El Principio de las Casillas

Pablo Soberón Bravo

Revista Tzaloa, año 2, número 2

El principio de las casillas es una de las ideas más importantes a la hora de atacar un problema de combinatoria. Lo que dice es realmente sencillo:

Siempre que se acomoden al menos $n+1$ objetos en n lugares hay un lugar que tiene al menos 2 objetos.

El primer uso del principio de las casillas tal cual se atribuye a Johann P. G. L. Dirichlet (1805 - 1859) en 1834. También es llamado el principio del Dirichlet o el principio del palomar (se enuncia frecuentemente con palomas y palomares en vez de objetos y lugares).
La demostración no podría ser más sencilla. Si hubiera a lo más un objeto por lugar, tendríamos a lo más n objetos, ¡lo cual no sucede! A pesar de que este principio parece completamente inocente, es sorprendente el número de aplicaciones que tiene y la dificultad de los problemas que se pueden resolver usándolo. Hay una versión un poco más fuerte de este principio, que dice lo siguiente:

Dados al menos $nk+1$ objetos acomodados en n lugares, siempre hay un lugar con al menos $k+1$ objetos.

Iremos viendo algunas formas de utilizarlo a lo largo de este artículo. Comencemos con el ejemplo más fácil:

Ejemplo 1. *De cualesquiera 3 personas siempre hay al menos 2 del mismo sexo.*

Aquí consideramos a las personas como los objetos y una casilla donde ponemos a los hombres y una casilla donde ponemos a las mujeres. A pesar de que la explicación parece exagerada para este ejemplo, hay que enfatizar que al resolver este tipo de problemas la estrategia siempre será tratar de decidir cuales son los objetos y las casillas para que se resuelva el problema. Veamos un ejemplo ligeramente más complicado, donde ya no es evidente.

Ejemplo 2. *Dados n números enteros, demuestra que hay algunos de ellos cuya suma es múltiplo de n. (La suma puede ser de un solo elemento)*

Para resolver este ejemplo consideremos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los n números y los números

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Si alguno de los b_i es múltiplo de n ya acabamos, por lo que podemos suponer que cada uno de ellos deja algún residuo al dividirlo por n, dicho residuo está entre 1 y $n-1$. Si consideramos a los

b_i como los objetos y los acomodamos en $n-1$ lugares según su residuo al dividirlo por n, por el principio de las casillas hay dos de ellos que dejan el mismo residuo. Digamos que son b_i y b_j con $i < j$. Como dejan el mismo residuo al dividirlos por n, su diferencia debe ser múltiplo de n. Como $b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ hemos acabado.

Ejemplo 3. *Demuestra que dados* 13 *puntos en el plano cartesiano con coordenadas enteras siempre hay* 4 *cuyo gravicentro tiene coordenadas enteras.*

El gravicentro de 4 *puntos es el punto cuyas coordenadas son los promedios de las coordenadas de los puntos. Por ejemplo, si tomas los puntos* $(1,0)$, $(3,3)$, $(2,5)$ *y* $(0,4)$ *su gravicentro es el punto* $(\frac{1+3+2+0}{4}, \frac{0+3+5+4}{4}) = (\frac{3}{2}, 3)$.

