Tema 3: Técnicas de recuento. Combinatoria.

1. Introducción.

1.1. Introducción histórica.

El análisis combinatorio o combinatoria estudia las diferentes formas en que podemos ordenar o agrupar unos elementos dados siguiendo unas determinadas reglas establecidas. Nos proporciona algoritmos para averiguar la cantidad de agrupaciones que, bajo determinadas condiciones, se pueden formar con los elementos de un conjunto.

Existen diversos métodos para obtener el número de ordenaciones, pero para determinados problemas tendremos algoritmos que nos permiten de forma sistemática obtener el número de diferentes agrupaciones, que bajo determinadas condiciones se pueden formar con los elementos de un conjunto.

La ciencia que estudia las reglas de recuento o conteo se denomina combinatoria. Según las características de los grupos y la naturaleza de los elementos, nos podemos encontrar con variaciones, combinaciones y permutaciones.

El surgir de los conceptos principales y el desarrollo del análisis combinatorio transcurrían paralelamente al desarrollo de otras partes de las matemáticas, tales como el álgebra, la teoría de números y la teoría de las probabilidades con las que el análisis combinatorio está estrechamente relacionado.

1.2. Definición de factorial

A lo largo del tema usaremos una nueva operación, denominada factorial de un número natural y que se denota como $n!$. Esta operación se define de la siguiente forma

- Para $n\neq 0$: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=n\cdot(n-1)!$ (ejemplo $6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720$)
- Para $n=0$: $0!=1$

Podrás encontrar esta operación en toda calculadora científica (busca el símbolo !)

2. Técnicas de recuento.

2.1. Principio del producto.

Si una operación se puede hacer de n maneras diferentes y si en cada caso, una segunda operación se puede hacer de m maneras diferentes, entonces hay m•n maneras de realizar las dos operaciones de forma conjunta.

Generalizando, si un evento puede realizarse de n_1 maneras distintas, y si, continuando el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras distintas, y si después de efectuados, un tercer evento puede realizarse de n_3 maneras distintas, y así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Ejemplo: buscamos el número de matriculas con dos letras y 4 números:

Separamos el problema en tres, 1º elegir la primera letra, n_1=26 (hay 26 letras en el abecedario), 2º elegir la segunda letra, n_2=26, 3º elegir el numero de 4 cifras, n_3=10000 (hay 10000 números desde 0000 hasta 9999). Como la elección de la 2ª letra y del numero no depende de las elecciones anteriores podemos aplicar la regla del producto, y por tanto hay N=26·26·10000=6760000 matriculas diferentes.

Problema: Una persona que desea comer en un restaurante tiene para elegir 4 primeros, 3 segundos y 5 postres diferentes. ¿Cuántos menús diferentes puedes elegir?.

Solución: podemos aplicar la regla del producto ya que la elección de cada plata no está condicionada a la elección del plato anterior.

$$\left.\begin{array}{l} n_1=\text{primer plato}=4 \\ n_2=\text{segundo plato}=3 \\ n_3=\text{postre}=5 \end{array}\right\} \quad N=\text{nº menús diferentes}=n_1\cdot n_2\cdot n_3=60$$

2.2. Principio de adición o regla de la suma:

Si dos operaciones son mutuamente ***excluyentes*** (es decir, si sólo una de ellas puede ocurrir) si la primera se puede hacer de n_1 maneras diferentes y la segunda operación se puede hacer de n_2 maneras diferentes, entonces hay n_1+n_2 maneras de realizar la primera o la segunda operación. (En los problemas de conteo, la palabra “o” se traduce en suma).

