INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

LÁZARO CÁRDENAS
IPN

Guía de Estudio

ÁLGEBRA

Basado en el Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje.
Para alumnos de PRIMER Semestre.
Turno Matutino

UNIDAD 1

NUMEROS REALES.

Presentación

La necesidad de tener herramientas para lograr el objetivo de la enseñanza. Es necesario, el dominio de elementos matemáticos para poder trabajar en línea en cursos avanzados, así como mantener la capacidad de consultar cualquier bibliografía.

Dentro de estos principios esenciales está el manejo de la aritmética, así como generar habilidades en el pensamiento, incluso elementos básicos de resolución de problemas, así como no perder de vista la importancia del cálculo mental.

A lo largo de esta unidad se explorarán las bases que hacen que las Matemáticas sean un lenguaje de comunicación de ideas, es decir, los elementos sustantivos que permiten construir la lógica y los modelos para analizar situaciones complejas y aplicadas.

Es así que durante esta unidad se logra dar sentido a los diferentes tipos de números, sus operaciones básicas y a la creación de referentes concretos en una actividad de resolución aritmética de problemas. Para esto se han planteado una serie de estrategias que ayuden al desarrollo analítico–sintético, hasta llegar a la expresión algebraica de procedimientos generales de cálculo (obtención de fórmulas), recreando así un primer acercamiento al lenguaje algebraico.

El alumno será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos, aplicando reglas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Bibliografía de consulta

Aponte, G., Pagán, E., & Pons, F. (1998). *Fundamentos de Matemáticas básicas.* México: Addison Wesley Logman.

Coto, A. (2011). *Desarrolla tu agilidad mental.* Edición de autor.

Fuenlabrada de la Vega, S. (2007). *Aritmética y Álgebra.* México: Mc Graw Hill.

Conceptos claves

- ✓ ***Número**: expresión que denota la cantidad de objetos.*
- ✓ ***Razón**: vínculo entre dos magnitudes comparables (cociente).*
- ✓ ***Múltiplo de un número**: número que resulta de multiplicar un número por otro número natural.*

  Decimos que un número es múltiplo de otro si le contiene, de forma entera, varias veces.
- ✓ ***Divisor de un número:** número que se multiplica para formar el número; sinónimo de factor. Todos los números tienen como divisor a uno y a sí mismo.*
- ✓ ***Lenguaje algebraico**: forma de traducir a símbolos y números las expresiones textuales algebraicas. Esto permite modelar **problemas**. Su función principal es estructurar un idioma que ayuda a generalizar las distintas operaciones.*

Significado de los números reales y su simbolización

El conjunto de los números reales pertenece en matemáticas a la recta numérica que comprende a los números racionales y a los números irracionales. Esto quiere decir que incluyen a todos los números positivos y negativos, el símbolo cero, y a los números que no pueden ser expresados mediante fracciones de dos enteros. Por otro lado, Un número natural es cualquiera de los símbolos que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos.

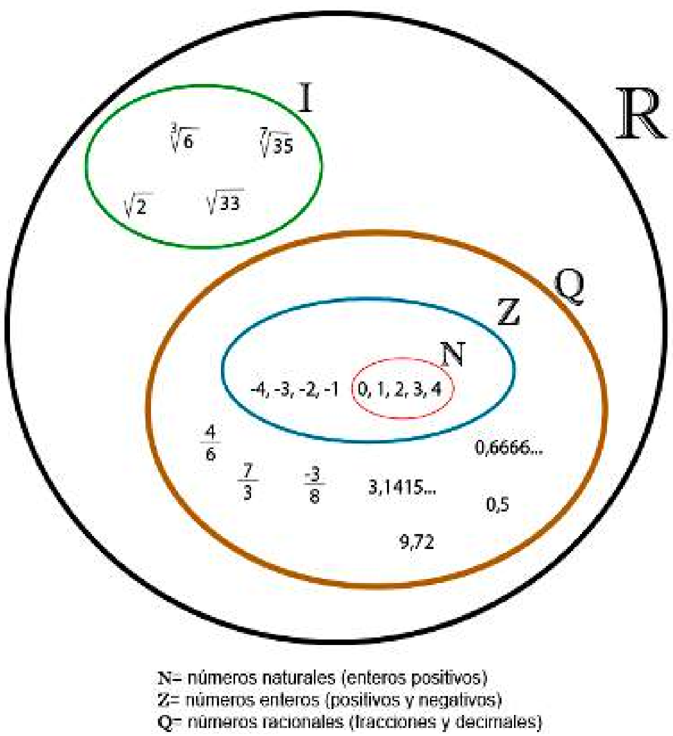


Figura 1. Representación del conjunto de números reales. Imagen tomada de http://www.numerosreales.com/.

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es aquél formado por la suma del conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ más el de los números irracionales $\mathbb{I}$. En la imagen (Figura 1) se muestra la representación del conjunto de números reales. Obsérvese del centro hacia afuera, comenzando por los números naturales $\mathbb{N}$, enteros $\mathbb{Z}$, racionales $\mathbb{Q}$ e irracionales $\mathbb{I}$.

El cero es, para algunos autores, el primer número natural, es uno de los valores esenciales del cual hay que conocer sus propiedades y como operarlo. La invención del cero fue desarrollada primero por los Mayas. Los árabes, tras “descubrir” el cero en la India, pasaron a denominarlo *céfer*, que también significa “vacío”, y que dio origen a las palabras cero y cifra. De este particular elemento es necesario conocer sus propiedades.

Propiedades del cero:

A) elemento neutro en la **adición** e inverso aditivo o **resta**.	$a+0=a$ $a-0=a$ $3+0=3$ $5-0=5$
b) elementos que afecta a la **multiplicación** y a la **división**. La **división entre cero no** es una operación permitida.	$a*0=0$ $5*0=0$ $\frac{0}{a}=0$ $\frac{0}{5}=0$ $\frac{a}{0}\to\nexists$ $\frac{5}{0}\to\nexists$ $\nexists,\quad significa, no\ existe$

Dentro de los números naturales, las operaciones fundamentales son: la “adición” y la “multiplicación”. La adición es la operación que puede realizarse con varios números cualesquiera, pero es más importante considerar la adición entre pares de números (a + b) (Spivak, 2012). A partir de la suma su operación inversa es el inverso aditivo o resta. Para la multiplicación, muchas de sus propiedades se parecen a la de la suma, o producto de dos elementos *a* y *b*, la cual se representa como $a\cdot b$, $a*b$, $(a)(b)$ o simplemente ab. Una de las principales propiedades es: la propiedad asociativa para la multiplicación.

$a\,(b\cdot c)=(a\cdot b)\,c$	$3\,(-5\cdot 2)=(3\cdot -5)\,2$

Factorizar

Teorema Fundamental de la Aritmética: Todo número natural, excepto la unidad, admite una única descomposición en factores primos, salvo por el orden.

Nota: Dentro de las propiedades de los números naturales son las propiedades de divisibilidad, por ejemplo:

a) Todo número par es divisible entre 2,
b) Todo número, cuya suma de sus dígitos es múltiplo de 3, es divisible entre 3.
c) Todo número que termina en cero o 5 es divisible entre 5.
d) El cero es par.

Factoricemos algunas cantidades.

1) ¡Existen 1440 minutos al día! Factoricemos el número 1440.

1440

	1440	2
	720	2
	360	2
	180	2
	90	2
(4+5 = 9 por lo que es múltiplo de 3)	45	3
	15	3
	5	5
	1	1

(siempre empezar por el menor hasta agotarlo)

Ejercicio 1

Realiza las factorizaciones de los siguientes numeros:

a) 136 b) 120 c) 6327 d) 2100 e) 2017

Conceptos base de números naturales

Definición: El ***máximo común divisor (M.C.D.)*** de dos o más números naturales es el mayor número que los divide a estos números.

Definición: El ***mínimo común múltiplo (m.c.m.)*** de dos o más números naturales es el menor número que contiene un número exacto de veces a cada uno de estos números.

Ejemplo

a) Calcular *M.C.D.* de 12 y 15
b) Calcular *m.c.m.* de 12 y 15

Divisores o factores de:

12	15
1,2,3,4,6 y 12	1,3,5 y15

Son divisores comunes 1 y 3. Elegimos siempre el mayor

[1]*Sol.* *M.C.D.* (12,15) = 3

Son múltiplos de:

12	*15*
12,24,36,48,60,72,84,96,108,120…	*15,30,45,60,75,90,105,120,135,….*

[1] Sol. Solución o respuesta exacta.

Son múltiples comunes: 60, 120, …. Elegimos el menor.

Sol. m.c.m. (12, 15) = 60

Ejercicios 2

Calcula el *M.C.D.* y el *m.c.m.* de las siguientes ternas de números naturales.

a) 60, 1575, 98 b) 72, 108, 30 c) 16, 27, 25 e) 150,60, 90 f)36, 24, 54

Ejemplo de Problema

Cierto fenómeno tiene lugar cada 450 segundos, otro cada 250, y un tercero cada 600. Si a las 5 de la tarde han coincidido los tres. ¿a qué hora volverán a coincidir por primera vez y cuántas veces tiene lugar cada uno de ellos entre una y otra coincidencia?

Sol. 7 y media de la tarde y coinciden:

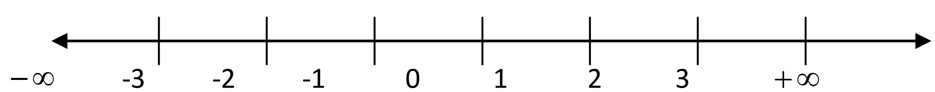
$9000 \div 450 = 20$, $9000 \div 250 = 36$, $9000 \div 250 = 15$

Números Enteros

El conjunto de números enteros está formado por los números positivos, los negativos y el cero, se denotan por la letra $\mathbb{Z}$ y son los siguientes:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Representación en la recta numérica. Los números enteros se pueden representar en la recta numérica, como se indica:



A la ubicación en la recta numérica del cero se llama *origen*, a la derecha del origen se localizan los enteros positivos y a la izquierda los enteros negativos.

Operaciones básicas, leyes de los signos

Las operaciones que se pueden realizar con números enteros son: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Suma algebraica: *mismo signo*, se *suman* sus valores absolutos. S*ignos diferentes*, se *resta el valor absoluto del mayor menos el valor absoluto del menor* y el resultado tendrá el signo del de mayor en valor absoluto. Aplicable también a fracciones.

Multiplicación: *mismo signo*, se *multiplican o dividen* sus valores absolutos y el resultado será siempre positivo. S*ignos diferentes*, se *multiplican o dividen* sus valores absolutos y el resultado será siempre negativo.

La **potenciación***,* sigue las reglas de la multiplicación ya que debes recordar que la potencia se obtiene multiplicando a la base por si misma, el número de veces que el exponente lo exprese, así:

Si la **base es positiva** la potencia será siempre **positiva**:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Si la base es negativa y el **exponente par**, la potencia siempre será **positiva**.

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

Si la base es negativa y el **exponente impar**, la potencia siempre será **negativa**.

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$$

La ***radicación*** de números enteros no siempre genera números enteros, sino números irracionales, si el radicando es positivo, también genera números imaginarios si el radicando es negativo y el índice es par.

Si el índice es impar, el número tendrá la raíz del mismo signo que el radicando.

$\sqrt[5]{-243} = -3$ (Se extrae la raíz quinta de 243 y será negativa)

Ejercicio 3. Resuelve las siguientes operaciones. Elige la respuesta correcta.

1) $= -3\{5(6-9) - (2^3+1) + 9\}^2 - 5 + 15^2$

A) 568 B) -368 C) 12 D) -455

2) $= \{(-5 + 3^3) + (-2^3) + \sqrt[3]{-64} \times 2\}(-1)$

A) 12 B) -8 C) -6 D) -5

3) $= \{-20 + 3[12 - 3\,(7-3) + 2(4-5) - 3(-8+2) - 10] - 12\}$

A) 14 B) –14 C) 12 D) – 208

4) $= 6 - 5\,(3-5)2^3 - 3(4-6)^2$

A) 74 B) – 188 C) –26 D) –68

5) $= (15 \div 3)5 - 4x3(-1) - 27 \div 3$

A) 6 B) 28 C) 6 D) -6

Números Racionales

Los números racionales son aquellos números que se pueden expresar como la razón de dos números enteros, siendo el denominador diferente de cero. Se denota con la letra $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{x/x = \frac{a}{b}\ , a\ y\ b\ \in\ \mathbb{Z}, \qquad b\ \neq 0\right\},$$

Ejemplo: $2, -4, -\frac{1}{5}, -\frac{10}{3}$

Fracción

Fracciones, se utiliza para expresar una cantidad (numerador) dividida entre otra cantidad (denominador). Ambos, numerador y denominador, deben ser estrictamente números enteros y el denominador nunca habrá de ser cero.

$$\frac{a}{b};\ a, b\ \in\ \mathrm{Z};\ b\ \neq\ 0$$

Razón

Es la comparación entre dos cantidades a travéz del cociente. Por ejemplo, de que en un conjunto de personas la cantidad de mujeres respecto a la de hombres sea de 9 a 1, 9 : 1 (por cada nueve mujeres hay un hombre),

Distintos significados y representaciones.

Los números fraccionarios tienen diferentes representaciones, tales como:

a) Fracción común: $\frac{11}{9}, \frac{4}{3}, \frac{1}{7}$

b) Expresión decimal: 0.6, 0.142857, 1.8….

c) Porcentaje o tanto por ciento, que es una o varias partes de las cien en que se divide un número: 12%, 3%, 1.7%, …

d) Fracciones equivalentes, que son las fracciones que representan el mismo valor, pero se escriben de manera diferente: $\frac{2}{3} = \ \frac{4}{6} = \ \frac{16}{24}$, pero su forma decimal es la misma.

Los números racionales al poderse ubicar en la recta numérica, también tienen un orden y el criterio para saber cuál es menor o mayor en la recta numérica es el mismo que el de los números enteros, es decir, **es mayor el que está a la derecha del otro**.

Ejercicio 4

1) Ordena las siguientes fracciones comunes y colócalas en los cuadros, de manera que se cumpla la relación que se pide. Comprueba este orden convirtiéndolas a su forma decimal.

$\frac{5}{10} =$ $\qquad -\frac{5}{8} =$ $\qquad \frac{3}{8} =$ $\qquad -\frac{5}{3} =$ $\qquad \frac{3}{2} =$

$\square > \square > \square > \square \quad \square$

2) Realiza las siguientes simplificaciones.

a) $\frac{18}{24} =$ b) $-\frac{20}{100} =$ c) $\frac{120}{105} =$ d) $\frac{126}{231} =$ e) $\frac{144}{180} =$

Es muy importante siempre **simplificar las fracciones**, evitará que trabajes con números grandes que a su vez generan mayor probabilidad de error.

3) Relaciona una fracción que se ubique entre los dos números mostrados.

$1)\ \frac{3}{5} > — > \frac{4}{5}$	$a)\ \frac{15}{32}$
$2)\ \frac{8}{9} > — > \frac{16}{3}$	$b)\ \frac{27}{6}$
$3)\ -\frac{1}{10} > — > 0$	$c)\ -\frac{2}{6}$
$4)\ \frac{7}{16} > — > \frac{1}{2}$	$d)\ \frac{7}{10}$
$5)\ -\frac{5}{6} > — > \frac{4}{3}$	$e)\ -\frac{1}{20}$

Operaciones básicas con números racionales

Las operaciones que se pueden realizar con números racionales son: *adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación*.

Para realizar las operaciones básicas con números racionales se procede igual que con los números enteros, solo que cuando son fracciones hay que cumplir ciertas reglas.

Las reglas para efectuar operaciones algebraicas con número racionales son iguales que las de enteros con respecto a los signos.

Para realizar las *sumas algebraicas* cuando los números son fracciones comunes, es necesario que los denominadores sean iguales, procediéndose a sumar algebraicamente los numeradores.

Ejemplo 1

a) $\frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7+1}{5} = \frac{8}{5}$

b) $\frac{7}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7+5-1}{4} = \frac{11}{4}$

c) $\frac{2}{3} - 4 = \frac{2\pm12}{3} = -\frac{10}{3}$

En caso de que las fracciones no tengan el mismo denominador hay que proceder a convertirlas a fracciones equivalentes con el mismo denominador, lo cual se consigue utilizando el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las fracciones que se suman.

Ejemplo 2. Al sumar $\frac{7}{3}+\frac{2}{5}$, como los denominadores son diferentes, se calcula el m.c.m. de 3 y 5 que es 15, quedando que $\frac{7}{3}=\frac{35}{15}$ $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$, lo cual se puede obtener directamente al dividir al m.c.m. entre cada denominador y multiplicarlo por el numerador correspondiente, obteniéndose: $\frac{7}{3}+\frac{2}{5}=\frac{35+6}{15}=\frac{41}{15}$

Ejemplo 3. Al restar 4 a $\frac{2}{3}$, se procede de igual modo, es decir, se obtiene el m.c.m. de los denominadores que es este caso es 3, y se obtiene: $\frac{2}{3}-4=\frac{2-12}{3}=-\frac{10}{3}$

Ejemplo 4. Para obtener la suma de: $\frac{3}{10}+\frac{5}{6}-\frac{11}{45}$, primero se busca el m.c.m.

$$m.c.m.=2\times 3^2\times 5=90$$

$$\frac{3}{10}+\frac{5}{6}-\frac{11}{45}=\frac{27+75-22}{90}=\frac{80}{90}=\frac{8}{9}$$

Para ***multiplicar*** números fraccionarios comunes, basta multiplicar numerador por numerador para obtener el numerador del producto y denominador por denominador para obtener el denominador del producto.

Ejemplo 5. Al ***multiplicar*** $-\frac{3}{5}\ por\ \frac{7}{4}$ basta con multiplicar horizontalmente y respetar la ley de los signos. $-\frac{3}{5}\times\frac{7}{4}=-\frac{21}{20}$

Ejemplo 6. Al ***multiplicar*** $5\ por\ \frac{3}{7}$, tienes que recordar que el denominador de 5 es 1 por lo que se tiene: $\frac{5}{1}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{7}$, que es positivo porque los dos números son del mismo signo.

Para ***dividir*** fracciones comunes, basta con multiplicar el numerador de la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor para obtener el numerador del cociente y multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor para obtener el denominador del cociente.

Ejemplo 7. Al dividir $\frac{3}{7}\ entre-\frac{2}{3}$, basta con multiplicar cruzado.

$\left(\frac{3}{7}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{9}{14}$ ó $\frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{-3}}=\frac{-9}{14}$ extremos, numerador y medios, denominador.

Ejemplo 8. Al dividir $\frac{3}{7}\ entre-7$, tienes que recordar que el denominador de –7 es 1.

$\left(\frac{3}{7}\right) \div (-7) = -\frac{9}{49}$ ó $\frac{\frac{3}{7}}{-\frac{7}{1}} = -\frac{3}{49}$ extremos, numerador y medios, denominador.

Para la ***potenciación*** de fracciones comunes, se sigue el procedimiento de la multiplicación de fracciones, solo es necesario tener cuidado con que el exponente afecta tanto al numerador como al denominador de la fracción.

Ejemplo 9. Para obtener la potencia de $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Para la ***radicación*** se siguen las reglas de la de los números enteros, extrayendo la raíz correspondiente a cada elemento de la fracción.

Ejemplo 10. Para obtener la raíz de $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$ solo hay que extraer la raíz cúbica de 1 y la raíz cúbica de 8 y como es una raíz de grado impar de un número negativo, la raíz es negativa, quedando:

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{1}{2}$$

Prioridad de las operaciones. Uso de signos de agrupación y prioridad del cálculo.

