

# Dénombrément

Le chapitre concerne les ensembles finis et le dénombrement de leurs éléments. Le nombre d'éléments, ou cardinal, d'un ensemble doit être défini rigoureusement. Cela servira à établir des bijections entre ensembles.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles.

## 1 ENSEMBLES FINIS

### 1.1 RAPPELS

#### Définition 1 : Cardinal

Un ensemble  $E$  est **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une bijection  $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow E$ .

Sinon  $E$  est dit **infini**.

Si  $E$  est fini, non vide, l'entier  $n$  défini ci-dessus, est unique et appelé **cardinal de  $E$**  ou **nombre d'éléments de  $E$** . On le note  $|E|$ ,  $\text{Card}(E)$  ou  $\#E$ .

Par convention,  $\text{Card}(\emptyset) = 0$

#### Exemple 1

Par exemple, on a la bijection  $\varphi : \llbracket 1, n \rrbracket \longrightarrow \mathbb{U}_n$ . Alors,  $\text{Card}(\mathbb{U}_n) = n$ .

$$k \longmapsto \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

#### On commence à compter

Cette définition correspond à une idée très intuitive. La bijection correspond à une façon de compter les éléments. En faisant correspondre à chaque élément de  $E$ , un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , on énumère les éléments de  $E$ .

#### Unicité du cardinal

Considérons deux entiers  $n$  et  $n'$  tels qu'il existe des bijections  $\varphi : E \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\varphi' : E \rightarrow \llbracket 1, n' \rrbracket$ . Alors, l'application  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  réalise une bijection entre  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\llbracket 1, n' \rrbracket$  d'où  $n = n'$  et on obtient l'unicité.

#### Proposition 1

Toute partie de l'ensemble  $\llbracket 1, n \rrbracket$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  est finie.

*Preuve.* Soit  $A$  une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Si  $A$  est l'ensemble vide, alors  $A$  est finie.

Sinon, on ordonne les éléments de  $A$  en posant  $A_1 = A$  et  $x_1 = \min A_1$  puis, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$A_{k+1} = \begin{cases} A_k & \text{si } A_k = \emptyset \\ A_k \setminus \{x_k\} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_{k+1} = \begin{cases} x_k & \text{si } A_{k+1} = \emptyset \\ \min A_{k+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble  $\{x_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$  est non vide majoré donc admet un plus grand élément. Comme la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  est, par construction, strictement croissante ou stationnaire à partir d'un certain rang, elle stationne à cette plus grande valeur. Considérons  $p = \min \{k \in \mathbb{N}^* \mid x_k = x_{k+1}\}$ . L'application

$$\begin{cases} \llbracket 1, p \rrbracket & \rightarrow A \\ k & \mapsto x_k \end{cases}$$

est une bijection par construction de la suite finie et strictement croissante  $(x_k)_{k \in [1,p]}$ .  $\square$

### Corollaire 1.1

Soient  $E$  un ensemble fini et  $A$  une partie de  $E$ . Alors  $A$  est finie et  $|A| \leq |E|$ , avec égalité si et seulement si  $A = E$ .

*Preuve.* Le résultat est évident pour l'ensemble vide.

Soit  $F$  une partie non vide d'un ensemble fini  $E$ . Par définition, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et une bijection  $\varphi : E \rightarrow [1, n]$ .

$\varphi(F)$  est alors une partie de  $[1, n]$ , donc est finie. Il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  et une bijection  $\psi : \varphi(F) \rightarrow [1, p]$ .

Par construction,  $\psi \circ \varphi : F \rightarrow [1, p]$  est une bijection et donc  $F$  est finie.  $\square$

## 1.2 CARDINAUX

### Proposition 2 : Applications et cardinal

Soit  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles de cardinal  $p$  et  $q$ , respectivement.

- ① Il existe une **injection** de  $E$  dans  $F$   $\iff p \leq q$ .
- ② Il existe une **surjection** de  $E$  dans  $F$   $\iff p \geq q$ .
- ③ Il existe une **bijection** de  $E$  dans  $F$   $\iff p = q$ .

*Preuve.* On fait la preuve pour l'injectivité.

( $\Rightarrow$ ) On va le montrer par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$\mathcal{P}(p)$  : "pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , s'il existe une injection de  $[1, p]$  dans  $[1, q]$ , alors  $p \leq q$ ".

$\triangleright \mathcal{P}(1)$  est vrai car pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $q \geq 1$ .

$\triangleright$  Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $\mathcal{P}(p)$  vrai et montrons  $\mathcal{P}(p+1)$ .

Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  et  $\varphi : [1, p+1] \rightarrow [1, q]$  une injection.

- Si  $\varphi(p+1) = q$  (ou si  $q$  n'admet pas d'antécédent), alors la restriction de  $\varphi$  entre  $[1, p]$  et  $[1, q-1]$  est une injection et par hypothèse de récurrence,  $p \leq q-1$  et donc  $p+1 \leq q$ .
- Si  $\varphi(p+1) = a < q$  et définissons  $\psi : [1, p] \rightarrow [1, q-1]$  par  $\psi(b) = a$  et

$$\forall n \in [1, p] \setminus \{b\}, \quad \psi(n) = \varphi(n)$$

où  $b$  désigne l'unique antécédent de  $q$  par  $\varphi$ . On vérifie aisément que  $\psi$  est injective et on conclut dans ce cas également avec l'hypothèse de récurrence.

( $\Leftarrow$ ) Si  $p \leq q$ , alors l'application

$$\begin{array}{ccc} [1, p] & \rightarrow & [1, q] \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

est injective. On compose par les bijections qui définissent le cardinal pour conclure.

$\square$

### Corollaire 2.1 : Ensembles de même cardinal

Si  $E$  et  $F$  sont **finis de même cardinal** alors

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.}$$

*Preuve.* Il suffit de montrer l'équivalence entre les deux dernières propriétés.

- Si  $f$  est **injective**, alors  $|f(E)| = |E| = |F|$  or  $f(E) \subset F$  donc  $f(E) = F$  et  $f$  est surjective.
- Si  $f$  est **surjective**, alors on définit une application  $g : F \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et donc  $g$  est injective. D'après le premier point,  $g$  est aussi surjective donc bijective. Par conséquent,  $f$  est bijective en tant que bijection réciproque de  $g$ .

□

**⚠ ATTENTION** L'hypothèse de **cardinal fini** n'est pas là pour décorer!  
 Par exemple, l'application dérivation  $D : P \mapsto P'$  est surjective de  $\mathbb{R}[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$  mais pas injective.

### 1.3 QUELQUES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

C'est plus simple de compter quand on a ordonné l'ensemble.

#### Multiplier les possibilités

##### Principe des bergers

Le principe des bergers est sans doute le principe que nous utiliserons le plus dans ce chapitre.

Un berger qui possède  $n$  moutons possède aussi  $4n$  pattes de moutons!

Comment l'utiliserons nous ? Quand un problème de dénombrement a été décomposé en deux sous-problèmes 1 et 2 avec  $n$  choix possibles pour le problème 1 et  $p$  choix possibles **chacun de ces choix** dans le problème 2, le problème complet offre un total de  $np$  choix.

##### Intuition

"On a **soit** ceci, **soit** cela"  $\longrightarrow$  **Addition.**  
 "On fait ceci, **puis** cela"  $\longrightarrow$  **Multipliation.**

##### Exemple 2

Nous avons utilisé le principe des bergers sans le dire quand nous avons calculé  $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Un tableau de taille  $n \times p$  contient  $n$  lignes et chaque ligne contient  $p$  cases, donc un tel tableau contient  $np$  cases !

##### Exemple 3

Comment multiplie-t-on deux nombres ? Trouver une méthode visuelle pour faire  $12 \times 17$ .

##### Exemple 4

Dans un restaurant, plats principaux proposés sont *une pizza*, un *tandoori*  $\pi$ quant, l'*X*quis, tandis que l'on peut choisir comme dessert une spirale à la cannelle ou une tarte carrée. Combien y a-t-il de possibilités de commander un plat principal et un dessert?

Pour le plat principal il y a 3 possibilités, et pour le dessert il y en a 2. Il y a donc en tout 6 possibilités.

##### Exemple 5

À partir d'un alphabet de  $p$  lettres, combien de mots de  $n$  lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques consécutives ?

Pour la première lettre, on peut choisir n'importe quelle lettre de l'alphabet ( $p$  possibilités), mais pour chacune des suivantes, on n'a plus que  $p - 1$  choix possibles si on veut éviter que deux lettres consécutives soient identiques. On obtient donc un total de  $p(p - 1)^{n-1}$  mots.

##### Exemple 6

Le nombre naturel  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_r^{a_r}$ , où les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts, possède exactement  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_r + 1)$  diviseurs positifs distincts.

**Comment compter ?****Exemple 7**

Combien l'ensemble  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$  a-t-il de parties?

**Énumération lexicographique en fonction du cardinal**

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$

Donc 16 parties

**Énumération lexicographique après représentation par des mots** On peut associer bijectivement à toute partie  $A$  de  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$  un et un seul mot de 4 lettres sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ .

La première lettre de ce mot est un "1" si  $1 \in A$  et un "0" sinon, la deuxième lettre est un "1" si  $2 \in A$  et un "0" sinon, etc.

Par exemple,  $\emptyset$  est représenté par 0000,  $\{2\}$  par 0100,  $\{2, 3\}$  par 0110 et  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$  par 1111.

Ainsi représentées, les parties de  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$  sont faciles à énumérer !

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0000, | 1000, | 0100, | 1100, | 0010, | 1010, | 0110, | 1110  |
| 0001, | 1001, | 0101, | 1101, | 0011, | 1011, | 0111, | 1111. |

**Exemple 8**

Combien "METZ" a-t-il d'anagrammes ?

METZ, TEMZ, ZMTE, EZTM, MTZE, ETMZ, TZEM, ZTEM, MEZT, TEZM, ZMET, EZMT, MTEZ, ETMZ, TMEZ, ZEMT, MZET, EATM, MTZE, ETMZ, TZEM, ZTEM, EMTZ, TMZE

Donc  $24 = 4!$

**Exemple 9**

Combien "PREPA" a-t-il d'anagrammes ?

**Invariance****Exemple 10**

Soit  $n$  un nombre naturel. Les nombres  $1, 2, \dots, 4n$  sont écrits sur un tableau. On en choisit alors de manière répétée deux nombres arbitraires  $a$  et  $b$ , on les efface et on écrit à leur place  $|a - b|$  sur le tableau. Montrer que le dernier nombre restant est toujours pair.

Le principe de l'invariance est de chercher une grandeur qui ne change pas lors de l'opération.

La somme des nombres sur le tableau diminue de  $-2b$ , donc d'un nombre pair. Par conséquent, la somme modulo 2 est un invariant. Au début, elle vaut  $1 + 2 + \dots + 4n = 2n(4n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$ . A la fin, elle est tout simplement le dernier nombre restant, donc celui-ci est pair.

**Exemple 11**

Soit un échiquier ordinaire (on rappelle que c'est un carré composé de  $8 \times 8 = 64$  cases, alternativement noires et blanches).

On se donne le droit de changer la couleur de toutes les cases d'une colonne, d'une ligne ou d'un carré  $2 \times 2$ . Peut-on arriver à un échiquier avec une seule case noire?

Non. La différence entre le nombre de cases noires et le nombre de cases blanches est toujours un multiple de 2, car elle commence à 0.

## Principe des tiroirs

**Proposition 3 : Principe des tiroirs**

Quand on doit ranger  $n + 1$  chaussettes dans  $n$  tiroirs, deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

*Preuve.* Ranger  $n + 1$  chaussettes dans  $n$  tiroirs, c'est choisir une application d'un ensemble de cardinal  $n + 1$  dans un ensemble de cardinal  $n$ . Or comme  $n + 1 > n$ , une telle application n'est jamais injective. Cela montre la proposition.

□

**Exemple 12**

Prenons 51 nombres différents entre 1 et 100. Montrer qu'il y en a au moins deux consécutifs.

On écrit les entiers de 1 à 100 dans les 50 "tiroirs" suivant

$$(1, 2), (3, 4), \dots, (99, 100).$$

Puisqu'il y a 51 nombres, d'après le principe des tiroirs, il y a au moins une de ces paires qui contient 2 nombres et donc il existe bien deux nombres consécutifs.

Doit-il y avoir 3 nombres consécutifs? Non. On peut donner le contre-exemple 1, 3, 5, ..., 97, 99 et 100.

**Exemple 13**

Soit un groupe de  $n$  personnes. Montrer qu'il existe au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis.

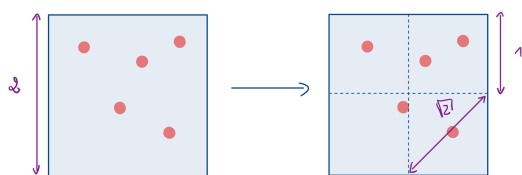
On numérote le nombre d'amis possible  $0, 1, \dots, (n - 1)$ . Cela donne  $n$  tiroirs possibles.

**Cas 1.** Une personne est ami avec tout le monde, donc il a  $n - 1$  amis.

Alors tout le monde est ami avec cette personne, donc aucune personne n'a 0 amis. Donc les nombres d'amis possibles sont  $1, \dots, (n - 1)$ . Donc  $n - 1$  tiroirs. D'après le principe des tiroirs 2 personnes ont le même nombre d'amis.

