

Comment étudier une fonction

Dans cette fiche sont données les étapes d'étude d'une fonction. Vous les connaissez sûrement déjà depuis la terminale.

- ① On cherche le domaine de définition de la fonction. On ne peut pas faire d'étude sinon !
- ② D'abord, on réduit le domaine d'étude à l'aide de la périodicité, puis de la parité. Pourquoi réduire le domaine d'étude ? Pour travailler moins ! Pour ceux qui veulent travailler plus, je vous laisse sauter cette étape !
- ③ On calcule la dérivée. On vérifie (avant ou après) où la dérivée est définie et on donne le domaine de dérivabilité. Ce n'est pas trop difficile : Pour toutes les fonctions usuelles, La fonction est dérivable où elle est définie, sauf pour les fonctions racines n -ièmes.
Méthode : Pensez à Factoriser le plus possible. Le but est d'étudier son signe !
- ④ On dresse le tableau de signe de la dérivée et le tableau de variation de la fonction.
- ⑤ Et oui ce n'est pas fini ! On étudie les limites aux bornes du tableau.
Asymptotes :
 - Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, cela signifie que le graphe de f aura une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$. De même en $-\infty$.
 - Si, pour $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, alors le graphe de f aura une asymptote verticale d'équation $x = a$.
- ⑥ Etude des asymptotes obliques si le cas se présente.
Méthode : On regarde les limites infinies comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par exemple. Il faut chercher si f dans ce voisinage est proche d'une fonction affine, donc on regarde si $f'(x)$ ou $f(x)/x$ a une limite finie $l \in \mathbb{R}$! Ensuite, il suffit de retrancher à f la fonction $x \mapsto lx$ et de montrer que cette fonction tend vers une constante.
- ⑦ Si demandé, on trace le graphe en faisant apparaître toutes les asymptotes, toutes les tangentes horizontales (points où la dérivée s'annule). Le tracé doit être fluide et respecter le tableau de variations. En aucun cas, ce n'est un nuage de petites croix : ce n'est pas un relevé numérique de mesures physiques.

Exemple 1

Etudions les fonctions suivantes :

① $f : x \mapsto \frac{\sin x}{2 - \cos x},$

② $g : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2 - 5}.$

Exemple 2

Quelques fonctions pour s'entraîner :

$$(1) f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3} \left(\arctan x - \frac{x}{1+x^2} \right).$$

$$(2) f_2(x) = |\tan x| + \cos x.$$

$$(3) f_3(x) = x - \ln \left| \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3} \right|.$$

$$(4) f_4(x) = x \exp \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right).$$

$$(5) f_5(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right).$$

$$(6) f_6(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

$$(7) f_7(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$(8) f_8(x) = [x] + (x - [x])^2.$$

$$(9) f_9(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - x} + \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} + x}.$$

$$(10) f_{10}(x) = \frac{\arcsin x}{x}.$$

$$(11) f_{11}(x) = e^{1/x} \sqrt{x+4}.$$

$$(12) f_{12}(x) = \arccos \left(\frac{1}{\operatorname{ch} x} \right).$$

$$(13) f_{13}(x) = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right) - \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right),$$

où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$

$$(14) f_{14}(x) = \ln |\operatorname{sh} x - 1|.$$

$$(15) f_{15}(x) = x^{(x^x)}.$$

$$(16) f_{16}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}.$$

$$(17) f_{17}(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$(18) f_{18}(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

$$(19) f_{19}(x) = \ln(\operatorname{ch} x).$$

$$(20) f_{20}(x) = 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{x-1} - x \ln 3.$$

$$(21) f_{21}(x) = \ln \left| \frac{1}{e^x - 1} \right|.$$

Et en pratique ça sert à quoi ?

Dans un problème plus complexe, ça peut servir à

- Trouver des extrema : Soit $f : x \mapsto xe^{-x}$. Montrer que cette fonction est majorée sur $\mathbb{R}^+$, et minorée sur $\mathbb{R}^+$, et qu'elle admet deux extrema sur $\mathbb{R}^+$ dont on donnera la valeur.
Il suffit d'étudier la fonction et dresser son tableau de variation.
- Résoudre une inéquation : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \leq x + 2$
- Montrer une inégalité : Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x \geq x + 1$

Exemple 3

Soit $f : x \mapsto \frac{a}{x} + \frac{bx}{2}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$. Est-elle majorée? minorée? Donner ses extrema s'ils existent.

Exemple 4

Montrer l'inégalité
$$e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \text{pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \geq 0.$$

Exemple 5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$x^4 - x + 2 \leq 3x^3 - x^2.$$