La prioridad de las operaciones con los números racionales es la misma que la establecida para números enteros, es decir:

- Primero se realizan las potencias y raíces.
- Enseguida se realizan las multiplicaciones y divisiones.
- Al final se realizan las adiciones y sustracciones.
- Las operaciones presentadas en signos de agrupación (paréntesis) se realizan primero utilizando el mismo orden de prioridad

Ejemplo:

$$\frac{5 \div \left(\frac{1}{2} - 4\frac{1}{3}\right)}{\left(2 - \frac{4}{3}\right)\left(-5\frac{1}{2} + 3\right)} - \frac{3 \div \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{4}{5} \div \frac{3}{2}\right) + 2}$$

Es muy conveniente desarrollar por partes.

$$4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

Fracción derecha numerador

$$5 \div \left(\frac{1}{2} - 4\,\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{\left(\frac{1}{2} - \frac{13}{3}\right)} = \frac{5}{\left(\frac{3}{6} - \frac{26}{6}\right)} = \frac{5}{\left(-\frac{23}{6}\right)}$$

Ejercicios. Simplifica el resultado de cada operación y preséntalo en forma racional.

¡Cuidado con los signos!

Ejercicio 5

1) $$\frac{3\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{-2+\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{-1-\frac{2}{3}} =$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $-\frac{53}{20}$ C) $\frac{31}{20}$ D) $\frac{42}{20}$

2) $$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)}{\left(-3+3\frac{1}{2}\right)} \div \frac{\left(1\frac{1}{2}+3\right)}{\left(-2-1\frac{1}{2}\right)} =$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $-\frac{14}{5}$ C) $\frac{14}{5}$ D) $\frac{42}{37}$

3) $$\frac{\left(2-\frac{1}{5}\right)\div\left(1\frac{1}{2}+3\right)}{\left(-3+3\frac{1}{2}\right)\left(-2-1\frac{1}{2}\right)} =$$

A) $\frac{8}{28}$ B) $-\frac{14}{4}$ C) $-\frac{8}{35}$ D) $\frac{32}{7}$

4) $$-\frac{\left[3-1\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{1}{2-5}\right]}{\left[-5+\frac{1}{2}\right]\div(-1-1)} =$$

A) $\frac{4}{9}$ B) $-\frac{53}{20}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $-\frac{8}{9}$

5) $$\frac{-1-\frac{1}{2}}{-2+\frac{3}{4}} - \frac{5\div\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}} =$$

A) $\frac{5}{6}$ B) $-\frac{53}{20}$ C) $\frac{206}{5}$ D) $\frac{206}{5}$

6) $$\frac{2\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)\div 3\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(\frac{1}{3}-4\right)}{\frac{1}{3}} =$$

A) 3 B) -46 C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{46}{3}$

7) $\left\{\frac{\sqrt{144}}{3}-\left(\frac{\frac{75}{3}+\frac{4}{12}}{\frac{64}{6}}\right)\left(\frac{9}{6}\right)\right\}\div 2 \quad =$

A) $\frac{7}{32}$ B) $-\frac{53}{20}$ C) 17 D) 34

Operaciones con potencias y radicales

Una potencia de base "a" y exponente "n" consiste en multiplicar tantas veces "a" por sí mismo, como indique "n". Por lo tanto, es una forma abreviada de representar una multiplicación (Coto, 2011).

Propiedades de los exponentes

$a^0 = 1$	$4^0 = 1$
$a^1 = 1$	$4^1 = 4$
$a^m a^n = a^{m+n}$	$3^5 3^3 = 3^8$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^5)^3 = 3^{5 \cdot 3}$
$(ab)^m = a^m b^m$	$(3 \cdot 4)^7 = 3^7 \cdot 4^7$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{3^2}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$3^{-4} = \frac{1}{3^4}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$

Tener en cuenta algunos cuadrados muy comunes, ejemplo

$11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$

En ocasiones es necesario combinar las potencias y radicales con las demás operaciones para obtener resultados de procesos más complejos por lo que es importante conocer y aplicar todas sus leyes.

Suma y resta de radicales

Ejemplo. Si deseas adicionar $\sqrt{8}\ con\ \sqrt{18}$, la prioridad de operaciones no te permite considerar que el resultado es $\sqrt{20}$, ya que primero debes obtener la raíz y después sumar; es así que $\sqrt{26}$ resulta de primero sumar y después extraer la raíz cuadrada.

Para poder efectuar la suma $\sqrt{8} + \sqrt{18}$, es necesario que primero factorices a los enteros que son los radicandos y extraigas las raíces cuadradas exactas y enseguida procedas a reducir los términos semejantes resultantes y posteriormente obtener solo una raíz cuadrada que es el resultado de la adición de los radicales o números irracionales $\sqrt{8}\ y\ \sqrt{18}$, obteniéndose:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{4}\,\sqrt{2} + \sqrt{9}\,\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

Reduciendo los términos semejantes

$$(2 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Como 5 es la raíz cuadrada de 25, queda:

$$\sqrt{25}\,\sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$

Como puedes observar al $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ no se obtuvo $\sqrt{26}$ sino $\sqrt{50}$

Producto y cociente de radicales

Para multiplicar o dividir radicales es <u>necesario que los índices de las raíces sean iguales.</u>

Ejemplo 1. Si deseas multiplicar $\sqrt{30}\,\sqrt{120}$, basta con multiplicar los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\sqrt{30}\,\sqrt{120} = \sqrt{30 \times 120} = \sqrt{3600} = 60$$

Ejemplo 2. Si desea dividir $\sqrt[3]{126}$ entre $\sqrt[3]{6}$, basta con dividir los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\frac{\sqrt[3]{126}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{126}{6}} = \sqrt[3]{21}$$

Como puedes observar, el resultado de la multiplicación o de la división puede ser un número racional o número irracional.

Ejercicios 6.

1) De acuerdo a las leyes anteriores, escribe si es Verdadera o Falsa cada una de las siguientes proposiciones:

a) $a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{ab}$ ______________

b) $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$ ______________

c) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ______________

d) x^0 siempre es 1 ______________

e) $(-5)^n$ siempre es negativo ______________

2) Escribe el resultado de cada una de las siguientes expresiones:

a) $-3^2 =$

b) $(-3)^2 =$

c) $-4^3 =$

d) $(-4)^3 =$

e) $-(-2)^3 =$

f) $-(-2)^4 =$

3) Califica como falsa o verdadera cada una de las afirmaciones.

a) $\sqrt[n]{2^n 3^n} = 2 \times 3$ ______________

b) $\sqrt[n]{4^n + 3^n} = 4^n + 3^n$ ______________

c) $\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[m]{2} = \sqrt[nm]{2^{m+n}}$ ______________

d) $\sqrt[n]{3^m} = \left(\sqrt[n]{3}\right)^m$ ______________

e) $\sqrt[n]{2^n 3} = 2\sqrt[n]{3}$ ______________

4) Explica con tus propias palabras.

a) ¿Qué sucede con la expresión $\sqrt[n]{x}$ cuando ***n*** es par o impar y cuando ***x*** es cualquier número real?____

b) ¿Por qué se dice que $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$? ____

c) Menciona ejemplos resueltos en donde el producto de dos irracionales nos dé un número entero.

5) Anota una x en el conjunto a que pertenecen los siguientes números.

	Numero	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real
a)	-345					
b)	23					
c)	$3\sqrt{5}$					
d)	$-\frac{4}{3}$					
e)	$\sqrt{-25}$					

6) Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{64} =$

d) $\sqrt[3]{16} =$

b) $\sqrt{8} =$

e) $\sqrt[3]{81} =$

c) $\sqrt{12} =$

f) $\sqrt[3]{128} =$

7) Resuelve las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{64} =$

b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{5}+\sqrt{32}+\sqrt{20} =$

c) $\sqrt{2}\sqrt{8} =$

d) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} =$

e) $-8\sqrt{3}\sqrt{7} =$

f) $\left(3\sqrt{2}\right)^{2} =$

g) $\left(-5\sqrt{2}\right)^4 =$

h) $\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{2}} =$

j) $\dfrac{\sqrt[4]{156}}{\sqrt[4]{4}} =$

Producto y cociente de radicales

Para multiplicar o dividir radicales es <u>necesario que los índices de las raíces sean iguales.</u>

Ejemplo 1. Si deseas multiplicar $\sqrt{30}\,\sqrt{120}$, basta con multiplicar los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\sqrt{30}\,\sqrt{120} = \sqrt{30 \times 120} = \sqrt{3600} = 60$$

Ejemplo 2. Si desea dividir $\sqrt[3]{126}$ entre $\sqrt[3]{6}$, basta con dividir los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\frac{\sqrt[3]{126}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{126}{6}} = \sqrt[3]{21}$$

Como puedes observar, el resultado de la multiplicación o de la división puede ser un número racional o número irracional.

Ejercicios 7.

1) De acuerdo a las leyes anteriores, escribe si es Verdadera o Falsa cada una de las siguientes proposiciones:

a) $a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{ab}$ ______________

b) $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$ ______________

c) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ______________

d) x^0 siempre es 1 ______________

e) $(-5)^n$ siempre es negativo ______________

2) Escribe el resultado de cada una de las siguientes expresiones:

a) $-3^2 =$

d) $(-4)^3 =$

b) $(-3)^2 =$

e) $-(-2)^3 =$

c) $-4^3 =$

f) $-(-2)^4 =$

3) Califica como falsa o verdadera cada una de las afirmaciones.

a) $\sqrt[n]{2^n 3^n} = 2\times 3$ ______________

b) $\sqrt[n]{4^n + 3^n} = 4^n + 3^n$ ______________

c) $\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[m]{2} = \sqrt[nm]{2^{m+n}}$ ______________

d) $\sqrt[n]{3^m} = \left(\sqrt[n]{3}\right)^m$ ______________

e) $\sqrt[n]{2^n 3} = 2\sqrt[n]{3}$ ______________

4) Explica con tus propias palabras.

a) ¿Qué sucede con la expresión $\sqrt[n]{x}$ cuando ***n*** es par o impar y cuando ***x*** es cualquier número real?____

b) ¿Por qué se dice que $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$? ____

c) Menciona ejemplos resueltos en donde el producto de dos irracionales nos dé un número entero.

5) Anota una x en el conjunto a que pertenecen los siguientes números.

	Numero	Natural	Entero	Racional	Irracional	Real
a)	-345					
b)	23					

c)	$3\sqrt{5}$					
d)	$-\frac{4}{3}$					
e)	$\sqrt{-25}$					

6) Simplifica los siguientes radicales.

a) $\sqrt{64} =$

d) $\sqrt[3]{16} =$

b) $\sqrt{8} =$

e) $\sqrt[3]{81} =$

c) $\sqrt{12} =$

f) $\sqrt[3]{128} =$

7) Resuelve las siguientes operaciones con radicales.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{64} =$

b) $3\sqrt{2}-5\sqrt{5}+\sqrt{32}+\sqrt{20} =$

c) $\sqrt{2}\sqrt{8} =$

d) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} =$

e) $-8\sqrt{3}\sqrt{7} =$

f) $\left(3\sqrt{2}\right)^2 =$

g) $\left(-5\sqrt{2}\right)^4 =$

h) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

i) $\frac{\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{2}} =$

j) $\frac{\sqrt[4]{156}}{\sqrt[4]{4}} =$

Resuelve como se indica, cada uno de los incisos.

Calcula el MCM y el mcm de las siguientes tareas de números naturales.

1) 126, 120, 10800

A) $\begin{matrix} M.C.D. = 6 \\ m.c.m. = 7560 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} M.C.D. = 6 \\ m.c.m. = 75600 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} M.C.D. = 7500 \\ m.c.m. = 6 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} M.C.D. = 7560 \\ m.c.m. = 6 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} M.C.D. = 6 \\ m.c.m. = 120 \end{matrix}$

2) 30, 36, 40

A) $\begin{matrix} M.C.D. = 60 \\ m.c.m. = 2 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} M.C.D. = 25 \\ m.c.m. = 75 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} M.C.D. = 20 \\ m.c.m. = 3600 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} M.C.D. = 2 \\ m.c.m. = 360 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} M.C.D. = 2 \\ m.c.m. = 40 \end{matrix}$

3) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{7}{4}}{7-6} - \dfrac{\frac{1}{5} \div \frac{3}{2}}{2\frac{1}{3} \times \frac{6}{5}} =$

A) $\frac{16}{11}$ B) $\frac{44}{15}$ C) $\frac{26}{33}$ D $\frac{103}{42}$ E $-\frac{1}{15}$

4) $\frac{5}{3} - \frac{6}{5} + 2\,\frac{2}{5} + \dfrac{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}{\frac{5}{4}} =$

A) $\frac{64}{15}$ B) $\frac{7}{3}$ C) 89 D) $\frac{12}{5}$ E $-\frac{4}{3}$

5) Simplificar mediante el uso de las leyes de los exponentes: $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{4}} b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{4}{16}} b^{\frac{1}{8}}}\right)^4$

A) $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}$ B) $ab^{\frac{2}{3}}$ C) $ab^{\frac{3}{2}}$ D) $a^{\frac{3}{2}} b$ E) ab^4

6) Resuelve la siguiente operación y simplifica

$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 \div \frac{7}{2}\right] - \sqrt{\frac{9}{49}} + \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{14}\right) = 1$

A) $\frac{15}{4}$ B) $\frac{9}{7}$ C) $\frac{421}{56}$ D) -1 E) 1

7) Determina la fórmula que genera las siguientes series numéricas

8, 10, 12. . .

A) 4n+2 B) 8+2 C) n+2 D) 2+2 E) (n+2) 2

8) Evalúa la siguiente expresión: $\frac{5b}{2} - \frac{c}{6} + a$

Sea $a = -2; b = 4; c = 3.$

$A)\ \frac{15}{2}$ $B)\frac{25}{2}$ $C)\frac{12}{6}$ $D)\frac{17}{2}$ $E)\frac{57}{6}$

Unidad 2

Expresiones Algebraicas.

Significado contextual de las operaciones

El lenguaje algebraico es una forma de traducir problemas o expresiones matemáticas a otras con símbolos y números, particularmente ecuaciones. De esta forma se pueden manipular cantidades desconocidas con símbolos fáciles de escribir lo que permite simplificar **teoremas,** formular modelos y cómo resolverlas. Este lenguaje nos ayuda a resolver **problemas matemáticos** mostrando generalidades. El lenguaje algebraico nace en la civilización musulmana en el periodo de **Al-Jwarizimi (780-850)** durante la edad media.

Una **expresión algebraica** es una cadena de representaciones perteneciente al lenguaje algebraico, el cual puede contener variables, números, así como también operaciones aritméticas. El *término*, es una expresión algebraica donde hay solo operaciones de multiplicación y división de letras y números elevados a ciertas potencias.

En álgebra, es muy importante saber expresar las proposiciones verbales comunes en lenguaje algebraico.

- Algunas palabras que indican adición son:

Suma, aumentar, mayor que, más, incrementar, más grande que, etc.

- Algunas palabras que indican sustracción son:

Resta, menos, menor que, diferencia, disminuir, perder, etc.

- Algunas palabras que indican multiplicación son:

Producto, veces, triple, multiplicado, doble, cuádruple, etc.

- Algunas palabras que indican división son:

Cociente, mitad, dividido, entre, tercera, razón, etc.

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número cualquiera.	m
Un número cualquiera aumentado en siete.	$m + 7$
La diferencia de dos números cualesquiera.	$f - q$
El doble de un número excedido en cinco.	$2x + 5$
La división de un número entero entre su antecesor	$\frac{x}{x-1}$
La mitad de un número.	$\frac{d}{2}$
El cuadrado de un número	y^2
La semisuma de dos números	$\frac{b+c}{2}$
Las dos terceras partes de un número disminuidos en cinco es igual a 12.	$\frac{2}{3}(x-5) = 12$
Tres números naturales consecutivos.	$x, x + 1, x + 2$
La parte mayor de 1200, si la menor es w	$1200 - w$
El cuadrado de un número aumentado en siete.	$b^2 + 7$
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a tres.	$\frac{3}{5}p + \frac{1}{2}(p+1) = 3$
El producto de un número con su antecesor equivale a 30.	$x(x-1) = 30$
El cubo de un número más el triple del cuadrado de dicho número.	$x^3 + 3x^2$

Ejercicio 1.

A continuación, te sugerimos realices el ejercicio, donde tienes que expresar en forma verbal o escrita los diferentes términos según sea el caso.

a) El doble de un número.

b) El cociente de la suma de dos números sobre tres.

c) El cociente de la suma de dos números sobre 3 veces el primer sumando.

d) c(x–4)

e) La diferencia de los números es mayor que su cociente.

f) $(3x)^2$

g) El triple del cuadrado de la diferencia de dos números.

h) El semiproducto de dos números consecutivos.

i) La suma del doble de un número con otro número.

j) El cubo de la raíz cuadrada de la suma de dos números

k) El producto de la suma del triple de un número con el doble de otro y seis.

l) La diferencia del doble de los cuadrados de dos números.

m) El promedio de seis números.

n) La suma de tres números consecutivos.

o) La mitad de la raíz del cociente de un número con 4.

Ejercicio 2.

Analiza las siguientes situaciones y resuelve paso a paso.

1) Un campesino fue a la ciudad, la primera mitad del camino fue en tren, 15 veces más de prisa que si hubiera ido caminando. Pero la segunda mitad del camino tuvo que hacerla en una carreta jalada por bueyes, dos veces más despacio que a pie. ¿Cuánto tiempo ganó o perdió en comparación en el caso en que hubiera ido todo el tiempo a pie?

2) Un caracol decidió subir un árbol de 15 metros de altura. Durante cada día tenía el tiempo de subir 5 metro; pero mientras dormía por la noche, bajaba 4 metros. ¿Al cabo de cuántos días llegó a la cima del árbol?

3) De lunes a viernes, en periodos normales, un estudiante distribuye, en promedio, las horas del día de la siguiente manera:

Actividad	Fracción del día
Dormir	$\frac{1}{3}$
Alimentación	$\frac{1}{12}$
Descanso y diversión	$\frac{1}{6}$
Estudio	$\frac{1}{4}$

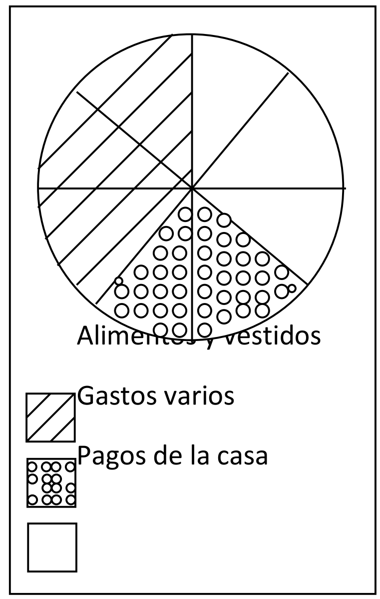
Aseo personal $\frac{1}{24}$

Tareas y trabajos $\frac{1}{8}$

a) ¿A que actividad se dedica más tiempo?
b) ¿A que actividad se dedica menos tiempo?

4) . Si un pintor se llevó 1 y medio días en pintar los marcos de las ventanas de una casa, 1 día $\frac{3}{4}$ de día pintar el techo y 2 días $\frac{1}{8}$ de día el resto de la casa, ¿cuántos días en total requirió el trabajo?

5) La siguiente gráfica representa la distribución general del gasto mensual de una familia.



a) ¿Qué parte del presupuesto gasta en alimentos y vestido?

b) ¿Qué parte del presupuesto gasta en pagos de la casa?

c) ¿Qué parte del presupuesto dedica a gastos varios?

d) ¿Qué parte del presupuesto gasta la familia en alimento, vestido y gastos varios?

e) Qué parte del presupuesto gasta en alimentos, vestidos y pagos de la casa?

6) Un par de zapatos cuesta $ 247.25 con I.V.A. (considera el I.V.A. de 15%), determina el precio de los zapatos sin I.V.A.

A) $ 200 B) $ 210.60 C) $ 215.00 D) $ 205.50

7) Un número al dividirlo entre 11 tiene cociente 7 y residuo 6. El número es:

A) 72 B) 94 C) 105 D) 83

8) Encuentra el numerador de la fracción equivalente a $\frac{35}{70}$ cuyo denominador sea 24.

A) 70 B) 24 C) 35 D) 12

9) Un apicultor tiene una lata con 13 litros y medio de miel y quiere envasarla en botellas de $\left(\frac{3}{4}\right)$ L para venderla, ¿Cuántas botellas necesita?