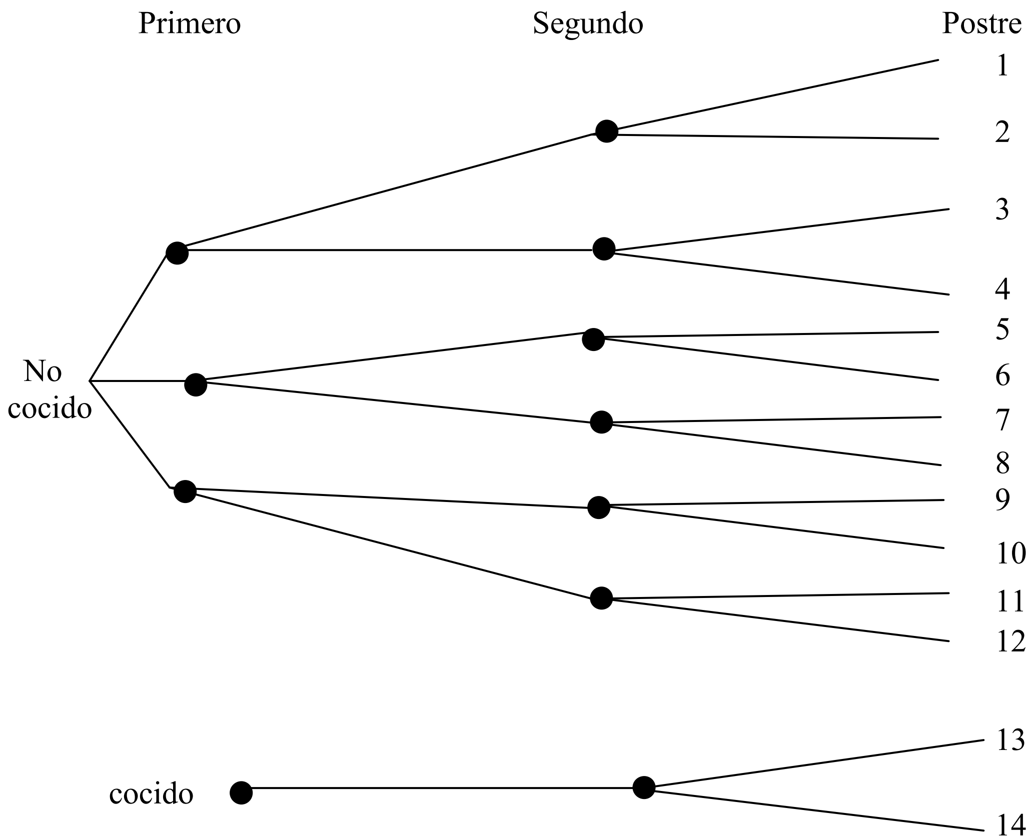
Ejemplo: Cuantas matriculas diferentes hay que empiecen por AA o BB:

Tenemos que las matriculas pueden empezar por AA **o** BB, que son excluyentes es decir no hay ninguna que empiece por AA y a la vez por BB, así que podemos aplicar el método de la suma: n_1=nº matriculas por AA=10000, n_2=nº matriculas comienzan por BB=10000. Luego la solución es que hay $N=n_1+n_2=20000$ matriculas que empiecen por AA o BB.

2.3. Diagrama de árbol.

Mediante el diagrama de árbol esquematizamos las diferentes posibilidades que se presentan en un problema. Con el diagrama de árbol se aúna los dos anteriores principios, pues si de cada n_1 ramas salen n_2 tendremos un total de $n_1 \cdot n_2$ "hojas" (principio del producto) y si son ramas disjuntas, excluyentes, tendremos que sumar el número de hojas de cada rama (principio de suma).

Para que quede más claro veamos un ejemplo: tenemos un menú con 3 primeros platos, con 2 segundos platos y 2 postres. Otra opción es tomar cocido de 1º y de 2º. ¿Cuántos menús distintos hay?



Por los principios de la suma y del producto:

$N=3\cdot 2\cdot 2+1\cdot 2=14$

3. Variaciones.

La característica fundamental de cada agrupación es que sí importa el orden, y no se utilizan todos los elementos en cada agrupación.

