

3

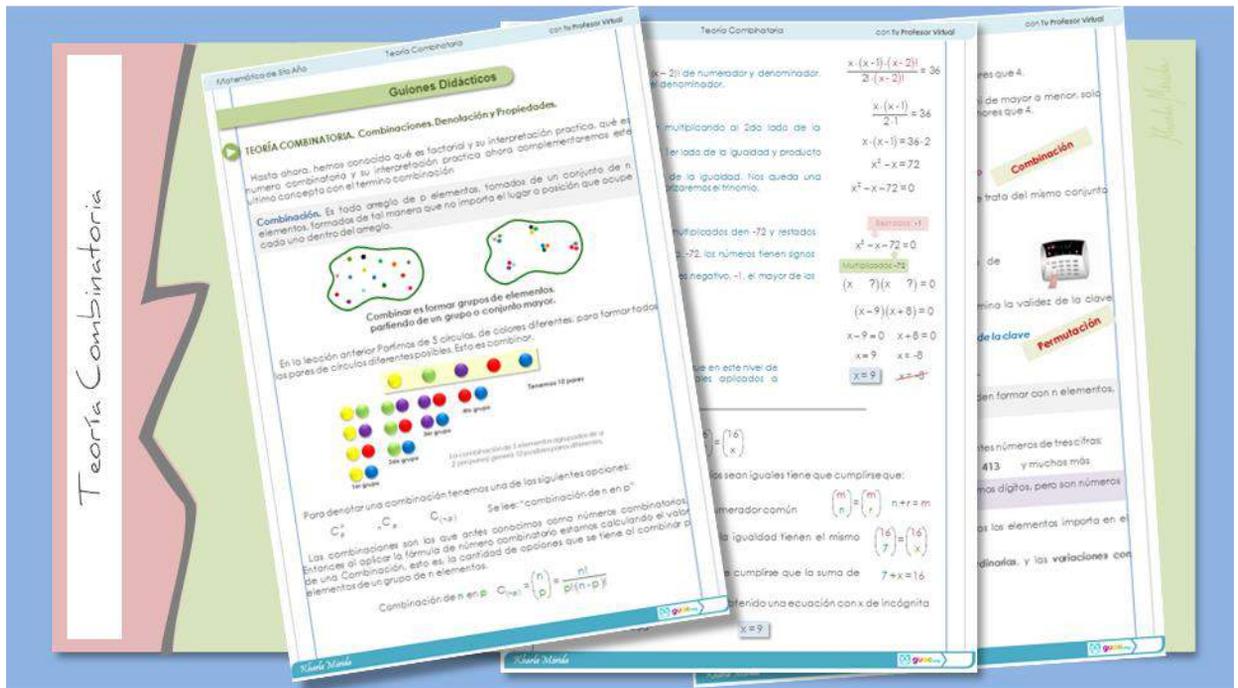
3ra Unidad

Teoría Combinatoria

3.2 Combinaciones, Permutaciones y Variaciones.

Ser parte de la solución es hacer bien el trabajo de cada día, es esperar lo ganado con méritos, es respetar el derecho de los demás, es hacer cada día pequeñas acciones que aporten algo al bienestar común, es ocupar el tiempo haciendo que nuestro entorno sea hoy un poco mejor que ayer.

Descripción



Combinaciones, Variaciones, Permutaciones, tres herramientas fundamentales de la Teoría Combinatoria. Sus definiciones, características y diferencias, presentadas con ejemplos que permite comprender de forma sencillas tales conceptos. Finalmente un cuadro comparativo que ayuda a sistematizar el proceso para identificar cuándo se trata de una u otra. Avancemos en este valioso conocimiento de ilimitadas aplicaciones.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones en los Naturales, Operaciones en los Reales, Productos Notables, Factorización, Simplificaciones de Expresiones Algebraica, Ecuaciones Lineales, Ecuaciones de 2do grado.

Contenido

Denotación y Propiedades de Combinaciones, Ecuaciones de Combinaciones, Definición y Fórmula de Permutaciones, Definición y Tipos de Variaciones, Casos Análisis y Principios de Combinaciones, Permutaciones y Variación, Ejercicios,

Videos Disponibles

[TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Denotación y Propiedades](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Ecuaciones. Ejercicio 1](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Ecuaciones. Ejercicio 2](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Permutaciones. Definición y Fórmula](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Variaciones. Definición y Tipos](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Variaciones. Ecuaciones. Ejercicios 1 y 2](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Combinación, Permutación y Variación. Casos, Cómo Diferenciar. Parte I](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Combinación, Permutación y Variación. Análisis de Cuatro Casos. Parte II](#)

[TEORÍA COMBINATORIA. Principios de Multiplicación. Combinación, Permutación y Variación](#)

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Denotación y Propiedades.