A) 15 B) 18 C) 9 D) 20

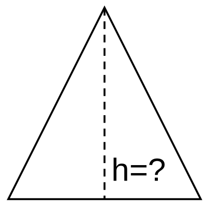
Ejercicio 3

En las siguientes figuras, determina la expresión algebraica del dato faltante.

$a=x-2$

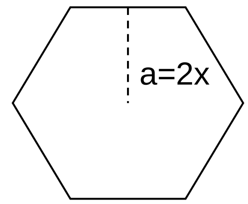
$b=?$

$A=3x^2-5x-2$



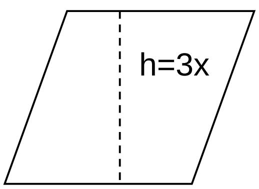
$b=2x+3$

$A=4x^2+4x-3$



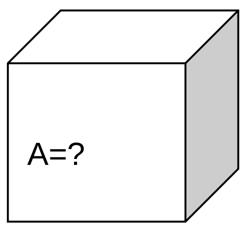
$p=?$

$A=8x^2-12x$



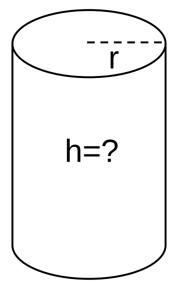
$b=?$

$A=15x^3-21x^2+6x$



$\ell=2x-5$

$V=8x^3-125$



$r = x - 1$

$V = x^3+2x^2-7x+4$

Ejercicio 4.

Factoriza los siguientes polinomios que contienen un monomio factor común.

a) $m^5 - 2m^2 + 6m =$

b) $54x^2y^3 - 18xy^2 + 36x^3y^5 =$

c) $35m^2n - 42m^4n^2 + 21m^3n^3 =$

d) $a(x+2) + b(x+2) =$

e) $5x(b-6) - 4(b-6) =$

f) $a(n+6) + n + 6 =$

g) $20ab^2 - 15a^3b =$

h) $x^2 - 8x^3 - 7x^4 =$

i) $ax^2 - bx^2 + 6x^2 =$

j) $25y^3 - 15y^2 - 10y =$

k) $2p - 8q =$

l) $x(c+1) - c - 1 =$

Ejercicio 5.

Factoriza los siguientes polinomios por el método de agrupación de términos.

a) $6(x - 8) + y(x - 8) =$

b) $y(y + 4) - 20(y + 4) =$

c) $a^2(a - 1) - 6(1 - a) =$

d) $z^2(2z - 1) - (2z - 1) =$

e) $ac + bd + bc + ad =$

f) $2ax - bx + by - 2ay =$

g) $w^2 - zw + 6w - 6z =$

h) $b^2 - 6b + 10b - 60 =$

i) $40w^2 + 5wy + 16w + 2y =$

j) $y^3 - 3y^2 + 9y - 27 =$

k) $y^5 + 5y^3 - 4y^2 - 20 =$

l) $6z^4 + 8z^3 - 9z^2 - 12z =$

Ejercicio 6.

Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $y^2 - 4 =$

b) $25x^2 - 36 =$

c) $36m^2 - 1 =$

d) $y^2 - 81 =$

e) $100 - x^2 =$

f) $16 - y^2 =$

g) $a^3 - a =$

h) $bx^2 - b =$

i) $bx^2 - 16b =$

j) $y^4 - 16 =$

k) $3x^2 - 48 =$

l) $5y^2 - 20 =$

Ejercicio 7.

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos (TCP).

a) $x^2 - 4x + 4 =$

b) $y^2 - 6y + 9 =$

c) $x^2 - 10x + 25 =$

d) $z^2 + 16z + 64 =$

e) $4w^2 + 12w + 9 =$

f) $25w^2 - 40w + 16 =$

g) $y^2 - 26y + 169 =$

h) $x^2 - 22x + 121 =$

i) $y^2 - 14y + 49 =$

j) $w^2 + 12w + 36 =$

k) $2x^2 - 36x + 162 =$

l) $3x^2 + 72x + 432 =$

Ejercicio 8.

Factoriza los siguientes trinomios de la forma ($x^2 + bx + c$).

a) $p^2 + 2p - 24 =$

b) $q^2 + 2q - 3 =$

c) $y^2 + 14y + 24 =$

d) $z^2 + 3z - 4 =$

e) $y^2 + y - 110 =$

f) $y^2 - y - 30 =$

g) $15 + 2w - w^2 =$ h) $45 - 4b - b^2 =$ i) $72 + 6y - y^2 =$

j) $5w^3 + 10w^2 - 315w =$ k) $-3x^3 - 3x^2 + 126x =$ l) $-3x^5 + 3x^4 + 60x^3 =$

Ejercicio 9.

Factoriza los siguientes trinomios generales ($ax^2 + bx + c$).

a) $5x^2 - 14x - 3 =$ b) $3x^2 + x - 10 =$ c) $9x^2 - 12x + 4 =$

d) $3x^2 - 13x + 4 =$ e) $4 - 4z - 15z^2 =$ f) $6t^2 - 20t - 16 =$

g) $6w^2 - 19w + 10 =$ h) $60 + 4z - z^2 =$ i) $18x^2 - 9x + 1 =$

j) $2w^2 - 17w + 21 =$ k) $3 - 10y + 8y^2 =$ l) $3x^2 + 20x + 25 =$

Unidad 3

FUNCIONES Y ECUACIONES LINEALES.

Presentación

El propósito de esta unidad es modelar y resolver problemas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, con la intención de retomar las herramientas adquiridas en las dos primeras unidades: operaciones con números enteros y fraccionarios, propiedades de la igualdad, lenguaje algebraico, diferencia entre ecuación y función.

Bibliografía de consulta

Ángel, A. R. (2007). *Álgebra Elemental*. México: Pearson Educación.

Carvajal, J. C. (2010). *Álgebra*. México, México: Mc Graw Hill.

Solís, L. A. (2012). *Matemáticas I. Solución de problemas reales*. México: Quinto Sol.

Vigil, E. C., & Hernández, R. S. (2014). *Álgebra. Serie Bachiller*. México: Grupo Editorial Patria.

Conceptos claves

- ✓ ***Ecuación:*** *es una igualdad en la que tenemos una o varias cantidades desconocidas y que se verifica únicamente para determinados valores de las variables involucradas.* (Vigil & Hernández, 2014)**.**
- ✓ ***Solución de una ecuación:*** *consiste en encontrar los valores que deben tomar las variables para que se cumpla la relación de igualdad establecida, siendo este conjunto de valores el conjunto solución de la ecuación, sus raíces.* (Vigil & Hernández, 2014). *A esos valores también se les llama* ***raíces, ceros*** *o* ***conjunto solución*** *de la ecuación.*
- ✓ ***Ecuaciones lineales con una incógnita****, como:*
- ✓ *Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas.*
- ✓ *Una condición que debe satisfacer un número buscado.*
- ✓ *Un caso particular de función lineal.*
- ✓ ***Ecuaciones equivalentes:*** *a dos o más ecuaciones se les llama equivalentes cuando tienen el mismo conjunto solución* (Vigil & Hernández, 2014).
- ✓ ***Incógnita:*** *letra que se emplea en una expresión matemática para denotar una cantidad desconocida cuyo valor se trata de obtener. Algunas letras que suelen fungir como incógnitas son las primeras del alfabeto latino (a, b, c) y las ultimas de este (w, x, y, z).*
- ✓ ***Leguaje algebraico:*** *en el álgebra se usan letras o variables para representar diferentes números, y cuando una letra representa sólo un número se llama* ***constante****. Si una expresión consta solo de números se denomina* ***expresión numérica.*** *Sin embargo, cuando una expresión consta de variables, números y signos de operación se llama* ***expresión algebraica****. Al conjunto de estas expresiones se le conoce como* ***lenguaje algebraico.***
- ✓ ***Sistema triangular****: Es el sistema de ecuaciones que comenzando de abajo hacia arriba contiene solamente la última literal, después la penúltima, luego la antepenúltima y así sucesivamente. Por esta característica, es fácil resolverlo, aplicando una sustitución regresiva. Ejemplo.*

$$\begin{cases} 2x + 2y \qquad = 2 \\ \qquad 2y + z \ = 3 \\ \qquad\qquad z = 7 \end{cases}$$

- ✓

Tipos de ecuaciones lineales

- Ecuaciones lineales inmediatas o sencillas como, por ejemplo:

$$10x = 30; \qquad \frac{3}{2}x = 6; \qquad 5x - 3 = 2$$

- Ecuaciones con símbolos de agrupación como, por ejemplo:

$2(2x) = 16;$ $\quad 3(x-2) = 12;$ $\quad 5(2x+3) = 4(x-2)$

- Ecuaciones lineales fraccionarias como, por ejemplo:

  $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{7}{2}$; $\quad \frac{2x}{5} - \frac{3x}{2} = \frac{7}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{5}\right)$

- Ecuaciones literales y fórmulas como, por ejemplo:

  $v = \frac{d}{t};$ $\quad S = 180(n-2);$ $\quad C = \frac{5}{9}(F - 32)$

La forma más simple de la ecuación lineal es $x = 3, m = -5, y = \frac{2}{5}$

Propiedades de las operaciones con números reales[2]	
Propiedad de la adición. Las letras *a, b, c, x, y* representan números reales.	
Conmutativa. El orden de los sumandos no altera la suma. **En símbolos:** $\boldsymbol{a + b = b + a}$ Ejemplos: a) $-2 + \sqrt{5} = \sqrt{5} + (-2)$ b) $5 + (3x - 2y) = (3x - 2y) + 5$	**Asociativa**. Las sumas de tres o más sumandos no dependen de la forma en que se agrupen, e. d.: $\boldsymbol{a + (b + c) = (a + b) + c}$ Ejemplos: a) $-2 + (2 + 25) = (-2 + 2) + 25$ b) $2x + \left(x + \frac{2}{3}\right) = (2x + x) + \frac{2}{3}$
Elemento neutro. Cero sumado con cualquier número es igual al mismo número. **En símbolos:** $\boldsymbol{0 + a = a + 0}$ Ejemplos: a) $-2 + 0 = -2$ b) $0 + 8x = 8x$	**Elemento opuesto o inverso aditivo.** La suma de cualquier número y su opuesto es igual a cero e. d.**:** $\boldsymbol{a + (-a) = -a + a} = 0$ Ejemplos: a) $-2 + 2 = 0$ b) $\sqrt{5} + \left(-\sqrt{5}\right) = 0$

Ejemplo 1. Para simplificar la ecuación $3x + 2 = 5$, es necesario hacer uso de la propiedad de la igualdad: sumamos en ambos miembros de la igualdad -2, que es el inverso aditivo de 2, generando el elemento neutro de la adición.

$$3x + 2 = 5$$

$$3x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$3x + 0 = 3$$

$$3x = 3$$

Multiplicamos en ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{3}$, que es el inverso multiplicativo de 3, lo que permitirá generar el elemento neutro de la multiplicación.

$$\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(3)$$

$$\frac{3}{3}\,x = \frac{3}{3}$$

$$1x = 1$$

$$x = 1$$

La raíz de la ecuación es 1

Sustitución y comprobación de la raíz

$$3(1) + 2 = 5$$

$$5 = 5$$

Ejemplo 2. Para simplificar la ecuación $\frac{x}{3} + 2x + 1 = 3$ y poder determinar el valor de la incógnita x .

Nota: Existen más de una forma (o ruta) que resuelve la ecuación.

Ruta A

Multiplicamos por 3 ambos miembros de la igualdad

$$3\left(\frac{x}{3}+2x+1\right)=3(3)$$

Posteriormente la intervención de la propiedad distributiva. Debido a que el 3 deberá multiplicar a lo que está dentro del símbolo de agrupación, quedando de la siguiente manera:

$$x+6x+3=9$$

La aplicación de la propiedad asociativa, en la suma de $x+6x$, dando como resultado:

$$7x+3=9$$

Sumando – 3 en ambos miembros de la igualdad (propiedad del inverso aditivo que generará la propiedad del elemento neutro de la adición).

$$7x+3-3=9-3$$

$$7x=6$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{7}$ (propiedad del inverso de la multiplicación que generará la propiedad del elemento neutro de la multiplicación).

$$\frac{1}{7}.7x=\frac{1}{7}.6$$

$$\frac{7x}{7}=\frac{6}{7}$$

$$x=\frac{6}{7}$$

La solución, raíz o cero de la ecuación es $\frac{6}{7}$

Sustitución y comprobación de la raíz

$$\frac{\left(\frac{6}{7}\right)}{3} + 2\left(\frac{6}{7}\right) + 1 = 3$$

$$\frac{6}{21} + \frac{12}{7} + \frac{7}{7} = 3$$

Obteniéndose la igualdad

$$3 = 3$$

Ruta B $\boldsymbol{\frac{x}{3} + 2x + 1 = 3}$, puede considerar, realizar la suma entre los términos que contienen "x".

$\frac{x}{3} + 2x = \frac{7}{3}x$, entonces, sería:

$\frac{7}{3}x + 1 = 3$

Sumando – 1 en ambos miembros de la igualdad (propiedad del inverso aditivo que generará la propiedad del elemento neutro de la suma).

$$\frac{7}{3}x + 1 - 1 = 3 - 1$$

$$\frac{7}{3}x + 0 = 2$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por $\frac{3}{7}$ (propiedad del inverso de la multiplicación que generará la propiedad del elemento neutro de la multiplicación).

$$\frac{3}{7}\left(\frac{7}{3}x\right) = \frac{3}{7}(2)$$

$$\frac{21}{21}x = \frac{6}{7}$$

$$x = \frac{6}{7}$$

Ambas Rutas, darán el mismo resultado.

Ejemplo 3. Para simplificar la ecuación $2(x+1)=3(x-3)$ y poder determinar el valor de la incógnita, será necesario eliminar los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva

$$2x+2=3x-9$$

Sumando – 2 en ambos miembros de la igualdad (propiedad del inverso aditivo), obteniendo:

$$2x+2+(-2)=3x-9+(-2)$$

$$2x+2-2=3x-9-2$$

$$2x+0=3x-11$$

$$2x=3x-11$$

Sumando – 3x en ambos miembros de la igualdad (propiedad del inverso aditivo), que generará como resultado:

$$2x+(-3x)=3x-11+(-3x)$$

$$2x-3x=3x-11-3x$$

$$2x-3x=0-11$$

$$-x=-11$$

Multiplicando en ambos miembros por el recíproco de – 1

$$\frac{-x}{-1}=\frac{-11}{-1}$$

$$x=11$$

La solución, raíz o cero de la ecuación es 11.

Sustitución y comprobación de la raíz

$$2((11)+1)=3((11)-3)$$

$$2(12)=3(8)$$

$$24 = 24$$

Para simplificar la siguiente ecuación y encontrar a x, deberás intentar contestar la propiedad de los números reales que intervine en el despeje, también, observar una de las rutas.

$$x - (2x + 1) = 8 - 2(3x + 2)$$

Ejercicio 1

Observar con atención el desarrollo algebraico en cada uno de los renglones y con ayuda de las propiedades de los reales, deberás indicar aquella que interviene en cada renglón.

$x - (2x + 1) = 8 - 2(3x + 2)$	
$x - 2x - 1 = 8 - 6x - 4$	Propiedad distributiva
$-x - 1 = 4 - 6x$	____________________________
$-x - 1 + 6x = 4 - 6x + 6x$	____________________________
$-x - 1 + 6x = 4 + 0$	____________________________
$-1 + 5x = 4$	____________________________
$-1 + 5x + 1 = 4 + 1$	____________________________
$5x + 0 = 4 + 1$	____________________________
$5x = 5$	____________________________
$\frac{1}{5}(5x) = \frac{1}{5}(5)$	____________________________
$\boldsymbol{x = 1}$	**Solución**

Ejercicio 2

En los siguientes ejercicios, **resuelve, comprueba y encuentra, la solución o raíz** en cada una de las ecuaciones o fórmulas.

1) $\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$

A) $x = 2$ B) $x = -2$ C) $x = 3$ D) $x = -3$ E) x = 0

2) $2x + 3 = -7$

A) $x = -2$ B) $x = 2$ C) $x = 5$ D) $x = -5$ E) x = 7

3) $\frac{x}{2} + \frac{3x}{2} = 7$

A) $x = 1$ B) $x = \frac{7}{2}$ C) $x = 7$ D) $x = 11$ E) x= -1

4) $\frac{x}{6} + \frac{3}{2} = \frac{3x}{2} - x$

A) $x = -\frac{2}{9}$ B) $x = -9$ C) $x = \frac{9}{2}$ D) $x = 0$ E) x = 9

5) $\frac{x}{2} - 2x + 3 = 6 - x$

A) $x = 0$ B) $x = -6$ C) $x = \frac{-3}{2}$ D) $x = 2$ E) x = 6

6) $3(x + 5) = 6(x - 2)$

A) $x = -1$ B) $x = 9$ C) $x = -8$ D) $x = \frac{7}{3}$ E) x = 1

7) $\frac{3}{4}(2x + 1) = \frac{2}{3}(x + 1)$

A) $x = -\frac{3}{10}$ B) $x = \frac{1}{5}$ C) $x = -\frac{1}{10}$ D) $x = 0$ E) x = 0.2

8) $\frac{1}{2}(4x - 2) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)$

A) $x = 0$ B) $x = 2$ C) $x = -2$ D) $x = 1$ E) x =-1

9) $9 + 5(2x - 1) + 7x = x + 2(x - 5)$

A) $x = 1$ B) $x = -1$ C) $x = 2$ D) $x = -2$ E) $x = \frac{1}{2}$

10) $3x-(2x-1)=7x-(3-5x)+(-x+24)$

A) $x=1$ B) $x=3$ C) $x=2$ D) $x=-3$ E) $x=-2$

11) $\frac{3x}{5}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{5}=0$

A) $x=3$ B) $x=-3$ C) $x=1$ D) $x=-2$ E) $x=\frac{1}{3}$

12) $x-\frac{x+2}{12}=\frac{5}{2}x$

A) $x=-2$ B) $x=-\frac{2}{19}$ C) $x=\frac{19}{2}$ D) $x=\frac{2}{19}$ E) $x=-19$

13) $PV=\frac{m}{PM}R\mathrm{T}$ despeja PM

A) $\mathrm{PM}=\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{mPV}}$ B) $\mathrm{PM}=\frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{mRV}}$ C) $\mathrm{PM}=\frac{\mathrm{PV}}{\mathrm{mRT}}$ D) $\mathrm{PM}=\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{mPV}}$ E) $\mathrm{PM}=\frac{\mathrm{mRT}}{\mathrm{PV}}$

14) $\circ F=\frac{9}{5}(k-273)+32$ despejar a k

A) $k=\frac{9}{5}(\circ F-32)+273$ B) $k=\frac{9}{5}(\circ F+32)+273$ C) $k=\frac{5}{9}(\circ F-32)-273$

D) $k=\frac{5}{9}(\circ F-32)+273$ E) $k=\frac{9}{5}(\circ F-32)+273$

15) $d=\frac{1}{2}\left(V_f+V_i\right)t$ despejar a V_f

A) $\frac{2d}{t}-V_i=V_f$ B) $\frac{2t}{d}-V_i=V_f$ C) $\frac{d}{2t}-V_i=V_f$ D) $2\left(\frac{d}{t}+V_i\right)=V_f$

E) $\frac{1}{2}\left(\frac{d}{t}-V_i\right)=V_f$

16) $d=V_it+\frac{1}{2}at^2$ despejar a la letra $\boldsymbol{a}$

A) $\left(\frac{d-V_i\,t}{2t^2}\right)=a$ B) $\left(\frac{2d-2V_i\,t}{t^2}\right)=a$ C) $2\left(\frac{d-V_i\,t}{t^2}\right)=a$ D) $\frac{1}{2}\left(\frac{d+V_i\,t}{t^2}\right)=a$ E) $\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{d-V_it}\right)=a$

17) $\frac{A(B-C)}{D}-\frac{E}{F}=H$ despejar a C

A) $C = B - \frac{A\left(H+\frac{E}{F}\right)}{D}$ B) $C = B - \frac{D\left(H-\frac{E}{F}\right)}{A}$ C) $C = B - \frac{D\left(H+\frac{F}{E}\right)}{A}$ D) $C = A - \frac{D\left(H-\frac{E}{F}\right)}{B}$

E) $C = -B + \frac{D}{A}\left(H + \frac{E}{F}\right)$

Resolución de problemas que dan lugar a Ecuaciones de primer grado con una incógnita, resolución por diferentes métodos

Las ecuaciones como modelos matemáticos

A menudo es posible construir con ecuaciones un modelo que permita describir y resolver problemas enunciados en lenguaje verbal.

