & bc+ac+ab & -abc \\ a & & a & -ab-ac & abc \\ \hline & 1 & -b-c & bc & \boxed{0} \end{array}$$

de manera que se comprueba que $x-a$ es factor de $p(x)$.

Además, el polinomio reducido es

$$p_1(x) = x^2 - (b+c)x + bc$$

Ahora, con el factor $x-b$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -(b+c) & bc \\ b & & b & -bc \\ \hline & 1 & -c & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto sí es factor de $p(x)$ y el cociente es $q(x) = x - c$

8. Determinar el valor de θ, en radianes, de tal manera que $h = 0$

$$h = \operatorname{sen}^3\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

Solución

Dado que $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$

$$h = \operatorname{sen}^3\theta - \left(1 - \operatorname{sen}^2\theta\right) + \operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

reduciendo términos semejantes

$$h = \text{sen}^3\ \theta - \text{sen}^2\ \theta + \text{sen}\ \theta - 1$$

se trata de un polinomio en sen θ y lo que se hará es determinar sus raíces.

Haciendo $x = \text{sen}\ \theta$

$$h = x^3 - x^2 + x - 1$$

de acuerdo con la regla de los signos de Descartes

$$h = x^3 - x^2 + x - 1\ ; \quad \text{3 variaciones}$$

si se sustituye x por $-x$:

$$h\left(-x\right) = -x^3 - x^2 - x - 1\ ; \quad \text{no hay variaciones}$$

entonces

	1ª	2ª
Raíces reales positivas	3	1
Raíces reales negativas	0	0
Raíces complejas	0	2
Total	3	3

Para las posibles raíces racionales, se determinan los

posibles numeradores	$\pm$ 1
posibles denominadores	$\pm$ 1
posibles raíces racionales	$\pm$ 1

dado que no hay raíces negativas, se intentará con $x = 1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Esto significa que $x = 1$ es una raíz, el polinomio reducido queda

$$x^2 + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\ i$$

entonces, la única raíz real es $x=1$ y como $x=\text{sen }\theta$, se tiene

$$\text{sen }\theta=1$$

finalmente

$$\theta=\text{ang sen }(1)$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

donde

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

9. Determinar $a,\ b\in\mathbb{R}$, de tal manera que x^4+4 sea divisible entre x^2+ax+b.

Solución

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-ax+a^2-b \\ \hline
x^2+ax+b & x^4+0x^3+0x^2+0x+4 \\
 & -\left(x^4+ax^3+bx^2\right) \\ \cline{2-2}
 & -ax^3-bx^2 \\
 & -\left(-ax^3-a^2x^2-abx\right) \\ \cline{2-2}
 & \left(a^2-b\right)x^2+abx \\
 & -\left[\left(a^2-b\right)x^2+\left(a^3-ab\right)x+a^2b-b^2\right] \\ \cline{2-2}
 & \left(-a^3+2ab\right)x+\left(4-a^2b+b^2\right)
\end{array}$$

dado que el residuo debe ser cero

$$-a^3+2ab=0 \qquad (1)$$

$$4-a^2b+b^2=0 \qquad (2)$$

analizando las dos ecuaciones se observa que a tiene que ser diferente de cero, pues de la ecuación 2, b tendría que ser complejo. Entonces, dividiendo entre a ambos miembros de la expresión 1

$$-a^2+2b=0; \qquad a\neq 0$$

por lo tanto

$$a^2=2b$$

sustituyendo en la expresión 2

$$4-(2b)\,b+b^2=0$$

$$4-2b^2+b^2=0$$

$$4-b^2=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=2$$

b no puede tomar el signo negativo de la extracción de raíz, ya que $a^2=2b$ y entonces a tendría que ser complejo.

Sustituyendo el valor de b

$$a^2=2(2)$$

$$a=\pm\sqrt{4}$$

$$a=\pm\,2$$

finalmente

$$a=\pm\,2, \qquad b=2$$

10. Demostrar que el polinomio $p(x)=nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1$ es divisible entre $(x-1)^2$, $n\in N$. Obtener el cociente.

Solución

Este ejercicio puede resolverse por medio de inducción matemática aquí se efectuará por medio de división sintética.

Dado que el polinomio debe ser divisible entre $(x-1)^2$, esto significa que $x=1$ es raíz del polinomio con multiplicidad 2.

Entonces

$$\begin{array}{c|ccccccc} & \multicolumn{7}{c}{(n+2)\text{ términos}} \\ & n & -(n+1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & n & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ \hline & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

Obsérvese que por ser un polinomio de grado $n+1$, se tienen $n+2$ términos en el primer renglón de la división sintética. Por otra parte, como el residuo es cero, sí es divisible $p(x)$ entre $x-1$.

Ahora se trabajará con el polinomio reducido, el cual tiene $n+1$ términos por ser su grado una unidad menor que el del original.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & \multicolumn{7}{c}{(n+1)\ \text{términos}} \\ & n & -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 1 & & n & -1+n & -2+n & & -(n-2)+n & -(n-1)+n \\ \hline & n & -1+n & -2+n & -3+n & \ldots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Q.E.D.

El cociente es, entonces

$$c(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+(n-2)x^{n-3}+\ldots+2x+1$$

con n términos.

11. Sea el polinomio $p(x)=x^4-ax^2+a+3$. ¿Para qué valores de, $a\in\mathbb{R}$, las cuatro raíces de $p(x)$ son reales?

Solución

Si se hace un cambio de variable

Considerando $y=x^2 \quad \Rightarrow \quad p_1(y)=y^2-ay+a+3$

Para encontrar las raíces, se utilizará la fórmula de la ecuación de segundo grado

$$y=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4(a+3)}}{2}$$

$$y=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4a-12}}{2}$$

$$y=\frac{a\pm\sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}$$

como $y = x^2$:

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}$$

entonces

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}}$$

Primeramente, $(a-6)(a+2)$ debe ser positivo o nulo para que al extraerle raíz cuadrada el resultado sea real.

Entonces

$$(a-6)(a+2) \geq 0$$

Ambos factores deben ser positivos o ambos negativos, entonces

$$\begin{matrix} a \geq 6 \\ a \geq -2 \end{matrix} \Rightarrow a \geq 6$$

$$\begin{matrix} a \leq 6 \\ a \leq -2 \end{matrix} \Rightarrow a \leq -2$$

Para este primer radical, el conjunto solución es

$$(-\infty < a \leq -2) \cup (6 \leq a < +\infty)$$

Analizando ahora el segundo radical, el cociente

$$\frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2} \geq 0$$

dado que el denominador es una constante positiva, el numerador debe ser positivo o nulo tanto con el signo $(+)$ del radical como con el $(-)$.

De inmediato se desecha el intervalo $-\infty < a < -2$, pues con el signo negativo del radical se tendría el numerador negativo y, por lo tanto el cociente también negativo.

De manera que el conjunto solución es

$$a \geq 6$$

12. Para cada uno de los siguientes polinomios:

1. $p(x)=6x^5-5x^4-41x^3+71x^2-37x+6$
2. $q(x)=8x^7-4x^5+3x^4-2x^2$

Determinar

a) Las posibles raíces racionales.
b) El número máximo y mínimo de raíces reales positivas, negativas y complejas, usando la regla de los signos de Descartes.

Solución

1. Para el polinomio $p(x)=6x^5-5x^4-41x^3+71x^2-37x+6$, se tiene

a) Las posibles raíces racionales de $p(x)$ tienen como numerador a los factores, positivos y negativos, del término independiente del polinomio y como denominador a los factores del coeficiente de la variable de mayor exponente en el mismo. De esta forma se tendrá:

posibles numeradores

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

posibles denominadores

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

posibles raíces racionales

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6}\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm 3,\ \pm\frac{3}{2},\ \pm 6$$

b) Se tiene que el número de raíces reales positivas en $p(x)$, es igual al número de cambios de signos en el polinomio, o menor que éste en un número par.

Por otro lado, el número de raíces reales negativas en $p(x)$, es igual al número de cambios de signos en $p(-x)$, o menor que éste en un número par.
Los cambios de signo en los polinomios $p(x)$ y $p(-x)$ son

$p(x)=6x^5-5x^4-41x^3+71x^2-37x+6$ cuatro cambios de signo.
$p(-x)=6(-x)^5-5(-x)^4-41(-x)^3+71(-x)^2-37(-x)+6$
$p(-x)=-6x^5-5x^4+41x^3+71x^2+37x+6$ un cambio de signo.

De acuerdo con lo anterior, dado que $p(x)$ presentó cuatro cambios de signo, entonces dicho polinomio tendrá cuatro, dos o cero raíces reales positivas y sólo una raíz real negativa; puesto que en $p(-x)$ hubo solamente un cambio de signo.

Esta información se puede resumir en una tabla, donde se consideran además, las posibles raíces complejas del polinomio obtenidas mediante la diferencia del total de raíces de $p(x)$, menos el número de raíces positivas y negativas del mismo.

De esta forma, para el polinomio $p(x)$ la tabla será

R. Positivas	4	2	0
R. Negativas	1	1	1
R. Complejas	0	2	4
Total de raíces	5	5	5

Si se obtuvieran las raíces del polinomio $p(x)$, éstas serían: (se sugiere verificarlas por división sintética)

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = \frac{1}{2}$$
$$x_4 = \frac{1}{3}$$
$$x_5 = -3$$

Como se puede observar cuatro raíces son positivas y una negativa, lo cual coincide con la primera posibilidad de la información resumida en la tabla anterior.

2. Para el polinomio $q(x) = 8x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^2$, se tiene

   a) Dado que $q(x)$ no tiene término independiente y el exponente menor del polinomio es dos, el polinomio tiene dos raíces nulas, por consiguiente el análisis pedido se hará al polinomio reducido que resulta de factorizar x^2 en $q(x)$.

$$q(x) = x^2\left(8x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2\right)$$

posibles numeradores: ± 1, ± 2
posibles denominadores: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8
posibles raíces racionales: ± 1, $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$; $\pm \frac{1}{8}$, ± 2

b) $q(x) = x^2\left(8x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2\right)$ tres cambios de signo.
$q(-x) = x^2\left(-8x^5 + 4x^3 + 3x^2 - 2\right)$ dos cambios de signo.

De donde, las cinco raíces del polinomio reducido deberán coincidir con alguna de las siguientes posibilidades:

R. Positivas	3	1	1	3
R. Negativas	2	2	0	0
R. Complejas	0	2	4	2
Total de raíces	5	5	5	5

13. Determinar las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6$$

Solución

Primeramente, se recabará toda la información posible sobre las raíces del polinomio $p(x)$, empleando la regla de los signos de Descartes, entonces:

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6 \qquad \text{tres cambios de signo.}$$
$$p(x) = x^4 + 9x^3 + 25x^2 + 19x - 6 \qquad \text{un cambio de signo.}$$

por lo que las raíces pueden ser

R. Positivas	3	1
R. Negativas	1	1
R. Complejas	0	2
Total de raíces	4	4

Las posibles raíces racionales de $p(x)$ serán

posibles numeradores: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6
posibles denominadores: ± 1,
posibles raíces racionales: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6

De acuerdo con la tabla, el polinomio $p(x)$ tiene una raíz negativa y al menos una positiva, por lo que se probarán por división sintética las posibles raíces positivas.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -9 & 25 & -19 & -6 \\
2 & & 2 & -14 & 22 & 6 \\
\hline
 & 1 & -7 & 11 & 3 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_1 = 2$$

probando con el siguiente valor:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 11 & 3 \\ 3 & & 3 & -12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 3$$

de donde el polinomio reducido es

$$q(x) = x^2 - 4x - 1$$

aplicando la ecuación de segundo grado para obtener las dos raíces restantes se tiene

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \qquad \therefore \qquad \begin{array}{l} x_3 = 2 + \sqrt{5} \\ x_4 = 2 - \sqrt{5} \end{array}$$

por lo tanto, las raíces de $p(x)$ son

$$x_1 = 2; \qquad x_2 = 3; \qquad x_3 = 2 + \sqrt{5}; \qquad x_4 = 2 - \sqrt{5}$$

14. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

tomando en cuenta que $f(1) = 0$.

Solución

De acuerdo con el enunciado, $x_1 = 1$ es raíz de $f(x)$, por lo que el polinomio reducido será

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 1 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$q_1(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

aplicando la regla de los signos de Descartes, se tiene

$$q_1(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \qquad \text{cuatro cambios de signo.}$$

$$q_1(-x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Como se puede observar en $q_1(-x)$ no se presentaron cambios de signo, lo cual implica que $q_1(x)$ no tiene raíces negativas.

R. Positivas	4	2	0
R. Negativas	0	0	0
R. Complejas	0	2	4
Total de raíces	4	4	4

Las posibles raíces racionales de $p_1(x)$ serán:

posibles numeradores: ± 1,
posibles denominadores: ± 1,
posibles raíces racionales: ± 1,
probando la única posible raíz positiva:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 1$$

de donde el polinomio reducido es

$$q_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

dado que para $q_2(x)$ sus posibles raíces son ± 1 y considerando que $q_1(x)$ sólo tienen raíces positivas, de nuevo se probará

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_3 = 1$$

$$q_3(x) = x^2 - 2x + 1$$

factorizando

$$q_3(x)=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_4=1 \\ x_5=1 \end{matrix}$$

por lo que, las raíces de $f(x)$ son

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=1$$

15. El polinomio $f(x)=x^4+4x^3+3x^2-8x-10$ tiene dos raíces irracionales. Situar cada una de estas raíces entre dos números enteros consecutivos.

Solución

Obteniendo las posibles raíces racionales de $f(x)$, se tiene

posibles numeradores: ±1, ±2, ±5, ±10

posibles denominadores: ±1,

posibles raíces racionales: ±1, ±2, ±5, ±10

para determinar entre qué números enteros se encuentran las raíces irracionales de $f(x)$, se buscarán los cambios de signo en el residuo de la división sintética, al probar las posibles raíces de dicho polinomio.

De esta forma se tendrá

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ 1 & & 1 & 5 & 8 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 0 & \boxed{-10} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ 2 & & 2 & 12 & 30 & 44 \\ \hline & 1 & 6 & 15 & 22 & \boxed{34} \end{array}$$

Dado que para $x=1$ y $x=2$ se presentó un cambio de signo en el residuo, esto implica que entre 1 y 2 existe una raíz irracional, entonces

$$1<r_1<2$$

Como se puede observar, en el tercer renglón de la segunda división sintética no existen números negativos, lo cual implica que el número dos es cota superior de las posibles raíces del polinomio $f\left(x\right)$, por consiguiente, se buscará la segunda raíz irracional con valores negativos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ -1 & & -1 & -3 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -8 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ -2 & & -2 & -4 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -6 & \boxed{2} \end{array}$$

puesto que para $x=-1$ y $x=-2$ también se presentó un cambio de signo en el residuo, entonces entre -1 y -2 se encuentra la segunda raíz irracional de $f\left(x\right)$, esto es

$$-2<r_2<-1$$

16. Determinar las raíces del polinomio

$$p\left(x\right)=x^4-9x^3+25x^2-19x-6$$

Solución

Obteniendo las posibles raíces racionales

posibles numeradores: ±1, ±2, ±3, ±6

posibles denominadores: ±1

posibles raíces racionales: ±1, ±2, ±3, ±6

empleando la división sintética se tiene

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -9 & 25 & -19 & -6 \\ 2 & & 2 & -14 & 22 & 6 \\ \hline & 1 & -7 & 11 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_1=2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 11 & 3 \\ 3 & & 3 & -12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 3$$

del polinomio reducido se puede plantear la ecuación

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

de donde

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

por lo tanto, las raíces de $p(x)$ son

$$x_1 = 2; \qquad x_2 = 3; \qquad x_3 = 2+\sqrt{5}; \qquad x_4 = 2-\sqrt{5}$$

Obsérvese que las raíces irracionales que se presentaron $(x_3 \text{ y } x_4)$ son de la forma $a+\sqrt{b}$ y $a-\sqrt{b}$. Existe un teorema que afirma que, si un polinomio de coeficientes racionales admite una raíz irracional de la forma $a+\sqrt{b}$, donde $a,\ b \in Q$ con $b>0$, entonces, $a-\sqrt{b}$ es otra de sus raíces.

17. Dada la función $f(t)$ definida por

$$f(t) = 256\,t^4 - 128\,t^3 - 96\,t^2 + 8\,t + 5$$

si $x = 4\,t$ obtener

a) El polinomio $f(x)$
b) Los valores de t para los cuales $f(t) = 0$.

Solución

a) Como $x = 4t$ entonces $t = \dfrac{x}{4}$, por consiguiente $f(x)$ será

$$f(x) = 256\left(\frac{x}{4}\right)^4 - 128\left(\frac{x}{4}\right)^3 - 96\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{4}\right) + 5$$

simplificando

$$f(x)=x^4-2x^3-6x^2+2x+5$$

b) Para obtener las raíces del polinomio $f(t)$, se determinarán las raíces del polinomio $f(x)$ y posteriormente se regresará a la variable original, obteniendo con ello las raíces buscadas.

Posibles raíces racionales de $f(x)$: $\pm 1, \quad \pm 5$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -6 & 2 & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & 5 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_1=-1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -3 & 5 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2=1$$

de donde se obtiene

$$x^2-2x-5=0$$

con lo cual las dos raíces restantes serán

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+20}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{6}}{2}=1\pm\sqrt{6}$$

$$x_3=1+\sqrt{6} \qquad \text{y} \qquad x_4=1-\sqrt{6}$$

regresando a la variable original, se tiene

como $t=\dfrac{x}{4}$ entonces

$$t_1=\frac{x_1}{4} \qquad t_1=\frac{-1}{4} \qquad \therefore \qquad t_1=-\frac{1}{4}$$

$$t_2=\frac{x_2}{4} \qquad t_2=\frac{1}{4} \qquad \therefore \qquad t_2=\frac{1}{4}$$

$$t_3 = \frac{x_3}{4} \qquad t_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{4} \qquad \therefore \qquad t_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$t_4 = \frac{x_4}{4} \qquad t_4 = \frac{1-\sqrt{6}}{4} \qquad \therefore \qquad t_4 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Comprobar que los valores de t_1, t_2, t_3 y t_4 son las raíces del polinomio $f(t)$.

18. Obtener las raíces del polinomio

$$p(x) = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$$

Solución

Para obtener las raíces del polinomio $p(x)$, se efectuará el siguiente cambio de variable:

si $x^2 = w$ entonces

$$p(w) = w^3 + 4w^2 - w - 4$$

Obteniendo las raíces del polinomio $p(w)$, se tiene
posibles raíces racionales de $p(w)$: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & & 1 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array} \qquad w_1 = 1$$

de donde se obtiene

$$w^2 + 5w + 4 = 0$$

factorizando

$$(w+1)(w+4) = 0$$

entonces

$$w_2 = -1 \qquad \text{y} \qquad w_3 = -4$$

regresando a la variable original

$$\text{para } w_1 = 1 \text{, entonces } x^2 = 1; \qquad x = \pm\sqrt{1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$$

$$\text{para } w_2 = -1 \text{, entonces } x^2 = -1; \qquad x = \pm\sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x_3 = i \\ x_4 = -i \end{matrix}$$

$$\text{para } w_3 = -4 \text{, entonces } x^2 = -4; \qquad x = \pm\sqrt{-4} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} x_5 = 2i \\ x_6 = -2i \end{matrix}$$

19. Calcular el valor de k y las raíces del polinomio:

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 + kx^4 + 15x^3 - 32x^2 + 12x$$

si $x-1$ es uno de sus factores.

Solución

Factorizando el polinomio $f(x)$

$$f(x) = x\underbrace{\left(2x^5 + 3x^4 + kx^3 + 15x^2 - 32x + 12\right)}_{Q(x)} = x\,Q(x)$$

dado que $(x-1)$ es factor del polinomio $Q(x)$, entonces se debe cumplir que $Q(1) = 0$

$$Q(1) = 2(1)^5 + 3(1)^4 + k(1)^3 + 15(1)^2 - 32(1) + 12 = 0$$

simplificando

$$2 + 3 + k + 15 - 32 + 12 = 0$$

$$k + 32 - 32 = 0$$

$$\therefore k = 0$$

por lo que, el polinomio $Q(x)$ será

$$Q(x) = 2x^5 + 3x^4 + 15x^2 - 32x + 12$$

Obteniendo las raíces por medio de división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & 3 & 0 & 15 & -32 & 12 \\
1 & & 2 & 5 & 5 & 20 & -12 \\
\hline
 & 2 & 5 & 5 & 20 & -12 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & 5 & 10 & -12 \\
-3 & & -6 & 3 & -24 & 12 \\
\hline
 & 2 & -1 & 8 & -4 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_2 = -3$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -1 & 8 & -4 \\
\frac{1}{2} & & 1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 2 & 0 & 8 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_3 = \frac{1}{2}$$

de donde

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \qquad \begin{array}{l} x_4 = 2i \\ x_5 = -2i \end{array}$$

Finalmente, las raíces del polinomio $f(x)$ son

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = 2i; \quad x_5 = -2i; \quad x_6 = 0$$

20. Para el polinomio $p(x) = 2x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 6x + 4$ determinar

a) Los valores de A y B para que el polinomio $p(x)$ sea divisible entre $(2x-4)$ y $(x-1)$.

b) Las raíces de $p(x)$.

Solución

a) Dado que $p(x)$ es divisible entre $(2x-4)$ y $(x-1)$, entonces al dividir $p(x)$ entre dichos factores el residuo de la división debe ser igual a cero, de donde se tiene

$$\begin{array}{r|ccccc}
 & 2 & A & B & -6 & 4 \\
2 & & 4 & 2A+8 & 4A+2B+16 & 8A+4B+20 \\
\hline
 & 2 & A+4 & 2A+B+8 & 4A+2B+10 & 8A+4B+24=0
\end{array} \qquad \ldots(1)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & A & B & -6 & 4 \\ 1 & & 2 & A+2 & A+B+2 & A+B-4 \\ \hline & 2 & A+2 & A+B+2 & A+B-4 & A+B=0 \end{array} \qquad \ldots(2)$$

De acuerdo con lo anterior, se han generado dos ecuaciones con dos incógnitas, las que resolviendo simultáneamente darán los valores de A y B buscados.

$$8A+4B=-24 \qquad (1)$$

$$A+B=0 \qquad (2)$$

simplificando la ecuación 1

$$2A+B=-6 \qquad (1)$$

$$A+B=0 \qquad (2)$$

de donde se obtiene

$$A=-6 \qquad \text{y} \qquad B=6$$

por lo tanto, el polinomio $p(x)$ será

$$p(x)=2x^4-6x^3+6x^2-6x+4$$

b) Obteniendo las raíces de $p(x)$ por división sintética, se tiene

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -6 & 6 & -6 & 4 \\ 2 & & 4 & -4 & 4 & -4 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_1=2$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2=1$$

de donde

$$2x^2+2=0; \qquad x=\pm\sqrt{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} x_3=i \\ x_4=-i \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes expresiones, indicar si son o no polinomios; en caso afirmativo determinar su grado y en caso negativo decir porqué.

a) $g(x)=\frac{1}{4}x^8-\frac{2}{5}x^6+\frac{4}{9}x^5+\frac{7}{15}x^4+\frac{3}{8}x^3-\frac{5}{7}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{9}$

b) $v(s)=\frac{s^4-5s^3+14s^2-9s-14}{s-2}; \qquad s\neq 2$

c) $p(y)=\left(y^2+2y-8\right)\left(y^3-3y^2-7y+5\right)$

d) $h(x)=\frac{x^5-7x^4-8x^3+2x^2+x-7}{x+5}$

e) $y^2=\frac{(x-3)(x-2)(x+1)}{4}$

f) $f(x)=4x^{2/3}-7x^{1/2}+8x$

g) $4x^3-2x^2-5x+8=0$

h) $m=12\tan^3\theta-7\tan^2\theta+5\tan\theta-10-8\sec^2\theta$

i) $p(x)=h(x)+g(x)\,f(x)$

donde: $h(x)=5x^4+12x^3-8x^2-7x+8$

$g(x)=7x^3+6x^2+2x-6$

$f(x)=-3x^7-2x^6+5x^4+7x^3-14x^2-8x+4$

j) $f(x)=3x^{-2}+2x^{-4}+7$

2. Demostrar que $x+a$ es factor de $p(x)=x^{2n}-a^{2n}$ donde $n\in N$.

3. Demostrar que $h(x)=x^{15}-1$ es divisible entre x^3-1

4. Demostrar que $f(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$ es divisible entre $x+a+b$.

5. Determinar los valores de p y q de tal manera que una de las raíces de $h(x)$ sea el cuadrado de otra. Demostrar que la tercera raíz es la suma de las anteriores:

$$h(x)=x^3+px+q$$

6. Sea el polinomio $p(x)=x^{2n}-2$, donde $n\in N$. Determinar la naturaleza de sus raíces utilizando la regla de los signos de Descartes.

