

# TD

## Espaces préhilbertiens réels

### EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

#### EXERCICE 1 ■□□ Un produit scalaire 1 \_\_\_\_\_

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 2 ■□□ Un produit scalaire 2 \_\_\_\_\_

Montrer que  $\varphi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$  définit un produit scalaire sur l'espace  $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ . ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 3 ■□□ Un produit scalaire 3 \_\_\_\_\_

Montrer que  $\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ . ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 4 ■□□ Un dernier.. \_\_\_\_\_

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{R}$ . Démontrer que l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$  par

$$(P|Q) \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}.$$

définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . Déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire. ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 5 ■■□ Une condition pour être une base orthonormée \_\_\_\_\_

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel  $E$

telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2$$

Montrer que  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  constitue une base orthonormée de  $E$ .

► Indication ► Correction

#### EXERCICE 6 ■□□ On développe \_\_\_\_\_

Soient  $x, y$  deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|}$$

► Indication ► Correction

#### EXERCICE 7 ■□□ Première isométrie \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On suppose que  $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ . Montrer que  $\forall x, y \in E, (f(x) | f(y)) = (x | y)$ . ► Indication ► Correction

### EXERCICES TECHNIQUES

#### EXERCICE 8 ■(A) Cauchy-Schwartz 1 \_\_\_\_\_

Soient  $x_1, \dots, x_n > 0$  tels que  $x_1 + \dots + x_n = 1$ . Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$ .

Préciser les cas d'égalité. ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 9 ■(A) Cauchy-Schwarz 2 \_\_\_\_\_

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et positive. On pose  $I_n = \int_0^1 t^n f(t)dt$ .

Montrer que  $I_{n+p}^2 \leq I_{2n}I_{2p}$ . ► Indication ► Correction

#### EXERCICE 10 ■(A) Cauchy-Schwartz 3 \_\_\_\_\_

Montrer que, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n}\|A\|$ . ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □ Une distance

On se place dans  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- ① Montrer que  $(P | Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- ② Calculer  $d(X^2, P)$  où  $P = \{aX + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

► Indication      ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □ Gram-Schmidt puis projeté

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$  muni du produit scalaire canonique

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

On pose  $H$  l'hyperplan  $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ .

- ① Déterminer une base de  $H$ .
- ② Déterminer une base orthonormale de  $H$ .
- ③ En déduire la projection orthogonale de  $X$  sur  $H$ , puis la distance de  $X$  à  $H$ .

► Indication      ► Correction

EXERCICE 13 ■ □ □ Un projeté dans  $\mathbb{R}^4$ 

Soit  $E = \mathbb{R}^4$  muni de son produit scalaire usuel et de la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ . On considère  $G$  le sous-espace vectoriel des quadruplets  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de  $E$  tels que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- ① Déterminer une base orthonormale de  $G$ .
- ② Déterminer la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale  $p_G$  sur  $G$ .
- ③ Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  un élément de  $E$ . Déterminer la distance de  $x$  à  $G$ .

► Indication      ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □ Banque CCP - Exercice 80

Soit  $E$  l'espace vectoriel des applications continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

- ① Démontrer que  $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- ② Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $f : x \mapsto \cos x$  et  $g : x \mapsto \cos(2x)$ . Déterminer le projeté orthogonal sur  $F$  de la fonction  $u : x \mapsto \sin^2 x$ .

► Indication      ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □ Banque CCP - Exercice 81

On définit dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'application  $\varphi$  par  $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^\top A')$ , où  $\text{tr}(A^\top A')$  désigne la trace du produit de la matrice  $A^\top$  par la matrice  $A'$ . On admet que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On note  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

- ① Démontrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- ② Déterminer une base de  $\mathcal{F}^\perp$ .
- ③ Déterminer le projeté orthogonal de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $\mathcal{F}^\perp$ .
- ④ Calculer la distance de  $J$  à  $\mathcal{F}$ .