Para resolver problemas planteados en el lenguaje verbal, problemas de cualquier tipo, es necesario seguir una serie de pasos que le permitan plantear el modelo, para posteriormente resolverlo.

Pasos para plantear y resolver problemas:

1. **Entender** en qué consiste el ejercicio (una buena ayuda se hacer con dibujos o diagramas que representen la situación descrita por el enunciado del planteamiento).

2. Deberás elegir las letras (**lenguaje algebraico**) que se utilizan para representar las incógnitas del problema. Así mismo, identificar las unidades en las que se operan los valores.

3. Expresar, mediante una **ecuación o modelo**, la relación que existe entre los datos del problema.

4. Es necesario diseñar un **plan** y aplicar una estrategia para resolverlo.

5. Encontrar la **respuesta** y **comprobarla.**

Expresiones usuales en esta parte:

Datos: la información que se conoce en un problema sobre sus condiciones y valores numéricos.

Proposición: *expresión de la que tenga sentido afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas.*

Para resolver un problema que dan lugar a ecuaciones lineales hay que construir el modelo y resolverlo.

Ejemplo

1) Con $4801 una familia compró cama, estufa y librero. La cama costo $200 más que el librero y $600 menos que la estufa. ¿Cuánto pagaron por cada cosa?

   Lee con detenimiento el problema hasta que hayas logrado comprenderlo. Posteriormente, contesta lo que se te pide.

   ¿Qué cosas compró la familia? ____

   ¿Cuántos pesos más que el librero costó la cama? ____________________________

   ¿Cuántos pesos menos que la estufa costó la cama? __________________________

   ¿Qué se pregunta? ____

   Antes de continuar, verifica tus respuestas, leyendo el enunciado del problema.

$$precio\ de\ una\ cama(\$) + estufa\ (\$) + librero(\$) = \$4801$$

$$Precio\ de\ la\ cama = x\ (incognita)$$

   La cama costó 200 pesos más que el librero, es decir, el librero costó 200 menos que la cama: $Precio\ del\ librero = x - 200$

   La cama costó 600 pesos menos que la estufa, es decir, la estufa costó 600 pesos más que la cama: $Precio\ de\ la\ estufa = x + 600$

   Todo costó 4801 pesos, entonces la ecuación es:

$$x + (x - 200) + (x + 600) = 4801$$

El precio de la cama es:

$$x + x - 200 + x + 600 = 4801$$
$$3x + 400 = 4801$$
$$3x = 4801 - 400$$
$$\boldsymbol{x = 1467}$$ Esto es lo que se pagó por la cama.

Sustitución y comprobación de la raíz o solución.

El precio del librero fue: 1467 – 200 = **1267** El de la estufa: 1467 + 600 = **2067**

$$1467 + 1267 + 2067 = \mathbf{4801}$$

Obteniendo la igualdad: $4801 = 4801$

2) Un distribuidor reparte leche en tres centros comerciales. La tercera parte de la entrega en Bodega, en Superama deja 5/7 de lo que le queda y en la Tienda UNAM entrega 1800 litros. ¿Cuántos litros entrega a cada tienda?

Sin ver el enunciado del problema, contesta:

¿Cuántos centros comerciales atiende el distribuidor? ___________________________

¿Cuántos litros del total entregó en “Bodega”? ________________________________

¿Cuántos deja en “Superama”? ____

¿Y en la Tienda UNAM? ____

¿Qué se quiere saber? ____

Comprueba tus respuestas consultando el enunciado del problema.

Si x representa la cantidad total de litros que entrega el distribuidor, se tiene:

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{5}{7}\left(x - \frac{1}{3}x\right) + 1800$$

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{5}{7}\left(\frac{2}{3}x\right) + 1800$$

$$x - \frac{1}{3}x - \frac{10}{21}x = 1800$$

$$\frac{12}{63}x = 1800$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{9450}\ L\ de\ leche$$

Ejercicio 3

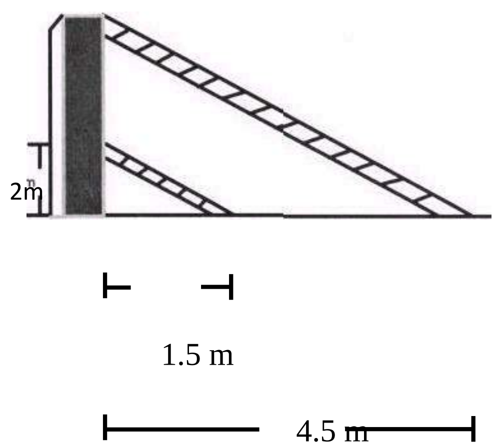
Elige la respuesta correcta de cada uno de los siguientes problemas:

Sugerencia: Toma en cuenta el desarrollo de los ejemplos.

1) El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que su ancho. Si el perímetro es de 50 m. ¿El largo y ancho son respectivamente?

A) 18 y 13 m   B) 15 y 10 m   C) 20 y 15 m   D) 45 y 50 m   E) 15 y 5 m

2) Dos escaleras están recargadas en forma paralela sobre un muro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura **h** del muro?

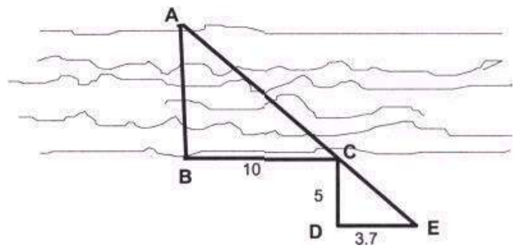


A) h= 4m   B) h= 3m   C) h= 4.5 m   D) h= 5m   E) h= 6m

3) Un hombre desea medir el ancho AB de un río utilizando un teodolito[3]

---

[3] *Teodolito: Instrumento topográfico de precisión para **medir ángulos** de distintos planos.*



Para hacerlo, camina sobre la orilla 10 m. en dirección perpendicular a AB y clava una estaca (punto C). De C camina perpendicularmente 5 m hasta D y después paralelamente al río hasta estar en línea recta con AC (punto E). La distancia DE resulta ser de 3.7 m. ¿Cuánto mide el ancho AB del río?

A) $\overline{AB} = \frac{100}{7}m$ B) $\overline{AB} = \frac{70}{10}m$ C) $\overline{AB} = \frac{10}{5}m$ D) $\overline{AB} = \frac{35}{5}m$ E) $\overline{AB} =$ $15\ m$

4) De Tijuana a Cabo San Lucas, en Baja California, hay una distancia de 1692 km. Si en un mapa la distancia entre las dos ciudades es de 8.46 cm. ¿A qué escala de dibujó el mapa?

A)$1\ a\ 14263.56\ km$ B) $1\ a\ 142.6\ km$ C) $1\ a\ 200\ km$ D) $1\ a\ 14.2\ km$

E) $1\ a\ 193.9\ km$

5) Un arquitecto debe incluir una terraza cuadrada de 16 m^2 de superficie en el plano de una residencia. Si la escala de su diseño es de 1 a 100 cm. ¿Cuánto debe medir el área $\mathbf{A_T}$ de la terraza en el plano? Ayuda: convierte las unidades lineales a unidades de

superficie.

A)$A_T = 1x10^{-2}m^2$ B) $A_T = 1.2x10^{-3}m^2$ C) $A_T = 1.4x10^{-4}m^2$

D) $A_T = 1.6x10^{-3}m^2$ E) $A_T = 1.5x10^{-5}m^2$

6) A un muro de 31 metros de longitud se le desea dar dos tipos de acabado (liso y rústico), de tal forma que la parte en rústico sea dos metros menos que el doble del acabado liso. Para determinar la longitud del tipo de acabado ¿Cuál es la ecuación que resuelve este planteamiento? Considera a x como el acabado liso.

A) $x + (2 - 2x) = 31$ B) $x + (2x - 2) = 31$ C) $x - (2 - 2x) + 31 = 0$

D) $x + 2 + 2x = 31$ E) $(2 - 2x) - x = 31$

7) El corazón de una persona adulta, en condiciones normales, bombea 5 L de sangre por cada minuto. En una prueba de laboratorio ¿cuál será el volumen de sangre que podrán extraer de una persona en 40 segundos? Plantea la ecuación.

A) $\frac{5\,L}{1\,min} = \frac{40\,s}{x}$ B) $\frac{5\,L}{60\,s} = \frac{40\,s}{x}$ C) $\frac{5\,L}{1\,min} = \frac{40\,s}{x}$ D) $\frac{5\,L}{1s} = \frac{x}{40\,s}$ E) $\frac{5\,L}{60\,s} = \frac{x}{40s}$

8) La profesora de la clase de química está realizando algunos cálculos estequiométricos y el resultado que obtiene está en onzas (37.5 oz), sin embargo, deberá sumarle una cantidad en libras (3 lb) y por último hacer el reporte de lo obtenido en gramos. Construye una ecuación que le permita obtener el resultado en las unidades que desea (gramos).

Datos: 16 oz equivalen a una lb; 4 lb equivalen a 1814.37 g.

A) $\left[37.5\,oz\left(\frac{1\,lb}{16\,oz}\right) + 3\,lb\,\left(\frac{1814.37g}{4\,lb}\right)\right] = g$ B) $[37.5\,oz + 3\,lb]\left(\left(\frac{1\,lb}{16\,oz}\right)\right)\left(\frac{1814.37g}{4\,lb}\right) = g$

C) $\left[37.5\,oz\left(\frac{1\,lb}{16\,oz}\right) + 3\,lb\right]\left(\frac{1814.37g}{4\,lb}\right) = g$ D) $\left[3\,lb\left(\frac{16\,oz}{1\,lb}\right) + 37.5\,oz\right]\left(\frac{1814.37g}{4\,lb}\right) = g$

E) $\left[\left(\frac{1\,lb}{16\,oz}\right) + 37.5\,oz + 3\,lb\right]\left(\frac{4\,lb}{1814.37g}\right) = g$

Resuelve como se indica, cada uno de los incisos.

1) Define los siguientes conceptos: ecuación, lenguaje algebraico, ecuación equivalente, solución de una ecuación.

Determina la solución (raíz o cero) de las siguientes ecuaciones.

2) $x - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{5}(3x - 5)$

3) $-2(3x + 5) = 6(x + 2) + 2$

4) $\frac{3x}{2} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{2}x - \frac{2}{3}$

5) $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Despeja c, recuerda que el inverso de una raíz es la potencia al cuadrado.

6) $\frac{w}{h}\left(\frac{a-b}{df}\right)+\frac{1}{p}=k$ Despeja a f

7) Plantea y resuelve

La velocidad "c" de la luz en el vacío es de 300 000 000 m/s. ¿Cuántos Km. recorre en un segundo?

A) 300 km B) 83333.33 km C) $3x10^5$km D) $3x10^8$ km E) $8.3x10^4$km

8) En un mapa topográfico del Estado de Puebla, el Popocatépetl mide 10.9 cm. De alto. Si la escala es de 1 a 50 000 cm. ¿Cuál es la altura **h** del Popocatépetl en metros?

A) $h = 4587.15\ m$ B) $h = 5450\ m$ C) $h = 5100m$ D) $h = 6200\ m$

E) $h = 5870.15\ m$

9) Un bote contiene 3 y medio galones de pintura. ¿Cuántos litros son? (1 gal. equivale a 3.786 L)

A) 13.24 L B) 0.9247 L C) $92.4\ x10^{-2}$ L D) 3.3 L E) 1 L

Sugerencias de actividades de aprendizaje teórico prácticos

Soluciones de un problema con dos variables y una sola condición en una tabla

Ejemplo

Ana compró 4 cuadernos y 6 plumas, pagó $192, quiere saber cuánto costó cada cosa.

Para ello se plantean las incógnitas:

x_ precio de cada cuaderno ($)

y _ precio de cada pluma ($)

La ecuación que representa la situación de la compra es:

$$4x + 6y = 192$$

Ana obtuvo como posible solución que los cuadernos costaron $30 y las plumas $ 12, usando la misma ecuación, Luis le dijo que era $24 el cuaderno y $16 la pluma. ¿Quién tiene razón?

Haz la sustitución en la ecuación y verifica cuál es la solución.

$$4x + 6y = 192$$

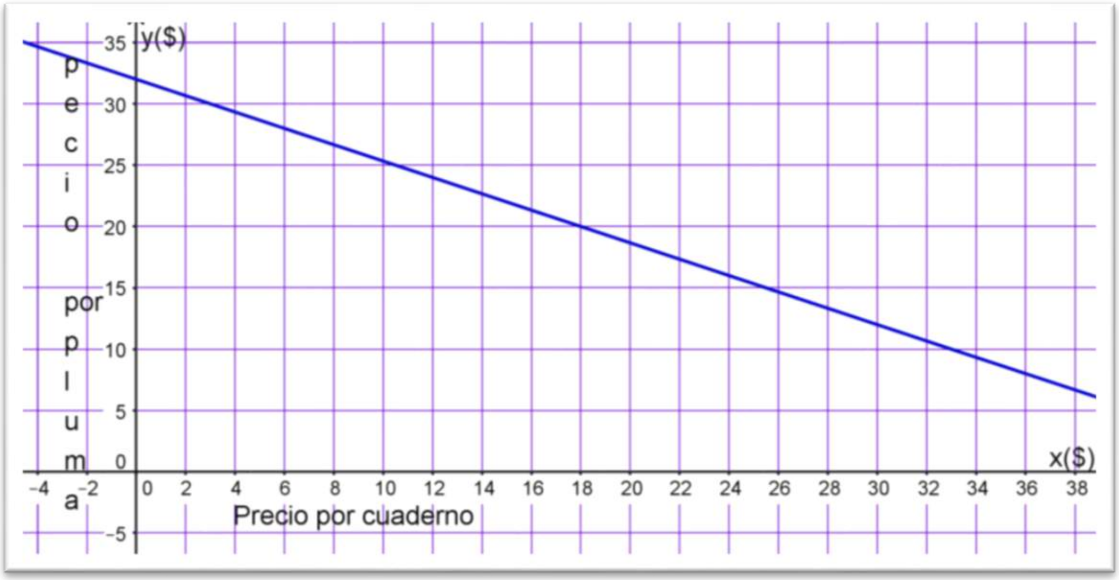
Sustituciones:

Como te habrás dado cuenta las dos parejas de valores son solución, de hecho, hay muchas posibles soluciones; encuentra otras y completa la tabla siguiente.

Tabla 1. $\boldsymbol{4x + 6y = 192}$

Cuaderno x($)	Pluma y($)
30	12
24	16
18	
9	

Verifica que los valores, como puntos con coordenadas (x, y), estén en la gráfica que describe la ecuación.



Como te habrás dado cuenta, sin el *ticket* o más información que permita obtener otra ecuación, no es posible saber cuál es el precio exacto de cada producto, pues cada punto de la recta es solución de la ecuación.

Ejercicio 1

Elabora una tabla con por lo menos 3 soluciones de las siguientes ecuaciones y grafica cada una de las rectas:

1) $x + y - 2 = 0$

2) $3x + y = 5$

3) $-4x = y - 2$

4) $3x + 2y = 0$

Solución gráfica de un problema[4]

Ejemplo 1

Pablo y Karen tienen un *dron* cada uno y van a realizar una carrera de 100m. Pablo sabe que su dron es más rápido y decide darle una ventaja de 24m. Si las velocidades a la que se desplazan son de 8m/s y 6m/s. ¿Quién ganará?

Esta actividad la realizaremos juntos: comenzaremos dando ejemplos y tu completarás lo que haga falta. Elaboremos las tablas para cada *dron.*

1. *Dron* de Pablo

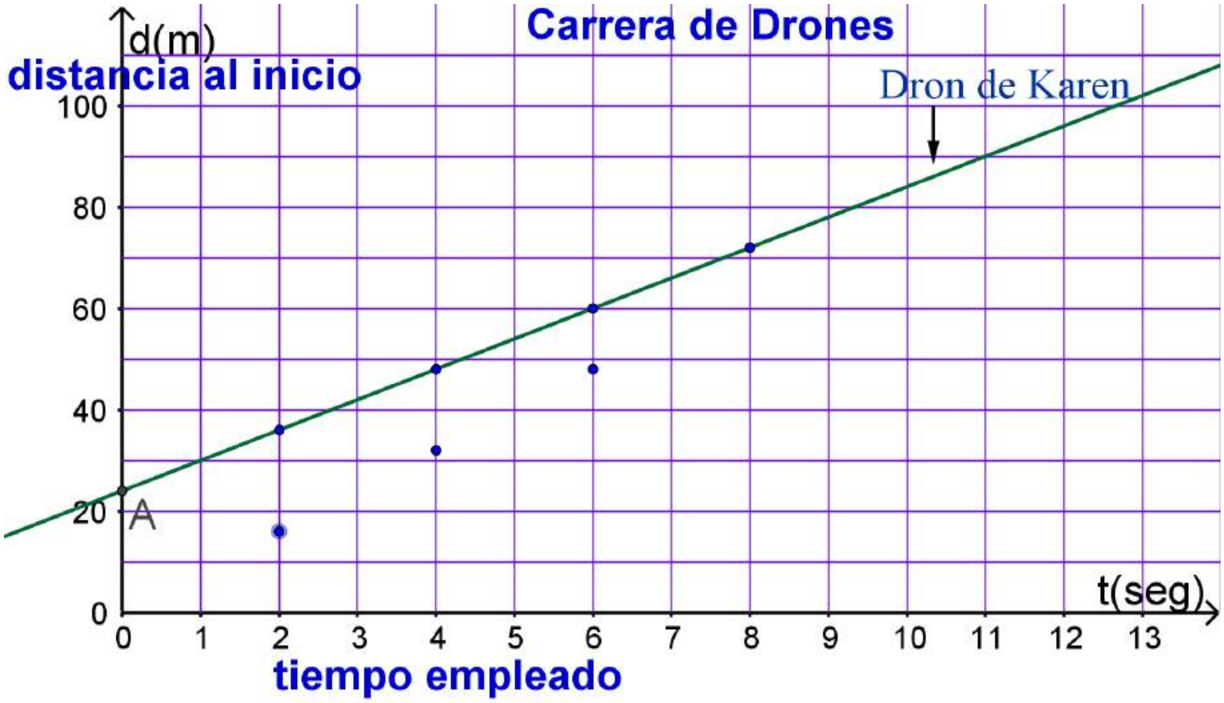
t (seg)	*d (m)*
0	0
2	16
4	32
6	
8	48
9	
10	
12	
14	

2. *Dron* de Karen

t (seg)	*d (m)*
0	24
2	36
4	48
6	60
8	72
9	
10	84
12	
14	

A continuación, elaboramos la gráfica del *dron* de Karen y algunos puntos del aparato de Pablo; grafica los puntos que faltan y traza la otra recta.

[4] Aclaración: Los autores consideramos muy importante profundizar en el tema, para comprender mejor el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.



Con las gráficas ya puedes saber varias cosas. Analiza e interpreta.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Quién gana la carrera? ____________________ (identifica cuál recta está arriba a los 100m de distancia). Explica.

2. ¿Cuánto tiempo emplea el dron de Pablo para alcanzar al otro? _____________ (identifica el punto de intersección). Explica.
3. Da las ecuaciones que representan cada movimiento.
   a) Dron de Karen $d =$ ___t $+$ ___
   b) Dron de Pablo $d =$ ___t

El sistema tiene solución por ello se le llama **consistente**, la solución es el punto de intersección de las rectas (12, 96) y determina el tiempo que tarda en alcanzarlo y dónde lo encuentra.

Ejercicio 2

Encuentra graficando, en los casos que sea posible la solución de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales.