7. Sea el polinomio $h(x)=x^{2n-1}-2$, donde $n \in N$. Determinar la naturaleza de sus raíces utilizando la regla de los signos de Descartes.

8. Determinar los valores A y B de tal manera que se cumpla la igualdad

$$f(x)=h(x)$$

donde

$f(x)=3x^4-2x^3-x^2-x+32$

$h(x)=A\left(x^3+2x^2-4x-7\right)+B\left(x^4+x^2-3x+6\right)$

9. Determinar los valores de A, B, C, D y E de tal manera que se cumple la igualdad

$$\frac{3x^4+4x^3+16x^2+20x+9}{(x+2)\left(x^2+3\right)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+3}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+3\right)^2}$$

10. Demostrar que para el polinomio $p(x)=x^3+7x-6i$, $x_1=i$ es una raíz de $p(x)$ pero $x_2=-i$ no lo es. Explicar por qué no, aunque los dos números son complejos conjugados.

11. Determinar p y q para que x^4+a^2 sea divisible entre x^2+px+q; $a \in R$.

12. Determinar el valor o los valores de θ, de tal manera que t sea nulo

$$t=3\tan^3\theta+2\sec^2\theta-4\tan^2\theta+4\tan\theta-7$$

13. Calcular el valor o los valores de x para que f valga 5

$$f=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+3$$

14. Dado el polinomio $p(x)=(a-2)x^4-2ax^2+a-1$, determinar el intervalo de valores de a, $a \in R$, de tal manera que las cuatro raíces de $p(x)$ sean reales.

15. Determinar los valores de a, $a \in R$, para los cuales el polinomio $p(x)=(a+5)x^4+(2a+3)x^2+a+3$ tiene sus cuatro raíces reales.

16. Para cada uno de los siguientes polinomios, obtener sus raíces, incluyendo en su desarrollo la utilización de la regla de los signos de Descartes.

a) $p(x)=2x^5+4x^4+22x^3+44x^2+36x+72$

b) $f(x)=2x^5+10x^4+11x^3-4x^2-x+6$

c) $q(x)=2x^6-x^5+x^4-x^3-x^2$

d) $h(x)=x^5-x^4-5x^3+5x^2+6x-6$

e) $g(x)=2x^5+12x^4+26x^3+28x^2+24x+16$

f) $R(x)=x^6-2x^5-x^4-4x^3-14x^2+16x+24$

17. Obtener el valor de a en el polinomio

$$f(x)=x^3+ax+16$$

de tal forma que $f(x)$ admita dos raíces iguales.

18. Determinar los valores de los coeficientes a, b, y c, de tal forma que sean además raíces del polinomio.

$$p(x)=x^3-ax^2+bx-c$$

19. Obtener las raíces del polinomio $f(x)$, si se sabe que

$$f(x)=p(x)\cdot q(x)$$

donde

$p(x)=x^2+1$ y
$q(x)=x^6-3x^5-9x^4+20x^3$

20. Expresar mediante factores lineales al polinomio

$p(x)=x^6-5x^5+4x^4+14x^3-32x^2+24x$, si se sabe que $\alpha=1-i$ es una de sus raíces y además que $f(3)=0$.

21. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x)=x^5+(1-i)x^4+(2-i)x^3+(4-2i)x^2+(-8-4i)x+8i$$

si se sabe que $x=i$ es una de sus raíces.

22. Obtener las raíces del polinomio

$$p(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x$$

si se sabe que tres de ellas son

$$\alpha_1 = 1 - i; \qquad \alpha_2 = \sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad a_3 = -\sqrt{2}$$

23. Si $\alpha = 3 + i$ es una raíz del polinomio

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + ax^3 - 20x^2$$

determinar

a) El valor de la constante a.
b) Las raíces del polinomio $f(x)$.

24. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^7 + x^6 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x$$

si se sabe que $\sqrt{-1}$ es una de sus raíces.

25. Para el polinomio $f(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$ determinar

a) Los valores de A y B, si se sabe que $f(1) = 6$ y $f(2) = 20$.
b) Las raíces de $f(x)$.

26. Obtener las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 2x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3$
b) $f(x) = x^9 + x^6 + x^3 + 1$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) Sí, es polinomio en x y su grado es ocho.
   b) No, se trata de un cociente de polinomios, pero al dividir se obtiene un polinomio de grado 3.
   c) Sí, es un polinomio en y con $gr\left(p\right)=5$
   d) No, es un cociente de polinomios.
   e) No, por no ser una función.
   f) No, por las potencias fraccionarias.
   g) No, se trata de una ecuación.
   h) Sí, es un polinomio en $\tan\theta$ y su grado es 3.
   i) Sí, es un polinomio en x con grado 10.
   j) No, por tener potencias negativas.

5. $\left.\begin{array}{l} p=-\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right) \\ q=\alpha\beta^2+\alpha^2\beta \end{array}\right\}$ donde α, β son raíces de $h\left(x\right)$ y $\beta=\alpha^2$

6. Una raíz real positiva, una negativa y $2n-2$ complejas.

7. Una raíz real positiva, ninguna negativa y $2n$ complejas.

8. $A=-2$

   $B=3$

9. $A=1$

   $B=2$

   $C=0$

   $D=4$

   $E=0$

11. $p=\pm\sqrt{2a}$; $q=a$

12. $\theta=\dfrac{\pi}{4}\pm n\pi; n\in N$

13. $x_1=\dfrac{1}{2}$

    $x_2=-1$

    $x_3=\text{cis } 270°$

    $x_4=\text{cis } 90°$

14. $a > 2$

15. $-3 \leq a \leq -\dfrac{51}{20}$

16. a) $x_1 = -2;$ $x_2 = \sqrt{2}i;$ $x_3 = -\sqrt{2}i;$ $x_4 = 3i;$ $x_5 = -3i$

b) $x_1 = -1;$ $x_2 = -2;$ $x_3 = -3;$ $x_4 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i;$ $x_5 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

c) $x_1 = x_2 = 0;$ $x_3 = 1;$ $x_4 = -\dfrac{1}{2};$ $x_5 = i;$ $x_6 = -i$

d) $x_1 = 1;$ $x_2 = \sqrt{2};$ $x_3 = -\sqrt{2};$ $x_4 = \sqrt{3};$ $x_5 = -\sqrt{3}$

e) $x_1 = x_2 = x_3 = -2;$ $x_4 = i;$ $x_5 = -i$

f) $x_1 = -1;$ $x_2 = 3;$ $x_3 = \sqrt{2};$ $x_4 = -\sqrt{2};$ $x_5 = 2i;$ $x_6 = -2i$

17. $a = -12$ las raíces son: $x_1 = x_2 = 2;$ $x_3 = -4$

18. $a = -1;$ $b = -1$ y $c = 1$

19. $x_1 = i;$ $x_2 = -i;$ $x_3 = x_4 = x_5 = 0;$ $x_6 = -4;$ $x_7 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{21}}{2};$

$x_8 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

20. $p(x) = x(x-3)(x-1+i)(x-1-i)(x+2)(x-2)$

21. $x_1 = i;$ $x_2 = 1;$ $x_3 = -2;$ $x_4 = 2i;$ $x_5 = -2i$

22. $\alpha_1 = 1-i;$ $\alpha_2 = \sqrt{2};$ $\alpha_3 = -\sqrt{2};$ $\alpha_4 = 1+i;$ $\alpha_5 = 0;$ $\alpha_6 = i;$ $\alpha_7 = -i$

23. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0;$ $\alpha_3 = 3+i;$ $\alpha_4 = 3-i;$ $\alpha_5 = 2$

24. $x_1 = x_2 = i;$ $x_3 = x_4 = -i;$ $x_5 = 0;$ $x_6 = 1;$ $x_7 = -2$

25. a) $A = 1$
$B = -1$

b) $x_1 = -2;$ $x_2 = i;$ $x_3 = -i$

26. a) $x_1 = x_2 = x_3 = 0;$ $x_4 = 1;$ $x_5 = -1;$ $x_6 = 1 \text{ cis } 45°;$

$x_7 = 1 \text{ cis } 135°;$ $x_8 = 1 \text{ cis } 225°;$ $x_9 = 1 \text{ cis } 315°$

b) $x_1 = 1 \text{ cis } 60°;$ $x_2 = 1 \text{ cis } 180°;$ $x_3 = 1 \text{ cis } 300°;$

$x_4 = 1 \text{ cis } 30°;$ $x_5 = 1 \text{ cis } 150°;$ $x_6 = 1 \text{ cis } 270°;$

$x_7 = 1 \text{ cis } 90°;$ $x_8 = 1 \text{ cis } 210°;$ $x_9 = 1 \text{ cis } 330°$

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Se dice que la aritmética de los egipcios estaba muy adelantada para las simples exigencias de sus asuntos cotidianos. El detalle más significativo de este desarrollo está en el hecho de que los egipcios gustaban de realizar comprobaciones de sus cálculos, lo cual parece indicar que ya en el siglo XVII a.C., comprendían el valor de la demostración en la aritmética.

Un problema de mayor interés es el planteado por Ahmes, consistía en obtener un número que sumado a su quinta parte diera 21. Es posible que este problema tuviera cierto valor práctico, pero el siguiente, fechado entre 2200 y 1700 a.C., es una muestra del desarrollo del pensamiento matemático de los egipcios. Tal problema consistía en resolver las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 100, \quad y = \frac{3}{4}x$$

(con el simbolismo propio de la época). Parece ser que este problema es uno de los primeros ejemplos de sistemas de ecuaciones simultáneas registrados en la historia. El método que se utilizó para resolver dicho sistema de ecuaciones, llamado de *falsa posición*, sobrevivió hasta los inicios del siglo XV de nuestra era.

En la actualidad, el método de eliminación de Gauss es, por su sencillez, el más utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Existe una gran diversidad de problemas relacionados con la cinemática, la dinámica, la estática, la electrónica, la óptica y otras disciplinas que conducen a sistemas de ecuaciones simultáneas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea el sistema de ecuaciones

$$S:\begin{cases} x+xy+y=5 & ...(1) \\ x+y-z=4 & ...(2) \\ x+xz+z=-1 & ...(3) \end{cases}$$

Determinar

a) si $x=2, \quad y=1, \quad z=-1$ es solución de S, y
b) si $x=0, \quad y=5, \quad z=1$ es solución de S.

Solución

a) Sustituimos cada uno de los valores propuestos en las ecuaciones de S.
Para la ecuación 1

$$2+(2)(1)+(1)=5$$
$$2+2+1=5$$
$$5=5$$

Para la ecuación 2

$$2+1-(-1)=4$$
$$3+1=4$$
$$4=4$$

Para la ecuación 3

$$2+(2)(-1)+(-1)=-1$$
$$2-2-1=-1$$
$$-1=-1$$

Como se obtienen 3 identidades, $x=2$, $y=1$, $z=-1$ es una solución de S.

b) Sustituimos cada uno de los valores propuestos en las ecuaciones de S.

Para la ecuación 1

$$\begin{aligned} 0+(0)(5)+5&=5 \\ 0+0+5&=5 \\ 5&=5 \end{aligned}$$

Para la ecuación 2

$$\begin{aligned} 0+5-1&=4 \\ 4&=4 \end{aligned}$$

Para la ecuación 3

$$\begin{aligned} 0+(0)(1)+1&=-1 \\ 1&\neq-1 \end{aligned}$$

Como en la ecuación 3 no se obtuvo una identidad $x=0$, $y=5$, $z=1$ no es solución del sistema S, a pesar de que en la 1 y 2 sí se obtuvieron identidades. Una solución de S debe satisfacer todas sus ecuaciones.

2. En caso de ser posible, obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 3x-2y+z=2 \\ 5x-2y+2z=1 \end{cases}$$

Solución

Como se puede observar, los coeficientes de x en las tres ecuaciones son diferentes de uno y dado que resulta más simple iniciar el proceso de escalonamiento cuando se tiene por lo menos, en una ecuación, la primer incógnita con coeficiente unitario, entonces, en este sistema de ecuaciones, podemos optar por alguna de las siguiente alternativas:

a) Multiplicar la primera ecuación por un medio para obtener el coeficiente de x igual a uno y con esto iniciar el escalonamiento; sin embargo, los coeficientes de las incógnitas restantes y el término independiente serían fraccionarios, lo cual complica el procedimiento. Lo mismo sucedería si intentamos esto con las otras dos ecuaciones.

b) Otra alternativa sería multiplicar por menos uno la primera ecuación y sumarla a la segunda, para lograr con esto, el coeficiente unitario en x en la segunda ecuación y con ello, proceder al escalonamiento del sistema. Esta alternativa se considera más conveniente que la anterior.

c) La opción que se considera más simple, es aplicar la propiedad de la conmutatividad de la adición en las tres ecuaciones del sistema, de tal forma que la incógnita que se deje como primera tenga precisamente coeficiente unitario y, con ello, proceder al escalonamiento. Apliquemos esta alternativa.

Como y tiene coeficiente unitario en la primera ecuación del sistema, entonces se conmutará con x en las tres ecuaciones, quedando como sigue:

$$\begin{cases} y+2x+3z=-1 & \text{...(1)} \\ -2y+3x+z=2 & \text{...(2)} \\ -2y+5x+2z=1 & \text{...(3)} \end{cases}$$

procediendo al escalonamiento, al multiplicar por 2 ambos miembros de la ecuación 1 y al sumarla con la ecuación 2; y al multiplicar por dos ambos miembros de la ecuación 1 y al sumarla con la ecuación 3, se obtiene:

$$\begin{cases} y+2x+3z=-1 & \text{...(1)} \\ 7x+7z=0 & \text{...(4)} \\ 9x+8z=-1 & \text{...(5)} \end{cases}$$

Al multiplicar por $\frac{1}{7}$ ambos miembros de la ecuación 4, se tiene

$$\begin{cases} y+2x+3z=-1 & \text{...(1)} \\ x+z=0 & \text{...(6)} \\ 9x+8z=-1 & \text{...(5)} \end{cases}$$

Multiplicando por -9 ambos miembros de la ecuación 6 y sumarla a la ecuación 5, se llega a

$$\begin{cases} y+2x+3z=-1 & \text{...(1)} \\ x+z=0 & \text{...(6)} \\ -z=-1 & \text{...(7)} \end{cases}$$

de la expresión 3

$$z = 1$$

de la ecuación 6

$$x = -1$$

sustituyendo en la ecuación 1 se tiene

$$y = -2$$

por lo tanto, la solución al sistema de ecuaciones es

$$x=-1$$

$$y=-2$$

$$z=1$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$S:\begin{cases} x+y=1 & \text{...(1)} \\ ix+y=-i & \text{...(2)} \end{cases}$$

Solución

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ i & 1 & -i \end{array}\right) \underset{\sim}{-iR_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-i & -2i \end{array}\right) \underset{\sim}{\frac{1}{2}(1+i)\,R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-i \end{array}\right)$$

Por lo tanto $y=1-i$. Sustituyendo en la ecuación 1

$$x+y=1$$

$$x+(1-i)=1$$

$$x-i=0$$

$$x=i$$

La solución del sistema S es $x=i$, $y=1-i$.

4. Obtener el conjunto solución del sistema

$$\begin{cases} (2+2i)\,x+(2+4i)\,y+(2+6i)\,z+(2+8i)\,w=2+10i \\ (-3+i)\,x+(4-2i)\,y-(1+i)\,z-4iw=-2-i \end{cases}$$

donde $x,\ y,\ z,\ w \in \mathbb{R}$

Solución

Como el valor de las incógnitas debe ser real, entonces se expresa cada ecuación de la siguiente forma:

Primera ecuación

$$2x+2ix+2y+4iy+2z+6iz+2w+8iw=2+10i$$

agrupando

$$(2x+2y+2z+2w)+(2x+4y+6z+8w)\,i=2+10i$$

por igualdad de números complejos se llega a

$$2x+2y+2z+2w=2 \qquad ...(1)$$

$$2x+4y+6z+8w=10 \qquad ...(2)$$

Segunda ecuación

$$-3x+ix+4y-2iy-z-iz-4iw=-2-i$$

agrupando

$$(-3x+4y-z)+(x-2y-z-4w)\,i=-2-i$$

por igualdad

$$-3x+4y-z=-2 \qquad ...(3)$$

$$x-2y-z-4w=-1 \qquad ...(4)$$

Con las ecuaciones de la (1) a la (4) se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+2y+2z+2w=2 \\ 2x+4y+6z+8w=10 \\ -3x+4y-z \qquad = -2 \\ x-2y-z-4w=-1 \end{cases}$$

al simplificar las dos primeras ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 & \ldots(1) \\ x+2y+3z+4w=5 & \ldots(2) \\ -3x+4y-z \qquad = -2 & \ldots(3) \\ x-2y-z-4w=-1 & \ldots(4) \end{cases}$$

Restando la ecuación 1 de la ecuación 2; multiplicando por tres ambos miembros de la ecuación 1 y sumarle la ecuación 3; y al restar la ecuación 1 de la ecuación 4, se obtiene:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 & \ldots(1) \\ y+2z+3w=4 & \ldots(5) \\ 7y+2z+3w=1 & \ldots(6) \\ -3y-2z-5w=-2 & \ldots(7) \end{cases}$$

Al multiplicar por –7 ambos miembros de la ecuación 5 y sumarla con la ecuación 6; y al multiplicar por 3 ambos miembros de la ecuación 5 y sumarla con la ecuación 7, se llega a:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 & \ldots(1) \\ y+2z+3w=4 & \ldots(8) \\ -12z-18w=-27 & \ldots(9) \\ 4z+4w=10 & \ldots(10) \end{cases}$$

Al multiplicar por 3 ambos miembros de la ecuación 10 y sumarla con la ecuación 9; y al multiplicar por $\frac{1}{2}$ ambos miembros de la ecuación 10, se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 & \ldots(1) \\ \quad y+2z+3w=4 & \ldots(8) \\ \qquad\quad -6w=3 & \ldots(11) \\ \qquad 2z+2w=5 & \ldots(12) \end{cases}$$

de la ecuación 11 se obtiene

$$w=-\frac{1}{2}$$

al sustituir w en la ecuación 12 tenemos

$$z=3$$

al sustituir en la ecuación 1 se tiene

$$y=-\frac{1}{2}$$

sustituyendo en la ecuación 1, obtendremos

$$x=-1$$

por lo que la solución al sistema es

$$x=-1$$

$$y=-\frac{1}{2}$$

$$z=3$$

$$w=-\frac{1}{2}$$

5. Determinar la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$S:\begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=1 \\ \alpha+3\beta+\gamma=2 \\ 2\alpha+4\beta+3\gamma=3 \\ -\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

Solución

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \\ \sim \\ R_1+R_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_2+R_3 \\ -R_2+R_4 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Un sistema equivalente a S es

$$S' : \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=1 & \ldots(1) \\ 2\beta-\gamma=1 & \ldots(2) \end{cases}$$

De la ecuación (2) $\gamma = 2\beta - 1$

Sustituyendo este último resultado en (1)

$$\alpha+\beta+2\left(2\beta-1\right)=1$$
$$\alpha+\beta+4\beta-2=1$$
$$\alpha+5\beta=1$$
$$\alpha=1-5\beta$$

Haciendo $\beta = t$ donde $t \in \mathbb{R}$, la solución del sistema es

$$\alpha = 1-5t, \qquad \beta = t, \qquad \gamma = 2t-1$$

6. Determinar los valores de $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ tales que el sistema de ecuaciones lineales

$$M : \begin{cases} ax+by+cz=0 \\ \left(a-b\right)x-cy+z=0 \\ x+y+\left(b+c\right)z=0 \end{cases}$$

tenga como solución a $x=t,\ y=-t,\ z=t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución

Sustituyendo la solución en el sistema M y simplificando, se obtiene

$$\begin{cases} at-bt+ct=0 \\ (a-b)t-ct+t=0 \\ t-t+(b+c)t=0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} (a-b+c)t=0 \\ (a-b-c)t=-t \\ (b+c)t=0 \end{cases}$$

Como el sistema es compatible para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{cases} a-b+c=0 & \text{...(1)} \\ a-b-c=-1 & \text{...(2)} \\ \quad b+c=0 & \text{...(3)} \end{cases}$$

De la ecuación 3 $c=-b$; sustituyendo este resultado en la ecuación 2 se tiene que

$$a-b-(-b)=-1$$

$$a=-1$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 1

$$-1-b+c=0$$

$$-b+c=1$$

y como $c=-b$

$$-b+(-b)=1$$

$$-2b=1$$

Por tanto, $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$ y $c=\frac{1}{2}$, son los valores solicitados.

7. Determinar los valores de k para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x-y+kz=1 \\ -x+y-kz=0 \\ 2x-y+2kz=-1 \end{cases}$$

sea compatible determinado.

Solución

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -1 & 2k & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -1 & k & 1 \\ 2 & -1 & 2k & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2R_1+R_2 \\ 2R_1+R3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{-R_2+R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & -k & 1 \\ 0 & 0 & k & -2 \end{array}\right)$$

Un sistema equivalente al sistema dado es

$$\begin{aligned} -x+y-kz &= 0 \\ y-kz &= 1 \\ kz &= -2 \end{aligned}$$

Por tanto si $k \neq 0$ el sistema tiene solución única, es decir, es compatible determinado.

8. Determinar los valores de a, de b y de c para que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ 3x+2y+z=b \\ 7x+6y-3z=c \end{cases}$$

sea compatible.

Solución

Aplicando el método Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 & b \\ 7 & 6 & -3 & c \end{array}\right) \begin{array}{c} -3R_1+R_2 \\ -7R_1+R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 4 & -3a+b \\ 0 & -1 & 4 & -7a+c \end{array}\right) \underset{\sim}{-R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 4 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & -4a-b+c \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible se debe cumplir la condición

$$-4a-b+c=0$$

Despejando c

$$c=4a+b$$

Por tanto el sistema es compatible si $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ y $c=4a+b$

9. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$S:\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \\ -3x+my+nz=0 \end{cases}$$

Determinar el conjunto de valores de m y n que hacen a S compatible indeterminado.

