

TD Calculs

FACTORISATIONS / POLYNÔMES

EXERCICE 1 ☒ ☐ ☐

Factoriser les expressions suivantes (SANS développer, en repérant des termes communs ou des identités remarquables):

- | | | |
|---------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $x^2 + 2x + 1$ | ⑥ $4x^2 + 12x + 9$ | ⑩ $(2x+1)(3x-6) + (4x-8)(2x-1)$ |
| ② $3x^2 - 18x + 27$ | ⑦ $(3x+2)^2 - (-x+1)^2$ | |
| ③ $16x^2 - 9$ | ⑧ $4x^2 + 4x + 1 - (6x+3)(x+1)$ | ⑪ $4(x-3)^2 - 49$ |
| ④ $18x^2 - 12x + 2$ | ⑨ $((x+3)(2x+2) - (x^2+2x+1))$ | ⑫ $9(x-1)^2 - 12$ |
| ⑤ $(x+5)^2 - 16$ | | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ☒ ☐ ☐

Compléter les expressions suivantes de manière à ce qu'elles soient vraies pour tout nombre réel x .

- | | |
|--|--|
| ① $(x + \dots)^2 = \dots + 6x + \dots$ | ④ $(\dots + \dots)(\dots - \dots) = 4x^2 - 64$ |
| ② $(x + \dots)^2 = \dots + 9x + \dots$ | ⑤ $(\dots - 3/4)^2 = x^2 - \dots + \dots$ |
| ③ $(\dots - \dots)^2 = x^2 - \dots + 25$ | ⑥ $\dots - 3 = (x + \dots)(x - \dots)$ |

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ☒ ☐ ☐

Écrire sous forme canonique les trinômes suivants (c'est à dire de la forme: $a(x-x_0)^2 + \alpha$, où a, x_0, α sont des réels indépendants de x).

- | | | |
|----------------------|-----------------------|-------------------|
| ① $-2x^2 + 4x - 9$, | ③ $3x^2 + 12x - 15$, | ⑤ $x^2 + x + 1$. |
| ② $4x^2 + 4x - 5$, | ④ $3x^2 - 5x + 4$, | |

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ☒ ☐ ☐

Résoudre par la méthode de votre choix, les équations suivantes, après avoir précisé le domaine de validité si besoin:

- | | |
|----------------------------|--|
| ① $\frac{x-4}{3} = x-2$ | ④ $(x+1)(x-1) = 3x(x+1)$ |
| ② $4x^2 - 1 = (2x+2)^2$ | ⑤ $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$ |
| ③ $2x^2 + x + 1 = x^2 - x$ | ⑥ $\frac{2x}{4x+1} = \frac{x+1}{2x-1}$ |

► Indication

► Correction

PUISSANCES

EXERCICE 5 ☐☐☐

Soient a, b, c des réels et n, m deux entiers naturels. Développer ou simplifier les expressions suivantes, en faisant le maximum de calculs de tête :

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------|------------------------|
| ① $(a + b)^3$ | ⑤ $2^n + 2^n$ | ⑨ $4^m 2^n$ |
| ② $(a + b + c)^2$ | ⑥ $3^n 12^n$ | ⑩ $a^n b^{5n}$ |
| ③ $(1 + b)^n$ | ⑦ $3 \times 4^n + 2^{2n}$ | ⑪ $5^{2n} 2^n$ |
| ④ $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$ | ⑧ $2^{n+1} - 2^n$ | ⑫ $27^{2n} \times 3^n$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ☒☒☐

Soient x et y deux réels positifs.

- ① Montrer que $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
- ② En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.
- ③ Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. On l'appelle **l'Inégalité arithmético-géométrique**

► Indication ► Correction

VALEUR ABSOLUE

EXERCICE 7 ☒☐☐

Montrez que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ☒☐☐

Résoudre sur $\mathbb{R}$ $||x - 1| - 2| = 2$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ☒☐☐

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|--------------------|---------------------------|
| ① $ x + 3 = 5$ | ③ $ x + 2 > 7$ |
| ② $ x + 3 \leq 5$ | ④ $ 2x - 4 \leq x + 2 $ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ☒☒☐

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- | | |
|-----------------------------|------------------------------|
| ① $ x + 12 = x^2 - 8 $ | ③ $ x + 1 + x - 3 \leq 6$ |
| ② $ x + 12 \leq x^2 - 8 $ | ④ $ \frac{1}{x} - 2 \leq 3$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ☒☒☐

Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

- ① $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
- ② $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
- ③ $\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$

► Indication ► Correction

SYSTÈMES LINÉAIRES

EXERCICE 12 ■ □ □

Résoudre les systèmes linéaires

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 2x + y = 3. \end{cases} \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x - 3y + 2z + t = -2 \\ 2x + 4y + z + 2t = 4 \\ 7x + 9y + 5z + 7t = 10 \\ -4x - 18y + z - 4t = -16. \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 1x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 5 \\ 4x + 4y + 4z + 4t = 3 \end{cases} \quad (\mathcal{S}_4) : \begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ □ □

Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \lambda \\ x + y + \lambda z + t = \lambda + 1 \end{cases}$$
 ► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$
 ► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

Discuter, en fonction de la valeur des paramètres λ et μ , des solutions réelles du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Résoudre le système, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} \lambda x + \mu y + z = 1 \\ x + \lambda \mu y + z = \mu \\ x + \mu y + \lambda z = 1 \end{cases}$$
 ► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ □ □

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré inférieur à 3 on ait :

$$\int_2^4 P(x) dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ ■

Soit un système S_n aux variables $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de la forme

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_n^2 x_n = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-2} x_1 + \lambda_2^{n-2} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2} x_n = a_{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} x_1 + \lambda_2^{n-1} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n = a_{n-1} \end{cases}$$

pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.Montrer que ce système admet une solution unique si et seulement si les coefficients λ_i y figurant sont deux à deux distincts. ► Indication ► Correction

LIMITES

EXERCICE 21 ☒ ☐ ☐

Calculer les limites des fonctions suivantes, au point a , réel ou non. Faire l'effort à chaque fois de relever quelle méthode ci-dessus a été utilisée pour lever la forme indéterminée.

$$\textcircled{1} f(x) = 3x^2 - x, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$\textcircled{2} g(x) = \frac{x^2 - 2}{2x + 1}, \quad a = -\infty \text{ et } a = 0$$

$$\textcircled{3} h(x) = x + \cos x, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$\textcircled{4} i(x) = -10x + 3 - \frac{5}{x-1}, \quad a = +\infty, \text{ et } a = 1.$$

$$\textcircled{5} j(x) = \frac{x + \sin(x)}{x}, \quad a = +\infty \text{ et } a = -\infty$$

$$\textcircled{6} k(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x, \quad a = -\infty$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ☒ ☐ ☐

Calculer les limites des fonctions suivantes, au point a , réel ou non. Faire l'effort à chaque fois de relever quelle méthode ci-dessus a été utilisée pour lever la forme indéterminée.

$$\textcircled{1} f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), \quad a = 0.$$

$$\textcircled{4} i(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}, \quad a = -\infty.$$

$$\textcircled{2} g(x) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad a = +\infty \text{ et } a = 9.$$

$$\textcircled{5} j(x) = \frac{\sin(x/3)}{\cos(x)}, \quad a = \frac{\pi}{2}.$$

$$\textcircled{3} h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad a = +\infty.$$

$$\textcircled{6} k(x) = \sqrt{5x^2 + 9x - 2}, \quad a = -\infty.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ☒ ☐ ☐

Calculer les limites des fonctions suivantes, au point a , réel ou non. Faire l'effort à chaque fois de relever quelle méthode ci-dessus a été utilisée pour lever la forme indéterminée.