1) $\begin{matrix} y = -\frac{1}{3}x - 1 \\ 4x - 3y = 18 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 2y = 6 - x \\ 3x - 2y = 6 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} x - 2y = 4 \\ x - 2y = -3 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} 2x - 6 = -3y \\ 3y = 6 - 2x \end{matrix}$ 5) $\begin{matrix} 2x = -3y \\ 3y = 4x \end{matrix}$

Ejercicio 3

Resuelve por el método de igualación

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 7x + y - 4 = 0 \\ 4x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

Ejercicios 4

Resuelve por el método de sustitución

1) $\begin{cases} 7x + y = 15 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 10y - 24 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

Ejercicio 5

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba que la solución satisface cada una de las ecuaciones.

1) $\begin{cases} x + 2y + z = -6 \\ x + y - z = 2 \\ 2y + z = -7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -2x + 2y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ 3x + y + 2z = 7 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

Ejercicio 6

Elige la solución correcta de cada sistema

1) $\begin{cases} x+3y=6 \\ 5x-2y=13 \end{cases}$

A) $\begin{matrix} x=1 \\ y=3 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=-3 \\ y=1 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=3 \\ y=1 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=-1 \\ y=-3 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=-3 \\ y=-1 \end{matrix}$

2) $\begin{cases} 5x+7y=-1 \\ -3x+4y=-24 \end{cases}$

A) $\begin{matrix} x=4 \\ y=-3 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=-4 \\ y=3 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=-3 \\ y=-4 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=4 \\ y=3 \end{matrix}$

3) $\begin{cases} 3x+4y=8 \\ 8x-9y=-77 \end{cases}$

A) $\begin{matrix} x=4 \\ y=5 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=-4 \\ y=5 \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=-5 \\ y=-4 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=-4 \\ y=-5 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=3 \\ y=4 \end{matrix}$

4) $\begin{cases} 15x+11y=32 \\ -9x+7y=8 \end{cases}$

A) $\begin{matrix} x=\frac{2}{3} \\ y=2 \end{matrix}$ B) $\begin{matrix} x=-2 \\ y=\frac{2}{3} \end{matrix}$ C) $\begin{matrix} x=\frac{2}{3} \\ y=-2 \end{matrix}$ D) $\begin{matrix} x=\frac{3}{2} \\ y=2 \end{matrix}$ E) $\begin{matrix} x=-\frac{2}{3} \\ y=-2 \end{matrix}$

Problemas que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales

A partir del siguiente problema, trata de identificar las relaciones que existen entre los datos que se te proporcionan y las incógnitas.

Ejemplo

En una papelería, un niño compró 5 plumas y 4 lápices pagando por ellos $ 30.00, otro niño compró 2 plumas y 6 lápices pagando $ 23.00. ¿Cuál fue el costo de cada pluma y cada lápiz?

Iniciamos la solución identificando las variables que vamos a utilizar y describiendo su significado en el modelo matemático, así:

x representa el costo de cada pluma ($)

y representa el costo de cada lápiz ($).

Construimos el modelo matemático que representa las relaciones descritas en el enunciado, quedando:

$$5x + 4y = 30$$

$$2x + 6y = 23$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, utilizando cualquier método, que en este caso será suma o resta, para lo cual multiplicamos a la primera ecuación por 3 y a la segunda por – 2 y sumamos las ecuaciones resultantes, obteniéndose:

$$(3)(5x + 4y) = (3)30$$

$$-2\,(2x + 6y) = 23\,(-2)$$

$$\begin{array}{rl} + & 15x + 12y = \ \ 90 \\ & -4x - 12y = -46 \\ \hline 11x & = \ 44 \end{array}$$

$$x = \frac{44}{11}$$

$$x = 4$$

Si ahora sustituimos el valor de $x = 4$ en la segunda ecuación original, tenemos:

$$2\,(4) + 6\,y = 2$$

$$8 + 6y = 23$$

$$6y = 23 - 8$$

$$y = \frac{15}{6}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

Ahora sabemos que el costo de cada pluma fue de $ 4.00 y de cada lápiz $2.50

Ejercicio 7

Resuelve los siguientes problemas cuyo modelo es un sistema de ecuaciones lineales.

1) Un almacenista tiene dulces de $ 45.00 el kilogramo y otros de $ 70.00 el kilogramo, si quiere hacer una mezcla de 120 kilogramos cuyo costo sea de $ 55.00 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada clase de dulces tendrá que mezclar?

2) La suma de los dígitos de un número de 2 cifras es 13. Si las cifras del número se invierten, el número resultante es 9 unidades menor que el número original. ¿Cuál es el número original?

3) El gerente de un teatro sabe que vendió 450 boletos para una función. Si cada boleto de adulto costó $ 150.00 y cada boleto de niño costó $ 40.00 y en total recaudó $ 45,500.0 ¿cuál fue el número de boletos de adultos y cuál el de niños que vendió?

4) Si el menor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide la cuarta parte del otro ángulo agudo. ¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

5) Al final de las ventas del día un comerciante encontró que tenía $211.00 en monedas de $2.00 y $5.00, si en total fueron 59 monedas ¿Cuántas tiene de cada denominación?

1.Al resolver por sustitución el siguiente sistema de ecuaciones, la solución es:

$$\begin{cases} 4 + 2x = 3y \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

A) $x = 2, y = 1$ B) $x = -2, y = -1$ C) $x = -1, y = 2$
D) $x = 1, y = 2$ E) $x = 1, y = -2$

2.¿Cuándo un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas **no** tiene solución?

A) Cuando las rectas se intersecan B) Cuando forman una sola recta

C) Cuando las rectas son paralelas D) Cuando las rectas son perpendiculares

D) Cuando una recta es creciente y la otra decreciente.

3. Oscar compró 4 chocolates y 6 paletas; pagó $78. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

Sea $\boldsymbol{x}$ el precio de los chocolates ($)

$\boldsymbol{y}$ el precio de cada paleta ($).

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

A) $x = \$12,\ y = \$5$ es posible respuesta B) $x = \$9,\ y = \$7$ es posible respuesta

C) $x = \$6,\ y = \$9$ es posible respuesta D) $x = \$7,\ y = \$9$ es posible respuesta

E) tiene muchas soluciones.

4.Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ se tiene que el valor de x es:

A) $x = 2$ B) $x = 1$ C) $x = -1$ D) $x = -2$ E) $x = 3$

5.Si por el método de igualación eliminamos "x" en el sistema $\begin{cases} x - y = 46 \\ -2x - 4y = 78 \end{cases}$; para obtener una ecuación de primer grado con una incógnita, entonces ¿cuál de las siguientes proposiciones corresponde a la ecuación?

A) $-85 = 3y$ B) $7 = -3y$ C) $85 = 3y$
D) $7 = -3y$ E) $85 = -y$

6.¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene por gráfica la que se muestra en la figura?

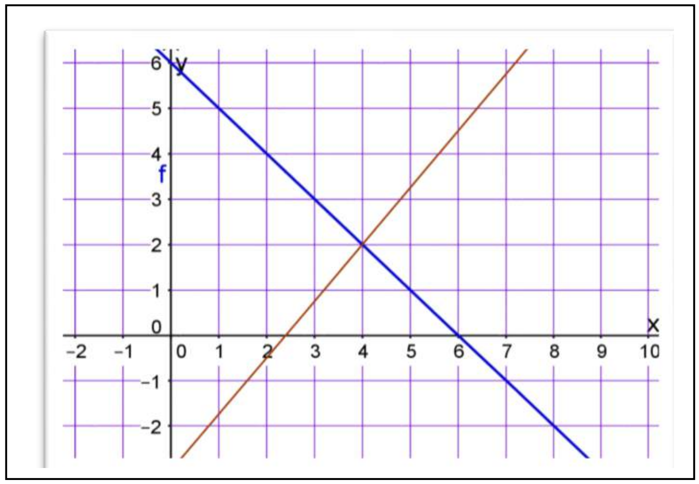
A) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 5x - 4y = 12 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 4x + 5y = -32 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 10 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$



7.Si para rentar un automóvil se obtuvieron los siguientes presupuestos: en Renta-Car la renta diaria es de \$350, más \$600 de cuota fija y en otra empresa es de \$250 por la renta y la cuota fija de \$100. Identifica ¿cuál sistema de ecuaciones representa la situación?, considerando que x es la cantidad de días que se alquila el auto.

A) $\begin{cases} y = 600x + 250 \\ y = 350x + 100 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y = 250x \\ y = 350x \end{cases}$ C) $\begin{cases} y = 600x \\ y = 350x \end{cases}$

D) $\begin{cases} y = 350x + 600 \\ y = 250x + 100 \end{cases}$ E) $\begin{cases} y = 250x + 600 \\ y = 350x + 100 \end{cases}$

8.Aplica el método de sustitución, despeja $\boldsymbol{y}$ de la <u>segunda ecuación</u> del sistema siguiente e identifica qué ecuación queda para obtener el valor de $\boldsymbol{x}$?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -6x + y = 3 \end{cases}$$

A) $-6x + 6x + 3 = 3$ B) $3x + 2(6x + 3) = 6$

C) $-6x + \frac{6-3x}{2} = 6$ D) $3x + 2\left(\frac{6-3x}{2}\right) = 6$ E) $3\left(\frac{3-y}{-6}\right) + 2y = 6$

Ç

9.¿Cuál combinación lineal permite obtener un sistema de ecuaciones equivalente y triangular*?*

$$\begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ \quad\; y - z = 2 \\ \;\; 3y + z = 4 \end{cases}$$

A) $-3(ec1) + ec3$ B) $3(ec2) + ec3$ C) $-1(ec1) + ec3$

D) $-3(ec2) + ec3$ E) $\frac{1}{3}(ec3) + ec2$

10. Ana, Pablo y José fueron al establecimiento de "Copias y Copias". Ana pidió 10 copias, 5 amplificaciones y 3 acetatos; Pablo pidió 5 copias, 2 amplificaciones y 3 acetatos y José 1 copia y 3 acetatos. Si pagaron \$19, \$8 y \$9.60 respectivamente y Pablo olvido sacar 2 copias y 3 acetatos. ¿Cuánto dinero necesita Pablo, para las copias y los acetatos demás?

A) \$3.60 B) \$10.20 C) \$4.60 D) \$3 E) \$3.80

UNIDAD 4. FUNCIONES Y ECUACIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES

Presentación

En esta unidad se avanza en el concepto de función al introducir un nuevo tipo de variación que conlleva conceptos como concavidad y simetría. El objetivo es identificar funciones cuadráticas, graficarlas y resolver problemas que involucren una función de este tipo.

El concepto de función ha sido considerado como uno de los conceptos más importantes de la matemática, en parte porque a nivel histórico se ha consolidado como un modelo de procesos de variación.

La primera mujer que registra la historia de la Matemática fue Hipatia (350-415), quien trabajó en la biblioteca de Alejandría y escribió varios documentos acerca de las propiedades geométricas de la parábola.

Conceptos clave

Variable independiente: Variable que puede cambiar libremente su valor sin que se vea afectada por alguna otra variable. Generalmente, una variable independiente es la entrada de una función y normalmente se denota por el símbolo *x*, en tanto que frecuentemente *y* se reserva para la variable dependiente.

Variable Dependiente: Su valor depende de la función dada y el valor elegido para la variable independiente.

Función: En **matemática**, una **función** (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado condominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento $y = f(x)$ del codominio (los que forman el recorrido, también llamado rango o ámbito).

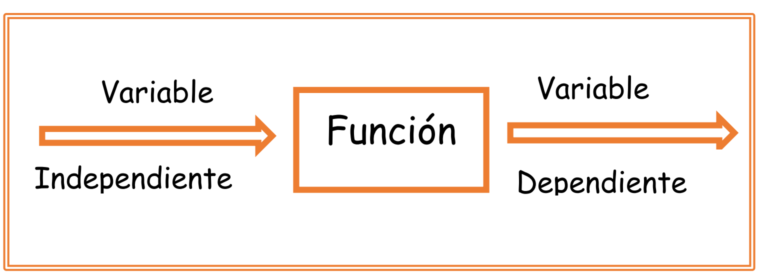
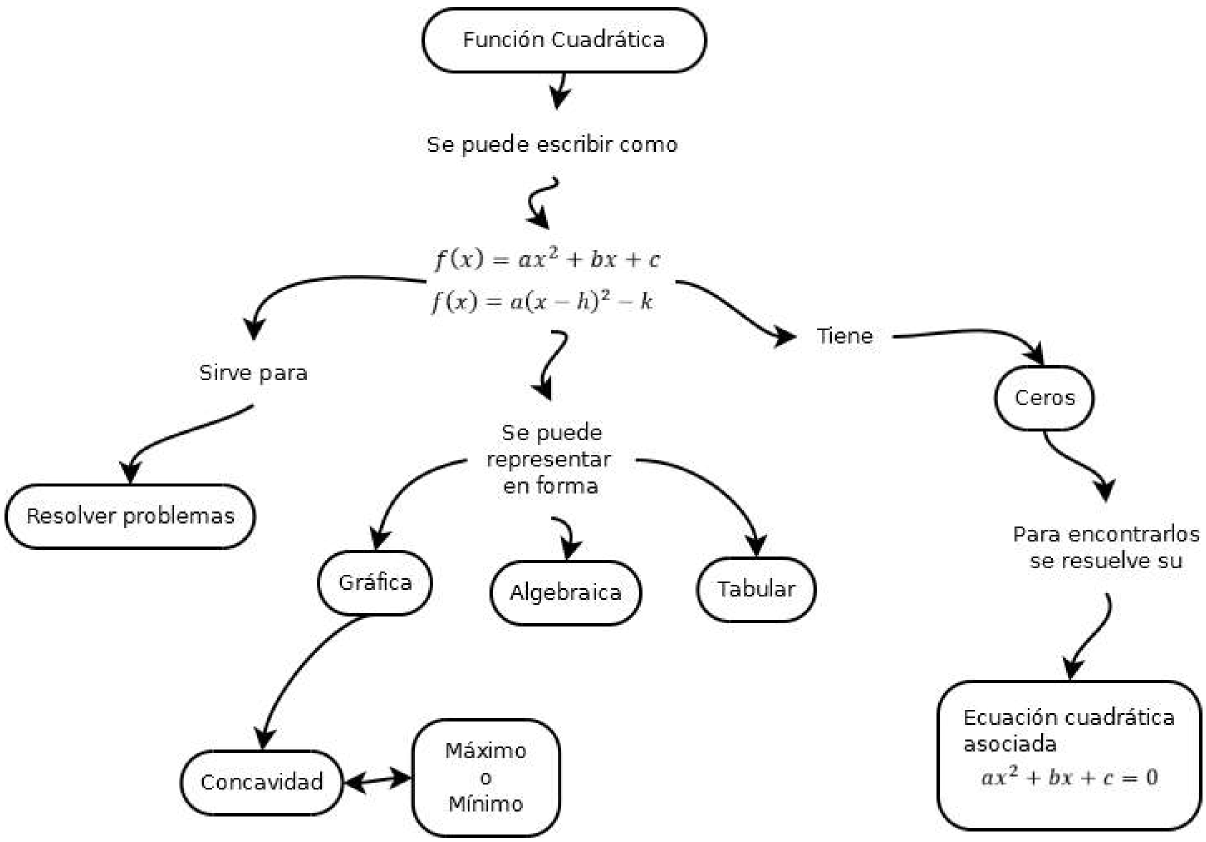


Fig. 2 Función

Registros de una función numérica (tabla), gráfica y expresión algebraica: Existen tres formas de representar una función y éstos son la tabular (elaborar una tabla), gráfica (construir su gráfica) y algebraica (mediante su regla de correspondencia).



Problemas que conducen a Funciones Cuadráticas

1. *El Huerto.* En el jardín de una residencia se quiere destinar una zona rectangular para hacer un huerto (Fig. 3) y se dispone de 56 metros lineales de malla de acero para cercar la zona. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo si se desea abarcar la mayor área posible? Para contestar realiza lo siguiente:

Fig. 3 Huerto

¿Qué forma tiene la zona que se desea abarcar?

____

¿Cuánto mide el perímetro del rectángulo? ____

Si el perímetro del rectángulo mide 56 metros, ¿cuánto suman la base y la altura? ___________

¿Recuerdas cómo se obtiene el área de un rectángulo? ________________________________

Si representamos el área con $\boldsymbol{y}$ y la base del rectángulo con $\boldsymbol{x}$, entonces una expresión algebraica para la altura es: ________________________

Así tenemos que el área del rectángulo es:

$$y = x(28 - x)$$

o bien,

$$y = -x^2 + 28x$$

Esta igualdad es un modelo algebraico para el área del rectángulo que estamos considerando. Representa en el lenguaje del Álgebra, la relación entre todas las posibles medidas de la base y el área correspondiente.

El modelo que obtuvimos es un modelo polinomial cuadrático o de segundo grado, porque el exponente con el que aparece la variable x es 2.

En este modelo intervienen dos variables: x y y. El valor de y depende del valor de x; por tal razón decimos que y es la variable dependiente y x la variable independiente.

Lo anterior significa que el Área del terreno de nuestro problema depende de su base.

Completa la tabla 1:

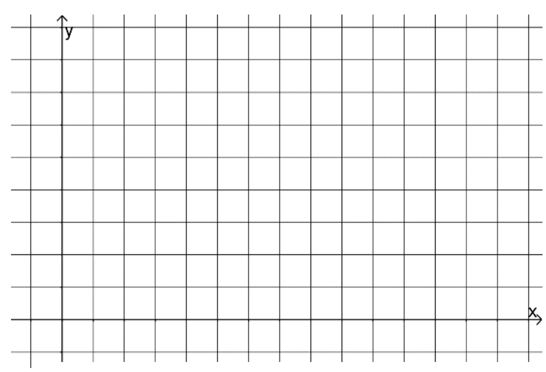
x base (m)	y área (m2)	Operación $y = x(28 - x)$
0	0	$y = 0(28 - 0) = 0(28) = 0$
4	96	$y = 4(28 - 4) = 4(24) = 96$
8		
12		
16		
20		
24		
28		

Tabla 2. Problema "El Huerto"

¿Para qué valores de la base se obtiene la menor área del terreno? ________________________

¿Cuál es la mayor área del terreno? ____

Grafica estos puntos en un plano cartesiano, coloca en el eje x el valor de la base y en el eje y el valor del área.



Gráfica 1: Problema "El Huerto"

¿Tendrá sentido unir los puntos?

____

¿Por qué? _________________________________

¿Cómo se llama este tipo de gráfica? ___________

Marca el punto más alto de la curva e indica cuáles sus coordenadas (,   ).

Ahora ya puedes decir cuáles son las medidas de la base y la altura con las que se abarca la mayor área posible ____

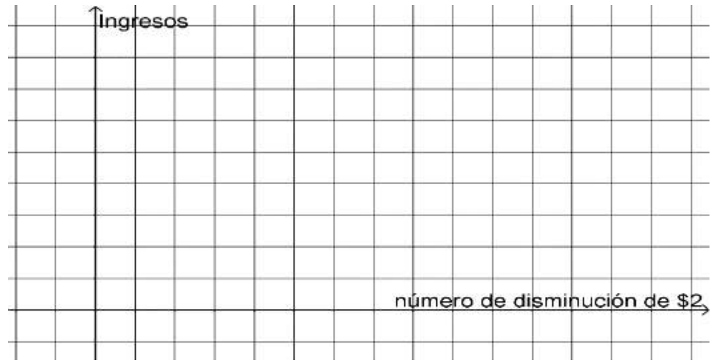
2. *La editorial.* Una editorial vende a los expendios de revistas una publicación científica a \$60 el ejemplar, y cada 50 ejemplares que excedan los 500, el precio de venta disminuye \$2, ¿cuántos ejemplares extras debe adquirir un expendio para que la editorial tenga un ingreso máximo? Para que te ayudes a contestar, completa la siguiente tabla.