► Indication      ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □ Banque CCP - Exercice 82

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie  $n > 0$ . On admet que, pour tout  $x \in E$ , il existe un élément unique  $y_0$  de  $F$  tel que  $x - y_0$  soit orthogonal à  $F$  et que la distance de  $x$  à  $F$  soit égale à  $\|x - y_0\|$ .

Pour  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  et  $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ , on pose  $(A | A') = aa' + bb' + cc' + dd'$ .

- ① Démontrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- ② Calculer la distance de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  au sous-espace vectoriel  $F$  des matrices triangulaires supérieures.

► Indication      ► Correction

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 17 ■ ■ □ Un contre-exemple \_\_\_\_\_

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire usuel  $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .

Soit  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ . Montrer que  $F^\perp = \{0_E\}$ . A-t-on  $F \oplus F^\perp = E$  ?

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □ Encore Pythagore \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace euclidien,  $F, G$  deux sous-espaces.

Montrer que  $F = G^\perp$  si, et seulement si, pour tout  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$ .

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □ Distance aux matrices symétriques \_\_\_\_\_

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left( \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$ . ► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □ Un projecteur orthogonal \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $p$  un projecteur de  $E$  tel que

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont orthogonaux. ► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ ■ Des projecteurs orthogonaux \_\_\_\_\_

Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien, et  $p, q \in \mathcal{L}(E)$  deux projecteurs orthogonaux. Démontrer l'équivalence entre

- ①  $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q)$       ② Pour tout  $x \in E$ ,  $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$ .

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ □ Vecteurs orthogonaux à leur image \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que, pour tout  $x \in E$ ,  $\langle u(x) | x \rangle = 0$ . Montrer que  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont supplémentaires. ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □ Distance, mais à quel sous-espace ? \_\_\_\_\_

Calculer  $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a \cos(t) - b \sin(t))^2 dt$ . ► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ ■ Déterminant de Gram \_\_\_\_\_

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ . On pose  $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad G_{i,j} = (e_i | e_j)$ .

① Montrer que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre si, et seulement si,  $G$  est inversible.

② On suppose que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et l'on note  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$  la base orthonormée obtenue à partir de  $\mathcal{B}$  par l'algorithme d'orthonormalisation de GramSchmidt. On pose  $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ . Montrer que  $P$  est triangulaire supérieure et que  $G = P^T P$ .

③ En déduire que  $0 < \det(G) \leq \prod_{i=1}^n \|e_i\|^2$ .

④ On suppose désormais que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre, et on note  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . Soit  $e_0 \in E$  et  $\tilde{G}$  la matrice définie par  $\tilde{G}_{i,j} = (e_i | e_j)$ , pour tout  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Démontrer que  $d(e_0, F)^2 = \frac{\det \tilde{G}}{\det G}$ .

► Indication ► Correction

## Indications

### EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 **Un produit scalaire 1** \_\_\_\_\_

Vérifier calmement la définition. N'oubliez pas le nombre de racines d'un polynôme.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 **Un produit scalaire 2** \_\_\_\_\_

Vérifier calmement la définition. N'oubliez pas la continuité !

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 **Un produit scalaire 3** \_\_\_\_\_

Vérifier calmement la définition. N'oubliez pas la continuité !

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **Un dernier..** \_\_\_\_\_

Vérifier calmement la définition. On pensera à la formule de Taylor.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **Une condition pour être une base orthonormée**

La normalité est immédiate. Calculer  $\|e_i + e_j\|^2$  de deux manières différentes pour obtenir l'orthogonalité.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **On développe** \_\_\_\_\_

On développe de chaque côté.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Première isométrie** \_\_\_\_\_

Calcul de la norme de  $f(x + y)$ , puis séparation par identité remarquable.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

### EXERCICES TECHNIQUES

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Cauchy-Schwartz 1** \_\_\_\_\_

Le produit scalaire est le canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . Un des vecteurs est  $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 9 **Cauchy-Schwarz 2** \_\_\_\_\_

Le produit scalaire est le canonique sur  $C^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 10 **Cauchy-Schwartz 3** \_\_\_\_\_

Produit scalaire canonique pour les matrices. La matrice  $I_n$  a tendance à disparaître...