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{x+1}{x-3} \text{ en } 2, 3 \text{ et } +\infty.$$

$$\textcircled{2} g(x) = x(x-100) \text{ en } 100.$$

$$\textcircled{3} h(x) = \frac{1}{x} + x \text{ en } 0 \text{ et } +\infty.$$

$$\textcircled{4} u(x) = 1 + x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0 \text{ et } -\infty.$$

$$\textcircled{5} v(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} \text{ en } 0.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ☒ ☒ ☐ Avec $\ln$ et $\exp$

Déterminer les limites suivantes.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\textcircled{11} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 3}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$$

$$\textcircled{12} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x^3}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$$

$$\textcircled{13} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln x}$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) - x$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{2x}$$

$$\textcircled{14} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$$

► Indication ► Correction

TRIGONOMETRIE

EXERCICE 25 ☐☐☐

Calculer $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ pour $x \in \left\{ -\frac{15\pi}{6}, \frac{37\pi}{3}, \frac{13\pi}{2} \right\}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ☒☐☐

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer les valeurs suivantes en fonctions de $\cos x$ et $\sin x$.

- | | |
|---|--|
| ① $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | ③ $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| ② $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | ④ $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ☒☐☐

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- ① Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- ② Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ☒☐☐

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- | | |
|---|--|
| ① $\cos x = -\frac{1}{2}$, | ⑤ $\cos x = \cos 2x$, |
| ② $\tan 3x = -1$, | ⑥ $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, |
| ③ $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, | ⑦ $\cos\left(\frac{2x}{3}\right) \times \cos(x) = 0$, |
| ④ $\tan x = \frac{1}{\tan x}$, | ⑧ $\sin(2x) = -\cos(x)$. |

► Indication ► Correction

EXERCICE 29 ☒☐☐

Factoriser les expressions P suivantes, et résoudre l'équation $P = 0$.

① $P_1 = \sin t + \sin(2t)$

③ $P_3 = \sin t + \frac{\sin(2t)}{2}$

② $P_2 = \sin t + \cos(2t)$

④ $P_4 = \sin t - \frac{\sin(2t)}{2} \cos t$

► Indication ► Correction

EXERCICE 30 ☒☒☐

Calculer les intégrales suivantes :

① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$

② $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \sin(2x) dx$

③ $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx$, où n et p sont des entiers naturels.

On fera attention au cas particulier $n = p$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 31 ☒☐☐

- ① Résoudre l'équation d'inconnue réelle x , $\cos(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.
- ② De même avec $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2x)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 32 ☒☒☐

À quelle condition sur le réel x est-ce que $\tan(3x) - 3\tan(x)$ est défini?

Résoudre alors $\tan(3x) = 3\tan(x)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 33 ☒☒☐

- ① Résoudre l'inégalité $\sin(x)(2\cos(x) - 1) \geq 0$. On peut commencer par un tableau de signes sur $[0, 2\pi[$.
- ② En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inégalité $\sin(x) \geq \sin(2x)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 34 ■ ■ □

Simplifier, pour $b, t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$,

$$x(t) = a \cos t - a \sin^2(t) \cos(t) - \frac{b^2}{a} \cos^3(t) .$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 35 ■ ■ □

Résoudre les inéquations ou équations suivantes, puis donner toutes les solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

① $\sin x > \sin(2x)$.

③ $1 + 2 \cos \theta \leq 0$.

② $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leq \cos(2x)$.

④ $\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 36 ■ ■ □ CCP MP

Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 37 ■ (A) ■

Résoudre l'équation suivante. On donnera toutes les solutions S , puis on les tracera sur le cercle trigonométrique, et on donnera les solutions S_0 qui sont dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ rangées dans l'ordre croissant et dessinées sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x + \sin(3x) + \sin(5x) = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) \quad (\text{E})$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 38 ■ □ □

Soit $x \in [-\pi, 0]$ tel que $\tan x = 1 - \sqrt{2}$. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan 2x$.

En déduire la valeur exacte de x .

► Indication

► Correction

EXERCICE 39 ■ ■ ■

Pour quelles valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ a-t-on l'égalité suivante ?

$$2 \sin x = -\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 40 ■ (A) ■

Résoudre l'équation d'inconnue x réelle :

$$(\sqrt{3} + 1) \cos(x) + (\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 1 = 0 \quad (\text{E})$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 41 ■ ■ ■ Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Cet exercice présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

PREMIÈRE MÉTHODE

- ① Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- ② En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
- ③ En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-la.
- ④ Déterminer la valeur exacte de α .

DEUXIÈME MÉTHODE

- ⑤ Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2 \sin(x)}$ (quand cela a un sens).
- ⑥ En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
- ⑦ Calculer $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
- ⑧ En déduire une équation du second degré vérifiée par α , et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

► Indication

► Correction

EXERCICE 42 ■ ■ ■ Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$

Pour tous réels a et h , et pour tout entier n , on pose

$$C_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \quad \text{et} \quad S_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh) .$$

On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \frac{\pi}{17}$.

① Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin \frac{h}{2} = 0$.

② Dans le cas contraire, prouver que

$$C_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$$

(le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).

③ On pose $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos \theta + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.

④ Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).

⑤ Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).

⑥ En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2 .

⑦ On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos \theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

⑧ En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4 .

⑨ Calculer le produit $\cos \theta \cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos \theta$ (pour les plus masochistes courageux, finir les calculs et donner cette valeur).

► Indication ► Correction

SOMMES, PRODUITS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

EXERCICE 43 ■ □ □

Calculer les sommes suivantes en faisant un changement d'indice.

① $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

③ $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$

② $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$

④ $\sum_{k=1}^n (n-k+1)$

► Indication ► Correction

EXERCICE 44 ■ ■ □ Formules binôme

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

① $\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n}$

③ $\sum_{k=0}^n k \binom{2n}{2k}$

② $\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$

(Changement d'indice $l = n - k$).

► Indication ► Correction

EXERCICE 45 ■ □ □ Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donnez une forme factorisée de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 46 ■ (A) ■

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

Avec la même méthode, simplifier les sommes

$$T_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k! \quad \text{et} \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 47 ■■■□

Calculer $S_1 = \sum_{k=1}^n k$, $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$, et $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3$.

Cela ne fait pas de mal de connaître ces résultats par coeur.

► Indication ► Correction

EXERCICE 48 ■□□

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 49 ■□□

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sommes $S_n = \sum_{k=1}^n k^2(n-k)$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 50 ■■■□

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq n$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 51 ■■■□

Soient $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes $R_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 52 ■□□ Norme dans $\mathbb{R}^n$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Démontrer que pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \text{ et } \|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 53 ■■■■ Divergence de la série harmonique

① Montrer que pour tout entier n , $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$.

② Qu'en déduire sur la convergence de $S_N = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$?

On admet qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 54 ■■■■

① Calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^2 \binom{2n}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

② Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

③ Calculer $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{2n}{2k+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

④ On pose pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p$.

$$\text{Calculer } \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} S_j(n) = (n+1)^{p+1}.$$

⑤ Pour tout $n \geq 2$, calculer $u_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 55 ■■■□

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$A_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 56 ■■■

Calculer

$$S_n = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij, \quad U_n = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij, \quad W_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij,$$

$$T_n = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} ij, \quad V_n = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij, \quad X_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} ij.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 57 ■■□

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7 :

- en utilisant la factorisation de $a^n - b^n$,
- en utilisant la formule du binôme.