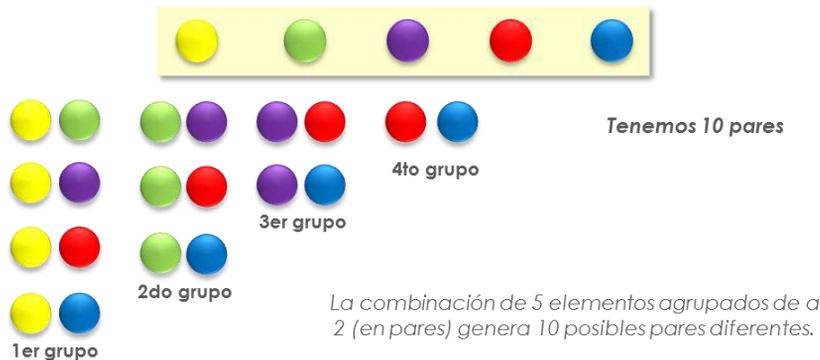
Hasta ahora, hemos conocido qué es factorial y su interpretación practica, qué es numero combinatoria y su interpretación practica ahora complementaremos este ultimo concepto con el termino combinación

Combinación. Es todo arreglo de p elementos, tomados de un conjunto de n elementos, formados de tal manera que no importa el lugar o posición que ocupe cada uno dentro del arreglo.



Combinar es formar grupos de elementos, partiendo de un grupo o conjunto mayor.

En la lección anterior Partimos de 5 círculos, de colores diferentes, para formar todos los pares de círculos diferentes posibles. Esto es combinar.



Para denotar una combinación tenemos una de las siguientes opciones:

$$C_p^n \quad {}_n C_p \quad C_{(n,p)} \quad \text{Se lee: "combinación de } n \text{ en } p"$$

Las combinaciones son los que antes conocimos como números combinatorios. Entonces al aplicar la fórmula de número combinatorio estamos calculando el valor de una Combinación, esto es, la cantidad de opciones que se tiene al combinar p elementos de un grupo de n elementos.

$$\text{Combinación de } n \text{ en } p \quad C_{(n,p)} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

El valor de la combinación de m en n es el mismo valor del número combinatorio m sobre n .

Por eso es importante conocer las propiedades de los números combinatorios

$$C_{(m,n)} = \binom{m}{n}$$

Valores Notables del Número Combinatorio

Todo número combinatorio de orden cero es igual a 1.

$$C_{(m,n)} = \binom{m}{n}$$

Todo número combinatorio de orden 1 es igual al numerador.

$$\binom{n}{1} = n$$

Todo número combinatorio cuyo orden sea igual al numerador es igual a 1.

$$\binom{n}{n} = 1$$

Dos números combinatorios que tengan el mismo numerador y la suma de sus ordenes resulte el valor del numerador, tienen el mismo valor.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La suma de dos números combinatorios de igual numerador y de ordenes consecutivos, es igual a un número combinatorio de numerador una unidad mayor, y de orden el mayor de los órdenes iniciales.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Ecuaciones. Ejercicio 1.

Resuelve la siguiente ecuación. $C_2^x = 36$

Fórmula de combinación: $C_{(n,p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Sustituimos los valores de n y p .
 $n = x$ $p = 2$

$$C_{(x,2)} = \frac{x!}{2!(x-2)!} = 36$$

¿Qué tenemos en la expresión?

Hay dos factoriales tenemos que desarrollar el factorial mayor hasta llegar a un factor parecido al factorial menor.

¿Cuál es el factorial mayor?

El factorial mayor es $x!$

Su desarrollo es $x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!$, nos detentamos al llegar a un factor parecido al factorial menor, que esta en el denominador.

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{2! \cdot (x-2)!} = 36$$

Simplificamos el factorial $(x - 2)!$ de numerador y denominador, y efectuamos el factorial del denominador.

Pasamos el denominador multiplicando al 2do lado de la igualdad.

Aplicamos distributiva en el 1er lado de la igualdad y producto en el 2do.

pasamos todo al 1er lado de la igualdad. Nos queda una ecuación de 2do grado. Factorizaremos el trinomio.

Factorizando

Buscamos dos números que multiplicados den -72 y restados den -1 .

