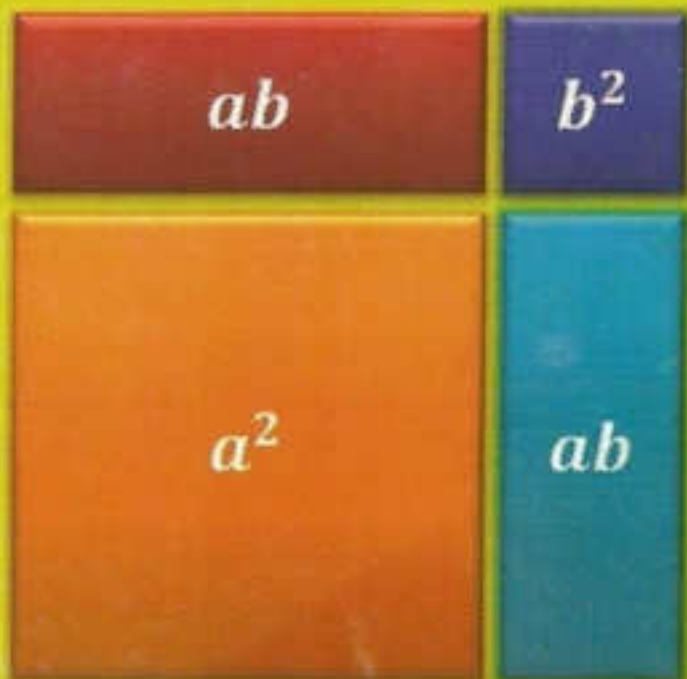


ÁLGEBRA

PRODUCTOS NOTABLES

$$(x+a)(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab$$

$$(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a + a)$$



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$\bar{x} - 14 \sqrt{\text{H}\mu\epsilon\vec{r}\tau\alpha\varsigma}$$

Las Matemáticas son fáciles

twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

Nivel UNI



Productos notables

Son aquellos resultados de ciertas multiplicaciones algebraicas que se obtienen de forma directa, sin la necesidad de aplicar los axiomas de distribución.

Ejemplo

- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$



A continuación indicaremos los principales productos notables.

Multiplicación de dos binomios con un término en común (Identidad de Stevin)

I

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

También:

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

(multiplicación de tres binomios con un término en común)

Ejemplo

- $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6$
- $(x - 3)(x + 5) = x^2 + (-3 + 5)x - 3 \cdot 5 = x^2 + 2x - 15$
- $(x - 4)(x - 6) = x^2 + (-4 - 6)x + (-4)(-6) = x^2 - 10x + 24$
- $(x - 7)(x + 2) = x^2 + (-7 + 2)x - 7 \cdot 2 = x^2 - 5x - 14$
- $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + (1 + 2 + 3)x^2 +$
 $\quad \quad \quad + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)x + 1 \cdot 2 \cdot 3$
 $\quad \quad \quad = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Ejemplo

Calcule el valor de la expresión $J = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ si se sabe que $x^2 + 5x + 2 = 0$.

Resolución.

Se tiene la expresión: $J = \underline{(x + 1)(x + 2)} \underline{(x + 3)(x + 4)}$

Multiplicamos convenientemente:

$$J = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$$

Por dato:

$$x^2 + 5x + 2 = 0, \text{ entonces } x^2 + 5x = -2$$

Lo reemplazamos en J :

$$J = (-2 + 4)(-2 + 6) = (2)(4) = 8$$

Por lo tanto, el valor de J es 8.

Ejemplo

Si $ax + by + cz + abcxyz = 0$, calcule el valor de

$$\frac{(ax + 1)(by + 1)(cz + 1)}{(ax - 1)(by - 1)(cz - 1)}$$

Resolución.

Recuerde:

$$\begin{aligned} (t + a)(t + b)(t + c) &= t^3 + (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t + abc \\ (t - a)(t - b)(t - c) &= t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc \end{aligned}$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} &\frac{(ax + 1)(by + 1)(cz + 1)}{(ax - 1)(by - 1)(cz - 1)} \\ &= \frac{(1 + ax)(1 + by)(1 + cz)}{-(1 - ax)(1 - by)(1 - cz)} \\ &= \frac{1^3 + (ax + by + cz) \cdot 1^2 + (abxy + bcyz + cazx) \cdot 1 + abcxyz}{-(1^3 - (ax + by + cz) \cdot 1^2 + (abxy + bcyz + cazx) \cdot 1 - abcxyz)} \end{aligned}$$

Por dato:

$$\begin{aligned} &= \frac{-abcxyz}{1 + \overbrace{ax + by + cz + abxy + bcyz + cazx + abcxyz}^{abcxyz}} \\ &= \frac{-\left(1 - \overbrace{ax + by + cz + abxy + bcyz + cazx - abcxyz}^{abcxyz}\right)}{abcxyz} \\ &= \frac{1 + abxy + bcyz + cazx}{-(1 + abxy + bcyz + cazx)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

II

Desarrollo de un binomio al cuadrado (Trinomio cuadrado perfecto)

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo

$$\blacksquare (x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\blacksquare (x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$\blacksquare (2x-3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$\blacksquare (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\blacksquare \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\blacksquare \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

Ejemplo

Se sabe que: $x + y = \sqrt{5}$ y $x^2 + y^2 = 3$;
halle el valor de xy .

Resolución.

Por dato: $x + y = \sqrt{5}$

Elevamos al cuadrado: $(x + y)^2 = \sqrt{5}^2$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

Reemplazamos el 2do dato: $3 + 2xy = 5$

Por lo tanto, $xy = 1$

Ejemplo

Si $x + \frac{1}{x} = 3$; halle el valor de $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

Resolución.

Por dato: $x + \frac{1}{x} = 3$

Elevamos al cuadrado: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Al cuadrado: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = 7^2$

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 49$$

Por lo tanto, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$

twitter.com/calapenshko



Ejemplo Si $2^{4x} + 2^{-4x} = 119$ y $x > 0$, halle el valor de $2^x - 2^{-x} + 5$.

Resolución.

Por dato: $2^{4x} + 2^{-4x} = 119$

Sumamos 2: $2^{4x} + 2 + 2^{-4x} = 121$
 $(2^{2x} + 2^{-2x})^2 = 121 \quad (= 11^2)$

De donde: $2^{2x} + 2^{-2x} = 11$

Restamos 2: $2^{2x} - 2 + 2^{-2x} = 9$
 $(2^x - 2^{-x})^2 = 9 \quad (= 3^2)$

Luego, $2^x - 2^{-x} = 3$

Por lo tanto, $2^x - 2^{-x} + 5 = 8$

Identidades de Legendre

i. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

ii. $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Ejemplo ■ $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2) = 2(3 + 2) = 10$

■ $(x + 3)^2 + (x - 3)^2 = 2(x^2 + 3^2) = 2(x^2 + 9)$

■ $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 4 \cdot x \cdot 1 = 4x$

■ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 4$

Ejemplo Reduzca la expresión $M = \frac{(ab + n)^2 - (ab - n)^2}{(a + b)^2 - (a - b)^2}$

Resolución.

Aplicamos la 2da identidad de Legendre arriba y abajo:

$$M = \frac{(ab + n)^2 - (ab - n)^2}{(a + b)^2 - (a - b)^2} = \frac{4abn}{4ab} = n$$

Ejemplo Si $(2x - y - z)^2 - (2x - y + z)^2 = 2[(y - 2x)^2 + z^2]$, halle el valor de $E = \left(\frac{2x - z}{2z - y}\right)^2 + \frac{2x - y}{2z}$

Resolución.

Por dato: $\frac{(2x - y - z)^2 - (2x - y + z)^2}{2\text{da identidad de Legendre}} = 2[(y - 2x)^2 + z^2]$

$$-4(2x - y)z = 2[(2x - y)^2 + z^2]$$

Sacamos mitad:

$$-2(2x - y)z = (2x - y)^2 + z^2$$

$$0 = (2x - y)^2 + 2(2x - y)z + z^2$$

$$0 = (2x - y + z)^2$$

$$2x - y + z = 0$$

$$2x = y - z$$

Lo reemplazamos en la expresión E:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{2x - z}{2z - y}\right)^2 + \frac{2x - y}{2z} = \left(\frac{y - z - z}{2z - y}\right)^2 + \frac{y - z - y}{2z} \\ &= \left(\frac{y - 2z}{2z - y}\right)^2 + \frac{-z}{2z} \\ &= (-1)^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

III**Diferencia de cuadrados**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo

- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3 - 2 = 1$
- $(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
- $(3x + 2)(3x - 2) = (3x)^2 - 2^2 = 9x^2 - 4$
- $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{1 + 2\sqrt{2} + 2} - \sqrt{3}^2 = 2\sqrt{2}$

Ejemplo

Reduzca la expresión $J = \frac{(x + 3)(x - 3)(x^2 + 9) + 81}{(x + 2)(x - 2) + 4}$

Resolución.