Para resolver este problema hay que trabajar un poco más antes de aplicar el principio de las casillas. Vamos a ver primero que de 5 puntos con coordenadas enteras siempre hay 2 cuyo punto medio tiene coordenadas enteras. Para ver esto, consideremos 4 casillas donde cada una representa alguna de las parejas $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Vamos a colocar cada punto en la casilla cuya pareja tenga coordenadas con las mismas paridades que las coordenadas del punto (por ejemplo, el punto $(5,2)$ va a la casilla que contiene la pareja $(1,0)$). Como hay al menos 2 en la misma casilla, su punto medio también tiene coordenadas enteras, ¿podrías explicar por qué?
Ya que sabemos esto podemos atacar el problema. Como tenemos al menos 5 puntos podemos sacar 2 cuyo punto medio tenga coordenadas enteras. Como nos quedan 11 puntos podemos repetir este proceso y seguir sacando parejas hasta que quedan 3 puntos nada más. Entonces hemos sacado 5 parejas. Ahora veamos que como los 5 puntos medios de estas parejas tienen coordenadas enteras (por el principio de las casillas) hay 2 de ellos cuyo punto medio tiene coordenadas enteras. Es fácil ver que este punto es realmente el gravicentro de los 4 puntos que generaban a estos últimos 2 puntos medios.
En este ejemplo, además de haber necesitado usar el principio de las casillas más de una vez, se puede apreciar la fuerza de este tipo de conteos. Resulta que al cambiar el número 13 por 12 el teorema deja de ser cierto, ¿puedes encontrar 12 puntos que no cumplan con el problema?
Una de las áreas de las matemáticas donde se encuentra casi siempre el principio de las casillas es la teoría de gráficas. Una gráfica es un conjunto de puntos en el plano (llamados vértices) y algunas líneas que unen parejas de estos puntos (llamadas aristas). Veamos un ejemplo de esto:

Ejemplo 4. *Entre cualesquiera* 6 *personas siempre hay* 3 *que se conocen dos a dos o hay* 3 *que dos a dos no se conocen. (Conocerse es una relación mutua.)*

Para resolver este ejemplo consideremos una gráfica con 6 vértices que representan a las personas y vamos a trazar una arista azul entre dos vértices si esas personas se conocen o una arista verde si no se conocen. Queremos ver que hay 3 vértices que forman un triángulo con los lados del mismo color.
Para hacer esto consideremos v_0 un vértice cualquiera. Como de él salen 5 aristas de dos colores posibles (¡por el principio de las casillas!) deben salir al menos 3 del mismo color (digamos que es azul). Llamemos v_1, v_2 y v_3 a los vértices que están unidos a v_0 por las tres aristas azules. Si dos de esos vértices están unidos por una arista azul, con v_0 forman el triángulo que buscabamos. Si no, están unidos por puras aristas verdes, con lo que también tenemos el triángulo que buscábamos.
Resulta que el ejemplo anterior se puede generalizar mucho más. De hecho para cualesquiera enteros positivos l y s hay un entero m tal que entre cualesquiera m personas siempre hay l que se conocen todos o s donde no hay dos que se conocen. Para probar esto se usa un argumento muy similar al que usamos para resolver el ejemplo. Resulta que si queremos encontrar el menor m que cumpla eso el problema ya se vuelve enormemente difícil. De hecho si l y s son mayores que 5 no se conoce ninguno de estos números m (¡pero se sabe que existen!).

Ahora ya estamos listos para un ejemplo bastante más complicado.

Ejemplo 5 (Rusia 2000)**.** *En un tablero de* 100×100 *se colorean las casillas de* 4 *colores de tal manera que cada fila y cada columna tenga* 25 *casillas de cada color. Demuestra que hay* 2 *filas y* 2 *columnas tales que sus* 4 *intersecciones están pintadas de colores distintos.*

Para resolver este ejemplo primero vamos a contar el número P de parejas de casillas (a_1, a_2) tales que a_1 y a_2 están en la misma fila y tienen colores distintos. Como hay 4 colores hay $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ maneras de hacer parejas con dos colores distintos. En cada fila hay 25 casillas de cada color, por lo que debe haber $\binom{4}{2}25 \cdot 25 = 6 \cdot 25 \cdot 25$ parejas en cada fila. Entonces, $P = 100 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25$. Sabemos que hay $\binom{100}{2}$ parejas de columnas, y cada pareja de P debe estar en alguna de esas parejas. Es decir, en este problema los lugares que vamos a utilizar son las parejas de columnas y los objetos las parejas de casillas en la misma fila de distintos colores. Entonces, por el principio de las casillas, hay una pareja de columnas que tiene al menos

$$\frac{P}{\binom{100}{2}} = \frac{100 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 25}{99} = \frac{100 \cdot 75}{99} > 75,$$