- Como el producto es negativo, -72 , los números tienen signos diferentes.
- Como el resultado de la resta es negativo, -1 , el mayor de los números es negativo.

Los números son: -9 y $+8$

Igualando a cero cada factor

$x = -8$ no toma como solución porque en este nivel de estudios solo se estudian factoriales aplicados a números naturales.

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{2! \cdot (x-2)!} = 36$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} = 36$$

$$x \cdot (x-1) = 36 \cdot 2$$

$$x^2 - x = 72$$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

Restados: -1

$$x^2 - x - 72 = 0$$

Multiplicados: -72

$$(x \quad ?)(x \quad ?) = 0$$

$$(x-9)(x+8) = 0$$

$$x-9 = 0 \quad x+8 = 0$$

$$x = 9 \quad x = -8$$

$$x = 9 \quad \cancel{x = -8}$$

Resuelve la siguiente ecuación $\binom{16}{7} = \binom{16}{x}$

Para que dos números combinatorios sean iguales tiene que cumplirse que:

- Los numeradores sean iguales,
- La suma de sus órdenes resulte el numerador común

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{r} \quad n+r = m$$

Los dos números combinatorios de la igualdad tienen el mismo numerador, 16 .

$$\binom{16}{7} = \binom{16}{x}$$

Para que se cumpla la igualdad debe cumplirse que la suma de los ordenes resulte 16 .

$$7+x = 16$$

Estableciendo esta condición hemos obtenido una ecuación con x de incógnita

Despejando x la igualdad

$$x = 9$$

▶ TEORÍA COMBINATORIA. Combinaciones. Ecuaciones. Ejercicio 2.

Resolver la siguiente ecuación $\binom{16}{2} + \binom{16}{x} = \binom{17}{2}$ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Suma de dos números combinatorios con igual numerador y ordenes consecutivos

Es un número combinatorio que satisface:

- El numerador es una unidad mayor que el numerador común
- El orden es el mayor de los dos ordenes iniciales

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

En la igualdad dada tenemos la suma de números combinatorios con igual numerador, igualados a un número combinatorio cuyo numerador es una unidad mayor al numerador común.

$$\binom{16}{2} + \binom{16}{x} = \binom{17}{2}$$

Si esta igualdad es cierta, los ordenes de los números combinatorios sumandos son consecutivos.

Opción 1: 2, x
Opción 2: x, 2

La regla dice que el número combinatorio resultante tiene como orden el mayor de los órdenes iniciales.

La suma dada tiene como orden 2. Entonces el orden mayor es 2, el otro orden es 1

$$2 > x \quad \boxed{x = 1}$$

Resuelve la siguiente ecuación $\binom{x}{6} = 7 \cdot \binom{x}{4}$

¿Qué tenemos en esta igualdad?

Hay un número combinatorio en el primer lado de la igualdad y en el segundo lado la multiplicación de un número natural por otro número combinatorio.

Aplicando la fórmula a los números combinatorios de la ecuación.

$$\frac{x!}{6! \cdot (x-6)!} = 7 \cdot \frac{x!}{4! \cdot (x-4)!}$$

Recordemos. que todo factorial es distinto de cero por definición. Por esta razón podemos pasar de un lado a otro de la igualdad cualquiera de los factoriales presentes en la ecuación.

Pasamos $4! \cdot (x-4)!$ Multiplicando al 1er lado de la igualdad.

$$\frac{x! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{6! \cdot (x-6)!} = 7 \cdot x!$$

Desarrollamos $(x-4)!$, hasta llegar a $6!$ y hasta $4!$

$$\frac{x! \cdot 4! \cdot (x-4) \cdot (x-5) \cdot (x-6)!}{6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot (x-6)!} = 7 \cdot x!$$

Simplificamos los factores $4!$ y $(x-6)!$.

$$\frac{x! \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{6 \cdot 5} = 7 \cdot x!$$

Pasamos $x!$ del 2do lado de la igualdad dividiendo al 1er lado de la fracción.

$$\frac{x! \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{6 \cdot 5 \cdot x!} = 7$$

Simplificamos $x!$

$$\frac{(x-4) \cdot (x-5)}{6 \cdot 5} = 7$$

Pasamos el producto de $6 \cdot 5$ multiplicando al otro lado.

$$(x-4) \cdot (x-5) = 7 \cdot 30$$

Efectuamos los productos y reunimos todo en el primer lado de la igualdad.

$$x^2 - 9x + 20 = 210$$

$$x^2 - 9x - 190 = 0$$

Factorizando

$$(x-19) \cdot (x+10) = 0$$

Igualando a cero cada factor

$$x-19=0 \quad x+10=0$$

$$x=19$$

~~$$x=-10$$~~

▶ TEORÍA COMBINATORIA. Permutaciones. Definición y Fórmula.