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

#### INDICATION POUR L'EXERCICE 11 **Une distance** \_\_\_\_\_

Produit scalaire fait dans l'EXERCICE 1. Calcul de distance direct par calcul du projeté orthogonal.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 **Gram-Schmidt puis projeté** \_\_\_\_\_

Application directe des méthodes du cours. On orthonormalise avec Gram-Schmidt, puis on utilise la formule du projeté grâce à la base orthonormale.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 **Un projeté dans  $\mathbb{R}^4$**  \_\_\_\_\_

Application directe des méthodes du cours.

- ① On détermine  $G$  par définition, puis une base, puis on orthonormalise.
- ② On utilise la formule du projeté grâce à la base orthonormale, pour calculer l'image des vecteurs de base.
- ③ D'après le cours, c'est la norme de la différence entre  $x$  et son projeté orthogonal sur  $F^\perp$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 **Banque CCP - Exercice 80** \_\_\_\_\_

Pas de difficulté particulière. On peut choisir la méthode du projeté : Gram Schmidt ou calcul direct.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 **Banque CCP - Exercice 81** \_\_\_\_\_

Application directe des méthodes du cours.

- ① Sans difficulté.
- ② On détermine  $F^\perp$  par définition, puis une base, puis on orthonormalise.
- ③ On utilise la formule du projeté grâce à la base orthonormale.
- ④ D'après le cours, c'est la norme du projeté orthogonal sur  $F^\perp$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 **Banque CCP - Exercice 82** \_\_\_\_\_

Ici on peut poser  $B$  le projeté de  $A$  sur l'espace des matrices triangulaires supérieures, et calculer directement en y mettant les 3 équations d'orthogonalité avec les 3 vecteurs de bases de l'espace des matrices triangulaires supérieures.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

### INDICATION POUR L'EXERCICE 17 Un contre-exemple \_\_\_\_\_

Pour  $g \in F^\perp$ , on pourra considérer la fonction 
$$h : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & tg(t) . \end{array}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 18 Encore Pythagore \_\_\_\_\_

Le sens direct découle du théorème de Pythagore.

Le sens indirect, vient du fait que  $F \subset G^\perp$ , ce qui montre que  $F$  et  $G$  sont en somme directe, puis que,  $F \oplus G = E$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 19 Distance aux matrices symétriques \_\_\_\_\_

Réécrire cet infimum en une distance d'une matrice à un espace vectoriel.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 20 Un projecteur orthogonal \_\_\_\_\_

Utiliser l'élément  $x + y$ , avec  $x \in \text{Ker } p$  et  $y \in \text{Im } p$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 21 Des projecteurs orthogonaux \_\_\_\_\_

Travailler avec les noyaux peut aider.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 22 Vecteurs orthogonaux à leur image \_\_\_\_\_

Il suffit de montrer leur somme directe, pour des raisons de dimension.

Si  $u(y)$  est dans cette intersection, considérer  $(u(u(y) - y), u(y) - y)$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 23 Distance, mais à quel sous-espace ? \_\_\_\_\_

Considérer l'espace vectoriel engendré par  $\sin$  et  $\cos$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

### INDICATION POUR L'EXERCICE 24 Determinant de Gram \_\_\_\_\_

Petit problème pour ceux qui s'ennuient.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

## Corrections

### EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

#### Correction de l'EXERCICE 1 Un produit scalaire 1

Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.

Si  $\varphi(P, P) = 0$  alors

$$\sum_{k=0}^n P(k)^2 = 0$$

donc  $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, P(k) = 0$ . Ainsi  $P$  admet au moins  $n+1$  racines, or  $\deg P \leq n$  donc  $P = 0$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

#### Correction de l'EXERCICE 2 Un produit scalaire 2

Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.