parejas de P. A partir de ahora sólo consideraremos las parejas de casillas en la misma fila, con colores distintos y que usan estas dos columnas. Veamos que estas dos columnas son las que estamos buscando. Si no nos sirven, entonces cualesquiera dos de las parejas que acabamos de contar deben compartir al menos un color. Consideremos una de estas parejas, la cual debe tener dos colores distintos (digamos negro y azul). Como hay más de 50 de estas parejas, debe haber alguna que no tenga color negro. Si no tuviera azul ya habríamos acabado por lo que debe tener otro color y azul (digamos verde y azul). Como hay más de 50 de estas parejas, debe haber alguna que no tenga color azul, por lo que debe ser negro y verde. Ya con estas 3 parejas, cualquier otra debe ser azul y negra o azul y verde o negra y verde. Cada pareja usa 2 de esos colores, por lo que estaríamos usando en total más de 150 veces estos colores (había más de 75 de estas parejas). Pero cada color aparece exactamente 25 veces en cada una de las 2 columnas, por lo que sólo se pueden usar 150 veces los colores. Entonces debe haber dos de las parejas que cumplan la condición que buscamos.

Además de usarse en problemas de combinatoria, el principio de las casillas también se usa en otras áreas. En teoría de números se puede usar para probar resultados muy fuertes, como que todo primo de la forma $4k + 1$ se puede escribir como suma de dos cuadrados, o que todo entero positivo se puede escribir como suma de 4 cuadrados. De otra manera para esto se necesita una prueba muy larga o saber mucha teoría. Normalmente las pruebas que salen usando el principio de las casillas suelen ser muy elegantes.
Otra área en la que se puede usar el principio de las casillas es en geometría. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 6. *Demuestra que no hay una recta que corte los* 3 *lados de un triángulo.*

Para probar eso consideremos como las casillas las 2 partes en la que una recta divide al plano. Dado un triángulo cualquiera y una recta, dos de sus vértices deben quedar en la misma parte, por lo que el lado que forman no intersecta a la recta.

Ejemplo 7. *Dentro de un cuadrado de lado* 1 *hay varios círculos cuyos perímetros suman* 10*. Demuestra que hay una recta paralela a un lado del cuadrado que intersecta a al menos* 4 *de estos círculos.*

Para ver esto proyectemos a los círculos sobre un lado del cuadrado. Cada círculo se proyecta en un segmento de longitud igual a su diámetro. Entonces se proyectan sobre varios segmentos cuyas longitudes suman en total $\frac{10}{\pi}$. Como este número es mayor que 3 y el lado del cuadrado es 1, hay un punto que recibió al menos 4 proyecciones distintas. Si trazamos por ese punto la recta perpendicular al lado, intersecta a al menos 4 de los círculos.

A continuación proponemos una lista de ejercicios para que practiques usar este principio.

Ejercicio 1. Demuestra que en toda fiesta siempre hay dos personas que han dado el mismo número de saludos.

Ejercicio 2. En un zoologico hay animales de 3 especies distintas y hay 4 jaulas disponibles. Demuestra que si hay al menos 25 animales entonces en al menos una jaula hay al menos 2 animales de la misma especie y el mismo sexo.

Ejercicio 3. Demuestra que si se consideran $n+1$ números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ siempre hay dos que son primos relativos.

Ejercicio 4. Demuestra que de 5 enteros positivos siempre hay 3 de ellos cuya suma es múltiplo de 3.

Ejercicio 5. (Olimpiada Iberoamericana, 1998)
En una reunión hay representantes de n países ($n \geq 2$) sentados en una mesa redonda. Se sabe que cualesquiera dos representantes del mismo país sus vecinos a la derecha son de países distintos. Encuentra el mayor número de representantes que puede haber.

Ejercicio 6. (Vietnam, 2007)
Dado un 2007-ágono regular encuentra el menor k tal que entre cualesquiera k vértices del polígono haya 4 tal que el cuadrilátero convexo que forman comparte 3 lados del polígono.

Bibliografía

1.- Engel, A. Problem - solving strategies. Springer, 1998.

2.- Pérez, M.L. Combinatoria.
Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM. 2000.