Número de disminución de \$2(*x*)	Precio por revista	Número de Ejemplares	Ingresos *(y=f(x))*	Diferencias	Diferencias de diferencias
0	60	500	$(60)(500) = 30000$	$30000 - 31900$ $= -1900$	$-1900 - (-1700)$ $= -200$
1	$60 - 2(1) = 58$	$500 + 50(1) =$ 550	$(60 - 2(1))(500 + 50(1)) =$ $(58)(550) = 31900$	$31900 - 33600$ $= -1700$	$-1700 - (-1500)$ $= -200$
2	$60 - 2(2) = 56$	$500 + 50(2) =$ 600	$(60 - 2(2))(500 + 50(2)) =$ $(56)(600) = 33600$	$33600 - 35100$ $= 1500$	
3	$60 - 2(3) = 54$	$500 + 50(3) =$ 650	$(60 - 2(3))(500 + 50(3)) =$ $(54)(650) = 35100$		
4					

Tabla 3. "La editorial"

i. Traza la gráfica en el plano de "La editorial".

ii. Explica el significado de los valores que obtuviste en las dos últimas columnas de la Tabla 2 "La editorial".



Gráfica 2. "La editorial"

iii. Recuerda que, si las diferencias de las diferencias se mantienen constantes esto implica que se trata de una función cuadrática, ¿la situación que se está trabajando es función cuadrática?

iv. Encuentra el modelo algebraico de ingresos en función del número de disminución de \$2, utiliza lo realizado en la Tabla 2 "La editorial" y generaliza.

v. Escribe la función en forma general, para ello sólo tienes que multiplicar los binomios y reducir términos semejantes.

Por lo anterior, podemos decir que la expresión algebraica de una función cuadrática en su forma general es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con} \quad a \neq 0$$

y que su gráfica es una parábola.

Gráficas de funciones cuadráticas

Para graficar una función cuadrática pasaremos la función de la forma general

$f(x) = ax^2 + bx + c$, a la forma estándar, $f(x) = a(x - h)^2 + k$,

donde el vértice de la parábola es el punto (h, k). Asimismo, podemos calcular los ceros de la función, si es que éstos existen, al igualar la función a cero y obteniendo una ecuación cuadrática a resolver.

Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo (cóncava hacia abajo)

Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba)

El eje de simetría es $x = h$. Para obtener dos puntos simétricos de la parábola se puede sustituir $x = h \pm 1$ en $f(x)$. Recordar que en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$,

c representa el punto de intersección con el eje "y" (ordenada al origen).

Ejemplos. Grafica las siguientes funciones cuadráticas:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Transformemos la ecuación general a su forma estándar, esto es, la función está en forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la vamos a escribir en forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$ completando los cuadrados, como sigue:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

$$f(x) = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} - 5 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Se resta para no alterar la función}}}{4}$$

$$f(x) = \underbrace{(x + 2)^2}_{\text{El trinomio se puede expresar así}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Es el resultado de los dos números}}}{9}$$

$\therefore$ $f(x) = (x + 2)^2 - 9$ es la forma deseada y en esta expresión tenemos que:

$a = 1,$ $h = -2$ y $k = -9$

Por lo que el vértice de la parábola es el punto $(-2,-9)$ y como, $a > 0$ la parábola abre hacia arriba (cóncava hacia arriba), su eje de simetría es $x = -2$ y los ceros de la función o raíces de la parábola se obtienen igualando la función a cero y resolviendo:

La ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ la podemos resolver por varios métodos, utilizaremos el de factorización.

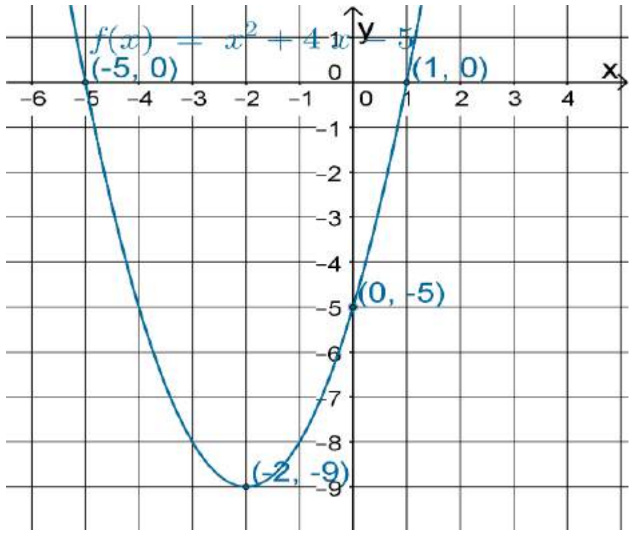
$$(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad (x - 1) = 0$$

$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = 1$$

$\therefore$ Los ceros de la función son -5 y 1, esto es, los puntos $(-5,0)$ y $(1,0)$.

Por lo que su gráfica es:



Gráfica 3. $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Nota: observa que el punto de intersección con el eje "y" es -5

2) $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

Para pasar a la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, primero factorizamos de la siguiente manera:

$$f(x) = -2(x^2 + 3x) + 3$$

Completamos cuadrados en el paréntesis y restamos $\left(\frac{9}{4}\right)(-2)$ para que no se altere la expresión:

$$f(x) = -2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 3 - \left(\frac{9}{4}\right)(-2)$$

$$f(x) = -2\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + 3 + \frac{18}{4}$$

$$f(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$

De donde $a = -2$, $h = -\frac{3}{2}$, y $k = \frac{15}{2}$

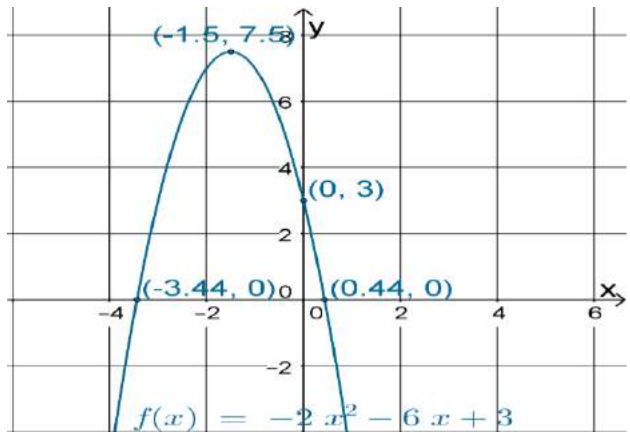
Entonces el vértice es $V\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$, el eje de simetría es $x = -\frac{3}{2}$, como $a = -2 < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo (abre hacia abajo). La intersección con el eje "y" es en 3.

Los ceros de la función los obtenemos resolviendo la ecuación $-2x^2 - 6x + 3 = 0$ por fórmula general, como $a = -2$, $b = -6$ y $c = 3$ al sustituir en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ nos queda:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-2)(3)}}{2(-2)} \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+24}}{-4} \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{-4} \rightarrow x = \frac{6 \pm 7.74}{-4} \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{6+7.74}{-4} = \frac{13.74}{-4} = -3.44 \qquad x_2 = \frac{6-7.74}{-4} = \frac{-1.74}{-4} = 0.44$$

Entonces su gráfica es:



Gráfica 4. $f(x) = -2x^2 - 6x + 3$

3) $f(x) = 7x^2 + 14x$

Factoriza el 7 como factor común: ____

Completa cuadrados y realiza lo necesario para que no se altere la función

____

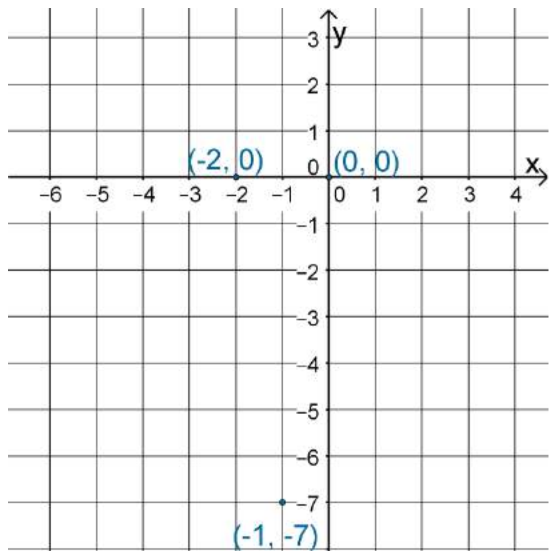
___

Escribe la función en la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ ____________________________

La función en forma estándar te debió haber quedado $f(x) = 7(x+1)^2 - 7$, de donde vemos que $a = 7 > 0$, es cóncava hacia arriba. Su vértice es $V(-1, -7)$ ya que $h = -1$ y $k = -7$, su eje de simetría es $x = -1$.

Resuelve la ecuación $7x^2 + 14x = 0$, para obtener los ceros de la función.

Con lo anterior bosqueja la gráfica de la función:



Gráfica 5. $\boldsymbol{f(x) = 7x^2 + 14x}$

4) $f(x) = 3x^2 - 1$

Está función se puede expresar como: $f(x) = 3(x-0)^2 - 1$, completa lo siguiente:

$a =$ __ $>$ __, $h =$ ___ y $k =$ ___, por lo que el vértice es $V($___,___$)$, la ecuación del eje de simetría es: $x =$ ____, abre hacia arriba, y siempre podemos obtener dos puntos simétricos de la parábola con evaluar en $x = h \pm 1$; así que al evaluar la función en $x = 1$ y en $x = -1$ obtenemos los puntos $A(1,2)$ y $B(-1,2)$ respectivamente; la intersección con el eje "y" está en -1. Los ceros de la función los obtenemos al resolver la ecuación $3x^2 - 1 = 0$,

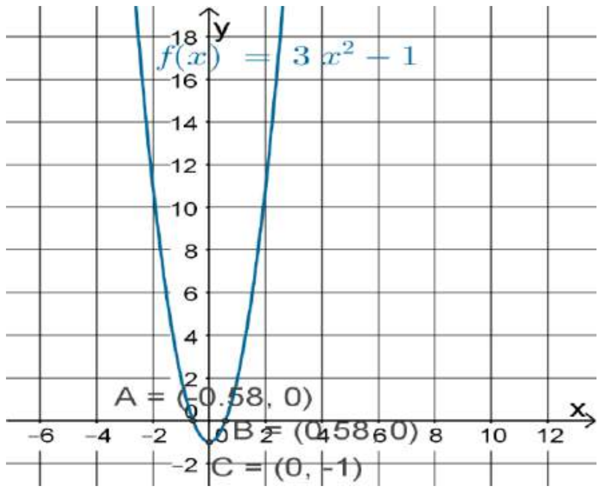
$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

De donde $x_1 = -0.58$ y $x_2 = 0.58$ son los ceros de la función, o bien son los cortes con el eje X.

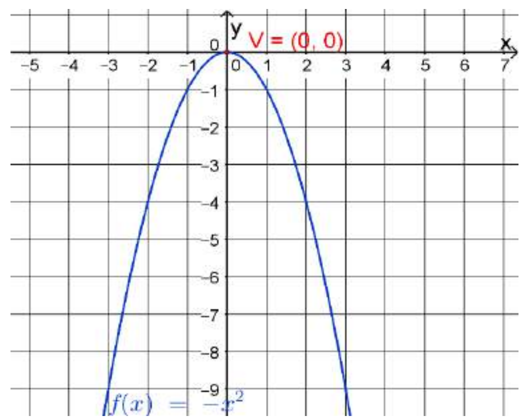
Por lo anterior su gráfica es:



Gráfica 6. $f(x) = 3x^2 - 1$

5) $(x) = -x^2$

Se puede expresar como $f(x) = -(x-0)^2 + 0$ que es de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, de donde $a = -1 < 0$, $h = 0$ y $k = 0$ por lo que su vértice es $V = (0,0)$, su eje de simetría es $x = 0$, es cóncava hacia abajo y dos de sus puntos son: $A(1,-1)$ y $B(-1,-1)$, su intersección con el eje "y" es 0, que es también el único cero de la función.



Gráfica 7. $f(x) = -x^2$

Ejercicio 1. Grafica las siguientes parábolas y marca dos puntos simétricos de ellas, éstos pueden ser los ceros de cada función (si es que existen).

1) $f(x) = 2x^2 + 8x - 5$

2) $f(x) = 4x^2 + 8x + 3$

3) $f(x) = x^2 + 4$

4) $f(x) = 2x^2 - 8x$

5) $f(x) = -x^2 - 6x$

6) $f(x) = -5x^2 + 2$

7) $f(x) = 3x^2 + 1$

8) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

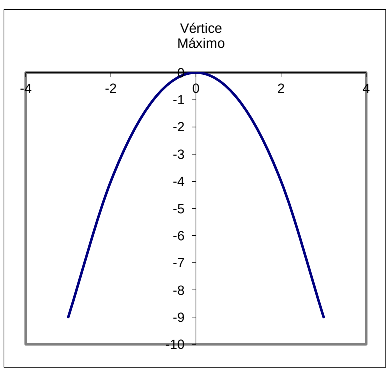
9) $f(x) = 3x^2 + 9x + 1$

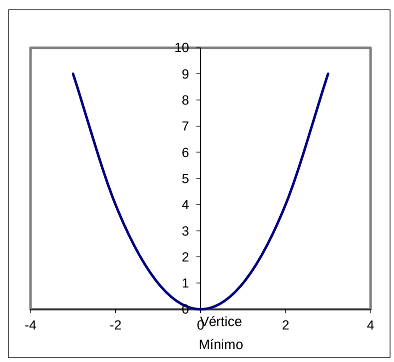
10) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x$

Problemas que involucran funciones cuadráticas

A partir del planteamiento de una función cuadrática como modelo matemático, se pueden resolver problemas determinando el vértice de la parábola. A este tipo de problemas se les conoce como: “PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS”

Observa las siguientes parábolas





Ejemplos

1. La ganancia semanal de una empresa se relaciona con el número de artículos producidos cada semana y esto se puede representar por la función:

$$P(x) = -2x^2 + 96x - 52$$

Donde $P(x)$ representa la ganancia semanal en pesos y x el número de artículos producidos por semana.

a) Representa gráficamente esta situación.
b) Si la empresa produce 26 artículos en una semana ¿Cuál será su ganancia?
c) Determina cuántos artículos deberá producir la empresa a la semana para que obtenga una ganancia máxima.

Solución

Para graficar la función cuadrática determinemos primero su vértice, esto lo haremos al escribir el modelo algebraico en forma estándar:

$$P(x) = -2x^2 + 96x - 52$$

Factorizamos en x

$$P(x) = -2(x^2 - 48x) - 52$$

Completando cuadrados

$$P(x) = -2(x^2 - 48x + 576) - 52 + 1152$$

$$P(x) = -2(x - 24)^2 + 1100$$

De donde el vértice es $V(24{,}1100)$, eje de simetría $x = 24$, la parábola se abre hacia abajo, y dos puntos de ella son $(25{,}1098)$, $(23{,}1098)$, el punto de intersección con el eje y es $(0, -52)$.

Observa que, así como sustituimos $x = 25$ y $x = 23$ en $P(x)$, podemos sustituir cualquier valor de "x" y éste nos estaría representando el número de artículos que se producen a la semana y $P(x)$ corresponde a las ganancias, por lo que podemos contestar la pregunta del inciso b) sustituyendo $x = 26$ en $P(x) = -2(x-24)^2 + 1100$

$$P(x) = -2(26 - 24)^2 + 1100$$

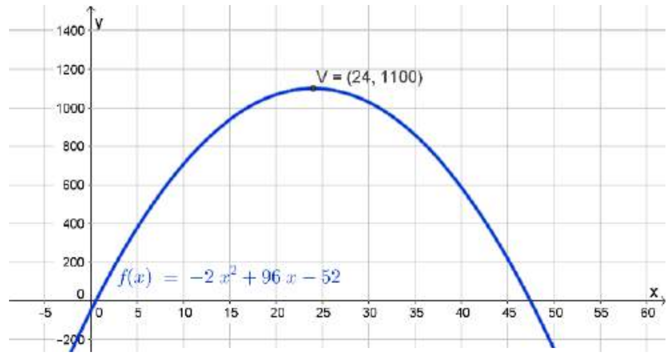
$$P(x) = -2(2)^2 + 1100$$

$$P(x) = -8 + 1100$$

$$P(x) = 1092$$

Entonces, si la empresa produce 26 artículos a la semana, su ganancia será de $1092.

Dibujamos en un plano cartesiano la información anterior y esto es la representación gráfica del problema, lo que contesta el inciso a).



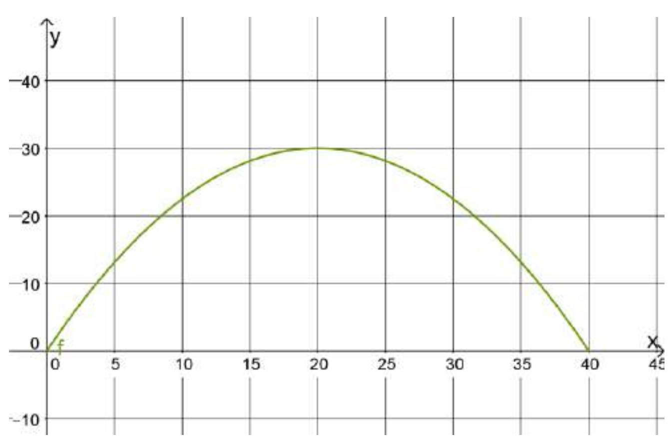
Gráfica 8. Problema Ganancias

Para contestar el inciso c) en la gráfica podemos observar que el punto máximo de la parábola es el vértice $V(24,1100)$, lo que significa que cuando x toma el valor de 24 artículos, la ganancia máxima es de $\$1100$, cualquier otro valor de x nos dará una ganancia menor a $\$1100$. Entonces la respuesta de c) es 24 artículos.

2. Una rana describe en un salto una trayectoria parabólica, si la longitud de su salto fue de 40 cm y la altura máxima alcanzada de 30 cm. Determina una ecuación para el salto de la rana.

Solución

La gráfica del salto de la rana se puede representar como:



Gráfica 9. Salto de la rana

Observa que la ordenada del vértice representa la máxima altura del salto y las coordenadas de éste son $V(20{,}30)$ entonces en la ecuación de la parábola de forma: $f(x) = a(x-h)^2 + k$ podemos sustituir el valor de h y k por 20 y 30 respectivamente.

$$f(x) = a(x-20)^2 + 30$$

Para encontrar el valor de a podemos sustituir los valores de x y $f(x)$ por el punto que tiene coordenadas $(0{,}0)$ esto lo podemos hacer porque es un punto de la parábola, entonces:

$$0 = a(0-20)^2 + 30$$

$$0 = a(400) + 30$$

$$-30 = a400$$

$$-\frac{30}{400} = a$$

$\therefore a = -\frac{3}{40}$ Entonces la ecuación requerida es: $f(x) = -\frac{3}{40}(x-20)^2 + 30$ forma estándar.

La cual se puede expresar como: $f(x) = -\frac{3}{40}x^2 + 3x$ forma general.

3. Se desea cercar un espacio rectangular de jardín con 200 m de alambre. ¿Cuáles serán las dimensiones del sitio para que éste ocupe la máxima área del jardín?

Solución

Lo primero que vamos a determinar es la función que representa esta situación. Esta función será de la forma: $f(x) = a(x-h)^2 + k$ donde x representará el ancho del rectángulo. Ahora, recordemos cómo calcular el perímetro y el área de un rectángulo.