Si  $\varphi(f, f) = 0$  alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout  $t \in [-1; 1], f(t)^2(1-t^2) = 0$  et donc pour tout  $t \in ]-1; 1[, f(t) = 0$ . Par continuité de  $f$  en 1 et -1, on obtient  $f(t) = 0$  sur  $[-1; 1]$ . On peut alors conclure que  $\varphi$  est un produit scalaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

#### Correction de l'EXERCICE 3 Un produit scalaire 3

$\varphi$  est clairement une forme bilinéaire symétrique. On a aussi  $\varphi(f, f) \geq 0$  et

$$\varphi(f, f) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0$$

car  $f'^2$  est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit

$$\varphi(f, f) = 0 \implies f = 0$$

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

#### Correction de l'EXERCICE 4 Un dernier..

L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est clairement symétrique. Sa bilinéarité vient de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation en un point. De plus, si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^n \frac{(P^{(k)}(a))^2}{(k!)^2} \geq 0$$

De plus,  $\langle P, P \rangle = 0$  si et seulement si, pour tout  $k = 0, \dots, n, P^{(k)}(a) = 0$  c'est-à-dire si et seulement si  $a$  est racine de multiplicité au moins  $n+1$  de  $P$ . Puisque  $P$  est de degré au plus  $n, P = 0$ . Posons ensuite  $P_j(X) = (X-a)^j$ . Alors  $P_j^{(k)}(a) = 0$  si  $k \neq j$  et  $P_j^{(j)}(a) = j!$ . Ainsi, on a pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$\langle P_j, P \rangle = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}$$

Appliquant ceci aux  $P_\ell$ , on constate que  $(P_j)_{j=0, \dots, n}$  est une famille orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$ . En particulier, c'est une famille libre qui comporte  $n+1$  vecteurs dans un espace de dimension  $n+1$ , et c'est donc une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

#### Correction de l'EXERCICE 5 Une condition pour être une base orthonormée

Pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | e_j)^2$$

donc  $(e_i | e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Ainsi la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est orthonormée. Si la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  n'est pas une base, on peut déterminer  $e_{n+1} \in E$  tel que  $(e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1})$  soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où

$$e_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$$

Mais alors

$$\|e_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | e_{n+1})^2 = 0$$

ce qui est contradictoire. Par suite la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base orthonormée.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

#### Correction de l'EXERCICE 6 On développe

En développant le produit scalaire

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2 \frac{(x|y)}{\|x\|^2 \|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left( \frac{\|x-y\|}{\|x\| \|y\|} \right)^2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

### Correction de l'EXERCICE 7 Première isométrie

Pour tout  $x, y \in E$ ,

$$\|f(x+y)\|^2 = \|f(x) + f(y)\|^2 \underset{\text{I.R.}}{=} 2(f(x)|f(y)) + \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2$$

$\|$

$$\|x+y\|^2 \underset{\text{I.R.}}{=} 2(x|y) + \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ d'où l'égalité demandée.}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

## EXERCICES TECHNIQUES

### Correction de l'EXERCICE 8 Cauchy-Schwarz 1

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_k}} \sqrt{x_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^n x_k$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des  $n$ -uplets

$$\left( \frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \text{ et } (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \dots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \dots = x_n = 1/n$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

### Correction de l'EXERCICE 9 Cauchy-Schwarz 2

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left( \int_0^1 t^{n+p} f(t) dt \right)^2 = \left( \int_0^1 t^n \sqrt{f(t)} t^p \sqrt{f(t)} dt \right)^2 \leq \int_0^1 t^{2n} f(t) dt \int_0^1 t^{2p} f(t) dt$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

### Correction de l'EXERCICE 10 Cauchy-Schwarz 3

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire  $(X, Y) \mapsto \text{trace}(X^\top Y)$ , sur  $I_n$  et  $A$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