Aplicamos diferencia de cuadrados arriba y abajo:

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{\overbrace{x^2 - 3^2}^{(x+3)(x-3)} (x^2 + 9) + 81}{\overbrace{(x+2)(x-2)}^{x^2 - 2^2} + 4} = \frac{\overbrace{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}^{(x^2)^2 - 9^2} + 81}{x^2 - 4 + 4} \\
 &= \frac{x^4 - 81 + 81}{x^2} \\
 &= \frac{x^4}{x^2} \\
 &= x^{4-2} = x^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $J = x^2$.

Ejemplo Calcule el valor de J .

$$J = \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right)^2 - 4$$

Resolución.

Se quiere reducir la expresión:

$$J = \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right)^2 - \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} \right)^2 - 4$$

Por la segunda identidad de Legendre:

$$J = 4\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} - 4$$

$$J = 4\sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} - 4$$

Por diferencia de cuadrados:

$$J = 4\sqrt{\sqrt{5}^2 - 2^2} - 4$$

$$J = 4\sqrt{1} - 4$$

Por lo tanto, $J = 0$.

Ejemplo Si la diferencia de cuadrados de las edades de Mark y Alexie es de 17 y el cuadrado de la suma de las edades es 289; entonces, ¿cuántos años Mark es mayor que Alexie?

Resolución.

Sea x la edad de Mark e y la edad de Alexie.

Luego, los datos son:

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{17} = 17 \quad y \quad (x + y)^2 = 289$$

$$\underbrace{(x + y)(x - y)}_{17} = 17 \quad x + y = \sqrt{289} = 17$$

Es decir,

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Edad de} \\ \text{Mark}}} - \underbrace{y}_{\substack{\text{Edad de} \\ \text{Alexie}}} = 1$$

Por lo tanto, Mark es mayor que Alexie en 1 año.

Consecuencia

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Prueba

Se sabe que (identidades de Legendre):

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Multiplicamos:

$$[(a + b)^2 + (a - b)^2][(a + b)^2 - (a - b)^2] = 2(a^2 + b^2) \cdot 4ab$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Ejemplo

Simplifique la expresión M .

$$M = \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{2a^2 + 2b^2}$$

Resolución.

Recuerde:

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

Nos piden simplificar:

$$\begin{aligned} M &= \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{2a^2 + 2b^2} = \frac{8ab(a^2 + b^2)}{2(a^2 + b^2)} \\ &= \frac{8ab}{2} \\ &= 4ab \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M = 4ab$.

Desarrollo de un trinomio al cuadrado

IV

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

También:

$$(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2abc(a + b + c)$$

Ejemplo $(x^2 + x + 1)^2 = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 + 2(x^2 \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x^2)$
 $= x^4 + x^2 + 1 + 2(x^3 + x + x^2)$

Ejemplo Sean a, b y c números reales de modo que $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ y
 $(a + b + c)(1 + ab + bc + ca) = 32$. Halle el valor de $(a + b + c)$.

Resolución.

Se sabe que: $(a + b + c)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2(ab + bc + ca)$

Factorizamos 2 en el lado derecho:

$$(a + b + c)^2 = 2 \frac{(1 + ab + bc + ca)}{\frac{32}{a + b + c}}$$

$$(a + b + c)^2 = \frac{64}{a + b + c}$$

Es decir, $(a + b + c)^3 = 64$

Tomamos $\sqrt[3]{}$: $\sqrt[3]{(a + b + c)^3} = \sqrt[3]{64}$

Ejemplo Si $a(b + c) = -bc$ y $a + b + c = 2$, halle el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

Resolución.

Por dato: $a(b + c) = -bc$

$$ab + ac = -bc$$

Entonces $ab + ac + bc = 0$

Se sabe que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

$$(2)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(0)$$

Por lo tanto, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$

Ejemplo Sean a , b y c números reales positivos tales que:

$$\frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 2$$

determine el valor de $\sqrt{a + b + c}$.

Resolución.

Por dato:

$$\frac{ab + bc + ca}{3} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 2$$

Es decir,

$$ab + bc + ca = 6 \text{ y } a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

Se sabe que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Reemplazando los datos:

$$(a + b + c)^2 = 4 + 2(6)$$

$$(a + b + c)^2 = 16$$

De donde:

$$a + b + c = 4 \text{ y } a + b + c = -4$$

Como a , b y c son números positivos, entonces $a + b + c = 4$.

Por lo tanto, $\sqrt{a + b + c} = 2$.

Desarrollo de un binomio al cubo

V

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} (x + 2)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - 4)^3 &= x^3 - 3x^2 \cdot 4 + 3x \cdot 4^2 - 4^3 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Ejemplo

Halle un valor de x si se sabe que: $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Resolución.



Por dato: $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

Sumamos 2: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2$

$$(x + 1)^3 = 2$$

Tomamos raíz cúbica: $\sqrt[3]{(x + 1)^3} = \sqrt[3]{2}$

$$x + 1 = \sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, $x = \sqrt[3]{2} - 1$

Identidades de Cauchy (Forma semidesarrollada)

i. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

ii. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

Ejemplo

■ $(x + 2)^3 = x^3 + 2^3 + 3 \cdot x \cdot 2(x + 2)$

■ $(x - 5)^3 = x^3 - 5^3 - 3 \cdot x \cdot 5(x - 5)$

■ $(a^x + a^{-x})^3 = a^{3x} + a^{-3x} + 3a^x a^{-x}(a^x + a^{-x})$

Ejemplo

Halle el valor de $x^3 + \frac{1}{x^3}$ si se sabe que $x + \frac{1}{x} = 3$.

Resolución.

Por dato: $x + \frac{1}{x} = 3$

Elevamos al cubo: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 \cdot \underbrace{x}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_3 \left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

De donde: $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

Ejemplo

Halle el valor de ab si se sabe que: $a + b = 1$ y $a^3 + b^3 = 2$.

Resolución.

Por dato: $a + b = 1$

Elevamos al cubo: $(a + b)^3 = 1^3$

$$\frac{a^3 + b^3}{2} + 3ab \frac{(a + b)}{1} = 1$$

$$2 + 3ab = 1$$

$$ab = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo Halle el valor de $x + y$, si x e y satisfacen las ecuaciones:

$$xy(x + y) = 420 \quad y \quad x^3 + y^3 = 468$$

Resolución.

Recuerde:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

De los datos:

• Primer dato por 3: $3xy(x + y) = 1260$

• Segundo dato: $x^3 + y^3 = 468$

Sumamos: $x^3 + 3xy(x + y) + y^3 = 1728$

$$(x + y)^3 = 1728$$

$$x + y = \sqrt[3]{1728}$$

$$x + y = 12$$

Por lo tanto, $x + y = 12$.

Ejemplo Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 3x + 12$ y el número

$$n = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}, \text{ halle el valor de } P(n).$$

Resolución.

Se tiene el polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x + 12$$

Nos piden calcular $P(n)$; es decir:

$$P(n) = n^3 - 3n + 12$$

Por dato:

$$n = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

Elevamos al cubo:

$$n^3 = \left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \right)^3$$

$$n^3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{3}}^3 + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}^3 + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \underbrace{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)}_n$$

$$n^3 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}(n)$$

$$n^3 = 4 + 3\sqrt[3]{2^2 - \sqrt{3}^2}(n)$$

$$n^3 = 4 + 3\sqrt[3]{1}(n)$$

$$n^3 = 4 + 3n$$

$$n^3 - 3n = 4$$

Se quiere calcular:

$$P_{(n)} = \frac{n^3 - 3n}{4} + 12 = 16$$

VI

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

Ejemplo

- $(x+2)(x^2-2x+2^2) = x^3+2^3 = x^3+8$
- $(x-5)(x^2+5x+5^2) = x^3-5^3 = x^3-125$
- $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$
- $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$

Ejemplo

Sea x un número que satisfice la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$, entonces, halle el valor de x^{18} .

Resolución.