Solución

Aplicando transformaciones elementales a la matriz de coeficientes de R

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & m & n \end{pmatrix} \underset{3R_1+R_3}{\overset{-2R_1+R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & m+6 & n+3 \end{pmatrix} \overset{(m+6)\,R_2+R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & n-m-3 \end{pmatrix}$$

Para que S sea compatible indeterminado $n-m-3=0$. Los valores solicitados pueden expresarse como

$$n=m+3 \quad \forall \quad m\in\mathbb{R}$$

10. Determinar para qué valor o valores de $k \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones tiene solución distinta a la trivial.

$$\begin{cases} 2x+ky+z+w=0 \\ 3x+(k-1)y-2z-w=0 \\ x-2y+4z+2w=0 \\ 2x+y+z+2w=0 \end{cases}$$

Solución

Intercambiando la primera y tercera ecuación, tenemos

$$\begin{cases} x-2y+4z+2w=0 & \ldots(E_1) \\ 3x+(k-1)y-2z-w=0 & \ldots(E_2) \\ 2x+ky+z+w=0 & \ldots(E_3) \\ 2x+y+z+2w=0 & \ldots(E_4) \end{cases}$$

Efectuando $-3E_1+E_2$, $-2E_1+E_3$ y $-2E_1+E_4$ se obtiene

$$\begin{cases} x-2y+4z+2w=0 & \\ (k+5)y-14z-7w=0 & \ldots(E_5) \\ (k+4)y-7z-3w=0 & \ldots(E_6) \\ 5y-7z-2w=0 & \end{cases}$$

haciendo $-E_6+E_5$

$$\begin{cases} x-2y+4z+2w=0 & \\ y-7z-4w=0 & \ldots(E_7) \\ (k+4)y-7z-3w=0 & \ldots(E_6) \\ 5y-7z-2w=0 & \ldots(E_8) \end{cases}$$

realizando $-\left(k+4\right)E_7+E_6$ y $-5E_7+E_8$

$$x-2y+4z+2w=0$$
$$y-7z-4w=0$$
$$\left(7k+21\right)z+\left(4k+13\right)w=0 \quad ...(E_9)$$
$$28z+18w=0 \quad ...(E_{10})$$

multiplicando la ecuación E_{10} por $\dfrac{1}{28}$ e intercambiándola con la ecuación E_9, tenemos

$$\begin{cases} x-2y+4z+2w=0 \\ y-7z-4w=0 \\ z+\dfrac{9}{14}w=0 & ...(E_{11}) \\ \left(7k+21\right)z+\left(4k+13\right)w=0 & ...(E_{12}) \end{cases}$$

Al efectuar $-\left(7k+21\right)E_{11}+E_{12}$ se obtiene

$$\begin{cases} x-2y+4z+2w=0 \\ y-7z-4w=0 \\ z+\dfrac{9}{14}w=0 \\ \left(-\dfrac{1}{2}k-\dfrac{1}{2}\right)w=0 \end{cases}$$

Si $k=-1$ entonces la ecuación cuatro queda reducida, con lo cual el sistema de ecuaciones escalonado es de tres ecuaciones con cuatro incógnitas y por lo tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado que admite soluciones distintas de la trivial.

11. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lcl} 2kz-2\alpha=4y-2x & & \\ 6z+3\alpha=y-x & ; & \alpha,k\in\mathbb{R} \\ 2z-2=2y-x & & \end{array}$$

Determinar los valores que simultáneamente deben tomar α y k para que el sistema sea

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

Solución

Al reordenar el sistema se tiene

$$\begin{cases} 2x-4y+kz=2\alpha \\ x-y+6z=-3\alpha \\ x-2y+2z=2 \end{cases}$$

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2k & 2\alpha \\ 1 & -1 & 6 & -3\alpha \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}R_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & \alpha \\ 1 & -1 & 6 & -3\alpha \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & \alpha \\ 0 & 1 & (6-k) & -4\alpha \\ 0 & 0 & (2-k) & 2-\alpha \end{array}\right]$$

Por facilidad, se responderán los incisos en el siguiente orden: c, b y a

c) Si $k=2$ y $\alpha \neq 2$ entonces el sistema es incompatible.
b) Cuando $k=2$ y $\alpha=2$ el sistema es compatible indeterminado.
a) $\forall\ k \neq 2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ el sistema es compatible determinado.

12. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+2y &= -1 \\ 2x+3y-kz &= -2 \\ kx+ky-yz &= 2 \\ -y-z &= 0 \end{aligned}$$

Determinar el valor o los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema sea

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

Para cada caso obtenga el conjunto solución.

Solución

La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -k & -2 \\ k & k & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{-2R_1+R_2}{\overset{}{-kR_1+R_3}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & -k & -4 & k+2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & -k & -4 & k+2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{R_2+R_4}{\overset{kR_2+R_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & (k+2)(k+2) & k+2 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente queda

$$x+2y=-1$$
$$y+kz=0$$
$$(k+2)(k-2)\,z=k+2$$
$$(k-1)\,z=0$$

si $k=1$, el sistema resulta

$$x+2y=-1$$
$$y+z=0$$
$$-3z=3$$

que es un sistema compatible determinado con $k=1$. En este caso el conjunto solución es

$$\{-3, 1, -1\}$$

Por otra parte, si $k=-2$ el sistema es ahora

$$\begin{aligned} x+2y&=-1 \\ y-2z&=0 \\ -3z&=0 \end{aligned}$$

Nuevamente el sistema es compatible determinado pero ahora su conjunto solución es

$$\{-1, 0, 0\}$$

Si $k=2$, el sistema es incompatible porque en la tercera ecuación se tiene la igualdad incongruente $0=4$.

Por último, para cualquier otro valor de k el sistema es también incompatible ya que despejando z de la tercera ecuación

$$z=\frac{k+z}{(k+2)(k-2)}=\frac{1}{k-2} \text{ (la cancelación es posible porque } k\neq -2\text{)}$$

por otra parte de la ecuación $(k-1)\,z=0$

$$z=\frac{0}{k-1}=0$$

Estas dos ecuaciones son incompatibles.

Resumen

a) Compatible determinado para $k=1$ y $k=-2$
b) No existe valor para que el sistema sea compatible indeterminado
c) Incompatible si $k\neq 1$, $k\neq -2$

13. Dado el sistema

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$kx_1 + 3kx_2 + (2k+3)x_3 = 14$$

$$kx_1 + kx_2 + (k^2 + 4k + 2)x_3 = 2k + 1$$

Determinar el valor o los valores de $k \in \mathbb{R}$ que hacen al sistema

a) Incompatible.
b) Compatible determinado.
c) Compatible indeterminado.

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 3k & 2k+3 & 4 \\ k & k & k^2+4k+2 & 2k+1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -kR_1+R_2 \\ \sim \\ -kR_1+R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2k & k+3 & 4-k \\ 0 & 0 & k^2+3k+2 & k+1 \end{array}\right]$$

Como $k^2 + 3k + 2 = (k+2)(k+1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2k & k+3 & 4-k \\ 0 & 0 & (k+2)(k+1) & k+1 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente queda

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \ldots(1)$$
$$2kx_2 + (k+3)x_3 = 4 - k \qquad \ldots(2)$$
$$(k+2)(k+1)x_3 = k + 1 \qquad \ldots(3)$$

a) El sistema es incompatible si $k = -2$, ya que las ecuaciones resultan:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-4x_2 + x_3 = 6$$

$$0x_3 = -1$$

que es incongruente.

b) Por otra parte, si $k \neq -2$, $k \neq -1$, el sistema es compatible determinado, ya que de la expresión 3

$$x_3 = \frac{k+1}{(k+2)(k+1)} = \frac{1}{k+2}$$

y con el valor de x_3 pueda determinarse el valor de x_2 al sustituir en la ecuación 2 y con ellos se tiene x_1 sustituyendo en la expresión 1.

c) Finalmente, si $k=-1$, el sistema es compatible indeterminado. Al sustituir este valor el sistema queda

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 1 &&\ldots(4) \\ &-2x_2 + 2x_3 = 5 &&\ldots(5) \\ &0x_3 = 0 &&\ldots(6) \end{aligned}$$

De la expresión 5
$$2x_3 = 5 + 2x_2$$

$$x_3 = \frac{5+2x_2}{2}$$

en la ecuación 4

$$x_1 + x_2 + \frac{5+2x_2}{2} = 1$$

$$x_1 + \frac{2x_2 + 5 + 2x_2}{2} = 1$$

$$x_1 = 1 - \frac{5+4x_2}{2} = \frac{-3-4x_2}{2}$$

Por lo que el conjunto solución del sistema es

$$\left\{ \left(\frac{-3-4x_2}{2}, \quad x_2, \quad \frac{5+2x_2}{2} \right); \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

14. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$ de tal manera que el sistema de ecuaciones lineales sea

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 + 4x_3 &= -7 \\ kx_1 + 7x_2 + 6x_3 &= -5 \\ x_2 + kx_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ k & 7 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & k & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{-kR_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 7-3k & 6-2k & k-5 \\ 0 & 1 & k & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & k & -3 \\ 0 & 7-3k & 6-2k & k-5 \end{array}\right] \begin{array}{c} -r_2 + r_3 \\ \sim \\ (3k-7)\,R_2 + R_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & k-4 & 4 \\ 0 & 0 & 10k-22 & -20k+44 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{c} \dfrac{R_4}{10k-22} \\ \sim \\ k \neq \dfrac{11}{5} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & k-4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_3 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & k-4 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\sim}{(4-k)\,R_3 + R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2k-4 \end{array}\right]$$

Sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 + 4x_3 &= -7 \\ x_3 &= 2 \\ 0 &= 2k - 4 \end{aligned} \quad ; \quad k \neq \frac{11}{5}$$

de manera que el sistema será compatible determinado si $k = 2$, también lo es si $k = \frac{11}{5}$ pues en ese caso, antes de hacer la cancelación, el sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_2 + 4x_3 &= -7 \\ (k-4)\, x_3 &= 4 \\ (10k - 22)\, x_3 &= -20k + 44 \end{aligned}$$

Si $k = \frac{11}{5}$, la cuarta ecuación queda $0 = 0$ y la tercera

$$\left(\frac{11}{5} - 4 \right) x_3 = 4$$

lo cual conduce a una solución única.

Para valores diferentes de k el sistema es incompatible.

Resumen

a) Compatible determinado para $k = 6$ ó para $k = \frac{11}{5}$

b) No hay posibilidad de que el sistema sea compatible indeterminado.

c) Incompatible si $k \neq \frac{11}{5}$ ó $k \neq 2$

15. Determinar el valor de A, el de B y el de C de modo que

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

Solución

Al descomponer en fracciones parciales y efectuar la suma de fracciones se tiene

$$\frac{1}{(x+1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)A+(x+1)(x+2)B+(x-1)(x+1)C}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x^2+x-2)A+(x^2+3x+2)B+(x^2-1)C}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2+3Bx+2B+Cx^2-C}{(x-1)(x-1)(x-2)}$$

Agrupando términos semejantes y factorizando

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x-3)}=\frac{(A+B+C)x^2+(A+3B)x+(-2A+2B-C)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$1=(A+B+C)x^2+(A+3B)x+(-2A+2B-C)$$

Por igualdad de polinomios

$$A+B+C=0$$

$$A+3B=0$$

$$-2A+2B-C=1$$

Resolviendo este sistema por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&3&0&0\\-2&2&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}-R_1+R_2\\2R_1+R_3\\\sim\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&-1&0\\0&4&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}-2R_2+R_3\\\sim\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&2&-1&0\\0&0&3&1\end{array}\right)$$

Sistema equivalente

$$\begin{array}{ll}A+B+C=0 & (1)\\2B-C=0 & (2)\\3C=1 & (3)\end{array}$$

De la ecuación 3

$$C = \frac{1}{3}$$

De la ecuación 2

$$2B - \frac{1}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{6}$$

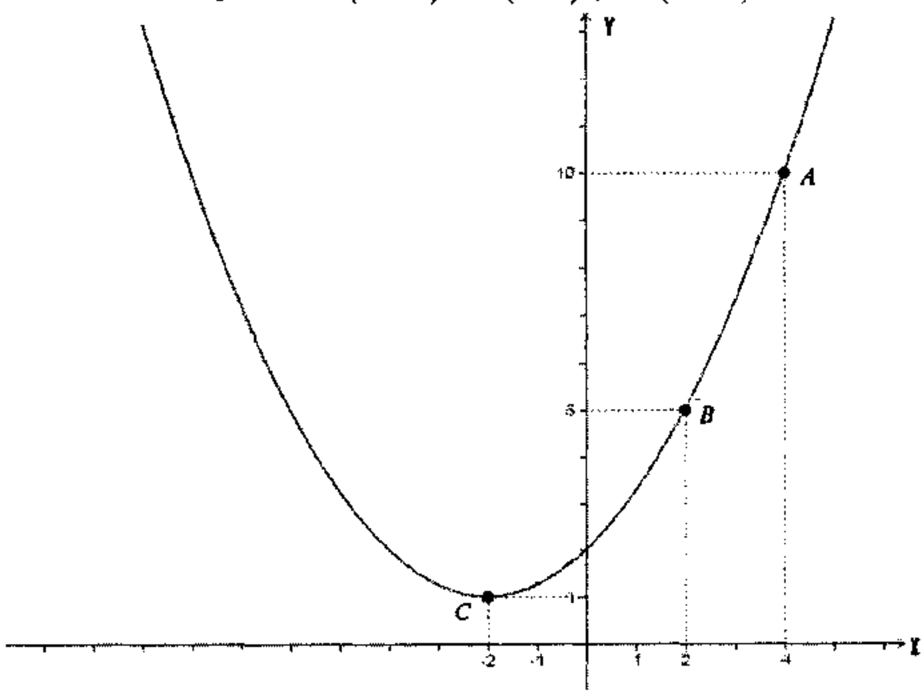
De la ecuación 1

$$A + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto al sustituir en la expresión original, se tiene

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{x+2}$$

16. La ecuación de la parábola que se muestra en la figura es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Si la parábola contiene los puntos $A(4, 10)$, $B(2, 5)$ y $C(-2, 1)$, obtener su ecuación.



Solución

Como la parábola contiene a los puntos A, B y C, éstos deben satisfacer la ecuación $y=ax^2+bx+c$.

Para $A\left(4,10\right)$, se tiene que $10=16a+4b+c$

Para $B\left(2,5\right)$, se tiene que $5=4a+2b+c$

Para $C\left(-2,1\right)$, se tiene que $1=4a-2b+c$

Los valores a, b y c en la ecuación $y=ax^2+bx+c$, se determinan al resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$16a+4b+c=10$$

$$4a+2b+c=5$$

$$4a-2b+c=1$$

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}16 & 4 & 1 & 10\\ 4 & 2 & 1 & 5\\ 4 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & 1 & 5\\ 16 & 4 & 1 & 10\\ 4 & -2 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{\sim}{\begin{array}{c}-4R_1+R_2\\ -R_1+R_3\end{array}}\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & 1 & 5\\ 0 & -4 & -3 & -10\\ 0 & -4 & 0 & -4\end{array}\right)\underset{\sim}{-R_2+R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4 & 2 & 1 & 5\\ 0 & -4 & -3 & -10\\ 0 & 0 & 3 & 6\end{array}\right)$$

El sistema equivalente es

$$\begin{array}{ll}4a+2b+c=5 & \ldots(1)\\ -4b-3c=-10 & \ldots(2)\\ 3c=6 & \ldots(3)\end{array}$$

De la ecuación 3 $\quad c=2$

De la ecuación 2 $\quad -4b-3\left(2\right)=-10\Rightarrow b=1$

De la ecuación 1 $\quad -4a+2\left(1\right)12=5\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$

Por lo que la ecuación de la parábola es

$$y=\frac{1}{4}x^2+x+2$$

17. Sean las rectas L_1, L_2 y L_3 de ecuaciones

$$L_1: \quad y = 2x+3$$

$$L_2: \quad y-1 = 4(x+5)$$

$$L_3: \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$$

Determinar si las rectas dadas se intersecan en el mismo punto.

Solución

La ecuación de L_1 se reescribe como $2x-y=-3$
La ecuación de L_2 se reescribe como $4x-y=-21$
La ecuación de L_3 se reescribe como $3x+2y=6$

Se determina el punto de intersección de L_1 y L_2

$$2x-y=-3$$
$$4x-y=-21$$

De donde

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & -21 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -15 \end{array}\right)$$

Sistema equivalente

$$2x-y=-3$$
$$y=-15$$

Si $y = -15$ entonces $x=-9$

El punto de intersección de L_1 y L_2 es $(-9,-15)$

Si L_3 se intersecan con L_1 y L_2 en $(-9,-15)$ este punto debe estar contenido en L_3.
Sustituyendo $x=-9$ y $y=-15$ en la ecuación de L_3 se tiene

$$\begin{aligned} 3x+2y&=6\\ 3(-4)+2(-15)&=6\\ -27-30&=6\\ -57&=6 \end{aligned}$$

lo cual es falso. Por tanto las rectas L_1, L_2 y L_3 no se intersecan en el mismo punto.

Otra forma de investigar si las rectas se intersecan en un punto, es determinando si el sistema de ecuaciones tiene solución única

$$\begin{cases} 2x-y=-3\\ 4x-y=-21\\ 3x+2y=6 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -3\\ 4 & -1 & -21\\ 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{-R_3+R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -9\\ 4 & -1 & -21\\ 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{4R_1+R_2\\ 3R_1+R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -9\\ 0 & -13 & -57\\ 0 & -7 & -21 \end{array}\right) \overset{-3R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -9\\ 0 & -13 & -57\\ 0 & 14 & 42 \end{array}\right) \overset{R_3+R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -9\\ 0 & 1 & -15\\ 0 & 14 & 42 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{4}R_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -9\\ 0 & 1 & -15\\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{-R_2+R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4\\ 0 & 1 & -15\\ 0 & 0 & 18 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente $\begin{cases} -x-3y=-4\\ y=-15\\ 0+10y=18 \end{cases}$ resulta incompatible

Por tanto L_1, L_2 y L_3 no se intersecan en el mismo punto.

18. Obtener el punto de intersección de los planos π_1, π_2 y π_3 cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad 3x+2y-4z=12 \\ \pi_2 &: \quad -x+5y+z=2 \\ \pi_3 &: \quad -2x-y+3z=-8 \end{aligned}$$

Solución

Para obtener el punto de intersección entre los planos: π_1, π_2 y π_3 simplemente se resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+2y-4z=12 \\ -x+5y+z=2 \\ -2x-y+3z=-8 \end{cases}$$

Por método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 12 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -8 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & 12 \\ -2 & -1 & 3 & -8 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix} 3R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 17 & -1 & 18 \\ 0 & -11 & 1 & -12 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix} 2R_2 \\ 3R_3 \end{matrix}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 34 & -2 & 36 \\ 0 & -33 & 3 & -36 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -33 & 3 & -36 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -12 \end{array}\right) \underset{\sim}{11R_2+R_3}$$

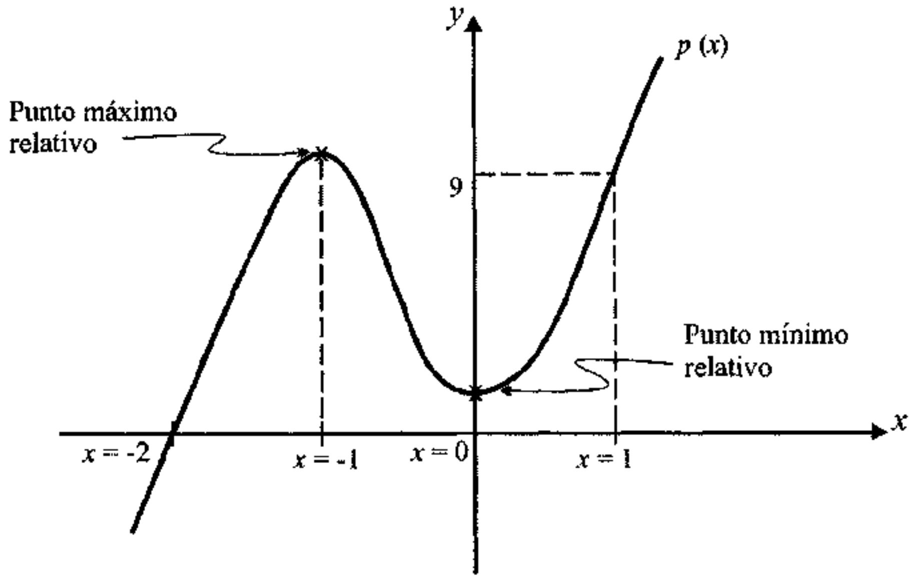
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \underset{\sim}{\tfrac{1}{12}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El sistema equivalente es

$$\begin{aligned} -x+5y+z&=2 \qquad \ldots(1) \\ y+z&=0 \qquad \ldots(2) \\ z&=-1 \qquad \ldots(3) \end{aligned}$$

Sustituyendo $z=-1$ en (2) se obtiene $y=1$.
Sustituyendo $y=1$ y $z=-1$ en (1) se obtiene $x=2$.
Por tanto, los planos π_1, π_2 y π_3 se intersecan en el punto $(2, 1, -1)$.

19. Determinar el polinomio de tercer grado $p(x)$ cuya gráfica se muestra en la siguiente figura:



Solución

Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A partir de la gráfica de $p(x)$ y puesto que $(1, 9)$ y $(-2, 0)$ son puntos que pertenecen a ella:

$$p(1) = a + b + c + d = 9 \qquad ...(1)$$

$$p(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 0 \qquad ...(2)$$

Por otra parte, la derivada de $p(x)$ es el polinomio

-2 -1 0 1

$$p'(x \quad x^2 + 2bx$$

y como en $x = -1$ y en $x = 0$, $p(x)$ tiene valores extremos:

$$p'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \qquad ...(3)$$

$$p'(0) = c = 0 \qquad ...(4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en las ecuaciones (1), (2) y (3) se construye el sistema de ecuaciones lineales:

$$S:\begin{cases} a+b+d=9 \\ -8a+4b+d=0 \\ 3a-2b=0 \end{cases}$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ -8 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{-3R_1+R_3}{\overset{8R_1+R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 12 & 9 & 72 \\ 0 & -5 & -3 & -27 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{12}R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 6 \\ 0 & -5 & -3 & -27 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{5R_2+R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 3 \end{array}\right)$$

El sistema de ecuaciones lineales equivalentes a S es

$$S_1:\begin{cases} a+b+d=9 \\ b+\frac{3}{4}d=6 \\ \frac{3}{4}d=3 \end{cases}$$

por tanto $d=4$, $b=3$ y $a=2$. El polinomio cuya gráfica se muestra en la figura es

$$p\left(x\right)=2x^3+3x^2+4$$

20. La asuma de las tres cifras de un número es diez. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en cuatro a la cifra de las unidades y la suma de la cifra de las centenas y la cifra de las unidades excede en seis a la cifra de las decenas. ¿Cuál es dicho número?