### Correction de l'EXERCICE 11 Une distance

- ① Sans difficulté, notamment parce qu'un polynôme de degré  $\leq 2$  possédant trois racines est nécessairement nul.
- ②  $d(X^2, P) = \|X^2 - \pi\|$  avec  $\pi = aX + b$  projeté orthogonal de  $X^2$  sur  $P$ .  $(X^2 - \pi | 1) = (X^2 - \pi | X) = 0$  donne le système

$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9 \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

et après calcul

$$d = \sqrt{2/3}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

### Correction de l'EXERCICE 12 Gram-Schmidt puis projeté

- ① Puisque  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{R}_3[X]$  (c'est le noyau d'une forme linéaire), sa dimension est 3. Pour trouver une base de  $H$ , il suffit de trouver trois vecteurs indépendants. Posons par exemple  $R_1(X) = X - 1$ ,  $R_2(X) = X^2 - X$  et  $R_3(X) = X^3 - X^2$ .  $(R_1, R_2, R_3)$  est une famille de 3 éléments de  $H$ , qui est libre car les degrés respectifs des  $R_i$  sont distincts. On a donc bien une base de l'hyperplan. Il est possible aussi de déterminer une base de l'hyperplan comme on le fait usuellement quand on connaît l'équation d'un sous-espace vectoriel. Notons  $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ . On a donc

$$\begin{aligned} P \in H &\iff a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ &\iff a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ &\iff \begin{cases} a_0 = -a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 = a_1 \\ a_2 = a_2 \\ a_3 = a_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette méthode donne comme base  $(X - 1, X^2 - X, X^3 - X^2)$ .

- ② Il suffit d'appliquer le procédé de Gram-Schmidt à partir de l'une des bases construites à la question précédente. On a donc :

$$P_1 = R_1 / \|R_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}}(X - 1)$$

Posons  $P'_2 = R_2 + \lambda P_1$ , avec  $\lambda$  de sorte que  $(P'_2, P_1) = 0$ , ce qui entraîne  $\lambda = -(P_1, R_2)$ . Après normalisation, on trouve

$$P_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (X + 1)/2)$$

On procède de même pour  $P_3$ , et on trouve

$$P_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}(X^3 - (X^2 + X + 1)/3).$$

- ③ On a

$$P_H(x) = \sum_{j=1}^3 (X, P_j) P_j = \frac{-1}{4}(X^3 + X^2 - 3X + 1).$$

Il vient :

$$d^2(x, H) = \|x\|^2 - \|P_H(x)\|^2 = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Si on n'avait pas calculé une base orthonormale de  $H$ , on aurait pu remarquer que le polynôme  $Q = X^3 + X^2 + X + 1$  est normal à l'hyperplan  $H$  et donc que

$$d(X, H) = \frac{|\langle X, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

### Correction de l'EXERCICE 13 Un projeté dans $\mathbb{R}^4$

Voir banque CCINP

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

### Correction de l'EXERCICE 14 Banque CCP - Exercice 80

Voir banque CCINP

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

### Correction de l'EXERCICE 15 Banque CCP - Exercice 81

- ① On remarque d'abord qu'une matrice  $M$  appartient à  $F$  si et seulement si elle s'écrit  $aI_2 + bK$  avec  $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Autrement dit,  $F$  est l'espace vectoriel engendré par les matrices  $I_2$  et  $K$ . Soit  $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  un élément de  $E$ . Alors  $M$  est élément de  $F^\perp$  si et seulement si  $M$  est orthogonale à  $I_2$  et à  $K$ . Maintenant,

$$\langle M, I_2 \rangle = x + t \text{ et } \langle M, K \rangle = y - z$$

Ainsi,  $M$  est élément de  $F^\perp$  si et seulement si  $t = -x$  et  $z = y$ . Autrement dit, on a prouvé que

$$F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Une base de  $F^\perp$  est donnée par  $(A, B)$ , avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va orthonormaliser cette base pour obtenir une base orthonormale de  $F^\perp$ . On ne va pas avoir à utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, car  $A$  et  $B$  sont déjà orthogonales :  $\langle A, B \rangle = 0$ . De plus,  $\|A\| = \|B\| = \sqrt{2}$  comme le montre un rapide calcul. Si on pose

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}A \text{ et } B_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}B$$

alors  $(A_1, B_1)$  est une base orthonormée de  $F^\perp$ .