Área = (largo)(ancho)

Perímetro = 2(largo)+2(ancho)

Como solo tenemos 200 m para cercar este terreno y si llamamos x al ancho, entonces el Perímetro de este rectángulo debería medir 200 m y el largo lo podemos determinar como sigue:

$200 = 2(largo) + 2x$

Si despejamos largo tenemos:

$$largo = \frac{200 - 2x}{2}$$

$\therefore largo = 100 - x$

Si sustituimos el largo, $100 - x$, y el ancho, x, en la fórmula para calcular el área de un rectángulo tenemos:

$$A = x(100 - x)$$

Simplificando:

$$A = 100x - x^2$$

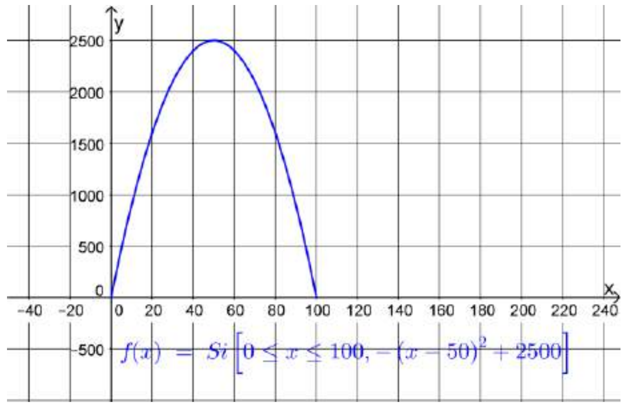
Por lo que la función cuadrática que representa este problema es:

$$f(x) = -x^2 + 100x$$

la cual se puede expresar en forma estándar como:

$$f(x) = -(x - 50)^2 + 2500$$

La gráfica de esta función es:



Gráfica 10. Problema "Área del jardín"

Lo que indica que el máximo de esta parábola se alcanza para $x = 50$, como x representa el ancho del rectángulo, entonces el ancho debe ser 50 m y el largo 50 m, estas dimensiones nos darán el espacio rectangular máximo, recuerda que un cuadrado es un caso particular de un rectángulo.

Ejercicio 2. Resuelve los siguientes problemas.

1. Se arroja una piedra verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, la fórmula $S = 32t - 8t^2$ nos da la altura en metros de la piedra después de t segundos.

a) Grafica la trayectoria de la piedra.

b) Determina en cuantos segundos, la piedra alcanza su máxima altura.

c) ¿Qué altura alcanza la piedra a los 3 segundos?

2. Se dispone de 60 m de alambre para cercar un jardín en forma rectangular, pero uno de los lados corresponderá a la pared de la casa. ¿Qué dimensiones del jardín nos darán el área máxima?

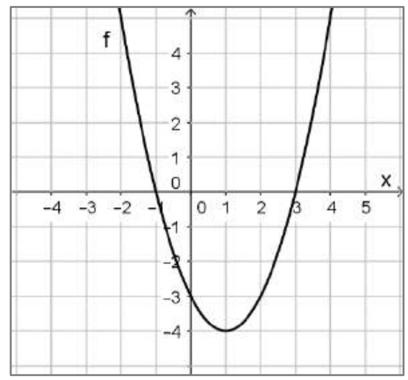
3. Determina la ecuación que representa la trayectoria del salto parabólico, de un atleta que alcanza una altura máxima de 2 m y una longitud de 3.40 m.

Resuelve lo que se indica

1. La gráfica de la función cuadrática $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ tiene su vértice en las coordenadas

A) $(-\frac{1}{2}, -3)$ B) $(-\frac{1}{2}, 3)$ C) $(\frac{1}{2}, -3)$ D) $(0,3)$

2. La función que se representa en la gráfica de la derecha, está dada por:



A) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

B) $f(x) = x^2 - 3$

C) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$

D) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

3. Un granjero tiene 600 metros de malla de alambre, para construir un corral con forma de rectángulo. El corral tendrá como uno de sus lados a una pared, por lo que no requiere malla en esa parte. Si el granjero desea que el área que encierre el corral sea la máxima posible, ¿de qué dimensiones debe ser? Identifica la expresión que modela el área del corral en función del lado más corto.

A) $A = x\,(600 - x)$ B) $A = x\,(600 - 2x)$

C) $A = 2x\,(600 - x)$ D) $A = 2x\,(600 - 2x)$

4. Al transformar la función cuadrática, de su forma general $y = 2x^2 + 12x + 16$ a su forma estándar, queda como:

A) $y = 2(x-3)^2 - 2$ B) $y = 2(x+3)^2 + 2$

C) $y = 2(x+3)^2 - 2$ D) $y = 2(x-3)^2 + 2$

5. El vértice de la función cuadrática $f(x) = x^2 + 6x + 4$ tiene coordenadas V (-3, -5), por lo tanto, en ese punto la función

A) tiene un máximo. B) tiene un mínimo.

C) tiene una raíz real. D) tiene una raíz imaginaria

6. Las raíces de la función cuadrática $f(x) = x^2 + x - 12$ son:

A) $x_1 = -3 \quad x_2 = 4$ B) $x_1 = -2 \quad x_2 = 6$

C) $x_1 = 3 \quad x_2 = -4$ D) $x_1 = -12 \quad x_2 = 1$

7. Considera la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 3x - 2$. El valor de $f(-1)$ es:

A) 0 B) -4 C) -6 D) 4

8. La concavidad de la gráfica de la función $f(x) = -3x^2 + 9x + 1$ es hacia

A) abajo B) la derecha C) arriba D) la izquierda

9. Determina las intersecciones con el eje X de la gráfica de la función $y = x^2 - 3x - 10$

A) $x_1 = 3,\ x_2 = -10$ B) $x_1 = 5,\ x_2 = -2$

C) $x_1 = 10,\ x_2 = 3$ D) $x_1 = -5,\ x_2 = -2$

10. Determina el valor de la siguiente función $f(x) = x^2 + 6x + 4$ en su punto mínimo

A) -3 B) 3 C) -5 D) 5

ECUACIONES CUADRÁTICAS.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Utilizarás los métodos de factorización, completar el trinomio cuadrado perfecto y fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas con una variable.

- Determinarás cuando una ecuación cuadrática no tiene solución real.

- Resolverás problemas que involucren en su solución ecuaciones de segundo grado con una variable.

Las ecuaciones de primer y segundo grado se resolvían con un método prácticamente idéntico al que usamos hoy en día. Sin embargo, la solución no apareció en Europa hasta el s. XII, en el libro Tratado de Medidas y Cálculos, del matemático judeo-español Abraham Bar Hiyya Ha-Nasi. Siglos después, todos los libros de matemáticas de nivel medio superior incluyen la famosa fórmula general o llamada comúnmente "chicharronera".

Conceptos clave

Ecuación de segundo grado. Son aquellas que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde *a, b* y *c* son números reales cualesquiera, tales que $a \neq 0$.

Diferencia de cuadrados. Es un binomio en el cual sus términos se están restando y además están elevados al cuadrado; es decir son binomios que tienen la forma:

$$a^2 - b^2$$

La diferencia de cuadrados se obtiene multiplicando dos binomios conjugados, es decir:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Binomios conjugados. Son dos binomios que sólo se diferencian en un signo, por ejemplo:

- $a - b$ y $a + b$
- $3x + 6$ y $3x - 6$

Trinomio cuadrado perfecto. Es el resultado de elevar un binomio al cuadrado, es decir, es un trinomio de la forma:

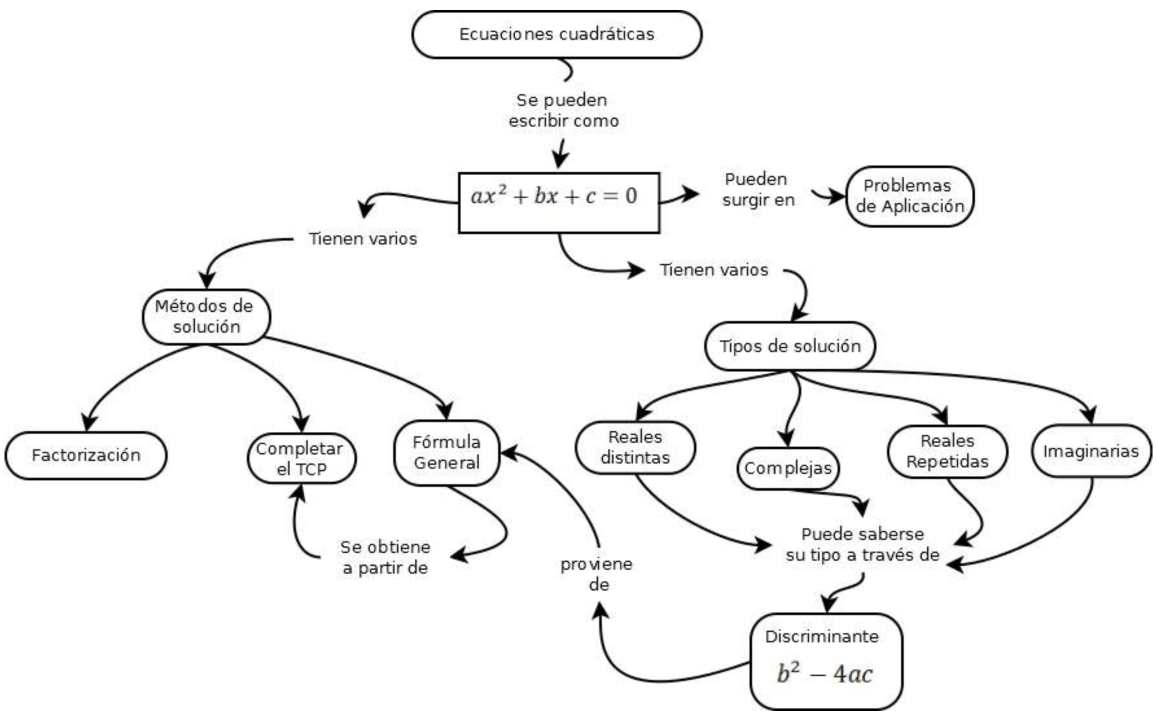
$$a^2 + 2ab + b^2$$

Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Se refiere a la fórmula que se puede emplear para resolver este tipo de ecuaciones; es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discriminante de una ecuación de segundo grado. En una ecuación cuadrática, se refiere al valor de:

$$D = b^2 - 4ac$$



Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas: $x^2 = b$, $ax^2 = b$, $ax^2 + b = c$, $ax^2 + b = 0$, $a(x+b)^2 + c = d$, $(x+b)(x+c) = 0$

Ejemplo 1. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado

$$x^2 = 100$$

Esta es una ecuación de segundo grado ya que la podemos escribir como $x^2 - 100 = 0$. Además, observa que la forma de la ecuación es $x^2 = b$. En este caso, como queremos despejar x extraemos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{100}$$

$$x = \pm 10$$

Así que las raíces o soluciones de la ecuación son -10 y 10.

Ejemplo 2. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado

$$5x^2 = 100$$

Observa que es una ecuación de segundo grado y la podemos escribir como $5x^2 - 100 = 0$. Además, observa que la forma de la ecuación es $ax^2 = b$. En este caso primero despejamos x^2:

$$x^2 = \frac{100}{5} = 20$$

$$x^2 = 20$$

Ten en cuenta que ahora se tiene una ecuación de la forma $x^2 = b$, como en el ejemplo 1, así que la solución de la última ecuación se obtendrá de la misma manera que en el caso de la ecuación de ejemplo 1; extraemos raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación:

$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{20}$$

$$x = \pm 2\sqrt{5}$$

Así que las soluciones de la ecuación son $2\sqrt{5}$ y $-2\sqrt{5}$.

Ejemplo 3. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$3x^2 - 5 = 8$$

Observa que esta es una ecuación de segundo grado y la podemos escribir como $5x^2 - 13 = 0$; además que su forma es $ax^2 + b = c$. Para resolver esta ecuación transponemos[5] el -5 y tenemos:

$$3x^2 = 13$$

Ahora tenemos una ecuación similar a la del ejemplo 2 así que resolvemos la ecuación de la misma manera:

$$x^2 = \frac{13}{3}$$

[5] Transponer es llevar un término de un lado de la ecuación al otro.

$$x = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Así que las soluciones de la ecuación son $\sqrt{\frac{13}{3}}$ y $-\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Ejemplo 4. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$3(x-3)^2 + 3 = 6$$

Este caso es similar al mostrado en el ejemplo 3 sólo que en vez de tener x^2 se tiene $(x-3)^2$. Sin embargo, este tipo de ecuaciones se puede resolver virtualmente de la misma manera que la ecuación mostrada en el ejemplo 3. Primero despejamos el término $(x-3)^2$:

$$3(x-3)^2 = 6 - 3$$

$$(x-3)^2 = \frac{3}{3}$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \pm\sqrt{1}$$

$$x - 3 = \pm 1$$

$$x = 3 \pm 1$$

Así que las soluciones de la ecuación son 4 y 2.

Ejemplo 5. Resuelve la siguiente ecuación de segundo grado:

$$(x-4)(x+5) = 0$$

Podemos comprobar que esta es una ecuación de segundo grado realizando la multiplicación de binomios:

$$x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

Esta ecuación podría resolverse a través de la fórmula general, sin embargo, la ecuación original está expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que sólo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$x - 4 = 0$	$x + 5 = 0$

$x = 4$	$x = -5$

Ejercicio 1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

1) $x^2 = 8$
2) $x^2 - 13 = 0$
3) $x^2 + 13 = 25$
4) $4x^2 = 25$
5) $-9x^2 = -64$
6) $15x^2 + 9 = 18$
7) $2(x-3)^2 + 6 = 14$
8) $-3(x-4)^2 + 5 = \frac{11}{3}$
9) $(x+1)^2 = 0$
10) $(x-3)(x+5) = 0$
11) $(x-8)(x+7) = 0$
12) $(x-5)(x-5) = 0$

Solución por factorización

Para resolver factorizando una ecuación cuadrática debes recordar que la factorización depende de la estructura algebraica.

Ejemplo 6. Si tienes la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ecuación cuya estructura corresponde a un trinomio cuadrático que resulta de la multiplicación de dos binomios con un término común y que para encontrarlos se buscan dos números cuyo producto sea 2 que es el término independiente y su suma sea – 3. Tales números son – 1 y – 2, por lo que la ecuación queda expresada como:

$$(x-1)(x-2) = 0$$

Al factorizarla, la ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$$x - 1 = 0 \qquad \text{ó} \qquad x - 2 = 0$$

Al despejar la variable de las ecuaciones generadas se obtienen las raíces de la ecuación cuadrática, es decir:

$$si\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$si\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Por lo que las raíces o soluciones de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ son 1 y 2.

Ejemplo 7. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$25x^2 - 16 = 0$$

Esta ecuación tiene una estructura que corresponde a la de una diferencia de cuadrados. La factorización de una diferencia de cuadrados es la multiplicación de dos binomios conjugados; para encontrar dichos binomios se extrae la raíz cuadrada a $25x^2$ y la raíz cuadrada de 16. Tales raíces son $5x$ y 4, por lo que la ecuación queda factorizada como

$$(5x + 4)(5x - 4) = 0$$

La ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$5x - 4 = 0$ $x = \frac{4}{5}$	$5x + 4 = 0$ $x = -\frac{4}{5}$

Por lo que las raíces o soluciones de la ecuación son $\frac{4}{5}$ y $-\frac{4}{5}$.

Ejemplo 8. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de un trinomio cuadrado perfecto el cual resulta de la multiplicación de un binomio elevado al cuadrado o multiplicado por si mismo. Para encontrar su forma factorizada, se extrae la raíz cuadrada de $4x^2$ y la raíz cuadrada de 9. Tales raíces cuadradas son $2x$ y 3 y como el signo del coeficiente del término lineal es negativo, la ecuación queda factorizada como:

$$(2x-3)(2x-3)=0$$

La ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$2x-3=0$ $x=\frac{3}{2}$	$2x-3=0$ $x=\frac{3}{2}$

como te podrás dar cuenta las dos raíces son iguales por lo se dice que $\frac{3}{2}$ es la raíz de multiplicidad 2 de la ecuación $4x^2-12x+9=0$.

Ejemplo 9. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$10x^2+4x=0$$

Ésta se factoriza determinando el factor común $2x$ y dividiendo cada término del polinomio $10x^2+4$ entre él para obtener los factores, es decir

$$\frac{10x^2}{2x}=5x$$

$$\frac{4x}{2x}=2$$

quedando la ecuación factorizada como:

$$2x(5x+2)=0$$

$2x=0$ $x=0$	$5x+2=0$ $x=-\frac{2}{5}$

Por lo que se tiene que 0 y $-\frac{2}{5}$ son las raíces de la ecuación $10x^2+4x=0$.

Ejemplo 10. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$3x^2 + 2x - 21 = 0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de un trinomio de segundo grado, el cual resulta de la multiplicación de dos binomios y que para encontrarlos se puede multiplicar al coeficiente del término cuadrático 3 por el término independiente -21 cuyo producto es -63 y se buscan dos números cuyo producto sea -63 y su suma sea 2, que es el coeficiente del término lineal. Tales números son -7 y 9 y con ellos se expresa al término lineal $2x$ utilizando estos números como coeficientes de dos términos lineales que generan un polinomio con cuatro términos:

$$3x^2 - 7x + 9x - 21$$

Este último se factoriza por agrupación, quedando la ecuación factorizada como sigue:

$$x(3x - 7) + 3(3x - 7) = 0$$

$$(3x - 7)(x + 3) = 0$$

La ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$3x - 7 = 0$ $x = \frac{7}{3}$	$x + 3 = 0$ $x = -3$

Ejercicio 2. Contesta cada una de las siguientes preguntas

1) ¿Qué es una ecuación cuadrática?

2) ¿Cuándo se considera una ecuación cuadrática completa?

3) ¿Cuándo se considera incompleta?

4) Aparte de factorizar para resolver ecuaciones cuadráticas, ¿Qué otras formas para resolverlas conoces?

5) ¿Cuál es el número de raíces que tiene una ecuación cuadrática?

Elige la opción que corresponde a la de la respuesta correcta:

6) La factorización de $y^2 - 6y + 9 = 0$ es:

A) $(y-3)(y+3) = 0$

B) $(y-9)(y+1) = 0$

C) $(y-1)(y+9) = 0$

D) $(y-3)(y-3) = 0$

7) La factorización de $x^2 + 14x + 49 = 0$ es:

A) $(x+7)^2 = 0$

B) $(x+7)(x-7) = 0$

C) $(x+2)(x+7) = 0$

D) $(x-7)^2 = 0$

8) La factorización de $72y + 16 + 81y^2 = 0$ es:

A) $(4+9y)^2 = 0$

B) $(4+9y)(4-9y) = 0$

C) $(4+y)(4+72y) = 0$

D) $(4-9y)^2 = 0$

9) La factorización de $100x^2 - 20x + 1 = 0$ es:

A) $(10x + 1)(10x + 1) = 0$

B) $(10x + 20)(10x - 1) = 0$

C) $(10x - 1)(10x - 20) = 0$

D) $(10x - 1)(10x - 1) = 0$

10) La factorización de $x^2 - 10x + 25 = 0$ es:

A) $(x - 5)(x + 5) = 0$

B) $(x + 5)(x - 10) = 0$

C) $(x - 5)(x - 5) = 0$

D) $(x + 10)(x - 5) = 0$

11) La factorización de $3x^2 - 5x + 2 = 0$ es:

A) $(x + 1)(3x + 2) = 0$

B) $(3x - 2)(x - 1) = 0$

C) $(x + 1)(3x - 2) = 0$

D) $(3x + 1)(x - 2) = 0$

12) La factorización de $x^2 + 11x + 24 = 0$ es:

A) $(x + 4)(x + 6) = 0$

B) $(x + 3)(x + 8) = 0$

C) $(x + 2)(x + 12) = 0$

D) $(x + 11)(x + 24) = 0$

13) Las raíces de la ecuación $x^2 - 11x - 26 = 0$, son:

A) -11 y -26

B) 11 y 26.