Permutaciones. Es todo arreglo de n elementos, en donde importa el lugar o posición que cada uno de ellos tenga dentro de dicho arreglo.

$$P_n$$

En objetivo anterior vimos un ejemplo de esto, cuando analizamos las distintas opciones que hay para ordenar tres frascos en una repisa, o las distintas opciones en las que se pueden ordenar 4 círculos de distintos colores



En cada caso, se usaron todos los elementos dados para cada agrupación

La fórmula que permite hallar la cantidad de permutaciones posibles para n elementos es:

Fórmula

$$P_n = n!$$

Veamos la diferencia entre combinar y permutar con dos sencillos ejemplos.

Ejemplo 1

Se pide armar un conjunto con los números naturales menores que 4.

En este caso no nos piden ordenar, ni de menor a mayor, ni de mayor a menor, solo nos piden formar un conjunto con los números naturales menores que 4.

Conjuntos de números naturales menores que 4

$\{3,2,1\}$ $\{1,2,3\}$ $\{3,1,2\}$

Todos esos se tratan del mismo conjunto

Combinación

En cualquiera de los órdenes en que los presentemos, se trata del mismo conjunto de números, esto es una combinación.

Ejemplo 2

Se pide establecer la combinación de un tablero de seguridad con los números 1, 2 y 3.



Para este caso, el orden en que se introduzcan determina la validez de la clave. Esto es permutación.

el orden en que se introduzcan determina la validez de la clave

Permutación

▶ TEORÍA COMBINATORIA. Variaciones. Definición y Tipos.

Variaciones, son las distintas agrupaciones que se pueden formar con n elementos, tomando en cuenta el orden.

Ejemplo

Con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 podemos formar los siguientes números de tres cifras:

345 **215** **534** **152** **413** y muchos más

Observación. los números 345 y 534 contienen los mismos dígitos, pero son números diferentes, también pasa con 215 y 152.

Nota: En este caso el orden en que estén presentados los elementos importa en el conteo de opciones de agrupación.

Existen dos tipos de variaciones las **variaciones ordinarias**, y las **variaciones con repeticiones**. Veamos la diferencia entre una y otra.

Variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n

Son las distintas agrupaciones de n elementos, que cumplen las siguientes condiciones:

- $m > n$, para formar las agrupaciones **no se toman todos los elementos del conjunto**
- **No se repiten los elementos** en una misma agrupación.

Ejemplo

Cuántos números de 3 cifras diferentes pueden formarse con los dígitos:
1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Datos

- Nos dan un conjunto formado por 6 dígitos, entonces $m = 6$
- Debemos formar números de 3 cifras, entonces $n = 3$

Se cumple que:

- $m = 6$ y $n = 3$, $m > n$
- Como deben ser de cifras diferentes, los elementos no se repiten en la agrupación.

Se cumplen las dos condiciones de las **Variaciones Ordinarias**.

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n

Son las distintas agrupaciones de n elementos, en los que pueden repetirse los elementos.

Hay dos casos para las variaciones con repetición:

- $m > n$,
- $n > m$.

Ejemplo 1

Cuántos números de 3 cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Datos

- Nos dan un conjunto formado por 6 dígitos, entonces $m = 6$
- Debemos formar números de 3 cifras, entonces $n = 3$

Se cumple que $m > n$, el enunciado no especifica que sean de cifras diferentes, así que los **elementos pueden repetirse en la agrupación**.

Ejemplo 2

Cuántos números de 4 cifras pueden formarse con los dígitos 3 y 7

Datos

- Nos dan un conjunto formado por 2 dígitos, entonces $m = 2$
- Debemos formar números de 4 cifras, entonces $n = 4$

Se cumple que $m < n$, el enunciado no especifica que sean de cifras diferentes, y para armar números de 4 cifras con apenas 2 dígitos deben repetirse.

Fórmulas para calcular las variaciones

Variaciones Ordinarias de m en n

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} \quad V_n^m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \dots (m-(n-1))$$

Variaciones con repetición de m en n

$$V_n^m = m^n$$

TEORÍA COMBINATORIA. Variaciones. Ecuaciones. Ejercicios 1 y 2.

Resolver la siguiente ecuación $V_4^x = 20 \cdot V_2^x$

Aplicamos la fórmula de variación ordinaria a cada una de las presentes en la ecuación.