- ② Il suffit d'appliquer le résultat qui exprime le projeté dans une base orthonormale

$$\begin{aligned} p_{F^\perp}(J) &= \langle J, A_1 \rangle A_1 + \langle J, B_1 \rangle B_1 \\ &= 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} B_1 \\ &= B \end{aligned}$$

- ③ On sait que

$$\text{dist}(J, F) = \|J - p_F(J)\| = \|p_{F^\perp}(J)\| = \|B\| = \sqrt{2}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

### Correction de l'EXERCICE 16 Banque CCP - Exercice 82

Voir banque CCINP

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

## EXERCICES "COMME EN COLLE"

### Correction de l'EXERCICE 17 Un contre-exemple

Prenons  $h$  et  $g$  comme dans l'indication.

Par nullité de l'intégrale d'une fonction positive,  $\forall t \in [0, 1], \quad tg(t)^2 = 0$ .

Donc  $\forall t \in ]0, 1[, \quad g(t) = 0$  puis  $g(0) = 0$  par continuité de  $g$  en 0.

Donc  $F^\perp = \{0_E\}$  et  $F \oplus F^\perp = F$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

### Correction de l'EXERCICE 18 Encore Pythagore

- Si  $F = G^\perp$ , alors, pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, F)^2 = \|p_G(x)\|^2$  et  $d(x, G)^2 = \|x - p_G(x)\|^2$  : le résultat découle immédiatement du théorème de Pythagore.
- Supposons désormais que  $\|x\|^2 = d(x, F)^2 + d(x, G)^2$  pour tout  $x \in E$ .
  - ▷ Pour tout  $x \in F$ ,  $d(x, F) = 0$  donc  $\|x\|^2 = d(x, G)^2 = \|x\|^2 - \|p_G(x)\|^2$  donc  $p_G(x) = 0_E$  soit  $x \in G^\perp$ . Ainsi,  $F \subset G^\perp$  (et en particulier  $F$  et  $G$  sont en somme directe).
  - ▷ Pour tout  $x \in (F \oplus G)^\perp$ ,  $x \in F^\perp$  donc  $d(x, F)^2 = \|x\|^2$  et, par symétrie,  $d(x, G)^2 = \|x\|^2$ . En reportant dans l'égalité, on obtient  $\|x\|^2 = 0$  donc  $x = 0_E$ . Ainsi,  $(F \oplus G)^\perp = \{0_E\}$  donc  $F \oplus G = E$ .

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

### Correction de l'EXERCICE 19 Distance aux matrices symétriques

En introduisant la norme euclidienne canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$\|A\| = \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right) = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant  $A = M + N$  avec

$$M = \frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp$$

on obtient

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2$$

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

### Correction de l'EXERCICE 20 Un projecteur orthogonal

Soit  $(x, y) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$ . On a  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x + y) = \lambda x$ .

Par conséquent et d'après l'hypothèse faite sur  $p$ ,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 \|x\|^2 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda(x | y) + \|y\|^2,$$

soit  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 + 2\lambda(x | y) \geq 0$ . La fonction affine  $\lambda \mapsto \|y\|^2 + 2\lambda(x | y)$  est de signe constant sur  $\mathbb{R}$  donc de pente nulle. Ainsi, on a  $(x | y) = 0$ . Donc les espaces vectoriels  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$  sont orthogonaux.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