**Cas 2.** Il n'y a personne qui est ami avec tout le monde. Donc les nombres d'amis possibles sont  $0, 1, \dots, (n - 2)$  soit  $n - 1$  tiroirs.

D'après le principe des tiroirs, il y a donc 2 personnes qui ont le même nombre d'amis.

**Exemple 14**

Étant donnés 5 points dans un carré d'arête 2. Quelle est la distance minimale entre 2 points.

Coupons le carré en quatre comme ci-contre. Considérons que chacun des 4 carrés est alors un tiroir. On doit ranger 5 points (ou chaussettes) dans 4 tiroirs, donc il y a 2 points dans le même carré, d'après le principe des tiroirs. Au pire, ces points sont alors distants de  $\sqrt{2}$ , qui est la longueur de la diagonale de chaque carré.

La distance minimale est alors  $\sqrt{2}$ .

Arriverez vous à généraliser à  $n^2 + 1$  points dans un carré de côté  $n$  ?

**Exemple 15**

Considérons 5 points du plan à coordonnées entières et montrons que parmi tous les segments ayant ces points pour extrémités, l'un au moins admet pour milieu un point à coordonnées entières.

Introduisons les ensembles

- $A$  des points à abscisse paire et ordonnée paire,
- $B$  des points à abscisse paire et ordonnée impaire,
- $C$  des points à abscisse impaire et ordonnée paire,
- $D$  des points à abscisse impaire et ordonnée impaire.

Au moins l'un de ces quatre ensembles contient deux points et le milieu du segment des deux points concernés est à coordonnées entières.

## 2 OPÉRATIONS SUR LES ENSEMBLES FINIS

### 2.1 REUNION, DIFFÉRENCE

Supposons  $E, F, E_1, \dots, E_n$  des ensembles finis.

#### Proposition 4

- ① **Réunion de deux ensembles**  $E \cup F$  est fini et  $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$ .
- ② **Réunion de  $n$  ensembles** Plus généralement, l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^n E_i$  est fini et  $\left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |E_i|$ , avec égalité si  $E_1, \dots, E_n$  sont deux à deux disjoints.
- ③ **Différence de deux ensembles**  $E \setminus F$  est fini et  $|E \setminus F| = |E| - |E \cap F|$ .
- ④ **Complémentaire** Supposons  $F \subset E$ . Alors,  $|F^c| = |E \setminus F| = |E| - |F|$  donc  $|F| \leq |E|$  avec égalité si, et seulement si,  $F = E$ .

#### Principe des bergers - Le retour

On remarque que l'on retrouve le principe des bergers dans le cas où la réunion est disjointe.

Toute réunion disjointe de  $n$  ensembles de même cardinal  $p$  est un ensemble de cardinal  $np$ .

*Preuve.*

① Procédons en deux temps.

- Si  $E$  et  $F$  sont disjoints, considérons des bijections  $\varphi : E \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\psi : F \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$ . On conclut en considérant la bijection

$$\begin{cases} E \cup F & \rightarrow & \llbracket 1, p+q \rrbracket \\ x & \rightarrow & \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in E \\ p + \psi(x) & \text{si } x \in F. \end{cases} \end{cases}$$

- Les ensembles  $E \cap F, E \setminus (E \cap F)$  et  $F \setminus (E \cap F)$  sont deux à deux disjoints et de réunion  $E \cup F$ . D'après le point précédent,

$$|E \cup F| = |E \cap F| + |E \setminus (E \cap F)| + |F \setminus (E \cap F)|.$$

En remarquant que  $E \cap F$  et  $E \setminus (E \cap F)$  sont disjoints de réunion  $E$  (et on procède de même pour  $F$ ),

$$|E| = |E \cap F| + |E \setminus (E \cap F)|,$$

$$|F| = |E \cap F| + |F \setminus (E \cap F)|.$$

On obtient ainsi la formule cherchée en combinant les trois égalités.

② A montrer par récurrence.

③ Conséquence de ①.

④ Application directe de ③.

□

#### Exemple 16

Dénombrons les entiers à, au plus, quatre chiffres qui ne sont divisibles ni par 3 ni par 5. Notons, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $E_p$  l'ensemble des entiers à, au plus, quatre chiffres qui sont divisibles par  $p$ . Avec cette notation, le nombre recherché est

$$10^4 - |E_3 \cup E_5| = 10^4 - |E_3| - |E_5| + |E_{15}|,$$

car  $E_3 \cap E_5 = E_{15}$ . Or,

$$\begin{aligned} |E_p| &= |\{n \in \llbracket 0, 10^4 \rrbracket, \exists k \in \mathbb{N}, n = kp\}| \\ &= \left| \left\{ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq \frac{10^4}{p} \right\} \right| \\ &= \left| \llbracket 0, \left\lfloor \frac{10^4}{p} \right\rfloor \right| = \left\lfloor \frac{10^4}{p} \right\rfloor + 1. \end{aligned}$$

En reportant, on obtient 5332 entiers à, au plus, quatre chiffres divisibles ni par 3 ni par 5.