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Pasamos $x!$ dividiendo al 2do lado de la igualdad y $(x-2)!$ multiplicando al primer lado de la igualdad.

Desarrollamos $(x-2)!$ hasta llegar a $(x-4)!$ y simplificamos $x!$.

Simplificamos $(x-4)!$.

Efectuamos el producto, simplificamos términos semejantes y reunimos todo en el 1er lado de la igualdad $(x-4)!$.

Factorizamos

Igualamos a cero y despejamos. No se toma la solución negativa porque estamos trabajando con elementos naturales.

$$\frac{x!}{(x-4)!} = 20 \cdot \frac{x!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 20 \cdot \frac{x!}{x!}$$

$$\frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)!}{(x-4)!} = 20$$

$$(x-2) \cdot (x-3) = 20$$

$$x^2 - 5x + 6 = 20$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$(x-7) \cdot (x+2) = 0$$

$$x-7=0 \quad x+2=0$$

$$x=7$$

~~$$x=-2$$~~

Resolver la siguiente ecuación $V_5^{x+2} = 132 \cdot V_3^x$

Aplicamos la fórmula de variación ordinaria a cada una de las presentes en la ecuación.

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Efectuamos la resta

$$\frac{(x+2)!}{(x+2-5)!} = 132 \cdot \frac{x!}{(x-3)!}$$

$$\frac{(x+2)!}{(x-3)!} = \frac{132 \cdot x!}{(x-3)!}$$

Pasamos $(x - 3)!$ multiplicando al 2do lado de la igualdad, y $x!$ dividiendo al 1ro.

$$\frac{(x+2)!}{x!} = \frac{132 \cdot (x-3)!}{(x-3)!}$$

Simplificamos $(x - 3)!$ y desarrollamos $(x - 2)!$ Hasta llegar a $x!$.

$$\frac{(x+2) \cdot (x+1) \cdot x!}{x!} = 132$$

Simplificamos $x!$.

$$(x+2) \cdot (x+1) = 132$$

Efectuamos el producto, simplificamos términos semejantes y reunimos todo en el 1er lado de la igualdad $(x - 4)!$.

$$x^2 + 3x + 2 = 132$$

$$x^2 + 3x - 130 = 0$$

Factorizamos

$$(x+13) \cdot (x-10) = 0$$

Igualamos a cero y despejamos. No se toma la solución negativa porque estamos trabajando con elementos naturales.

$$x+13=0 \quad x-10=0$$

$$~~x = -13~~ \quad x = 10$$

TEORÍA COMBINATORIA. Combinación, Permutación y Variación. Casos Cómo Diferenciar. Parte I.

Combinación, Permutación y Variación son tres términos asociados a **arreglos de elementos**, partiendo de un conjunto de elementos dados. Considerando que los tres se tratan de arreglos de elementos, suele presentarse confusiones a la hora de reconocer de cuál de los tres se trata para cada planteamiento.



Hagamos un contraste entre los tres conceptos, basándonos en sus características, para aprender a reconocer de cual de ellos se trata cuando se nos hace un planteamiento

Las características que estudiaremos son:

- ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos?
- ¿Se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo?
- ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos?

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|--|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |

En la **Combinación**, se toma parte de los elementos dados, no se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo y no se repiten los elementos

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|--------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| | | | |
| | | | |

En la **Permutación**, se toman todos los elementos dados, importa el orden de los elementos en el arreglo y no se repiten los elementos en el arreglo

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|--------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| | | | |

En la **Variación**, tenemos dos opciones.

En la **Variación ordinaria** se toma parte de los elementos dados, si se toma en cuenta el orden y no se repiten los elementos en el arreglo

En la **Variación con repetición**, pueden o no tomarse todos los elementos dados, importa el orden y se repiten los elementos

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|---------------------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación con repetición | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

Criterio del Orden de los elementos en el Arreglo

Solo en la **Combinación** no importa el orden de los elementos en los arreglos. Con este criterio identificamos o descartamos rápidamente una Combinación.

En caso de que se tome en cuenta el orden se decide considerando los otros dos criterios.

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|---------------------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación con repetición | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

Criterio de Repetición de elementos en el Arreglo

Solo en la Variación con Repetición pueden repetirse elementos en el arreglo. Con este criterio identificamos o descartamos una Variación con Repetición.

En caso de que no se repitan los elementos en los arreglos se decide considerando los otros dos criterios.