### Correction de l'EXERCICE 21 Des projecteurs orthogonaux

On va se simplifier la vie en travaillant avec les noyaux plutôt que les images. Il est en effet clair que, si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces de  $E$ , alors

$$F \subset G \iff G^\perp \subset F^\perp.$$

De plus, s'agissant de projections orthogonales,  $\text{Im}(p)^\perp = \text{Ker}(p)$ . L'assertion 1 est donc équivalente à

$$\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$$

Démontrons alors que  $2 \implies 3$ . Supposons 2 et prenons  $y \in \text{Ker}(q)$ . Alors on a

$$\|p(y)\| \leq \|q(y)\| = 0$$

et donc  $p(y) = 0$ . Réciproquement, supposons  $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p)$  et prouvons 2. Soit  $x \in E$ , que l'on décompose en  $x = x_1 + x_2$  dans  $\text{Ker}(q) \oplus \text{Im}(q)$ . Alors,

$$q(x) = x_2 \text{ et } p(x) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_2)$$

$p$  étant une projection orthogonale, on a toujours

$$\|p(x_2)\| \leq \|x_2\|$$

d'après le théorème de Pythagore, en décomposant  $x_2$  dans la somme directe orthogonale  $\text{Im}(p) \oplus \ker(p)$ . Ainsi, on a bien prouvé que

$$\|p(x)\| \leq \|q(x)\|.$$

↪ retour à l'EXERCICE 21

### Correction de l'EXERCICE 22 Vecteurs orthogonaux à leur image

D'après la formule du rang, il suffit de montrer que les sous-espaces  $\text{Ker } u$  et  $\text{Im } u$  sont en somme directe.

Considérons  $x \in \text{Ker } u \cap \text{Im } u$  puis  $t \in E$  tel que  $x = u(t)$ . Alors, d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle u(x-t) \mid x-t \rangle \\ &= \underbrace{\langle u(x) \mid x \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle u(x) \mid t \rangle}_{=0_E} + \underbrace{\langle u(t) \mid x \rangle}_{=\|x\|^2} + \underbrace{\langle u(t) \mid t \rangle}_{=0}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|x\|^2 = 0$  donc  $x = 0_E$ , ce qui montre le résultat voulu.

↪ retour à l'EXERCICE 22

### Correction de l'EXERCICE 23 Distance, mais à quel sous-espace ?

On va faire apparaître ceci comme un problème de calcul de distance à un sous-espace de dimension 2 dans un bon espace préhilbertien. Pour cela, on pose  $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ . On cherche à calculer

$$\inf_{a, b \in \mathbb{R}^2} \|t - a \sin - b \cos\|^2$$

Posons  $F = \text{vect}(\sin, \cos)$ . Alors  $\{a \sin + b \cos : a, b \in \mathbb{R}\} = F$  et ce que l'on cherche est ni plus ni moins que

$$\inf_{f \in F} \|t - f\|^2$$

Puisque  $F$  est de dimension finie, cela revient à calculer le projeté orthogonal  $p_F(t)$  de  $t$  sur  $F$ , puisqu'alors

$$\inf_{f \in F} \|t - f\|^2 = \|t - p_F(t)\|^2 = \|t\|^2 - \|p_F(t)\|^2$$

Reste à calculer  $p_F(t)$ . Il y a plusieurs façons de s'y prendre. Ici, il est facile de voir que

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2t) dt = 0$$

et donc que la famille  $(\sin, \cos)$  est déjà une base orthogonale de  $F$ . On la normalise en remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

De même on prouve que

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = \pi$$

Ainsi,  $\left(\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\right)$  est une base orthonormée de  $F$ . On a alors

$$\begin{aligned} p_F(t) &= \left\langle t, \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\cos}{\sqrt{\pi}} + \left\langle t, \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{\sin}{\sqrt{\pi}} \\ &= \langle t, \cos \rangle \frac{\cos}{\pi} + \langle t, \sin \rangle \frac{\sin}{\pi} \end{aligned}$$

Il reste à calculer ces deux produits scalaires. Pour cela, on remarque que, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t e^{it} dt &= \left[ t \frac{e^{it}}{i} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{i} e^{it} dt \\ &= -2i\pi + \left[ e^{it} \right]_0^{2\pi} \\ &= -2i\pi \end{aligned}$$