**Méthodo** Pour prouver l'égalité de deux ensembles finis, il suffit désormais d'établir une inclusion et de prouver l'égalité des cardinaux.

## 2.2 PRODUIT CARTÉSIEN

### Proposition 5

L'ensemble  $E_1 \times \dots \times E_n$  est fini et

$$|E_1 \times \dots \times E_n| = \prod_{i=1}^n |E_i|.$$

*Preuve.* Il suffit de démontrer le résultat pour deux ensembles  $E$  et  $F$  de cardinal  $p$  et  $q$ ; considérons deux bijections  $\varphi : E \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\psi : F \rightarrow \llbracket 1, q \rrbracket$  puis définissons

$$\Phi : \begin{cases} E \times F & \rightarrow & \llbracket 1, pq \rrbracket \\ (k, l) & \mapsto & (\varphi(k) - 1)q + \psi(l). \end{cases}$$

On conclut en montrant que  $\Phi$  est une bijection : pour tout entier  $n \in \llbracket 1, pq \rrbracket$ , il existe un unique couple d'entiers  $(a, b) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$  tel que  $n = aq + b$  (division euclidienne avec reste non nul); alors  $n$  admet comme unique antécédent par  $\Phi$  le couple  $(\varphi^{-1}(a+1), \psi^{-1}(b))$ .  $\square$

### Exemple 17

De combien de façons peut-on tirer 7 cartes successivement avec remise dans un jeu de 32 cartes ?

Sans s'en rendre compte, on réalise une famille de 7 cartes. C'est un produit cartésien ! Notons  $E_i$  le nombre de possibilité de tirer 1 carte en  $i$ ème place. On a

$$|E_1 \times \dots \times E_7| = \prod_{i=1}^7 |E_i| = |E_1|^7 = 32^7.$$

### Exemple 18

Combien y a-t-il de mots de 10 lettres contenant le mot FABERT ? Il y a par exemple, FABERTMETZ et MPSI-FABERT.

Quand le mot FABERT apparaît dans un mot de 10 lettres, il n'y apparaît qu'une fois. Pour construire un mot quelconque de 10 lettres contenant le sous-mot FABERT, on peut donc

- D'abord choisir la position du mot FABERT. Il y a donc 5 possibilités car le 'F' ne peut occuper que les positions 1, 2, 3, 4 et 5,
- Choisir arbitrairement les autres lettres. Il faut donc choisir une famille à 4 éléments de l'alphabet, soit  $26^4$  possibilités.

Le total s'élève donc à  $5 \times 26^4 = 70304$  mots.

**Définition 2 : Arrangements**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $|E| = n$ .

On appelle  **$k$ -arrangement** de  $E$  toute sous-famille de cardinal  $k$  de  $E$  d'éléments distincts.

**Proposition 6 : Nombre d'arrangements**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $|E| = n$ .

- Si  $k \leq n$ , il existe  $\frac{n!}{(n-k)!}$   $k$ -arrangements de  $E$
- Si  $k > n$ , il n'existe pas de  $k$ -arrangement de  $E$ .
- Si  $k = n$ , il existe  $n!$   $n$ -arrangements, donc  $n!$  façons d'ordonner les  $n$  éléments de  $E$ .

**Exemple 19**

De combien de façons peut-on tirer 7 cartes successivement sans remise dans un jeu de 32 cartes ?

On compte le nombre de possibilités à chaque tirage, soit

$$32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 = \frac{32!}{25!} = \frac{32!}{(32-7)!}.$$

**Exemple 20**

De combien de façons peut-on asseoir  $n$  personnes sur un banc rectiligne? autour d'une table ronde?

**Banc rectiligne** On peut considérer que les personnes à asseoir sont numérotées de 1 à  $n$ . Les asseoir sur un banc rectiligne revient à les énumérer toutes dans un ordre quelconque. Cela revient à se donner un  $n$  arrangement quelconque de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On obtient un total de  $n!$  configurations possibles.