Solución

Consideremos que el número buscado es xyz, donde x representa la cifra de las centenas, y a las decenas y z las unidades. De acuerdo con esto y los datos proporcionados, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y-4=z \\ x+z-6=y \end{cases}$$

ordenando tenemos

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x+y-z=4 \\ x-y+z=6 \end{cases}$$

escalonando

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} x+y+z=10 \quad &\Rightarrow \quad x=5 \\ -2z=-6 \quad &\Rightarrow \quad z=3 \\ -2y=-4 \quad &\Rightarrow \quad y=2 \end{aligned}$$

por lo que el número es 523

21. Se va a realizar el inventario de una librería que cuenta con un total de 30000 libros. Los títulos que en ella se manejan son de física, química, matemáticas y termodinámica. El número de libros de física es igual a la suma de los libros de matemáticas más los de termodinámica. Si al doble del número de libros de matemáticas se le suma 10000, se obtiene el número de libros de química y la suma del número de libros de química, matemáticas y termodinámica es de 23000. ¿Cuántos ejemplares hay en existencia de cada título?

Solución

$F \rightarrow$ # de libros de física

$Q \rightarrow$ # de libros de química

M $\rightarrow$ # de libros de matemáticas

T $\rightarrow$ # de libros de termodinámica con los datos proporcionados se llega al sistema

$$\begin{cases} F+Q+M+T=30000 \\ F=M+T \\ 2M+10000=Q \\ Q+M+T=23000 \end{cases}$$

de donde se llega a

$$\begin{aligned} F+Q+M+T&=30000 \\ F-M-T&=0 \\ Q-2M&=10000 \\ Q+M+T&=23000 \end{aligned}$$

Efectuando el escalonamiento con la matriz aumentada tenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 10000 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 23000 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_1+R_2 \\ -R_3+R_4 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -30000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13000 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3+R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -20000 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13000 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2R_4+R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 30000 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 13000 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6000 \end{array}\right]$$

con lo cual se llega al sistema

$$\begin{cases} F+Q+M+T=30000 \\ Q-2M=10000 \\ 3M+T=13000 \\ 2M=6000 \end{cases}$$

donde

$$M = 3000$$

$$T = 4000$$

$$Q = 16000$$

$$F = 7000$$

22. Una fábrica de computadoras vendió 20 unidades. El cliente pidió tres modelos diferentes, cuyos precios son \$10000.00, \$12000.00 y \$15000.00. El importe pagado fue de \$226000.00, solicitando que la cantidad de unidades de mayor precio corresponda a la quinta parte de la cantidad de unidades de menor precio. ¿Cuántas unidades de cada modelo se vendieron?

Solución

$x \rightarrow$ Número de computadoras de \$10000.00

$y \rightarrow$ Número de computadoras de \$12000.00

$z \rightarrow$ Número de computadoras de \$15000.00

de esta forma se tiene

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 10000x + 12000y + 15000z = 226000 \\ \dfrac{1}{5}x = z \end{cases}$$

de donde se llega a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 10 & 12 & 15 & 226 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -10R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 2 & 5 & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{c} 2R_3 + R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{array}\right]$$

entonces se tiene

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ \quad y+6z=20 \\ \quad\quad -7z=-14 \end{cases}$$

con lo cual

$$z=2$$

$$y=8$$

$$x=10$$

23. El perímetro de un triángulo es igual a 54 centímetros. Calcular las longitudes de los tres lados, si se sabe que la hipotenusa tiene el doble de la longitud que el cateto más corto y que un cateto es 6 centímetros más largo que el otro.

Solución:

$a \rightarrow$ longitud del cateto corto

$b \rightarrow$ longitud del cateto largo

$c \rightarrow$ longitud de la hipotenusa

El modelo matemático que representa al problema es:

$$\begin{cases} a+b+c=54 \\ \quad\quad c=2a \\ \quad a+6=b \end{cases}$$

donde

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 54 \\ 2a & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 54 \\ 0 & -2 & -3 & -108 \\ 0 & -2 & -1 & -60 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_2 \\ -R_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 54 \\ 0 & 2 & 3 & 108 \\ 0 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_3+R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 54 \\ 0 & 2 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 48 \end{array}\right]$$

con lo que el sistema equivalente es

$$\begin{cases} a+b+c=54 \\ 2b+c=60 \\ 2c=48 \end{cases}$$

donde

$$c=24$$

$$b=18$$

$$a=12$$

24. Un grupo de alumnos de ingeniería está formado por 60 estudiantes de las siguientes asignaturas: álgebra, cálculo y computación. Se sabe que hay 16 estudiantes menos de álgebra que la suma de los de computación y cálculo. Además, el número de estudiantes de álgebra más los de computación es tres veces el de cálculo. Determinar la cantidad de estudiantes de cada asignatura.

Solución

$x \rightarrow$ número de estudiantes de álgebra

$y \rightarrow$ número de estudiantes de cálculo

$z \rightarrow$ número de estudiantes de computación

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ y+z=x+16 \\ x+z=3y \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ -x+y+z=16 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$$

donde

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ -1 & 1 & 1 & 16 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1+R_2 \\ R_1-R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & 2 & 2 & 76 \\ 0 & 4 & 0 & 60 \end{array}\right]$$

por lo que

$$\begin{cases} x+y+z=60 \\ 2y+2x=76 \\ 4y=60 \end{cases}$$

donde se obtiene que

$$y=15$$

$$z=23$$

$$x=22$$

por lo que se tiene

22 alumnos de álgebra
15 alumnos de cálculo
23 alumnos de computación

25. El responsable de cuatro plantas automotrices debe decidir cuál será la producción mínima diaria en cada planta para que no pare ninguna de ellas, puesto que eso representaría muchas pérdidas. La información de producción de las plantas se describe a continuación.

1) La suma de las unidades producidas por las tres primeras plantas es igual a la producción de la última.
2) El doble de la producción de la tercera planta es igual a cuatro veces la producción de las plantas uno y dos menos el triple de lo que produce la cuarta.
3) Cuatro veces la producción de la segunda es igual a seis veces la producción de la primera más dieciséis lo de la tercera menos lo que produce la cuarta.
4) Seis veces la producción de la primera es igual a la producción de la cuarta.

Solución

Al traducir al lenguaje algebraico, si denominamos x, y, z, w a la producción de las plantas uno, dos, tres y cuatro, respectivamente

$$x+y+z=w$$

$$2z=4\left(x+y\right)-3w$$

$$4y=6x+16z-w$$

$$6x=w$$

Al ordenar y eliminar paréntesis

$$x+y+z-w=0$$

$$4x+4y-2z-3w=0$$

$$6x-4y+16z-w=0$$

$$6x-w=0$$

Para resolver este sistema homogéneo se utilizarán matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & -2 & -3 \\ 6 & -4 & 16 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4R_1+R_2 \\ -6R_1+R_3 \\ -6R_1+R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -10 & 10 & 5 \\ 0 & -6 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{R_3}{-5} \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3R_3+R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \leftrightarrow R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} -2R_3+R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$\begin{aligned} x+y+z-w&=0 \\ 2y-2z-w&=0 \\ -6z+w&=0 \end{aligned}$$

Es decir, se trata de un sistema compatible (lógico, pues es homogéneo) indeterminado.

Despejando de la tercera ecuación

$$z=\frac{w}{6}$$

llevando este valor a la segunda

$$2y-2\left(\frac{w}{6}\right)-w=0\,,\quad 2y-\frac{4}{3}w=0 \quad \therefore \quad y=\frac{2}{3}w$$

ahora en la primera

$$x+\frac{2}{3}w+\frac{1}{6}w-w=0\,,\ x=\frac{w}{6}$$

el conjunto solución es

$$\left\{x=\frac{w}{6}\,,\ y=\frac{2}{3}w,\ z=\frac{w}{6}\,,\ w;\ w\in Z\right\}$$

w debe ser entero porque no hay unidades fraccionarias de automóvil y todas las variables deben ser enteras y positivas, por lo que la producción mínima se tiene para $w=6$.

Así que $x=1,\ y=4,\ z=1,\ w=6$

26. Un ingeniero tiene que administrar el suministro de agua en un conjunto residencial. Para ello se cuenta con tres contenedores que en total pueden almacenar cuatro mil metros cúbicos. Se tiene que cinco veces la capacidad del tercero menos la suma de las capacidades de los dos primeros es igual a ocho mil metros cúbicos. Por otra parte, el doble de la del primero más el triple de la del segundo resulta igual a tres mil metros cúbicos más el del tercero. Por último la suma de las del primero y la del segundo es igual al triple de la del tercero menos cuatro mil. ¿Cuáles son las capacidades de cada depósito?

Solución

Sean a, b y c las capacidades de los contenedores A, B y C respectivamente. Las ecuaciones que modelan el problema son

$$\begin{aligned} a+b+c&=4\\ 5c-(a+b)&=8\\ 2a+3b&=3+c\\ a+b&=3c-4 \end{aligned}$$

donde las capacidades tienen unidades en miles de metros cúbicos.

Al ordenar las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} a+b+c&=4\\ -a-b+5c&=8\\ 2a+3b-c&=3\\ a+b-3c&=-4 \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 5 & 8\\ 2 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1+R_2\\ -2R_1+R_3\\ \sim\\ -R_1+R_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 6 & 12\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2\leftrightarrow R_3\\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 6 & 12\\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{R_3}{6}\\ \sim\\ \frac{R_4}{4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_3+R_4\\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema equivalente es

$$a+b+c=4 \qquad ...(1)$$

$$b-3c=-5 \qquad ...(2)$$

$$c=2 \qquad ...(3)$$

(3) en (2)

$$b-3(2)=-5$$

$$b=6-5=1$$

b y c en la expresión (1)

$$a+1+2=4, \qquad a=1$$

La respuesta es

A tiene capacidad de mil metros cúbicos

B de mil metros cúbicos

C de dos mil metros cúbicos.

27. Un ingeniero residente de una obra tenía, al inicio de la jornada, un capital de alrededor de quince mil pesos en billetes de mil y de doscientos, para gastos imprevistos. En el momento del corte, al término de la jornada, tenía tantos billetes de mil pesos como de doscientos tenía al inicio y tantos de doscientos como los de mil que tenía en un principio. La cantidad de dinero al corte era de un tercio de la cantidad inicial.
¿Cuánto se gastó en imprevistos?

Solución

Si x es el número de billetes de mil pesos
y es el número de billetes de doscientos pesos.

Al inicio, en caja había

$$1000x+200y \quad \text{pesos}$$

Al corte

$$200x+1000y \quad \text{pesos}$$

Debido a que al corte se tenía un tercio de la cantidad inicial:

$$\frac{1}{3}\left(1000x+200y\right)=200x+1000y$$

$$1000x+200y=600x+3000y$$

$$400x=2800y$$

$$x=7y$$

Al tenerse una sola ecuación con dos incógnitas, el sistema es compatible indeterminado; sin embargo, el número de soluciones se reduce considerablemente al tenerse un número entero de billetes.

Ahora analizando

Si $y=1$, $x=7$, la cantidad inicial sería $1000(7)+200=7200$ pesos lo cual no corresponde a que se mencionó que había alrededor de quince mil pesos.

Si $y=2$, $x=14$; lo que equivale a $1000(14)+200(2)=14400$ pesos. Podría ser

Si $y=3$, $x=21$; esto ya no es admisible.

De manera que al inicio se tenían \$14,400 y al corte $\frac{1}{3}=(14,\ 400)=4800$.

Los gastos imprevistos fueron:

$$14400-4800=\$9600.00$$

EJERCICIO PROPUESTOS

1. Para el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+5y-4z=7 \\ x+3y-3z=5 \end{cases}$$

obtener su solución en caso de ser compatible determinado, la solución general y una particular en caso de ser compatible indeterminado.

2. Obtener en caso de ser posible, la solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x+y+2z=-1 \\ x-2y+z=-4 \\ x-3y+4z=-7 \end{cases}$$

3. Determinar una solución particular del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2x_1+4x_2+3x_2+x_4+2x_5=-9 \\ 4x_1-3x_2+6x_3+7x_4-2x_5=9 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4+4x_5=27 \end{cases}$$

4. Determinar el valor de $k \in R$ para que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$\begin{cases} x-ky+z=0 \\ 2x+y-(k-1)\,z=0 \\ -x+(k+1)\,y+z=0 \end{cases}$$

sea compatible indeterminado

5. Determinar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=2 & \ldots(1) \\ -2x+z=-3 & \ldots(2) \\ x-y-z=1 & \ldots(3) \\ xy-z^2=-1 & \ldots(4) \end{cases}$$

6. Sea el sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+mz=3 \\ x+my+3z=2 \end{cases}$$

Determinar para qué valores de $m \in R$ este sistema es

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

7. Determinar si el sistema es compatible o incompatible. Si es indeterminado obtenga su solución general y una particular.

$$\begin{cases} m+n-p=7 \\ 4m-n+5p=4 \\ 6m+n+3p=18 \end{cases}$$

8. Determinar los valores de $k \in R$ de tal forma que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y+z=k \\ x+2y+3z=4 \\ 2x+y+kz=2 \end{cases}$$

sea

a) Incompatible.
b) Compatible determinado.
c) Compatible indeterminado.

9. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ x+y+z=3 \\ x+y+bz=0 \end{cases}$$

Determinar el valor o los valores de $b \in R$, para que el sistema sea
   a) Incompatible.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Compatible determinado.

10. Para cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales, obtener su solución en caso de que ésta exista. Si se trata de un sistema compatible indeterminado, obtener una solución particular y la solución general

$$a)\begin{cases} 2x+y+3z=4 \\ -x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x+4y-z=2 \\ x-2y-2z=-1 \\ 2x+6y+z=4 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -x+3y+3z=-5 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x-2y-z=7 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 3x+2y-2z-w=-1 \\ -2x-y+z+2w=3 \\ x+y-3z-w=-2 \\ x-2y+z-3w=0 \end{cases}$$

11. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x+3\alpha y+3z=3 \\ \alpha x+y+z=-2 \\ 2x+2y+2\alpha z=2 \end{cases}$$

Determinar el valor o los valores de $\alpha \in R$, para que el sistema sea
   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

12. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -2x-2y-2z=-6\alpha \\ x+\alpha y+z=0 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$$

Determinar para qué valor o valores de $\alpha \in R$ el sistema es
   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

13. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3&=-4 \\ x_1+2x_2+x_3&=1 \\ x_1-x_2+(\lambda+2)\,x_3&=-3\lambda-5 \\ 4x_1+2x_2+(\lambda+6)\,x_3&=-3\lambda^2-8 \end{aligned}$$

Obtener el valor o los valores de $\lambda \in R$, para que el sistema sea
   a) Compatible determinado.
   b) Compatible indeterminado.
   c) Incompatible.

14. Un grupo de 32 estudiantes está formado por personas de 18, 19 y 20 años de edad. El promedio de sus edades es 18.5 años. ¿Cuántas personas de cada edad hay en el grupo, si la cantidad de personas de 18 años es 6 más que la suma de los de 19 y 20 años?

15. Las rutas 1, 2 y 3 del sistema de transporte de una ciudad cuenta con 106 microbuses. El número promedio de pasajeros que transporta cada unidad es de 20 en la ruta 1, 15 en la ruta 2 y 18 en la ruta 3, para un total de 1850 pasajeros transportados en un solo viaje de los 106 microbuses. El número de viajes que realiza cada unidad por día es de 15 en la ruta 1 y de 20 en las rutas 2 y 3, efectuándose un total de 1920 viajes. Determinar el número de microbuses con que cuenta cada una de las rutas.

16. Una empresa tiene 3 máquinas A, B y C; cada una es capaz de producir cierto artículo. Por falta de operadores diestros, sólo se pueden usar simultáneamente dos de ellas. La tabla siguiente muestra la producción en un periodo de tres días usando distintas combinaciones de máquinas.

Máquinas usadas	Horas de producción	No. de artículos producidos
A y B	6	450
A y C	8	360
B y C	7	490

Determinar cuánto tiempo emplea cada máquina, estando las demás fuera de operación, en producir 100 artículos.

17. Una cafetería tiene 56 mesas; x mesas con 4 asientos cada una, y mesas con 8 asientos cada una, y z mesas con 10 asientos cada una. La capacidad de asientos de la cafetería es de 364. Durante una tarde se ocuparon la mitad de las x mesas, un cuarto de las y mesas y un décimo de las z mesas, para un total de 19 mesas. ¿Cuántas mesas de cada tipo se usaron esa tarde?

18. Cuando Ana se graduó en la universidad, había cursado 40 asignaturas, en las cuales obtuvo 8, 9 ó 10 de calificación. Su promedio final fue 9.125. Su promedio en las asignaturas en donde obtuvo 9 y 10 fue de 9.8. Determinar el número de asignaturas en donde obtuvo 8, 9 ó 10, respectivamente.

19. El costo de tres dispositivos de laboratorio es igual a seis mil euros. El costo del segundo equipo es igual a la suma del doble del costo del primero más el triple del tercero menos nueve mil euros; además el costo del tercero es el triple del costo del primero más el doble del segundo menos cuatro mil euros. ¿Cuánto cuesta cada equipo?

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $x = -4-3k, \quad y = 3+2k, \quad z = k; \quad k \in R$
   con $k = 1$
   $x = -7, \quad y = 5, \quad z = 1$

2. Incompatible

3. $x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 3$

4. $k = -\dfrac{3}{5}$

5. $x = 2-\alpha, \quad y = \alpha, \quad z = 1-2\alpha; \quad \alpha \in R$

6. a) $m \neq 2, \quad m \neq -3$
   b) $m = 2$
   c) $m = -3$

7. Compatible indeterminado

   $$m = \frac{11-4p}{5}, \quad n = \frac{24+9p}{5}, \quad p \in R$$

   Con $p = 0$

   $$m = \frac{11}{5}, \quad n = \frac{24}{5}, \quad p = 0$$

8. a) $k = 0$
   b) $k \in R, \quad k \neq 0$
   c) No existen valores de k

9. a) $b = 1$
   b) No existen valores de b
   c) $b \in R, \quad b \neq 1$

10. a) $x=1, \qquad y=-1, \qquad z=1$
    b) Incompatible
    c) $x=\dfrac{-3k+11}{7}, \qquad y=\dfrac{-8-8k}{7}, \qquad z=k$
    con $k=-1; \qquad x=2, \qquad y=0, \qquad z=-1$
    d) $x=1, \qquad y=-1, \qquad z=0, \qquad w=2$

11. a) $\alpha \neq -2, \qquad \alpha \neq 1$
    b) $\alpha=-2$
    c) $\alpha=1$

12. a) $\alpha \in R, \qquad \alpha \neq 1$
    b) No existen valores de α
    c) $\alpha=1$

13. a) $\lambda \neq 0, \qquad \lambda \neq -1$
    b) $\lambda=0$
    c) $\lambda=-1$

14. 19 de 18 años
    10 de 19 años
    3 de 20 años

15. 40 de la ruta 1
    46 de la ruta 2
    20 de la ruta 3

16. A emplea 4 horas
    B emplea 2 horas
    C emplea 5 horas

17. 13 sillas de 4 asientos
    5 sillas de 8 asientos
    1 silla de 10 asientos

18. 15 con 8
    5 con 9
    20 con 10

19. 1000 euros el primer equipo
    2000 euros el segundo equipo
    3000 euros el segundo equipo

CAPÍTULO 5

MATRICES Y DETERMINANTES

Aunque se piensa, por la forma de impartir los cursos de álgebra, que primero aparecieron las matrices y luego los determinantes, los hechos históricos demuestran lo contrario. Por esta razón primero se da una breve historia de los determinantes y después de las matrices.

Cuenta la historia que es posible que ya hacia 1100 a. c. los chinos resolvieron sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando una regla equivalente a lo que hoy se conoce como el método de los determinantes y existe la creencia de que el japonés Seki Kowa también lo hizo en el año de 1683. Poco después de que Seki Kowa hubiera previsto los determinantes, G. W. Leibniz, en el año de 1593, dio una regla para resolver los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas equivalente a la de los chinos. Esta regla fue ampliada por G. Cramer en el año de 1750 y simplificada por E. Bezout en 1764. Pero a pesar de lo atractivo los desarrollos de estas reglas no correspondían al cálculo formal de un determinante.

Una de las aportaciones más representativas fue la de A. T. Vandermonde, quien en 1771 mejoró la notación y aisló como objeto de estudio independiente a lo que después se habría de ver eran determinantes.

En 1812 J. P. M. Binet dio un gran paso hacia adelante al enunciar una regla que, bajo hipótesis adecuadas, era suficiente para definir los determinantes. En el mismo año A. L. Cauchy acometió fuertemente dando demostraciones generales de los teoremas fundamentales de los determinantes y A. Cayley inventó la notación de acomodar elementos en cuadro entre barras verticales. Con esta notación aparecieron muchos determinantes especiales.

En 1920 T. Muir necesitó cinco volúmenes con un total de aproximadamente 2500 páginas para relatar la historia de los determinantes.

Uno de los puntos de mayor interés en la obra de H. G. Grassmann es la generalización que daba a los números complejos, $z = a + bi$ como parejas ordenadas (a, b) hasta llegar a los números hipercomplejos $\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$. Resulta inevitable relacionar a esta generalización con otra que realizó de forma explícita Cayley en 1858, pero que ya estaba implícita en la obra de Grassmann en la que estudió a las matrices.

Fue tal el impacto que causaron las matrices que los físicos comenzaron a familiarizarse con ellas; en 1925 aparecieron en la teoría de los *quanta.* Con esto, la invención de las matrices ilustra lo poderosa que puede ser una notación bien ideada; algunos matemáticos admitieron con cierto disgusto que un artificio trivial de notación puede ser el germen de una vasta teoría con innumerables aplicaciones.

Se cuenta que en 1894 Cayley relató a P. G. Tait el motivo de inspiración que lo condujo a las matrices: "Desde luego que no llegue al concepto de matriz a través de los cuaternios, fue directamente a partir de los determinantes" o bien como un modo conveniente de expresar las ecuaciones

$$x = ax + by$$

$$y = cx + dy$$

Si no hubiera sido por el testimonio de Cayley, es posible que incluso hoy día se afirmara que Hamilton se anticipó a Cayley en la invención de las matrices, o por lo menos que Cayley dedujo el concepto de matriz a partir de los cuaternios, tal y como lo afirmaba Tait, gran defensor de los cuaternios.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & x & -2 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 7 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

Determinar el valor de $x \in \mathbb{R}$ tal que $AB = C$

Solución

Realizando la multiplicación de las matrices A y B

$$AB = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & x & -2 \\ 1 & 3 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} x+2 & -x-2 & x+2 \\ -1+2x & -3x-1 & 4x+3 \\ 7 & -10+x & 13-2x \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} x+2 & -x-2 & x+2 \\ -1+2x & -3x-1 & 4x+3 \\ 7 & -10+x & 13-2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 7 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices

$$\begin{aligned} x+2 &= 3 & \qquad -x-2 &= -3 & \qquad x+2 &= 3 \\ -1+2x &= 1 & -3x-1 &= -4 & 4x+3 &= 7 \\ 7 &= 7 & -10+x &= -9 & 13-2x &= 11 \end{aligned}$$

Fácilmente se determina que $x = 1$ satisface cada una las ecuaciones anteriores.

Por tanto, para $x = 1$ se tiene que $AB = C$

2. Expresar a la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ como el producto de las matrices de orden dos AB , donde A es triangular superior y B triangular inferior.

¿Qué condición deben cumplir estas matrices para que BA sea simétrica?

Solución

Sean $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $\quad AB = \begin{pmatrix} ax + by & cy \\ bz & cz \end{pmatrix}$

Por igualdad de matrices $AB = \begin{pmatrix} ax + by & cy \\ bz & cz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} ax + by = 2 & \ldots \ (1) \\ cy = 1 & \ldots \ (2) \\ bz = 1 & \ldots \ (3) \\ cz = 1 & \ldots \ (4) \end{cases}$$

De las ecuaciones (3) y (4) $b = c = \dfrac{1}{z}$, y de la ecuación (2) $c = \dfrac{1}{y}$ $\therefore$ $\begin{cases} b = c \\ y = z \end{cases}$

lo que implica que $ax = 1$ y que $a = \dfrac{1}{x}$.

