Sir Isaac Newton

Principios matemáticos de la filosofía natural (Principia)

PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Cabecera y título (Primera edición)
Original en el Trinity College, Cambridge (C. 15. 158).

A esta obra físico-matemática
del muy ilustre varón Isaac Newton,
honra insigne de nuestro siglo
y de nuestro pueblo[1]

He aquí la Ley del Universo, las divinas medidas de la masa,
He aquí el cálculo del Cielo; leyes que, mientras establecía
Los principios de las cosas, el Creador de todo no quiso violar,
Y así establecer los fundamentos de las obras.
Se abren del cielo vencido los últimos arcanos,
Y no se oculta ya qué fuerza mueve los últimos círculos.
Sentado el Sol en su trono ordena a todas las cosas
Dirigirse hacia El con rápido descenso, y ya no deja a los carros
Celestes moverse en línea recta por los inmensos espacios vacíos;
Sino que, siendo El el centro, atrae a cada cosa en giros inmutables.
Ya está claro cual sea el tortuoso camino de los horribles cometas;
Ni ya nos causa asombro la aparición del astro con cabellera.
Al fin aquí sabemos por qué avanza la plateada Luna
Con pasos desiguales; por qué, hasta ahora rebelde a los astrónomos,
Rechaza el freno de los números,
Por qué regresan los nodos, por qué los auges se adelantan.
Y también podemos saber cuán grande es la fuerza
Con la que la errante Luna empuja el flujo del mar
Cuando con quebradas olas abandona las Ovas
Y desnuda las arenas, peligro de los navegantes,
Lanzándolas una y otra vez a la cima de las costas.
Cosas que tantas veces han torturado a los Sabios antiguos
Y que en vano torturan a las Escuelas con ronca contienda
Las vemos claras ahora matemáticamente desveladas.
Ya el error con su niebla no aplasta a quienes
La sublime agudeza del genio concedió
Entrar en la morada de los dioses y escalar las alturas del Cielo.
Levantaos mortales, desechad los terrenos cuidados
Y distinguid desde ahora las fuerzas de la mente divina
Tan amplia y largamente distante de la vida de las bestias.
Quien ordenó en tablas escritas castigar las muertes,
Robos, adulterios y crímenes de perjurio y fraude,
quien había aconsejado a los pueblos errantes

Rodear las ciudades de altas murallas, era un sabio;
O quien alegró a las gentes con el don de Ceres,
O sacó de las uvas consuelo en las penas,
O enseñó a juntar diferentes sonidos Pintados en una caña del Nilo,
Y a transformar en signos visibles las voces distintas,
Explicó menos la suerte de los hombres; de modo que
Sólo consideró unas pocas necesidades de la vida.
Pero ya somos admitidos en convite a la mesa de los dioses,
Ya podemos manejar las leyes superiores del Universo
Y ya se abren los ocultos misterios de la oscura Tierra,
El orden inmóvil de las cosas y los secretos
Que ocultaron los siglos pasados.
Vosotros, los que gozáis del néctar celeste,
Celebrad conmigo a quien tales cosas nos muestra,
A Newton que abre el cerrado cofre de la verdad,
A Newton, amado de las musas, en cuyo limpio pecho
Habita Febo, de cuya mente se apoderó con todo su Numen;
Pues no está permitido a un mortal tocar más de cerca a los dioses.

Edmundo Halley

Prefacio del autor al lector

Habiendo los antiguos, en la investigación de la naturaleza, practicado sobre todo la Mecánica (como lo hizo *Pappo*), y como los más modernos, desechadas ya las formas sustanciales y las cualidades ocultas, hubiesen intentado reducir los fenómenos de la naturaleza a leyes matemáticas, nos parece oportuno tratar en esta obra la parte Matemática que se relaciona con la Filosofía. Los antiguos establecieron dos mecánicas: la Racional, que procede por demostraciones exactas, y la Práctica. A la práctica pertenecen todas las artes manuales de las que propiamente toma el nombre de Mecánica. Pero como los artesanos suelen proceder con escasa exactitud, ocurre que la Mecánica entera se distingue de la Geometría de tal modo que lo que se hace con exactitud se asimila a la Geometría y lo que se hace con poca exactitud a la Mecánica. Sin embargo, los errores no pertenecen a las artes, sino a los artífices. El que construye con menor exactitud es un mecánico más imperfecto, y si alguien pudiese construir con absoluta exactitud, este tal sería el más perfecto mecánico. Así pues, los trazados de las líneas rectas y curvas en que se apoya la Geometría pertenecen a la Mecánica. La Geometría no enseña a trazar estas líneas, sino que lo postula. Postula que el aprendiz procure trazarlas exactamente antes de alcanzar el límite de la Geometría; después enseña cómo se resuelven los problemas mediante estas operaciones, puesto que trazar rectas y círculos es cuestión problemática pero no geométrica. Desde la Mecánica se postula su solución, mientras en Geometría se enseña el uso de las soluciones. Y bien puede gloriarse la Geometría de que de tan pocos principios postulados de otro sitio logre tan grandes resultados. Se funda, pues, la Geometría en la práctica mecánica y no es otra cosa que aquella parte de la Mecánica universal que propone y demuestra con exactitud el arte de medir. Mas, como las artes manuales se cifran ante todo en mover los cuerpos, ocurre que comúnmente se asocie la Geometría con la magnitud y la Mecánica con el movimiento. En este sentido la Mecánica racional será la Ciencia, propuesta y demostrada exactamente, de los movimientos que resultan de cualesquiera fuerzas y de las fuerzas que se requieren para cualesquiera movimientos. Esta parte de la Mecánica fue cultivada por los antiguos en las cinco fuerzas relativas a las artes manuales, los cuales apenas tuvieron en cuenta a la gravedad (pues no es fuerza manual) más que en los pesos a mover por dichas fuerzas. En cambio nosotros, cultivando no las artes, sino la filosofía, y escribiendo no de las fuerzas manuales, sino de las naturales, tratamos sobre todo lo relativo a la gravedad, levedad, elasticidad, resistencia de los fluidos y fuerzas por el estilo, ya sean de atracción o de repulsión; y por ello proponemos estos nuestros como principios matemáticos de filosofía. Pues toda la dificultad de la filosofía parece consistir en que, a partir de los fenómenos del movimiento, investiguemos las fuerzas de la naturaleza y después desde estas fuerzas demostremos el resto de los fenómenos. A esto se refieren las proposiciones generales que tratamos en los Libros primero y segundo. En el libro tercero proponemos un ejemplo de esto con la explicación del sistema del mundo. Pues allí, a partir de los fenómenos celestes, por medio de proposiciones demostradas matemáticamente en los libros anteriores, se deducen las fuerzas de la gravedad por las que los cuerpos tienden hacia el Sol y a cada uno de los planetas. Después, a partir de estas fuerzas, también por proposiciones matemáticas, se deducen los movimientos de los planetas, cometas, Luna y mar. Ojalá que fuera posible deducir los demás fenómenos de la naturaleza a partir de principios mecánicos con el mismo género de argumentación, pues muchas cosas me mueven a sospechar que puedan depender todos ellos de ciertas fuerzas con las que las partículas de los cuerpos, por causas aún desconocidas, bien se atraen unas a otras uniéndose según figuras regulares, bien huyen y se separan unas de otras; y, siendo estas fuerzas desconocidas, en vano los filósofos hasta ahora intentaron acercarse a la naturaleza. Espero, sin embargo, que con este modo de filosofar o con otro mejor, los principios aquí enunciados añadan alguna luz.

En la edición de ellos tuvo capital importancia Edmundo Halley, varón muy sutil y erudito en toda clase de saberes, quien no solamente corrigió las pruebas de imprenta y supervisó el dibujo de las figuras, sino también fue causante de que me decidiera a su edición. Puesto que habiéndome pedido la figura demostrada por mí de las órbitas celestes, no cesó de rogarme que la comunicase a la Sociedad Real, la cual, después, con sus peticiones y benigna protección, hizo que yo empezara a pensar en darlo a la luz. Sin embargo, después de comprobar las desigualdades de los movimientos de la Luna e intentar otras cosas referentes a las leyes y medidas de la gravedad y otras fuerzas, así como a las figuras que habrían de describir cuerpos en mutua atracción según determinadas leyes, referentes también a movimientos de muchos cuerpos entre sí, a los movimientos de cuerpos en medios resistentes, a las fuerzas, a densidades y movimiento de los medios, referentes, por último, a las órbitas de los cometas y cosas por el estilo, pensé que debía aplazar la edición hasta más tarde para corregir todas estas cosas y darlas a la publicidad juntas. Por lo que respecta a los movimientos lunares (aunque imperfectos), los he reunido en los Corolarios de la Proposición LXVI, por no sentirme obligado a estudiar cada uno más prolijamente de lo que el caso requiere y demostrar uno a uno e interrumpir la serie de las demás proposiciones. Algunas cosas descubiertas más tarde decidí incluirlas en lugares menos idóneos antes que cambiar el número de las proposiciones y de las citas. Ruego encarecidamente que todo esto sea leído rectamente y que los defectos en materia tan ardua no tanto sean vituperados cuanto investigados con nuevos intentos de los lectores y suplidos con benevolencia.

Cambridge,
colegio de la S. Trinidad.
8 de mayo de 1686[2]

Prefacio del autor a la segunda edición

En esta segunda edición de los Principios se han corregido muchas cosas aquí y allá y se han añadido otras. En la Sección II del Libro primero se hace más fácil y extenso el procedimiento de descubrir las fuerzas que permiten a los cuerpos girar en órbitas dadas. En la Sección VII del Libro segundo se indaga con más rigor y se confirma con nuevos experimentos la teoría de la resistencia de fluidos. En el Libro tercero se deduce de modo más completo de sus propios principios la teoría de la Luna y la precesión de los equinoccios, así como la teoría de los cometas aparece confirmada por muchos, y más exactamente calculados, ejemplos de trayectorias.

Isaac Newton

Londres, marzo, 28, 1713

Prefacio del editor a la segunda edición

Te ofrecemos, amable lector, una nueva y largamente deseada edición de la filosofía newtoniana ampliamente corregida y aumentada. Por los índices adjuntos podrás conocer los principales temas contenidos en esta famosa obra: los cambios y añadidos te los puede reseñar casi el propio Prefacio del Autor. Sólo falta que añadamos algo sobre el método de esta filosofía.

Podemos reducir a tres las clases de tratamientos que han abordado la Física. Hubo quienes atribuyeron a las diversas especies de cosas cualidades ocultas específicas, de las que hacían después depender las diferentes operaciones de cada cosa por una razón oculta y desconocida. En esto consistió toda la doctrina escolástica procedente de Aristóteles y los peripatéticos. Sostienen, en efecto, que los efectos particulares se siguen de las naturalezas particulares de los cuerpos; no enseñan, en cambio, de dónde proceden tales naturalezas y, por tanto, nada enseñan. Al centrarse únicamente en los nuevos nombres de las cosas y no en las cosas mismas, hay que pensar que han encontrado un cierto lenguaje filosófico, pero en cambio no han ofrecido filosofía alguna.

Otros hay que han creído conseguir, una vez desechado el fárrago inútil de palabras, un reconocimiento de su esfuerzo. Sostuvieron, pues, que toda la materia es homogénea y que toda la variedad de formas que se descubre en las cosas procede de ciertas propiedades simples y de fácil comprensión de las partículas componentes. Y correctamente se establece una progresión de lo más simple a lo más complejo si a dichas propiedades primarias de las partículas no se atribuyen otros modos que aquellos que la propia Naturaleza atribuye. Pero cuando se permiten establecer cualesquiera figuras o magnitudes desconocidas de las partes, lugares y movimientos inciertos, y hasta imaginar determinados fluidos ocultos que penetren libremente a través de los poros de los cuerpos, dotados de una omnipotente sutilidad, agitados de ocultos movimientos, entonces derivan hacia los sueños y abandonan la verdadera constitución de las cosas, la cual, en verdad, raramente puede obtenerse de falaciosas conjeturas, cuando apenas si es posible investigarla por medio de las más seguras observaciones. Quienes toman hipótesis como fundamento de sus especulaciones, aun cuando después procedan del modo más meticuloso de acuerdo con las leyes de la Mecánica, hay que decir que con seguridad componen una fábula elegante y graciosa quizá, pero fábula al fin.

Queda todavía una tercera clase, la de los que profesan la filosofía experimental. Estos pretenden que las causas de todas las cosas han de derivarse de los principios más simples que sea posible; y en el lugar de un principio no asumen jamás cosa alguna que todavía no se haya comprobado a partir de los fenómenos. No se imaginan hipótesis, ni las aceptan en física, a no ser como cuestiones cuya verdad se disputa. Proceden, pues, con un doble método: analítico y sintético. Se deducen las fuerzas de la naturaleza y sus leyes más simples mediante análisis a partir de ciertos fenómenos elegidos y después a partir de aquí se ofrece, mediante síntesis, la constitución de los demás. Esta es la manera de filosofar, con mucho la mejor, que, por encima de todas las demás, nuestro autor creyó que era preciso seguir. Y sólo a ésta creyó digna de ser cultivada y honrada con su propia obra. De ésta dio, pues, un magnífico ejemplo, cual es la explicación del sistema del mundo deducida con todo éxito de la teoría de la gravedad. Otros hubo que sospecharon o imaginaron que la fuerza de la gravedad está presente en todos los cuerpos: pero sólo él, y el primero, pudo demostrarlo a partir de las apariencias, y establecer un fundamento seguro por medio de las más brillantes especulaciones.

Sé que algunas personas, incluso de gran renombre, ocupados más bien con otros prejuicios, difícilmente han podido dar su conformidad a este nuevo principio y por lo mismo han preferido lo incierto a lo cierto. No es mi intención poner en tela de juicio su fama, sino que más bien procede, lector benévolo, que exponga unas pocas cosas de las que tú mismo puedes extraer las conclusiones adecuadas.

Así pues, con objeto de hallar un principio argumental que parta de las cosas más simples e inmediatas, examinaremos un poco cuál es la naturaleza de la gravedad en las cosas terrestres para poder después acercarnos con más seguridad a las cosas celestes enormemente distantes de nosotros. Todos los filósofos están ya de acuerdo en que todos los cuerpos circunterrestres gravitan hacia la Tierra. Una amplia y múltiple experiencia confirma que no se dan cuerpos absolutamente leves. La llamada levedad relativa no es verdadera levedad, sino tan sólo aparente, y que surge de la gravedad más fuerte de los cuerpos contiguos.

Por tanto, dado que todos los cuerpos gravitan hacia la Tierra, del mismo modo la Tierra gravita igualmente hacia todos los cuerpos; que la acción de la gravedad es mutua e igual uno respecto a otro se muestra como sigue: distingamos la masa total de la Tierra en dos partes cualesquiera, iguales o en cualquier forma desiguales; si los pesos de las partes no fuesen mutuamente iguales, el peso menor cedería al peso mayor y las partes juntas empezarían a moverse en línea recta hasta el infinito hacia la región del espacio hacia la que tendiese el peso mayor, lo que está en absoluto contra toda experiencia. Y por tanto, habrá que decir que los pesos de las partes están constituidos en estado de equilibrio; esto es, que la acción de la gravedad es mutua y recíprocamente igual[3].

Los pesos de los cuerpos equidistantes del centro de la Tierra son como las cantidades de materia en ellos. Esto se sigue efectivamente de la igualdad de aceleración de todos los cuerpos que caen en virtud de la fuerza de su peso y a partir del reposo; pues las fuerzas por las que cuerpos desiguales se aceleran igualmente deben ser proporcionales a las cantidades de materia a mover. Ahora bien, puesto que todos los cuerpos que caen se aceleran igualmente, es evidente que en el vacío *Boyleano* recorren al caer espacios iguales en tiempos iguales, una vez suprimida la resistencia del aire; y todavía se comprueba con más exactitud por medio del experimento de los péndulos.

Las fuerzas de atracción de los cuerpos a distancias iguales son como las cantidades de materia de los cuerpos. Dado que los cuerpos gravitan hacia la Tierra y ésta hacia los cuerpos con fuerzas iguales, el peso de la Tierra hacia cada cuerpo, esto es, la fuerza con la que un cuerpo atrae a la Tierra será igual al peso de dicho cuerpo hacia la Tierra. Dicho peso era como la cantidad de materia del cuerpo y, por tanto, la fuerza con la que cada cuerpo atrae a la Tierra o la fuerza absoluta de un cuerpo será como su cantidad de materia.

Por tanto, se origina y se compone la fuerza de atracción de los cuerpos totales de las fuerzas atractivas de las partes, puesto que se ha demostrado que si se aumenta o disminuye la cantidad de materia se aumenta o disminuye proporcionalmente su fuerza. Por eso, la acción de la Tierra ha de atribuirse a la fusión de las acciones de todas las partes, y por tanto es necesario que todos los cuerpos terrestres se atraigan entre sí mutuamente con fuerzas absolutas que estén en razón a la materia atrayente. Esta es la naturaleza de la gravedad en la Tierra; veamos ahora cuál será en los cielos.

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, salvo en la medida en que le obliguen a cambiar dicho estado fuerzas impresas en él; es ésta una ley de la naturaleza aceptada por todos los filósofos. En consecuencia, se sigue que los cuerpos que se mueven en círculos, y que por tanto se separan continuamente de las tangentes a sus órbitas, son retenidos dentro de su trayectoria curva por una fuerza constantemente actuante. Por tanto, necesariamente los planetas que giran en órbitas curvilíneas han de entrañar alguna fuerza en cuya virtud permanente se aparten continuamente de las tangentes.

