

TD

Fractions rationnelles

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ ■ □

Vrai ou faux ?

- ① Si une fraction R est de degré $n \in \mathbb{Z}$, alors le degré de $R\left(\frac{1}{X}\right)$ est $-n$.
- ② Si une fraction R est de degré $n \in \mathbb{Z}$, alors le degré de $\frac{1}{R}$ est $-n$.
- ③ Une fraction de degré positif est un polynôme.
- ④ Un pôle de $\frac{P}{Q}$ est une racine de P .
- ⑤ Les fractions de degré strictement négatif sont les fractions de partie entière nulle.
- ⑥ La partie entière de la fraction $\frac{P}{Q}$ est de degré $\deg P - \deg Q$.
- ⑦ $\frac{1}{X^2 + 2X - 3}$ est un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.
- ⑧ $\frac{1}{X^4 + 1}$ est un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.
- ⑨ $\frac{X + 1}{(X^2 - X + 1)^2}$ est un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.
- ⑩ $\frac{X + 1}{(X - 2)^2}$ est un élément simple dans $\mathbb{R}(X)$.
- ⑪ $\frac{X^2(X^2 + 2)}{X^4 - 1} = \frac{3/4}{X - 1} - \frac{3/4}{X + 1} + \frac{1/2}{X^2 + 1}$.

- ⑫ Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont tels qu'il existe une décomposition $\frac{P}{Q} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X - a_k}$, alors $\deg P = \deg Q \leq n$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □ Équation $\Rightarrow$ degré

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

► Correction

► Indication

EXERCICE 3 ■ ■ □

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q .

Montrer que F est paire si, et seulement si, les polynômes P et Q sont tous deux pairs.

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg F' < \deg F - 1 \implies \deg F = 0$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □ Zéros et pôles de la dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

- ① Soit a un zéro d'ordre $\alpha \geq 1$ de F . Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F' .
- ② Comparer les pôles de F et de F' , ainsi que leur ordre de multiplicité.

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 □ □ □ Déjà vu

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)}$.

- ① Réaliser la décomposition en éléments simples de F , et en déduire une simplification pour $n \geq 1$ de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
- ② Procéder de même pour calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

► Indication

► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 7 ■ □ □

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} & \textcircled{4} \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} & \textcircled{7} \frac{1}{X(X - 1)^2} \\ \textcircled{2} \frac{2X}{X^2 + 1} & \textcircled{5} \frac{1}{X^2 + X + 1} & \textcircled{8} \frac{4}{(X^2 + 1)^2} \\ \textcircled{3} \frac{3X - 1}{X^2(X + 1)^2} & \textcircled{6} \frac{1}{X^4 + X^2 + 1} & \textcircled{9} \frac{3}{(X^3 - 1)^2} \end{array}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}$. Former la décomposition en éléments simples de

$$\frac{n!}{X(X - 1) \dots (X - n)}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Déterminer les réels a, b et c tels que la fraction $\frac{aX^2 + bX + c}{(X^2 - 1)^2}$ n'admet pas de terme de degré -1 dans sa décomposition en éléments simples. ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □ Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$

Soit $F = \frac{1}{X^2 + 1} \in \mathbb{C}(X)$.

- ① En réalisant la décomposition en éléments simples de F , exprimer $F^{(n)}$.

- ② Montrer qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2 + 1)^{n+1}}$.

- ③ Déterminer les zéros de P_n .

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □ Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$

Exprimer la dérivée d'ordre n de

$$\frac{1}{X(X^2 + 1)}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$, $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

Mettre sous forme irréductible la fraction $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

Calculer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^{2n} - 1}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

- ① Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $P(\omega X) = P(X)$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.
- ② En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 16 ■ ■ □

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F , $F(n) \in \mathbb{Q}$.
Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$. [▶ Indication](#) [▶ Correction](#)

EXERCICE 17 ■ (A) ■

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, tels que

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_i + b_j \neq 0$$

Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1 + b_1} + \frac{x_2}{a_2 + b_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n + b_1} = 1 \\ \frac{x_1}{a_1 + b_2} + \frac{x_2}{a_2 + b_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n + b_2} = 1 \\ \vdots \\ \frac{x_1}{a_1 + b_n} + \frac{x_2}{a_2 + b_n} + \dots + \frac{x_n}{a_n + b_n} = 1 \end{cases}$$

[▶ Indication](#)
[▶ Correction](#)

EXERCICE 18 ■ ■ ■

Soit $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ un polynôme réel dont toutes les racines sont réelles.