Las matrices solicitadas son todas las que tienen la forma:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x \neq 0 , \quad y \neq 0$$

Si cambiamos el orden los factores

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x} & 0 \\ \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & 2 \end{pmatrix}$$

Así, para que BA sea simétrica es necesario que $x = y$; es decir

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} \text{ y } \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad x \neq 0$$

Los elementos de las matrices A y B pueden ser reales o complejos.

3. Sean A , B y C matrices tales que $AB = BA$ y $AC = CA$. Demostrar que
   a) $A(B + C) = (B + C)A$,
   b) $A(BC) = (BC)A$, y
   c) $(AB)^2 = A^2 B^2$.

Solución

a) $A(B+C) = AB + AC$

$$= BA + C$$

$$A(B+C) = (B+C)A$$

b) $A(BC) = (AB)C$

$$= (BA)C$$

$$= B(AC)$$

$$= B(CA)$$

$$A(BC) = (BC)A$$

c) $(AB)^2 = (AB)(AB)$

$$= A(BA)B$$

$$= A(AB)B$$

$$= (AA)(BB)$$

$$(AB)^2 = A^2B^2$$

4. Sean A y B matrices cuadradas de orden n ; determinar cuál de los siguientes desarrollos es correcto.

a) $$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A(A+B)+B(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2\\ &= A^2+2AB+B^2\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}tr(A+B)^2 &= tr\left(A^2+AB+BA+B^2\right)\\ &= tr\left(A^2\right)+tr\left(AB\right)+tr\left(BA\right)+tr\left(B^2\right)\\ &= \left(tr\left(A\right)\right)^2+2\,tr\left(AB\right)+\left(tr\left(B\right)\right)^2\\ &= \left(tr\left(A\right)\right)+\left(tr\left(B\right)\right)^2\end{aligned}$$

c) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

d) $(A+I_n)(A-I_n) = A^2 - I_n^{\,2}$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

Solución

a) Es incorrecto. En general

$$AB \neq BA \therefore AB+BA \neq 2AB$$

b) Es incorrecto

$$tr(AB)\neq tr(A)\,tr(B) \quad \text{por lo que} \quad tr(A)^2 \neq \left(tr(A)\right)^2$$

c) Es incorrecto

Por la misma razón dada en el inciso a

d) Es correcto, ya que

$$\begin{aligned}(A+\mathrm{I}_n)(A-\mathrm{I}_n) &= A(A-\mathrm{I}_n)+\mathrm{I}_n(A-\mathrm{I}_n)\\ &= A^2 - A\mathrm{I}_n + A - \mathrm{I}_n^{\,2}\\ &= A^2 - A + A - \mathrm{I}_n^{\,2}\\ &= A^2 - \mathrm{I}_n^{\,2}\end{aligned}$$

5. Sea X una matriz cuadrada de orden 2 con elementos reales tal que $tr\left(X^2\right)=\left(tr\,(X)\right)^2$. Determinar X.

Solución

Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; tr\,(X)=a+d \;\Rightarrow\; \left(tr\,(X)\right)^2=a^2+2ad+d^2\ldots(1)$

$$X^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix} \Rightarrow tr\left(X^2\right)=a^2+2\,bc+d^2\ldots(2)$$

Para que la expresión 1 sea igual a la 2 se requiere que

$$2bc=2ad \;\Rightarrow\; bc=ad$$

Así, el conjunto de matrices que cumplen la condición es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \;\middle|\; ad-bc=0\,;\;\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$$

es decir, el determinante de X debe ser cero.

6. Determinar el conjunto de matrices con elementos reales que conmutan con la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solución

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$ una matriz tal que $AX = XA$, como el orden de A es 3 x 3, X también debe serlo para que las multiplicaciones estén bien definidas.

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & a & 0 \\ z & x & 0 \\ w & u & 0 \end{pmatrix}$$

Como $AX = XA$, entonces $x = c = 0$, $y = a = w$, $z = 0$, y $b = u$.

El conjunto solicitado es

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & v & a \end{pmatrix} \middle| \; a, b, v \in \mathbb{R} \right\}$$

7. Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} \sec\theta & -\tan\theta \\ -\tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$. Comprobar que $AB = I_2$ y que $BA = I_2$, donde I_2 es la matriz identidad de orden dos.

Solución

$$AB = \begin{bmatrix} \sec\theta & -\tan\theta \\ -\tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sec^2\theta - \tan^2\theta & \sec\theta\tan\theta - \tan\theta\sec\theta \\ -\tan\theta\sec\theta + \sec\theta\tan\theta & -\tan^2\theta + \sec^2\theta \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \mathrm{I}_2$$

Por otro lado

$$BA = \begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sec\theta & -\tan\theta \\ -\tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} \sec^2\theta - \tan^2\theta & -\sec\theta\tan + \tan\theta\sec\theta \\ \tan\theta\sec\theta - \sec\theta\tan\theta & -\tan^2\theta + \sec^2\theta \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \mathrm{I}_2$$

Nota Las matrices A y B son permutables.

8. Sean las matrices triangulares superiores $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -2i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & -3 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$. Mostrar que AB es una matriz triangular superior.

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -2i \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 2 & -3 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & -6+i \\ 0 & 2 & -2i \\ 0 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

AB es una matriz triangular superior.

9. Sea la matriz diagonal $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ y sea la matriz triangular inferior $D = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. La matriz CD, ¿será una matriz diagonal o una matriz triangular inferior?

Solución

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$CD = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

CD es una matriz triangular inferior.

10. Demostrar que la multiplicación de una matriz diagonal de orden n por una matriz triangular inferior de orden n da por resultado una matriz triangular inferior.

Solución

Sea $M = diag\left(m_{11},\ m_{12},\ m_{13}, \ldots, m_{nn} \right)$ y $H = \left(h_{ij} \right)$ con $h_{ij} = 0$ si $i < 1$. La matriz MH es una matriz $P = \left[P_{ij} \right]$ de orden n, definida por

$$P_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, h_{kj} \text{ , pero } i = 1, 2, 3, \ldots, n \text{ y } j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$P_{ij} = m_{i1} h_{1j} + m_{i2} h_{2j} + m_{i3} h_{3j} + \ldots m_{in} h_{nj}$$

si $i < j$ entonces $m_{i1} = 0$ y $h_{1j} = 0$, por tanto $P_{ij} = m_{i1} h_{1j} = 0$

si $i = j$ entonces $P_{ii} = m_{ii} h_{ii} \in \mathbb{C}$

Así,

$$M\,E = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & \dots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11}h_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{22}h_{21} & m_{22}h_{22} & 0 & \dots & 0 \\ m_{33}h_{31} & m_{33}h_{32} & m_{33}h_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{nn}h_{n1} & m_{nn}h_{n2} & m_{nn}h_{n3} & \dots & m_{nn}h_{nn} \end{bmatrix}$$

$M\,E$ es una matriz triangular inferior.

11. Determinar las condiciones que deben cumplir λ , $\beta \in \mathbb{R}$ para la matriz

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \beta \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\beta & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

sea invertible. Encontrar M^{-1} para el caso $\lambda = 2$, $\beta = 1$.

Solución

Realizando operaciones elementales en la matriz M

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \beta \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\beta & 0 & -\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\beta}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\beta}{\lambda} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\beta}{\lambda}-1 \end{pmatrix}$$

se concluye que M no tendrá inversa si $\frac{\beta}{\lambda} - 1 = 0 \;\therefore\; \beta \neq \lambda,\ \lambda \neq 0$ para que exista M^{-1}.

Si $\lambda = 2$ y $\beta \neq 1$ entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

por lo que la matriz buscada es

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Sean M y N matrices cuadradas de orden n y sea P una matriz no singular tal que $M = P^{-1}NP$. Demostrar que $M^k = P^{-1}N^kP$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solución

Por definición

$$M^k = \underbrace{M\,M \cdots M}_{k \text{ veces}}$$

$$M^k = \underbrace{\left(P^{-1}NP\right)\left(P^{-1}NP\right)\ldots\left(P^{-1}NP\right)\left(P^{-1}NP\right)}_{k\ veces}$$

$$M^k = P^{-1}N\left(P\,P^{-1}\right)N\left(P\,P^{-1}\right)\ldots\left(P\,P^{-1}\right)N\left(P\,P^{-1}\right)N\,P$$

$M^k = P^{-1}N\,I\,N\ldots I\,N\,P$ donde I es la matriz identidad de orden n

$$M^k = P^{-1}\underbrace{N\,N\,\ldots\,N}_{k\ veces}P$$

$$M^k = P^{-1}N^kP$$

Nota Si $M = P^{-1}NP$ se dice que M y N son matrices similares.

13. Sean A y B matrices cuadradas de orden n y sea P una matriz no singular tal que $A = P^{-1}BP$. Demostrar que $tr(A) = tr(B)$.

Solución

Si $A = P^{-1}BP$ entonces

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP)$$

Si asociamos las matrices del segundo término tenemos que

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}(BP))$$

pero, como sabemos, si M y N son matrices cuadradas tr(MN) = tr(NM), por lo que la última expresión puede escribirse como

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}((BP)P^{-1})$$

luego, en virtud de la asociatividad de la multiplicación de estas matrices,

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B(PP^{-1}))$$

y, como PP^{-1} es la matriz identidad, tenemos finalmente que

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$$

14. Obtener la matriz X que satisfaga la ecuación matricial

$$AX - B^{*}A = (tr\,C)\,X - X^{T}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -4+2i & 5-6i \\ 7-8i & 6-2i \end{bmatrix}$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\,\mathrm{I}_2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^{*} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{*}A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} 2\,\mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(C) = -4 + 2i + 6 - 2i = 2$$

$$AX - B^{*}A = (tr\,C)\,X - X^{T}$$

$$2\,\mathrm{I}_2 X - B^{*}A = 2X - X^{T}$$

$$2X - B^{*}A = 2X - X^{T}$$

$$-B^{*}A = -X^{T}$$

$$B^{*}A = X^{T}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix} = X^{T}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{bmatrix} = X$$

15. Sea X una matriz triangular superior de orden dos y sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2+3i & 1-i \\ 3-8i & 2-2i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} i & 2i \\ -i & -i \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} -7+i & -2-i \\ i & -i \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1+2i & 1+4i \\ -1+6i & 1+4i \end{bmatrix}$$

Obtener una matriz X que satisfaga la ecuación matricial

$$(tr\,A)\,D + X X^T = (\,det\,B\,)\,C$$

Solución

$$(tr\,A)\,D + X X^T = (\,det\,B\,)\,C$$

$$X X^T = (\,det\,B\,)\,C - (tr\,A)\,D$$

$$det\,B = -i^2 + 2i^2 = i^2 = -1$$

$$tr\,A = -2 + 3i + 2 - 2i = i$$

$$X X^T = -\,C - i\,D$$

$$X X^T = \begin{bmatrix} 7-i & 2+i \\ -i & i \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1+2i & 1+4i \\ -1+6i & 1+4i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-i & 2+i \\ -i & i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i+2 & -i+4 \\ i+6 & -i+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-i+i+2 & 2+i-i+4 \\ -i+i+6 & i-i+4 \end{bmatrix}$$

$$X X^T = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Proponiendo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$$X X^T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$X X^T = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & bd \\ bd & b^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & bd \\ bd & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 9 \quad \ldots \quad (1) \\ bd &= 6 \quad \ldots \quad (2) \\ d^2 &= 4 \quad \ldots \quad (3) \end{aligned}$$

De la expresión

$$d = \pm\, 2$$

De la fórmula 2

$$b = \frac{6}{d} = \frac{6}{\pm 2} = \pm\, 3$$

De la expresión 1

$$a^2 = 9 - b^2 = 9 - 9 = 0$$

Las matrices solución son

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

16. Por medio de la matriz adjunta, obtener la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Solución

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\;Adj\;A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2\; d = d$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3\; b = -b$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3\; c = -c$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4\; a = a$$

$$det\,A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

17. Por medio del método de operaciones elementales, obtener la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{a}R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-cR_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

multiplicando el segundo renglón por $\frac{a}{ad-bc}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \overset{-\frac{b}{a}R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ab-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & -\dfrac{b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

que se puede escribir como

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Como $\quad ad - bc = det\,(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

18. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & 2 \\ 1 & 0 & 6+i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 3 & 3+i & i \\ i & 4 & -5+2i \\ 8 & 6 & 3 \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtener $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que se cumpla la igualdad

$$(A+B)\,C^T = \begin{bmatrix} 2a+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-bi & 0 \\ 0 & 0 & c+2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$(A+B)\,C^T = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad (1)$$

Por otro lado

$$\begin{bmatrix} 2a+i & 0 & 0 \\ 0 & 1-bi & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+i \\ 1-bi \\ 2c \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad (2)$$

De las expresiones 1 y 2

$$\begin{bmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+i \\ 1-bi \\ 2c \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2+i & = & 2a+i \\ 1+3i & = & 1-bi \\ 3 & = & 2c \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad a=1 \ ; \quad b=-3 \ ; \quad c=\frac{3}{2}$$

19. Demostrar que si A, B y $A+B$ son matrices no singulares entonces

$$\left(A^{-1} + B^{-1} \right)^{-1} = A\left(A+B \right)^{-1} B$$

Solución

Teniendo en cuenta que si M, N y P son matrices invertibles del mismo orden, entonces $(MNP)^{-1} = P^{-1} N^{-1} M^{-1}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned} A\left(A+B \right)^{-1} B &= \left(B^{-1}\left(A+B \right)A^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(\left(B^{-1}A + B^{-1}B \right)A^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(\left(B^{-1}A + I \right)A^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(B^{-1}\left(AA^{-1} \right) + A^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(B^{-1}I + A^{-1} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$$A\left(A+B \right)^{-1} B = \left(B^{-1} + A^{-1} \right)^{-1}$$

como quería demostrarse.

20. Obtener el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1+2b+b^2 & 5 & 2 & 2+b \\ 8+5b^2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b^8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución

Aplicando el método de cofactores con el elemento a_{44}, tenemos

$$\begin{vmatrix} 1+2b+b^2 & 5 & 2 & 2+b \\ 8+5b^2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b^8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2b+b^2 & 5 & 2 \\ 5b^2+8 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = m$$

Aplicando una vez más el método de cofactores con el elemento a_{31}, se llega a

$$m = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 23$$

21. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener

a) $det\left(B^3 A^T \right)$

b) $det\left(5A^{10} \right)$

c) $\dfrac{det\ B^{-1}}{det\left(AB \right)}$

Solución

Calculamos los determinantes de las matrices A y B

$$det\ A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\,(-1)^{1+4} M_{14}$$

$$det\ A = M_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$det\ B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{1+2} M_{12} = -2M_{12}$$

$$det\ B = -2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\,(-3) = 6$$

Por tanto,

a) $det\left(B^3 A^T\right) = det\ B^3\ det\ A^T$

$$= (\ det\ B\ )^3\ det\ A$$

$$= 6^3\,(-2)$$

$$= -432$$

b) $det\left(5A^{10}\right) = 5^4\ det\ A^{10}$

$$= 5^4\ (\ det\ A\ )^{10}$$

$$= 625\ (\ -2)^{10}$$

$$= 640{,}000$$

c) $\dfrac{\det B^{-1}}{\det(AB)} = \dfrac{\det B^{-1}}{\det A \det B} = \dfrac{1}{\det A \det B \det B} = \dfrac{1}{\det A\left(\det B\right)^2}$

$$= \frac{1}{(-2)(6)^2}$$

$$= -\frac{1}{72}$$

22. Obtener la inversa de la matriz $D = \begin{bmatrix} 1+i & 2-i \\ 3+2i & 1-2i \end{bmatrix}$

Solución

Encontramos la matriz solicitada por medio de la adjunta de D

$$D^{-1} = \frac{1}{(1+i)(1-2i)-(2-i)(3+2i)}\begin{bmatrix} 1-2i & -2+i \\ -3-2i & 1+i \end{bmatrix}$$

y como $(1+i)(1-2i) = 3-i$ y $(2-i)(3+2i) = 8+i$

$$D^{-1} = \frac{1}{(3-i)-(8+i)}\begin{bmatrix} 1-2i & -2+i \\ -3-2i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{-5-2i}\begin{bmatrix} 1-2i & -2+i \\ -3-2i & 1+i \end{bmatrix}$$

Finalmente, después de realizar las divisiones se obtiene la matriz

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{29}+\frac{12}{29}i & \frac{8}{29}-\frac{9}{29}i \\ \frac{19}{29}+\frac{4}{29}i & -\frac{7}{29}-\frac{3}{29}i \end{pmatrix}$$

23. Determinar si la matriz $E = \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ \frac{1}{2} & i \end{bmatrix}$ es invertible.

Solución

En este caso

$$ad - bc = (2i)(i) - (-4)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$ad - bc = -2 + 2$$

$$ad - bc = 0$$

Por tanto la matriz E no es invertible. Se dice también que E es singular.

24. Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & b & 3 \\ 4 & 1 & c \end{bmatrix}$. Si la inversa de la matriz A es

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & a \\ 6 & b & b \end{bmatrix}$ obtener los valores de a, b y c.

Solución

$$AA^{-1} = I_3$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & b & 3 \\ 4 & 1 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & a \\ 6 & b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11a + 12 & 2a + 2b & 2a + 2b \\ -4 - 4b & 4 + 3b & 4 + ab + 3b \\ -48 + 6c & 8 + bc & 8 + a + bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices

$$\begin{aligned}
-11a+12 &= 1 \quad \ldots \quad (1)\\
2a+2b &= 0 \quad \ldots \quad (2)\\
2a+2b &= 0 \quad \ldots \quad (3)\\
-4-4b &= 0 \quad \ldots \quad (4)\\
4+3b &= 1 \quad \ldots \quad (5)\\
4+ab+3b &= 0 \quad \ldots \quad (6)\\
-48+6c &= 0 \quad \ldots \quad (7)\\
8+bc &= 0 \quad \ldots \quad (8)\\
8+a+bc &= 1 \quad \ldots \quad (9)
\end{aligned}$$

De la ecuación 1

$$-11a+12=1 \qquad \Rightarrow \qquad a=1$$

De la ecuación 4

$$-4-4b=0 \qquad \Rightarrow \qquad b=-1$$

De la ecuación 7

$$-48+6c=0 \qquad \Rightarrow \qquad c=8$$

Es fácil verificar que los valores de a, b y c obtenidos satisfacen las ecuaciones (2), (3), (5), (6), (8) y (9).

25. Dar una matriz de orden 3, diferente de la matriz nula, que muestre que si $AA = 0$ no necesariamente A es la matriz nula.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AA = 0$ para una matriz $A \neq 0$.

26. Determinar la inversa de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, por medio de su matriz adjunta.

Solución

El determinante de B es

$$\det(B) = (-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6+3 = -3$$

Por definición la matriz adjunta de B , que se denota como $adj(B)$, es

$$adj(B) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}$$

donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Realizando cálculos

$$c_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

La $adj(B)$ es:

$$adj(B) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

y la matriz inversa de B está dada por

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} adj(B)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

27. Si A es una matriz cuadrada de orden 5 y antisimétrica, demostrar que $det\left(A\right) = 0$

Solución

Como A es antisimétrica entonces $A = -A^T$. En consecuencia

$$det\left(A\right) = det\left(-A^T\right)$$

Aplicando propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} det\left(A\right) &= det\left(-A^T\right) \\ &= det\left(\left(-1\right)A^T\right) \\ &= \left(-1\right)^5 det\left(A^T\right) \\ &= \left(-1\right)\ det\left(A^T\right) \\ det\left(A\right) &= -\,det\left(A\right) \end{aligned}$$

Luego, si $det\left(A\right) = -\,det\left(A\right)$, entonces $det\left(A\right) = 0$.

28. Mostrar que toda matriz hermitiana M con elementos complejos puede escribirse como $M = A + iB$, donde A es una matriz simétrica con elementos reales y B es una matriz antisimétrica con elementos reales.

Solución

Toda matriz M con elementos complejos puede escribirse como la suma de dos matrices con elementos reales $M = A + iB$; en efecto, considerando la forma binómica de los elementos de M,

$$M=\begin{bmatrix} a+bi & c+di & \cdots \\ m+ni & p+qi & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & c & \cdots \\ m & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}+i\begin{bmatrix} b & d & \cdots \\ n & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

de donde podemos identificar a las matrices con elementos reales

$$A=\begin{bmatrix} a & c & \cdots \\ m & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix} b & d & \cdots \\ n & q & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Por otra parte

$$M^* = A^T - iB^T$$

puesto que $A^*= A^T$ y $B^*=B^T$ ya que ambas matrices tienen elementos reales, y el conjugado de un número real es el mismo número real.

Como M es una matriz hermitiana se tiene que $M = M^*$ y así

$$A + iB = A^T - iB^T$$

por lo que $A= A^T$ y $B= - B^T$, es decir, A es una matriz simétrica y B es una matriz antisimétrica, lo que completa la demostración.

29. Por medio de la regla de Cramer, determinar si el sistema de ecuaciones dado tiene solución única

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 9 \\ 4x+5y+6z &= 10 \\ 7x+8y+9z &= 12 \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes empleando la regla de Sarrus

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=(1\cdot5\cdot9+4\cdot8\cdot3+7\cdot2\cdot6)-(3\cdot5\cdot7+6\cdot8\cdot1+9\cdot2\cdot4)$$

$$\Delta=(45+96+84)-(105+48+72)$$

$$\Delta=225-225=0$$

por lo que el sistema de ecuaciones es incompatible o compatible indeterminado, esto es, si admite solución ésta no es única.