Y justo es conceder lo que se deduce mediante razones matemáticas y se demuestra con toda certeza, que todos los cuerpos que se mueven según una curva descrita en un plano y que, trazando su radio a un punto en reposo o en movimiento, describen áreas en torno a dicho punto proporcionales a los tiempos, están sometidos a fuerzas que tienden a dicho punto. Puesto que hay acuerdo entre los astrónomos en que los planetas primarios describen áreas proporcionales a los tiempos en torno al Sol y los secundarios en torno a sus primarios, se debe concluir que la fuerza por la que constantemente son apartados de las rectas tangentes y obligados a girar en las órbitas curvas, se dirige hacia los cuerpos que ocupan los centros de las órbitas. De este modo, esta fuerza puede llamarse adecuadamente centrípeta respecto al cuerpo que gira; respecto al cuerpo central, en cambio, puede llamarse de atracción, sea cual sea el origen causal que se le atribuya.

Efectivamente, no sólo hay que conceder esto, sino que se puede demostrar matemáticamente: si varios cuerpos distintos giran con movimiento uniforme en círculos concéntricos y los cuadrados de los tiempos periódicos son como los cubos de las distancias al centro común, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los cuadrados de las distancias. O, si los cuerpos giran en órbitas semejantes a círculos y no cambian los ejes de las órbitas, las fuerzas centrípetas de los cuerpos que giran serán inversamente como los cuadrados de las distancias. Todos los astrónomos están de acuerdo en alguna de estas fórmulas en todos los planetas. Por tanto, las fuerzas centrípetas de todos los planetas son inversamente como los cuadrados de las distancias a los centros de las órbitas. Si alguien objetara que los ejes de las órbitas de los planetas, sobre todo el de la Luna, no están en reposo, sino que son arrastrados por un cierto movimiento lento, se le podría responder que, aunque concedamos que ese movimiento mínimo hubiese desplazado el eje de su sitio y por ello la proporción de la fuerza centrípeta se desvíe un tanto del cuadrado, podría calcularse dicho desvío y ser prácticamente insensible. La propia razón de la fuerza centrípeta lunar, que debía ser la más perturbada de todas, supera bien poco al cuadrado; pues se aproxima casi sesenta veces más a éste que al cubo. Pero la respuesta sería más exacta si dijéramos que ésta deriva de los ejes, no procede de los desvíos de la proporción del cuadrado, sino que tiene otros orígenes, como muy bien se muestra en esta filosofía. Queda, pues, sentado que las fuerzas centrípetas por las que los planetas primarios tienden al Sol y los secundarios a sus respectivos primarios, muy exactamente son inversas a los cuadrados de las distancias.

De lo dicho se sigue que los planetas son mantenidos en sus órbitas por alguna fuerza que constantemente actúa en ellos; se sigue que dicha fuerza se dirige siempre hacia los centros de las órbitas; se sigue que su fuerza aumenta en dirección al centro y disminuye en la dirección contraria; y aumenta precisamente en la proporción en que disminuye el cuadrado de la distancia al igual que disminuye exactamente en la proporción en que aumenta el cuadrado de la distancia. Veamos ahora, una vez efectuada la comparación entre las fuerzas centrípetas de los planetas y la fuerza de gravedad, si tal vez son fuerzas del mismo género. Y serán del mismo género si hallásemos aquí y allá las mismas leyes y los mismos efectos. Veamos, pues, primero la fuerza centrípeta de la Luna, que es la más próxima a nosotros.

Los espacios rectilíneos que son recorridos en un tiempo dado por cuerpos que parten del reposo, a la vez y bajo el impulso de distintas fuerzas, son proporcionales a dichas fuerzas; y esto también se deduce de razonamientos matemáticos. La fuerza centrípeta de la Luna que gira en su órbita será, pues, a la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra como sería el espacio más pequeño que la Luna podría describir cayendo hacia la Tierra en virtud de la fuerza centrípeta, si la imagináramos desprovista de todo movimiento circular, respecto al espacio que en el mismo tiempo mínimo describiría un grave en las inmediaciones de la Tierra y que cayera por la fuerza de su propia gravedad. El primero de dichos espacios es igual al seno verso del arco descrito por la Luna en dicho tiempo, puesto que equivale a la desviación de la Luna de la tangente producida por la fuerza centrípeta; y por tanto, puede calcularse tanto a partir de los datos de la Luna en un tiempo periódico como de su distancia del centro de la Tierra. Se puede hallar el otro espacio por medio del experimento de los péndulos, tal como muestra Huygens. Hecho el cálculo, el espacio del primero será al espacio del segundo, o la fuerza centrípeta de la Luna que gira en su órbita será a la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra como el cuadrado del semidiámetro de la Tierra al cuadrado del semidiámetro de la órbita. La fuerza centrípeta de la Luna girando en su órbita está, por lo que se ha dicho, en la misma razón que la fuerza centrípeta de la Luna en las proximidades de la superficie terrestre. Por consiguiente, la fuerza centrípeta en la proximidad de la Tierra es igual a la fuerza de la gravedad. No son, por tanto, dos fuerzas distintas, sino una y la misma: pues si fuesen distintas, los cuerpos, bajo ambas fuerzas juntas, caerían hacia la Tierra doblemente más deprisa que bajo la sola acción de la gravedad. Se sigue, pues, que la fuerza centrípeta por la que la Luna continuamente se ve apartada de la tangente y retenida en su órbita es la propia fuerza de gravedad terrestre que alcanza hasta la Luna. Y es, por otra parte, conforme a la razón el que dicha fuerza se extienda a tan grandes distancias, dado que ninguna disminución de dicha fuerza es posible detectar ni siquiera en las más altas cimas de las montañas. Gravita, pues, la Luna hacia la Tierra sin que, y en acción mutua, la Tierra a su vez deje de gravitar igualmente hacia la Luna. Cosa ampliamente confirmada en este tratado, donde se trata del movimiento de las mareas y de la precesión de los equinoccios, originados tanto de la acción de la Luna como de la del Sol sobre la Tierra. Por todo esto vemos, finalmente, de acuerdo con qué ley decrece la fuerza de la gravedad a mayores distancias de la Tierra. Puesto que la gravedad no es distinta de la fuerza centrípeta lunar y ésta es a su vez inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, también la gravedad disminuirá según esa misma razón.

Pasemos ahora a los demás planetas. Puesto que las revoluciones de los primarios en torno al Sol y de los secundarios alrededor de Júpiter y de Saturno son fenómenos del mismo género que la revolución de la Luna en torno a la Tierra y puesto que está demostrado que las fuerzas centrípetas de los primarios se dirigen hacia el centro del Sol y las de los secundarios hacia los centros de Júpiter y Saturno, al igual que la fuerza centrípeta de la Luna se dirige hacia el centro de la Tierra y además, puesto que todas las susodichas fuerzas son inversamente como los cuadrados de las distancias a los centros, al igual que la fuerza de la Luna lo es respecto al cuadrado de la distancia a la Tierra, se habrá de concluir que es la misma la naturaleza de todas ellas. Y así del mismo modo que la Luna gravita hacia la Tierra y la Tierra a su vez hacia la Luna, del mismo modo gravitarán todos los secundarios hacia sus primarios y a su vez los primarios hacia sus secundarios, al igual que todos los primarios hacia el Sol y el Sol hacia los primarios.

Por consiguiente, el Sol gravita hacia todos los planetas y todos hacia el Sol.

Puesto que los secundarios, al acompañar a sus primarios, giran mientras tanto también en torno al Sol a la vez que los primarios. Por la misma razón, pues, los planetas de una y otra clase gravitan hacia el Sol y el Sol hacia ellos. Además, se sigue que los planetas secundarios gravitan hacia el Sol por más razones, tales como las desigualdades lunares; de ellas tenemos una exposición exacta, realizada con admirable sutileza, en el Libro tercero de esta obra.

Que la fuerza atractiva del Sol se propaga por doquier hasta las más enormes distancias y que se difunde por cada rincón del espacio circundante se deduce con toda claridad del movimiento de los cometas, los cuales, partiendo de distancias inmensas, llegan hasta las inmediaciones del Sol, incluso algunas veces llegan tan cerca del mismo al alcanzar sus perihelios, que parecería que iban a caer en su globo. La teoría de éstos se la debemos a nuestro ilustre autor, en vano buscada hasta ahora por los astrónomos, descubierta con todo éxito en este siglo y demostrada con toda exactitud por los fenómenos. Se sigue, pues, que los cometas se mueven en secciones cónicas que tienen sus focos en el centro del Sol y que con los radios que llegan al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos. De estos fenómenos se deduce, y matemáticamente se comprueba, que las fuerzas por las que los cometas son retenidos en sus órbitas están dirigidas al Sol y son inversamente como los cuadrados de las distancias al centro del mismo. Gravitan, por tanto, los cometas respecto al Sol; y por tanto, la fuerza de atracción del Sol no sólo alcanza a los cuerpos de los planetas situados a unas distancias dadas y casi en el mismo plano, sino que también alcanza a los cometas situados en los lugares más distintos y a las más diversas distancias. Tal es, pues, la naturaleza de los cuerpos que gravitan, que sus fuerzas llegan a todas las distancias hasta todos los cuerpos en gravitación. De aquí se sigue que todos los planetas y cometas se atraen mutuamente y gravitan mutuamente entre sí; esto también se halla confirmado por la perturbación de Júpiter y Saturno, no desconocida de los astrónomos, y originada de las acciones mutuas de estos planetas, y también por el lento movimiento, mencionado antes, de los ápsides y cuya causa es muy similar.

Por ello, finalmente tenemos que llegar a decir que la Tierra, el Sol y todos los cuerpos celestes que acompañan al Sol se atraen mutuamente. Por consiguiente, aún las más mínimas partículas de cada uno tendrán sus propias fuerzas de atracción según la cantidad de materia que tengan, tal como se vio antes de las partículas terrestres. Para distancias distintas también serán sus fuerzas inversamente como el cuadrado de las distancias; pues se demuestra matemáticamente que de partículas que se atraen, según dicha ley deben formarse los globos que, a su vez, se atraen conforme a la misma ley.

Las conclusiones que anteceden se basan en el siguiente axioma que todos los filósofos aceptan: las causas y las propiedades de los efectos que aún no se conocen, y que son del mismo género que los que se conocen, son causas y propiedades iguales a las de los efectos que se conocen. ¿Quién duda de que si la gravedad es la causa de la caída de una piedra en *Europa*, también será la causa de la caída en *América*? Si se diese mutua gravitación entre una piedra y la Tierra en *Europa*, ¿quién negará la mutua gravitación en *América*? Si la fuerza de atracción de la piedra y la Tierra se compone en *Europa* de las fuerzas atractivas de las partes, ¿quién negará que en *América* la composición será semejante? Si la atracción terrestre alcanza a toda clase de cuerpos y a cualquier distancia en *Europa*, ¿por qué no diremos que se propaga de igual modo en *América*? Toda la ciencia se basa en esta regla, puesto que si la suprimimos nada podríamos afirmar universalmente. La constitución de las cosas singulares se hace patente por medio de las observaciones y los experimentos, y, por tanto, sólo mediante esta regla podemos hablar de la naturaleza de todas las cosas.

Puesto que son graves todos los cuerpos que se hallan en la Tierra o en el firmamento y sobre los cuales es posible hacer experimentos u observaciones, habrá que decir de una vez por todas que la gravedad afecta a todos los cuerpos. Y al igual que no se debe concebir cuerpo alguno que no sea extenso, móvil e impenetrable, del mismo modo tampoco debe concebirse un cuerpo que no sea grave. La extensión, movilidad e impenetrabilidad de los cuerpos no se revelan si no es experimentalmente; exactamente del mismo modo ocurre con la gravedad. Todos los cuerpos de los que tenemos observaciones son extensos, móviles e impenetrables; de ello concluimos que todos los cuerpos, incluso aquellos de los que no tenemos observación ninguna, son extensos, móviles e impenetrables. De igual modo, todos los cuerpos de los que tenemos observación son graves; de aquí concluimos que todos los cuerpos, incluso aquellos de los que no tenemos observación, son graves. Si alguien dijera que no son graves los cuerpos de las estrellas fijas, dado que su gravedad aún no ha sido observada, por la misma razón sería posible decir que ni son extensos, ni móviles, ni impenetrables, dado que tales propiedades aún no han sido observadas en las estrellas fijas. ¿Qué necesidad hay de más palabras? O la gravedad tiene un lugar entre las cualidades primarias de todos los cuerpos o no la tienen ni la extensión, ni la movilidad, ni la impenetrabilidad. Y por tanto, o se explica correctamente la naturaleza de las cosas por medio de la gravedad de los cuerpos o no se explica correctamente por medio de la extensión, la movilidad y la impenetrabilidad de los cuerpos.

Estoy oyendo ya a algunos rechazar esta conclusión y cuchichear no sé qué sobre las cualidades ocultas. Suelen argumentar siempre que la gravedad es algo oculto; y hay que apartar de la filosofía las causas ocultas. A éstos fácilmente se responde: no son causas ocultas aquellas cuya existencia se demuestra claramente por medio de observaciones, sino sólo aquellas cuya existencia es oculta, imaginaria y aún no demostrada. La gravedad no será, pues, causa oculta de los movimientos celestes, dado que se ha demostrado a partir de los fenómenos que tal fuerza realmente existe. Estos tales son más bien los que acuden a causas ocultas y establecen como determinantes de dichos movimientos a no sé qué vórtices de una ficticia materia completamente desconocida para los sentidos[4].

¿Acaso la gravedad se llama causa oculta, y por esta razón se desecha de la ciencia, simplemente por ser oculta la causa de dicha gravedad y no haber sido aún descubierta? Los que tal dicen cuídense, no sea que digan algo absurdo que venga a arruinar los fundamentos de toda filosofía. Puesto que las causas suelen proceder mediante encadenamiento continuo de las más complejas a las más simples, cuando lleguemos a la causa más simple ya no nos será posible ir más allá. Por tanto, de la causa más simple no se podrá dar una explicación mecánica, pues si se pudiera dar no se trataría de la causa más simple. ¿Llamaríamos ocultas a estas causas simplicísimas y las suprimiríamos también? Entonces suprimiríamos también a las inmediatamente siguientes y a las siguientes, hasta que la filosofía entera resultase vacía y limpia de toda causa.

Hay quienes afirman que la gravedad es algo preternatural y la consideran un milagro perpetuo. Por tanto, también quieren rechazarla, dado que las causas preternaturales no tienen cabida en la física. Apenas vale la pena detenerse en responder a esta burda objeción que mina además a toda la filosofía. O bien niegan la gravedad inherente a todos los cuerpos, cosa que no se puede decir; o bien, por la misma razón, sostendrán que es preternatural lo que no tiene su origen en otras propiedades corpóreas y, por tanto, en causas mecánicas. Ciertamente, se dan las propiedades primarias de los cuerpos, las cuales, puesto que son primarias, no dependen de otras. Observen, pues, si todas éstas son también preternaturales o no, y, por consiguiente, recusables, y piensen en consecuencia qué filosofía podría seguirse después.

Otros hay para los que toda esta física celeste es tanto menos grata cuanto parece oponerse a los dogmas cartesianos o apenas puede casarse con ellos. En su derecho están si les gusta esta opinión; pero justo será que se conduzcan consecuentemente y no nieguen a los demás la libertad que para sí piden. Por tanto, será lícito defender y abrazar la filosofía *newtoniana*, que nos parece más verdadera y mantener las causas comprobadas por medio de fenómenos, más bien que las ficticias y aún no comprobadas. Compete a la verdadera filosofía derivar la naturaleza de las cosas de causas realmente existentes; esto es, buscar aquellas leyes con las que el mismo artífice quiso establecer el maravilloso orden de este mundo, no aquéllas con las que pudo hacerlo si así le hubiese parecido. Pues no es contradictorio el que muchas causas, distintas entre sí, produzcan los mismos efectos. Pero aquella será la causa verdadera que realmente y de hecho produce el efecto, mientras las demás no tienen sitio en la verdadera filosofía. En los relojes mecánicos el mismo movimiento del índice horario puede provenir bien de una pesa, bien de un muelle incorporado. Pero si un reloj dado, de hecho está dotado de una pesa, caerá en ridículo el que suponga un muelle y, de acuerdo con la hipótesis, pretenda explicar así el movimiento del índice horario; es preciso investigar previamente con más atención la construcción interna de la máquina para poder determinar el verdadero origen del movimiento propuesto. Y no merecen un juicio muy distinto los filósofos aquellos que han considerado a los cielos repletos de una materia sutil y en perpetua acción en los vórtices. Pues, aunque pudieran dar cuenta de los fenómenos a partir de sus hipótesis del modo más exacto, aún no se podría decir que han ofrecido una verdadera filosofía ni que han hallado las causas verdaderas de los movimientos celestes, a no ser que hayan demostrado que tales causas existen realmente, o que no existen otras. Por tanto, si se demostrase que la atracción de todos los cuerpos tiene verdaderamente lugar en la naturaleza de las cosas, y además se hubiese demostrado por qué razón todos los movimientos celestes pueden explicarse a partir de ella, entonces sería vana y en verdad ridícula la objeción del que dijese que estos mismos movimientos deberían explicarse por medio de vórtices, si esto fuese posible o incluso lo concediésemos. Pero no lo hemos concedido; pues de ningún modo pueden explicarse los fenómenos por los vórtices, cosa que nuestro autor demuestra ampliamente y con claros argumentos, para que, los que sostienen tal desafortunada opinión, tanto reconstruyendo el inútil engendro como adornándolo con nuevos comentarios, sean más dignos de indulgencia por sus sueños.