3.1. Variaciones simples u ordinarias. (Muestra ordenada sin repetición)

Definición:

Se llama variación simple de n elementos tomados de k en k $(k < n)$ a los distintos subconjuntos o grupos formados por k elementos de forma que:

- Los k elementos que forman el grupo son distintos (*no se repiten elementos*).
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (*influye el orden*).

(Aquí no se utilizan todos los elementos)

Problema tipo:

Extraemos sucesivamente sin reposición k bolas de una urna que contiene n bolas distintas, k, $n \in N$, $k < n$. Contaremos el número de k-uplas ordenadas distintas:

$(n_1, n_2,...,n_k)$ donde $n_j \in \{1, 2, ...,n\}$ $j = 1, 2, ..., n$ $n_i \neq n_j$ si $i \neq j$.

Solución:

El número de resultados posibles es:

$$V_k^n = V_{n,k} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$V_k^n = V_{n,k} = \#\{$Variaciones de n elementos cogidos de k en k$\}$

Demostración: (por regla del producto).

Si elegimos un primer elemento, lo que podemos hacer de n formas. Quitamos el elemento elegido y escogemos otro de entre los n-1 que quedan. Esto podrá hacerse de n-1 formas. Quitamos también este elemento y nos quedamos con n-2, de entre los que elegimos el tercero. Esto lo podremos hacer de n-2 formas. Según la regla del producto, las maneras de escoger k elementos de entre un total de n según un determinado orden, será igual al producto de n·(n-1)·(n-2)·...·(n-k+1).

Para llegar a una versión simplificada se opera así:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)...(3)(2)(1)}{(n-k)(n-k-1)...(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-k)!} = V_{n,k}$$

Ejemplo:

¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

Como importa el orden y no pueden repetirse los colores, la solución es: $V_{7,3} = \frac{7!}{4!} = 210$

3.2. Variaciones con repetición. (Muestra ordenada con repetición)

Definición:

Se llaman variaciones con repetición de n elementos cogidos de k en k (k puede ser mayor que n) a las diferentes agrupaciones de esos k elementos de forma que:

- Los elementos que forman los grupos pueden estar repetidos (*puede haber repetición)*.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden en que están colocados (*influye el orden*).

Problema tipo:

Tenemos n bolas y sacamos sucesivamente k de ellas y las devolvemos a la urna después de cada extracción. Se trata de contar el número de k-tuplas ordenadas distintas:

$(n_1, n_2,...,n_k)$ donde $n_j \in \{1, 2, ...,n\}$ j = 1, 2, ..., n

Solución:

El número de resultados posibles es: $VR^n_k = VR_{n,k} = n^k = n\cdot n\cdot n\cdot...\cdot n$

$VR^n_k = VR_{n,k} = \#$ {Variaciones con repetición de n elementos cogidos de k en k}

Demostración:

Tenemos que elegir k veces entre n elementos (se puede repetir los elementos elegidos), por la regla del producto el resultado resulta de multiplicar k veces n.

Ejemplo:

¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse a partir de los dígitos 1 y 2? Como importa el orden, y pueden repetirse las cifras, la solución es $VR_{2,3} = 2^3 = 8$

4. Permutaciones.

Es un caso particular de las variaciones, es decir, importa el orden y no hay repeticiones, pero ahora en cada agrupación cogemos todos los elementos del conjunto.

4.1. Permutaciones simples u ordinarias. (Muestra ordenada sin repetición)

Definición:

Se llaman permutaciones de n elementos (tomados de n en n) a las diferentes agrupaciones de esos n elementos de forma que:

- En cada grupo intervienen los n elementos sin repetirse ninguno (*sin repetición*)
- Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos n elementos es distinto (*influye el orden*).

Problema tipo:

Extraemos sucesivamente sin reposición las n bolas distintas que contiene una urna, ($n \in N$). Contaremos el número de n-tuplas ordenadas distintas:

$(n_1, n_2,...,n_n)$ donde $n_j \in \{1, 2, ...,n\}$ $j = 1, 2, ..., n$ $n_i \neq n_j$ si $i \neq j$.