(1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (P'^2 - PP'')(x) \geq 0$.

(2) En déduire que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

[▶ Indication](#)
[▶ Correction](#)

EXERCICE 19 ■ ■ □

Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.

[▶ Indication](#)
[▶ Correction](#)

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 Équation $\Rightarrow$ degré _____

On passe aux degrés !

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

Ecrire l'équation polynomiale qui découle de la parité de F , et en déduire des relations de divisibilités, avec le Lemme de Gauss.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

On pose F comme fraction de deux polynômes et on calcule le degré de sa dérivée.
On utilise au mieux toutes les propriétés du degré d'un polynôme.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 Zéros et pôles de la dérivée _____

On dérive pour la première question, après avoir écrit F selon l'hypothèse.
Même idée pour la deuxième question.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 Déjà vu _____

On se rappelle des sommes télescopiques.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

On utilise la méthode d'évaluation.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

On n'a pas peur et on calcule les racines complexes (simples) du dénominateur.
La corollaire utile nous donne la décomposition.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

Écrire la décomposition en éléments simples puis évaluer en les racines !

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$ _____

Pour la dernière question pensez à réutiliser la question 1.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$ _____

Même méthode que l'exercice 11.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

On réutilise le corollaire utile dans le sens inverse !

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 _____

Pas le choix. On doit passer par $\mathbb{C}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 _____

Utiliser l'équation pour montrer qu'en fait, il n'y a pas beaucoup de termes dans P .
Vérifier que le numérateur vérifie les mêmes conditions que la question ①.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 _____

Montrer qu'il existe autant d'équation rationnelles que l'on veut qui annulent des CL du numérateur et du dénominateur de F .

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17 _____

Considérez la fraction rationnelle $F(X) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i + X}$, et chercher un lien avec notre problème.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 _____

On pensera à dériver la fraction P'/P . On montre ensuite par récurrence, que l'on pourrait appliquer le résultat de ① à $P^{(k-1)}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 _____

On pose F comme quotient de polynômes premiers entre eux, et on fait marcher les diviseurs et les racines !

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

- ① Faux, par exemple $\frac{1}{X+1}$.
- ② Vrai
- ③ Faux, par exemple $\frac{X^2}{X+1}$.
- ④ Faux, rien n'assure que ce représentant est irréductible.
- ⑤ Vrai.
- ⑥ Faux quand la quantité $\deg P - \deg Q$ est strictement négative.
- ⑦ Faux car le dénominateur admet une racine réelle donc n'est pas irréductible.
- ⑧ Faux car le dénominateur est de degré 4 donc n'est pas irréductible.
- ⑨ Vrai.
- ⑩ Faux le degré du numérateur doit être strictement inférieur au degré du polynôme irréductible utilisé au dénominateur (ici, $X - 2$).
- ⑪ Faux, la partie entière est oubliée.
- ⑫ Faux pour la dernière inégalité, car $\frac{X^k P}{X^k Q} = \frac{P}{Q}$.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2 Équation $\Rightarrow$ degré

Si F est solution alors $\deg F^2 = 2 \deg F = 1$ avec $\deg F \in \mathbb{Z}$. C'est impossible.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Si F est paire alors $F(-X) = F(X)$ donc $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$.
Donc $Q(X) \mid P(X)Q(-X)$ et $P \wedge Q = 1$, donc, d'après le lemme de Gauss, $Q(X) \mid Q(-X)$.

De même $Q(-X) \mid Q(X)$, ce qui donne $Q(-X) = \lambda Q(X)$, avec $\lambda \in R$

Mais le coefficient dominant de $(Q(-X))$ est le même que $Q(X)$, multiplié par $(-1)^n$ avec $n = \deg Q$.