C) 13 y -2

D) -13 y 2

14) Las raíces de la ecuación $x^2 - 9x = 0$, son:

A) -1 y -9

B) 0 y 9

C) 3 y -3

D) 9 y 1

15) Las raíces de la ecuación $9x^2 - 49x = 0$, son:

A) 7 y -7

B) $\frac{7}{3}$ y $-\frac{7}{3}$

C) 3 y -3

D) $\frac{49}{9}$ y 0

16) Las raíces de la ecuación $4a^2 + 3a - 10 = 0$, son:

A) $\frac{5}{4}$ y -2

B) 2 y $-\frac{5}{4}$

C) 3 y -10

D) 10 y -3

17) Las raíces de la ecuación $9y^2 + 6y + 1 = 0$, son:

A) 9 y 6

B) 6 y 1

C) $\frac{1}{3}$ de multiplicidad 2

D) $-\frac{1}{3}$ de multiplicidad 2

18) Las raíces de la ecuación $4m^2 - 4m + 1 = 0$, son:

A) 4 y -1

B) -4 y 1

C) $\frac{1}{2}$ de multiplicidad 2

D) $-\frac{1}{2}$ de multiplicidad 2

19) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 9 y 7, la ecuación factorizada es:

A) $(x+7)(x-9)=0$

B) $(x-7)(x-9)=0$

C) $(x+9)(x-7)=0$

D) $(x+7)(x+9)=0$

20) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son $-2\ y\ \frac{3}{2}$, la ecuación factorizada es:

A) $(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

B) $(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0$

C) $\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2)=0$

D) $\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)=0$

21) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 0 y -4, la ecuación factorizada es:

A) $(x+4)x=0$

B) $x(x-4)=0$

C) $(x-0)(-4)=0$

D) $4(x-0)=0$

22) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 3 y 4, la ecuación es:

A) $x^2+3x+4=0$

B) $x^2-7x+12=0$

C) $x^2-4x+3=0$

D) $x^2+7x+12=0$

23) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son -1 y 3, la ecuación es:

A) $x^2-2x-3=0$

B) $x^2+3x-1=0$

C) $x^2-x+3=0$

D) $x^2+2x-3=0$

24) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son -5 y -7, la ecuación es:

A) $x^2-5x+7=0$

B) $x^2 + 5x - 7 = 0$

C) $x^2 + 12x + 35 = 0$

D) $x^2 - 12x + 35 = 0$

25) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 1 y $\frac{1}{2}$, la ecuación es:

A) $x^2 + \frac{x}{2} + 1 = 0$

B) $x^2 - x + 2 = 0$

C) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

D) $2x^2 + 3x + 1 = 0$

Solución completando el trinomio cuadrado perfecto

En ocasiones, la ecuación de segundo grado no es fácil de factorizar por alguno de los procedimientos mostrados en los ejemplos anteriores, por lo que hay que buscar otra forma de factorizarla, lo cual se logra completando un trinomio cuadrado perfecto que es el producto de un binomio por sí mismo, es decir, de elevar al cuadrado un binomio.

Ejemplo 11. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$6x^2 - x - 15 = 0$$

Primero divides toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 6, quedando:

$$\frac{6x^2}{6} - \frac{x}{6} - \frac{15}{6} = \frac{0}{6}$$

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{2} = 0$$

Enseguida completas el trinomio cuadrado perfecto para el binomio $x^2 - \frac{1}{6}x$, para ello:

Obtienes la mitad del coeficiente del término lineal:

$$-\frac{1}{6} \div 2 = -\frac{1}{12}$$

Elevas este término al cuadrado:

$$\left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

y lo sumas y restas a la ecuación original para obtener:

$$x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144} - \frac{1}{144} - \frac{5}{2} = 0$$

Ahora ya tienes la certeza de que $x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144}$ es un trinomio cuadrado perfecto, el cual puedes factorizar como $\left(x - \frac{1}{12}\right)^2$ y al reducir los términos independientes $-\frac{1}{144} - \frac{5}{2}$ como $-\frac{361}{144}$, se tiene que la ecuación de segundo grado queda expresada como:

$$\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{361}{144} = 0$$

que es una diferencia de cuadrados y que al factorizarla deja a la ecuación expresada como:

$$\left(x - \frac{1}{12} - \frac{19}{12}\right)\left(x - \frac{1}{12} + \frac{19}{12}\right) = 0$$

La ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$x - \frac{1}{12} - \frac{19}{12} = 0$ $x - \frac{5}{3} = 0$ $x = \frac{5}{3}$	$x - \frac{1}{12} + \frac{19}{12} = 0$ $x + \frac{3}{2} = 0$ $x = -\frac{3}{2}$

Por lo que se tiene que $\frac{5}{3}$ y $-\frac{3}{2}$ son las raíces de la ecuación $6x^2 - x - 15 = 0$.

Ejemplo 12. Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$8x^2 + 14x - 15 = 0$$

Primero divides toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 8, quedando:

$$x^2 + \frac{14}{8}x - \frac{15}{8} = 0$$

Enseguida completas el trinomio cuadrado perfecto para el binomio $x^2 + \frac{14}{8}x$, para ello:

Obtienes la mitad del coeficiente del término lineal:

$$\frac{14}{8} \div 2 = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Elevas este término al cuadrado:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$$

y lo sumas y restas a la ecuación original para obtener:

$$x^2 + \frac{14}{8}x + \frac{49}{64} - \frac{49}{64} - \frac{15}{8} = 0$$

Ahora ya tienes la certeza de que $x^2 + \frac{14}{8}x + \frac{49}{64}$ es un trinomio cuadrado perfecto, el cual puedes factorizar como $\left(x + \frac{7}{8}\right)^2$ y al reducir los términos independientes $-\frac{49}{64} - \frac{15}{8}$ como $-\frac{169}{64}$, se tiene que la ecuación de segundo grado queda expresada como:

$$\left(x + \frac{7}{8}\right)^2 - \frac{169}{64} = 0$$

que es una diferencia de cuadrados y que al factorizarla deja a la ecuación expresada como:

$$\left(x + \frac{7}{8} - \frac{13}{8}\right)\left(x + \frac{7}{8} + \frac{13}{8}\right) = 0$$

La ecuación queda expresada como la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones:

$x + \frac{7}{8} - \frac{13}{8} = 0$ $x - \frac{3}{4} = 0$ $x = \frac{3}{4}$	$x + \frac{7}{8} + \frac{13}{8} = 0$ $x + \frac{5}{2} = 0$ $x = -\frac{5}{2}$

Por lo que se tiene que $\frac{3}{4}$ y $-\frac{5}{2}$ son las raíces de la ecuación $8x^2 + 14x - 15 = 0$.

Ejercicio 3

1) Al resolver la ecuación $x^2 - 10x + 9 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto, el paso correcto al completarlo es:
   A) $x^2 - 10x + 9 - 9 = 0$
   B) $x^2 - 10x + 25 - 25 = 0$
   C) $x^2 - 10x + 20 - 20 + 9 = 0$
   D) $x^2 - 10x + 25 - 25 + 9 = 0$
2) Al resolver la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto, el paso correcto al completarlo es:
   A) $x^2 + 3x + 9 + 9 - 10 = 0$
   B) $x^2 + 3x + 9 - 9 - 10 = 0$
   C) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10 = 0$
   D) $x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 10 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones, completando el trinomio cuadrado perfecto:

3) $x^2 + 2x - 15 = 0$
4) $x^2 - 4x + 1 = 0$
5) $x^2 - x - 12 = 0$
6) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

Solución utilizando la fórmula general

Como sabes, existe una fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, sin embargo, debes saber que esta fórmula proviene de completar el trinomio cuadrado perfecto y factorizar la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$, proceso que puedes consultar en algún texto de álgebra o consultar con algún profesor e incluso hacerlo siguiendo los pasos descritos en el ejemplo anterior.

Así, para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde fácilmente puedes observar que: a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente de término lineal y c es el término independiente.

Ejemplo 13. Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 6

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, primero se necesita identificar los parámetros a, b y c de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 2$$

enseguida sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x = \frac{3+1}{2} = 2$	$x = \frac{3-1}{2} = 1$

Por lo que se tiene que 1 y 2 son las raíces de la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, valores que coinciden con los valores obtenidos en el ejemplo 6, resuelto por factorización.

Observa además el valor del discriminante:

$$D = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1$$

El cual fue positivo y que las soluciones de la ecuación fueron números reales distintos.

Ejemplo 14. Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 7:

$$25x^2 - 16 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros a, b y c de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 25$$

$$b = 0$$

$$c = -16$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(25)(-16)}}{2(25)}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 1600}}{50} = \frac{\pm\sqrt{1600}}{50} = \frac{\pm 40}{50}$$

$x = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$	$x = -\frac{40}{50} = -\frac{4}{5}$

Por lo que se tiene que $\frac{4}{5}$ y $-\frac{4}{5}$ son las raíces de la ecuación $25x^2 - 16 = 0$, valores que coinciden con los valores obtenidos en el ejemplo 7, resuelto por factorización.

Observa además el valor del discriminante:

$$D = 0^2 - 4(25)(16) = 1600$$

El cual fue positivo y que las soluciones de la ecuación fueron números reales distintos.

Ejemplo 15. Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 9:

$$10x^2 + 4x = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros a, b y c de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 10$$

$$b = 4$$

$$c = 0$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(10)(0)}}{2(10)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{20} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{20} = \frac{-4 \pm 4}{20}$$

$x = \frac{-4 + 4}{20} = 0$	$x = \frac{-4 - 4}{20} = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}$

Por lo que se tiene que 0 y $-\frac{2}{5}$ son las raíces de la ecuación $10x^2 + 4x = 0$, valores que coinciden con los valores obtenidos en el ejemplo 9, resuelto por factorización.

Observa además el valor del discriminante:

$$D = 4^2 - 4(10)(0) = 16$$

El cual fue positivo y que las soluciones de la ecuación fueron números reales distintos.

Ejemplo 16. Si tienes la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 4x - 7 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros a, b y c de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -7$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$x = \frac{4 + \sqrt{44}}{2} = 2 + \sqrt{11}$	$x = \frac{4 - \sqrt{44}}{2} = 2 - \sqrt{11}$

Como te darás cuenta, nos encontramos con la raíz cuadrada no exacta, la cual no tendrá necesidad de extraer ya que al ser un número irracional no tendrás un resultado correcto si la aproximas por lo que se tiene que $2+\sqrt{11}$ y $2-\sqrt{11}$ son las raíces de la ecuación $x^2-4x-7=0$.

Observa además el valor del discriminante:

$$D=(-4)^2-4(1)(-7)=44$$

El cual fue positivo y que las soluciones de la ecuación fueron números reales distintos a pesar de que su valor no tiene raíz cuadrada exacta.

Ejemplo 17. Si tienes la ecuación cuadrática:

$$x^2-2x+2=0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros a, b y c de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a=1$$

$$b=-2$$

$$c=2$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

como te darás cuenta, nos encontramos con la raíz cuadrada de un número negativo la cual no es un número real sino un número imaginario, teniendo entonces:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm 2i}{2}$$

$x=\frac{2+2i}{2}=1+i$	$x=\frac{2-2i}{2}=1-i$

por lo que se tiene que las raíces de la ecuación no son reales sino complejas, es decir, $1+i$ y $1-i$ son las raíces de la ecuación $x^2-2x+2=0$.

Observa además el valor del discriminante:

$$D=(-2)^2-4(1)(2)=-4$$

El cual fue negativo y que las soluciones de la ecuación fueron números complejos distintos.

Ejercicio 4

1) Al resolver la ecuación general $ax^2+bx+c=0$, si $b^2-4ac>0$ en la fórmula general.
   A) Las raíces son reales y repetidas.
   B) Las raíces son complejas.
   C) Las raíces son reales y diferentes.
2) Al resolver la ecuación general $ax^2+bx+c=0$, si $b^2-4ac=0$ en la fórmula general.
   A) Las raíces son reales y repetidas.
   B) Las raíces son complejas.
   C) Las raíces son reales y diferentes.
3) Al resolver la ecuación general $ax^2+bx+c=0$, si $b^2-4ac<0$ en la fórmula general.
   A) Las raíces son reales y repetidas.
   B) Las raíces son complejas.
   C) Las raíces son reales y diferentes.

Resuelve utilizando la fórmula general, las ecuaciones:

4) $x^2+3x-10=0$
5) $x^2+6x+6=0$
6) $2x^2-7x-15=0$
7) $3x^2+6x-5=0$
8) $x^2+4x+5=0$

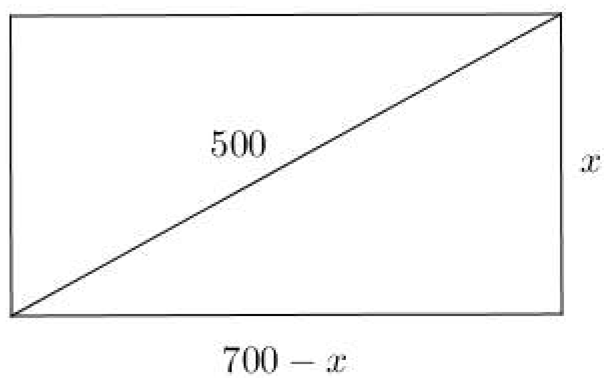
Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas

A partir del siguiente problema, trata de identificar las relaciones que existen entre los datos que se te proporcionan y los resultados que debes obtener.

Ejemplo 18. Se construye una calle que cruza en diagonal sobre un terreno rectangular, de tal manera que éste queda dividido en dos partes iguales en forma de triángulo.

Si la longitud de la calle es de 500 m., ¿cuáles son las longitudes del ancho y largo del terreno, si ambas suman 700m?

Iniciamos la solución usando una figura que simula al problema y donde podrás observar que la calle divide al terreno en dos triángulos rectángulos congruentes donde x simboliza el ancho y $700-x$ al largo.



Aplicando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$x^2 + (700 - x)^2 = 500^2$$

$$x^2 + 490000 - 1400x + x^2 = 250000$$

$$x^2 + 490000 - 1400x + x^2 - 250000 = 0$$

$$2x^2 - 1400x + 240000 = 0$$

Simplificando:

$$x^2 - 700x + 120000 = 0$$

Este modelo corresponde a una ecuación de segundo grado, el cual se puede resolver mediante factorización, para lo cual buscamos dos números que multiplicados den 120000 y sumados -700, quedando:

$$(x - 300)(x - 400) = 0$$

Relación que se cumple con:

$$x - 300 = 0 \Rightarrow x = 300$$

Y con:

$$x - 400 = 0 \Rightarrow x = 400$$

Por lo tanto, las medidas de los lados del terreno son: 300 y 400 metros.

Ejemplo 19. Raúl Márquez quiere instalar un telón rectangular en un teatro. Si sabe que necesita 252 m^2 de tela y que la altura del escenario es 10 metros menos que el doble de su ancho ¿Cuáles son las medidas de la tela que necesita?

Incógnitas y datos	Ecuación
Ancho: x Altura: $2x - 10$	$(2x - 10)x = 252$ $2x^2 - 10x = 252$ $2x^2 - 10x - 252 = 0$

Resuelve la ecuación para lo cual te recomendamos que dividas a la ecuación entre 2, que es el coeficiente del término cuadrático x^2. Después de hacerlo la ecuación queda:

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{10x}{2} - \frac{252}{2} = 0$$

$$x^2 - 5x - 126 = 0$$

Resuélvela y da solución al problema.

Ejemplo 20. El cuadrado LMNO tiene lados de longitud $2x + 1$ y los dos cuadrados más pequeños tienen lados de medida 3 y 6 unidades respectivamente. ¿Cuál es el valor de x si sabes que el área de la región sombreada es 76 unidades cuadradas?

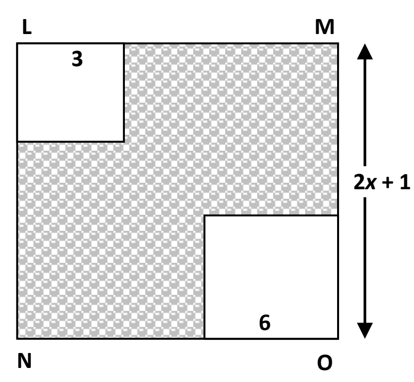


Figura 1. Cuadrado LMNO

Considera que el área total del cuadrado es:

$$(2x + 1)^2 = (2x + 1)(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1$$

Ahora considera que el área del cuadrado pequeño es $3^2 = 9$, mientras que el área del cuadrado mediano es $6^2 = 36$. Por último, considera que, según los datos, si al área total se le restan las áreas de los cuadrados de lados 3 y 6 se obtiene 76 u^2, con lo cual podremos escribir la siguiente ecuación:

$$4x^2 + 4x + 1 - 9 - 36 = 76$$

Que es una ecuación de segundo grado. Al igualarla a cero se obtiene:

$$4x^2 + 4x - 120 = 0$$

Al resolver esta ecuación obtendrás como posibles soluciones:

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 5$$

Como el valor negativo conllevaría a que el cuadrado tuviera lados negativos, podemos concluir que la solución es $x = 5$.

Ejercicio 5. Resuelve los siguientes problemas cuyo modelo es una ecuación cuadrática.

1) ¿Cuáles son los dos números enteros cuya suma es 23 y la suma de sus cuadrados es 277?
2) Si el área de un terrero de forma rectangular es de 105 m^2 ¿Cuál es su perímetro si su largo excede 1 m al doble de su ancho?
3) Un auditorio tiene 600 asientos. El número de asientos de cada fila es menor en 10 unidades que el doble del número de filas ¿Cuál es el número de asientos en cada fila?
4) ¿Cuáles son los factores negativos de 189 tales que su diferencia es 12?
5) El perímetro de un terreno rectangular es de 34 m y su área de 60 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones?

Resuelve lo que se te pide

1. Los enteros A, B y C son enteros consecutivos ordenados de menor a mayor, A es menor y C es el mayor. ¿Cuáles de los siguientes valores podría tomar A si sabes que $A^2 = C$?

    I. -1

    II. 0

    III. 2

A) Sólo I　　B) Sólo III　　C) Sólo I y II

D) Sólo I y III　　E) I, II y III

2. El perímetro de un rectángulo es $6p$. Si uno de los lados es de longitud $\frac{p}{2}$ ¿cuál es el área del rectángulo?

A) $\frac{\boldsymbol{p}^2}{4}$　　B) $\frac{5\boldsymbol{p}^2}{4}$　　C) $\frac{5\boldsymbol{p}^2}{2}$

D) $\frac{11\boldsymbol{p}^2}{4}$　　E) $\frac{11\boldsymbol{p}^2}{2}$

3. La suma de dos números es 11 y su producto 30. Elige el modelo que representa al problema.

A) $x(30-x)=11$　　B) $x(11+x)=30$　　C) $x(30+x)=11$

D) $x(11-x)=30$　　E) $(x-30)(11-x)=30$

4. Si una de las raíces de la ecuación cuadrática $2x^2+bx-18=0$ es – 6, ¿cuál es el valor numérico de b?

A) b = 3　　B) b = 6　　C) b = -3　　D) b = 9

5. La suma de dos números es 10 y la suma de sus cuadrados es 58. Halla la ecuación cuadrática que representa esta situación.

A) $x^2 + (10-x)^2 = 58$

B) $x^2 + (10+x)^2 = 58$

C) $x^2 + 10 + x^2 = 58$

D) $x^2 + 10 - x^2 = 58$

6. Calcula las raíces de la siguiente ecuación cuadrática $\frac{3}{8}x^2+2=5$

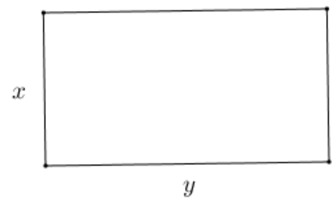
A) $\frac{9}{8}, \frac{-9}{8}$　　B) $\sqrt{8}, -\sqrt{8}$　　C) $\frac{\mathbf{-56}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{56}}{\mathbf{3}}$　　D) $\sqrt{14}, -\sqrt{14}$

7. Al factorizar la ecuación cuadrática $x^2-13x-48=0$, se obtiene:

A) $(x+3)(x+16)=0$　　B) $(x-3)(x-16)=0$

C) $(x+3)(x-16)=0$ D) $(x-3)(x+16)=0$

8. Para vallar una finca rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?



$A)$ $x = 10, y = 75$ B) $x = 15, y = 50$ C) $x = 30, y = 25$

D) $x = 25, y = 30$

9. ¿Cuáles son las raíces de la ecuación $4x^2 - 25 = 0$?

A) $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ B) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ C) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{2}$ D) $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{5}{4}$ E) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como raíces $5 \quad y \quad -\frac{1}{3}$?

A) $3x^2 - 14x - 5 = 0$ B) $3x^2 + 14x + 5 = 0$ C) $3x^2 - 14x + 5 = 0$

D) $3x^2 + 14x - 5 = 0$ E) $3x^2 - 15x - 5 = 0$