► Indication

► Correction

EXERCICE 58 ■■■

Montrer sans récurrence que

$$\textcircled{1} \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \quad \textcircled{2} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 59 ■■■

Le but du problème est le calcul, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, des sommes

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^p, \quad \varphi_{n,p}(u) = \sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k} u^k.$$

- ① 1.a Exprimer les nombres $k \binom{n}{k}, k(k-1) \binom{n}{k}, \dots, k(k-1) \dots (k-p+1) \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n-2}{k-2}, \dots, \binom{n-p}{k-p}$.

- 1.b Calculer alors les sommes $S_{n,0}, S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.

On pourra remarquer que k^2 est combinaison linéaire de k et $k(k-1)$.

- 1.c Trouver a, b, c telles que $\forall k \in \mathbb{N}, k^3 = ak + bk(k-1) + ck(k-1)(k-2)$.
En déduire $S_{n,3}$.

- ② 2.a Exprimer $\varphi_{n,p+1}(u)$ en fonction de $\varphi'_{n,p}(u)$.

- 2.b En déduire les expressions simplifiées de $\varphi_{n,1}(u), \varphi_{n,2}(u), \varphi_{n,3}(u)$.

- 2.c Retrouver ainsi les valeurs des sommes $S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 60 ■■■

On désire calculer la somme $\sum_{k=j}^n \binom{k}{j}$, de deux manières différentes.

- ① En recherchant le coefficient de x^j dans le polynôme $\sum_{i=0}^n (x+1)^i$
(Il y a une interversion de Σ à réaliser)

- ② En réduisant "progressivement" les sommes $\binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \dots + \binom{j+k}{j}$ grâce à la formule $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

► Indication

► Correction

Indications

FACTORISATIONS / POLYNÔMES

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

PUISSANCES

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

Il faut supprimer les valeurs absolues ! On mets au carré, ou on multiplie par le conjugué.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

VALEUR ABSOLUE

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Il y a des fonctions définies par morceaux, donc on fait ... une disjonction de cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Valeur absolue, donc disjonction de cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Disjonction de cas !

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Disjonction de cas !

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Disjonction de cas !

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

SYSTÈMES LINÉAIRES

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Un pivot de Gauss !

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

Attention, λ n'est pas une variable ! Il doit apparaître dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

Attention, λ n'est pas une variable ! Il doit apparaître dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

Attention, λ et μ ne sont pas une variable ! Il doit apparaître dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

Attention, λ et μ ne sont pas une variable ! Il doit apparaître dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Il faut réduire le système ligne par ligne.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Comment passe t on d'un produit à une somme ?

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 _____

Fixez P un polynôme, en donnant des noms à ses coefficients, puis calculer l'intégrale. Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients et résoudre le système correspondant !

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 20 _____

Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

LIMITES

INDICATION POUR L'EXERCICE 21 _____[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 22 _____[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 23 _____[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)INDICATION POUR L'EXERCICE 24 Avec $\ln$ et $\exp$ _____[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

TRIGONOMÉTRIE

INDICATION POUR L'EXERCICE 25

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27

Reprenez les exemples similaires du cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28

Utiliser le cercle trigonométrique ou les résultats du cours

$$\begin{aligned}\cos a = \cos b &\iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b[2\pi]) \\ \sin a = \sin b &\iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b[2\pi])\end{aligned}$$

et si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b[\pi].$$

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 29

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 30

Linéarisez !

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 31

Dans la deuxième, on pourra par exemple transformer le sinus en cosinus.

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 32

C'est un calcul... Au boulot !

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 33

Un produit est positif, si et seulement si, les deux facteurs sont positifs ou négatifs. Puis résoudre les deux inéquations séparément dans chaque cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 34

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 35

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 36 CCP MP

Linéarisez !

[↩ retour à l'EXERCICE 36](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 37

Regroupez les termes 2 par 2. Il y a une manière plus maline de le faire.

[↩ retour à l'EXERCICE 37](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 38

On a pas peur, et on fait ce qui est demandé en utilisant des équations connues.

[↩ retour à l'EXERCICE 38](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 39

On peut obtenir une nouvelle équation en multipliant par le conjugué. Ensuite, il suffit de résoudre le système formé par ces deux équations.

[↩ retour à l'EXERCICE 39](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 40

Essayons de faire apparaître des formules d'additions bien senties.

[↩ retour à l'EXERCICE 40](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 41 **Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$**

[↩ retour à l'EXERCICE 41](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 42 **Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$**

[↩ retour à l'EXERCICE 42](#)

SOMMES, PRODUITS ET COEFFICIENTS BINOMIAUXINDICATION POUR L'EXERCICE 43

[↩ retour à l'EXERCICE 43](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 44 **Formules binôme**

[↩ retour à l'EXERCICE 44](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 45 **Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$**

Forçons l'utilisation de la factorisation très similaire du cours $a^n - b^n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 45](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 46

Faire apparaître des somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 46](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 47

Vous connaissez celle des k^2 . Il suffit de la montrer par récurrence.

Pour k^3 , il faut retrouver la formule puis la montrer par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 47](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 48

En regroupant judicieusement les termes, on peut se ramener à la somme d'une constante.

[↩ retour à l'EXERCICE 48](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 49

Il suffit de bien séparer les sommes pour se ramener à des sommes connues.

[↩ retour à l'EXERCICE 49](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 50

Il y a plusieurs manières de faire. Une est de faire apparaître une somme télescopique.

[↩ retour à l'EXERCICE 50](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 51

On peut poser la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. On calcule de deux manières différentes sa dérivée 1 ou 2 fois, que l'on évalue en 1.

[↩ retour à l'EXERCICE 51](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 52 **Norme dans $\mathbb{R}^n$**

Utiliser l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue.

[↩ retour à l'EXERCICE 52](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 53 **Divergence de la série harmonique**

La question 1 est la plus difficile. On peut le montrer par récurrence en regroupant les termes qui s'ajoutent au rang supérieur et faire une minoration grossière.

[↩ retour à l'EXERCICE 53](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 54

[↩ retour à l'EXERCICE 54](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 55

Pour la première somme, il faut séparer aux endroit où l'on connaît la formule du maximum.

Pour la seconde, il faut calculer une somme, puis l'autre.

[↩ retour à l'EXERCICE 55](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 56

Il faut calculer S_n en calculant un produit, puis l'autre.

Faites un dessin (comme en cours) pour comprendre quelles sont les facteurs qui interviennent dans les autres sommes.

[↩ retour à l'EXERCICE 56](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 57

L'imparité de la puissance permet de faire apparaître un signe "-".

On force l'apparition du 7 et on utilise le binôme. Il faut ensuite sortir les termes de la somme qui ne sont pas des multiples de 7.

[↩ retour à l'EXERCICE 57](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 58

Méthode du "bourrin". On fait apparaître les facteurs manquants.

[↩ retour à l'EXERCICE 58](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 59

[↩ retour à l'EXERCICE 59](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 60

- ① Le calcul de la somme est immédiat, mais il faut montrer que le coefficient que l'on cherche est bien le coefficient devant x^j en intervertissant les sommes, après avoir utilisé le binôme.
- ② C'est juste un calcul à faire.