Si n est pair alors $Q(-X) = Q(X)$ puis $P(-X) = P(X)$ et les deux polynômes sont pairs.

Si n est impair alors $Q(-X) = -Q(X)$ puis $P(-X) = -P(X)$. On trouve alors que X divise ces deux polynômes, car 0 est racine.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Si $F = \frac{A}{B}$, alors $F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$.

Le cas A ou B constants est assez rapide. Sinon,

$$\deg F' < \deg F - 1 \implies \deg(A'B - AB') < \deg A'B = \deg AB',$$

ce qui donne l'égalité des coefficients dominants de $A'B$ et de AB' .

On en déduit, en calculant les coefficients dominants, par exemple, que $\deg A = \deg B$, puis $\deg F = 0$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5 Zéros et pôles de la dérivée

Prenons $a \in \mathbb{K}$ et $\alpha \geq 1$.

$$\textcircled{1} \text{ Si } F = \frac{(X-a)^\alpha \cdot A}{B}, \text{ alors } F' = \frac{(X-a)^{\alpha-1} [\alpha AB + (X-a)A'B - (X-a)AB']}{B^2}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Si } F = \frac{A}{(X-a)^\alpha B}, \text{ alors } F' = \frac{(X-a)^{\alpha-1} [(X-a)A'B - (X-a)AB' - \alpha AB]}{B^2(X-a)^{2\alpha}}.$$

Un pôle d'ordre α pour F donne donc un pôle d'ordre $\alpha + 1$ pour F' .

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6 Déjà vu

↩ retour à l'EXERCICE 6

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 7

$$(1) \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$$

$$(2) \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}$$

$$(3) \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{1}{X} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{X-1}$$

$$(4) \frac{2X}{X^2+1} = \frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}$$

$$(5) \frac{1}{X^2+X+1} = -\frac{i/\sqrt{3}}{X-j} + \frac{i/\sqrt{3}}{X-j^2}$$

$$(6) \frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X+i)^2} + \frac{i}{X+i}$$

$$(7) \frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = -\frac{1}{X^2} + \frac{5}{X} - \frac{4}{(X+1)^2} - \frac{5}{(X+1)}$$

$$(8) \frac{1}{X^4+X^2+1} = \frac{(1-j)/6}{X-j} + \frac{(1-j^2)/6}{X-j^2} - \frac{(1-j)/6}{X+j} - \frac{(1-j^2)/6}{X+j^2}.$$

(9) On peut penser à l'astuce $F(j^2X) = F(jX) = F(X)$. On obtient alors plus rapidement

$$\frac{3}{(X^3-1)^2} = \frac{1/3}{(X-1)^2} - \frac{2/3}{(X-1)} + \frac{j^2/3}{(X-j)^2} - \frac{2j/3}{(X-j)} + \frac{j/3}{(X-j^2)^2} - \frac{2j^2/3}{(X-j^2)}.$$

↪ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

La partie entière est nulle et $0, 1, \dots, n$ sont pôles simples. On peut donc écrire

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(X-k)}$$

avec

$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\dots 1 \cdot (-1) \dots (k-n)} = (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$$

↪ retour à l'EXERCICE 8

Correction de l'EXERCICE 9

Les pôles de cette fraction rationnelles sont simples et sont les racines n -ième de l'unité $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X-\omega_k}$$

La partie polaire

$$\frac{\lambda}{X-a}$$

d'un pôle simple a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

En effet, si $Q(X) = (X-a)R(X)$ on a $Q'(a) = R(a)$. Ici

$$\alpha_k = \left(\frac{X^{n-1}}{(X^n-1)'} \right) (\omega_k) = \frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X-\omega_k}$$

↪ retour à l'EXERCICE 9

Correction de l'EXERCICE 10

On a $\frac{aX^2+bX+c}{(X^2-1)^2} = \frac{\alpha}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{(X+1)^2}$, puisque la fraction ne doit pas admettre de terme de degré -1, dans sa décomposition.