30. Por medio de la regla de Cramer, obtener, si existe, la solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 1 \\ 2x+3y+z &= 1 \\ -3x+y-2z &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes empleando la regla de Sarrus

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\left(1\cdot3\cdot(-2)+2\cdot1\cdot(-3)+(-3)\cdot2\cdot1\right)-\left((-3)\cdot3\cdot(-3)+1\cdot1\cdot1+(-2)\cdot2\cdot2\right)$$

$$\Delta=(-6-6-6)-(27+1-8)=-18-20=-38$$

por lo que el sistema es compatible determinado. Calculando los valores de las incógnitas:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$x=\frac{-6}{-38} \qquad y=\frac{-10}{-38} \qquad z=\frac{4}{-38}$$

$$x=\frac{3}{19} \qquad y=\frac{5}{19} \qquad z=-\frac{2}{19}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribir en el paréntesis de la derecha la letra V si la proposición es verdadera y una letra F si es falsa.

a) La adición de matrices de orden $m \times n$ es conmutativa ....( )

b) Si A, B y C son matrices cuadradas de orden n entonces $A(BC) = (AB)C$ ( )

c) La multiplicación de matrices cuadradas de orden n es conmutativa............( )

d) La matriz $C = \left(c_{ij} \right)$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$ es de orden 2×3 ....( )

e) Si $\alpha = 2 - i$ y $A = \begin{bmatrix} i & 2+i \\ -i & -2-i \end{bmatrix}$ entonces $\alpha A = \begin{bmatrix} 1+2i & 5 \\ -i-2i & 5 \end{bmatrix}$......( )

f) Si $A = \begin{bmatrix} 2i & i \\ i & -i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ entonces $AB - 2A = i \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. ( )

g) Si $A = \begin{bmatrix} 1+i & 1+i \\ i & -i \end{bmatrix}$ y $\alpha A = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix}$ entonces $\alpha = 1 - i$ ( )

h) Si A es una matriz de orden 2×3 y B es una matriz de 3×2 entonces BA es de orden 2×2 ....( )

i) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ entonces $AB = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$ ....( )

j) Si $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ entonces $AAA = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$ ....( )

k) Si A y B son matrices de orden dos, det (AB) = 6 y det(B) = 3 entonces det (A) = 2 .... ( )

l) Si N es una matriz simétrica entonces $N + N^T = 0$.....................................( )

m) Si tr(A) = 2 y tr (B) = 5 entonces tr(A - B) = -3................................( )

n) Si M es una matriz antisimétrica entonces tr (M) = 0..................................( )

2. Escribir en el paréntesis de la izquierda la letra de la opción correcta.

a) Si I es la matriz identidad de orden n, ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?.. ( )

1) $\det(I) = n$ 2) $I^{I} = I$

3) $AI = IA$ si A es de orden n 4) $\operatorname{tr}(I) = n$

b) Sean A y B matrices invertibles orden n. La matriz X que satisface la ecuación $(AX^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$ es ....( )

1) A^2 2) I 3) $2A$ 4) $AB^{-1}AB$

c) Sea A una matriz no singular de orden tres, tal que $det(2A) = det(A^3)det(A^T)$. El valor de $det(A^{-1})$ es...( )

1) 2 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\sqrt[3]{2}$ 4) 8

d) El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ es ....( )

1) 0 2) 3 3) 15 4) 178

e) Sea $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & 0 & a \\ c & c & a \end{vmatrix} = -3$. El valor de $\begin{vmatrix} a & c & 2b \\ c & a & 0 \\ c & a & 2c \end{vmatrix}$ es ....( )

1) - 12 2) - 6 3) 6 4) 12

f) Si N es una matriz de orden cuatro tal que $det(N\,(\text{adj}N)) = 81$, entonces $det(N)$ es ....( )

1) 3 2) 6 3) 9 4) 12

g) El cofactor C_{23} de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es ....( )

1) - 9 2) - 2 3) 0 4) 2

3. Sean $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix}$. Determinar, si existe, el conjunto de todos los valores de k para que $AB = BA$.

4. Se dice que una matriz A es idempotente si $A^2 = A$. Determinar todos los valores de a, c y d que hacen que la matriz $F=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ sea idempotente.

5. Comprobar que si A es una matriz idempotente entonces la matriz $B = I - A$ también es idempotente y además que $AB = BA = 0$.

6. Sea la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Determinar el conjunto de valores reales a para los cuales $\operatorname{tr}(MM^T) = 16$.

7. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y D, donde esta última es de orden dos y tal que $\operatorname{tr}(D) = 2$. Determinar el valor de m si $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(C + D)$.

8. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Verificar que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
   b) Determinar si AB es invertible.

9. Obtener la inversa de $C=\begin{pmatrix} i & -1 & 2 \\ 0 & 2-i & 1+3i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$.

10. Determinar el conjunto de valores de k y m para que las siguientes matrices sean invertibles:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & k & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & m & 2-m \\ -2 & 0 & -4 \\ m & 1 & 2m-1 \end{pmatrix}$$

11. Sea la matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & k \end{pmatrix}$.

a) Determinar los números reales k para los cuales R es invertible.
b) Obtener, si existe, la inversa de R para $k = 8$.
c) Para $k = 2$, escribir a la matriz R como la suma de una matriz simétrica más otra matriz antisimétrica.

12. Demostrar que si A, B y $A + B$ son matrices no singulares, entonce

$$A\left(A+B \right)^{-1} B = B\left(A+B \right)^{-1} A$$

13. Determinar todos los valores a tales que la matriz $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ sea singular.

14. Demostrar que si F es una matriz invertible, entonces $\left(F^T\right)^{-1} = \left(F^{-1}\right)^T$.

15. Demostrar que si N es una matriz que cumple la ecuación $N^2 - N - I = 0$, entonces N es una matriz invertible.

16. Determinar los valores de x tales que

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 0 & x-3 & -1 \\ 2 & 0 & x-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -2 & x-7 & 0 \\ 3 & 0 & x-2 \end{vmatrix}$$

17. Demostrar que si M es una matriz ortogonal de orden n, entonces

$$det(\mathrm{M}) = \pm 1.$$

18. Obtener el determinante de la matriz

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

19. Determinar la matriz inversa de $Z=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ a partir de la matriz adjunta de Z.

20. Demostrar que si M es una matriz cuadrada, entonces MM^T es una matriz simétrica.

21. Comprobar que la matriz de rotación $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es ortogonal.

22. Sean A y B matrices cuadradas de orden n y sea P una matriz invertible tal que $A = P^{-1}BP$. Demostrar que:
   a) $det(A) = det(B)$,
   b) $adj(A) = P^{-1}adj(B)P$

23. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M=\begin{pmatrix} 4-3i & -2+2i & 0 \\ 5-4i & -2+3i & 0 \\ -5+4i & -3i & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinar la matriz X que satisface la ecuación

$$B^{-1}AX=(2\det B)B^{-1}X+M^*+tr(M)ABM$$

24. Determinar, si existe, la matriz X que satisface la ecuación

$$AX + B^T X = C^T - X$$

donde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

25. Determinar el valor de α para que $\det(N)=16$, si $N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

26. Sean $A=\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$. Determinar la matriz X que satisface la ecuación $(adjA)\overline{X} = tr(A)B*$

27. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, obtener la matriz X que satisface la ecuación

$$\left(\frac{1}{4}X^T + iA^*\right)^T = \frac{1}{\det(2B^{-1})}B^{-1}$$

28. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } N=\begin{pmatrix} -2 & -3i & -5+4i \\ 0 & -2+3i & 5-4i \\ 0 & -2+2i & 4-3i \end{pmatrix}$$

obtener la matriz Y que satisface la ecuación

$$AYB^{-1} = (2\det B)YB^{-1} + N^*$$

donde N^* es la matriz transpuesta conjugada de N.

29. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener la traza y el determinante de la matriz X que satisface la ecuación $AXD = B + CXD$.

30. Por medio de la regla de Cramer, obtener, si existe, la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+2y-3z-w &= 3 \\ x+2y+z+2w &= 1 \\ -3x+y-z-3w &= -3 \\ 2x+y+z+5w &= 2 \end{aligned}$$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. a) V
   b) V
   c) F
   d) F
   e) F
   f) V
   g) F
   h) F
   i) V
   j) F
   k) V
   l) F
   m) V
   n) V

2. a) 1
   b) 1
   c) 2
   d) 3
   e) 3
   f) 1
   g) 4

3. $\{ 5 \}$

4. El conjunto solución S es la unión de los conjuntos

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{C} \right\}, \; S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{C} \right\} \; y \; S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

6. $\{ -2, 2 \}$

7. 1

8. a) tr(AB) = tr(BA) = 9
   b) AB es invertible

9. $$C^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 2+i & -5-i \\ 0 & -1 & 3-i \\ 0 & -i & 1+2i \end{pmatrix}$$

10. $k \in \left\{ a \mid a \neq \dfrac{18}{7},\, a \in \mathbb{C} \right\}$ y no existe ningún valor m que haga a M invertible.

11. a) $k \neq 9$

b) $R^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\{ -2, 1 \}$

16. $\{ 5, 6 \}$

18. 1

19. $Z^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

23. $X = \begin{pmatrix} 4+3i & 5+4i & -5-4i \\ -2-2i & -2-3i & 3i \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

24. $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

25. $\alpha = 3$

26. $X=\begin{pmatrix} 4 & 2+2i \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix}$

27. $X=\begin{pmatrix} -3+4i & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

28. $Y=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & -1 \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$

29. $tr(X)=4$ y $det(X)=1$

30. $x=\frac{83}{67},\ y=\frac{10}{67},\ z=-\frac{32}{67},\ w=-\frac{2}{67}$

CAPÍTULO 6

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Una de las ideas centrales que aparecen recurrentemente al hablar de álgebra moderna es la de estructura algebraica. Es indudable que la investigación matemática de tendencia conocida como estructura algebraica, trajo consigo resultados de gran valor, particularmente en lo que respecta al álgebra.

El álgebra moderna se inicia con Evariste Galois quien cambió radicalmente el carácter del álgebra. Antes de Galois, los esfuerzos de los algebristas estaban dirigidos principalmente hacia la solución de ecuaciones algebraicas; después de Galois, los esfuerzos de los algebristas se dirigieron hacia las estructuras de grupos y campos.

A la obra de Galois se debe la realización de trabajos revolucionarios de científicos importantes como Leopold Kronecker, Richard Dedekind, Heinrich Martin Weber y otros, que consistieron en fundamentar los modernos desarrollos abstractos de las teorías algebraicas.

Las primeras veces que aparecieron los campos, aunque sin definirlos explícitamente, fueron en las investigaciones de Niel Henrik Abel en 1828 y Evariste Galois en 1830 y 1831, sobre la resolución de ecuaciones por medio de radicales. Las primeras conferencias formales que se dieron sobre la teoría de Galois fueron las de Richard Dedekind en los primeros años de la década 1850-1860. Por aquella misma época Leopold Kronecker empezó sus estudios sobre las ecuaciones abelianas. Parece que el concepto de campo se introdujo en las matemáticas a través de las obras de Dedekind y Kronecker. Ambos, y especialmente Dedekind, admitieron la importancia de los grupos para el álgebra. El concepto de campo de números quedó firmemente establecido en las matemáticas con el famoso *Eleventh Supplement* de Dedekind, sin embargo, en esta obra el autor se ocupó únicamente de los números y las raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes racionales. Dedekind definió los campos de los números reales y complejos.

Un tratamiento formal y abstracto de los conceptos de grupos y campos lo realizó Heinrich Martin Weber, en colaboración con Dedekind. Weber publicó en 1882 un trabajo sobre funciones algebraicas, en el cual se aplicaban muchos de los conceptos que Dedekind había desarrollado en su teoría de ideales. Weber y Dedekind son considerados como pioneros del punto de vista abstracto del álgebra.

Weber define un campo como un grupo al que se le añade una operación que cumple ciertas restricciones. En la definición de Weber, los grupos quedan definidos por una ley de composición. Se cumple la propiedad de asociatividad, pero en general, no la de conmutatividad; existe un elemento neutro y uno inverso para cada elemento del grupo.

Niel Henrik Abel fue quien se encargó de estudiar, entre muchas otras cosas, la propiedad de la conmutatividad en lo que a los grupos se refiere. De ahí el nombre de grupos conmutativos o abelianos.

Habrá que mencionar que el problema de la determinación del número de grupos existentes para un orden dado, como bien se sabe, fue planteado por primera vez en 1851 por Arthur Cayley, quien también definió el concepto de grupo con una formulación altamente abstracta.

Weber define isomorfismo y establece que dos grupos isomorfos constituyen un mismo concepto genérico, y que por tanto, es indiferente tomar uno u otro como representante de ambos.

Si bien es cierto Weber había sido el primero en definir los campos en forma abstracta, fue Steinitz el primero en investigar estructuralmente dicho concepto.

El trabajo de Steinitz repercutió en diversas áreas de la matemática. Tal vez el ejemplo más importante de esto es el trabajo de Abraham Fraenkel, en el cual se estudió por primera vez el concepto abstracto de anillo, mencionando explícitamente a Steinitz como fuente de inspiración. A su vez los trabajos de Fraenkel abrieron el camino para los trabajos importantes de Emmy Noether, Emil Artin y Wolfgang Krull sobre las teorías algebraicas abstractas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean M_2 el conjunto de matrices cuadradas de orden dos con elementos reales, la matriz $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \{ A \mid AF = FA,\ A \in M_2 \}$. Determinar si la multiplicación usual entre matrices es una operación binaria en N.

Solución

$$A \in N \Rightarrow AF = FA$$

$$B \in N \Rightarrow BF = FB$$

Se quiere demostrar que $(AB)F = F(AB)$

$$\begin{aligned}(AB)F &= A(BF)\\ &= A(FB)\\ &= (AF)B\\ &= (FA)B\\ (AB)F &= F(AB)\end{aligned}$$

Por tanto $AB \in N$ y la multiplicación usual entre matrices es una operación binaria en N.

2. Sea el conjunto de los números enteros y * la operación binaria en $\mathbb{Z}$ definida por

$$a * b = k^2 a + (2k^2 - 1) b$$

Determinar el conjunto de valores $k \in \mathbb{Z}$ tal que * sea conmutativa.

Solución

$$\begin{cases} a * b = k^2 a + (2k^2 - 1) b & \text{...(1)} \\ b * a = k^2 b + (2k^2 - 1) a & \text{...(2)} \end{cases}$$

Las ecuaciones 1 y 2 deben cumplirse $\forall\ a,\ b \in \mathbb{Z}$, por tanto si $a * b = b * a$ se tendrá que

$$k^2 a + (2k^2 - 1) b = (2k^2 - 1) a + k^2 b$$

lo que implica que $k^2 = 2k^2 - 1$, es decir, $k^2 = 1$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$.

Así, el conjunto solicitado es $\{ -1, 1 \}$.

3. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros y la operación binaria en $\mathbb{Z}$ definida por $a * b = a + ab \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Determinar si * :
a) Es asociativa.
b) Es conmutativa.
c) Tiene idéntico derecho e izquierdo.
d) Tiene elementos inversos derecho e izquierdo.

Solución

a) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a*(b*c) = a*(b+bc) = a + a(b+bc) = a + ab + abc \qquad ...(1)$$

$$(a*b)*c = (a+ab)*c = a + ab + (a+ab)c = a + ab + ac + abc \qquad ...(2)$$

Como (1) es diferente de (2) la operación * no es asociataiva.

b) $a*b = a+ab$ y $b*a = b+ba = b+ab$ implican $a*b \neq b*a$ por lo tanto, * no es conmutativa.

c) Sea $e_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a*e_1 = a$. Aplicando * se tiene $a + ae_1 = a$ por lo que $e_1 = 0$ es el elemento idéntico derecho de $\mathbb{Z}$ para la operación * .

Sea $e_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $e_2 * a = a$. Aplicando * se tiene $e_2 + e_2 a = a$ por lo que $e_2 = \dfrac{a}{a+1}$ que está definida sólo si $a \neq -1$, por lo que $\mathbb{Z}$ no tiene idéntico izquierdo.

d) Sea $\hat{a} \in \mathbb{Z}$ tal que $a * \hat{a} = e_1$. Al aplicar * y sustituir $e_1 = 0$ se tiene $a + a\hat{a} = 0 \ \therefore \ \hat{a} = -1$
Así, $\hat{a} = -1$ es el elemento inverso derecho de todo $a \in \mathbb{Z}$.

No existen los inversos izquierdos de * puesto que no existe idéntico izquierdo.

4. Sea el conjunto $D = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$ y la operación + definida como

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0) \qquad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$$

Determinar si el sistema $(D, *)$ es un grupo.

Solución

i) Asociatividad

$$\begin{aligned}(x_1,\ y_1)+\left[(x_2,\ y_2)+(x_3,\ y_3)\right] &= (x_1,\ x_2)+(x_2+x_3,\ 0)\\ &= (x_1+(x_2+x_3),\ 0)\\ &= ((x_1+x_2)+x_3,\ 0)\\ &= (x_1+x_2,\ 0)+(x_3,\ y_3)\\ &= \left[(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\right]+(x_3,\ y_3)\end{aligned}$$

Por lo que existe asociatividad.

ii) Existencia de elemento idéntico

$$(x_1,\ y_1)+(e_1,\ e_2)=(x_1,\ y_1) \qquad \text{...(1)}$$

$$(x_1,\ y_1)+(e_1,\ e_2)=(x_1+e_1,\ 0) \qquad \text{...(2)}$$

De (1) y (2)

$$(x_1+e_1,\ 0)=(x_1,\ y_1)$$

$$x_1+e_1=x_1, \quad y_1=0$$

$$e_1=0; \quad y_1=0$$

Como $e_2 \in \mathbb{R}$ no existe elemento idéntico único, ya que al tomar e_2 distintos valores implica que existen diferentes elementos idénticos en el conjunto. Además, la igualdad sólo se satisface para $y_1=0$, es decir, no es válida para todos los elementos del conjunto D. Por tanto, el sistema $(D,\ +)$ no tiene estructura de grupo.

5. Para el sistema algebraico $(\mathbb{Z},\ \square)$, donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros y $\square$ es la operación binaria dada por

$$x \ \square \ y = x+2y+1 \quad \forall\ x,\ y \in \mathbb{Z}$$

determinar

a) si el sistema $(\mathbb{Z},\ \square)$ cumple con cerradura, y

b) el resultado de $-5*\left[6*(-2*10)\right]$.

Solución

a) $x \,\square\, y = x + 2y + 1$

$x \in \mathbb{Z},\quad 2y \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 1 \in \mathbb{Z}$. Por tanto $x \,\square\, y \in \mathbb{Z}$ y el sistema algebraico $(\mathbb{Z}, \square)$ cumple con cerradura.

b) $-2*10 = -2 + 2\,(10) + 1 = -2 + 20 + 1 = 19$

$6*19 = 6 + 2\,(19) + 1 = 6 + 38 + 1 = 45$

$-5*45 = -5 + 2\,(45) + 1 = -5 + 90 + 1 = 86$

Por tanto

$$-5*\left[6*\left(-2*10\right)\right] = 86$$

6. Determinar si el conjunto $G = \{\text{cis } 60°,\ \text{cis } 120°,\ -1,\ \text{cis } 240°,\ \text{cis } 300°,\ 1\}$ es un grupo con la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

Solución

i) Cerradura: $\forall\ x, y \in G:\quad x \cdot y \in G$

.	cis 60°	cis 120°	−1	cis 240°	cis 300°	1
cis 60°	cis 120°	−1	cis 240°	cis 300°	1	cis 60°
cis 120°	−1	cis 240°	cis 300°	1	cis 60°	cis 120°
−1	cis 240°	cis 300°	1	cis 60°	cis 120°	−1
cis 240°	cis 300°	1	cis 60°	cis 120°	cis 180°	cis 240°
cis 300°	1	cis 60°	cis 120°	−1	cis 240°	cis 300°
1	cis 60°	cis 120°	−1	cis 240°	cis 300°	1

En la tabla se observa que G es cerrado.

ii) Asociatividad: $\forall\ x, y, z \in G:\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

Como $G \subset \mathbb{C}$ (G está contenido en $\mathbb{C}$) entonces G cumple con asociatividad.

iii) Elemento idéntico: $\exists\ e \in C$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e \quad \forall\ x \in G$.

$e = 1$ ya que $1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad \forall x \in G$

iv) Elementos inversos: $\forall\ x \in G\ \ \exists\ \hat{x} \in G$ tal que $\hat{x} \cdot x = 1 = x \cdot \hat{x}$

El elemento inverso de cis $60°$ es cis $300°$
El elemento inverso de cis $120°$ es cis $240°$
El elemento inverso de -1 es -1
El elemento inverso de cis $240°$ es cis $120°$
El elemento inverso de cis $300°$ es cis $60°$
El elemento inverso de 1 es 1

Por tanto G es un grupo con la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

7. Sea el conjunto $P=\{\text{cis}(0°),\ \text{cis}(120°),\ \text{cis}(240°)\}$. Determinar si el sistema algebraico $(P,*)$ es un grupo abeliano, donde * es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.

Solución

Construimos la tabla

*	cis (0°)	cis (120°)	cis (240°)
cis (0°)	cis (0°)	cis (120°)	cis (240°)
cis (120°)	cis (120°)	cis (240°)	cis (0°)
cis (240°)	cis (240°)	cis (0°)	cis (120°)

i) En la tabla se observa que P es cerrado
ii) Asociatividad: $\forall a,\ b,\ c\in P:\ a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Ya que $P\in\mathbb{C}$ entonces $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\quad\forall a,b,c\in P$
iii) Existencia de elemento idéntico: $\exists e\in P$ tal que $a\cdot e=a=e\cdot a\quad\forall\ a\in P$
En la tabla se observa que $(\text{cis }0°)\cdot a=a=a\cdot(\text{cis }0°)\quad\forall\ a\in P$
Luego cis $0°$ es el elemento idéntico.
iv) Existencia de elementos inversos: $\forall\ a\in P\quad \hat{a}\in P$ tal que $a\cdot\hat{a}=\text{cis }0°=\hat{a}\cdot a$
Nuevamente de la tabla se observa que:
$\text{cis }0°\cdot\text{cis }0°=\text{cis }0°=\text{cis }0°\cdot\text{cis }0°\Rightarrow\text{cis }0°$ es el inverso de cis $0°$
$\text{cis }120°\cdot\text{cis }240°=\text{cis }0°=\text{cis }240°\cdot\text{cis }120°\Rightarrow\text{cis }240°$ es el inverso de cis $120°$
$\text{cis }240°\cdot\text{cis }120°=\text{cis }0°=\text{cis }120°\cdot\hat{\text{cis}}\ 290°\Rightarrow\text{cis }120°$ es el inverso de cis $240°$
por tanto todos los elementos de P tiene un único elemento inverso en P.

v) Conmutatividad: $\forall\ a,\ b\in P:\qquad a\cdot b=b\cdot a$
Como $P\in\mathbb{C},\quad a\cdot b=b\cdot a\quad\forall a,b\in P$
Por tanto el sistema algebraico $(P,\cdot)$ es un grupo abeliano.

8. Verificar que si $(G, *)$ es un grupo, entonces cada elemento $a \in G$ tiene únicamente un elemento inverso en G.

Solución

Sean $\hat{a}, \tilde{a} \in G$ dos elementos inversos de $a \in G$ y sea $e \in G$ el elemento idéntico del grupo. Tenemos que

$$a * \tilde{a} = e \quad \text{y} \quad a * \tilde{a} = e$$

por tanto

$$a * \hat{a} = a * \tilde{a}$$

luego, operando en ambos miembros con $\hat{a}$ se tiene

$$\hat{a} * (a * \hat{a}) = \hat{a} * (a * \tilde{a})$$

empleando la propiedad asociativa

$$(\hat{a} * a) * \hat{a} = (\hat{a} * a) * \tilde{a}$$

$$e * \hat{a} = e * \tilde{a}$$

$$\hat{a} = \tilde{a}$$

lo que indica que, en realidad, $a \in G$ sólo tiene un elemento inverso, como quería demostrarse.

9. Sea el grupo $(\mathbb{R}, \Delta)$, donde $a \,\Delta\, b = a + b - \sqrt{3} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$. Obtener el elemento idéntico del grupo y los elementos inversos.

Solución

Por definición de elemento idéntico

$$a \,\Delta\, e = e \,\Delta\, a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Para $a \,\Delta\, e = a$

Por regla de correspondencia

$$a \,\Delta\, e = a + e - \sqrt{3}$$

Por transitividad

$$a + e - \sqrt{3} = a$$

$$e = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$$

Como $(\mathbb{R}, \Delta)$ es un grupo, entonces el idéntico derecho es igual al idéntico izquierdo, por tanto $e = \sqrt{3}$ es el elemento idéntico del grupo.