[↩ retour à l'EXERCICE 60](#)

Corrigé

FACTORISATIONS / POLYNÔMES

Correction de l'EXERCICE 1

- | | |
|--|---|
| <p>① $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$</p> <p>② $3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x - 3)^2$</p> <p>③ $16x^2 - 9 = (4x)^2 - 3^2 = (4x - 3)(4x + 3)$</p> <p>④ $18x^2 - 12x + 2 = 2(3x - 1)^2$</p> <p>⑤ $(x + 5)^2 - 16 = (x + 1)(x + 9)$</p> <p>⑥ $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$</p> <p>⑦ $(3x + 2)^2 - (-x + 1)^2 = (2x + 3)(4x + 1)$</p> <p>⑧ $4x^2 + 4x + 1 - (6x + 3)(x + 1) = (2x + 1)^2 - 3(2x + 1)(x + 1) = (2x + 1)(2x + 1 - 3x - 3) = (2x + 1)(-x - 2) = -(2x + 1)(x + 2)$</p> | <p>1) $(-x - 2) = -(2x + 1)(x + 2)$</p> <p>⑨ $((x + 3)(2x + 2) - (x^2 + 2x + 1)) = (x + 3)2(x + 1) - (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 5)$</p> <p>⑩ $(2x + 1)(3x - 6) + (4x - 8)(2x - 1) = (2x + 1)3(x - 2) + 4(x - 2)(2x - 1) = (x - 2)(6x + 3 + 8x - 4) = (x - 2)(14x - 1)$</p> <p>⑪ $4(x - 3)^2 - 49 = ((2(x - 3)))^2 - 7^2 = (2x + 1)(2x - 13)$</p> <p>⑫ $9(x - 1)^2 - 12 = (3(x - 1))^2 - (2\sqrt{3})^2 = (3x - 3 + 2\sqrt{3})(3x - 3 - 2\sqrt{3})$</p> |
|--|---|

↪ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

- | | |
|---|---|
| <p>① $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$</p> <p>② $(x + \frac{9}{2})^2 = x^2 + 9x + \frac{81}{4}$</p> <p>③ $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$</p> | <p>④ $(2x + 8)(2x - 8) = 4x^2 - 64$</p> <p>⑤ $(x - 3/4)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$</p> <p>⑥ $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$</p> |
|---|---|

↪ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

- ① $-2x^2 + 4x - 9 = -2(x^2 - 2x) - 9 = -2(x - 1)^2 + 2 - 9 = -2(x - 1)^2 - 7$
- ② $4x^2 + 4x - 5 = 4(x^2 + x) - 5 = 4(x + \frac{1}{2})^2 - 6$
- ③ $3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5) = 3(x + 2)^2 - 27$
- ④ $3x^2 - 5x + 4 = 3(x - \frac{5}{6})^2 - 3\frac{25}{36} + 4 = 3(x - \frac{5}{6})^2 + \frac{23}{12}$
- ⑤ $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

↪ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

- ① $\frac{x - 4}{3} = x - 2 \Leftrightarrow x - 4 = 3x - 6 \Leftrightarrow 2 = 2x \Leftrightarrow x = 1$
- ② $4x^2 - 1 = (2x + 2)^2$ aucun terme en facteur commun, mais on remarque qu'en développant les termes d'ordre 2 s'en vont: $4x^2 - 1 = (2x + 2)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8}$
- ③ $2x^2 + x + 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- ④ $(x + 1)(x - 1) = 3x(x + 1) \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$
- ⑤ $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$ Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ L'équation a un sens sur $\mathbb{R}$:
 $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow x = 1$

⑥ $\frac{2x}{4x+1} = \frac{x+1}{2x-1}$. L'équation n'a de sens que pour $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\}$.

$$\frac{2x}{4x+1} = \frac{x+1}{2x-1} \Leftrightarrow 2x(2x-1) = (4x+1)(x+1) \Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 4x^2 + 5x + 1 \Leftrightarrow -7x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{7}.$$

↪ retour à l'EXERCICE 4

PUISSANCES

Correction de l'EXERCICE 5

- ① $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- ② $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- ③ $(1+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k$
- ④ $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = ab - ac + bc - ab + ca - cb = 0$
- ⑤ $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$
- ⑥ $3^n \cdot 12^n = (3 \cdot 12)^n = 36^n$
- ⑦ $3 \cdot 4^n + 2^{2n} = 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} = 4 \cdot 2^{2n} = 2^{2n+2}$
- ⑧ $2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = (2-1)2^n = 2^n$
- ⑨ $4^m \cdot 2^n = 2^{2m} \cdot 2^n = 2^{2m+n}$
- ⑩ $a^n b^{5n} = (ab^5)^n$
- ⑪ $5^{2n} \cdot 2^n = (5^2)^n \cdot 2^n = 25^n \cdot 2^n = (25 \cdot 2)^n = 50^n$
- ⑫ $27^{2n} \cdot 3^n = 3^{6n} \cdot 3^n = 3^{7n}$

↪ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

- ① Comme $\sqrt{x+y}$ et $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sont deux quantités positives, l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$x + y \leq x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y}.$$

Comme $2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$, l'égalité est démontrée.

② Supposons $x \geq y$. Alors $\sqrt{x} = \sqrt{y + x - y} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x - y}$, donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Supposons $x \leq y$. Alors $\sqrt{y} = \sqrt{x + y - x} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$, donc $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y - x}$, i.e. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

③ Prenons le carré des deux côtés de l'inégalité (les deux quantités sont positives) : l'équation est équivalente à

$$xy \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4},$$

c'est à dire, à

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy \geq 0$$

Or,

$$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} - xy = \frac{(x - y)^2}{4} \geq 0$$

L'inégalité est donc démontrée.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

VALEUR ABSOLUE

Correction de l'EXERCICE 7

Cas $x \geq y$. Alors $|x - y| = x - y$.

- Pour le minimum

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min(x, y).$$

- Pour le maximum

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + (x - y)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max(x, y).$$

Cas $x < y$. Alors $|x - y| = y - x$.

- Pour le minimum

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (y - x)}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min(x, y).$$

- Pour le maximum

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y + (y - x)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max(x, y).$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

La disjonction de cas est $1 < x < 3$, $x \geq 3$, $x \leq -1$ puis $-1 \leq x \leq 1$.
On obtient les solutions $x = -3, 1, 5$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans chaque cas.

① $\mathcal{S} := \{2, -8\}$

② $\mathcal{S} := [-8, 2]$

$$\textcircled{3} \mathcal{S} :=]-\infty, -9[\cup]5, +\infty[$$

$$\textcircled{4} \mathcal{S} := \left[\frac{2}{3}, 6\right]$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans chaque cas.

$$\textcircled{1} \mathcal{S} := \{-4, 5\}$$

$$\textcircled{2} \mathcal{S} :=]-\infty, -4] \cup [5, +\infty[$$

$$\textcircled{3} \mathcal{S} := [-2, 4]$$

$$\textcircled{4} \mathcal{S} :=]-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{1} \text{ Par inégalité triangulaire, } 2|x| = |(x+y) + (x-y)| \leq |x+y| + |x-y| \text{ et } 2|y| = |(x+y) - (x-y)| \leq |x+y| + |x-y|. \text{ En sommant puis en divisant par 2 : } |x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|.$$

$$\textcircled{2} \text{ On écrit } xy - 1 = (x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1), \text{ d'où}$$

$$|xy - 1| \leq |x-1||y-1| + |x-1| + |y-1|.$$

$$\text{En ajoutant 1 : } 1 + |xy - 1| \leq 1 + |x-1| + |y-1| + |x-1||y-1| = (1 + |x-1|)(1 + |y-1|).$$

$$\textcircled{3} \text{ La fonction } t \mapsto \frac{t}{1+t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ (sa dérivée vaut } \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \text{)}. \text{ Comme } |x+y| \leq |x| + |y|, \text{ il vient}$$