Por dato:

$$x^2 - x + 1 = 0$$

Lo multiplicamos por $(x+1)$: $(x+1)(x^2-x+1) = 0(x+1)$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

Elevamos a la 6:

$$(x^3)^6 = (-1)^6$$

Por lo tanto,

$$x^{18} = 1$$



Ejemplo Si $a > 0$, simplifique la siguiente expresión.

$$(a^x + a^{-x})(a^x - a^{-x})(a^{4x} + 1 + a^{-4x})$$

Resolución.

Se tiene la expresión:

$$(a^x + a^{-x})(a^x - a^{-x})(a^{4x} + 1 + a^{-4x})$$

Es una diferencia de cuadrados:

$$= ((a^x)^2 - (a^{-x})^2)(a^{4x} + 1 + a^{-4x})$$

Damos forma al segundo factor:

$$= (a^{2x} - a^{-2x})((a^{2x})^2 + a^{2x}a^{-2x} + (a^{-2x})^2)$$

Es una diferencia de cubos

$$= (a^{2x})^3 - (a^{-2x})^3 = a^{6x} - a^{-6x}$$

Ejemplo Calcule el valor de $L = (x + y)^4 - (x - y)^4$ si se sabe que:

$$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{10} + 1 \text{ y } xy = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$$

Resolución.

Nos piden calcular:

$$L = (x + y)^4 - (x - y)^4$$

Se sabe que es equivalente a:

$$L = 8xy(x^2 + y^2)$$

Reemplazando los datos:

$$L = 8(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1)(\sqrt[3]{10} + 1)$$

Damos forma convenientemente:

$$L = 8(\sqrt[3]{10} + 1)(\sqrt[3]{10}^2 - \sqrt[3]{10} + 1)$$

Vemos que se genera una suma de cubos:

$$L = 8(\sqrt[3]{10}^3 + 1^3) = 8(11) = 88$$

Desarrollo de un trinomio al cubo

VII

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

También

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$$



Ejemplo

Calcule el valor de $J = \frac{(x+y+z)^3}{1+(x+y)(y+z)(z+x)}$
si $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Resolución.

Se sabe que:

$$(x+y+z)^3 = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$(x+y+z)^3 = 3[1 + (x+y)(y+z)(z+x)]$$

$$\frac{(x+y+z)^3}{1+(x+y)(y+z)(z+x)} = 3$$

Por lo tanto, $J = 3$.

Ejemplo

Halle el valor de $L = \frac{ab+bc+ca}{abc}$ si se sabe que:
 $a+b+c = 2$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 8$

Resolución.

Se sabe que:

$$(a+b+c)^3 = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} + 3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc$$

$$(2)^3 = 8 + 3(2)(ab+bc+ca) - 3abc$$

Cancelamos 8:

$$0 = 6(ab+bc+ca) - 3abc$$

$$3abc = 6(ab+bc+ca)$$

$$\frac{3}{6} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$$

$$\therefore \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Si $a+b+c = 1$, halle el valor de la siguiente expresión.

$$\frac{1-6abc}{2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2+b^2+c^2)}$$

Para este problema vamos a utilizar la siguiente identidad adicional:

$$(a+b+c)^3 = 3(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) - 2(a^3+b^3+c^3) + 6abc$$

Resolución.

Se sabe que:

$$(a + b + c)^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

Reemplazamos el dato $a + b + c = 1$:

$$(1)^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2)(1) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

$$1 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

$$1 - 6abc = 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$1 - 6abc = -[2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2)]$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{1 - 6abc}{2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2)} = -1$$

Identidades de Lagrange

- $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
- $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$

Ejemplo Halle el menor valor de $ay - bx$ si se sabe que: $ax + by = 6$,
 $a^2 + b^2 = 5$ y $x^2 + y^2 = 20$.

Resolución.

Se sabe que (identidad de Lagrange):

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

Reemplazamos los datos:

$$(5)(20) = (6)^2 + (ay - bx)^2$$

$$100 = 36 + (ay - bx)^2$$

$$(ay - bx)^2 = 64$$

$$ay - bx = 8 \vee ay - bx = -8$$

Por lo tanto, el menor valor de $ay - bx$ es -8 .

Ejemplo Simplifique la expresión: $f = \frac{(3x + 5y)^2 + (3y - 5x)^2}{(4x + y)^2 + (4y - x)^2}$

Resolución.

Recuerde: $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

Nos piden reducir:

$$J = \frac{(3x + 5y)^2 + (3y - 5x)^2}{(4x + y)^2 + (4y - x)^2}$$

$$J = \frac{(3^2 + 5^2)(x^2 + y^2)}{(4^2 + 1^2)(x^2 + y^2)}$$

$$J = \frac{34}{17}$$

$$J = 2$$

Identidades de Argand

$$(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n})(x^{2n} - x^n y^n + y^{2n}) = x^{4n} + x^{2n} y^{2n} + y^{4n}$$

En particular:

$$n = 1: \quad (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2 y^2 + y^4$$

$$y = 1: \quad (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

Ejemplo

Reduzca la expresión $K = \frac{x^6 - 1}{x^4 + x^2 + 1} + 1$

Resolución.

Damos forma al numerador:

diferencia de cuadrados

$$K = \frac{\overbrace{(x^3)^2 - 1}}{\underbrace{x^4 + x^2 + 1}} + 1 = \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)} + 1$$

Identidad de Argand

$$= \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)} + 1$$

$$= \frac{(x + 1)(x - 1)}{1} + 1$$

$$= x^2 - 1 + 1$$

$$= x^2$$

Ejemplo

Halle el equivalente de la siguiente expresión.

$$L = \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \dots}{n \text{ parentesis}}$$

Resolución.

Se quiere reducir la expresión:

$$L = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \dots$$

Aplicamos la identidad de Argand:

$$L = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \dots$$

Nuevamente la identidad de Argand:

$$L = (x^8 + x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) \dots$$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Así sucesivamente aplicamos la identidad de Argand.

Notamos que:

- Para 2 paréntesis se obtiene:

$$x^{2^2} + x^{2^1} + 1$$

- Para 3 paréntesis se obtiene:

$$x^{2^3} + x^{2^2} + 1$$

Vemos que hay una ley de formación, entonces

- Para n paréntesis se obtiene:

$$x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + 1$$

Por lo tanto,

$$L = x^{2^n} + x^{2^{n-1}} + 1$$

Identidad de Gauss

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Ejemplo

Halle el valor de $a^3 + b^3 + c^3$ si se sabe que:

$$a + b + c = 5; \quad abc = 10 \quad \text{y} \quad ab + bc + ca = 8.$$

Resolución.

Se sabe que:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Reemplazamos los datos:

$$5^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(8)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9$$



También (Identidad de Gauss):

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Reemplazamos los datos:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3(10) = (5)(9 - 8)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 35$$

Ejemplo Se sabe que $a^3 + b^3 + c^3 = 1$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Halle el valor de

$$T = \frac{(a + b + c)(2 - ab - bc - ca)}{1 - 3abc}$$

Resolución.

Se sabe (identidad de Gauss):

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Reemplazamos los datos:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{1} - 3abc = (a + b + c) \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{2}$$

$$1 - 3abc = (a + b + c)(2 - ab - bc - ca)$$

Por lo tanto,

$$T = \frac{(a + b + c)(2 - ab - bc - ca)}{1 - 3abc} = 1$$

Otras identidades importantes

$$\blacksquare a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$\blacksquare a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2]$$

$$\blacksquare (a + b + c)(ab + bc + ca) = (a + b)(b + c)(c + a) + abc$$

Igualdades condicionales

Si $a + b + c = 0$, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

VIII

$$\bullet a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

$$\bullet a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\bullet a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(ab + bc + ca)^2$$

- $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$

También:

- $a^6 + b^6 + c^6 = 3(abc)^2 - 2(ab + bc + ca)^3$

- $a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + bc + ca)^2$

- $3(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5) = 5(a^3 + b^3 + c^3)(a^4 + b^4 + c^4)$

- $(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2$

Ejemplo

Dados los números: $a = \sqrt{2} - 1$, $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ y $c = 1 - \sqrt{3}$.

Halle el valor de $J = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$

Resolución.

Por dato:

$$a = \sqrt{2} - 1$$

$$b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$c = 1 - \sqrt{3}$$



Al sumarlos se obtiene: $a + b + c = 0$

Entonces, se cumple: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Nos piden calcular: $J = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$$

$$= \frac{3abc}{abc} = 3$$

Ejemplo

Si $a + b + c = 0$, halle el valor de

$$F = \frac{a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(a+b)^2}{abc}$$

Resolución.