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|---------------------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación con repetición | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

Criterio de Tomar Todos o Parte de los Elementos del Conjunto para los Arreglos

Solo en la Variación con Repetición pueden repetirse elementos en el arreglo. Con este criterio identificamos o descartamos una Variación con Repetición.

En caso de que se tome parte de los elementos del conjunto para hacer los arreglos debemos elegir entre dos opciones basados en los otros dos criterios.

| | ¿Se toma parte o todos los elementos dados para hacer los arreglos? | ¿se toma en cuenta el orden de los elementos en el arreglo? | ¿Se pueden repetir los elementos en los arreglos? |
|---------------------------------|---|---|---|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación con repetición | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

Ahora veamos cuatro ejemplos y apliquemos estos tres criterios para determinar de cuál de los tres conceptos se trata

1er caso. Debemos seleccionar tres franelas de un grupo de 7 franelas de diferentes colores, para tres días de actividades a las que debemos asistir.

2do caso. Debemos asignar 6 cargos a 6 personas para la conformación de un equipo, cada cargo se desempeña en una actividad completamente diferente al de los otros, pero necesarias entre si

3er caso. Cuántas posibles claves de acceso a un sistema podemos establecer considerando que debe ser de 7 cifras diferentes y se puede usar cualquiera de los dígitos 4to caso. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos?

¿Ya sabes qué concepto corresponde a cada caso?. Acompáñanos a la siguiente lección para analizar detenidamente

TEORÍA COMBINATORIA. Combinación, Permutación y Variación. Análisis de Cuatros. Parte II.

En la lección anterior vimos en detalle las características propias de la combinación, la permutación y la variación. Ahora haremos uso de esas características para establecer con cuál de estos conceptos se corresponde cada uno de los cuatro casos que dejamos planteados en la lección anterior.

1er caso. Debemos seleccionar tres franelas de un grupo de 7 franelas de diferentes colores, para tres días de actividades a las que debemos asistir.

De: 7 franelas

Tomar: 3 franelas

Análisis

Como el enunciado no exige un orden específico en cuanto al color de las franelas respecto a los días de asistencia, sabemos que **no importa el orden en que se tomen los elementos**.

Esto es una característica propia de la Combinación, no importa el orden de los elementos.

Para calcular cuántas posibles combinaciones tenemos, aplicamos la fórmula para Combinaciones. Donde n vale 7, p vale 3

| | | | |
|-------------|--------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Combinación | se toma parte de los elementos dados | No se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
|-------------|--------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|

$$C_{(n,p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$n = 7, p = 3$$

2do caso. Debemos asignar 6 cargos a 6 personas para la conformación de un equipo, cada cargo se desempeña en una actividad completamente diferente al de los otros, pero necesarias entre si.

A: 6 personas

Asignar: 6 Cargos

Hay dos cosas que se pueden observar a primera vista en el enunciado

1ro. Importa el orden, porque el equipo funcionará de manera muy diferente de acuerdo a la manera en que se establezcan los cargos.

2do Se toman todos los elementos dados, pues son 6 personas y se asignarán 6 cargos.

Estas dos características son propias de la permutación

| | | | |
|--------------------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Permutación | se toma todos los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
|--------------------|-----------------------------------|----------------------------|-----------------------------|

Para saber cuántas posibles opciones hay para asignar los cargos, aplicamos la fórmula de permutación.

$$P_n = n! \quad n = 6$$

3er caso. Cuántas posibles claves de acceso a un sistema podemos establecer considerando que debe ser de 7 cifras diferentes y se puede usar cualquiera de los dígitos 4to caso. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos?

Conjunto de posibles elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Se toman 7 de los 10

Número de cifras del Arreglo: 7

- Por tratarse de una clave de acceso, **el orden en que se introduzcan las cifras importa**,
- El número de elementos dados es 10 (10 dígitos), pero se toman 7. **Se toma parte de los elementos dados.**

Estamos en presencia de una variación. Como las cifras deben ser diferentes, **no se repiten los elementos en el arreglo**, es una variación ordinaria.

Para saber cuántas posibles variaciones tenemos en este caso aplicamos la fórmula de Variación Ordinaria. Donde m es 10 y n es 7

| | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| Variación con repetición | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$m = 10, n = 7$$

4to caso. Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos el conjunto dado es de 10 elementos.