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|},$$

$$\text{la dernière majoration provenant de } 1 + |x| \leq 1 + |x| + |y| \text{ et } 1 + |y| \leq 1 + |x| + |y|.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

SYSTÈMES LINÉAIRES

Correction de l'EXERCICE 12

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x &= & 11 \\ y &= & -19 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathcal{S}_3) : \left\{ \left(\frac{2}{5} - \frac{11z}{10} - t, \frac{8+3z}{10}, z, t \right) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Si $\lambda = 1$, le système n'admet pas de solution. Sinon, les solutions sont

$$x(1, 1, 1, -2 - \lambda) + \left(0, 1, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, -\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14

Si $\lambda = 1$, le système se réduit à l'équation $x + y + z = 1$; si $\lambda = -2$, il est incompatible à cause de la dernière équation; sinon, il y a un unique triplet solution.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

- Si $\lambda = -2$, la dernière équation devient $\lambda = \mu$ et la précédente $-3x + 3z = 0$. Les solutions sont donc

$$\left\{ \left(z, -\frac{1+z}{2}, z \right), \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si $\lambda = 1$, on a $\lambda = \mu$ et $x + y + z = 1$.
- Sinon, le système a une unique solution.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

L'unique solution est $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Comme tous les termes sont strictement positifs, passons au logarithme et on obtient le système linéaire en $X = \ln x$, $Y = \ln y$ et $Z = \ln z$:

$$\begin{cases} X + Y + Z &= 0 \\ X + 2Y + 4Z &= \ln 2 \\ X + 3Y + 9Z &= \ln 3 \end{cases}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9}{64}, \frac{1}{2} \ln \frac{256}{27}, \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \right),$$

et donc $(x, y, z) = \left(\frac{3}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré ≤ 3 . 1. Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 P(x)dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx \right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

D'autre part

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = \alpha(8a + 4b + 2c + d) + \beta(27a + 9b + 3c + d) + \gamma(64a + 16b + 4c + d).$$

Donc

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d$$

Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a, b, c, d il faut et il suffit que

$$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

Tout d'abord, si deux coefficients sont égaux, par exemple, sans nuire à la généralité, $\lambda_1 = \lambda_2$. Alors, si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une solution du système. Pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, on a $(x_1 + x; x_2 - x; \dots; x_n)$ est une solution.

Il y a donc soit aucune solution, soit plus d'une et donc pas une unique solution.

Montrons alors que réciproquement, si les coefficients sont deux à deux distincts, il y a une unique solution. Nous allons faire la preuve par récurrence.

Commençons par initialiser la propriété pour un système de rang 2. Le système a alors la forme suivante

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = a_1 \end{cases}$$

Nous supposons donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$

La résolution se fait par la méthode de Gauss en multipliant la première équation par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la seconde. Cela conduit à :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = a_1 - \lambda_1 a_0 \end{cases}$$

Les éléments diagonaux de ce système n'étant pas nuls, il admet une solution unique.

Posons maintenant $n \geq 3$. Inspirons nous de ce qui a été fait précédemment, mais en remontant par le bas. En multipliant l'avant dernière ligne par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la dernière, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 + \cdots + x_n & = a_0 \\ \lambda_1 x_1 & +\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n & = a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 & +\lambda_2^2 x_2 + \cdots + \lambda_n^2 x_n & = a_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-2} x_1 & +\lambda_2^{n-2} x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-2} x_n & = a_{n-2} \\ & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-1} \end{cases}$$

On répète le procédé avec l'antépénultième ligne et l'avant dernière

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 + \cdots + x_n & = a_0 \\ \lambda_1 x_1 & +\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n & = a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 & +\lambda_2^2 x_2 + \cdots + \lambda_n^2 x_n & = a_2 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{n-3} x_1 & +\lambda_2^{n-3} x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-3} x_n & = a_{n-2} \\ & \lambda_2^{n-3}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-3}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-2} \\ & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-1} \end{cases}$$

En répétant le procédé, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 + \cdots + x_n & = a_0 \\ & (\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_1 - a_0\lambda_1 \\ & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_2 - a_1\lambda_1 \\ & \vdots & \\ & \lambda_2^{n-4}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-4}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-3} - a_{n-4}\lambda_1 \\ & \lambda_2^{n-3}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-3}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-2} - a_{n-3}\lambda_1 \\ & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n & = a_{n-1} - a_{n-2}\lambda_1 \end{cases}$$

En posant $y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)x_2; \dots; y_n = (\lambda_n - \lambda_1)x_2$ ce système fait apparaître un système d'ordre $n-1$ (les $n-1$ dernières lignes) aux variables $(y_2; \dots; y_n)$ liées de manière unique aux variables $(x_2; \dots; x_n)$

$$\begin{cases} y_2 + \cdots + y_n & = a_1 - a_0\lambda_1 \\ \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n & = a_2 - a_1\lambda_1 \\ & \vdots \\ \lambda_2^{n-4} y_2 + \cdots + \lambda_n^{n-4} y_n & = a_{n-3} - a_{n-4}\lambda_1 \\ \lambda_2^{n-3} y_2 + \cdots + \lambda_n^{n-3} y_n & = a_{n-2} - a_{n-3}\lambda_1 \\ \lambda_2^{n-2} y_2 + \cdots + \lambda_n^{n-2} y_n & = a_{n-1} - a_{n-2}\lambda_1 \end{cases}$$

En admettant une hypothèse de récurrence selon laquelle un système S_{n-1} de rang $n-1$ pour $n \geq 3$ ayant des coefficients distincts deux à deux admet une unique solution, nous en déduisons que notre système précédent a une solution unique en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ce qui fait qu'un système S_n de rang n a une solution unique.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

LIMITES

Correction de l'EXERCICE 21

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{-2}{1} = -2$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, d'après le théorème des gendarmes.
- ④ $\lim_{x \rightarrow +\infty} i(x) = -\infty$. En $a = 1$ la limite n'existe pas, $\lim_{x \rightarrow 1^-} i(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = -\infty$.
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} j(x) = 1$, d'après le théorème des gendarmes.
- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$.

↪ retour à l'EXERCICE 21

Correction de l'EXERCICE 22

- ① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 9} g(x) = \sqrt{9^2 - 1} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \cos(0) = 1$.
- ④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} i(x) = 1$.
- ⑤ $\cos(\pi/2) = 0$ tandis que $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2} \neq 0$, donc limite bilatérale n'existe pas.

Limites unilatérales : $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} j(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} j(x) = -\infty$.

- ⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$.

↪ retour à l'EXERCICE 22

Correction de l'EXERCICE 23

- ① $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$.
En $x \rightarrow 3$ il y a un pôle : $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

- ② $\lim_{x \rightarrow 100} g(x) = 100 \cdot 0 = 0$.

- ③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} = -\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

- ④ $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\infty$.

- ⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = +\infty$.

- ⑥ $w(x) = \frac{4 - x^2}{(x + 2)(x + 3)}$: factorisation $4 - x^2 = (2 - x)(x + 2)$, on simplifie pour $x \neq -2$: $w(x) = \frac{2 - x}{x + 3}$.
Donc $\lim_{x \rightarrow -2} w(x) = \frac{2 - (-2)}{-2 + 3} = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -1$.

- ⑦ Multiplier par le conjugué donne $a(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$ pour $x \neq 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 1} a(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 0$.

- ⑧ Multiplier par le conjugué donne $b(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 2}$ pour $x \neq 3$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3} b(x) = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = 0$.

- ⑨ $\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

↪ retour à l'EXERCICE 23

Correction de l'EXERCICE 24 Avec ln et exp

- ① $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$.