Como $a + b + c = 0 \rightarrow \begin{cases} b + c = -a \\ a + c = -b \\ a + b = -c \end{cases}$

Lo reemplazamos en F :

$$F = \frac{a(b+c)^2 + b(a+c)^2 + c(a+b)^2}{abc}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{a(-a)^2 + b(-b)^2 + c(-c)^2}{abc} \\
 &= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \\
 &= \frac{3abc}{abc} = 3
 \end{aligned}$$

Ejemplo Si $x + y + z = 3$, determine el valor de la expresión F .

$$F = \frac{(x + y - 2z)^3 + (y + z - 2x)^3 + (x + z - 2y)^3}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

Resolución.

Como $x + y + z = 3$, entonces:
$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ y + z = 3 - x \\ x + z = 3 - y \end{cases}$$

Lo reemplazamos en F :

$$F = \frac{(3 - z - 2z)^3 + (3 - x - 2x)^3 + (3 - y - 2y)^3}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

$$F = \frac{(3 - 3z)^3 + (3 - 3x)^3 + (3 - 3y)^3}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

$$F = \frac{(3(1 - z))^3 + (3(1 - x))^3 + (3(1 - y))^3}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

Factorizamos 27 del numerador:

$$F = \frac{27[(1 - z)^3 + (1 - x)^3 + (1 - y)^3]}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

Además, damos forma al dato convenientemente:

$$x + y + z = 1 + 1 + 1$$

$$0 = (1 - x) + (1 - y) + (1 - z)$$

Es decir, se obtiene 3 números cuya suma es cero. Luego, por propiedad (igualdades condicionales) se cumple:

$$(1 - x)^3 + (1 - y)^3 + (1 - z)^3 = 3(1 - x)(1 - y)(1 - z)$$

Lo reemplazamos en F :

$$F = \frac{27[3(1 - x)(1 - y)(1 - z)]}{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}$$

$$F = 27[3]$$

Por lo tanto, $F = 81$.



Teoremas

Sean a , b y c números reales. Entonces

1. $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$
2. $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$
3. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$
4. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow a = b = c$

Ejemplo

Sean x e y números reales de modo que $x^2 + y^2 = 4(x - 1)$.

Halle el valor de x^y .

Resolución.

Por dato:

$$x^2 + y^2 = 4(x - 1)$$

$$x^2 + y^2 = 4x - 4$$

$$\underline{x^2 - 4x + 4} + y^2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + y^2 = 0$$

Por teorema 1, se debe cumplir:

$$x - 2 = 0 \quad y \quad y = 0$$

$$x = 2 \quad y \quad y = 0.$$

Por lo tanto, $x^y = 2^0 = 1$.

Ejemplo

Sean x , y y z números reales tal que:

$$x^2 - xy + y^2 - yz + z^2 - zx = 0$$

Halle el valor de $L = \frac{x + 2y + 3z}{3x - 2y + z}$

Resolución.

Del dato se obtiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

Luego, por teorema 4:

$$x = y = z$$

Nos piden calcular:

$$L = \frac{x + 2y + 3z}{3x - 2y + z}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{x + 2x + 3x}{3x - 2x + x} \\
 &= \frac{6x}{2x} \\
 &= \frac{6}{2} = 3
 \end{aligned}$$

Ejemplo

Dada la ecuación $2x^6 - 2x^4 + x^2 - 2x^3y + y^2 = 0$ donde $x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$ e $y \in \mathbb{R}$, calcule el valor de $3x + y$.

Resolución.

Se tiene la ecuación:

$$2x^6 - 2x^4 + x^2 - 2x^3y + y^2 = 0$$

Acomodamos convenientemente para completar cuadrados:

$$\begin{aligned}
 (x^6 - 2x^4 + x^2) + (x^6 - 2x^3y + y^2) &= 0 \\
 (x^3 - x)^2 + (x^3 - y)^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Por el teorema 1, se debe cumplir:

$$x^3 - x = 0 \quad \wedge \quad x^3 - y = 0$$

Factorizando la primera ecuación:

$$\begin{aligned}
 x(x^2 - 1) &= 0 \quad \wedge \quad y = x^3 \\
 \underline{x(x+1)(x-1)} &= 0 \quad \wedge \quad y = x^3
 \end{aligned}$$

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

Por condición del problema, $x \neq 0$ y $x \neq 1$, entonces $x = -1$. Luego, $y = -1$.

Por lo tanto,

$$3x + y = -4$$

Problemas resueltos

Si $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{a+2b}$ con a y b números no nulos, calcule el valor de E .

1.

$$E = \sqrt{\frac{a^6 + 17b^6}{a^6 - 52b^6}}$$

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B) $3\sqrt{3}$

C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $2\sqrt{3}$

E) $\sqrt{3}$

Resolución.

Por dato:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{8}{a+2b}$$

$$\frac{a+2b}{ab} = \frac{8}{a+2b}$$

$$(a+2b)^2 = 8ab$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = 8ab$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 = 0$$

$$(a-2b)^2 = 0$$

$$a - 2b = 0$$

$$a = 2b$$

Elevamos a la 6:

$$a^6 = (2b)^6 = 64b^6$$

Lo reemplazamos en la expresión E:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{a^6 + 17b^6}{a^6 - 52b^6}} = \sqrt{\frac{64b^6 + 17b^6}{64b^6 - 52b^6}} \\ &= \sqrt{\frac{81b^6}{12b^6}} = \sqrt{\frac{81}{12}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Clave: C

2.

Si $x + \frac{1}{x} = 3$, determine el valor de $E = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2}$.

A) 49

B) 36

C) 25

D) 18

E) 23

Resolución.

Por dato: $x + \frac{1}{x} = 3$

Al cuadrado: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Por dato: $x + \frac{1}{x} = 3$

Al cubo: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Por lo tanto, $x^3 + x^2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} = 7 + 18 = 25$

Clave: C

3.

Si $3^{2x} + 3^{2y} = 27$; $3^{x+y} = 11$; calcule el valor de $K = (3^x + 3^y)^3$.

A) 512

B) 216

C) 729

D) 125

E) 343

Resolución.

Por dato: $3^{2x} + 3^{2y} = 27 \rightarrow (3^x)^2 + (3^y)^2 = 27$

$$3^{x+y} = 11 \rightarrow 2 \cdot 3^x \cdot 3^y = 2 \cdot 11$$

Sumamos:

$$(3^x + 3^y)^2 = 49$$

$$3^x + 3^y = 7$$

Por lo tanto, $(3^x + 3^y)^3 = 7^3 = 343$.

Clave: E

4.

Si $a + \frac{1}{b} = 1$ y $b + \frac{1}{c} = 1$, calcule abc .

A) c

B) -1

C) 2

D) b

E) 1

Resolución.

Multiplicamos los datos: $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right) = 1 \cdot 1$

Operamos:

$$ab + \frac{a}{c} + \frac{b}{b} + \frac{1}{bc} = 1$$

$$ab + \frac{a}{c} + \frac{1}{bc} = 0$$

Multiplicamos por c:

$$abc + \underbrace{a + \frac{1}{b}}_1 = 0 \rightarrow abc = -1$$

Por lo tanto, $abc = -1$.

Clave: B

5.

Si $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ entonces $x^6 + \frac{1}{x^6}$ es

A) 18

B) 9

C) 27

D) 25

E) 16

Resolución.

Por dato: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

Elevamos al cubo: $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 = 3^3$

$$(x^2)^3 + \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)^3}_{1} + \underbrace{3x^2 \cdot \frac{1}{x^2}}_3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 27$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} + 9 = 27$$

Por lo tanto, $x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$

Clave: A

6.

Al simplificar la expresión
se obtiene

$$\frac{1 - \frac{24xy}{9x^2 + 12xy + 16y^2}}{\left(1 - \frac{8y}{3x + 4y}\right) \frac{27x^3 + 64y^3}{54x^3 - 128y^3}}$$

A) 1

B) -1

C) 2

D) -2

E) 1/2

Resolución.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{24xy}{9x^2 + 12xy + 16y^2}}{\left(1 - \frac{8y}{3x + 4y}\right) \frac{27x^3 + 64y^3}{54x^3 - 128y^3}} &= \frac{\frac{9x^2 + 12xy + 16y^2 - 24xy}{9x^2 + 12xy + 16y^2}}{\left(\frac{3x + 4y - 8y}{3x + 4y}\right) \frac{\overbrace{27x^3 + 64y^3}^{\text{Suma de cubos}}}{\underbrace{2(27x^3 - 64y^3)}_{\text{Diferencia de cubos}}}} \\ &= \frac{\frac{9x^2 - 12xy + 16y^2}{9x^2 + 12xy + 16y^2}}{\left(\frac{3x - 4y}{3x + 4y}\right) \frac{(3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)}{2(3x - 4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)}} \end{aligned}$$

Se cancela casi todo, excepto:

$$\frac{1}{2} = 2$$

Clave: C

7.