Si los planetas y los cometas fuesen arrastrados en torno al Sol por los vórtices, sería preciso que los astros arrastrados y las partes de los vórtices circundantes se moviesen con la misma velocidad y con la misma dirección y que tuvieran la misma densidad y la misma fuerza de inercia que la masa de la materia. Sin embargo, nos consta que los planetas y cometas, mientras caminan por las mismas regiones del cielo, se mueven con distintas velocidades y distintas direcciones. Se sigue, pues, necesariamente que aquellas partes del fluido celeste que están a la misma distancia del Sol, se mueven a la vez en direcciones distintas y con velocidades distintas, puesto que unas serán la velocidad y dirección necesarias para que puedan circular los planetas y otras para que puedan hacerlo los cometas. Pero al no poder explicar esto, o se habrá de reconocer que ningún cuerpo celeste es transportado por la materia de los vórtices, o se habrá de sostener que sus movimientos son producidos, no por uno solo e idéntico vórtice, sino por muchos que son distintos entre sí y ocupan el mismo espacio alrededor del Sol.

Si se suponen muchos vórtices contenidos en el mismo espacio penetrándose mutuamente y girando con diferentes movimientos, puesto que tales movimientos deben ser conformes con los movimientos de los cuerpos transportados, movimientos que son altamente regulares y se producen en secciones cónicas, ora muy excéntricas, ora muy próximas a un círculo, con toda razón uno se habrá de preguntar a qué se debe el que se conserven intactos y no se hayan, en cambio, desajustado ni un poco a lo largo del tiempo por obra de la materia que les opone resistencia. En realidad, si estos movimientos ficticios son más compuestos y se explican más difícilmente que los verdaderos movimientos de los planetas y de los cometas, me parece inútil aceptarlos en filosofía, pues toda causa debe ser más simple que su efecto. Concediendo venía a las fantasías, alguien afirmaría que todos los planetas y cometas están rodeados de atmósferas similares a la de nuestra Tierra; hipótesis que, sin embargo, parecerá más racional que la de los vórtices. Afirmaría después que tales atmósferas por su naturaleza se mueven en torno al Sol y describen secciones cónicas, movimientos que en realidad pueden concebirse mucho más fácilmente que el movimiento similar de los vórtices mutuamente permeables. Por último, establecería que es preciso creer que los propios planetas y cometas son arrastrados alrededor del Sol por sus respectivas atmósferas y cantará victoria por haber encontrado las causas de los movimientos celestes. Pero quien crea que esta fábula debe rechazarse, también rechazará la otra, puesto que la hipótesis de las atmósferas y la de los vórtices no se distinguen más que un huevo de otro huevo.

Galileo mostró que el desvío de la trayectoria recta de una piedra lanzada y que se mueve parabólicamente tiene su origen en la gravedad de la piedra hacia la Tierra, esto es, en una cualidad oculta. Sin embargo, podría ocurrir que otro filósofo cualquiera de más fino olfato proponga otra causa. Imagina, pues, el tal filósofo que cierta materia sutil, que no puede percibirse ni por la vista, ni por el tacto, ni por sentido alguno, actúa en zonas inmediatas a la superficie de la Tierra. Pero sostiene que esta materia es llevada hacia direcciones diversas por movimientos distintos y muchas veces contrarios a la vez que describe líneas parabólicas. Y así describirá a partir de aquí con pulcritud el desvío de la piedra e incluso merecerá el aplauso del vulgo. La piedra, dirá, flota en aquel Huido sutil y siguiendo el curso del mismo no puede dejar de describir a la vez la misma senda. Pero como el fluido se mueve en líneas parabólicas, entonces también será necesario que la piedra se mueva parabólicamente. ¿Quién no sentirá admiración ante el sutil ingenio de nuestro filósofo, que deduce con claridad y al alcance del vulgo los fenómenos de la naturaleza de causas mecánicas tales como la materia y el movimiento? ¿Quién no se reirá del bueno de Galileo viéndole sostener con un gran aparato matemático la necesidad de recuperar á las cualidades ocultas excluidas ya afortunadamente de la filosofía? Pero me sonroja gastar más tiempo en bagatelas.

El resultado finalmente viene a ser: el número de cometas es enorme, sus movimientos son altamente regulares y cumplen las mismas leyes que los movimientos de los planetas. Se mueven en curvas cónicas, curvas que son muy excéntricas. Recorren cualquier lugar del firmamento en cualquier dirección y atraviesan libremente los espacios planetarios y frecuentemente caminan en sentido contrario al orden del Zodíaco. Las observaciones astronómicas confirman sin duda todos estos fenómenos que no pueden explicarse por los vórtices e incluso no pueden coexistir con los vórtices de los planetas. A no ser que la tal materia imaginaria desaparezca del cielo, no habrá lugar para los movimientos de los cometas.

Si los planetas son arrastrados en torno al Sol por los vórtices, las partes de éstos que rodean inmediatamente a cada uno de los planetas tendrá la misma densidad que éstos, como se ha dicho más arriba; y por tanto, toda aquella materia que está inmediatamente contigua al perímetro del orbe magno tendrá una densidad semejante a la de la Tierra, mientras que la que se halla dentro del orbe magno o del de Saturno será igual o mayor. Pero para que la estructura del vórtice pueda constituirse y permanecer es preciso que las partes menos densas ocupen el centro y las más densas se alejen del mismo. Mas como los períodos de los planetas están en razón de la potencia $^{3}/_{2}$ de las distancias al Sol, es preciso que los períodos de las partes de los vórtices conserven la misma proporción. Y de aquí se sigue que las fuerzas centrífugas de estas partes habrán de estar en razón inversa a los cuadrados de las distancias. Por tanto, las que distan más del centro pugnan con menos fuerza por alejarse de él; por ende, si fuesen menos densas es necesario que cedan ante la mayor fuerza con que las partes más cercanas al centro pugnan por alejarse. Ascenderán, por tanto, las más densas y descenderán las menos densas y cambiarán entre sí de sitio hasta que la materia toda del vórtice esté ordenada y dispuesta de tal modo que pueda reposar en equilibrio. Si dos fluidos de densidades distintas se colocan en el mismo vaso ocurrirá que el fluido de mayor densidad se dirigirá al lugar más bajo, dada su mayor gravedad; y por una razón semejante hay que decir que las partes más densas de un vórtice se irán hacia los lugares más alejados por su mayor fuerza centrífuga. Por consiguiente, toda la parte del vórtice, que es con mucho la mayor, que se extiende fuera del globo terrestre, tendrá una densidad y fuerza inercial por cantidad de materia no menor que la densidad o inercia de la materia del mismo. De ahí surgirá una resistencia tan grande y ostensible a las trayectorias de los cometas que yo diría que es capaz de frenar y hasta detener sus movimientos. Nos consta, sin embargo, por el movimiento altamente regular de los cometas, que no sufren resistencia alguna y por tanto no atraviesan materia alguna que ofrezca resistencia y que, por tanto, tenga densidad o fuerza de inercia alguna, pues la resistencia de los medios procede bien de la inercia de la materia fluida, bien de la falta de lubricidad. La que procede de la falta de lubricidad es muy pequeña y apenas puede detectarse en los fluidos conocidos comúnmente, salvo que fuesen de una viscosidad similar a la del aceite o la miel. La resistencia observable en el aire, en el agua, en el mercurio o en fluidos semejantes no viscosos, es casi toda del primer tipo y apenas puede disminuirse por cualquier grado ulterior de enrarecimiento si permanece la densidad y la fuerza de inercia del fluido a las que siempre es proporcional esta resistencia, como demostró claramente nuestro autor en su brillante teoría de las resistencia, que ahora, en esta segunda edición, se expone un poco más rigurosamente a la vez que se confirma con experimentos de cuerpos que caen.

Los cuerpos al moverse comunican poco a poco su movimiento al fluido circundante, y al comunicarlo lo van perdiendo, y al perderlo se desaceleran. La desaceleración es proporcional al movimiento comunicado, y éste, cuando se da la velocidad del móvil, es como la densidad del fluido; por tanto, la desaceleración o la resistencia será como la densidad del fluido; y esto no hay modo de evitarlo, a no ser que el fluido que llene la parte posterior del móvil restituya el movimiento perdido. Pero esto sería imposible de mantener salvo que el empuje del fluido sobre la parte posterior fuese igual al empuje de la parte delantera sobre el fluido, esto es, salvo que la velocidad relativa con que el fluido irrumpe contra el cuerpo por detrás fuese igual a la velocidad con que el cuerpo irrumpe contra el fluido o, lo que es lo mismo, que la velocidad absoluta del fluido que irrumpe por detrás del móvil sea el doble que la velocidad absoluta del fluido impactado por el móvil, lo que es imposible. No hay, pues, modo de evitar la resistencia de los fluidos procedente de su densidad e inercia. Hay que concluir, por tanto, que el fluido celeste no tiene fuerza inercial alguna dado que no ofrece resistencia alguna, que no hay fuerza alguna que comunicar a móvil alguno, dado que no hay inercia ninguna; que no hay fuerza alguna que produzca cambio alguno en los cuerpos ni singulares ni en conjunto, puesto que no hay fuerza alguna que comunique movimiento a los cuerpos; que no existe la más mínima capacidad de obrar al no existir la menor facultad de producir cualquier tipo de mutación. Por qué, pues, no llamar inútil e indigna de un sabio a una hipótesis que, sobre carecer de fundamento, no sirve en lo más mínimo para explicar la naturaleza de las cosas. Los que quieren ver el cielo lleno de materia inerte suprimen el vacío sólo de palabra, pero en la realidad lo mantienen. Puesto que no puede hallarse razón alguna que permita distinguir semejante materia del espacio vacío, toda la polémica se reduce a cuestión de nombres y no de cosas. Pero si hay además algunos tan adictos a la materia, que de ningún modo podrían admitir espacio vacío de cuerpos, veamos hasta qué punto es obligado hacerlo.

Y ello porque, o sostienen que esta constitución que imaginan del mundo lleno por todas partes procede de la voluntad de Dios con el fin de dar apoyo a las operaciones de la naturaleza mediante un éter sutil que todo lo llena y en todo está presente, cosa que no se puede sostener, puesto que, como se ha mostrado por los fenómenos de los cometas, la eficacia de tal éter es nula, o sostienen que procede de la voluntad de Dios para algún fin desconocido, cosa que no debe decirse, ya que semejante argumento llevaría igualmente a establecer otra constitución cualquiera del mundo, o, finalmente, sostienen que no procede de la voluntad de Dios, sino de cierta necesidad natural. Y así, finalmente es preciso venir a parar a las filas de una grey de indeseables. Son tales los que creen que el hado y no la providencia lo gobierna todo, que la materia necesariamente ha existido siempre y en todas partes, que es infinita y eterna. Supuesto esto también, será uniforme en todo lugar, puesto que la diversidad de formas no cuadra en absoluto con la necesidad. También será inmóvil, puesto que si se moviera necesariamente en una dirección dada con una determinada velocidad, con igual necesidad se movería en dirección distinta y con velocidad distinta; pero al no ser posible moverse en direcciones distintas y con velocidades distintas, es preciso que sea inmóvil. Por tanto, este mundo lleno de las más bellas formas y de la mayor variedad de movimientos, no ha podido tener otro origen que la libre voluntad de un dios providente y gobernante.

De esta fuente, salieron todas las así llamadas leyes de la naturaleza, en las que tantas muestras de sabiduría y no de necesidad aparecen. Por tanto, hay que encontrarlas observando y experimentando y no a partir de conjeturas inciertas.

Quien cree que puede encontrar por su sola razón y con la ayuda de su sola capacidad mental los principios de la Física y las leyes de la naturaleza, necesita, o bien establecer que el mundo procede de la necesidad y que sigue las leyes nacidas de ella, o bien, si el orden del mundo ha sido creado por la voluntad de Dios, que él, humana miseria, ha comprendido qué es lo mejor que puede ser creado. La verdadera y auténtica filosofía se basa en los fenómenos, los cuales, si nos inducen a nosotros, o a otros menos dispuestos, a aceptar tales principios en los que se trasluce el gran saber y la suprema potestad de un ser sabio y todopoderoso, no deben ser rechazados bajo el pretexto de que tal vez sean menos aceptables para otros hombres. Ya llamen milagros o cualidades ocultas a los principios que rechacen, no deben atribuirse a las cosas nombres maliciosamente puestos, a no ser que al fin se desee confesar que efectivamente la filosofía debe descansar en el ateísmo. Por causa de estos hombres no debe degradarse la filosofía si no se quiere cambiar el orden de las cosas.

Gozará de crédito, pues, ante los más exigentes y equitativos jueces aquella manera de hacer filosofía que se basa en experimentos y observaciones. Apenas podemos decir en qué grado ilumina y cuánto dignifica a este modo de hacer filosofía la meritísima obra de nuestro ilustre autor, cuyo talento al resolver los más difíciles problemas, hasta el punto de que no era dado esperar su solución de la mente humana, con razón admiran y alaban quienes conocen con cierta profundidad estos temas. Rotos los arcanos, nos abrió paso hacia los más bellos misterios de la naturaleza. De tal modo nos esclareció la armoniosa belleza del sistema del mundo, que ni el propio rey Alfonso, si resucitase, desearía en él mayor simplicidad y graciosa armonía. De tal modo, pues, que es ya más fácil comprender la majestad de la naturaleza, gozar de la más dulce contemplación, venerar y dar culto sin esfuerzo al fundador y señor del universo, cosas todas que son, con mucho, el fruto más logrado de la filosofía. Es preciso estar ciego para no ver al instante a través de las óptimas y sabias estructuras de las cosas la sabiduría y bondad infinitas de un autor omnipotente; es preciso estar loco para no reconocerlo.

Se erguirá, pues, la admirable obra de Newton como un formidable castillo contra los ataques de los ateos y en ningún otro sitio se hallarán más fácilmente dardos contra la caterva impía que en esta aljaba. Así lo vio ya el primero, y lo publicó tanto en latín como en inglés el ilustre y admirable en todos los géneros del saber Ricardo Bentley, eximio protector de las artes, gloria de su siglo y de nuestra Universidad, digno y conspicuo maestro de nuestro colegio de la *Santísima Trinidad*. A él me siento obligado por muchas razones. Incluso tú, amable lector, no le negarás tu agradecimiento; pues habiendo disfrutado durante mucho tiempo de la íntima amistad del ilustre autor (amistad que piensa que no debe tenerse en menos por la posteridad que los propios escritos que brillan en el mundo literario) se ocupó a la vez de la fama del amigo y del crecimiento de las ciencias. Y así, al ser ya raros y sumamente caros los ejemplares que quedaban de la anterior edición, persuadió con sus lamentaciones e incluso sin violencia empujó finalmente a aquel ilustre varón, insigne no menos por su modestia que por su enorme erudición, a que autorizase esta nueva edición de su obra, revisada y aumentada con añadidos importantes, a sus expensas y bajo su cuidado; a mí me pidió, era su derecho, algo no demasiado ingrato: que cuidase de hacerlo sin erratas en lo que pudiese.

Rogerio Cotes
Miembro del colegio de la Santísima Trinidad,
Profesor Plumiano de Astronomía
y Filosofía experimental.

Cambridge, 12 de mayo de 1712

Prólogo del autor a la tercera edición

En esta tercera edición, debida a los cuidados de *Henry Pemberton*, muy docto en estas cuestiones, se explican con alguna mayor extensión ciertos experimentos del Libro II sobre la resistencia a los graves que caen en la atmósfera hacia la Tierra. En el Libro III se expone con más amplitud el argumento con que se prueba que la Luna permanece en su órbita a causa de la gravedad y se añaden nuevas observaciones sobre la proporción mutua de los diámetros de Júpiter realizados por *D. Pound*. Se añaden también algunas observaciones del cometa de 1680, hechas por *Kirk* en noviembre en Alemania y recién llegadas a nuestras manos, con las que se muestra cuán cerca están las órbitas parabólicas de las trayectorias de los cometas. También se precisa un poco más que antes la elipse de la órbita del cometa que reseñó *Halley*. Y se muestra que dicha órbita elíptica a través de los nueve signos celestes no realizó su giro con menor exactitud que lo suelen hacer los planetas a través de sus órbitas elípticas descritas en astronomía. Además, se añade la órbita del cometa de 1723, observado por *Bradley*, profesor de astronomía de *Oxford*.

Isaac Newton

Londres, 12 de enero de 1725-26.

Definición Primera

La cantidad de materia es la medida de la misma originada de su densidad y volumen conjuntamente.

El aire dos veces más denso, en también doble espacio, es cuádruple, en triple espacio, séxtuple. Lo mismo se debe entender de la nieve o del polvo condensados por compresión o licuefacción. Y esta misma es la razón para todos los cuerpos que por cualquier causa se condensan de modos diversos. No tengo, en cambio, aquí razón ninguna para un medio, si hubiere alguno, que atraviese libremente los intersticios de las partes. A esta cantidad llamo en lo sucesivo cuerpo o masa. Se hace manifiesta por el peso de cualquier cuerpo, pues, por medio de experimentos muy exactos con péndulos, hallé que era proporcional al peso, como después se mostrará[5].

Definición II

La cantidad de movimiento es la medida del mismo obtenida de la velocidad y de la cantidad de materia conjuntamente.

El movimiento del todo es la suma de los movimientos de cada parte y, por tanto, es el doble en un cuerpo el doble mayor con igual velocidad y cuádruple con doble velocidad[6].

Definición III

La fuerza ínsita de la materia es una capacidad de resistir por la que cualquier cuerpo, por cuanto de él depende, persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Esta es siempre proporcional al cuerpo y no se diferencia en nada de la inercia de la masa, a no ser en el modo de concebirla. Por la inercia de la materia ocurre que todo cuerpo difícilmente se aparta de un estado de reposo o movimiento. De donde la fuerza ínsita también puede llamarse con toda propiedad fuerza de inercia[7]. Ejerce el cuerpo esta fuerza solamente en el cambio de su estado hecho por otra fuerza impresa en él y es su ejercicio, bajo diverso aspecto, tanto resistencia como ímpetu: resistencia, en tanto en que el cuerpo, para conservar su propio estado, se opone a la fuerza impresa; ímpetu, en tanto que el mismo cuerpo, cediendo difícilmente a la fuerza del obstáculo resistente, intenta cambiar el estado de éste. El vulgo atribuye la resistencia a los cuerpos en reposo y el ímpetu a los cuerpos en movimiento; pero el movimiento y el reposo, tal como el vulgo los concibe, sólo se distinguen relativamente uno de otro, y no siempre verdaderamente reposan las cosas que el vulgo considera en reposo.

Definición IV

La fuerza impresa es la acción ejercida sobre un cuerpo para cambiar su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo.

Consiste esta fuerza en la sola acción y no permanece en el cuerpo después de ella, pues el cuerpo permanece en el nuevo estado únicamente por inercia. La fuerza impresa tiene diferentes orígenes, tales como un golpe, una presión, la fuerza centrípeta.

Definición V

La fuerza centrípeta es aquella en virtud de la cual los cuerpos son atraídos, empujados, o de algún modo tienden hacia un punto como a un centro.

De esta clase es la gravedad por la que los cuerpos tienden al centro de la Tierra; el magnetismo por el que el hierro tiende hacia el imán; y la fuerza, cualquiera que sea, por la que constantemente los planetas se ven apartados de las trayectorias rectilíneas y se ven obligados a permanecer girando en líneas curvas. Una piedra volteada en una honda intenta escapar de la mano del hondero y su intento hace estirarse la honda y más cuanto más rápidamente gira, y en cuanto se suelta se aleja. Llamo centrípeta a la fuerza contraria al mencionado intento; por ella, la honda retiene constantemente la piedra hacia la mano y la mantiene en el círculo, y, por tanto, se dirige hacia la mano o hacia el centro del círculo. Igual ocurre con todos los cuerpos que giran en círculo. Todos intentan alejarse del centro dél círculo y, a no ser por una fuerza contraria a este intento, que los cohíba y los obligue en sus órbitas y a la que por ello llamo centrípeta, se alejarían todos en línea recta con movimientos uniformes. Si se despojase de la fuerza de gravedad, un proyectil no caería a tierra, sino que se alejaría por los cielos en línea recta y esto con movimiento uniforme si además suprimimos la resistencia del aire. La gravedad lo aparta continuamente de la trayectoria rectilínea y lo doblega continuamente hacia la Tierra, y esto más o menos según sea su gravedad y su velocidad de movimiento. Cuanto menor sea su gravedad por la cantidad de materia o la velocidad con que se dispara, tanto menos se desviará de la trayectoria rectilínea y más lejos llegará. Si una bola de plomo disparada con la fuerza de la pólvora desde lo alto de un monte a una determinada velocidad y en la dirección de una línea horizontal recorriese, describiendo una curva, dos millas antes de caer al suelo, con velocidad doble llegaría casi el doble más lejos y con diez veces la velocidad llegaría también casi diez veces más lejos, supuesto que no haya resistencia del aire. Y, aumentando la velocidad, puede aumentarse a voluntad la distancia de lanzamiento y disminuir la curvatura de la trayectoria hasta el punto de alcanzar diez, treinta o noventa grados e incluso circundar la Tierra y hasta alejarse hacia los cielos y con el movimiento de ida escapar al infinito. Y por la misma razón por la que un proyectil podría girar en un círculo por la fuerza de la gravedad y dar vuelta a toda la Tierra, asimismo la Luna por la fuerza de la gravedad, supuesto que sea grave, u otra fuerza cualquiera por la que sea empujada hacia la Tierra, puede ser desviada hacia la Tierra continuamente de la trayectoria rectilínea y girar en su órbita; y sin tal fuerza, la Luna no podría retenerse en su órbita. Esta fuerza, si fuese sólo un poco menor, no podría apartar a la Luna de su curso rectilíneo, y si fuese un poco mayor, la apartaría demasiado y la precipitaría de su órbita hacia la Tierra. Se requiere, pues, que sea de una magnitud exacta. Y es cometido de los matemáticos calcular la fuerza con la que un cuerpo en una órbita determinada y a una velocidad dada podría mantenerse exactamente, y a la inversa, determinar la trayectoria curva a que es empujado un cuerpo que es lanzado con una fuerza dada y desde un punto dado. Además, la magnitud de esta fuerza centrípeta es de tres clases: absoluta, acelerativa y motriz.

Definición VI

Magnitud absoluta de la fuerza centrípeta es la medida mayor o menor de la misma según la eficacia de la causa que la expande desde un centro en todas las direcciones en torno.

Como ocurre con la fuerza magnética, según la masa del imán o según la intensidad de la fuerza magnética, que es mayor en unos imanes que en otros.

Definición vii

La magnitud acelerativa de la fuerza centrípeta es su medida proporcional a la velocidad que genera en un tiempo dado.

Así, la fuerza del imán es mayor a menor distancia y menor a mayor distancia, o la fuerza gravitacional es mayor en los valles y menor en las cimas de los montes muy altos, y menor todavía (como luego se mostrará) a mayores distancias de la superficie terrestre, mientras permanece igual a distancias iguales, puesto que acelera por igual a todos los cuerpos que caen (graves o leves, grandes o pequeños) si se suprime la resistencia del aire.

Definición viii

La magnitud motriz de la fuerza centrípeta es la medida de la misma proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado.

Así, el peso es mayor en un cuerpo mayor y menor en un cuerpo menor; y en el mismo cuerpo resulta mayor cerca de la Tierra y menor en el cielo. Dicha cantidad es la centripetencia o tendencia al centro de todo el cuerpo y (por así decirlo) su peso; se pone siempre de manifiesto por medio de una fuerza contraria a ella y equivalente por la que sea posible impedir la caída del cuerpo.

Es conveniente, para ser breves, llamar a estas magnitudes fuerzas motrices, acelerativas y absolutas; y para distinguirlas, referirlas a los cuerpos que tienden a un centro, a los lugares de los cuerpos y al centro de fuerzas: a saber, la fuerza motriz a un cuerpo, como si se tratara del impulso de un todo hacia un centro, impulso compuesto de los impulsos parciales de todas las partes; y la fuerza aceleratriz al lugar del cuerpo, como si se tratara de cierta eficacia difundida desde el centro por cada punto en torno para mover los cuerpos situados en él; la fuerza absoluta al centro, como si estuviera dotado de una causa sin la que las fuerzas motrices no se propagarían por las regiones entorno, ya sea tal causa un cuerpo central (como el imán en el centro de la fuerza magnética o la Tierra en el centro de la fuerza de gravitación) u otra causa oculta. Tal concepto es meramente matemático, puesto que no considero aquí las causas y las bases físicas de las fuerzas.

La fuerza acelerativa es a la fuerza motriz como la velocidad al movimiento. Puesto que surge la cantidad de movimiento de la velocidad y de la cantidad de materia y la fuerza motriz surge de la fuerza acelerativa y de la misma cantidad de materia conjuntamente. Pues la suma de los impulsos de la fuerza aceleratriz sobre cada parte representa la fuerza motriz del todo. Por consiguiente, en la superficie de la Tierra, donde la gravedad aceleratriz o fuerza de gravitación es la misma para todos los cuerpos, la gravedad motriz o peso es idéntico al cuerpo; pero si se sube por el espacio, donde la gravedad aceleratriz es menor, el peso disminuirá también y será siempre igual a la gravedad aceleratriz y al cuerpo conjuntamente. Así, en sitios donde la gravedad aceleratriz es dos veces menor, el peso de un cuerpo dos o tres veces menor será cuatro o seis veces menor.

Por cierto, que llamo en el mismo sentido fuerzas acelerativas y motrices a las atracciones y a los impulsos. Utilizo unas por otras, e indiferentemente, las palabras atracción, impulso, tendencia de cualquier tipo a un centro, y lo hago considerando a tales fuerzas, no en su aspecto físico, sino sólo en el matemático. De ahí que cuide el lector de no creer que con estas palabras yo esté definiendo algún género o modo de acción o causa o propiedad física, o que estoy atribuyendo a los centros (que son puntos matemáticos) verdaderas fuerzas físicas, si me hallare diciendo que los centros atraen o que las fuerzas son centrales.

Escolio[8]

Nos ha parecido oportuno explicar hasta aquí los términos menos conocidos y el sentido en que se han de tomar en el futuro. En cuanto al tiempo, espacio, lugar y movimiento, son de sobra conocidos para todos. Hay que señalar, sin embargo, que el vulgo no concibe estas magnitudes si no es con respecto a lo sensible. De ello se originan ciertos prejuicios para cuya destrucción conviene que las distingamos en absolutas y relativas, verdaderas y aparentes, matemáticas y vulgares.

I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático en sí y por su naturaleza y sin relación a algo externo, fluye uniformemente, y por otro nombre se llama duración; el relativo, aparente y vulgar, es una medida sensible y externa de cualquier duración, mediante el movimiento (sea la medida igual o desigual) y de la que el vulgo usa en lugar del verdadero tiempo; así, la hora, el día, el mes, el año.

II. El espacio absoluto, por su naturaleza y sin relación a cualquier cosa externa, siempre permanece igual e inmóvil; el relativo es cualquier cantidad o dimensión variable de este espacio, que se define por nuestros sentidos según su situación respecto a los cuerpos, espacio que el vulgo toma por el espacio inmóvil: así, una extensión espacial subterránea, aérea o celeste definida por su situación relativa a la Tierra. El espacio absoluto y el relativo son el mismo en especie y en magnitud, pero no permanecen siempre el mismo numéricamente. Pues si la Tierra, por ejemplo, se mueve, el espacio de nuestra atmósfera que relativamente y respecto a la Tierra siempre permanece el mismo, ahora será una parte del espacio absoluto por la que pasa el aire, después otra parte y así, desde un punto de vista absoluto, siempre cambiará.

III. Lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa y es, en tanto que espacio, absoluto o relativo. Digo parte del espacio, no situación del cuerpo ni superficie externa. Pues los sólidos iguales siempre tienen lugares iguales; las superficies, en cambio, por la desemejanza de las figuras son muchas veces desiguales. La situación, hablando propiamente, no tiene cantidad y no es tanto un lugar cuanto una propiedad del lugar. El movimiento del todo es el mismo que la suma de los movimientos de las partes, esto es, la traslación del todo de su lugar es la misma que la suma de las traslaciones de sus lugares de las partes, y por tanto, el lugar del todo es igual a la suma de los lugares de las partes y, por consiguiente, interno y solidario con el cuerpo.

IV. Movimiento absoluto es el paso de un cuerpo de un lugar absoluto a otro lugar absoluto, el relativo de un lugar relativo a otro lugar relativo. Así, en una nave empujada por las velas desplegadas, el lugar relativo de un cuerpo es aquella región de la nave en que está el cuerpo, o sea, la parte de la cavidad total que llena dicho cuerpo y que, por consiguiente, se mueve a la vez que la nave: mientras que el reposo relativo es la permanencia del cuerpo en la misma región de la nave o en la misma parte de su cavidad. Pero el reposo verdadero es la permanencia del cuerpo en la misma parte del espacio inmóvil en que se mueve la nave misma junto con su cavidad y todos sus contenidos. De donde si la Tierra verdaderamente está en reposo, el cuerpo que en la nave permanece relativamente en reposo se moverá verdadera y absolutamente con la misma velocidad con que la nave se mueve sobre la Tierra. Si la Tierra también se mueve, constará el verdadero y absoluto movimiento del cuerpo, parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, parte de los movimientos relativos de la nave sobre la Tierra: y si el cuerpo también se mueve relativamente a la nave, constará su verdadero movimiento, parte del verdadero movimiento de la Tierra en el espacio inmóvil, parte de los movimientos relativos, tanto de la nave respecto a la Tierra como del cuerpo respecto a la nave, y de estos movimientos relativos constará el total movimiento relativo del cuerpo respecto a la Tierra. Así, si la parte de Tierra ocupada por la nave se mueve verdaderamente hacia Oriente con velocidad de 10 010 partes y la nave es empujada hacia Occidente por el viento y las velas con velocidad de 10 partes y un marino camina por la nave hacia Oriente con velocidad de 1 parte, el marino se moverá absolutamente en el espacio inmóvil hacia Oriente con la velocidad de 10 001 partes, y relativamente a la Tierra se moverá hacia Occidente con la velocidad de 9 partes.

El tiempo absoluto se distingue del relativo en Astronomía por la ecuación del tiempo vulgar. Pues desiguales son los días naturales, que son tenidos por iguales por el vulgo al medir el tiempo. Los astrónomos corrigen esta desigualdad al medir con tiempos más exactos los movimientos celestes. Es posible que no haya ningún movimiento igual con el que medir exactamente el tiempo. Todos los movimientos pueden acelerarse y retardarse, pero el flujo del tiempo absoluto no puede alterarse. La duración o permanencia de las cosas en la existencia es la misma, tanto si los movimientos son rápidos, como si son lentos, como si no los hubiese; por tanto, la duración se distingue claramente de sus medidas sensibles, a la vez que de ellas se deduce por la ecuación astronómica. La necesidad de esta ecuación para la determinación de los fenómenos se patentiza tanto por el experimento del reloj oscilatorio como por los eclipses de los satélites de Júpiter.

Del mismo modo que el orden de las partes del tiempo es inmutable, así lo es el orden de las partes del espacio. Si éstas se movieran de sus lugares, se moverían (por así decirlo) de sí mismas. Pues el tiempo y el espacio son los cuasilugares de sí mismos y de todas las cosas. Todas las cosas se sitúan en el tiempo en cuanto al orden de la sucesión y en el espacio en cuanto al orden de lugar. Es de su esencia el ser lugares y es absurdo pensar que los lugares primeros se muevan. Por tanto, estos son lugares absolutos y únicamente las traslaciones desde estos lugares son movimientos absolutos.

Mas como estas partes del espacio no pueden verse y distinguirse unas de otras por medio de nuestros sentidos, en su lugar utilizamos medidas sensibles. Por las posiciones y distancias de las cosas a un cierto cuerpo que consideramos inmóvil, definimos todos los lugares; posteriormente interpretamos todos los movimientos por respecto a los antedichos lugares, en tanto que los concebimos como pasos de los cuerpos por estos lugares. Así, usamos de los lugares y movimientos relativos en lugar de los absolutos y con toda tranquilidad en las cosas humanas: para la Filosofía, en cambio, es preciso abstraer de los sentidos. Pues es posible que en la realidad no exista ningún cuerpo que esté en total reposo, al que referir lugar y movimiento.

Se distinguen el reposo y movimiento absolutos y relativos entre sí por sus propiedades, causas y efectos. Es propiedad del reposo que los cuerpos verdaderamente quietos están en reposo entre sí. Por tanto, al ser posible que un cuerpo cualquiera en la región de las estrellas fijas, o más lejos, permanezca en reposo absoluto y no se pueda saber por las situaciones respectivas de los cuerpos entre sí en nuestras cercanías si alguno de ellos conserva su posición constante respecto al cuerpo lejano, por ende no se puede definir el reposo verdadero por las posiciones relativas de estos cuerpos.

Es propiedad del movimiento que las partes que conservan su posición dada respecto al todo participan de los movimientos de los mismos todos. Pues todas las partes de los cuerpos que giran tienden a separarse del eje del movimiento y la fuerza de los móviles que se desplazan surge de la fuerza conjunta de las partes singulares. Así que, al mover los recipientes de los cuerpos, se mueven también las cosas que reposan relativamente dentro de esos recipientes. Y por tanto, el movimiento verdadero y absoluto no puede definirse por la traslación respecto a las cercanías del cuerpo que son consideradas como en reposo. Porque los cuerpos exteriores deben, no sólo ser considerados en reposo, sino también reposar verdaderamente. Pues de lo contrario, todo lo incluido, además de participar del de traslación de las cercanías de los recipientes, participará también de los movimientos verdaderos de los recipientes, y suprimida aquella traslación, no reposará verdaderamente, sino que solamente será considerado como en reposo; pues son los recipientes respecto a los contenidos como la parte exterior del todo a la parte interior, o como la corteza al núcleo. Movida la corteza se mueve el núcleo también, como parte del todo, sin traslación de las cercanías de la corteza.

Es afín a la anterior propiedad el que, movido el lugar, se mueva también lo contenido en él: por tanto, el cuerpo que se mueve de un lugar movido, participa también del movimiento de su lugar. Por consiguiente, todos los movimientos, que surgen del movimiento de sus lugares, son partes solamente de movimientos totales y absolutos, y todo movimiento completo se compone del movimiento del cuerpo de su lugar primero, y del movimiento de este lugar del suyo, y así sucesivamente hasta que se llegue al lugar inmóvil, como en el ejemplo del navegante propuesto más arriba. De donde los movimientos completos y absolutos no pueden definirse si no es por lugares inmóviles y por eso más arriba los relacioné con los lugares inmóviles, y los relativos en cambio con los lugares móviles. Lugares inmóviles no son otra cosa que las posiciones constantes que conservan entre sí todas las cosas desde el infinito hasta el infinito y que, por tanto, siempre permanecen inmóviles y constituyen el espacio que llamo inmóvil.

Las causas, por las que los movimientos verdaderos y los relativos se distinguen mutuamente, son fuerzas impresas en los cuerpos para producir el movimiento. El movimiento verdadero ni se engendra ni se cambia, a no ser por fuerzas impresas en el mismo cuerpo movido; en cambio, el movimiento relativo puede generarse y cambiarse sin fuerzas impresas en tal cuerpo. Basta con imprimirlas solamente en los otros cuerpos respecto a los que se da la relación para que, cediendo éstos, cambie la relación dada en que consiste el reposo o movimiento relativo de aquel cuerpo. Por otra parte, el movimiento verdadero siempre se cambia por fuerzas impresas en el cuerpo movido, mientras que el movimiento relativo no se cambia necesariamente por estas fuerzas impresas. Pues si dichas fuerzas se aplican de tal modo hacia los demás cuerpos respecto a los que se da la relación que se conserve el lugar relativo, se conservará la relación en que consiste el movimiento relativo. Puede, pues, cambiarse todo el movimiento relativo mientras se conserva el verdadero, y conservarlo mientras se cambia el verdadero y absoluto; por tanto, el movimiento verdadero en absoluto puede consistir en tales relaciones.

Los efectos por los que los movimientos absolutos y los relativos se distinguen mutuamente son las fuerzas de separación del eje de los movimientos circulares. Pues en el movimiento circular meramente relativo estas fuerzas son nulas, pero en el verdadero y absoluto son mayores o menores según la cantidad de movimiento. Si se cuelga un cubo de un hilo muy largo y se gira constantemente hasta que el hilo por el torcimiento se ponga muy rígido y después se llena de agua y se deja en reposo a la vez que el agua, y entonces con un empujón súbito se hace girar continuamente en sentido contrario y, mientras se relaja el hilo, persevera durante un tiempo en tal movimiento, la superficie del agua será plana al principio, al igual que antes del movimiento del vaso, pero después, al transmitir éste su fuerza poco a poco al agua, hace que ésta también empiece a girar sensiblemente, se vaya apartando poco a poco del centro y ascienda hacia los bordes del vaso, formando una figura cóncava (como yo mismo he experimentado) y con un movimiento siempre creciente sube más y más hasta que efectuando sus revoluciones en tiempos iguales que el vaso, repose relativamente en él. Muestra este ascenso el intento de separarse del centro del movimiento, y por tal intento se manifiesta y se mide el movimiento circular verdadero y absoluto del agua, y aquí contrario totalmente al movimiento relativo. Al principio, cuando mayor era el movimiento relativo del agua en el vaso, ese movimiento no engendraba ningún intento de separación del eje; el agua no buscaba el borde subiendo por los costados del vaso, sino que permanecía plana, y por tanto su movimiento circular verdadero no había aún empezado, pero después cuando decreció el movimiento relativo del agua, su ascensión por los costados del vaso indicaba el intento de separarse del eje y este conato mostraba su movimiento circular, verdadero y siempre creciente y al final convertido en máximo cuando el agua reposaba relativamente en el vaso. Por tanto, este conato no depende de la traslación del agua respecto de los cuerpos circundantes y, por tanto, el movimiento circular verdadero no puede definirse por tales traslaciones. Único es el movimiento circular verdadero de cualquier cuerpo que gira, y responde a un conato único como un verdadero y adecuado efecto; los movimientos relativos, en cambio, por las múltiples relaciones externas, son innumerables, pero como las relaciones carecen por completo de efectos verdaderos, a no ser en tanto que participan de aquel único y verdadero movimiento. De donde, incluso en el sistema de los que quieren que nuestro cielo gire bajo el cielo de las estrellas fijas y arrastre consigo a los planetas, los planetas y cada una de las partes del cielo que reposan relativamente a sus cercanías celestes, se mueven verdaderamente. Pues cambian sus posiciones relativas (al revés de lo que ocurre con las verdaderamente en reposo) y a la vez que son arrastrados con sus cielos participan de sus movimientos y, como partes de todos que giran, intentan alejarse de sus centros.

Así pues, las cantidades relativas no son las cantidades mismas que los nombres indican, sino las mediciones sensibles de ellas (verdaderas o erróneas) de las que se sirve el vulgo en lugar de las cosas medidas. Pero si los significados de las palabras se han de definir por el uso, por los nombres de tiempo, espacio, lugar y movimiento, más propiamente hay que entender estas mediciones sensibles; y el discurso será insólito y puramente matemático si se entienden aquí las cosas medidas. Por tanto, violentan las palabras consagradas los que interpretan aquí estos vocablos refiriéndolos a las cantidades medidas. Y no menos dañan a la Matemática y a la Filosofía quienes confunden las verdaderas cantidades con sus relaciones y las medidas vulgares.

Es muy difícil conocer los movimientos verdaderos de cada cuerpo y distinguirlos de hecho de los aparentes; además, porque las partes de aquel espacio inmóvil, en que los cuerpos se mueven verdaderamente, no se captan por los sentidos. Sin embargo, no es el caso desesperado. Pues surgen argumentos, parte de los movimientos aparentes, que son diferencias de los movimientos verdaderos, parte de las fuerzas, que son causas y efectos de los movimientos verdaderos. Así, si a dos esferas, unidas entre sí por un hilo de determinada longitud, se las hace girar en torno al común centro de gravedad, aparecerá por la tensión del hilo el conato de las esferas de alejarse del eje de giro, y de ello se puede calcular la cantidad de movimiento circular. Después, si se aplican a la vez dos fuerzas iguales en las caras alternas de las esferas para aumentar o disminuir el movimiento circular, aparecerá, por el aumento o disminución de la tensión del hilo, el aumento o disminución del movimiento; y después, por fin, se podrían hallar las caras de las esferas en que deberían imprimirse las fuerzas para que el movimiento aumentase al máximo, esto es, las caras posteriores, o las que siguen en el movimiento circular. Pero, conocidas las caras que siguen y las caras opuestas que preceden, se conocerá la determinación del movimiento. De este modo se podría averiguar la cantidad y la determinación de este movimiento circular en un cierto vacío inmenso, donde nada hubiese externo y sensible con lo que se pudiesen comparar las esferas. Si ahora se establecen en dicho espacio algunos cuerpos lejanos que guarden entre sí cierta posición dada, tales como las estrellas fijas en nuestro firmamento, entonces no es posible saber a partir de la traslación relativa de las esferas entre los cuerpos si es a éstos o a aquéllos a quienes hay que atribuir el movimiento. Pero si se atiende al hilo y se encuentra que la tensión del mismo es la misma que la requerida por el movimiento de las esferas, será lícito concluir que el movimiento es de las esferas y entonces también deducir la determinación de este movimiento de la traslación de las esferas entre los cuerpos. A inferir, sin embargo, los movimientos verdaderos de sus causas, de sus efectos y diferencias con los aparentes y, al revés, sus causas y efectos a partir de los movimientos ya verdaderos, ya aparentes, se enseñará más extensamente en lo que sigue. Pues para este fin compuse el tratado siguiente.

AXIOMAS O LEYES DEL MOVIMIENTO[9]

Ley Primera

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

Los proyectiles perseveran en sus movimientos a no ser en cuanto son retardados por la resistencia del aire y son empujados hacia abajo por la gravedad. Una rueda, cuyas partes en cohesión continuamente se retraen de los movimientos rectilíneos, no cesa de dar vueltas sino en tanto en que el aire la frena. Los cuerpos más grandes de lo$ cometas y de los planetas conservan por más tiempo sus movimientos, tanto de avance como de rotación, realizados en espacios menos resistentes.

Ley II

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

Si una fuerza cualquiera produce un movimiento dado, doblada producirá el doble y triplicada el triple, tanto si se aplica de una sola vez como si se aplica gradual y sucesivamente. Este movimiento (dado que se determina siempre en la misma dirección que la fuerza motriz) si el cuerpo se movía antes, o bien se añade sumándose a él, o se resta si es contrario, o se añade oblicuamente, si es oblicuo, y se compone con él según ambas determinaciones.

Ley III

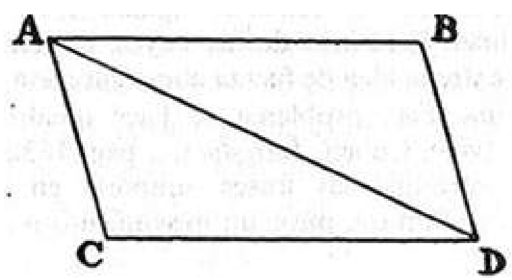
Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

El que empuja o atrae a otro es empujado o atraído por el otro en la misma medida. Si alguien oprime una piedra con el dedo, también su dedo es oprimido por la piedra. Si un caballo arrastra una piedra atada con una soga, el caballo es retroarrastrado (por así decirlo) igualmente, pues la soga estirada en ambas direcciones y con el propio impulso de contraerse tirará del caballo hacia la piedra y de la piedra hacia el caballo y tanto se opondrá al progreso de uno cuanto ayude al avance del otro. Si un cuerpo cualquiera golpeando sobre otro cuerpo cambiara el movimiento de éste de algún modo con su propia fuerza, él mismo a la vez sufrirá el mismo cambio en su propio movimiento y en sentido contrario por la fuerza del otro cuerpo (por la igualdad de la presión mutua). A tales acciones son iguales los cambios de movimientos, no de velocidades, y siempre que se trate de cuerpos no fijados por otra parte. Igualmente los cambios de velocidad en sentido contrario, puesto que los movimientos cambian igualmente, son inversamente proporcionales a los cuerpos. Se cumple esta ley también para las atracciones como se comprobará en un escolio próximo.

Corolario Primero

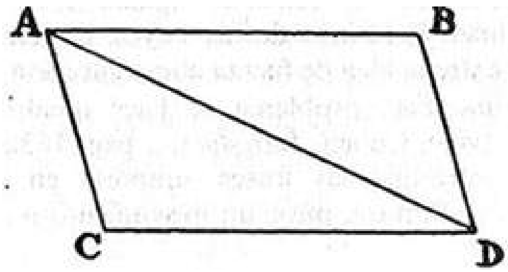
Un cuerpo recorre la diagonal de un paralelogramo bajo dos fuerzas conjuntas en el mismo tiempo en que los dos lados bajo las dos acciones por separado.

Si un cuerpo, en un tiempo dado, con la sola fuerza M impresa en el punto A es transportado con movimiento uniforme de A a B y con la sola fuerza N impresa en el mismo punto es transportado de A a C, complétese el paralelogramo ABDC y con ambas fuerzas el cuerpo será transportado en el mismo tiempo en diagonal de A a D. Porque, puesto que la fuerza actúa según la línea AC paralela a BD, esta fuerza, por la Ley II, en nada modificará la velocidad de acercamiento a la línea BD generada por otra fuerza. Por tanto, un cuerpo llegará en el mismo tiempo hasta la línea BD, tanto si se imprime la fuerza N como si no se imprime; por tanto, al cabo de tal tiempo se hallará al cuerpo en algún lugar de la línea BD. Por la misma razón al final de dicho tiempo se hallará en algún punto en la línea CD y, por tanto, es necesario encontrarla en la unión D de ambas líneas al cabo del mismo tiempo. Seguirá, pues un movimiento rectilíneo de A a D por la Ley I[10].

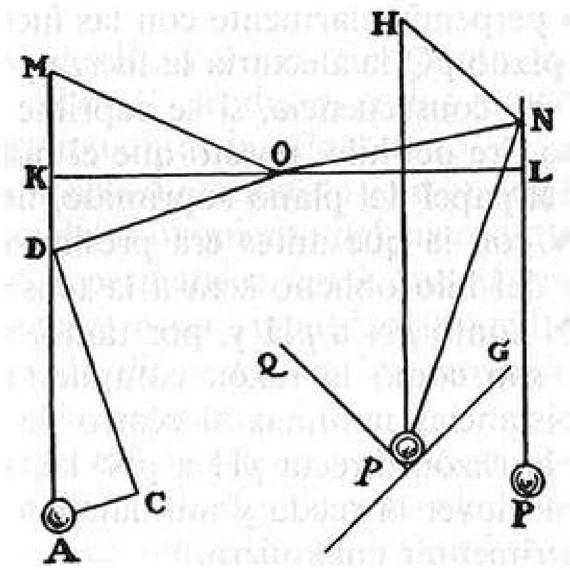


COROLARIO II

Así se evidencia la composición de la fuerza directa AD de las fuerzas oblicuas AB y BD, y a la vez la resolución de cualquier fuerza directa como AD en fuerzas oblicuas como AB y BD. Tales composición y resolución se confirman ampliamente por la mecánica.



Supongamos los radios desiguales OM y ON que parten del centro O de una rueda y sostienen los pesos A y P mediante los hilos MA y NP y se trata de hallar las fuerzas de los pesos para mover la rueda: Trácese la recta KOL por el centro O, que corte perpendicularmente los hilos en K y en L. Trácese un círculo con centro en O y con la distancia mayor OL de las de los intervalos OK y OL, círculo que cortará al hilo MA en D; y que sean AC paralela a la recta trazada OD, y DC perpendicular. Puesto que nada importa si los extremos de los hilos están fijos o no al plano de la rueda en K, L y D, los pesos tendrán el mismo valor si se suspenden de los puntos K y L o D y L. Exprésese ahora toda la fuerza del peso A por la longitud de toda la línea AD y ésta se resolverá en las fuerzas AC y CD de las cuales AC, atrayendo el radio OD directamente hacia el centro, en nada influye para mover la rueda; mientras la otra fuerza DC, atrayendo el radio DO perpendicularmente, equivale a atraer perpendicularmente al radio OL igual al propio OD; esto es, igual al peso P, dado que dicho peso es al peso A como la fuerza DC a la fuerza DA, es decir (por la semejanza de los triángulos ADC, DOK) como OK a OD o a OL. Por tanto, los pesos A y P, que son inversamente como los radios OK y OL, puesto uno a continuación de otro, tendrán el mismo valor y permanecerán en equilibrio lo que es una propiedad conocida en la balanza, en la palanca y en la polea. Si el peso de uno de los dos es mayor que el del otro, según esta razón su fuerza para mover la rueda será tanto mayor.



Puesto que si el peso *p* igual a P se suspende parcialmente de un hilo N*p* y de otra parte se apoya en el plano oblicuo *p*G y se trazan *p*H y NH, la primera perpendicular a la horizontal y la segunda perpendicular al plano *p*G, la fuerza del peso *p* hacia abajo puede representarse por la línea *p*H y puede resolverse en las fuerzas *p*N, HN. Si un plano *p*Q fuese perpendicular al hilo *p*N cortando al plano *p*G según una línea paralela al horizonte y el peso *p* solamente reposara sobre estos planos *p*Q, *p*G presionará a estos planos perpendicularmente con las fuerzas *p*N, HN; de tal modo que al plano *p*Q le afectaría la fuerza *p*N y al plano *p*G la fuerza HN. Y en consecuencia, si se suprime el plano *p*Q de modo que el peso tire del hilo, puesto que el hilo sosteniendo al peso hace ahora el papel del plano suprimido, tirará de él con la misma fuerza *p*N con la que antes era presionado el plano. De donde la tensión del hilo oblicuo será a la tensión del otro hilo perpendicular PN como *p*N a *p*H y, por tanto, si las razones de los pesos *p* y A son como la razón compuesta de las razones inversas de las distancias mínimas al centro de la rueda de sus hilos *p*N, AM y la razón directa *p*H a *p*N, los pesos tendrán el mismo valor para mover la rueda y mutuamente se equilibrarán, como puede experimentar cualquiera.

El peso *p*, por otra parte, al caer sobre dichos dos planos oblicuos tiene el carácter de cuña entre las dos caras internas de un cuerpo hendido y de este modo se ponen de manifiesto las fuerzas de la cuña y del mazo: Así ocurre que la fuerza con la que el peso *p* presiona al plano *p*Q es a la fuerza con que él mismo es empujado contra los planos según la línea *p*H por la gravedad o por el golpe del mazo, como *p*N a *p*H, y a la fuerza con que presiona al otro plano *p*G, como *p*N a NH. Incluso se deduce de aquí, por pura división semejante de fuerzas, la fuerza del tornillo sin fin, salvo que la cuña es empujada por una palanca. La utilización de este corolario es muy clara y pone de manifiesto su verdad, al depender de lo dicho toda la mecánica demostrada por los autores de diversos modos. Fácilmente también se derivan de lo dicho las fuerzas de las máquinas que suelen hacerse con ruedas, tomos, poleas, palancas, correas y pesas que suben directa u oblicuamente u otras energías mecánicas, tales como las fuerzas de los tendones para mover los esqueletos de los animales.

Corolario III

La cantidad de movimiento que se obtiene tomando la suma de los movimientos hechos en una dirección y la diferencia de los realizados en sentido contrario, no cambia por la acción de los cuerpos entre sí.

Puesto que una acción y su reacción contraria son iguales por la Ley III y, por la Ley II, producen en los movimientos cambios iguales en dirección contraria. Por tanto, si los movimientos ocurren hacia la misma dirección, lo que se añade al cuerpo que se separa se detrae del movimiento del cuerpo que le sigue, de tal modo que la suma permanece igual que al principio. Y si los cuerpos van al encuentro será igual la cantidad detraída de cada móvil y, por ende, la diferencia de los movimientos en sentido opuesto permanecerá constante.

Así, si un cuerpo esférico A es el triple mayor que un cuerpo esférico B, y tiene dos unidades de velocidad, y B le sigue en la misma recta con diez unidades de velocidad y, por tanto, el movimiento total de A será con respecto a B como seis a diez: supongamos que tienen seis y diez unidades de movimiento, la suma total será de dieciséis unidades. Por tanto, en el encuentro de ambos si el cuerpo A obtiene tres o cuatro o cinco unidades, el cuerpo B pierde otras tantas y saldrá el cuerpo A después del choque con nueve, diez u once unidades y el cuerpo B con siete, seis o cinco, permaneciendo siempre la suma total de dieciséis como al principio. Si el cuerpo A obtuviese nueve o diez u once o doce unidades y, por ende, después del choque sale con quince o dieciséis o diecisiete o dieciocho, el cuerpo B al perder tantas unidades como aumenta A, o bien sale con una unidad al haber perdido otras nueve, o bien reposa al haber perdido sus diez unidades de movimiento, o bien regresa al haber perdido su movimiento (por así decirlo) con una parte más, o bien regresa con dos unidades por haber perdido doce unidades de movimiento hacia adelante. Así las sumas de los movimientos concurrentes 15 + 1 ó 16 + 0 y las diferencias de los contrarios 17 - 1 y 18 - 2 siempre darán dieciséis unidades de movimiento como antes del choque y la reflexión. Conocidos, por tanto, los movimientos con que salen los cuerpos después del choque se halla la velocidad de cualquiera de ellos suponiendo que es a la velocidad anterior al choque como el movimiento posterior es al anterior. Como en el ejemplo anterior, donde el movimiento del cuerpo A era de seis unidades antes del choque y de dieciocho después y la velocidad de dos unidades antes del choque: se hallará que su velocidad será de seis después del choque, diciendo que el movimiento de seis unidades es al movimiento de dieciocho unidades después del choque como la velocidad de dos unidades antes del choque es seis unidades después del choque.

Porque si se trata de cuerpos no esféricos o que se mueven según rectas distintas que se inciden oblicuamente y se pregunta por sus movimientos después del choque, hay que conocer la situación del plano en el que concurren los cuerpos en el punto de reunión; después (por el Corolario II) hay que distinguir en dos los movimientos de cada cuerpo, uno perpendicular a ese plano y otro paralelo al mismo; los movimientos paralelos, dado que los cuerpos actúan entre sí mutuamente según una línea perpendicular a dicho plano, han de conservarse idénticos antes y después de la reflexión. Y a los movimientos perpendiculares hay que atribuirles cambios iguales en sentido contrario, de tal modo que la suma de los movimientos concurrentes y la diferencia de los contrarios permanezca igual que antes. De tales choques suelen originarse también movimientos circulares de los cuerpos en torno a su centro, pero no consideraré en lo que sigue estos casos, ya que sería demasiado prolijo demostrar todo lo relativo a estas cuestiones[11].

COROLARIO IV

El centro común de gravedad de dos o más cuerpos no cambia su estado de movimiento o reposo por las acciones de los cuerpos entre sí; por tanto, el centro de gravedad común de los cuerpos en interacción (excluidas las acciones o impedimentos externos) o reposa o se mueve uniformemente en línea recta.

Pues si los puntos se mueven con movimiento uniforme en línea recta, y la distancia entre ellos se divide según una razón dada, el punto de división o reposa o se mueve uniformemente en línea recta. Después en el Lema XXIII y en su Corolario se demostrará esto, si el movimiento de los puntos ocurre en el mismo plano; del mismo modo se puede demostrar si tales movimientos no ocurren en el mismo plano. Luego si cualesquiera cuerpos se mueven uniformemente en líneas rectas, el centro común de gravedad de dos cualesquiera o está en reposo o se mueve en línea recta con movimiento uniforme; ello por el hecho de que la línea que une los centros de los cuerpos que se mueven uniformemente en línea recta es dividida según una determinada razón desde el centro común. De modo semejante el centro común de estos dos y un tercer cuerpo cualquiera o reposa o se mueve uniformemente en línea recta y ello porque desde dicho centro se divide la distancia entre el centro común de los dos cuerpos y el centro del tercero, según una razón dada. Del mismo modo el centro común de estos tres y el de un cuarto cualquiera o reposa o se mueve uniformemente en línea recta, puesto que desde dicho centro se divide la distancia entre el centro común de los tres y el centro del cuarto según una razón dada y así hasta el infinito. Por tanto, en un sistema de cuerpos que ejercen acciones mutuamente entre sí y carecen por completo de otros influjos exteriores y, por tanto, se mueve cada uno uniformemente en una línea recta el centro común de gravedad de todos o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta.

Además en un sistema de dos cuerpos que actúan entre sí mutuamente, siendo las distancias de los centros de cada uno respecto al centro común de gravedad inversas a los cuerpos, los movimientos relativos de los propios cuerpos tanto al acercarse a dicho centro como al separarse serán iguales entre sí.

Por tanto, tal centro ni se adelanta ni se atrasa, ni sufre cambio alguno en su estado de movimiento o reposo por causa de cambios iguales de movimiento realizados en sentidos contrarios, ni tampoco por interacciones de esos cuerpos. Pero en un sistema de muchos cuerpos, dado que el centro común de gravedad de dos cuerpos cualesquiera en mutua interacción no se ve afectado en absoluto en su estado por dicha acción, y el centro común de gravedad de los demás, con los que dicha acción no tiene relación alguna, nada sufre por ella, en cambio la distancia de estos dos centros se divide desde el centro común de todos los cuerpos en partes inversamente proporcionales a las sumas totales de los cuerpos de los que son centros; y en consecuencia, al conservar aquellos dos centros su estado de movimiento o reposo, el centro común de todos también conserva el suyo: es evidente que el centro común de todos nunca cambia su estado de movimiento o reposo por la acción de dos cuerpos entre sí. En semejante sistema, pues, todas las acciones de cuerpos entre sí, o son acciones entre dos o son compuestas de acciones entre dos cuerpos y, por tanto, nunca producen cambio en el estado de movimiento o reposo del centro común de todos. Por tanto, como aquel centro, cuando los cuerpos no se influyen mutuamente, o reposa o discurre uniforme y rectilíneamente, persevera, pues, idéntico, sin que lo impidan las acciones de los cuerpos entre sí, o siempre en reposo o siempre en movimiento uniforme y rectilíneo, a no ser que sea apartado de dicho estado por fuerzas impresas extrínsecamente al sistema. Así pues, la ley de un sistema de muchos cuerpos es la misma que la de un solo cuerpo en lo que se refiere a la permanencia en estado de movimiento o reposo, pues el movimiento progresivo, tanto de un cuerpo aislado como de un sistema de cuerpos, debe apreciarse siempre por el movimiento del centro de gravedad.

Corolario v

Los movimientos entre sí de los cuerpos incluidos en un determinado espacio son los mismos, ya esté dicho espacio en reposo, ya se mueva recta y uniformemente sin movimiento circular.

Pues las diferencias de los movimientos tendentes a un lado y las sumas de las tendentes al lado contrario, son las mismas desde el principio en ambos casos (por hipótesis) y de tales sumas y diferencias proceden los choques y fuerzas con los que los cuerpos mutuamente se afectan. Por tanto, en virtud de la Ley II, serán iguales los efectos de los choques en ambos casos; y por tanto los movimientos de los cuerpos permanecerán iguales entre sí en un caso a los movimientos entre sí en el otro. Esto se comprueba con un experimento clarísimo: todos los movimientos se comportan de modo igual entre sí en una nave tanto si se halla en reposo como si se halla en movimiento uniforme y rectilíneo.

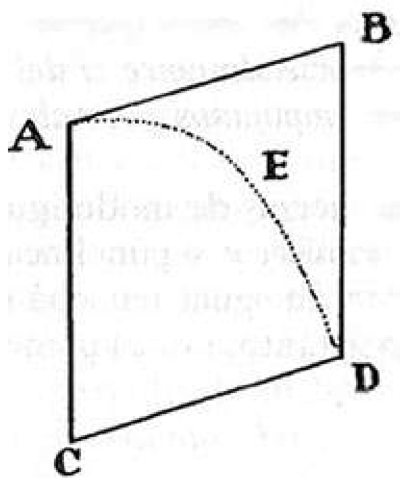
COROLARIO VI

Si los cuerpos se moviesen entre sí de cualquier modo y fuesen empujados por fuerzas acelerativas iguales según líneas paralelas, todos ellos se seguirán moviendo entre sí del mismo modo que si no estuviesen empujados por tales fuerzas.

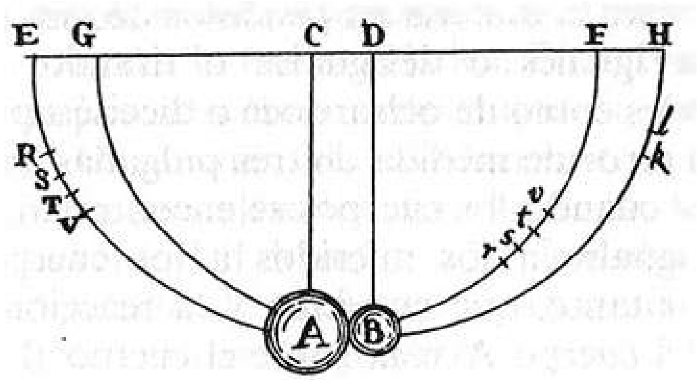
Pues al actuar tales fuerzas de modo igual (según las magnitudes de los cuerpos a mover) y según líneas paralelas, todos los dichos cuerpos se moverán igual (en cuanto a la velocidad) en virtud de la Ley II y, por tanto, nunca cambiarán sus posiciones y movimientos entre sí.

ESCOLIO

Hasta ahora he ofrecido los principios aceptados por los matemáticos y confirmados por muy amplia experiencia. Por las dos leyes primeras y los dos Corolarios primeros, *Galileo* descubrió que la caída de los graves ocurre según la razón cuadrada del tiempo y que el movimiento de los proyectiles ocurre en parábola, de acuerdo con la experiencia, a no ser en la medida en que tales movimientos se retardan un poco por la resistencia del aire. Para un cuerpo que cae la gravedad uniforme, actuando de modo igual en cada unidad de tiempo sobre partículas iguales, imprime fuerzas iguales en dicho cuerpo y genera velocidades iguales. Y en la totalidad del tiempo imprime toda la fuerza y genera la velocidad total proporcional al tiempo. Y los espacios recorridos en tiempos proporcionales son como las velocidades y los tiempos conjuntamente; esto es como la razón cuadrada de los tiempos. Y en un cuerpo lanzado hacia arriba la gravedad uniforme imprime fuerzas y disminuye la velocidad en proporción al tiempo; y los tiempos de ascensión hasta el punto más alto son como son las velocidades a disminuir, y la altura máxima es como los tiempos y las velocidades conjuntas o en razón cuadrada de las velocidades. Y el movimiento de un cuerpo proyectado según una línea recta cualquiera se compone del movimiento procedente de la proyección con el procedente de la gravedad. Así si un cuerpo A con el solo movimiento de proyección pudiese en un cierto tiempo recorrer la recta AB y con el movimiento de caída en el mismo tiempo pudiese recorrer la línea de caída AC; complétese el paralelogramo ABCD y dicho cuerpo al final del tiempo dado con el movimiento compuesto se hallará en el punto D; y la línea curva AED que describe dicho cuerpo será una parábola a la que la recta AB es tangente en A y cuya ordenada BD es como AB cuadrado[12]. De dichas leyes y corolarios dependen las demostraciones acerca de los péndulos oscilantes, de acuerdo con la experiencia diaria de los relojes. A partir de estos principios y de la tercera Ley hallaron *sir Christopher Wren*, *John Wallis* S. T. D. y el caballero *Christian Huygens*, príncipes de los geómetras de la época última, las reglas del choque y reflexión mutua de dos cuerpos, y casi a la vez la comunicaron a la *Sociedad Real* colaborando entre ellos plenamente (en cuanto a estas leyes); primero, en verdad, *Wallis* y después *Wren* y *Huygens* ofrecieron su hallazgo. Pero además esta verdad fue corroborada por *Wren* ante la *Royal Society* por medio del experimento de los péndulos; también el preclaro *Mariotte* se dignó exponer enseguida todo esto en un libro completo[13]. Pero es cierto que para que este experimento concuerde con las teorías de modo aceptable, hay que tener en cuenta tanto la resistencia del aire cómo la fuerza elástica de los cuerpos concurrentes. Suspendamos dos cuerpos esféricos AB de hilos paralelos iguales, AC, BD de los centros C, D. Desde dichos centros y con tales intervalos tracemos los semicírculos EAF, GBH bisecados por los radios CA, CB. Empujemos el cuerpo A hasta el punto R del arco EAF y (apartando el cuerpo B) soltémosle desde allí y tras una oscilación regresará al punto V. RV es el retardo debido a la resistencia del aire. Sea ST la cuarta parte puesta en medio de este RV, de tal modo que RS sea igual a TV y RS sea a ST como 3 a 2. Por otra parte dicho ST representará muy aproximadamente el retardo en el descenso desde S a A. Pongamos B en su lugar. Dejemos caer el cuerpo A desde el punto S y su velocidad en el punto de reflexión A será sin gran error muy similar a la que tendría si cayese en vacío desde el punto T. Representemos pues dicha velocidad por la cuerda del arco TA, puesto que es de sobra conocido para los geómetras el enunciado de que la velocidad de un péndulo en el punto más bajo es como la cuerda del arco que describe al caer. Después de la reflexión el cuerpo A alcanzará el punto *s*, y el cuerpo B el punto *k*. Apartemos el cuerpo B y hallemos el punto *v*. Si el cuerpo A se lanza desde dicho punto y tras una oscilación vuelve al punto *r*, sea *st* la cuarta parte del propio *rv*, situada en medio, de tal modo que *rs* y *tv* sean iguales y esté representada por la cuerda del arco *t*A la velocidad alcanzada por el cuerpo A en el punto A inmediatamente después de la reflexión. Pues *t* será el punto verdadero y correcto al que debería llegar el cuerpo A, suprimida la resistencia del aire. Del mismo modo hay que corregir el punto *k*, hasta el que llega el cuerpo B, y hallar el punto *l*, hasta el cual debió ascender dicho cuerpo en el vacío. De este modo podría experimentarse todo como si estuviésemos en un medio vacío. Finalmente habría que multiplicar (por así decirlo) al cuerpo A por la cuerda del arco TA que representa su velocidad para obtener su movimiento en el punto A inmediatamente antes de la reflexión; después por la cuerda del arco *t*A para obtener su movimiento en el punto A inmediatamente después de la reflexión. Y del mismo modo el cuerpo B habría de ser multiplicado por la cuerda del arco BI para obtener su movimiento inmediatamente después de la reflexión. Y de modo semejante cuando dos cuerpos son lanzados a la vez desde lugares diversos, hay que hallar los movimientos de cada uno, tanto antes como después de la reflexión, y sólo entonces se comparan entre sí los movimientos y se deducen los efectos de la reflexión. Con experimentos sobre la materia en péndulos de diez pies, lo mismo que con pesos iguales o desiguales o tirando cuerpos desde distancias grandes como de ocho, doce o dieciséis pies, siempre he encontrado sin error de medida de tres pulgadas que los cambios de movimiento, cuando los cuerpos se encontraban directamente, eran siempre iguales a los inferidos a los cuerpos en sentido contrario y, por tanto, que la acción y la reacción siempre eran iguales. Así, si el cuerpo A caía sobre el cuerpo B en reposo con nueve unidades de movimiento y, perdidas siete, partía después del choque con dos, el cuerpo B retrocedía con estas otras siete. Si estos cuerpos iban al encuentro, A con doce unidades y B con seis.



A retornaba con dos, B regresaba con ocho, efectuada la resta de catorce entre uno y otro. Quítense doce unidades del movimiento del cuerpo A y no quedará nada; quítense otras dos más y se obtendrá un movimiento de dos unidades en la otra dirección; y del mismo modo del movimiento de B que tiene seis unidades quítense catorce y se obtendrán ocho en sentido contrario. Y cuando los cuerpos iban en la misma dirección, A más rápido con catorce unidades de velocidad, B más lento con cinco, después del choque salía A con cinco y B con catorce al haberse transferido nueve unidades de A a B. Y lo mismo en el resto. Jamás se alteraba en la reunión o colisión de cuerpos la cantidad de movimientos concurrentes y de las diferencias de los movimientos contrarios pues el error de una pulgada o dos en las medidas lo atribuía a la dificultad de llevar a cabo cada una de modo suficientemente preciso. Era difícil tanto soltar a la vez los péndulos de tal modo que los cuerpos se encontraran en los puntos más bajos AB, como registrar los puntos *s*, *k* a que ascendían los cuerpos después del encuentro. Y por otra parte, los propios cuerpos de los péndulos con densidades desiguales en diversos puntos y con textura irregular por otras causas, llevaba a error.

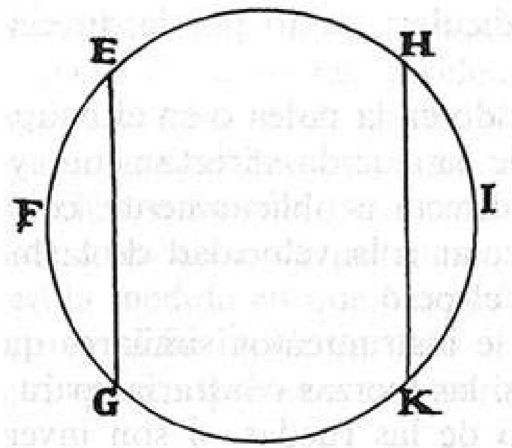


Pero no sea que alguien objete que la regla para cuya prueba se ha aducido este experimento presupone que los cuerpos son absolutamente duros o por lo menos perfectamente elásticos, casos que no se hallan en lo más mínimo entre las cosas naturales; añado que los experimentos descritos acontecen tanto en cuerpos blandos como duros, sin depender en lo más mínimo del grado de dureza. Pues si dicha regla hubiese de ensayarse en cuerpos no completamente duros, la reflexión deberá disminuir sólo en cierta cantidad proporcional a la fuerza elástica. En la teoría de *Wren* y *Huygens* los cuerpos absolutamente duros se reflejan con la misma velocidad del choque. Mas ciertamente se puede afirmar esto de los perfectamente elásticos. En el caso de los imperfectamente elásticos la velocidad de retorno ha de deducirse junto con la fuerza elástica; por cuanto tal fuerza (salvo cuando las partes se doblan con el choque, o se expanden como lo hacen bajo la acción de un martillo) es cierta y determinada (según creo) y hará que los cuerpos se separen con velocidad relativa que estará en una razón dada con la velocidad relativa de choque. Esto lo ensayé con pelotas de lana bien prensadas. Primero dejando caer el péndulo y midiendo la reflexión hallé la fuerza elástica; después mediante esta fuerza calculé las reflexiones en otros ejemplos de choque y los experimentos concordaban. Retrocedían siempre las pelotas con una velocidad relativa tal que se relacionaba con la velocidad relativa de choque, aproximadamente como 5 a 9.

Las de acero retrocedían casi con la misma velocidad, las de madera con un poco menos, mientras que en las de vidrio la proporción era casi 15 a 16. Y así de este modo se ha comprobado la tercera Ley, en cuanto a las acciones y reacciones, por medio de una teoría que se adecúa plenamente con los experimentos.

En las atracciones muestro esto brevemente como sigue: Imaginemos dos cuerpos cualesquiera A, B que se atraen mutuamente; imaginemos un obstáculo cualquiera interpuesto entre ellos que impida su choque. Si uno de los dos cuerpos A es atraído hacia B más que B hacia A, el obstáculo será empujado más por la presión del cuerpo A que por la presión del cuerpo B y, en consecuencia, no permanecerá en equilibrio. Prevalecerá la presión más fuerte y hará que el sistema de los dos cuerpos y el obstáculo se mueva hacia B en línea recta y, con un movimiento continuamente acelerado, en espacios libres iría hasta el infinito. Lo cual es absurdo y contrario a la primera Ley, pues por la primera Ley el sistema deberá permanecer en su estado de reposo o de movimiento uniforme y rectilíneo y, por tanto, ambos cuerpos empujarán igualmente al obstáculo y, por tanto, se atraerán mutuamente con igualdad. Ensayé esto con hierro e imán. Si se colocan éstos aparte en vasijas adecuadas y contiguas y flotan juntas en un baño de agua, ninguno de ellos impulsará al otro sino que mutuamente con iguales atracciones cada uno sostendrá los impulsos del otro y finalmente puestos en equilibrio reposarán.

Asimismo la gravedad entre la Tierra y sus partes es mutua. Divídase la Tierra FI con un plano cualquiera EG en dos partes EGF y EGI: Los pesos de estas dos partes serán mutuamente iguales. Pues si con otro plano HK, paralelo al anterior EG, se divide la parte mayor EGI en dos partes EGKH y HKI de las cuales AKI es igual a la primeramente separada EFG, es evidente que la parte intermedia EGKH por su peso no se inclinará a ninguna de las dos partes, sino que, por así decirlo, quedará suspendida y en equilibrio entre ambas y reposará. Pero la parte extrema HKI con todo su peso caerá sobre la parte media y la empujará hacia el otro extremo EGF y, por tanto, la fuerza con la que EGI suma de las dos partes HKI y EGKH, tiende hacia la tercera zona EGF, es igual al peso de la parte HKI, esto es al peso de la parte tercera EGF. Y por tanto los pesos de las dos partes EGI, EGF, son iguales entre sí como pretendí demostrar. Y a no ser que dichos pesos fuesen iguales toda la Tierra flotando en el éter libre cedería al mayor peso y huyendo de él se alejaría perdiéndose en el infinito[14].



Al igual que son equivalentes en los choques y reflexiones los cuerpos cuyas velocidades son inversamente como las fuerzas ínsitas, del mismo modo son equivalentes y se sostienen mutuamente con empujes contrapuestos en el uso de instrumentos mecánicos aquellos agentes cuyas velocidades calculadas según la determinación de las fuerzas son inversamente como las fuerzas. Así los pesos son equivalentes al mover los brazos de la balanza, los cuales cuando se mueve la balanza son inversamente como sus velocidades hacia arriba o hacia abajo; esto es, los pesos, si suben y bajan en línea recta, son equivalentes y son inversamente como las distancias desde los puntos de los que se suspenden hasta el eje de la balanza; pero si suben o bajan oblicuamente impedidos por planos inclinados u otros obstáculos interpuestos, entonces son inversamente como los ascensos y descensos realizados de acuerdo con la perpendicular; y esto por la dirección de la gravedad hacia abajo.

Del mismo modo en la polea o en el polipasto la fuerza de la mano que tira de la cuerda directamente y que sea al peso, ascendiendo éste directa u oblicuamente, como la velocidad del ascenso perpendicular a la velocidad de la mano que tira de la cuerda, sostendrá el peso.

En los relojes e instrumentos similares que estén hechos de ruedas conectadas, las fuerzas contrarias para promover o impedir el movimiento de las ruedas, si son inversamente como las velocidades de las partes de las ruedas en que actúan, se sostendrán mutuamente. La fuerza de un torno para apretar un cuerpo es a la fuerza de la mano que maneja la manivela como la velocidad circular de la manivela en el lugar donde se aplica la mano a la velocidad de avance del torno hacia el cuerpo oprimido. Las fuerzas con las que una cuña obliga a las dos partes de un madero fijo son a la fuerza del mazo en la cuña como el avance de la cuña según la dirección de la fuerza impresa en ella por el mazo es a la velocidad con que las partes del madero ceden a la cuña según líneas perpendiculares a las caras de la cuña. E igual es la explicación de todas las máquinas.

La eficacia y utilidad de éstas consiste únicamente en que disminuyendo la velocidad aumentamos la fuerza y viceversa; de donde se resuelve para todo tipo de máquinas apropiadas el problema *de mover un determinado peso con una determinada fuerza* o de superar con una fuerza dada otra resistencia también dada. Pues si se hicieran las máquinas de tal modo que las velocidades del agente y del resistente fuesen inversamente como las fuerzas, el agente sostendrá la resistencia; y la vencerá con una mayor disparidad de velocidades. Hasta el punto de que si la disparidad de velocidades es tan grande que quede vencida toda resistencia, tanto la procedente de la contigüidad o del rozamiento de los cuerpos como de la cohesión de los cuerpos continuos o que han de ser separados o de los pesos que han de ser elevados, superada toda esa resistencia, la fuerza sobrante producirá una aceleración del movimiento proporcional a ella misma, parte en la máquina parte en el cuerpo resistente. Por lo demás no es el intento presente tratar de mecánica. Hasta aquí solamente pretendí mostrar en qué medida es evidente y cuán cierta es la tercera Ley del movimiento. Pues si se considera la acción de un agente como el producto de su fuerza y velocidad, y, de modo semejante, la reacción del resistente, como el producto de las velocidades de sus partes singulares y de las fuerzas de resistencia procedentes de su fricción, cohesión, peso y aceleración, acción y reacción en el uso de toda clase de instrumentos siempre serán iguales entre sí. Y, en la medida en que la acción se propaga por medio del instrumento y al fin incide en todo el cuerpo resistente, su determinación última siempre será contraria a la determinación de la reacción.

Libro primero
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

Sección primera
DEL MÉTODO DE LAS RAZONES PRIMERAS Y ÚLTIMAS POR CUYO MEDIO SE DEMUESTRA LO QUE SIGUE

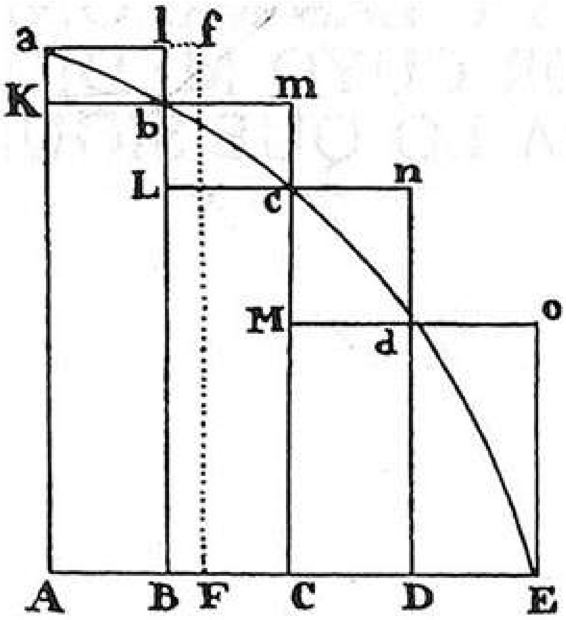
Lema Primero

Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un cierto tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales.

Si lo niegas, sean al final desiguales y sea su diferencia final D. Luego no pueden acercarse a la igualdad más que hasta una diferencia dada D. Contra la hipótesis.

Lema II

Si en una figura AacE comprendida entre las rectas Aa, AE, y la curva acE se inscriben varios paralelogramos Ab, Bc, Cd, etc. construidos sobre bases iguales AB, BC, CD, etc. y con lados Bb, Cc, Dd paralelos al lado Aa de la figura; y se completan los paralelogramos aKbl, bLcm, cMdn, etc., si entonces se disminuye la anchura de estos paralelogramos y se aumenta infinitamente el número de ellos: digo que las razones últimas que se dan entre la figura inscrita AKbLcMdD, la circunscrita AalbmcndoE y la curvilínea AabcdE son razones de igualdad.

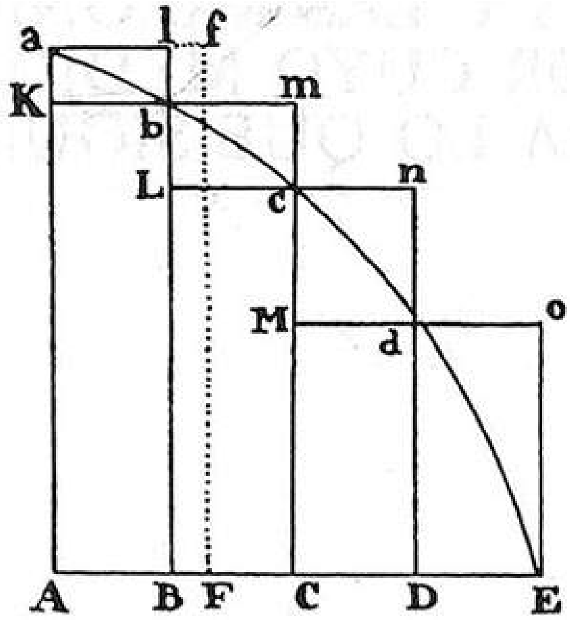


Pues la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas es la suma de los paralelogramos K*l*, L*m*, M*n*, D*o*, esto es (debido a la igualdad de las bases de todos ellos) al rectángulo construido sobre la base de uno de ellos K*b* y la suma de las alturas A*a*, esto es, el rectángulo AB*la*. Pero este rectángulo, dado que su anchura AB disminuye *in infinitum*, deviene menor que uno dado cualquiera. Luego (por el Lema I) la figura inscrita y la circunscrita, y mucho más la curvilínea intermedia, al final se hacen iguales. Q. E. D.

Lema III

Las mismas razones últimas son también razones de igualdad cuando las anchuras AB, BC, CD, etc., de los paralelogramos son desiguales y todas disminuyen in infinitum.

Sea AF igual a la anchura máxima, y complétese el paralelogramo FA*af*. Este será mayor que la diferencia de la figura inscrita y de la figura circunscrita; pero al disminuir su anchura AF infinitamente se hará menor que un rectángulo cualquiera dado. Q. E. D.



Corolario 1. De aquí que la suma última de paralelogramos evanescentes coincide en todo punto con la figura curvilínea.

Corolario 2. Y mucho más la figura rectilínea, comprendida por las cuerdas de los arcos evanescentes *ab, bc, cd,* etc., coincidirá al fin con la figura curvilínea.

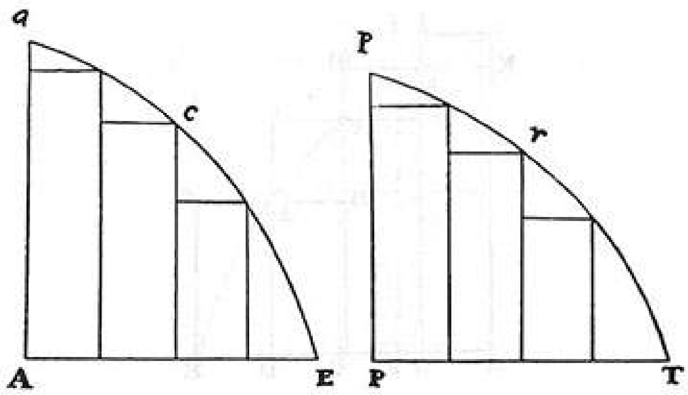
Corolario 3. Lo mismo que la figura rectilínea circunscrita comprendida por tangentes de los mismos arcos.

Corolario 4. Por ello, estas figuras últimas (en cuanto a los perímetros *ac*E) no son rectilíneas, sino límites curvilíneos de figuras rectilíneas.

Lema iv

Si en dos figuras AacE, PprT se hallan inscritas (como antes) dos series de paralelogramos y el número es idéntico en ambas y al ir disminuyendo las anchuras in infinitum las razones últimas de los paralelogramos en una figura respecto a los paralelogramos de la otra, uno a uno, permanecen iguales; digo que las dos figuras AacE y PprT están mutuamente en esa misma razón.

Pues tal como los paralelogramos son uno a uno, así (por composición) es la suma de todos a la suma de todos, y así será la figura a la figura; pues están (por el Lema iii) la primera figura a la suma primera, y la figura posterior a la suma posterior, en razón de igualdad. Q. E. D.



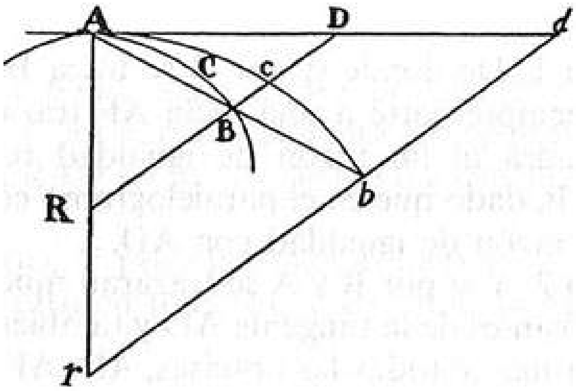
COROLARIO. De aquí que si dos cantidades de cualquier clase se dividen de algún modo en el mismo número de partes; y tales partes, al ir aumentando su número y disminuyendo su tamaño *in infinitum*, alcanzan una razón dada entre sí, la primera con la primera, la segunda con la segunda, y las demás por su orden con las otras, estarán todas entre sí en aquella razón dada. Pues si en las figuras de este Lema se toman los paralelogramos entre sí como partes, las sumas de las partes siempre serán como la suma de los paralelogramos; y por esto al ir aumentando el número de paralelogramos y de partes y disminuyendo el tamaño de los mismos *in infinitum*, estarán en razón última de paralelogramo a paralelogramo, esto es (por hipótesis) en razón última de parte a parte.

LEMA V

Todos los lados homólogos de figuras semejantes son proporcionales entre sí tanto si son rectilíneas como si son curvilíneas; y las áreas son como el cuadrado de los lados.

LEMA VI

Si un arco ACB dado en posición es subtendido por la cuerda AB, y en el punto A, en medio de la curvatura continua, es tocado por la recta tangente AD prolongada hacia ambos lados y después los puntos A y B se acercan y coinciden, digo que el ángulo BAD, contenido entre la cuerda y la tangente, disminuye in infinitum y finalmente desaparece.

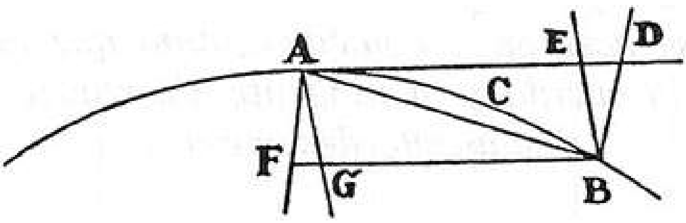


Pues si dicho ángulo no desapareciera, el arco ACB contendría junto con la tangente AD un ángulo igual a un recto y, por tanto, la curvatura en el punto A no sería continua, contra la hipótesis.

Lema vii

Con los mismos supuestos, digo que la razón última entre la cuerda, el arco y la tangente entre sí, es la razón de igualdad.

Pues mientras el punto B se aproxima al punto A, imagínese a AB y AD prolongadas a los puntos lejanos *b* y *d*, mientras se traza *bd* paralela a la secante BD. Sea el arco A*cb* siempre semejante al arco ACB. Si los puntos A y B se aproximan, por el Lema anterior el ángulo *d*A*b* se desvanece, y las líneas rectas finitas A*b* y A*d* y el arco intermedio A*cb* coincidirán y, por tanto, serán iguales. De donde se sigue que las rectas AB y AD y el arco ACB siempre proporcionales a aquéllas también desaparecerán y tendrán como razón última la igualdad. Q. E. D.



Corolario 1. De donde si por B se traza BF paralela a la tangente, que siempre corte a una recta AF trazada por A, esta BF siempre tendrá al fin razón de igualdad respecto al arco evanescente ACB, dado que en el paralelogramo completo AFBD siempre tendrá razón de igualdad con AD.

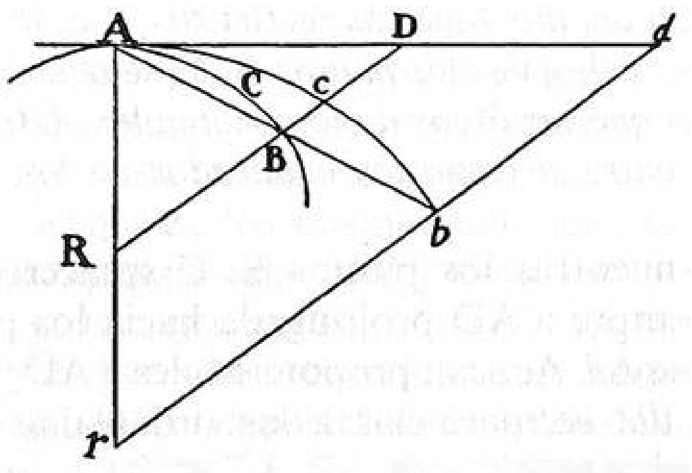
Corolario 2. Y si por B y A se trazaran muchas rectas, BE, BD, AF, AG, secantes de la tangente AD y también de su paralela BF, la razón última de todas las abscisas, AD, AE, BF, BG, de la cuerda y del arco AB será entre sí la razón de igualdad.

Corolario 3. Y, por tanto, todas estas líneas pueden sustituirse entre sí en todos los razonamientos sobre razones últimas.