- ② $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) = -\infty.$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = +\infty.$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = +\infty.$$

$$\textcircled{6} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = 0.$$

$$\textcircled{7} \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{2x} = +\infty.$$

$$\textcircled{8} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = +\infty.$$

$$\textcircled{9} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} = +\infty.$$

$$\textcircled{10} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x} = +\infty.$$

$$\textcircled{11} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 3} = 0.$$

$$\textcircled{12} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3} = +\infty.$$

$$\textcircled{13} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln x} = +\infty.$$

$$\textcircled{14} \text{ Multiplier par le conjugué donne } \frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x} = \frac{-2+3/x}{\sqrt{1-2/x+3/x^2}+1}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-2x+3} - x) = -1.$

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

TRIGONOMETRIE

Correction de l'EXERCICE 25

$$x = -\frac{15\pi}{6} \Rightarrow \sin(x) = -1, \cos(x) = 0, \tan(x) \text{ indéfini},$$

$$x = \frac{37\pi}{3} \Rightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos(x) = \frac{1}{2}, \tan(x) = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{13\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) = 1, \cos(x) = 0, \tan(x) \text{ indéfini}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

$$\textcircled{1} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\textcircled{2} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}.$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &= \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x \\ &= \frac{1}{2}((1 - \sqrt{2}) \sin x + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cos x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\cos x - \sqrt{3} \sin x} \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

Fait en cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28

$$(1) \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(3) \quad x = \frac{\pi}{12} - 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{12} - 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(4) \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(5) \quad x = \frac{2k\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(6) \quad x = 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(7) \quad \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = 0 \text{ ou } \cos x = 0 \iff x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$(8) \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29

$$(1) \quad P_1 = \sin t + \sin(2t) = \sin t + 2 \sin t \cos t = \boxed{\sin t(1 + 2 \cos t)}.$$

$$P_1 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 0 & \iff t = k\pi, \\ 1 + 2 \cos t = 0 & \iff \cos t = -\frac{1}{2} \iff t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}.$$

$$(2) \quad P_2 = \sin t + (1 - 2 \sin^2 t) = -2 \sin^2 t + \sin t + 1 = \boxed{(1 - \sin t)(2 \sin t + 1)}.$$

$$P_2 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 1 & \iff t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin t = -\frac{1}{2} & \iff t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}.$$

$$(3) \quad P_3 = \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} = \sin t + \sin t \cos t = \boxed{\sin t(1 + \cos t)}.$$

$$P_3 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 0 & \iff t = k\pi \\ 1 + \cos t = 0 & \iff \cos t = -1 \iff t = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\pi\mathbb{Z} \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})}.$$

$$(4) \quad P_4 = \sin t - \frac{\sin(2t)}{2} \cos t = \sin t - \sin t \cos^2 t = \sin t(1 - \cos^2 t) = \sin t \cdot \sin^2 t = \boxed{\sin^3 t}.$$

$$P_4 = 0 \iff \sin t = 0 \iff t = k\pi.$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\pi\mathbb{Z}}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Correction de l'EXERCICE 30

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos 3x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{12} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)) dx.$$

Si $n \neq p$, alors $n \pm p \neq 0$ et $\sin(k \cdot 2\pi) = 0$ pour tout entier k , donc

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = 0 \quad (n \neq p)$$

Si $n = p \geq 1$ alors

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2} \implies \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dx = \pi$$

Si $n = p = 0$ l'intégrande est 0 et l'intégrale vaut 0.

Conclusion :

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = p \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \neq p \text{ ou } n = p = 0. \end{cases}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

Correction de l'EXERCICE 31

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

Correction de l'EXERCICE 32

$$\begin{aligned} \tan(3x) - \tan(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \nexists k \in \mathbb{Z}, 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \nexists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right) =: D \end{aligned}$$

Pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} \tan(3x) = 3 \tan(x) &\Leftrightarrow \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \frac{3 \sin(x)}{\cos(x)} \\ &\Leftrightarrow \sin(3x) \cos(x) = 3 \sin(x) \cos(3x) \\ &\Leftrightarrow (\sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x)) \cos(x) \\ &\quad = 3 \sin(x) (\cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x)) \\ &\Leftrightarrow 8 \sin^3(x) \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, x = m\pi \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant justifiée par le fait que les $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sont exclus de D . Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\pi\mathbb{Z}}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

Correction de l'EXERCICE 33

- ① Pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $2 \cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\sin(x)$		+		0		-		
$2 \cos(x) - 1$	+	0		-		0	+	
$\sin(x)(2 \cos(x) - 1)$	+	0	-	0	+	0	-	

Donc l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

- ② Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \geq \sin(2x) \Leftrightarrow \sin(x) \geq 2 \sin(x) \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x)(2 \cos(x) - 1) \leq 0$$

L'ensemble des solutions est donc au vu du tableau ci-dessus

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, (2k+1)\pi \right]$$

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

Correction de l'EXERCICE 34

$$\begin{aligned} \text{On a } x(t) &= a \cos t - a \sin^2(t) \cos(t) - \frac{b^2}{a} \cos^3(t) \\ &= \cos t \left(a - a \sin^2(t) - \frac{b^2}{a} \cos^2(t) \right) \\ &= \cos t \left(a - a + a \cos^2(t) - \frac{b^2}{a} \cos^2(t) \right) \\ &= \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \cos^3(t). \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

Correction de l'EXERCICE 35

- ① L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\begin{aligned}\sin x > \sin(2x) &\iff \sin \theta > 2 \sin \theta \cos \theta \\ &\iff (1 - 2 \cos \theta) \sin \theta > 0 \\ &\iff (1 - 2 \cos \theta > 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta > 0) \quad \text{ou} \quad (1 - 2 \cos \theta < 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta < 0) \\ &\iff \left(\cos \theta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta > 0 \right) \quad \text{ou} \quad \left(\cos \theta > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta < 0 \right)\end{aligned}$$

En visualisant ces conditions sur le cercle trigonométrique, on trouve l'ensemble solution de l'inéquation (I) vaut $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ avec

$$\mathcal{S}_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[\quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \right[.$$

- ② IL y a plusieurs manières de faire. On peut résoudre directement l'équation, et on obtient grâce au cercle l'ensemble des solutions

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{18} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{11\pi}{18} + 2k\pi, \frac{23\pi}{18} + 2k\pi \right] .$$

- ③ Même méthode. L'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right] .$

- ④ Même méthode. L'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right[.$

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)

Correction de l'EXERCICE 36 CCP MP

Utilisons les formules de linéarisation.

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x\end{aligned}$$

Une primitive est donc

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C,$$

où C est une constante. Vérification rapide en dérivant donne bien $\cos^4 x$.

[↩ retour à l'EXERCICE 36](#)

Correction de l'EXERCICE 37

[↩ retour à l'EXERCICE 37](#)

Correction de l'EXERCICE 38

[↩ retour à l'EXERCICE 38](#)

Correction de l'EXERCICE 39

Remarquons d'abord que lorsque $2 \sin x = 0$ on a aussi $\sin(2x) = 0$ et alors l'égalité est satisfaite.