Por definición de elementos inversos

$$a \, \Delta \, \hat{a} = \hat{a} \, \Delta \, a = \sqrt{3}$$

Para $a \, \Delta \, \hat{a} = \sqrt{3}$

Por regla de correspondencia

$$a \, \Delta \, \hat{a} = a + \hat{a} - \sqrt{3}$$

Por transitividad

$$a + \hat{a} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\hat{a} = -a + 2\sqrt{3}$$

Análogamente, los inversos izquierdos están dados por $\hat{a} = -a + 2\sqrt{3}$, ya que $(\mathbb{R}, \Delta)$ es un grupo.

Por tanto, los elementos inversos están dados por $\hat{a} = -a + 2\sqrt{3} \quad \forall \quad a \in \mathbb{R}$

10. Sea el grupo $(\mathbb{Z}, \Delta)$ donde la operación binaria Δ está definida por $a \, \Delta \, b = a + b - 6 \;\; \forall \;\; a, b \in \mathbb{Z}$. Obtener el inverso de 2.

Solución

Para obtener el inverso de 2 es necesario calcular previamente el idéntico del grupo.

Por definición

$$a \, \Delta \, e = a \quad \forall \quad a \in \mathbb{Z}$$

Por regla de correspondencia

$$a \,\Delta\, e = a + e - 6$$

Por transitividad

$$a + e - 6 = a$$

$$e = 6$$

El elemento inverso de 2 se obtiene por medio del siguiente proceso:

$$2 \,\Delta\, \hat{2} = 6$$

$$2 \,\Delta\, \hat{2} = 2 + \hat{2} - 6$$

$$2 + \hat{2} - 6 = 6$$

$$\hat{2} = -2 + 6 + 6$$

$$\hat{2} = 10$$

11. Sean el conjunto $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ y la operación $+$ definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m-1 & b+n \\ c+p & d+q+3 \end{pmatrix}$$

a) Verificar que $(M_2, +)$ tiene estructura de grupo abeliano.

b) Determinar el elemento inverso de $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) Obtener la matriz X que satisface la ecuación $M + X = N$ donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} m & n \\ f & q \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} r & s \\ t & v \end{pmatrix} \in M_2$.

i) Cerradura $A+B=\begin{pmatrix} a+m-1 & b+n \\ c+p & d+q+3 \end{pmatrix} \in M_2$

ii) Propiedad asociativa

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r & s \\ t & v \end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m+r-1 & n+s \\ p+t & q+v+3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+(m+r-1)-1 & b+(n+s) \\ c+(p+t) & d+(q+v+3)+3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a+m-1)+r-1 & (b+n)+s \\ (c+p)+t & (d+q+3)+v+3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+m-1 & b+n \\ c+p & d+q+3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r & s \\ t & v \end{pmatrix}$$

$$=\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix} r & s \\ t & v \end{pmatrix}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

iii) Existencia del elemento idéntico

Sea $E=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2$ tal que $A+E=A$, entonces

$$A+E=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A+E=\begin{pmatrix} a+x-1 & b+y \\ c+z & d+w+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Empleando la definición de igualdad de matrices

$$\begin{cases} a+x-1=a \\ b+y=b \\ c+z=c \\ d+w+3=d \end{cases}$$

entonces $x=1, \quad y=0, \quad z=0, \quad w=-3$.

Por tanto, existe el elemento idéntico derecho y éste es $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Ahora, sea $F=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2$ tal que $F+A=A$, entonces

$$F+A=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha+a-1 & \beta+b \\ \gamma+c & \delta+d+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha+a-1=a \\ \beta+b=b \\ \gamma+c=c \\ \delta+d+3=d \end{cases}$$

y $\alpha=1, \quad \beta=0, \quad \gamma=0, \quad \delta=-3$, por lo que el elemento idéntico izquierdo es

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Como $E=F$, existe el elemento idéntico que es $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

iv) Existencia de los elementos inversos

Sea $-A=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in M_2$ tal que $A+(-A)=E$,

$$A+(-A)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+m-1 & b+n \\ c+p & d+q+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, empleando la definición de igualdad entre matrices

$$\begin{cases} a+m-1=1 \\ b+n=0 \\ c+p=0 \\ d+q+3=-3 \end{cases}$$

de donde $m=2-a, \quad n=-b, \quad p=-c, \quad q=-6-d$; por lo que

$-A=\begin{pmatrix} 2-a & -b \\ -c & -6-d \end{pmatrix}$ es el elemento inverso derecho de A.

Por otra parte, sea $\hat{A}=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}\in M_2$ tal que $\hat{A}+A=E$.

$$\hat{A}+A=\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r+a-1 & a+b \\ t+c & u+d+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\begin{cases} r+a-1=1 \\ s+b=0 \\ t+c=0 \\ u+d+3=-3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad r=-2-a, \quad s=-b, \quad t=-c, \quad u=-6-d$; por lo tanto

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} 2-a & -b \\ -c & -6-d \end{pmatrix}$$

Como $-A=\hat{A}$, para toda A existe un elemento inverso $-A$.

Hasta este punto se ha determinado que el sistema $(M_2,+)$ tiene estructura de grupo.

v) Conmutatividad

$$A+B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+m-1 & b+n \\ c+p & d+q+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m+a-1 & n+b \\ p+c & q+d+3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=B+A$$

Por tanto $(M_2,+)$ es un grupo abeliano.

b) A partir del resultado del axioma iv, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

$$-A=\begin{pmatrix} 2-a & -b \\ -c & -6-d \end{pmatrix}\forall\ A\in M_2$$

se tiene que si $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ entonces:

$$-M=\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 3 & -6-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$$

c) De acuerdo con las propiedades de grupos

$$M+X=N$$

$$(-M)+(M+X)=(-M)+N$$

$$(-M+M)+X=(-M)+N$$

$$E+X=(-M)+N$$

$$X=-M+N$$

Sustituyendo $-M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene que

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

12. Sean $(G,*)$ un grupo y $a \in G$ cuyo elemento inverso es $\hat{a}$. Demostrar que si $\hat{a} = a \ \forall \ a \in G$, entonces $(G,*)$ es un grupo abeliano.

Solución

Deseamos verificar que $a*b = b*a \ \ \forall \ a,b \in G$. Como en este grupo el inverso de $a*b$ debe ser justamente $a*b$, procedemos de la siguiente forma:

$(a*b)*(b*a) = [a*(b*b)]*a$ Propiedad asociativa

$(a*b)*(b*a) = (a*e)*a$ e es el idéntico del grupo

$(a*b)*(b*a) = a*a$

$(a*b)*(b*a) = e$ ...(1)

y por otro lado

$(a*b)*(a*b) = e$ ...(2)

Comparando las expresiones (1) y (2) concluimos que $a*b = b*a$. Por tanto, $(G,*)$ es un grupo abeliano.

13. Sea $(S,*)$ un grupo, donde $S = \{\text{cis } 60°, \text{ cis } 120°, -1, \text{ cis } 240°, \text{ cis } 300°, 1\}$ y $*$ es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. Determinar si el conjunto $B = \{\text{cis } 120°, \text{ cis } 240°, 1\}$ es subgrupo de S.

Solución

La siguiente tabla ilustra a la operación * en S:

$*$	cis 120°	cis 240°	1
cis 120°	cis 240°	1	cis 120°
cis 240°	1	cis 120°	cis 240°
1	cis 120°	cis 240°	1

i) De la tabla es claro que B cumple con cerradura.
ii) B cumple con asociatividad por ser un subconjunto de $\mathbb{C}$.
iii) El elemento idéntico de B es 1
iv) cis 240° es el inverso de cis 120°
cis 120° es el inverso de cis 240°
1 es el inverso de 1

Por tanto B es un subgrupo de S.

14. Sea $(G, \cdot)$ un grupo, donde $G = \{1, -1\ , i\ , -i\}$ y $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. Determinar si el conjunto $T = \{1, -1, \ i\}$ es un subgrupo de G.

Solución

Dado que $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$, se puede construir la siguiente tabla.

$\cdot$	1	-1	i
1	1	-1	i
-1	-1	1	$-i$
i	i	$-i$	-1

Observar que $(-1) \cdot i = -i$, pero $-i \notin T$, luego T no cumple con cerradura y no es un subgrupo de G.

15. Sea G un conjunto no vacío y sea $*$ una operación binaria definida en G.
Si $(G, *)$ es un grupo y $a, b, d, \in G$, obtener la solución de la ecuación

$$x * a * x * b * x = x * d * x$$

Solución

$x * a * x * b * x = x * d * x$

$\hat{x} * (x * a * x * b * x) = \hat{x} * (x * d * x)$ Existencia de elementos inversos

$(\hat{x}*x)*(a*x*b*x)=(\hat{x}*x)*(d*x)$ Asociatividad

$e*(a*x*b*x)=e*(d*x)$ Existencia de elemento idéntico

$a*x*b*x=d*x$

$(a*x*b*x)*\hat{x}=(d*x)*\hat{x}$ Existencia de elementos inversos

$(a*x*b)*(x*\hat{x})=d*(x*\hat{x})$ Asociatividad

$(a*x*b)*e=d*e$ Existencia de elementos idénticos

$a*x*b=d$

$\hat{a}*(a*x*b)=\hat{a}*d$ Existencia de elementos inversos

$(\hat{a}*a)*(x*b)=\hat{a}*d$ Asociatividad

$e*(x*b)=\hat{a}*d$ Existencia de elemento idéntico

$x*b=\hat{a}*d$

$(x*b)*\hat{b}=(\hat{a}*d)*\hat{b}$ Existencia de elementos inversos

$x*\left(b*\hat{b}\right)=\hat{a}*d*\hat{b}$ Asociatividad

$x*e=\hat{a}*d*\hat{b}$ Existencia de elemento idéntico

$x=\hat{a}*d*\hat{b}$

16. Sea el anillo $(A,\ \oplus,\ \odot)$, en donde $A=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\in\mathbb{R}\}$ y las operaciones binarias $\oplus$, $\odot$ están definidas como

$$(x,\ y)\oplus(w,\ z)=(x+w,\ y+z)$$

$$(x,\ y)\odot(w,\ z)=(xw-yz,\ xz+yw)$$

Determinar si $(A,\ \otimes,\ \odot)$ tiene unidad.

Solución

Para todo $(x, y) \in A \ \exists \ (u_1, u_2) \in A$ tal que $(x, y) \odot (u, u_2) = (x, y)$

$$(x, y) \odot (u_1, u_2) = (xu_1 - yu_2, xu_2 + yu_1) = (x, y)$$

Por igualdad se tiene que

$$\begin{cases} x = xu_1 - yu_2 \\ y = xu_2 + yu_1 \end{cases}$$

Resolviendo para u_1 y u_2 , se obtiene

$u_1 = 1; \quad u_2 = 0$.

Por tanto $(u_1, u_2) = (1, 0) \in A$ y el anillo $(A, \oplus, \odot)$ tiene unidad por la derecha.

Por otro lado

$$(u_1, u_2) \odot (x, y) = (u_1 x - u_2 y, \quad u_1 y + u_2 x) = (x, y)$$

de donde

$$\begin{cases} x = u_1 x - u_2 y \\ y = u_1 y + u_2 x \end{cases}$$

Resolviendo para u_1 y u_2, se obtiene que

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 0.$$

Por tanto $(u_1, u_2) = (1, 0) \in A$ y el anillo $(A, \oplus, \odot)$ tiene unidad por la izquierda y como es igual a la unidad por la derecha, el anillo tiene unidad.

La unidad del anillo dado es $(u_1, u_2) = (1, 0)$.

17. Sea P el conjunto de polinomios de la forma $p(x) = ax, \ \forall a \in \mathbb{R}$ y sean $+$ y o las operaciones binarias en P definidas por:

$$p(x)+q(x)=(p+q)(x) \qquad \forall\ p(x), q(x) \in P$$

$$p(x)\ o\ q(x)=p(q(x)) \qquad \forall\ p(x), q(x) \in P$$

Considerando que el sistema $(P,+)$ es un grupo abeliano, verificar que el sistema $(P,+,o)$ tiene estructura de anillo. Determinar si $(P,+,o)$ es un anillo conmutativo y si tiene unidad.

Solución

Sean $p(x)=ax,\quad q(x)=bx,\quad r(x)=cx \in P$

Verificando la asociatividad de o en $\boldsymbol{P}$

$$p(x)\,o\,(q(x)\,o\,r(x))=p(x)\,o\,q(r(x))$$

$$p(x)\,o\,(q(x)\,o\,r(x))=p(q(r(x))) \qquad \ldots(1)$$

Por otro lado

$$(p(x)\,o\,q(x))\,o\ r(x)=p(q(x))\,o\ r(x)$$

$$(p(x)\,o\,q(x))\,o\ r(x)=p(q(r(x))) \qquad \ldots(2)$$

Comparando las igualdades (1) y (2) se tiene que

$$p(x)\ o\ (q(x)\,o\,r(x))=(p(x)\,o\ q(x))\,o\,r(x)$$

Verificando las propiedades distributivas

i) $p(x)\ o\ (q(x)+r(x))=p(q(x)+r(x))$

$$=p(bx+cx)$$

$$=p((b+c)x)$$

$$=a(b+c)x$$

$$p(x)\ o\ (q(x)+r(x))=abx+acx \qquad \ldots(3)$$

Por otro lado

$$p(x) \ o \ q(x)+p(x) \ o \ r(x)=p(q(x))+p(r(x))$$

$$=p(bx)+p(cx)$$

$$p(x) \ o \ q(x)+p(x) \ o \ r(x)=abx+acx \qquad ...(4)$$

Comparando las igualdades (3) y (4) se concluye que

$$p(x) \ o \ (q(x)+r(x))=p(x) \ o \ q(x)+p(x) \ o \ r(x)$$

ii) $(p(x)+q(x)) \ o \ r(x)=(p+q)(x) \ o \ r(x)$

en donde $(p+q)(x)=ax+bx=(a+b)x$, así

$$(p(x)+q(x)) \ o \ r(x)=(p+q)(r(x))$$

$$=(p+q)(cx)$$

$$=(a+b)(cx)$$

$$(p(x)+q(x)) \ o \ r(x)=acx+bcx \qquad ...(5)$$

Por otra parte

$$p(x) \ o \ r(x)+q(x) \ o \ r(x)=p(r(x))+q(r(x))$$

$$=p(cx)+q(cx)$$

$$p(x) \ o \ r(x)+q(x) \ o \ r(x)=acx+bcx \qquad ...(6)$$

Comparando las igualdades (5) y (6) se concluye que

$$(p(x)+q(x)) \ o \ r(x)=p(x) \ o \ r(x)+q(x) \ o \ r(x)$$

Por tanto, $(P,+,o)$ es un anillo.

Para determinar si $(P,+,o)$ es un anillo conmutativo se tiene que investigar la conmutatividad para la segunda operación, esto es:

$$p(x) \circ q(x) = p(q(x))$$
$$= p(bx)$$
$$= a(bx)$$
$$p(x) \circ q(x) = (ab)x \qquad \ldots(7)$$

Por otra parte

$$q(x) \circ p(x) = q(p(x))$$
$$= q(ax)$$
$$= b(ax)$$
$$q(x) \circ p(x) = (ba)x \qquad \ldots(8)$$

Comparando las igualdades (7) y (8) y teniendo en cuenta que $ab = ba \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$ se concluye que

$$p(x) \circ q(x) = q(x) \circ p(x)$$

por lo que $(P, +, o)$ es un anillo conmutativo.

Para determinar si el anillo $(P, +, o)$ tiene unidad se proponen $u_1(x) = e_1 x$, $u_2(x) = e_2 x \in P$ como idénticos derecho e izquierdo, respectivamente.

$$p(x) \circ u_1(x) = p(x)$$
$$p(u_1(x)) = p(x)$$
$$p(e_1 x) = ax$$
$$ae_1 x = ax$$

por lo que $e_1 = 1$ y $u_1(x) = x$ es la unidad derecha. Por otro lado

$$u_2(x)\ o\ \ p(x)=p(x)$$

$$u_2(p(x))=p(x)$$

$$u_2(ax)=ax$$

$$e_2(ax)=ax$$

por lo que $e_2=1$ y $u_2(x)=x$ es la unidad izquierda. En virtud de que $u_1(x)=u_2(x)=u(x)$ es tal que

$$p(x)\ o\ \ u(x)=u(x)\ o\ p(x)=p(x)\quad ;\quad \forall\quad p(x)\in P$$

el polinomio $u(x)=x$ es la unidad del anillo.

Por tanto, el sistema $(P,+,o)$ tiene estructura de anillo conmutativo con unidad.

18. Sean el conjunto $L=\left\{\frac{z_1}{z_2}+2i\ \middle|\ z_1,z_2\in\mathbb{C};\quad z_2\neq 0;\quad i^2=-1\right\}$ y las operaciones binarias # y * definidas por

$$\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)*\left(\frac{z_3}{z_4}+2i\right)=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}+2i$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)\#\left(\frac{z_3}{z_4}+2i\right)=\frac{z_1z_3}{z_2z_4}+2i$$

Si $(L,*)$ es un grupo abeliano, la operación # es cerrada, conmutativa y asociativa en L y # es distributiva por la izquierda sobre *, determinar si $(L,*,\#)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Solución

Distributividad por la derecha

$$\left[\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)*\left(\frac{z_3}{z_4}+2i\right)\right]\#\left[\left(\frac{z_5}{z_6}+2i\right)\right]=\left[\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)\#\left(\frac{z_5}{z_6}+2i\right)\right]*\left[\left(\frac{z_3}{z_4}+2i\right)\#\left(\frac{z_5}{z_6}+2i\right)\right]$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_3}{z_4}\right)\frac{z_5}{z_6}+2i=\frac{z_1z_5}{z_2z_6}+\frac{z_3z_5}{z_4z_6}+2i$$

$$\frac{z_1z_5}{z_2z_6}+\frac{z_3z_5}{z_4z_6}+2i=\frac{z_1z_5}{z_2z_6}+\frac{z_3z_5}{z_4z_6}+2i$$

Elemento idéntico para #

El elemento idéntico $\frac{e_1}{e_2}+2i\in L$ es tal que para todo $\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)\in L$ se tiene que

$$\left(\frac{z_1}{z_2}+2i\right)\#\left(\frac{e_1}{e_2}+2i\right)=\frac{z_1}{z_2}+2i$$

$$\frac{z_1e_1}{z_2e_2}+2i=\frac{z_1}{z_2}+2i \quad\Rightarrow\quad e_1=e_2\neq 0$$

Podría parecer que existen una infinidad de elementos idénticos, sin embargo si $e_1=e_2\neq 0$ entonces $\frac{e_1}{e_2}+2i=1+2i\in L$. Por tanto, la unidad del anillo es $1+2i$.

$(L,*,\#)$ es un anillo conmutativo con unidad.

19. Sea el anillo con unidad $(A,*,\#)$, donde $A=\{a,b,c\}$ y las operaciones * y # se definen como

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

#	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Determinar si se cumple la siguiente igualdad:

$$(\hat{a}*b)\#(c*\hat{a})=(e\#\hat{b})*(e'\#c)$$

Nota: $\hat{a}$ es el inverso de a respecto de la operación *
$\hat{b}$ es el inverso de b respecto de la operación *
e es el idéntico de la operación *
e' *es el* idéntico de la operación #

Solución

De las tablas que definen las operaciones * y # se deduce que

$$e=a, \quad e'=b, \quad \hat{a}=a, \quad \hat{b}=c$$

$$\begin{aligned}(\hat{a}*b)\#(c*\hat{a}) &= (a*b)\#(c*a)\\ &= b\#c\\ &= c\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left(e\#\hat{b}\right)*(e'\#c) &= (a\#c)*(b\#c)\\ &= a*c\\ &= c\end{aligned}$$

Por tanto

$$(\hat{a}*b)\#(c*\hat{a})=\left(e\#\hat{b}\right)*(e'\#c)$$

20. Sean el conjunto $A=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ y las operaciones binarias $+$ y $\cdot$ definidas por

$+$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	γ

$\cdot$	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β	γ	δ
γ	α	γ	α	γ
δ	α	δ	γ	β

Determinar

a) El elemento idéntico para la operación $+$ y para la operación $\cdot$

b) El elemento inverso de cada elemento de A respecto de la operación $+$

Solución

a) Para la operación $+$, se observa de la primer tabla que

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\alpha=\alpha \\ \alpha+\beta=\beta \\ \alpha+\gamma=\gamma \\ \alpha+\delta=\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el idéntico izquierdo } e_1=\alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha+\alpha=\alpha \\ \beta+\alpha=\beta \\ \gamma+\alpha=\gamma \\ \delta+\alpha=\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el idéntico derecho } e_2=\alpha$$

Como $e_1=e_2=\alpha$, el idéntico para la operación $+$ es $e=\alpha$

Para la operación $\cdot$, se observa de la segunda tabla que

$$\left.\begin{array}{l} \beta\cdot\alpha=\alpha \\ \beta\cdot\beta=\beta \\ \beta\cdot\gamma=\gamma \\ \beta\cdot\delta=\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el idéntico izquierdo } e_1'=\beta$$

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot\beta=\alpha \\ \beta\cdot\beta=\beta \\ \gamma\cdot\beta=\gamma \\ \delta\cdot\beta=\delta \end{array}\right\} \Rightarrow \text{el idéntico derecho } e_2'=\beta$$

Dado que $e_1'=e_2'=\beta$, el idéntico para la operación $\cdot$ es $e'=\beta$

b) Nuevamente de la tabla para la operación $+$ se tiene que

$\hat{\alpha}+\alpha=\alpha \Rightarrow \hat{\alpha}=\alpha$ (el inverso izquierdo de α es α)
$\hat{\beta}+\beta=\alpha \Rightarrow \hat{\beta}=\delta$ (el inverso izquierdo de β es δ)
$\hat{\gamma}+\gamma=\alpha \Rightarrow \hat{\gamma}=\gamma$ (el inverso izquierdo de γ es γ)
$\hat{\delta}+\delta=\alpha \Rightarrow \hat{\delta}=\beta$ (el inverso izquierdo de δ es β)

$\alpha+\hat{\alpha}=\alpha \Rightarrow \hat{\alpha}=\alpha$ (el inverso derecho de α es α)
$\beta+\hat{\beta}=\alpha \Rightarrow \hat{\beta}=\delta$ (el inverso derecho de β es δ)

$$\gamma+\hat{\gamma}=\alpha \Rightarrow \hat{\gamma}=\gamma \qquad (\text{el inverso derecho de } \gamma \text{ es } \gamma)$$
$$\delta+\hat{\delta}=\alpha \Rightarrow \hat{\delta}=\beta \qquad (\text{el inverso derecho de } \delta \text{ es } \beta)$$

Por tanto el inverso de cada elemento de A respecto de la operación $+$ es

α para α,

δ para β,

γ para γ y

β para δ.

21. Sean $S=\left\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,\,b\in\mathbb{Q}\right\}$ y las operaciones de adición y multiplicación definidas en $\mathbb{R}$. Demostrar que el sistema algebraico $(S,+,\cdot)$ es un campo.

Solución

i) Asociatividad para la adición en S.