**Table ronde** La différence entre un banc rectiligne et une table ronde, c'est qu'il n'y a pas de première place autour d'une table ronde. Par exemple, on ne change pas la configuration des places assises quand on demande à chaque convive de se déplacer d'une place sur sa droite. Pour asseoir  $n$  personnes autour d'une table ronde,

- on peut ainsi commencer par asseoir arbitrairement la personne numérotée  $n$ ,
- puis lui donner des voisins de proche en proche par la droite en se donnant un  $(n-1)$ -arrangement quelconque de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , donc  $(n-1)!$  possibilités,

On obtient un total de  $(n-1)!$  configurations possibles.

**Rappel sur le nombre d'applications entre deux ensembles finis**

Pour construire une application quelconque  $f$  de  $E = \{e_1, \dots, e_p\}$  dans  $F$ , on peut choisir une valeur pour  $f(e_1)$  ( $|F|$  possibilités), puis une pour  $f(e_2)$  ( $|F|$  possibilités)... et enfin une valeur pour  $f(e_p)$  ( $|F|$  possibilités).

On obtient au total la formule  $|F^E| = |F|^{|E|}$ .

**Arrangements et nombre d'injections**

Le nombre d'injections entre deux ensembles finis de cardinal  $k$  et  $n$  respectivement est exactement le nombre d'arrangements.

En effet,

- Si  $k \leq n$ , il y a  $n$  possibilités pour l'image du premier élément,  $n-1$  possibilités pour l'image du deuxième élément,... Donc  $\frac{n!}{(n-k)!}$ .
- Si  $k > n$ , il n'existe pas d'injection (principe des tiroirs).

- Si  $k = n$ , c'est  $n!$ .

Le dernier cas donne une nouvelle preuve de la valeur du coefficient binomial.

Donnons une partition de l'ensemble  $S_n$  des  $n!$  bijections  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  selon la valeur de  $A = \sigma(\llbracket 1, k \rrbracket)$ , pour  $k \leq n$ . C'est exactement le nombre de façon de choisir  $k$  éléments, parmi  $n$ .

Mais essayons de le calculer autrement. Une fois  $A$  fixée, une bijection est déterminée par une bijection de  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans  $A$  (il y en a  $k!$ ) et une bijection de  $\llbracket k+1, n \rrbracket$  dans  $\bar{A}$ , et il y en a  $(n-k)!$ .

Ainsi,  $n! = \binom{n}{k} k! (n-k)!$ , et on retrouve la formule du coefficient binomial !

## 2.3 COMBINAISONS

### Définition 3 : Combinaison

On appelle  $k$ -combinaison de  $E$  toute partie de  $E$  de cardinal  $k \in \mathbb{N}$ .

Par définition, il existe  $\binom{n}{k}$   $k$ -combinaisons de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Cela revient à choisir une famille strictement croissante d'indices dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , donc il existe  $\binom{n}{k}$  familles d'entiers  $(i_1, \dots, i_k)$  pour lesquelles,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

### Exemple 21

Combien y a-t-il de possibilités de poser côte à côte 5 livres bleus et 7 livres rouges sur une étagère si deux livres bleus ne peuvent jamais se trouver côte à côte?

Tout d'abord nous plaçons tous les livres bleus. Ensuite dans les quatre espaces ainsi constitués il doit certainement se trouver un livre rouge. Les trois livres rouges restants peuvent alors être placés indifféremment dans les espaces, au début ou à la fin. Cela donne donc  $\binom{8}{3} = 56$  possibilités.

### Exemple 22

$2n$  joueurs de tennis participent à un tournoi. Au premier tour, tous les joueurs jouent exactement une fois et tous les matchs sont des simples. Combien y a-t-il de possibilités de répartir les joueurs pour les  $n$  matchs du premier tour?

Il y a  $\binom{2n}{2}$  façons de choisir le premier couple,  $\binom{2n-2}{2}$  pour le deuxième et  $\binom{2n-2(k-1)}{2}$  pour le  $k$  ième. Nous avons par contre numéroté les  $n$  couples, nous devons donc diviser par  $n!$ . Par conséquent,

$$A_n = \frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

### Exemple 23

On dispose de  $n$  urnes numérotées de 1 à  $n$  dont chacune peut accueillir autant de boules qu'on le souhaite. De combien de manières peut-on y ranger  $p$  boules indiscernables?