Análisis

- Tomaremos 4 elementos por arreglo, **se toma parte de los elementos.**
- **El orden de los elementos importa**, porque preguntan cuántos números de 4 cifras se pueden formar, se sobreentiende que son números diferentes.
- No especifican que tengan cifras diferentes. Entre los números de 4 cifras que se pueden formar, hay números con cifras repetidas. Entonces, en este caso **Se repiten los elementos en el arreglo.**

Conjunto inicial de elementos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Número de cifras: 4

Se toman **4** de los **10**
importa el orden
Se repiten los elementos

Se trata de una variación con repetición de m en n , con $m = 10$ y $n = 4$.

| | | | |
|---------------------|--------------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| Variación Ordinaria | se toma parte de los elementos dados | Se toma en cuenta el orden | No se repiten los elementos |
| | se toma parte o todos los elementos | Se toma en cuenta el orden | Se repiten los elementos |

$$V_n^m = m^n$$

$$m = 10 \quad n = 4$$

Ahora sólo nos está faltando estudiar los casos en los que debemos aplicar el principio de multiplicación acompañanos a la siguiente lección

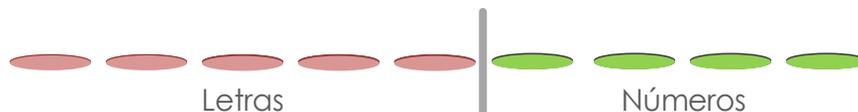
TEORÍA COMBINATORIA. Principios de la Multiplicación. Combinación, Permutación y Variación.

¿Qué sucede cuando tenemos que hacer arreglos en los que una parte de este responde a un concepto, y otra parte responde a otro concepto?

Veamos un ejemplo de lo que queremos decir

Debemos establecer la clave de acceso para manejo de una cuenta bancaria por internet. La página establece que debe ser de 7 caracteres:

- los 4 primeros están constituidos por cualquiera de las 26 letras del abecedario
- Los últimos 3 están constituidas por dígitos.

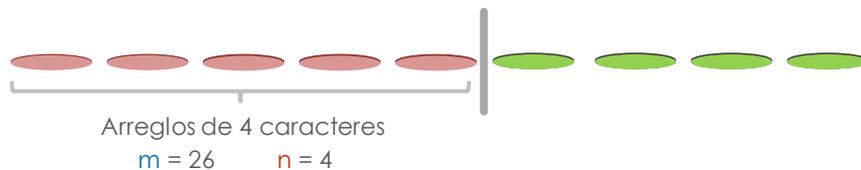


En este caso aplica el principio de multiplicación. Para obtener las posibilidades totales para claves de acceso multiplicamos las posibilidades del primer bloque, por las posibilidades del 2do bloque. Veamos.

$$\text{Posibilidades de la 1ra condición} \cdot \text{Posibilidades de la 2da condición} = \text{Posibilidades Totales}$$

1er bloque. Debemos organizar arreglos de 4 caracteres, tomados de 26 disponibles. Entonces, m vale 26, y n vale 4.

No se aclara que sean caracteres diferentes, entonces **Se repiten los elementos.** Esto es característica de las Variaciones con Repetición de 26 en 4.

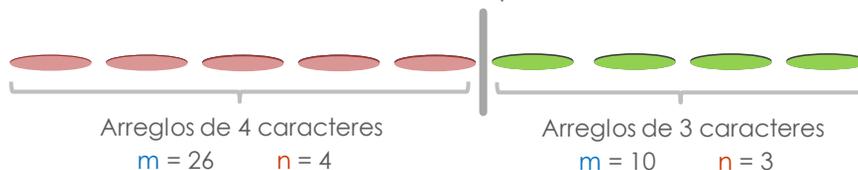


Se toman 4 letras de 26 disponibles
El orden importa
Se pueden repetir los elementos

Variación
Con Repetición $VR_n^m = m^n$

2do bloque. Debemos organizar arreglos de 3 cifras, tomados de 10 disponibles. Entonces, m vale 10, y n vale 3

No se aclara que sean caracteres diferentes, entonces **Se repiten los elementos.** Esto es característica de las Variaciones con Repetición de 10 en 3.



Total. Tenemos las posibilidades de variación del primer bloque, por las posibilidades de variación del 2do bloque. esto es 26 a la 4 por 10 a la 3 igual 456.976.000 posibilidades para establecer claves de acceso a este banco

Posibilidades Totales = **Posibilidades de la 1ra condición** · **Posibilidades de la 2da condición**

$$VR_n^m = m^n$$

$$VR_n^m = m^n$$

$$\text{Posibilidades Totales} = 26^4 \cdot 10^3 = 456.976.000$$

Tenemos 456.976.000 posibilidades para establecer claves de acceso en este banco

Vamos a la práctica para aprender cómo aplicar todo lo que hemos aprendido hasta ahora sobre combinaciones, variaciones y permutaciones acompañanos.