Multiplier par $(X-1)^2$ et évaluer en 1 nous donne $\alpha = \frac{1}{4}(a+b+c)$. De même, on trouve $\gamma = \frac{1}{4}(a-b+c)$.

Enfin en mettant au même dénominateur,

$$\begin{aligned} aX^2+bX+c &= \alpha(X+1)^2 + \gamma(X-1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(a+c)X^2 + bX + \frac{1}{2}(a+c). \end{aligned}$$

vrai si, et seulement si, $a = c$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11 Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$

① La décomposition en éléments simples est

$$F = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{X-i} - \frac{1}{X+i} \right)$$

donc

$$F^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2i} \left(\frac{1}{(X-i)^{n+1}} - \frac{1}{(X+i)^{n+1}} \right)$$

② $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$ avec

$$P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i} ((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}) \in \mathbb{C}_n[X]$$

Mais $\overline{P_n} = P_n$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

③ Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P_n(x) = 0 &\iff (x+i)^{n+1} = (x-i)^{n+1} \\ &\iff \exists k \in \{1, \dots, n\}, x = \cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Cela fournit n racines réelles et il n'en peut y en avoir d'autres complexes.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12 Dérivée n -ième, en passant par $\mathbb{C}$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X^2+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1/2}{X-i} - \frac{1/2}{X+i}$$

et on sait

$$\left(\frac{1}{X-a} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X-a)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{X(X^2+1)} \right)^{(n)} = (-1)^n n! \left(\frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1/2}{(X-i)^{n+1}} - \frac{1/2}{(X+i)^{n+1}} \right)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{P}{X^n - 1} \text{ avec } \deg P < n$$

De plus, par décomposition en éléments simples

$$\frac{P(\omega_k)}{(X^n - 1)'(\omega_k)} = \omega_k^p$$

Par suite on a

$$P(\omega_k) = n\omega_k^{n-1}\omega_k^p = n\omega_k^{p-1}$$

Ces n relations permettent de reconnaître P puisqu'on sait $\deg P < n$ On obtient

$$P = nX^{p-1} \text{ si } p \geq 1 \text{ ou } P = nX^{n-1} \text{ si } p = 0$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^{2n} - 1} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{ik\pi}{n}}} + \frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{X - e^{-\frac{ik\pi}{n}}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}} \left(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) + e^{-\frac{ik\pi}{n}} \left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right)}{\left(X - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \left(X - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right)} \\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2X \cos \frac{k\pi}{n} - 2}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1} \\ &= \frac{1}{2n(X-1)} - \frac{1}{2n(X+1)} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X \cos \frac{k\pi}{n} - 1}{X^2 - 2X \cos \frac{k\pi}{n} + 1}. \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

- ① Posons $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$. avec (a_k) suite de complexe nulle au-delà d'un certain rang.

La relation $P(\omega X) = P(X)$ donne $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \omega^k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$.

On obtient donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \omega^k = a_k$, d'où, $a_k = 0$ pour tout $k \neq 0[n]$.

En posant $b_\ell = a_{n\ell}$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell X^\ell$ on obtient $P(X) = Q(X^n)$.

- ② Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $F = \frac{P}{X^n - 1}$ avec $\deg P = n$.

Comme $F(\omega X) = F(X)$, on obtient $\frac{P(\omega X)}{X^n - 1} = \frac{P(X)}{X^n - 1}$, d'où $P(\omega X) = P(X)$.

Par suite P est de la forme $P = aX^n + b$.

En étudiant la partie entière de F on obtient $a = n$. Enfin, la valeur de F en 0 donne $b = n$.