Simplifique la siguiente expresión.

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$$

A) $\frac{2^x}{4^x - 2}$

B) $\frac{1}{2^x - 2^{-x}}$

C) $\frac{2^x}{4^x + 1}$

D) $\frac{2^x}{1 - 4^x}$

E) $\frac{2^x}{1 + 2^{-2x}}$

Resolución.

Se tiene la expresión:

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - 2^{-x}}{\underbrace{(2^x)^2 - (2^{-x})^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}}} = \frac{2^x - 2^{-x}}{(2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x})} \\ &= \frac{1}{2^x + 2^{-x}} \\ &= \frac{1}{2^x + \frac{1}{2^x}} \\ &= \frac{2^x}{4^x + 1}\end{aligned}$$

Clave: C

8.

Si se satisfacen $x + y = \sqrt{5}$; $xy = 2$ Halle el valor de la expresión $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

A) $1/2$

B) 1

C) $1/3$

D) 3

E) $2/3$

Resolución.

Nos piden calcular

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

Por dato:

$$x + y = \sqrt{5}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(x + y)^2 = \sqrt{5}^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 5$$

2

Luego,

$$x^2 + y^2 = 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1}{2}$$

Clave: A

9.

Sabiendo que $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = -7$ y $abc = -6$

calcule el valor de $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

A) $\frac{18}{36}$

B) $\frac{49}{36}$

C) $\frac{29}{36}$

D) $\frac{7}{36}$

E) $\frac{7}{6}$

Resolución.

Dividimos los dos últimos datos:

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{-7}{-6} \rightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{7}{6}$$

Elevamos al cuadrado: $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{49}{36}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{c + b + a}{abc}\right) = \frac{49}{36}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{49}{36}$

Clave: B

10.

Si $x - x^{-1} = 1$, ($x \neq 0$), halle los valores de $x^2 + x^{-2}$ y $x^3 - x^{-3}$.

A) 3 y 4

B) 2 y 3

C) 2 y 1/2

D) 3 y 1/3

E) 4 y 1/4

Resolución.

Por dato: $x - \frac{1}{x} = 1$

Elevamos al cuadrado: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1^2$

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

Ahora el dato lo elevamos al cubo: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = 1^3$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$$

Luego,
$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$$

Por lo tanto, los valores de $x^2 + x^{-2}$ y $x^3 - x^{-3}$ son 3 y 4 respectivamente.

Clave: A

11.

El producto de tres números reales es 900 y la suma de sus inversos multiplicativos es $1/5$. Determine la suma de los productos de dichos números tomados de dos en dos sin repetición.

- A) 160 B) 180 C) 190 D) 210 E) 170

Resolución.

Sean a , b y c los números. Entonces por dato se tienen:

$$abc = 900 \quad \text{y} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$$

Nos piden calcular: $ab + bc + ca$

Como $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$, entonces
$$\frac{bc + ac + ab}{\underbrace{abc}_{900}} = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, $bc + ac + ab = \frac{900}{5} = 180$

Clave: B

12.

Sean a y b números reales positivos tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2$,

calcule el valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} + \dots + \frac{a^{50}}{b^{50}} + \frac{b^{50}}{a^{50}}$

- A) 150 B) 200 C) 175 D) 100 E) 120

Resolución.

Por dato: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 1$

$$\frac{a^2}{b^2} = b^2$$

$$a = b$$

Recuerde:

Sí $n > 0$ y $n + \frac{1}{n} = 2$, entonces $n = 1$

Por lo tanto,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} + \dots + \frac{a^{50}}{b^{50}} + \frac{b^{50}}{a^{50}} = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{100 \text{ veces } 1} = 100$$

Clave: D

13.

Si $x^m + \frac{1}{x^m} = 2$ y $m \in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de $x^{3m} + x^{-3m}$

A) 2

B) 4

C) 6

D) 8

E) 12

Resolución.

Por dato: $x^m + \frac{1}{x^m} = 2$

Elevamos al cubo: $\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)^3 = 2^3$

$$x^{3m} + \frac{1}{x^{3m}} + \underbrace{3x^m \cdot \frac{1}{x^m}}_1 \underbrace{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)}_2 = 8$$

De donde: $x^{3m} + \frac{1}{x^{3m}} = 2$

Clave: A

14.

Reduzca la expresión: $(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2 + 32x^4 - 256$

A) $2x^8$

B) 128

C) x^8 D) $4x^8$

E) 56

Resolución.

Se tiene la expresión

$$\begin{aligned} & (x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2 + 32x^4 - 256 \\ &= ((x-2)(x+2))^2(x^2+4)^2 + 32x^4 - 256 \\ &= (x^2-4)^2(x^2+4)^2 + 32x^4 - 256 \\ &= ((x^2-4)(x^2+4))^2 + 32x^4 - 256 \\ &= (x^4-16)^2 + 32x^4 - 256 \\ &= x^8 - 32x^4 + 256 + 32x^4 - 256 \\ &= x^8 \end{aligned}$$

Clave: C



15.

Al efectuar la siguiente operación

$$P_{(a,b,c)} = \frac{a+b+c}{bc} + \frac{a-b+c}{b^2-bc} + \frac{a+b-c}{c^2-bc}$$

A) -1

B) 1

C) 0

D) 2

E) 3

Resolución.

$$\begin{aligned} P_{(a,b,c)} &= \frac{a+b+c}{bc} + \frac{a-b+c}{b^2-bc} + \frac{a+b-c}{c^2-bc} \\ &= \frac{a+b+c}{bc} + \frac{a-(b-c)}{b(b-c)} + \frac{a-(c-b)}{c(c-b)} \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{b}{bc} + \frac{c}{bc} + \frac{a}{b(b-c)} - \frac{b-c}{b(b-c)} + \frac{a}{c(c-b)} - \frac{c-b}{c(c-b)} \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b(b-c)} - \frac{1}{b} + \frac{a}{c(c-b)} - \frac{1}{c} \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{a}{b(b-c)} - \frac{a}{c(b-c)} \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{a}{b-c} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \\ &= \frac{a}{bc} + \frac{a}{b-c} \left(\frac{c-b}{bc} \right) \\ &= \frac{a}{bc} - \frac{a}{bc} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Clave: C

16.

Simplifique la expresión: $E = \frac{x+y+z}{yz} + \frac{x-y+z}{y(y-z)} + \frac{x+y-z}{z(z-y)}$

A) -4

B) 8

C) 0

D) 12

E) $z-y$

Resolución.

$$\begin{aligned} E &= \frac{x+y+z}{yz} + \frac{x-y+z}{y(y-z)} + \frac{x+y-z}{z(z-y)} \\ E &= \frac{x}{yz} + \frac{y}{yz} + \frac{z}{yz} + \frac{x-(y-z)}{y(y-z)} + \frac{x-(z-y)}{z(z-y)} \\ E &= \frac{x}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y(y-z)} - \frac{y-z}{y(y-z)} + \frac{x}{z(z-y)} - \frac{z-y}{z(z-y)} \\ E &= \frac{x}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y(y-z)} - \frac{1}{y} + \frac{x}{z(z-y)} - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$$E = \frac{x}{yz} + \frac{x}{y(y-z)} - \frac{x}{z(y-z)}$$

$$E = \frac{x}{yz} + \frac{x}{y-z} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)$$

$$E = \frac{x}{yz} + \frac{x}{y-z} \left(\frac{z-y}{yz} \right)$$

$$E = \frac{x}{yz} - \frac{x}{yz}$$

$$E = 0$$

Clave: C

Universidad Nacional del Callao

17.

Halle el valor de $\frac{(1000001)^4 - (999999)^4}{8(10^{12} + 1)}$

A) 4×10^6

B) 2×10^6

C) 10^6

D) 1111111

E) 111111

UNAC 2000 - I

Resolución.