Solución:

$P^n = V_{n,n} = n!$, ya que tenemos: $P^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

$P^n = \#$ {permutaciones de n elementos}.

Ejemplo:

Una madre tiene 3 hijos ¿de cuántas maneras distintas, nombrándolos uno por uno, puede llamarlos a cenar?. Como importa el orden, y nombramos a todos una sola vez, la solución es: $P^3 = 3! = 6$

4.2. Permutaciones con repetición. (Muestra ordenada con repetición)

Definición:

Se llaman permutaciones con repetición de n de k en k elementos entre los que hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí, ..., n_k iguales entre sí de manera que $n_2 + ... + n_k = n$, a las diferentes agrupaciones de n elementos de forma que:

- En cada agrupación intervienen todos los elementos (por tanto hay elementos *repetidos*).
- Dos grupos son diferentes si el orden de colocación de alguno de esos n elementos es distinto (*influye el orden*).

Problema tipo:

Sea A un conjunto compuesto de n elementos, y sean $n_1, n_2, ...,n_k$ enteros tales que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ queremos contar el número particiones ordenadas que hay distintas de A de la forma $(A_1, A_2, ..., A_k)$ donde A_i consta de n_i elementos i=1,2, ..., k.

Solución:

Existen $PR^{n}_{n1,n2,...,nk} = \dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot_{...}\cdot n_k!}$ particiones ordenadas

$PR^{n}_{n1,n2,...,nk}$ = #{permutaciones con repetición de n elementos entre los que hay n_1 iguales entre sí, n_2 iguales entre sí, ..., n_k iguales entre sí de manera que $n_2 + ... + n_k = n$}

Ejemplo:

Tenemos 3 libros de química, 4 de física y 5 de matemáticas. ¿De cuantas maneras se pueden ordenar los libros por materias en una estantería?

Tenemos 3 materias, y 3, 4 y 5 libros de cada materia, por tanto eexisten $PR^{12}_{3,4,5} = \dfrac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} =$

$= \dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!}$ = 27720 formas diferentes de ordenarlos por materias.

5. Combinaciones.

La característica fundamental de cada agrupación es que no importa el orden.

5.1. Combinaciones simples u ordinarias. (Muestra sin orden y sin repetición).

Definición:

Se llama combinaciones de n elementos tomados de k en k ($n \geq k$) a todas las clases posibles que pueden hacerse con los n elementos de forma que:

- Cada agrupación está formada por k elementos distintos entre sí (*no hay repetición*).
- Dos agrupaciones distintas se diferencian al menos en un elemento, *sin tener en cuenta el orden.*

Problema tipo:

Extraemos k bolas sucesivamente sin reposición de una urna que contiene n bolas distintas ($n, k \in N$, $n \geq k$). No nos importa en que orden aparecen (formas de hacer una extracción única de k bolas).

Solución:

El número de subconjuntos de n con cardinal k es

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$C_{n,k} = \#$ {combinaciones de n elementos tomados de k en k}

Ejemplo:

¿Cuantas combinaciones de 6 aciertos existen en la lotería primitiva?

$$C_{6,49} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!(49-6)!} = 13983816$$

5.2. Los números combinatorios:

Definición:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se llama número combinatorio, y se lee, n sobre k.

Observación:

En general, calcular $\binom{n}{k}$ por la fórmula anterior implica calcular varios factoriales, lo que hace que no sea muy útil en la práctica. Un método alternativo de cálculo viene dado por las siguientes propiedades:

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Triángulo de Tartaglia o de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Es simétrico, los exteriores valen 1, y cada uno de los interiores es suma de los dos superiores.