Supposons donc $\sin x \neq 0$. L'équation est alors équivalente à

$$2 \sin x = \frac{(1 - \sin 2x) - (1 + \sin 2x)}{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}$$

puis à

$$1 = \frac{-2 \cos x}{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}} .$$

d'où les équations $\begin{cases} \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2 \cos x \\ \sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x} = 2 \sin x \end{cases}$

système équivalent par somme à $\begin{cases} \sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x \\ \sqrt{1 + \sin 2x} = -\sin x - \cos x \end{cases}$

Or l'équation $\sqrt{A} = B$ est équivalente à $\begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$

En fait, les deux équations $A = B^2$ sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0 \\ -\sin x - \cos x \geq 0 . \end{cases}$$

Les résolutions de ces équations donnent l'ensemble des solutions

$$\{0, 2\pi\} \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] .$$

[↩ retour à l'EXERCICE 39](#)

Correction de l'EXERCICE 40

[↩ retour à l'EXERCICE 40](#)

Correction de l'EXERCICE 41 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ _____

[↩ retour à l'EXERCICE 41](#)

Correction de l'EXERCICE 42 Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ _____

[↩ retour à l'EXERCICE 42](#)

SOMMES, PRODUITS ET COEFFICIENTS BINOMIAUX

Correction de l'EXERCICE 43 _____

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice $k \leftarrow n+1-k$, dans la deuxième somme.

③ On remarque, en faisant un changement d'indice aue c'est la moitié de la formule du binôme $(1+1)^{2n+1}$.

④ Effectuons le changement d'indices $\ell = n - k + 1$. Lorsque k varie de 1 à n , alors ℓ varie aussi de 1 à n . On a donc

$$\sum_{k=1}^n (n+1-k) = \sum_{\ell=1}^n \ell = \frac{n(n+1)}{2}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 43](#)

Correction de l'EXERCICE 44 Formules binôme _____

- ① On essaie pour les premières valeurs et on conjecture

$$\sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Cette formule se prouve alors par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Elle est banale pour $p = 0$. Si elle est vraie au rang p , on a

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{n+k}{n} = \sum_{k=0}^p \binom{n+k}{n} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+1}{n+1} + \binom{n+p+1}{n} = \binom{n+p+2}{n+1}$$

d'après la relation de Pascal.

- ② D'après la formule du binôme de Newton, $S_1 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$.

D'après la formule du binôme de Newton, $S_2 = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k = (1-1)^{2n} = 0$,

car $n \neq 0$.

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_1$$

et

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_2.$$

On résout le système engendré et on obtient $T_1 := \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = S_1/2 = 2^{2n-1}$

- ③ Via un changement de variable et la symétrie des coefficients binomiaux,

$$V_1 = \sum_{\ell=0}^n (n-\ell) \binom{2n}{2n-2\ell} = nT_1 - V_1$$

Ainsi $V_1 = nT_1/2 = n 2^{2n-2}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 44](#)

Correction de l'EXERCICE 45 Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$

On a $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$. Ainsi, en appliquant la formule de factorisation de $a^n - b^n$, on a

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a - (-b)) \sum_{k=0}^{2n} a^k (-b)^{2n-k} \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k}. \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 45](#)

Correction de l'EXERCICE 46

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\ln(1 + \frac{1}{k}) = \ln(\frac{k+1}{k}) = \ln(k+1) - \ln k$. On est donc devant une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

De même, $T_n = (n+1)! - 1$ et

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2) - 2}{4(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 46](#)

Correction de l'EXERCICE 47

Il suffit de faire les récurrences. Pas de difficulté particulière. Faisons le pour S_3 .

Pour $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ et $\left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$.

Donc la formule est vraie au rang $n = 1$.

On suppose la formule $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ vraie pour un certain entier n fixé.

Calculons alors.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = S_n + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

C'est bien la formule attendue au rang $n+1$, donc la propriété est héréditaire. Par

principe de récurrence, $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

[↩ retour à l'EXERCICE 47](#) .

Correction de l'EXERCICE 48

En découpant entre pairs et impairs, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{p=0}^n (-1)^{2p} 2p + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{2i+1} (2i+1) \\ &= \sum_{p=0}^n 2p - \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) \\ &= \sum_{p=0}^n 2p - \sum_{i=0}^{n-1} 2i - \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\ &= 2n + \cancel{\sum_{p=0}^{n-1} 2p} - \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} 2i} - n \\ &= n . \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 48](#)

Correction de l'EXERCICE 49

Il suffit de bien séparer les sommes pour se ramener à des sommes connues:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k^2(n-k) = \sum_{k=1}^n nk^2 - k^3 = n \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n^2(n+1)}{12} (2(2n+1) - 3(n+1)) \\ &= \frac{n^2(n+1)(n-1)}{12} . \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{4^{k+1}} - \frac{3^k}{4^{k+1}} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k - \left(\frac{3}{4} \right)^k \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{4} \right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \frac{3^n}{4^n}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) - \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3^n}{4^n} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} . \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 49](#)

Correction de l'EXERCICE 50

Pour $S_{n,p}$, en regardant quelques exemples, on conjecture que $S_{n,p} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$. On peut le démontrer par récurrence, mais on va proposer une méthode plus rapide : soient

n dans $\mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^p -(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} + (-1)^k \binom{n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^p -a_{k-1} + a_k \end{aligned}$$

où $a_k = (-1)^k \binom{n-1}{k}$, donc, par télescopage, $S_{n,p} = a_p - a_{-1} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

↩ retour à l'EXERCICE 50

Correction de l'EXERCICE 51

① On utilise $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, c'est à dire,

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k - 1$. Quand $k = 1, \ell = 0$, et quand $k = n, \ell = n - 1$. Donc

$$R_n = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = n2^{n-1}$$

par la formule de la somme des coefficients binomiaux (cf. cours). De même, on écrit que

$$T_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n kn \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1}$$

On effectue le changement de variables $\ell = k - 1$. Quand $k = 1, \ell = 0$, et quand $k = n, \ell = n - 1$. Donc

$$\begin{aligned} T_n &= n \sum_{\ell=0}^n (\ell + 1) \binom{n-1}{\ell} \\ &= n \sum_{\ell=0}^n \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^n \binom{n-1}{\ell} \\ &= n \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} + n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \quad (\text{on a éliminé les termes nuls}) \\ &= n \sum_{\ell=1}^{n-1} (n-1) \binom{n-2}{\ell-1} + n2^{n-1} \\ &= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \end{aligned}$$

② Autre méthode : posons $f : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. Alors $f' : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$. Alors $R_n = f'(1)$. Or, $f : x \mapsto (x+1)^n$, donc $f' : x \mapsto n(x+1)^{n-1}$, donc $R_n = f'(1) = n2^{n-1}$. Ensuite pour T_n , il faut remarquer que pour tout x

$$f''(x) = \sum_{k=0}^n k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^n k^2 x^{k-2} - \sum_{k=0}^n k x^{k-2}$$

donc $f''(1) = \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k$, i.e. $n(n-1)2^{n-2} = T_n - S_n$, d'où T_n !

↩ retour à l'EXERCICE 51

Correction de l'EXERCICE 52 Norme dans $\mathbb{R}^n$

Pour $\|\cdot\|_1$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

En appliquant l'inégalité triangulaire à chaque composante $x_i + y_i$, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$.

En sommant ces n inégalités on obtient

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Pour $\|\cdot\|_\infty$. De même, pour tout $i = 1, \dots, n$, comme $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ et $|y_i| \leq \|y\|_\infty$,

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

Comme $|x_i + y_i|$ est majoré par $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ pour tout $i = 1, \dots, n$, alors $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i|$ est majoré par $\|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Donc

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 52](#)

Correction de l'EXERCICE 53 Divergence de la série harmonique

Voir DS1.

[↩ retour à l'EXERCICE 53](#)

Correction de l'EXERCICE 54

① Déjà faite en cours.