En particulier, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on trouve

$$\int_0^{2\pi} t \cos(t) dt = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} t \sin(t) dt = -2\pi$$

Finalement, on a

$$p_F(t) = -2 \sin$$

Pour conclure,

$$\begin{aligned} \inf_{f \in F} \|t - f\|^2 &= \|t\|^2 - \|p_F(t)\|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} t^2 dt - \int_0^{2\pi} 4 \sin^2(t) dt \\ &= \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi \end{aligned}$$

Il convient ici de distinguer ce qui est du calcul technique d'intégrale et ce qui relève des espaces préhilbertiens.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

### Correction de l'EXERCICE 24 Déterminant de Gram

- ① Sens direct Supposons que  $(e_1, \dots, e_n)$  soit libre. Vérifions que  $G$  est inversible en montrant que la famille de ses colonnes  $(C_1, \dots, C_n)$  est une famille libre. Soit donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels tels que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en examinant le  $i$ -ème coefficient des colonnes, on obtient  $\sum_{j=1}^n \lambda_j (e_i | e_j) = 0$  puis, par bilinéarité du produit scalaire,  $(e_i | \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j) = 0$ . On en déduit que

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp,$$

puis  $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$  et enfin  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , par liberté de la famille  $(e_1, \dots, e_n)$ . Sens réciproque Supposons que  $G$  soit inversible. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels tels que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$ . En remontant les calculs précédents, on obtient  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ , ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible  $G$ . On en déduit que  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .

- ②
- Par construction, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_j)$ , ce qui justifie que  $P$  soit une matrice triangulaire supérieure.
  - Tout d'abord, on observe que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $p_{i,j} = (e_j | f_i)$  par expression des coordonnées dans une base orthonormée. Fixons  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  et calculons

$$(P^T P)_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{k,i} p_{k,j} = \sum_{k=1}^n (e_i | f_k) (e_j | f_k).$$

D'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on obtient

$$(P^T P)_{i,j} = (e_i | e_j).$$

On peut conclure que  $G = P^T P$ .

- ③ On en déduit

$$\det(G) = \det(P^T P) = \det(P^T) \det(P) = \det(P)^2.$$

La matrice  $G$  est inversible donc de déterminant non nul, et d'après l'égalité précédente,  $\det(G) > 0$ . Enfin,  $P$  est une matrice triangulaire,

$$\text{donc } \det(P)^2 = \prod_{j=1}^n (p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^n (e_j | f_j)^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs  $f_j$ ,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (e_j | f_j)^2 \leq \|e_j\|^2.$$

Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit

$$\det(G) \leq \prod_{j=1}^n \|e_j\|^2.$$

- ④ Écrivons  $x = u + v$ , avec  $u \in F$  et  $v \in F^\perp$ , et rappelons que  $d(x, F) = \|v\|$ . Si on regarde la matrice de Gram associée, et tenant compte de l'orthogonalité de  $v$  avec les autres vecteurs  $x_1, \dots, x_p$ , on trouve

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \|u\|^2 + \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \dots & \langle u, x_p \rangle \\ \langle x_1, u \rangle + 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p, u \rangle + 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \dots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Par multilinéarité du déterminant, et en inspectant la première colonne, on trouve

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = G(u, x_1, \dots, x_p) + \begin{vmatrix} \|v\|^2 & \langle u, x_1 \rangle & \dots & \langle u, x_p \rangle \\ 0 & \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \langle x_p, x_1 \rangle & \dots & \langle x_p, x_p \rangle \end{vmatrix}.$$

Mais  $G(u, x_1, \dots, x_p)$  est nul car la famille  $(u, x_1, \dots, x_p)$  est liée. Le second déterminant est lui égal à  $\|v\|^2 G(x_1, \dots, x_p)$ , ce qui achève la preuve.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)