Fórmula del binomio de Newton:

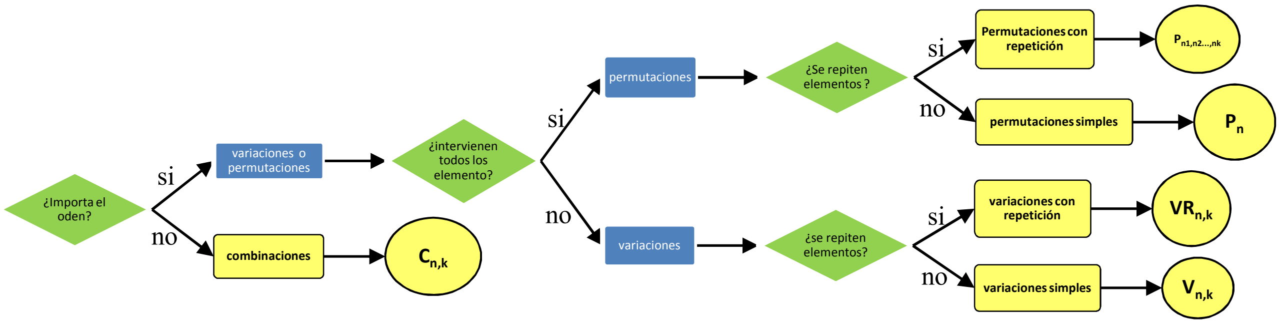
$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n \cdot y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot y^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^0 \cdot y^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Ejemplo:

$$(x^2-3x)^4 = \binom{4}{0}(x^2)^4 \cdot (-3x)^0 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-3x)^1 + \binom{4}{2}(x^2)^2 \cdot (-3x)^2 + \binom{4}{3}(x^2)^1(-3x)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^0(-3x)^4 =$$

$$= 1 \cdot x^8 - 12x^7 + 54x^6 - 108x^5 + 81x^4$$

6. Pautas para la resolución de problemas.



<u>Ejercicios finales</u> (vitutor.com)

1. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de butacas?
2. ¿De cuántas formas pueden mezclarse los siete colores del arco iris tomándolos de tres en tres?
3. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se puede formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5.?
4. En una clase de 35 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
5. ¿Cuántos números de tres cifras se puede formar con los dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 ?
6. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?
7. ¿Cuántas quinielas de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los 15 resultados?
8. ¿Cuántas apuestas de Lotería Primitiva de una columna han de rellenarse para asegurarse el acierto de los seis resultados, de 49?
9. En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?
10. Con las cifras 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse? ¿Cuántos son pares?
11. Con el (punto, raya) del sistema Morse, ¿cuántas señales distintas se pueden enviar, usando como máximo cuatro pulsaciones?
12. ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono y cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices?
13. Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 2 hombres y 3 mujeres. De cuántas formas puede formarse, si:
    a. Puede pertenecer a él cualquier hombre o mujer.
    b. Una mujer determinada debe pertenecer al comité.
    c. Dos hombres determinados no pueden estar en el comité.
14. Con las cifras 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4; ¿cuántos números de nueve cifras se pueden formar?
15. Con las letras de la palabra libro, ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer que empiecen por vocal?

16. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar con las cifras impares? ¿Cuántos de ellos son mayores de 70.000?

17. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

18. Con nueve alumnos de una clase se desea formar tres equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

19. Una mesa presidencial está formada por ocho personas, ¿de cuántas formas distintas se pueden sentar, si el presidente y el secretario siempre van juntos?

20. Se ordenan en una fila 5 bolas rojas, 2 bolas blancas y 3 bolas azules. Si las bolas de igual color no se distinguen entre sí, ¿de cuántas formas posibles pueden ordenarse?

21. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, vicepresidente y tesorero de un club de fútbol sabiendo que hay 12 posibles candidatos?

22. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:

   a. Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.
   b. Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos.

23. Una persona tiene cinco monedas de distintos valores. ¿Cuántas sumas diferentes de dinero puede formar con las cinco monedas?

24. Halla el número de capicúas de ocho cifras. ¿Cuántos capicúas hay de nueve cifras?

25. Calcular las siguientes potencias utilizando el Binomio de Newton:

   a. $(3x^2-2)^4$
   b. $(x^3+2)^3$
   c. $(2x-3)^5$