Sea $a = 1000000 = 10^6$, entonces

$$1000001 = a + 1 \text{ y } 999999 = a - 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{(1000001)^4 - (999999)^4}{8(10^{12} + 1)} &= \frac{(a+1)^4 - (a-1)^4}{8((10^6)^2 + 1)} \\ &= \frac{8a(1)(a^2 + 1^2)}{8(a^2 + 1)} \\ &= a \\ &= 10^6 \end{aligned}$$

Clave: C

18.

La suma de dos números es 5 y la suma de sus cubos es 95. Halle la suma de sus cuadrados.

A) 21

B) 20

C) 23

D) 25

E) 24

UNAC 2000 - I

Resolución.Sean a y b los números. Por dato:

$$a + b = 5 \quad \text{y} \quad a^3 + b^3 = 95$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = 95$$

$$(5)(a^2 - ab + b^2) = 95$$

$$a^2 - ab + b^2 = 19 \dots (*)$$

Sumo $3ab$:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 19 + 3ab$$

$$(a + b)^2 = 19 + 3ab$$

$$25 = 19 + 3ab$$

$$ab = 2$$

Al reemplazarlo en $(*)$ se obtiene: $a^2 + b^2 = 21$.

Clave: A

19.

Efectuar la siguiente expresión.

$$(\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + 2)^2 + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$$

A) $8 - \sqrt{5}$

B) 5

C) $7 + 2\sqrt{5}$

D) $\sqrt{5} - 1$

E) $3 - 4\sqrt{5}$

UNAC 2001 - I

Resolución.Se tiene la expresión: $(\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + 2)^2 + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$

$$= \left(\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} + 2 \right)^2 + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$$

$$= (\sqrt{5} - 2 + 2)^2 + 3 - \sqrt{5}$$

$$= (\sqrt{5})^2 + 3 - \sqrt{5}$$

$$= 8 - \sqrt{5}$$

Clave: A

20.Si $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 167$, $x > 0$, $y > 0$. Calcule el valor de $E = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

A) 12

B) 13

C) $\sqrt{167}$

D) $\sqrt{3}$

E) 11

UNAC 2001 - II

Resolución.

Por dato: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 167$

Sumamos 2: $\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = 169$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^2 = 169$$

De donde: $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 13$

Clave: B

21.

Sean a y b números reales tales que $a^2 + b^2 = 13$ y $ba = 13\pi^{-1}$.
Simplifique la expresión L .

$$L = 13 \left[\frac{a^{x+1} + ba^x}{a^{3+x} + b^3a^x} \right]$$

A) $\frac{\pi}{\pi+5}$

B) π

C) $\frac{\pi}{\pi-1}$

D) $\frac{\pi}{\pi+2}$

E) $\frac{\pi}{2(\pi-1)}$

UNAC 2002 - II

Resolución.

Se pide simplificar la expresión L :

$$\begin{aligned} L &= 13 \left[\frac{a^{x+1} + ba^x}{a^{3+x} + b^3a^x} \right] = 13 \left[\frac{a^x \cdot a^1 + ba^x}{a^3 \cdot a^x + b^3a^x} \right] \\ &= 13 \left[\frac{a+b}{a^3+b^3} \right] \\ &= 13 \left[\frac{a+b}{(a+b)(a^2-ab+b^2)} \right] \\ &= 13 \left[\frac{1}{a^2-ab+b^2} \right] \\ &= 13 \left[\frac{1}{13 - \frac{13}{\pi}} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi-1} \end{aligned}$$

Clave: C

22.

Si $a > 0$ y $b > 0$ son números reales y

$$K = \frac{\left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}$$

entonces, halle el valor de $K^{-\frac{1}{2}}$.

A) a^2b

B) a^{-1}

C) a^2

D) b/a

E) b^{-1}

UNAC 2004 - I

Resolución.Vamos a simplificar la expresión K :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\left(\frac{a-b}{a+b} + 1\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{a-b}{a+b} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)} = \frac{\left(\frac{a-b+a+b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)}{\left(\frac{a-b-a-b}{a+b}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{2a}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)}{\left(\frac{-2b}{a+b}\right)\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)} \\ &= \frac{2a}{-2b} \cdot \frac{\left(\frac{-1}{ab}\right)}{\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)} \\ &= \frac{a(ab)}{b} = a^2 \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } K = a^2, \text{ entonces } K^{-\frac{1}{2}} = (a^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1}$$

Clave: B

23.

Si $a = \sqrt{11} - \sqrt{19}$, $b = \sqrt{19} - \sqrt{29}$ y $c = \sqrt{29} - \sqrt{11}$.Halle el valor de $M = \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}\right)^4$

A) 18

B) 54

C) 81

D) 243

E) 9

UNAC 2007 - I

Resolución.Al sumar los valores de a , b y c se obtiene: $a + b + c = 0$

Nos piden el valor de:

$$M = \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab} \right)^4 = \left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \right)^4$$

$$= \left(\frac{3abc}{abc} \right)^4 = (3)^4 = 81$$

Recuerde:

$$\text{Si } a + b + c = 0, \text{ entonces } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Clave: C

24.

El valor de $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}$ es

- A) -4 B) $4 + \sqrt{3}$ C) $4 - 2\sqrt{3}$ D) $4 + 2\sqrt{3}$ E) 4

UNAC 2007 - II

Resolución.

La expresión se puede expresar así:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}^2 + \sqrt{2+\sqrt{3}}^2}{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2-\sqrt{3} + 2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2^2 - \sqrt{3}^2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1}} = 4$$

Clave: E

25.

Si $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = 1$, entonces, el valor de $x^4 + \frac{1}{x^4}$ es

- A) 324 B) 300 C) 322 D) 318 E) 320

UNAC 2008 - I

Resolución.

PNK

2da identidad de Legendre

Por dato: $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{4x}{x^2-1} = 1$

diferencia de cuadrados

$$4 = \frac{x^2-1}{x}$$

Es decir:

$$x - \frac{1}{x} = 4$$

Al cuadrado: $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 16$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$$

Al cuadrado: $x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 324$

Por lo tanto, $x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$

Clave: C

twitter.com/calapenshko

26.

Si $\frac{x^2}{a} + \frac{a^2}{x} = 1$, la simplificación de $\sqrt[3]{x^9 + a^9 + 3x^4a^4}$ es igual a

A) $a + x$

B) $\sqrt{ax}$

C) x/a

D) a/x

E) ax

UNAC 2009 - I

Resolución.

Por dato: $\frac{x^2}{a} + \frac{a^2}{x} = 1 \rightarrow \frac{x^3 + a^3}{ax} = 1$

$$x^3 + a^3 = ax$$

$$(x^3 + a^3)^3 = (ax)^3$$

$$x^9 + a^9 + 3x^3a^3 \frac{(x^3 + a^3)}{ax} = x^3a^3$$

$$x^9 + a^9 + 3x^4a^4 = x^3a^3$$

Nos piden simplificar:

$$\sqrt[3]{x^9 + a^9 + 3x^4a^4} = \sqrt[3]{x^3a^3} = xa$$

Clave: E

27.

Si $\left(n + \frac{1}{n}\right)^4 = 4\left(n^2 + \frac{1}{n^2} + 2\right)$, el valor de $E = n^4 + \frac{1}{n^4}$ es igual a

- A) 3 B) 4 C) 2 D) 1 E) 1/4

UNAC 2010 - II

Resolución.

Por dato:
$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^4 = 4\left(n^2 + \frac{1}{n^2} + 2\right)$$

Tomamos $\sqrt{\quad}$:
$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = 2\left(n + \frac{1}{n}\right)$$

Cancelamos $\left(n + \frac{1}{n}\right)$:
$$\left(n + \frac{1}{n}\right) = 2$$

Al cuadrado:
$$n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} = 4$$

$$n^2 + \frac{1}{n^2} = 2$$

Al cuadrado:
$$n^4 + 2 + \frac{1}{n^4} = 4 \Leftrightarrow n^4 + \frac{1}{n^4} = 2$$

Clave: C

28.

Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$, el valor de $K = \frac{(a+b)^6 - 6(a^6 + b^6)}{(ab)^3}$ es

- A) -12 B) -11 C) -15 D) -10 E) -9

UNAC 2011 - I

Resolución.

Por dato:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

$$(a+b)^2 = ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = ab$$

$$a^2 + b^2 = -ab$$

Elevamos al cubo:
$$(a^2 + b^2)^3 = (-ab)^3$$

$$a^6 + b^6 + 3a^2b^2(a^2 + b^2) = -a^3b^3$$

$$a^6 + b^6 + 3a^2b^2(-ab) = -a^3b^3$$

$$a^6 + b^6 - 3a^3b^3 = -a^3b^3$$

$$a^6 + b^6 = 2a^3b^3$$

Nos piden hallar

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{(a+b)^6 - 6(a^6 + b^6)}{(ab)^3} = \frac{((a+b)^2)^3 - 6(2a^3b^3)}{(ab)^3} \\
 &= \frac{\overbrace{(a^2 + b^2 + 2ab)}^{\quad -ab} - 12a^3b^3}{(ab)^3} \\
 &= \frac{(ab)^3 - 12a^3b^3}{(ab)^3} \\
 &= -11
 \end{aligned}$$

Clave: B

29.

La suma de dos números es 10 y la suma de sus cubos es 100. El producto de estos números es igual a:

- A) 20 B) 40 C) 25 D) 10 E) 30

UNAC 2012 - I

Resolución. Sean a y b los números.

Por dato: $a + b = 10$ y $a^3 + b^3 = 100$

Elevamos al cubo: $(a + b)^3 = 10^3$

$$\frac{a^3 + b^3}{100} + 3ab \frac{(a + b)}{10} = 1000$$

$$100 + 30ab = 1000$$

$$30ab = 900$$

$$ab = 30$$

Por lo tanto, el producto de los números es 30.

Clave: E

Universidad Nacional de Ingeniería

30.

Simplifique la expresión Q .

$$Q = \frac{(am + an + bm - bn)^2 + (am - an - bm - bn)^2}{(a^{4/3} - a^{2/3}b^{2/3} + b^{4/3})R_{(m,n)}}$$

si $m, n \in (0; +\infty)$ y $R_{(m,n)} = (m - \sqrt{2mn} + n)(\sqrt{2mn} + m + n)$



A) $2(a + b)$

B) $2(a - b)$

C) $2a^{2/3} + 2b^{2/3}$

D) $2a^{2/3} - 2b^{2/3}$

E) $a^{2/3} + b^{4/3}$

UNI 2007 - II

Resolución. La expresión R se puede expresar así:

$$\begin{aligned} R_{(m,n)} &= (m + n - \sqrt{2mn})(m + n + \sqrt{2mn}) = (m + n)^2 - \sqrt{2mn}^2 \\ &= m^2 + 2mn + n^2 - 2mn \\ &= m^2 + n^2 \end{aligned}$$

Ahora, hagamos el siguiente cambio de variable:

$$a^{\frac{2}{3}} = x \quad \wedge \quad b^{\frac{2}{3}} = y, \text{ entonces } a^{\frac{4}{3}} = x^2 \quad \wedge \quad b^{\frac{4}{3}} = y^2$$

También, $a^2 = x^3 \quad \wedge \quad b^2 = y^3$

Lo reemplazamos en la expresión Q :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(am + an + bm - bn)^2 + (am - an - bm - bn)^2}{(a^{4/3} - a^{2/3}b^{2/3} + b^{4/3})R_{(m,n)}} \\ &= \frac{[(am - bn) + (an + bm)]^2 + [(am - bn) - (an + bm)]^2}{(x^2 - xy + y^2)(m^2 + n^2)} \end{aligned}$$

Aplicamos la 1era identidad de Legendre en el numerador:

$$= \frac{2[(am - nb)^2 + (an + bm)^2]}{(x^2 - xy + y^2)(m^2 + n^2)}$$

Ahora, en el numerador aplicamos la identidad de Lagrange:

$$\begin{aligned} &= \frac{2(a^2 + b^2)(m^2 + n^2)}{(x^2 - xy + y^2)(m^2 + n^2)} \\ &= \frac{2(a^2 + b^2)}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2(x^3 + y^3)}{x^2 - xy + y^2} = 2(x + y) \\ &= 2\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

Clave: C

31.

Halle el valor numérico de $P = \left(\frac{n^{-3} + m^{-3}}{m^{-3} \cdot n^{-3}}\right)^{-1}$ si $m + n = \sqrt[3]{12}$, $mn = 2\sqrt[3]{18}$

A) -24

B) -12

C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{1}{24}$

E) $\frac{1}{12}$

UNI 2008 - I

Resolución. Por dato: $m + n = \sqrt[3]{12}$; $mn = 2\sqrt[3]{18}$

$$(m + n)^3 = \sqrt[3]{12}^3$$

$$m^3 + n^3 + 3 \underbrace{mn}_{2\sqrt[3]{18}} \underbrace{(m + n)}_{\sqrt[3]{12}} = 12$$

$$m^3 + n^3 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{12} = 12$$

$$m^3 + n^3 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{18 \cdot 12} = 12$$

$$m^3 + n^3 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{216} = 12$$

$$6$$

$$m^3 + n^3 = -24$$

Nos piden calcular:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{n^{-3} + m^{-3}}{m^{-3} \cdot n^{-3}} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{m^3}}{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{m^3}} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{m^3 + n^3}{m^3 n^3}}{\frac{1}{m^3 n^3}} \right)^{-1} \\ &= (m^3 + n^3)^{-1} \\ &= \frac{1}{m^3 + n^3} = -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

Clave: C

Problemas propuestos

1.

Si $x^2 - 3x - 1 = 0$, entonces, ¿cuál es el valor de la expresión $(x - 3)(x - 2)(x - 1)x + 1$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

2.

Calcule el valor de $J = x^4 - x^{-4}$ si se sabe que $x = 1 + \sqrt{2}$.

- A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $12\sqrt{2}$ D) $12\sqrt{8}$ E) 24

3.

Calcule el valor de la expresión $x^2 + x^4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$ si $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$.

- A) 8 B) 10 C) 15 D) -3 E) -1

4.

Sean x e y dos números de modo que: $x + y = \sqrt{4\sqrt{3} + 2}$ y $xy = 2\sqrt{3} - 3$, calcule el valor de $\sqrt{2x^2 + 2y^2}$.



- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) 3 E) 4

5.

Sean a y b dos números de modo que $a + b = \sqrt{8}$ y $a - b = \sqrt{2}$, entonces halle el valor de $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$.

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

6.

Calcule el valor de $\sqrt{xy}$ si se sabe que $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4$ $\wedge$ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$

- A) 8 B) 5 C) 9 D) 13 E) 100

7.

Simplifique la expresión $\sqrt{\frac{(ax+1)(ax-1)(a^2x^2+1)+1}{2[(ax+1)^2-(ax-1)^2]}}$; $ax \neq 0$

- A) $ax/7$ B) $ax/4$ C) $ax/6$ D) $ax/3$ E) $ax/2$

8.

Simplifique la siguiente expresión (Considere $x > 0$).

$$\sqrt{\frac{(x^2-3x-1)(x^2+3x-1)+(x^2+3)^2-(x^2-3)^2}{x^2-x+1}} + x$$

- A) $x+4$ B) x C) $x+3$ D) $x+1$ E) $x+2$

9.

Si $\frac{a+b}{a-b} = 5$, halle el valor de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right)$$

- A) 5 B) $1/5$ C) 25 D) 0 E) 1

10.

Dados los números: $x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ $\wedge$ $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$

calcule el valor de $\sqrt[3]{x^2 - y^2}$.

- A) 4 B) 16 C) $2\sqrt[3]{4}$ D) 2 E) $4\sqrt[3]{2}$

11.

Sean: $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$, halle el valor de $a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b}$.

- A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $1/\sqrt{2}$ D) 0 E) -3

12.

Si se cumple que $\sqrt{x+4y} + \sqrt{x-4y} = 4y$

Halle el valor de $\sqrt{x+4y} - \sqrt{x-4y}$

- A) 2 B) 7 C) 3 D) 1 E) 8

13.

Calcule el valor de la expresión $J = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 2 E) 24

14.

Calcule el valor de $\left(N - \frac{1}{N}\right)$ si se sabe que $N = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$.

- A) $2\sqrt{2}$ B) 2 C) $4\sqrt{2}$ D) $\sqrt{2}$ E) 0

15.

Sean a, b y c números no nulos tal que $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$.

Calcule el valor de $T = \frac{(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2}{abc(a + b + c)}$

- A) 2 B) 1 C) -1 D) -3 E) -2

16.

Calcule el valor de $a^3 + b^3$ si se sabe que: $a + b = 6$ y $a^2 + b^2 = 30$.

- A) 216 B) 180 C) 164 D) 160 E) 162

17.

Halle el valor de $L = x^3 + 3x(x + 1) + 2002$, si se sabe que $x = \sqrt[3]{9} - 1$.

- A) 2010 B) 2003 C) -2010 D) 0 E) 2009

18.

Determine el valor de $\frac{a+b}{\sqrt[3]{3}}$, si se sabe que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{3}$ y $a^5 b^5 = 1$

- A) $\sqrt[3]{3} - 1$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) 8 D) $\sqrt[3]{9} - 3$ E) 9

19.

Dados los números: $x = \sqrt[3]{4} + 1$ y $y = \sqrt[3]{3} - 1$ encuentre el valor de la expresión $J = \frac{x^3 + 3x - 3x^2 - 1}{y^3 + 3y^2 + 3y}$ A) $1/3$ B) $3/2$

C) 2

D) $2/3$ E) $3/5$

20.

Halle el valor de J si se sabe que: $(4x + \sqrt{5})^3 = (x + 4\sqrt{5})^3$; $x \neq \sqrt{5}$

$$J = \frac{4x + \sqrt{5}}{x + 4\sqrt{5}} + \frac{x + 4\sqrt{5}}{4x + \sqrt{5}}$$

A) -1

B) 1

C) 2

D) -2

E) 5

21.

Halle el valor de $x^{-2} + y^{-2}$ si se sabe que $xy(x + y) = 25$ y $x^3 + y^3 = 50$.

A) 3

B) $5/3$

C) 4

D) $2/5$ E) $3/5$

22.

Si la diferencia de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 24, halle la diferencia de sus cubos.

A) 92

B) 90

C) 100

D) 96

E) 112

23.

Halle el valor de $J = (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4})$

A) 2

B) 4

C) 8

D) 10

E) 12

24.

Simplifique la siguiente expresión: $\sqrt[3]{\sqrt{4} + \sqrt{2} + 1} \cdot \sqrt[2]{\sqrt{4} - 2\sqrt{2} + 1}$ A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $\sqrt[3]{4}$

D) 3

E) 1

25.

Halle el valor de $\frac{\sqrt[3]{a^2 + ab + b^2 + b^3} + \sqrt[3]{x^2 - xy + y^2 - y^3}}{a + x}$ si se sabe que: $a - 1 = b$ y $x + y = 1$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 0

26.

Se sabe que $(x^{-1} + y^{-1})(x + y)(z^{-1} + w^{-1})(z + w) = (xyzw)^{-1}$ Simplifique la expresión $\frac{1}{[x(z + w) + y(w + z)]^2}$, donde $xyzw \neq 0$

- A) $xyzw$ B) 1 C) 4
D) $2(x + y + z + w)^2$ E) $1/xyzw$

27.

Considere $a + b + c = 0$ para reducir la siguiente expresión.

$$\frac{(2a + b + c)^2 + (a + 2b + c)^2 + (a + b + 2c)^2}{ab + ac + bc}$$

- A) -1 B) -2 C) 2 D) -1/2 E) 0

28.

Sean a , b y c números reales diferentes de cero tal que $a = -b - c$.

Halle el valor de $J = \frac{(a^2 - ab + b^2)(a + b) + c^3}{6abc}$

- A) -1/3 B) 1/9 C) 1/2 D) 1/3 E) 1/6

29.

Sean x e y números reales de modo que $x^2 + y^2 + 5 = 4x + 2y$; calcule el valor de $x^3 + y^3$.

- A) 8 B) 9 C) 65 D) 28 E) 126

30.

Sean x , y , z números reales tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 14 = 2(x + 2y + 3z)$

halle el valor de $J = \frac{(x + y + z)xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$

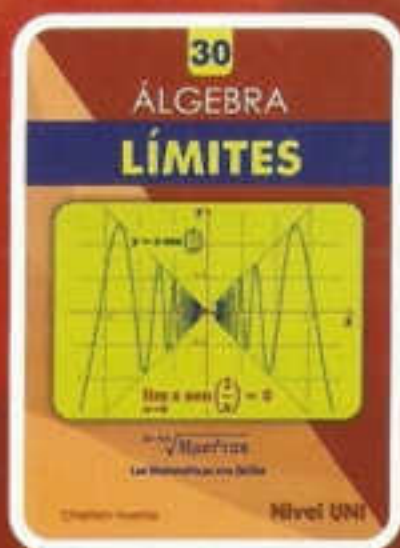
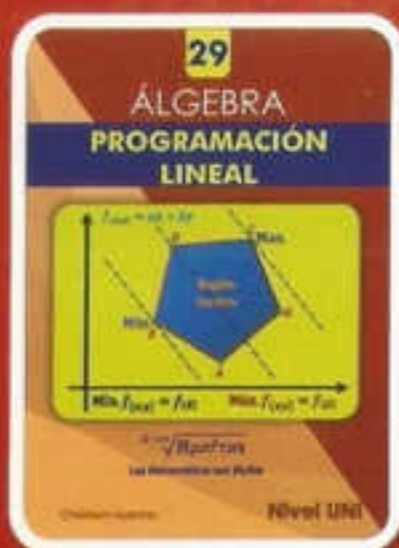
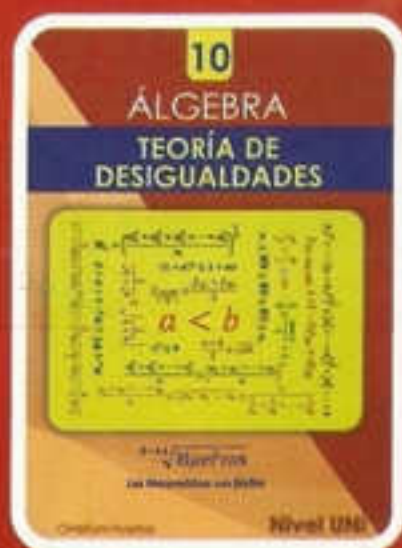
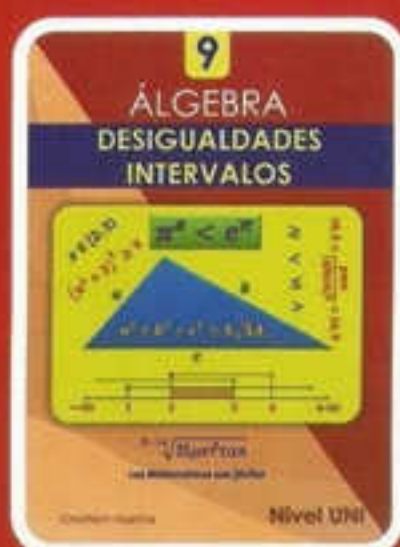
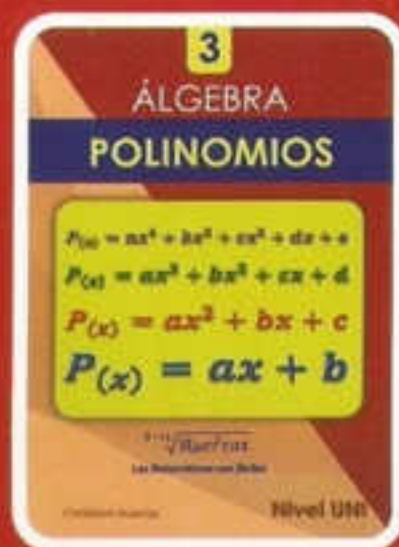
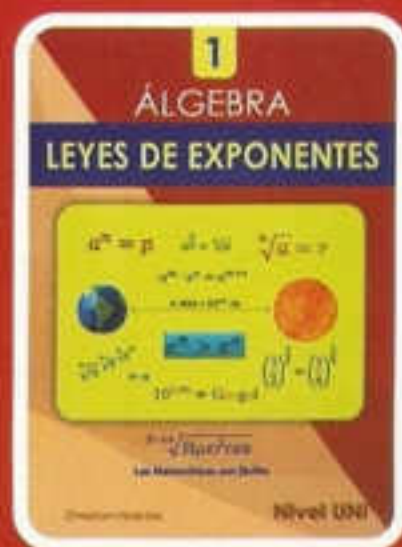
- A) 1 B) 2 C) 1/2 D) 1/3 E) 36/37

Claves

01 D	02 D	03 B	04 E	05 D	06 C	07 E	08 D	09 A	10 D
11 E	12 A	13 B	14 C	15 E	16 E	17 A	18 D	19 C	20 A
21 E	22 E	23 C	24 E	25 A	26 B	27 B	28 C	29 B	30 A



OTRAS PUBLICACIONES



$\bar{x}-14 \sqrt{\text{Huertas}}$



twitter.com/calapenshko

Christiam Huertas

993 473 766

chr1614@hotmail.com

ALGEBRAPRE