Donc

$$F = n \frac{X^n + 1}{X^n - 1} .$$

↩ retour à l'EXERCICE 15

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 16

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $F = P/Q$. Le cas où $P = 0$ étant immédiat, supposons-le désormais exclu. Posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$ et écrivons

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell, a_k, b_\ell \in \mathbb{C}$$

Considérons $p + q + 1$ naturels n n'annulant pas Q . Pour chacun, la relation

$$P(n) - y_n Q(n) = 0 \text{ avec } F(n) = y_n \in \mathbb{Q}$$

définit une équation

$$a_0 + na_1 + \dots + n^p a_p - y_n b_0 - \dots - y_n n^q b_q = 0$$

Le système formé par ses équations est compatible (dans $\mathbb{C}$) et à coefficients rationnels. Par application de la méthode de Gauss (par exemple), on peut affirmer que ce système possède une solution rationnelle. Il existe donc

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{Q}$$

tels que pour

$$R = \sum_{k=0}^p \alpha_k X^k \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } S = \sum_{\ell=0}^q \beta_\ell X^\ell \in \mathbb{Q}[X]$$

on ait

$$R(n) - y_n S(n) = 0$$

pour chacun de $p + q + 1$ naturels n initialement considéré. On a alors pour ces n ,

$$P(n)S(n) = Q(n)R(n)$$

et donc le polynôme

$$PS - QR$$

admet au moins $p + q + 1$ racines. Or

$$\deg(PS - QR) \leq p + q$$

donc

$$PS = QR$$

puis

$$F = \frac{R}{S} \in \mathbb{Q}(X)$$

↪ retour à l'EXERCICE 16

Correction de l'EXERCICE 17

Le système est résolu si et seulement si $F(b_1) = \dots = F(b_n) = 0$.

En réduisant F au même dénominateur, on obtient $F = \frac{P}{Q}$ avec P unitaire, $\deg P = n$

et $Q = \prod_{i=1}^n (X + a_i)$.

Les équations $F(b_1) = \dots = F(b_n) = 0$ donnent $P = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

La décomposition en éléments simples F donne alors
$$x_i = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^n (b_k + a_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_k - a_i)}.$$

↪ retour à l'EXERCICE 17

Correction de l'EXERCICE 18

① En notant $x_1, \dots, x_n$ les racines réelles de P , on a
$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - x_k}.$$

En dérivant, on obtient
$$\frac{P(x)P''(x) - P'(x)^2}{P(x)^2} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - x_k)^2},$$
 ce qui permet de conclure.

② Notons $x_1 < \dots < x_p$ les racines réelles de P de multiplicités $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$. Puisque P ne possède pas de racines complexes, on a

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \deg P$$

Par application du théorème de Rolle, P' possède une racine dans chacun des intervalles $]x_1; x_2[, \dots,]x_{p-1}; x_p[$ et de plus $x_1, \dots, x_p$ sont racines de P' de multiplicités $\alpha_1 - 1, \dots, \alpha_p - 1$ (en acceptant de dire qu'une racine de multiplicité 0, n'est pas racine). Puisque

$$p - 1 + (\alpha_1 - 1) + \dots + (\alpha_p - 1) = \deg P - 1 = \deg P'$$

le polynôme P' ne possède pas de racines complexes. Il en est de même de $P'', P^{(3)}, \dots$. En appliquant le résultat du a) à $P^{(k-1)}$ en $x = 0$, on obtient

$$((k)!a_k)^2 - ((k-1)!a_{k-1})((k+1)!a_{k+1}) \geq 0$$

puis l'inégalité voulue que le produit $a_{k+1}a_{k-1}$ soit positif ou non.

↪ retour à l'EXERCICE 18

Correction de l'EXERCICE 19

Par l'absurde, supposons qu'il existe $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F' = 1/X$. Notons P/Q son représentant irréductible. $F' = 1/X$ donne

$$(P'Q - PQ')X = Q^2$$

X divise Q^2 donc 0 est racine de Q^2 et donc a fortiori de Q . Posons $\alpha \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité dans Q . P et Q étant premiers entre eux, 0 n'est pas racine de P . 0 est racine de multiplicité $\alpha - 1$ de PQ' et racine de multiplicité au moins α de $P'Q$ donc 0 est racine de multiplicité exactement $\alpha - 1$ de $P'Q - PQ'$. D'autre part 0 est racine de multiplicité 2α de $Q^2 = (P'Q - PQ')X$. Par égalité de multiplicité $2\alpha = (\alpha - 1) + 1$ d'où $\alpha = 0$. Absurde.

↪ retour à l'EXERCICE 19