② Supposons $n \geq 2$. Adaptons la méthode précédente. Pour tout réel x , posons

$$P(x) = \frac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k}$$

Pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} P'(x) &= \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} x^{2k-1} \\ &= 2n \frac{(1+x)^{2n-1} - (1-x)^{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{k=1}^n 2k(2k-1) \binom{n}{k} x^{2k-2} \\ &= 2n(2n-1) \frac{(1+x)^{2n-2} + (1-x)^{2n-2}}{2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \frac{P'(1) + P''(1)}{4} \\ &= n(2n+1)2^{2n-4} \end{aligned}$$

Pour $n = 0$, la somme est nulle. Pour $n = 1$, elle vaut 1.

③ S'obtient en faisant la différence de la première et la deuxième.

④

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} S_j(n) &= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} \sum_{k=0}^n k^j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} k^j \quad \text{par interversion de l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\left(\sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} k^j \right) - k^{p+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1)^{p+1} - k^{p+1} = (n+1)^{p+1} \quad \text{via la formule du binôme} \end{aligned}$$

⑤ Soit $k \geq 2$. On a

$$\frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} = \frac{k-1}{k+1} \times \frac{v_k}{v_{k-1}}$$

en posant $v_k = k^2 + k + 1$ puisqu'alors $v_{k-1} = (k-1)^2 + k - 1 + 1 = k^2 - k + 1$.

On a

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k+1} \times \prod_{k=2}^n \frac{v_k}{v_{k-1}} \\ &= \frac{2(n-1)!}{(n+1)!} \frac{v_n}{v_1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

après télescopage.

[↩ retour à l'EXERCICE 54](#)

Correction de l'EXERCICE 55

Pour la première somme, on écrit la somme double et on la sépare en trois:

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^i \max(i, j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \max(i, j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} j \\
&= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j \\
&= 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i + \sum_{i=1}^n i \\
&= 2 \sum_{i=2}^n i^2 - i + \sum_{i=1}^n i \\
&= 2 \sum_{i=1}^n i^2 - i + \sum_{i=1}^n i \\
&= 2 \sum_{i=1}^n i^2 = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme, on met à l'intérieur la somme sur i :

$$B_n = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} i = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} \frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n j - 1 = \frac{1}{2} \frac{(n-1)n}{2} = n(n-1).$$

↩ retour à l'EXERCICE 55

Correction de l'EXERCICE 56

On calcule S_n , en l'écrivant comme un produit double :

$$\begin{aligned}
S_n &= \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij \\
&= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij \\
&= \prod_{i=1}^n i^n \prod_{j=1}^n j \text{ car } i \text{ est une constante dans le produit interne sur } j \\
&= \prod_{i=1}^n (i^n n!) \\
&= (n!)^n \prod_{i=1}^n i^n \\
&= (n!)^n \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n \\
&= (n!)^n (n!)^n = (n!)^{2n}.
\end{aligned}$$

Pour calculer T_n , on peut faire les dessins comme en TD ou bien remarquer que

$$T_n = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} ij = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij}{\prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} ij} = \frac{S_n}{\prod_{i=1}^n i^2} = \frac{S_n}{n!^2} = (n!)^{2n-2}.$$

Ensuite, on remarque plusieurs choses : si l'on appelle $D_n = \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i=j}} ij$, on a $U_n =$

$W_n \times D_n$ (on sépare le produit pour $1 \leq i \leq j \leq n$ en le produit pour $1 \leq i < j \leq n$ fois le produit pour $1 \leq i = j \leq n$). Ensuite, comme les variables sont muettes et que l'expression ij est symétrique en i et en j ,

$$U_n = \prod_{1 \leq a \leq b \leq n} ab = \prod_{1 \leq a \leq b \leq n} ba = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij = V_n$$

et, de même, $W_n = X_n$. Enfin, $T_n = W_n \times X_n = W_n^2$, donc $W_n = \sqrt{T_n} = \sqrt{(n!)^{2n-2}} = (n!)^{n-1}$, donc $U_n = (n!)^{n-1} \times (n!)^2 = (n!)^{n+1}$, et, de même, $V_n = (n!)^{n+1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 56](#)

Correction de l'EXERCICE 57

- On a

$$3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 3^{2n+1} - (-4)^{2n+1} = (3 - (-4)) \sum_{k=0}^2 n 3^k (-4)^{2n-k},$$

$$\text{d'où } 3^{2n+1} + 2^{4n+2} = 7 \times \sum_{k=0}^{2n} 3^k (-4)^{2n-k}.$$

$$\text{C'est un multiple de 7, car } \sum_{k=0}^{2n} 3^k (-4)^{2n-k} \in \mathbb{N}.$$

- Avec le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned} 3^{2n+1} + 2^{4n+2} &= 3^{2n+1} + 4^{2n+1} = 3^{2n+1} + (7-3)^{2n+1} \\ &= 3^{2n+1} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-3)^{2n+1-k} \\ &= \cancel{3^{2n+1}} + \cancel{\binom{2n+1}{0} 7^0 (-3)^{2n+1-0}} + \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^k (-3)^{2n+1-k} \\ &= 7 \times \sum_{k=1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} 7^{k-1} (-3)^{2n+1-k}. \end{aligned}$$

$$\text{De même, } \sum_{k=1}^n \binom{k}{n} 7^{k-1} (-3)^{2n+1-k} \in \mathbb{N}, \text{ donc } 3^{2n+1} + 2^{4n+2} \text{ est un multiple de } 7.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 57](#)

Correction de l'EXERCICE 58

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \prod_{k=0}^n (2k+1) &= \frac{\prod_{k=0}^n (2k+1) \times \prod_{k=0}^n (2k)}{\prod_{k=0}^n (2k)} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{2n+1} k}{2^n \prod_{k=0}^n k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=k+1}^n l = \prod_{l=1}^n \prod_{k=0}^{l-1} l = \prod_{l=1}^n l^l$$

[↩ retour à l'EXERCICE 58](#)

Correction de l'EXERCICE 59

[↩ retour à l'EXERCICE 59](#)

Correction de l'EXERCICE 60

- ① Considérons le polynôme

$$\sum_{i=0}^n (1+x)^i = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{i-1}.$$

Ici le coefficient devant x^j est $\binom{n+1}{j}$.

En le calculant en intervertissant les sommes, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (1+x)^i &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n x^k \left(\sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \right) \end{aligned}$$

Ici le coefficient devant x^j est $\sum_{k=j}^n \binom{k}{j}$.

Par unicité des coefficients, on obtient le résultat voulu.

② On rappelle que, pour tout $m, p \in \mathbb{N}$, $\binom{m+1}{p} = \binom{m}{p} + \binom{m}{p-1}$.

Posons pour $k \geq 0$,

$$S_{n,j} = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{j+i}{j} = \binom{j}{j} + \binom{j+1}{j} + \cdots + \binom{n}{j}.$$

Utilisons la formule de Pascal sous la forme $\binom{j+i+1}{j+1} - \binom{j+i}{j+1} = \binom{j+i}{j}$.

En sommant cette identité pour $i = 0, 1, \dots, n-j$ on obtient

$$\sum_{i=0}^{n-j} \binom{j+i}{j} = \sum_{i=0}^{n-j} \left(\binom{j+i+1}{j+1} - \binom{j+i}{j+1} \right)$$

Le membre de droite est télescopique ; tous les termes intermédiaires s'annulent et il reste

$$S_{n,j} = \binom{n+1}{j+1} - \binom{j}{j+1}.$$

Mais $\binom{j}{j+1} = 0$, d'où $S_{n,j} = \binom{n+1}{j+1}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 60](#)