

## COMBINACIONES CON REPETICIÓN

- Tenemos  $k$  objetos idénticos para distribuir en  $n$  cajas distintas

¿de cuántas formas distintas se pueden introducir los  $k$  objetos en las  $n$  cajas, teniendo en cuenta que cada caja puede contener los  $k$  objetos?

Elegimos  $k$  de las  $n$  cajas para colocar en ellas los objetos, pudiendo elegir la misma caja más de una vez.

- La alineación de las  $n$  cajas da lugar a  $n - 1$  tabiques de separación entre las cajas.

|     |  |    |      |     |   |  |   |  |
|-----|--|----|------|-----|---|--|---|--|
| 000 |  | 00 | 0000 | 000 | 0 |  | 0 |  |
|-----|--|----|------|-----|---|--|---|--|

Hay que elegir la posición de  $k$  objetos (ceros) ó de  $(n - 1)$  tabiques (unos) de entre un total de  $(n - 1) + k$  elementos.

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1} \quad (\text{Jacob Bernouilli, 1700})$$

- **Combinación con repetición** es una **Selección no ordenada** de  $k$  elementos escogidos entre  $n$  tipos diferentes de elementos, donde el mismo elemento se puede elegir hasta  $k$  veces.

El número de selecciones no ordenadas es

$$CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

## Ejemplo

En una pastelería hay 12 clases de pasteles.

Un cliente desea comprar 24 pasteles, ¿de cuántas formas puede hacer su elección?

|     |  |    |      |     |   |  |   |  |
|-----|--|----|------|-----|---|--|---|--|
| 000 |  | 00 | 0000 | 000 | 0 |  | 0 |  |
|-----|--|----|------|-----|---|--|---|--|

Hay que elegir  $k = 24$  pasteles de un conjunto con  
 $n = 12$  clases distintas de pasteles.

La alineación de las  $n = 12$  cajas da lugar a  $n - 1 = 11$  tabiques de separación entre las cajas.

Hay que elegir la posición de  $k = 24$  pasteles

ó la posición de  $n - 1 = 11$  tabiques

de entre un total de  $(n - 1) + k = 35$  elementos.

$$CR_{n=12,k=24} = \binom{35}{24} = \binom{35}{11}$$

## Ejemplo

¿Cuántos resultados distintos saldrán al lanzar tres dados iguales a la vez?

## Solución

Hay que elegir tres resultados ( $k = 3$ ) del conjunto

$A = \{ 1, 2, \dots, 6 \}$  con  $n = 6$  cajas.

Si  $x_i$  = nº de veces que sale  $i$  en los dados, entonces

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 3 \\ 0 \leq x_i \leq 3 \end{cases} \quad CR_{n=6, k=3} = \binom{8}{3} = 56$$

- Si tenemos  $k$  objetos idénticos para distribuir en  $n$  cajas distintas, teniendo en cuenta que cada caja puede contener  $k$  objetos, se puede considerar que elegimos  $x_i$  objetos de tipo  $i$  para alguna  $n$ -upla

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ con } x_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n x_i = k$$

- Combinación con repetición de  $k$  objetos elegidos entre  $n$  es una solución entera no negativa de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = k \\ 0 \leq x_i \leq k \end{cases} \quad CR_{n,k} = \binom{n-1+k}{k} = \binom{n-1+k}{n-1}$$

## Ejemplos

1) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 0 \leq x_i \end{cases} \quad \text{es} \quad CR_{n=5,k=30} = \binom{34}{30}$$

2) ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 8 piezas de fruta de una cesta que contiene manzanas, naranjas y peras si el orden en que se seleccionan las piezas no se tiene en cuenta?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 0 \leq x_i \leq 8 \end{cases} \quad \text{tiene} \quad CR_{n=3,k=8} = \binom{10}{8} = 45 \quad \text{soluciones}$$



- Una **solución entera positiva** de la ecuación  $x_1 + \dots + x_n = k$  es una combinación con repetición de  $k$  objetos elegidos entre  $n$  tipos de objetos de modo que se elige, al menos, un objeto de cada tipo
  - 1°  $\rightarrow$  se elige un objeto de cada tipo  $n$ , de una única manera.
  - 2°  $\rightarrow$  se eligen  $k - n$  objetos de los  $n$  tipos, de

$$CR_{n,k-n} = \binom{n-1+k-n}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$$

maneras distintas.

## Ejemplos

1) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \quad \text{es} \quad CR_{n=5, k=30-5} = \binom{29}{25}$$

2) ¿De cuántas formas se pueden repartir 15 caramelos idénticos entre 4 niños, si cada niño recibe al menos un caramelo?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \quad CR_{n=4, k=15-4} = \binom{14}{11}$$

## PERMUTACIONES CON REPETICIÓN

- Tenemos  $n$  objetos de  $m$  tipos distintos,

con  $k_i$  objetos idénticos de cada tipo  $i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$k_1 + \dots + k_m = n$$

para distribuir en  $n$  cajas distintas,

¿de cuántas formas distintas se pueden introducir los  $n$  objetos en las  $n$  cajas, teniendo en cuenta que cada caja contiene un único objeto?

- **Permutación con repetición** es una **selección ordenada** de  $n$  objetos de  $m$  tipos distintos, con  $k_i$  objetos idénticos de tipo  $i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  y con  $k_1 + \dots + k_m = n$

El nº de selecciones ordenadas distintas es

$$PR_n^{k_1 \dots k_m} = \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} \dots \binom{n-k_1-\dots-k_{m-1}}{k_m}$$

$$PR_n^{k_1 \dots k_m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} \equiv \binom{n}{k_1 \dots k_m}$$

llamamos a esta expresión **número multinómico**.

## Ejemplos

1) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar con todas las letras de ABRACADABRA?

2) ¿Cuántas sucesiones de longitud 15 con las letras  $\{ a, b, c, d, e \}$  se pueden formar, de modo que haya 7  $a$ , 3  $b$ , 2  $c$ , 2  $d$  y 1  $e$ ?

3) Un niño reparte 45 cromos entre 3 amigos, regalando 10 cromos a cada amigo, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

4) ¿De cuántas formas se pueden distribuir a cuatro jugadores manos de 5 cartas utilizando una baraja de 52 cartas?

## Soluciones

$$1) \quad PR_{11}^{5,2,2,1,1} = \binom{11}{5} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} = \frac{11!}{5! 2! 2! 1! 1!}$$

$$2) \quad PR_{15}^{7,3,2,2,1} = \binom{15}{7} \binom{8}{3} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = \frac{15!}{7! 3! 2! 2! 1!}$$

$$3) \quad PR_{45}^{10,10,10,15} = \binom{45}{10} \binom{35}{10} \binom{25}{10} = \frac{45!}{10! 10! 10! 15!}$$

$$4) \quad PR_{52}^{5,5,5,5,32} = \binom{52}{5} \binom{47}{5} \binom{42}{5} \binom{37}{5} = \frac{52!}{5! 5! 5! 5! 32!}$$

## PRINCIPIO DE LA CRIBA (ó de inclusión-exclusión)

- Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$\text{card} ( A \cup B ) = \text{card} ( A ) + \text{card} ( B ) - \text{card} ( A \cap B )$$

### Ejemplos

- 1) Hallar las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, 9\}$  que empiezan por 1 ó que terminan en 9.



2) En una encuesta realizada a un conjunto de 100 personas se obtienen los siguientes resultados:

- 25 personas van al cine y al teatro
- 20 personas no van al cine ni al teatro y
- van al cine el doble de personas que al teatro.

Averiguar el número de personas que van sólo al cine y el número de personas que van sólo al teatro.

## Soluciones

$$1) \quad U = \{ \text{permutaciones de } \{1, 2, \dots, 9\} \}$$

$$A = \{ \text{permutaciones de } U \text{ que empiezan por } 1 \}$$

$$B = \{ \text{permutaciones de } U \text{ que terminan por } 9 \}$$

$$\text{card } A = 8! \quad \text{card } B = 8!$$

$$A \cap B = \{ \text{permutaciones empiezan por } 1 \text{ y terminan por } 9 \}$$

$$\text{card} ( A \cap B ) = 7!$$

$$\text{card} ( A \cup B ) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card} ( A \cap B ) = 15.7!$$

2) Sean  $U = \{ \text{personas} \}$

$A = \{ \text{personas van al teatro} \}$        $B = \{ \text{personas van al cine} \}$

$A \cap B = \{ \text{personas que van al cine y al teatro} \}$

entonces  $\text{card } U = 100$  y se verifica

$\text{card } B = 2 \text{ card } A$        $\text{card} ( A \cap B ) = 25$

$\text{card} ( A \cup B ) = \text{card } U - \text{card} ( A \cup B )'$

$= \text{card } U - \text{card} ( A' \cap B' ) = 80$

$\text{card } A + \text{card } B = \text{card} ( A \cup B ) + \text{card} ( A \cap B ) = 105.$

Por tanto,  $\text{card } A = 35$  ,  $\text{card } B = 70$

## PRINCIPIO DE LA CRIBA (ó de inclusión-exclusión)

- Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conjuntos finitos, no vacíos, entonces

$$\text{card}(A \cup B \cup C) =$$

$$= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) -$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) +$$

$$+ \text{card}(A \cap B \cap C)$$

## Ejemplos

- 1) En el conjunto de los números naturales menores o iguales que 500, hallar cuántos números no son múltiplos de 2, ni de 3, ni de 5.
- 2) Hallar las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, 9\}$  que contengan a una de las sucesiones 123, 456, 789.

## Soluciones

$$1) \text{ Sean } N_{500} = \{ n \in \mathbb{N}, n \leq 500 \}$$

$$A = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 2 \} \Rightarrow \text{card } A = 250$$

$$B = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 3 \} \Rightarrow \text{card } B = 166$$

$$C = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 5 \} \Rightarrow \text{card } C = 100$$

$$A \cap B = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y de } 3 \}$$

$$A \cap C = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y de } 5 \}$$

$$B \cap C = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 3 \text{ y de } 5 \}$$

$$A \cap B \cap C = \{ n \in N_{500} / n \text{ es múltiplo de } 2, \text{ de } 3 \text{ y de } 5 \}$$

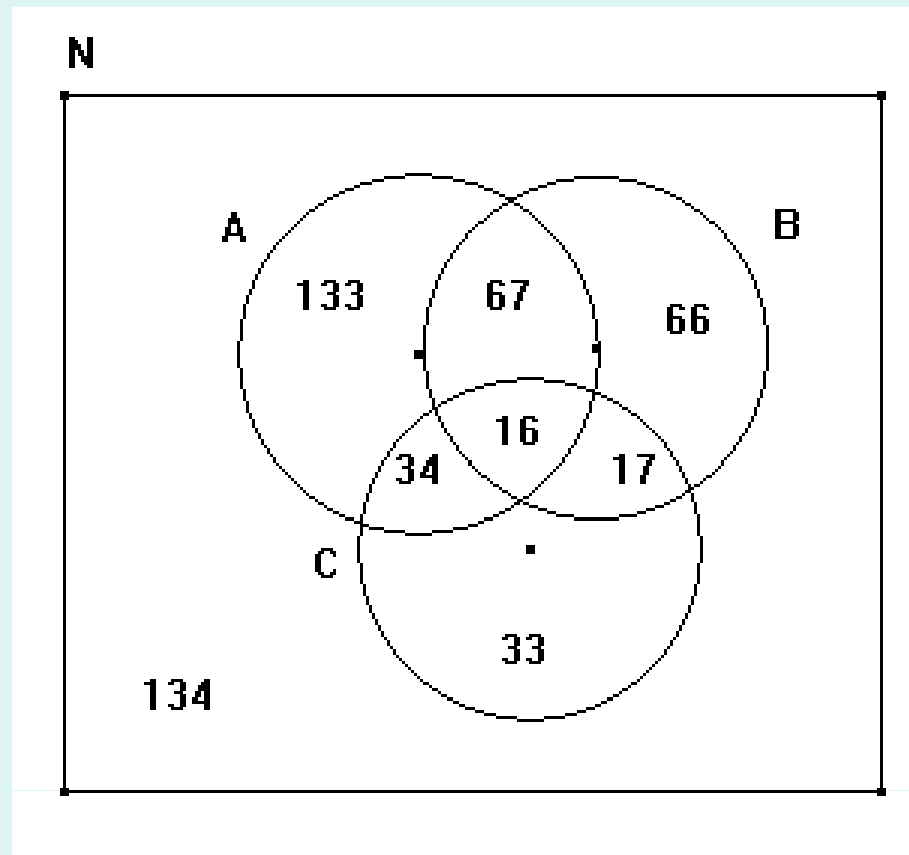
$$\text{card}(A \cap B) = 83, \text{ card}(A \cap C) = 50, \text{ card}(B \cap C) = 33$$

$$\text{card}(A \cap B \cap C) = 16 \qquad \text{card}(A \cup B \cup C) = 366$$

Por tanto,

$$\text{card}(A' \cap B' \cap C') = \text{card}(A \cup B \cup C)'$$

$$= \text{card } N_{500} - \text{card}(A \cup B \cup C) = 134$$



$$\begin{aligned}
 2) \quad A &= \{ \text{permutaciones que contienen } 123 \} \\
 B &= \{ \text{permutaciones que contienen } 456 \} \\
 C &= \{ \text{permutaciones que contienen } 789 \} \\
 \text{card } A &= \text{card } B = \text{card } C = 7 \cdot 6! = 7!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cap B &= \{ \text{permutaciones que contienen } 123 \text{ y } 456 \} \\
 A \cap C &= \{ \text{permutaciones que contienen } 123 \text{ y } 789 \} \\
 B \cap C &= \{ \text{permutaciones que contienen } 456 \text{ y } 789 \} \\
 \text{card } (A \cap B) &= \text{card } (A \cap C) = \text{card } (B \cap C) = 5!
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A \cap B \cap C &= \{ \text{permutaciones que contienen } 123, 456 \text{ y } 789 \} \\
 \text{card } (A \cap B \cap C) &= 3!
 \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } \text{card } (A \cup B \cup C) = 3 \cdot 7! - 3 \cdot 5! + 3! = 14766$$



## COMBINACIONES CON REPETICIÓN LIMITADA

### Ejemplos

- 1) ¿Cuántos  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n < 10^4$ , cumplen que la suma de sus cifras es 25?

$$1 \leq n = x_1 x_2 x_3 x_4 \leq 9999$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

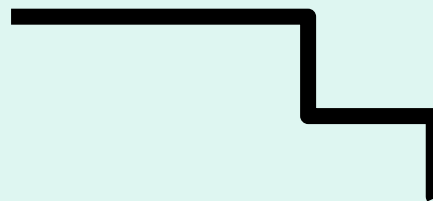
$$0 \leq x_i \leq 9$$

- 2) ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17$$

$$2 \leq x_1 \leq 5, \quad 3 \leq x_2 \leq 6, \quad 4 \leq x_3 \leq 7 ?$$

- 3) Al lanzar tres dados distintos a la vez, ¿en cuántos resultados posibles la suma es 10?
- 4) Un niño dispone de un juego de 30 palitos y los dispone en forma de escalera con 4 tramos, según indica la figura.



- a) ¿Cuántas escaleras diferentes puede construir?
- b) ¿Y si en cada uno de los tres primeros tramos debe haber a lo sumo 7 palitos?

## Soluciones

1) Sean  $X = \{ \text{soluciones no negativas de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \}$

$A_i = \{ \text{soluciones de } X \text{ con } x_i \geq 10 \}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \text{card} \left( X - \bigcup_{i=1}^4 A_i \right) &= \text{card } X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = \\ &= \text{CR}_{n=4, k=25} - 4\text{CR}_{n=4, k=15} + \binom{4}{2} \text{CR}_{n=4, k=5} = \binom{28}{3} - 4\binom{18}{3} + \binom{4}{2} \binom{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{card } X = \text{CR}_{n=4, k=25}$$

$$\alpha_1 = 4 \text{ card } A_i = 4 \text{ CR}_{n=4, k=15}$$

$$\alpha_2 = \binom{4}{2} \text{card} (A_i \cap A_j) = \binom{4}{2} \text{CR}_{n=4, k=5}$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

2) Se definen las variables  $y_1 = x_1 - 2$ ,  $y_2 = x_2 - 3$ ,  $y_3 = x_3 - 4$ ,  
entonces la ecuación se transforma en 
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 8 \\ 0 \leq y_i \leq 3 \end{cases}$$

Sean  $X = \{ \text{soluciones no negativas de } y_1 + y_2 + y_3 = 8 \}$   
 $A_i = \{ \text{soluciones de } X \text{ con } y_i \geq 4 \}$ .

$$\begin{aligned} \text{card} \left( X - \bigcup_{i=1}^3 A_i \right) &= \text{card } X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= \text{CR}_{n=3, k=8} - 3\text{CR}_{n=3, k=4} + \binom{3}{2} \text{CR}_{n=3, k=0} = \binom{10}{2} - 3\binom{6}{2} + \binom{3}{2} \binom{2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{card } X = \text{CR}_{n=3, k=8}$$

$$\alpha_1 = 3 \text{ card } A_i = 3 \text{ CR}_{n=3, k=4}$$

$$\alpha_2 = \binom{3}{2} \text{ card } (A_i \cap A_j) = \binom{3}{2} \text{ CR}_{n=3, k=0}$$

$$\alpha_3 = 0$$

3) Hay que elegir tres resultados, cuya suma sea  $k = 10$  del conjunto  $A = \{ 1, 2, 3 \}$  con  $n = 3$  cajas, al menos un elemento de cada caja.

Sean  $x_i \rightarrow$  número que aparece en el dado  $i$ ,

entonces hay que resolver la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ 1 \leq x_i \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 0 \leq x_i \leq 5 \end{cases}$$

Sean  $X = \{ \text{soluciones no negativas de } x_1 + x_2 + x_3 = 7 \}$   
 $A_i = \{ \text{soluciones de } X \text{ con } x_i \geq 6 \}$ .

$$\begin{aligned} \text{card} \left( X - \bigcup_{i=1}^3 A_i \right) &= \text{card } X - (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= CR_{n=3,k=7} - 3CR_{n=3,k=1} = \binom{9}{2} - 3\binom{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{card } X = CR_{n=3,k=7}$$

$$\alpha_1 = 3 \text{ card } A_i = 3 CR_{n=3,k=1}$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

4)

- a) Sea  $x_i = n^\circ$  de palitos que coloca en el tramo de escalera  $i$ -ésimo, entonces el  $n^\circ$  de escaleras diferentes que puede construir es el  $n^\circ$  de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ 1 \leq x_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \\ 0 \leq x_i \end{cases}$$

$$\text{esto es, } CR_{n=4, k=26} = \binom{29}{26}$$

b) Si en cada uno de los tres primeros tramos debe haber a lo sumo 7 palitos, entonces el n° de escaleras diferentes es el n° de soluciones enteras de la ecuación

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30 \\ 1 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 7, \quad 1 \leq x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \\ 0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 6, \quad 0 \leq x_4 \end{cases}$$

Si  $A_i = \{\text{soluciones de } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 26 \mid x_i \geq 7\}$ ,  $i=1, 2, 3$  entonces la solución es

$$CR_{4,26} - 3CR_{4,19} + \binom{3}{2} CR_{4,12} - CR_{4,5} = \binom{29}{3} - 3 \binom{22}{3} + \binom{3}{2} \binom{15}{3} - \binom{8}{3}$$