Si $x,\,y,\,z\in S$ entonces debe cumplirse que $x+(y+z)=(x+y)+z$

Sean $x=a_1+b_1\sqrt{2},\quad y=a_2+b_2\sqrt{2},\quad z=a_3+b_3\sqrt{2}\in S$

$$\begin{aligned}
x+(y+z)&=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left[\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)+\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right]\\
&=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left[(a_2+a_3)+(b_2+b_3)\sqrt{2}\right]\\
&=\left(a_1+(a_2+a_3)\right)+\left(b_1+(b_2+b_3)\right)\sqrt{2}\\
&=\left((a_1+a_2)+a_3\right)+\left((b_1+b_2)+b_3\right)\sqrt{2}\\
&=\left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2}\right)+\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\\
&=\left[\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\right]+\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\\
&=(x+y)+z
\end{aligned}$$

ii) Conmutatividad para la adición en S.

$$\begin{aligned} x+y &= \left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right) \\ &= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{2} \\ &= (a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{2} \\ &= \left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)+\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right) \\ &= y+x \end{aligned}$$

iii) Elemento idéntico para S.

$$\forall\ x \in S,\ \exists\ e \in S \text{ tal que } x+e=e+x=x$$

Sea $e=e_1+e_2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x+e &= \left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)+\left(e_1+e_2\sqrt{2}\right) \\ &= (a_1+e_1)+(b_1+e_2)\sqrt{2} \qquad \text{...(1)} \end{aligned}$$

como

$$x+e=a_1+b_1\sqrt{2} \qquad \text{...(2)}$$

De las expresiones (1) y (2) se tiene:

$$a_1+e_1=a_1 \quad \Rightarrow \quad e_1=0$$

$$b_1+e_2=b_1 \quad \Rightarrow \quad e_2=0$$

Dado que

$$e=e_1+e_2\sqrt{2}$$

entonces el idéntico derecho es

$$e=0+0\sqrt{2}$$

Obteniendo el idéntico izquierdo, ahora sea $m=m_1+m_2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} m+x &= \left(m_1+m_2\sqrt{2}\right)+\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right) \\ &= (m_1+a_1)+(m_2+b_1)\sqrt{2} \qquad \text{...(3)} \end{aligned}$$

como

$$m+x=a_1+b_1\sqrt{2} \qquad \text{...(4)}$$

De las expresiones (3) y (4) se tiene que

$$m_1 + a_1 = a_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 0$$

$$m_2 + b_1 = b_1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 0$$

Entonces el idéntico izquierdo es

$$e = 0 + 0\sqrt{2}$$

De lo anterior se concluye que

El elemento idéntico es $e = m = 0 + 0\sqrt{2}$

iv) Elementos inversos

Sea $\hat{x} = y_1 + y_2\sqrt{2} \in S$ tal que $x + \hat{x} = 0 + 0\sqrt{2}$

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) + \left(y_1 + y_2\sqrt{2}\right) = 0 + 0\sqrt{2}$$

$$\left(a_1 + y_1\right) + \left(b_1 + y_2\right)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$$

Por la igualdad se tiene

$$a_1 + y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -a_1$$

$$b_1 + y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -b_1$$

$\hat{x} = -a_1 - b_1\sqrt{2} \in S$

$$\hat{x} + x = 0 + 0\sqrt{2}$$

$$\left(y_1 + y_2\sqrt{2}\right) + \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) = 0 + 0\sqrt{2}$$

$$\left(y_1 + a_1\right) + \left(y_2 + b_1\right)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$$

$$y_1 + a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -a_1$$

$$y_2 + b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -b_1$$

$$\hat{x} = -a_1 - b_1\sqrt{2} \in S$$

El elemento inverso de x es $\hat{x} = -a_1 - b_1\sqrt{2}$

v) Asociatividad para la multiplicación en S.

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

$$x\cdot(y\cdot z)=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left[\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left[\left(a_2a_3+2b_2b_3\right)+\left(a_2b_3+b_2a_3\right)\sqrt{2}\right]$$

$$=a_1\left(a_2a_3+2b_2b_3\right)+a_1\left(a_2b_3+b_2a_3\right)\sqrt{2}+b_1\left(a_2a_3+2b_2b_3\right)\sqrt{2}+2b_1\left(a_2b_3+b_2a_3\right)$$

$$=\left(a_1a_2a_3+2a_1b_2b_3+2b_1a_2b_3+2b_1b_2a_3\right)+\left(a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3+2b_1b_2b_3\right)\sqrt{2}\quad\text{...(5)}$$

Ahora

$$\left(x\cdot y\right)\cdot z=\left[\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\right]\cdot\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)$$

$$=\left[\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\sqrt{2}\right]\cdot\left(a_3+b_3\sqrt{2}\right)$$

$$=\left[\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)\cdot a_3+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)2b_3\right]+\left[\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)b_3+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)a_3\right]\sqrt{2}$$

$$=\left[a_1a_2a_3+2b_1b_2a_3+2a_1b_2b_3+2b_1a_2b_3\right]+\left[a_1a_2b_3+2b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3\right]\quad\text{...(6)}$$

Al comparar las expresiones (5) y (6) se concluye que

$$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

vi) Conmutatividad para la multiplicación en S.

$$x\cdot y=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)$$

$$x\cdot y=\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\sqrt{2}\quad\text{...(7)}$$

Por otra parte

$$y\cdot x=\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\cdot\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)$$

$$y\cdot x=\left(a_2a_1+2b_2b_1\right)+\left(a_2b_1+b_2a_1\right)\sqrt{2}$$

$$y\cdot x=\left(a_1a_2+2b_1b_2\right)+\left(a_1b_2+b_1a_2\right)\sqrt{2}\quad\text{...(8)}$$

De las expresiones (7) y (8) se tiene que

$$x\cdot y=y\cdot x$$

vii) Elemento idéntico para la multiplicación en S.

$$u \cdot x = x \cdot u = x$$

$$u = u_1 + u_2\sqrt{2}$$

$$u \cdot x = x$$

sustituyendo

$$\left(u_1 + u_2\sqrt{2}\right) \cdot \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) = a_1 + b_1\sqrt{2}$$
$$u_1a_1 + u_1b_1\sqrt{2} + a_1u_2\sqrt{2} + 2b_1u_2 = a_1 + b_2\sqrt{2}$$
$$\left(a_1u_1 + 2b_1u_2\right) + \left(b_1u_1 + a_1u_2\right)\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

por igualdad

$$a_1u_1 + 2b_1u_2 = a_1 \Rightarrow u_1 = 1,\ u_2 = 0$$
$$b_1u_1 + a_1u_2 = b_1 \Rightarrow u_1 = 1,\ u_2 = 0$$

con lo cual

$$u = 1 + 0\sqrt{2}$$

Por otro lado

$$x \cdot u = x$$

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) \cdot \left(u_1 + u_2\sqrt{2}\right) = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

desarrollando y agrupando se tiene que:

$$\left(a_1u_1 + 2b_1u_2\right) + \left(a_1u_2 + b_1u_1\right)\sqrt{2} = a_1 + b_1\sqrt{2}$$

por igualdad

$$a_1u_1 + 2b_1u_2 = u_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1,\ u_2 = 0$$
$$a_1u_2 + b_1u_1 = b_1 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 1,\ u_2 = 0$$
$$u = 1 + 0\sqrt{2}$$

El elemento idéntico para la multiplicación es $u = 1 + 0\sqrt{2}$

viii) Elementos inversos.

$$x^{-} \cdot x = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$x^{-} = m + n\sqrt{2}$$

$$\left(m + n\sqrt{2}\right) \cdot \left(a_1 + b_1\sqrt{2}\right) = 1 + 0\sqrt{2}$$

$$\left(ma_1 + 2nb_1\right) + \left(na_1 + mb_1\right)\sqrt{2} = 1 + 0\sqrt{2}$$

por igualdad

$$ma_1 + 2nb_1 = 1$$
$$na_1 + mb_1 = 0$$

o bien

$$ma_1 + 2nb_1 = 1$$
$$mb_1 + na_1 = 0$$

resolviendo el sistema de ecuaciones para m y n, se obtiene

$$m = \frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}, \quad n = \frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2}$$

El elemento inverso de x es:

$$x^{-} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right) + \left(\frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1}\right)\sqrt{2} \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

Análogamente para $x \cdot x^{-} = 1 + 0\sqrt{2}$, se obtiene

$$x^{-} = \left(\frac{a_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right) + \left(\frac{-b_1}{a_1^2 - 2b_1^2}\right)\sqrt{2} \qquad (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

Existen elementos inversos

ix) Distributividad $\begin{cases} x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z) \\ (x+y)\cdot z=(x\cdot z)+(y\cdot z) \end{cases}$

$$x=x_1+x_2\sqrt{2}, \quad y=y_1+y_2\sqrt{2}, \quad z=z_1+z_2\sqrt{2}$$

Se demostrará primero que $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$

$$\begin{aligned}
x\cdot(y+z)&=\left(x_1+x_2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\left(y_1+y_2\sqrt{2}\right)+\left(z_1+z_2\sqrt{2}\right)\right)\\
&=\left(x_1+x_2\sqrt{2}\right)\cdot\left((y_1+z_1)+(y_2+z_2)\sqrt{2}\right)\\
&=x_1(y_1+z_1)+2x_2(y_2+z_2)+\left(x_1(y_2+z_2)+x_2(y_1+z_1)\right)\sqrt{2}\\
&=x_1y_1+x_1z_1+2x_2y_2+2x_2z_2+\left(x_1y_2+x_1z_2+x_2y_1+x_2z_1\right)\sqrt{2}\\
&=x_1y_1+x_1z_1+2x_2y_2+2x_2z_2+x_1y_2\sqrt{2}+x_1z_2\sqrt{2}+x_2y_1\sqrt{2}+x_2z_1\sqrt{2}\\
&=\left(x_1y_1+2x_2y_2+x_1y_2\sqrt{2}+x_2y_1\sqrt{2}\right)+\left(x_1z_1+2x_2z_2+x_1z_2\sqrt{2}+x_2z_1\sqrt{2}\right)\\
&=\left(x_1+x_2\sqrt{2}\right)\left(y_1+y_2\sqrt{2}\right)+\left(x_1+x_2\sqrt{2}\right)\left(z_1+z_2\sqrt{2}\right)\\
&=x\cdot y+x\cdot z
\end{aligned}$$

Luego $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

De la misma manera, el lector puede verificar que

$$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$$

Por tanto el sistema $(S,+,\cdot)$ tiene estructura de campo.

22. Sea $E=\left\{a+bi \,\middle|\, a,b\in\mathbb{Q}, i^2=-1\right\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$. Determinar si $(E,+,\cdot)$ es un campo, en donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales de adición y multiplicación en $\mathbb{C}$.

Solución

Sean $z_1=a+bi,\ z_2=c+di,\ z_3=m+ni\in E$, lo que implica que $a,b,c,d,m,n\in\mathbb{Q}$

i) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3 \ \ \forall\ z_1,\ z_2,\ z_3\in\mathbb{C}$
Como $E\subset\mathbb{C}$, la igualdad también es válida para todo $z_1,\ z_2,\ z_3\in E$.

ii) $z_1+z_2=z_2+z_1\ \forall\ z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$, por lo que es válida $\forall\ z_1,\ z_2\in E$.

iii) Sea $e=x+yi\in E$ tal que $z_1+e=z_1$

$$(a+bi)+(x+yi)=(a+bi)$$

$$(a+x)+(b+y)i=(a+bi)$$

Por lo que $x=y=0$ y $e=0+0i$

iv) Sea $-z_1=h+ki\in E$ tal que $z_1+(-z_1)=e$

$(a+bi)+(h+ki)=0+0i$

$(a+h)+(b+k)i=0+0i$

Por lo que $h=-a,\ k=-b$ y $-z_1=-a-bi$ es el inverso aditivo de $z_1=a+bi\in E$

v) $z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

Como $ac-bd,\ ad+bc\in\mathbb{Q},\quad z_1+z_2\in E$

vi) $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3\quad\forall\quad z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ por lo que es válida también $\forall\quad z_1,z_2,z_3\in E$.

vii) Sea $u=u_1+u_2i\in E$ tal que

$$u\cdot z_1=z_1$$

$$(u_1+u_2i)\cdot(a+bi)=(a+bi)$$

$$(u_1a-u_2b)+(u_1b+u_2a)=(a+bi)$$

lo que implica que $u_1=1,\quad u_2=0$ y que $u=1+0i$

viii) Sea $\hat{z}=\hat{a}+\hat{b}i\in E$ tal que

$$z_1\cdot\hat{z}=u$$

$$(a+bi)\cdot\left(\hat{a}+\hat{b}i\right)=(1+0i)$$

$$\left(a\hat{a}-b\hat{b}\right)+\left(a\hat{b}+b\hat{a}\right)i=(a+0i)$$

lo que implica que

$$\begin{cases} a\hat{a} - b\hat{b} = 1 & \ldots.(1) \\ b\hat{a} + a\hat{b} = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por a y (2) por b, para después sumar las ecuaciones obtenidas se tiene

$$a^2\hat{a} - ab\hat{b} = a$$

$$\underline{b^2\hat{a} + ab\hat{b} = 0}$$

$$\left(a^2 + b^2\right)\hat{a} = a$$

por lo que $\hat{a} = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ y, sustituyendo en la expresión 2

$$\frac{ab}{a^2 + b^2} + a\hat{b} = 0$$

por lo que $\hat{b} = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$. Así el inverso multiplicativo de $z_1 = a + bi$ es $\hat{z}_1 = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\, i, \quad \left(a \neq 0,\ b \neq 0\right)$

Nótese que si $a = b = 0$ entonces $\hat{z}_1$ no estará definido, pero no afecta a la definición de campo puesto que en este caso $z_1 = 0 + 0i = e$.

ix) $z_1 \cdot \left(z_2 + z_3\right) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ y $\left(z_1 + z_2\right) \cdot z_3 = \left(z_1 \cdot z_3\right) + \left(z_2 \cdot z_3\right)$ se cumple $\forall z_1, z_2, z_3 \in E$, ya que E es un subconjunto de $\mathbb{C}$.

Por tanto $\left(E, +, \cdot\right)$ es un campo.

23. Sea el grupo $\left(M, +\right)$ donde $M = \left\{ diag\left(a, b, c\right) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y $+$ es la adición usual de matrices y sea el grupo $\left(P, \oplus\right)$ donde $P = \left\{ ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y $\oplus$ es la adición usual de polinomios.

Determinar si la función $f : M \to P$ con regla de correspondencia

$$f\left(diag\left(a, b, c\right)\right) = ax^2 + bx + c$$

es un isomorfismo entre los grupos $\left(M, +\right)$ y $\left(P, \oplus\right)$

Solución

f es un isomorfismo si es un homorfismo y es biyectiva.
¿f es un homorfismo?

$$A = diag\left(a, b, c\right), \quad B = diag\left(e, f, g\right) \quad \Rightarrow \quad A + B = diag\left(a+e,\ b+f,\ e+g\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(A+B\right) &= f\left(diag\left(a+e, +b+f, c+g\right)\right) \\ &= \left(a+e\right)x^2 + \left(b+f\right)x + \left(c+g\right) \\ &= ax^2 + ex^2 + bx + fx + c + g \\ &= \left(ax^2 + bx + c\right) \oplus \left(ex^2 + fx + g\right) \\ &= f\left(A\right) \oplus f\left(B\right) \end{aligned}$$

Como $f\left(A+B\right) = f\left(A\right) \oplus f\left(B\right)$ entonces f es un homorfismo.

¿f es biyectiva?

$$f\left(diag\left(a, b, c\right)\right) = f\left(diag\left(e, f, g\right)\right)$$
$$ax^2 + bx + c = ex^2 + fx + g$$

Por igualdad de polinomios $a = e,\ b = f,\ c = g$, luego

$$diag\left(a, b, c\right) = diag\left(e, f, g\right)$$

f es inyectiva.

Además como el codominio de f es igual al recorrido de f (todo polinomio $ax^2 + bx + c$ tiene asociada una matriz $diag\left(a, b, c\right)$) entonces

f es suprayectiva.

Entonces f es biyectiva.

Por tanto f es un isomorfismo.

24. La función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ con regla de correspondencia $f(x)=-x$, es un isomorfismo entre los grupos $(\mathbb{Z},\ \Delta)$ y $(\mathbb{Z},\ \square)$. La operación binaria $\square$ está definida por

$$x \square y = x + y - 3 \quad \forall\, x,\, y \in \mathbb{Z}$$

Determinar la regla de correspondencia de la operación binaria Δ

Solución

Como f es un isomorfismo entonces

$$f(x \Delta y) = f(x) \ \square \ f(y) \qquad \ldots(1)$$

Aplicando la regla de correspondencia $f(x)=-x$

$$f(x \,\Delta\, y) = -(x \,\Delta\, y)$$

$$f(x) = -x$$

$$f(y) = -y$$

Sustituyendo en la expresión 1

$$-(x \,\Delta\, y) = (-x) \square (-y)$$

$$-(x \,\Delta\, y) = (-x) + (-y) - 3$$

$$-(x \,\Delta\, y) = -(x + y + 3)$$

Por tanto

$$x \,\Delta\, y = x + y + 3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En el conjunto de los números naturales se define la operación binaria $a * b = 4a + 2b \quad \forall a,\ b \in \mathbb{N}$; calcular $2*(3*(1*1))$.

2. Sean $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y la operación Δ dada por $m \,\Delta\, n = m + 3n - 5 \quad \forall m,\ n \in \mathbb{Q}$. Determinar el valor de x que satisface la ecuación

$$[3 \,\Delta\, (-2)] \;\Delta\; [(x+2) \,\Delta\, 4] = 0$$

3. Determinar si la operación binaria $x \,\nabla\, y = -2x + 3y$ definida en el conjunto de los números enteros, es asociativa.

4. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $\square$ la operación binaria dada por

$\square$	a	b	c	d
a	b	c	a	d
b	c	a	b	d
c	a	b	c	d
d	d	d	d	d

Determinar si la operación binaria $\square$ es

a) Conmutativa.
b) Asociativa.

5. Para la operación binaria $a \otimes b = 6a - 2b + \dfrac{1}{3}$ definida en $\mathbb{R}$, determinar si

a) existe elemento idéntico, y
b) existen elementos inversos.

6. Sean el conjunto $S = \{1, -1, i, -i\}$, donde $i^2 = -1$, y la operación binaria $\cdot$ definida como

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Determinar:

a) El elemento idéntico de S.
b) Los elementos inversos de S.

7. Sea el sistema algebraico $\left(\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{5}\right\}, \odot\right)$ donde $\odot$ está dada por $a \odot b = a+b+5ab$.

Determinar el elemento inverso de -10.

8. Sean el conjunto $G=\{x,\ y,\ z,\ w\}$ y la operación binaria Ω definida por

Ω	x	y	z	w
x	x	y	z	w
y	y	z	w	x
z	z	w	x	y
w	w	x	y	z

Determinar si el sistema algebraico $(G,\ \Omega)$ es un grupo abeliano.

9. Sean el conjunto $E=\{m,\ n,\ r,\ p\}$ y la operación binaria $+$ dada por

$+$	m	n	r	p
m	p	m	r	n
n	m	r	n	p
r	n	p	m	r
p	r	n	p	m

Determinar si el sistema algebraico $(E,\ +)$ es un grupo.
Si no lo es ¿cuáles axiomas no se cumplen?

10. Si $(G,\ \Delta)$ es un grupo abeliano y $a,\ b,\ c \in G$, resolver la ecuación
$a \,\Delta\, x \,\Delta\, b = b \,\Delta\, c$

11. Sean el conjunto $B=\{\text{cis } 0°, \text{cis } 120°, \text{cis } 240°\}$ y $\cdot$ la multiplicación usual en $\mathbb{C}$.
Determinar si el sistema algebraico $(B, \cdot)$ es un grupo.

12. Sean $(G, \circ)$ un grupo y $a, b \in G$. Demostrar que si $a \circ b = b \circ c$ entonces $b = c$.

13. Sea $(L, \cdot)$ un grupo, donde $L = \{1, -1, i, -i\}$ y $\cdot$ es la multiplicación usual en $\mathbb{C}$. Determinar si $F = \{1, -1\}$ es un subgrupo de L.

14. Para el grupo del ejercicio anterior, determinar si existe un conjunto de tres elementos que sea subgrupo de L.

15. Sea $P = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y la operación * definida por

$$(ax+b)*(cx+d) = (a+c+1)\,x + (b+d+1)$$

Determinar si el sistema algebraico $(P, *)$ es un grupo.

16. Determinar si el conjunto $R = \left\{a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{11} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$ es un anillo con la adición y multiplicación usuales en $\mathbb{R}$.

17. Sea el conjunto $H = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ y las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas por

$\oplus$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

$\odot$	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β	α	β
γ	α	γ	α	γ
δ	α	δ	α	δ

Determinar si el sistema algebraico $(H, \oplus, \odot)$ es un:

a) Anillo.
b) Anillo conmutativo.
c) Anillo con unidad.

18. Demostrar que si $(A, +, \cdot)$ es un anillo y e es el elemento idéntico para la operación $+$, entonces $a \cdot e = e \cdot a = e$

19. Sean $(D, *, \#)$ donde $D = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ y las operaciones binarias *, # definidas por

$$(a, b)*(c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b)\,\#\,(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad \forall\, (a, b), (c, d) \in D$$

Determinar si $(D, *, \#)$ es un anillo.

20. Demostrar que el conjunto $J=\left\{x \,\middle|\, x=\frac{1}{3}(ab),\ b\neq 0,\ a, b\in\mathbb{Z}\right\}$ es un campo con las operaciones $\square$ y # definidas como

$$x \square y = x + y$$

$$x \# y = \frac{1}{3} \times y$$

21. Sean los grupos $(\mathbb{R}, \Delta)$ y $(G, \square)$ donde $G=\left\{\left(x, -\frac{x}{5}\right) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$ y las operaciones binarias Δ y $\square$ se definen como

$$x \,\Delta\, y = x + y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\left(x_1 - \frac{x}{5}\right) \square \left(y, -\frac{y}{5}\right) = \left(x+y, -\frac{1}{5}(x+y)\right) \qquad \forall \left(x, -\frac{x}{5}\right), \left(y, -\frac{y}{5}\right) \in G$$

Determinar si la función $g:\mathbb{R}\to G$ es un isomorfismo, considerando que la regla de correspondencia g es $g(x)=\left(x, -\frac{x}{5}\right)$.

22. Sean $(\mathbb{R}, \delta)$ y $(\mathbb{R}, \phi)$ dos grupos, donde las operaciones binarias δ y ϕ están dadas por

$$a \,\delta\, b = a + b + 2$$

$$a \,\phi\, b = a + b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Determinar si la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con regla de correspondencia $f(x)=x+2$, es un isomorfismo.

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1. 56
2. $-\dfrac{14}{3}$
3. No
4. a) Sí b) Sí
5. a) No existe b) No existen
6. a) $e = 1$
   b) $\hat{1} = 1$
   $-\hat{1} = -1$
   $\hat{i} = -i$
   $-\hat{i} = i$
7. $-\dfrac{10}{49}$
8. Sí
9. No, la operación no es asociativa, no existe idéntico, no existen inversos.
10. $x = \hat{a} \ \Delta \ c$
11. Sí
13. Sí
14. No
15. Sí
16. Sí
17. a) Sí b)No c) No
19. Sí
21. Sí
22. Sí

Cuaderno de ejercicios de álgebra editado por la Facultad de Ingeniería. Se terminó de imprimir el 9 de diciembre de 2011 en el Departamento de Publicaciones de la Facultad de Ingeniería, Av. Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México, C. U., Delegación Coyoacán, México, D. F., Código Postal 04510. Se imprimió en offset a una tinta interiores y forros. El tiraje consta de 250 ejemplares, impresos en papel bond de 75 gramos y forros en couché de 300 gramos y un tamaño final de 21.5x28.0 cm.

Secretaría de Servicios Académicos

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería