

TD

Groupe symétrique

EXERCICE 1 ■ □ □

On considère la permutation $\sigma \in S_6$ définie par $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- ① Déterminer σ^{-1} .
- ② Trouver un entier naturel p non nul tel que $\sigma^p = \text{Id}_{[1,6]}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Déterminer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer σ^{2025} .

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Déterminer la signature de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculer σ^{2025} .

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ■ ■ □

Quel est l'inverse du p -cycle $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_p)$?

► Indication

► Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la signature de la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n-2 & 2n \end{pmatrix}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Soit $A \subset [1, n]$ de cardinal p . Déterminer le nombre de permutations $\sigma \in S_n$ telles que $\sigma(A) = A$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit $n \geq 2$ et c la permutation circulaire $c = (1 \ 2 \ \dots \ n-1 \ n)$. Déterminer toutes les permutations σ de S_n qui commutent avec c .

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ ■

Soit $n \geq 2$ et τ une transposition de S_n .

- ① Montrer que l'application $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n vers S_n .
- ② En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ formé des permutations de signature 1 de S_n .

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □ Théorème de Cayley

Soit $(G, \star)$ un groupe à n éléments. Pour tout $g \in G$, on définit

$$\begin{aligned} \varphi_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto x \star g. \end{aligned}$$

- ① Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow S(G) \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

- ② En déduire, que G est isomorphe à un sous groupe de S_n .

► Indication

► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Calculer les puissances de σ .

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Décomposer σ en cycles. Donner les puissances de chaque cycle.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Décomposer σ en cycles. Donner les puissances de chaque cycle.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Procéder élément par élément.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Faire un dessin et compter les intersections des "flèches". On peut aussi généraliser en commençant par de petites valeurs de n .

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Faire un dessin et compter les intersections des "flèches". On peut aussi généraliser en commençant par de petites valeurs de n .

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Ces permutations peuvent être décomposer en permutations de A et de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Les puissances de c conviennent.

Fixer une telle permutation, puis faire apparaître une conjugaison.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 **Théorème de Cayley**

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)