Les rangements étudiés peuvent être vus sans ambiguïté comme des mots. Avec 4 urnes numérotées de 1 à 4, on traduira le rangement de 2, 3, 0 et 1 boules par le mot:  $\circ\circ|\circ\circ||\circ$  dans lequel le symbole «  $\circ$  » désigne une boule et le symbole «  $|$  » la séparation de deux urnes successives. Les mots ainsi formés contiennent tous exactement  $p$  symboles «  $\circ$  » et  $n-1$  symboles «  $|$  », ce qui nous ramène à un simple problème de dénombrement d'anagrammes - attention, il y a  $n$  urnes, mais seulement  $n-1$  séparations entre elles. Inversement, il est possible d'associer à toute anagramme de cette forme un unique rangement de boules. Conclusion : le problème posé autorise exactement  $\binom{n+p-1}{p}$  rangements ou anagrammes.

|                                       |   |                        |
|---------------------------------------|---|------------------------|
| Tirages successifs <b>avec remise</b> | = | <b>Multiplications</b> |
| Tirages successifs <b>sans remise</b> | = | <b>Arrangements</b>    |
| Tirages <b>simultanés</b>             | = | <b>Combinaisons</b>    |

## 2.4 FORMULE DU CRIBLE

### Proposition 7 : Formule du crible

Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille finie d'ensembles finis. Alors,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n E_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}|.$$

*Preuve.* Montrons le résultat par récurrence sur  $n = |I|$ .

▷ Si  $n = 1$ , le résultat est immédiat puisque la formule se réécrit  $|E_1| = |E_1|$ . Remarquons que l'on a également déjà établi la formule dans le cas où  $n = 2$ .

▷ Soit  $n \geq 1$  tel que la formule est établie pour toute famille de  $n$  ensembles finis et considérons  $(E_i)_{i \leq n+1}$  une famille de  $n+1$  ensembles finis (on a choisi sans perte de généralité  $I = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ). Alors,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \leq n+1} E_i \right| &= \left| E_{n+1} \cup \bigcup_{i \leq n} E_i \right| \\ &= |E_{n+1}| + \left| \bigcup_{i \leq n} E_i \right| - \left| \bigcup_{i \leq n} E_i \cap E_{n+1} \right| \\ &= |E_{n+1}| + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k[(1,n)]} \left| \bigcap_{i \in J} E_i \right| - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k[(1,n)]} \left| \bigcap_{i \in J} E_i \cap E_{n+1} \right| \\ &= |E_{n+1}| + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k[(1,n)]} \left| \bigcap_{i \in J} E_i \right| + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1-1} \sum_{J \in \mathcal{P}_k[(1,n)]} \left| \bigcap_{i \in J \cup \{n+1\}} E_i \right| \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule recherchée.  $\square$

### Exemple 24

Pour  $n = 2$ , ensembles finis  $E, F$   $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$ .

Pour 3 ensembles finis  $E, F$  et  $G$ ,  $|E \cup F \cup G| = |E| + |F| + |G| - |E \cap F| - |E \cap G| - |F \cap G| + |E \cap F \cap G|$ .

## 2.5 PARTIES D'UN ENSEMBLE FINI - COEFFICIENTS BINOMIAUX

**Nombre de parties d'un ensemble fini.** On rappelle que  $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ .

En effet, si on pose  $n = |E|$ , pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(E)| &= \left| \bigsqcup_{p=0}^n \{\text{parties à } p \text{ éléments}\} \right| \\ &= \sum_{p=0}^n |\{\text{parties à } p \text{ éléments}\}| = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n = 2^{|E|}. \end{aligned}$$

### Lien avec les coefficients binomiaux

Comme vu ci dessus, le coefficient binomial  $\binom{n}{p}$  est le nombre de  $p$ -combinaisons, d'un ensemble de cardinal  $n$ , est lié directement avec le calcul du nombre de parties d'un ensemble fini. On a directement

- $\triangleright$  Il existe une seule partie à  $n$  éléments dans un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ . Ainsi,  $\binom{n}{n} = 1$ .
- Il n'y a pas de partie à  $p > n$  éléments dans un ensemble  $E$  de cardinal  $n$  donc  $\binom{n}{p} = 0$  pour tout  $p > n$ .

Quelques autres nouvelles preuves des formules déjà connues :

**Formule du pion** Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$ .

De combien de manières peut-on former à partir  $n$  personnes un groupe de  $p$  d'entre elles dont un chef ? On va dénombrer ces équipes de deux manières.

- On peut commencer par choisir les  $p$  membres de l'équipe, soit  $\binom{n}{p}$  possibilités, puis désigner le chef après coup parmi eux, soit  $p$  possibilités.
- Mais on peut procéder autrement et commencer par choisir le capitaine, soit  $n$  possibilités, puis compléter son équipe en choisissant les  $p-1$  autres membres de l'équipe, soit  $\binom{n-1}{p-1}$  possibilités.

**Symétrie des coefficients** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .

Pour se donner une  $p$ -combinaison  $X$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $\binom{n}{p}$  possibilités, on peut se donner son complémentaire  $\bar{X}$  qui est une  $(n-p)$ -combinaison de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $\binom{n}{n-p}$  possibilités et retrouver  $X$  grâce à la relation  $\bar{\bar{X}} = X$ .

**Formule de Pascal** Pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$ .

Celle-ci, vous devez déjà la connaître !

**Formule de Newton** pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

En effet, dans le développement du produit  $(a+b) \times (a+b) \times \dots \times (a+b)$ , il y a autant de termes  $a^k b^{n-k}$  qu'il y a de choix des  $k$  facteurs, où l'on prend  $a$ , et donc des  $n-k$  où l'on prend  $b$ , c'est-à-dire autant que d'ensembles à  $k$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments.

### Exemple 25

Combien de chemins joignant les points  $(0,0)$  et  $(m,n) \in \mathbb{N}^2$  n'utilisant que des déplacements de vecteurs  $(1,0)$  et  $(0,1)$  ?

Un tel chemin est composé de  $m+n$  déplacements et  $m$  parmi ceux-ci sont horizontaux. Il y a donc autant de chemins que de choix de parties de cardinal  $m$  dans l'ensemble des  $m+n$  déplacements, c'est-à-dire  $\binom{m+n}{m}$ .

### Proposition 8

Pour tous  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

En particulier, pour  $a = b = n$ ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

*Preuve.* Soit  $A$  et  $B$  deux parties disjointes de cardinal  $a$  et  $b$  respectivement. Partitionnons l'ensemble des  $\binom{a+b}{n}$  parties de  $A \cup B$  de cardinal  $n$  selon le cardinal de leur intersection avec  $A$ . Il y a  $\binom{a}{k}$  parties de  $A$  de cardinal  $k$  et  $\binom{b}{n-k}$  parties de  $B$  de cardinal  $n-k$  donc  $\binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$  parties de  $A \cup B$  dont l'intersection avec  $A$  est de cardinal  $k$ . Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

□

### 3 MÉTHODES POLYNOMIALES DE CALCULS DES SOMMES BINOMIALES

Petite appendice, sans rapport avec le dénombrement directement pour vous rappeler que les sommes peuvent être calculées avec de simples manipulations polynomiales.

#### Exemple 26

Montrons que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k k = 3n \times 4^{n-1}$ .

Soit  $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k = (X+1)^n$ . En dérivant  $P$ , on obtient  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^{k-1} = n(X+1)^{n-1}$ .

Maintenant on multiplie par  $X$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k X^k = nX(X+1)^{n-1}$ . Il suffit alors d'évaluer en 3.

#### Exemple 27

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = 2^{n+1}(n-1) + 2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{10^k} = \frac{10}{81}.$$

Nous travaillerons dans cette preuve avec des fractions rationnelles formelles en  $X$ , que nous n'avons certes pas encore définies mais que je préfère vous voir utiliser ici plutôt que des fonctions rationnelles. Vous arriverez sans doute à comprendre même sans définition... Dérivons la relation :  $\sum_{k=0}^n X^k = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$ . Cela donne :

$$\sum_{k=0}^n k X^{k-1} = \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1}-1)}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}$$

donc après multiplication par  $X$  :  $\sum_{k=0}^n k X^k = X \times \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}$ . Évaluons enfin en 2 :

$$\sum_{k=0}^n 2^k k = 2^{n+1}(n-1) + 2, \quad \text{puis en } \frac{1}{10} : \quad \sum_{k=0}^n \frac{k}{10^k} = \frac{10}{81} \left( \frac{n}{10^{n+1}} - \frac{n+1}{10^n} + 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{81}$$

#### Formule de Vandermonde par les polynômes

On a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k = (X+1)^{2n} = (X+1)^n \times (X+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j.$$

À gauche, le coefficient de degré  $n$  vaut  $\binom{2n}{n}$ , et à droite il vaut  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$  par définition du produit polynomial.

#### Exemple 28

Montrons que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n}{k} = \binom{3n}{n}$ .

En utilisant la même preuve, on a  $\sum_{k=0}^{3n} \binom{3n}{k} X^k = (X+1)^{3n} = (X+1)^{2n} \times (X+1)^n = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} X^i \times \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j$ .

À gauche, le coefficient de degré  $n$  vaut  $\binom{3n}{n}$ , et à droite il vaut  $\sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{2n}{i} \binom{n}{i}$  par définition du produit polynomial.