

Actions de groupe

Une action d'un groupe $(G, \cdot)$ sur un ensemble E est une application $\begin{cases} G \times E & \rightarrow E \\ (g, x) & \mapsto g \bullet x \end{cases}$
 telle que $\begin{cases} \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in E, & (g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x), \\ \forall x \in E, & e \bullet x = x. \end{cases}$

C'est donc une loi de composition externe d'un groupe G sur un ensemble quelconque E sans loi a priori. On définit alors l'**orbite** de $x \in E$ comme la partie de E

$$\omega(x) := \{y \in E \mid \exists g \in G, y = g \bullet x\},$$

le **stabilisateur** de x comme la partie de G

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g \bullet x = x\},$$

l'**ensemble des points fixes** de $g \in G$ est la partie de E

$$\text{Fix}(g) = \{x \in E \mid g \bullet x = x\}.$$

Un système de représentants est alors une partie R de E telle que, pour tout $x \in E$, il existe un unique élément à la fois dans $\omega(x)$ et R .

PARTIE A - EXEMPLES

Dire si les applications suivantes sont des actions de groupes.

- ① L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}^*$ définie par $\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^* & \rightarrow \mathbb{Q}^* \\ (n, r) & \mapsto r^n. \end{cases}$
- ② L'action de G sur G définie par $\begin{cases} G \times G & \rightarrow G \\ (g, x) & \mapsto gxg^{-1}. \end{cases}$
- ③ L'action de G sur $\mathcal{P}_n(G)$, l'ensemble des parties de G de cardinal n , définie par

$$\begin{cases} G \times \mathcal{P}_n(G) & \rightarrow \mathcal{P}_n(G) \\ (g, A) & \mapsto gA = \{ga \mid a \in A\} \end{cases}$$

PARTIE B - PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Considérons une action d'un groupe G sur un ensemble E notée $\begin{cases} G \times E & \rightarrow E \\ (g, x) & \mapsto g \bullet x. \end{cases}$

- ④ Définissons une relation binaire sur E par $x \sim y$ si, et seulement si $y \in \omega(x)$.
 - ① Vérifier que $\sim$ est une relation d'équivalence.
 - ② Préciser la classe d'équivalence pour $\sim$ de $x \in E$.
- ⑤ Montrer que, pour tout $x \in E$, $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G .
- ⑥ Soit $x \in E$. Pour tout $g \in G$, notons $\bar{g} = g \text{Stab}(x)$ et considérons $C = \{\bar{g} \mid g \in G\}$.
 - ① Montrer que si $h \in \bar{g}$, alors $h \bullet x = g \bullet x$.
 - ② Montrer que l'application $\begin{cases} C & \rightarrow \omega(x) \\ \bar{g} & \mapsto g \bullet x \end{cases}$ est bijective.
 - ③ En déduire, lorsque G est fini, que $|G| = |\text{Stab}(x)| \cdot |\omega(x)|$.

PARTIE C - ÉQUATION AUX CLASSES, FORMULE DE BURNSIDE

Considérons une action d'un groupe fini G sur un ensemble fini E notée

$$\begin{cases} G \times E & \rightarrow E \\ (g, x) & \mapsto g \bullet x \end{cases}$$

Considérons R un système de représentants.

- ⑦ Montrer que

$$|E| = \sum_{x \in R} \frac{|G|}{|\text{Stab}(x)|}.$$

- ⑧ Montrer que le nombre d'orbites est

$$\sum_{g \in G} \frac{|\text{Fix}(g)|}{|G|}$$

On pourra étudier $\{(g, x) \in G \times E \mid g \bullet x = x\}$.

PARTIE D - SOUS-GROUPE DISTINGUÉS D'UN GROUPE

Un sous-groupe H d'un groupe G est **distingué** dans G s'il est stable par conjugaison, c'est-à-dire si

$$\forall h \in H, \forall x \in G, \quad xhx^{-1} \in H.$$

Autrement dit, tout conjugué xhx^{-1} d'un élément h dans H est toujours dans H . On note alors $H \trianglelefteq G$.

- ⑨ Soit $x \in E$. Montrons que, pour tout $g \in G$, $\text{Stab}(g \bullet x) = g \text{Stab}(x) g^{-1}$.
En déduire que $\text{Stab}(x)$ est distingué dans G si et seulement si $\forall g \in G, \text{Stab}(g \bullet x) = \text{Stab}(x)$.

Considérons maintenant l'action par conjugaison de G sur lui-même $g \bullet x = gxg^{-1}$.

- ⑩ Montrer que l'application

$$\begin{aligned} G / \text{Stab}(x) &\longrightarrow \omega(x) \\ g \text{Stab}(x) &\longmapsto g \bullet x \end{aligned}$$

est une bijection.

- ⑪ Dans le cas de cette action, l'équation aux classes devient

$$|G| = |Z(G)| + \sum \frac{|G|}{|C_G(x)|},$$

où $Z(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G, xg = gx\}$ est le centre du groupe G .

- ⑫ Si $\text{Stab}(x)$ est un sous-groupe distingué de G , montrer que l'orbite $\omega(x)$ hérite d'une structure de groupe telle que

$$(g \bullet x) \cdot (h \bullet x) = (gh) \bullet x$$