Emparejando el Lenguaje

Factorial de un número, n. Es el producto de “n” factores consecutivos, presentados en orden descendente, desde “n” hasta 1.

Número Combinatorio. Es un ordenamiento vertical de dos números naturales ubicados dentro paréntesis. $\binom{n}{p}$

Numerador (de un número combinatorio). Es el número superior del ordenamiento vertical.

Orden (de un número combinatorio). Es el número inferior del ordenamiento vertical.

Combinación. Es todo arreglo de p elementos, tomados de un conjunto de n elementos, formados de tal manera que no importa el lugar o posición que ocupe cada uno dentro del arreglo.

Permutaciones. Es todo arreglo de n elementos, en donde importa el lugar o posición que cada uno de ellos tenga dentro de dicho arreglo.

Variaciones. son las distintas agrupaciones que se pueden formar con n elementos, tomando en cuenta el orden.

A Practicar

1. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 4 personas en 15 asientos?. V
2. ¿Cuántas mezclas de 3 colores se pueden obtener de 8 colores diferentes? C
3. ¿De cuántas formas distintas pueden ubicarse 9 deportistas en 9 bicicletas estáticas?

P

1. Debemos ordenar 7 personas (Luis, Ana, Juan, Ely, Luz, Cris y Tavo) en 3 asientos.
 - a. ¿Cuántos ordenamientos distintos se pueden obtener?
 - b. ¿Cuántos ordenamientos tienen a Ely en la primera posición?
 - c. ¿Cuántos tendrán a Ely en la 1ra posición y a Luis en la 3ra?
 - d. ¿En cuántas estarán Ana o Cris?
2. Del grupo de personas anterior debemos organizar comisiones de 3 personas. En los grupos no hay jerarquía, de tal forma que todas desempeñan la misma labor.
 - a. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?
 - b. ¿En cuántas de ellas participa Luz?
 - c. ¿En cuántas participan Juan y Tavo?
3. ¿Cuántos números de 6 cifras no repetidas pueden formarse en sistema decimal?
4. ¿Cuántos números de 7 cifras pueden formarse, sabiendo que las primera 3 deben ser pares y las últimas 4 impares.
5. ¿Cuántas palabras de 4 letras, 2 vocales y 2 consonantes, pueden formarse disponiendo de 5 vocales y 4 consonantes? No deben haber dos vocales seguidas.

¿Lo Hicimos Bien?

- ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 4 personas en 15 asientos?
 $V_{15,4} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32.760$ formas distintas de sentarse
- ¿Cuántas mezclas de 3 colores se pueden obtener de 8 colores diferentes?
 $C_{8,3} = 56$
- ¿De cuántas formas distintas pueden ubicarse 9 deportistas en 9 bicicletas estáticas? P
 $P_9 = 362.880$
- Debemos ordenar 7 personas (Luis, Ana, Juan, Ely, Luz, Cris y Tavo) en 3 asientos.
 - ¿Cuántos ordenamientos distintos se pueden obtener? $V_{7,3} = 210$
 - ¿Cuántos ordenamientos tienen a Ely en la primera posición? $V_{6,2} = 30$
 - ¿Cuántos tendrán a Ely en la 1ra posición y a Luis en la 3ra? $V_{5,1} = 5$
 - ¿En cuántas estarán Ana o Cris? $V_{7,3} - V_{5,3} = 210 - 60 = 150$
- Del grupo de personas anterior debemos organizar comisiones de 3 personas. En los grupos no hay jerarquía, de tal forma que todas desempeñan la misma labor.
 - ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar? $C_{7,3} = 35$
 - ¿En cuántas de ellas participa Luz? $C_{6,2} = 15$
 - ¿En cuántas participan Juan y Tavo? $C_{5,1} = 5$
- ¿Cuántos números de 6 cifras no repetidas pueden formarse en sistema decimal?
 $V_{10,6} - V_{9,5} = 151.200 - 15120 = 136.080$
- ¿Cuántos números de 7 cifras pueden formarse, sabiendo que las primera 3 deben ser impares y las últimas 4 pares.
 $V_{5,4} \cdot V_{5,3} = 120 \cdot 60 = 7.200$
- ¿Cuántas palabras de 4 letras, 2 vocales y 2 consonantes, pueden formarse disponiendo de 5 vocales y 4 consonantes? No deben haber dos vocales seguidas.
 $3 \cdot V_{5,2} \cdot V_{4,2} = 3 \cdot 20 \cdot 12 = 720$