LEMA VIII

Si las rectas dadas AR, BR, junto con el arco ACB, la cuerda AB y la tangente AD, constituyen tres triángulos RAB, RACB, RAD y los puntos A, B se aproximan mutuamente, digo que la forma última de los triángulos evanescentes es la de semejanza y la razón última de igualdad.

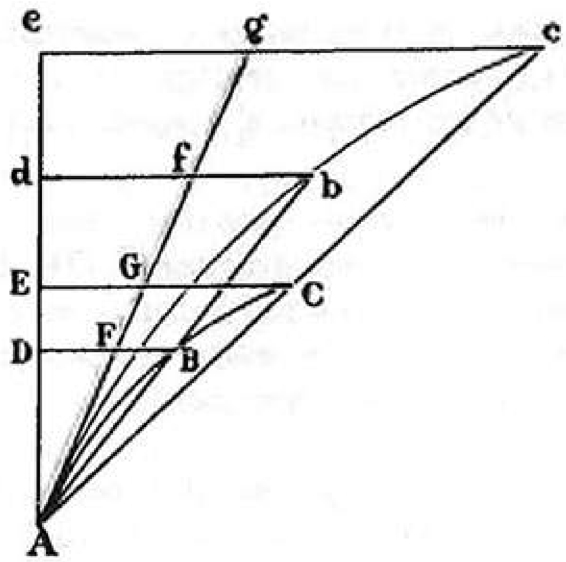
Pues mientras se aproxima B a A imagínese siempre que AB, AD y AR se prolongan hasta los puntos más lejanos *b, d* y *r*, y que se traza *rbd* paralela a RD y que el arco A*cb* permanece siempre semejante al arco ACB. Al coincidir los puntos A y B el ángulo *b*A*d* desaparecerá y, por tanto, los triángulos siempre finitos *r*A*b*, *r*A*cb* *r*A*d* coincidirán y por eso mismo serán semejantes e iguales. Y por ello, sus siempre semejantes y proporcionales RAB, RACB, RAD serán también al fin semejantes e iguales entre sí. Q. E. D.



COROLARIO. Y por ello, tales triángulos pueden ser sustituidos uno por otro en toda argumentación sobre razones últimas.

LEMA IX

Si la recta AE y la curva ABC de posición dada se cortan mutuamente en un ángulo dado A y se aplican ordenadamente a dicha recta en un ángulo dado las rectas BD, CE, que a su vez tocan la curva en B, C, y después los puntos B, C, se acercan a la vez hacia el punto A, digo que las áreas de los triángulos ABD, ACE serán al final entre sí como los cuadrados de los lados.



En efecto, mientras los puntos B, C se acercan al punto A, imaginemos siempre a AD prolongada hacia los puntos lejanos *d* y *e*, de modo que A*d*, A*c* sean proporcionales a AD y AE y tracemos las ordenadas *dh*, *ec*, paralelas a las ordenadas DB, EC y que corten a las prolongaciones de AB, AC en *b* y *c*. Supóngase que se traza la curva A*bc* semejante a la curva ABC así como la recta A*g* tangente a las curvas en A y que corta a las ordenadas DB, EC, *db*, *ec* en F, G, *f*, *g*. Entonces, manteniendo la longitud A*e*, que los puntos B, C se aproximen al punto A y al desaparecer el ángulo *c*A*g* las áreas curvilíneas A*bd*, A*ce* coincidirán con las rectilíneas A*fd*, A*ge*; y por ello (por el Lema V) serán entre sí como el cuadrado de los lados A*d*, A*e*. Pero a dichas áreas siempre serán proporcionales las áreas ABD, ACE y a tales lados siempre serán proporcionales los lados AD, AE. Luego también las áreas ABD, ACE serán al final como el cuadrado de los lados AD, AE. Q. E. D.

LEMA X

Los espacios que un cuerpo recorre empujado por una fuerza cualquiera finita tanto si dicha fuerza es determinada y siempre la misma, como si es continuamente creciente o decreciente, son como los cuadrados de los tiempos al comienzo del movimiento.

Represéntense los tiempos por las líneas AD, AE y las velocidades originadas por las ordenadas DB, EC; los espacios descritos con estas velocidades serán como las áreas ABD, ACE descritas por estas ordenadas, esto es (por el Lema IX) al comienzo del movimiento como el cuadrado de los tiempos AD, AE. Q. E. D.

COROLARIO 1. Y de aquí se deduce fácilmente que los recorridos de los cuerpos que describen partes semejantes de figuras semejantes en tiempos proporcionales, recorridos que son originados por fuerzas iguales aplicadas de modo semejante a los cuerpos y que son medidos por las distancias de los cuerpos respecto a los lugares de las figuras semejantes a los que hubiesen llegado dichos cuerpos en los mismos tiempos proporcionales sin tales fuerzas, son aproximadamente como los cuadrados de los tiempos en que se han generado.

COROLARIO 2. Pero los recorridos que son originados por fuerzas proporcionales a las partes semejantes de figuras semejantes aplicadas semejantemente, son como las fuerzas multiplicadas por el cuadrado de los tiempos.

COROLARIO 3. Lo mismo ha de entenderse de cualesquiera espacios que describan los cuerpos bajo la acción de distintas fuerzas. Serán, respecto al comienzo del movimiento, como las fuerzas multiplicadas por el cuadrado de los tiempos.

COROLARIO 4. Y por tanto, las fuerzas están, al comienzo del movimiento, en razón directa a los espacios descritos y en razón inversa a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 5. Y los cuadrados de los tiempos son directamente como los espacios descritos e inversamente como las fuerzas.

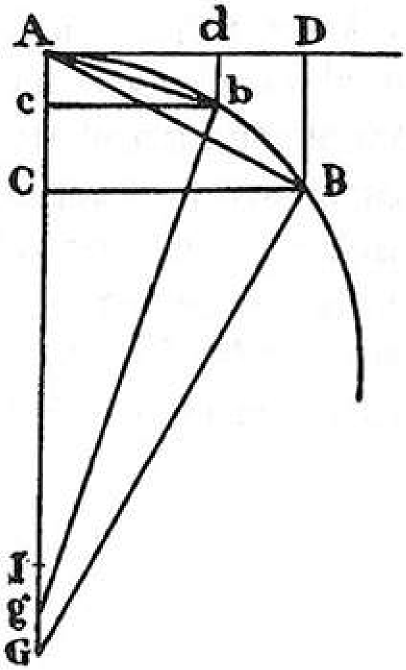
ESCOLIO

Si se comparan entre sí cantidades indeterminadas de diversos géneros y una de ellas se dice que es como otra, directa o inversamente, esto significa que la primera crece o disminuye según la misma razón que la segunda o según la inversa. Y si una de ellas se dice que es como otras dos o más directa o inversamente, esto significa que la primera aumenta o disminuye según la razón compuesta de las razones, según las cuales las otras o las inversas de las otras aumentan o disminuyen. Así, si se dice que A es directamente como B y directamente como C e inversamente como D, esto significa que A aumenta o disminuye en la razón de B x C x 1/D, esto es, que A y BC/D son mutuamente según una razón dada.

LEMA XI

La subtensa evanescente del ángulo de contacto, en todas las curvas que tienen curvatura finita en el punto de contacto, es al fin como el cuadrado de la subtensa del arco contiguo.

CASO 1. Sea dicho arco AB, la tangente AD, sea BD la subtensa del ángulo de contacto perpendicular a la tangente, y AB la subtensa del arco. Trácense AG y BG perpendiculares a la tangente AD y a la subtensa AB y que se encuentren en G.



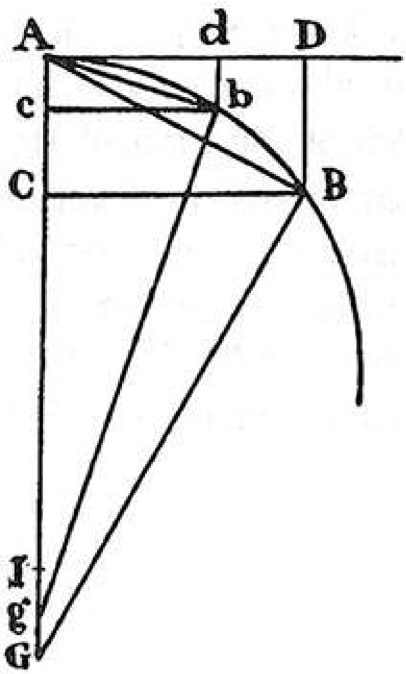
Muévanse después los puntos D, B, G hacia *d, b, g,* y sea I la última intersección de BG y AG cuando D y B se acercan hacia A. Es evidente que la distancia GI puede ser más pequeña que una distancia dada. Por otra parte (por la naturaleza de los círculos que pasan por los puntos ABG, A*bg*) AB^2 es igual a AG x BD y Ab^2 es igual a A*g* x *bd*; y por tanto la razón de AB^2 a Ab^2 se compone de las razones de AG a *Ag* y BD a *bd*. Pero como GI puede tomarse como menor que cualquier longitud dada, puede hacerse que la razón AG a A*g* diste menos de la igualdad que una cantidad dada y, por tanto, que la razón AB^2 a Ab^2 diste menos de la razón de BD a *bd* que una cantidad dada. Luego, por el Lema I, la razón última entre AB^2 y Ab^2 es la misma que la razón última de BD a *bd*. Q. E. D.

Caso 2. Inclínese BD sobre AD en un ángulo dado cualquiera y la razón última de BD a B*d* siempre será la misma que antes y, por tanto, la misma que AB^2 a Ab^2. Q. E. D.

Caso 3. Y aunque no esté dado el ángulo D, sino que la recta BD converja en un punto dado o bien se construya con otra regla cualquiera, sin embargo los ángulos D, *d* se construirán con una ley común y siempre tenderán a la igualdad y se acercarán entre sí más que una diferencia dada y, por tanto, al fin serán iguales, por el Lema I, y por tanto las líneas BD, *bd* están entre sí en la misma razón que antes. Q. E. D.

Corolario 1. De donde, como las tangentes AD, A*d*, de los arcos AB, A*b* y sus senos BC, *bc* sean al final iguales a las cuerdas AB, A*b*; sus cuadrados serán al fin como las subtensas BD, *bd*.

Corolario 2. Tales cuadrados serán asimismo al final como las sagitas de los arcos que bisecan a las cuerdas y convergen en un punto dado. Puesto que dichas sagitas son como las subtensas BD, *bd*.



COROLARIO 3. Por tanto, la sagita es como el cuadrado del tiempo en que un cuerpo describe el arco a una velocidad dada.

COROLARIO 4. Los triángulos rectilíneos ADB, A*db* están al fin en razón cúbica de los lados AD, A*d* y en razón de la potencia $^3/_2$ (sesquiplicada) de los lados DB, *db*; por cuanto que se da la existencia de la razón compuesta de los lados AD y DB, A*d* y D*b*. Igualmente los triángulos ABC, A*bc* están al final en razón cúbica de los lados BC, *bc*. Llamo razón sesquiplicada a la subduplicada de la triplicada, que se compone, pues, de la simple y la subduplicada[15].

COROLARIO 5. Y puesto que DB, *db* son al final paralelas y en razón cuadrada de las mismas AD, A*d*, las áreas curvilíneas últimas ADB, A*db* serán (por la naturaleza de la parábola) dos tercios de los triángulos rectilíneos ADB, A*db*, y los segmentos AB, A*b* terceras partes de dichos triángulos. Y en consecuencia, dichas áreas y dichos segmentos estarán en razón triplicada, ya de las tangentes AD, A*d*, ya de las cuerdas y arcos AB, A*b*.

ESCOLIO

Por lo demás, en todo esto suponemos que el ángulo de contacto no es ni infinitamente mayor que los ángulos de contacto contenidos por los círculos y sus tangentes, ni infinitamente menor que los mismos; esto es, que la curvatura en el punto A no es ni infinitamente pequeña, ni infinitamente grande, o también, que el intervalo AI es de magnitud finita. Puede, en efecto, tomarse a DB como AD^3: en tal caso ningún círculo puede trazarse por el punto A entre la tangente AD y la curva AB y por consiguiente el ángulo de contacto será infinitamente menor que los de los círculos. Y por un argumento semejante si DB se hace sucesivamente como AD^4,

AD^5, AD^6, AD^7, etc., se tendrá una serie de ángulos de contacto que va hasta el infinito y de los cuales cualquiera de los siguientes es infinitamente menor que su antecesor. Y si DB se hiciera sucesivamente como AD^2, $AD^{3/2}$, $AD^{4/3}$, $AD^{5/4}$, $AD^{6/5}$, $AD^{7/6}$, etc., se tendrá otra serie infinita de ángulos de contacto de los cuales el primero es del mismo género que los de los círculos, el segundo infinitamente mayor, y cualquier siguiente infinitamente mayor que el anterior. Además, entre dos ángulos cualesquiera de éstos puede intercalarse una serie, también tendente al infinito, de ángulos intermedios de los cuales cualquier posterior será infinitamente mayor o menor que el anterior. Como si entre los términos AD^2 y AD^3 se intercala la serie $AD^{13/6}$, $AD^{11/5}$, $AD^{9/4}$, $AD^{7/3}$, $AD^{5/2}$, $AD^{8/3}$, $AD^{11/4}$, $AD^{14/5}$, $AD^{17/6}$, etc. Y de nuevo entre dos cualesquiera ángulos de esta serie se puede intercalar una nueva serie de ángulos intermedios, distantes entre sí infinitos intervalos. No conoce la naturaleza un límite.

Lo que se ha demostrado de las líneas curvas y de las superficies comprendidas, puede aplicarse fácilmente a las superficies curvas de los sólidos y a los contenidos. He adelantado estos Lemas para evitar tediosas y largas deducciones *ad absurdum* al estilo de los antiguos geómetras. Pues las demostraciones se hacen más breves por el método de los indivisibles. Pero como la hipótesis de los indivisibles es más difícil y además, tal método se considera menos geométrico, he preferido reducir las demostraciones de las cosas que siguen a las sumas y razones últimas de cantidades evanescentes, y a las sumas y razones primeras de cantidades nacientes, esto es, a los límites de las sumas y de las razones y, por tanto, he preferido anteponer, con la brevedad que he podido, las demostraciones de dichos límites. Por este medio se consigue lo mismo que con el método de los indivisibles y así podremos utilizar con mayor seguridad principios ya demostrados. Por tanto, en lo que sigue, cuantas veces considere cantidades como si constaran de partículas, o cuantas veces tome pequeñas curvas por líneas rectas, no quiero entender nunca que se trata de indivisibles, sino de divisibles evanescentes, ni tampoco de sumas o razones de partes determinadas, sino de los límites de las sumas y de las razones; y la fuerza de tales demostraciones debe atribuirse siempre al método de los Lemas precedentes.

Pudiera objetarse que no hay proporción última alguna entre cantidades evanescentes, ya que antes de que desaparezcan no son últimas, y, después de desaparecidas, no puede darse ninguna. Pero por la misma razón podría decirse que un cuerpo que llega a un punto en el que se acaba su movimiento no tendría una velocidad última, puesto que dicha velocidad no sería última antes de que dicho cuerpo alcance el punto final de su movimiento, y cuando le haya alcanzado ya no tendrá velocidad alguna. La respuesta es fácil: por velocidad última se entiende aquella con la que el cuerpo se mueve, no antes de alcanzar el punto final y cesa, por consiguiente, el movimiento, ni tampoco después de haberlo alcanzado, sino aquella con la que se mueve cuando lo alcanza, esto es, aquella velocidad con la que el cuerpo alcanza el punto final y aquella con la que cesa el movimiento. De igual manera ha de entenderse por razón última de cantidades evanescentes la razón de cantidades, no antes de que desaparezcan, ni después de desaparecidas, sino aquella con la que desaparecen. De igual modo ocurre con la razón primera de cantidades nacientes, que es aquella con la que nacen. Y la suma primera y última es aquella con la que empiezan o acaban la existencia (o también a aumentar o disminuir). Existe un límite que puede alcanzar la velocidad al final del movimiento, pero no puede traspasarlo. Esta es la velocidad última. Y semejante es la razón del límite de todas las cantidades y proporciones nacientes y evanescentes. Y dado que tal límite es cierto y definido, el problema de determinarlo es puramente geométrico. Por lo demás es legítimo utilizar medios geométricos para determinar y demostrar cosas también geométricas.

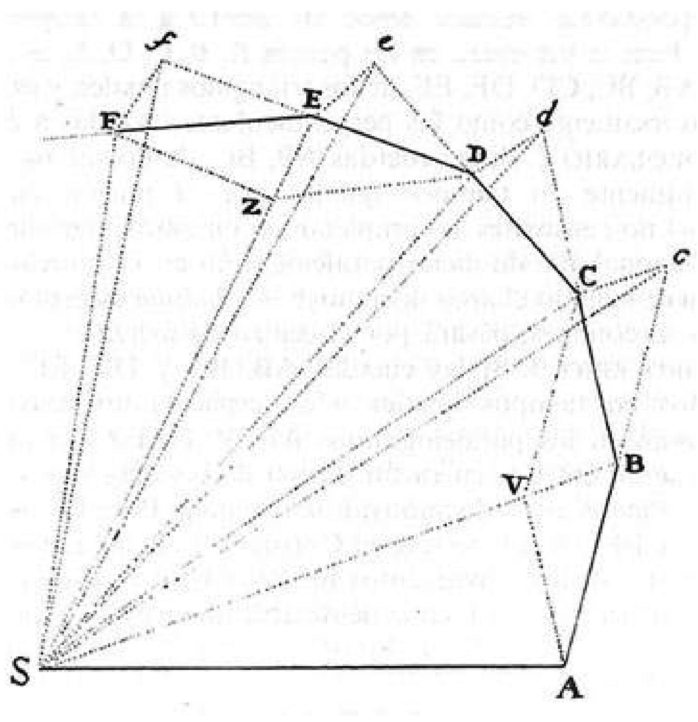
También pudiera objetarse que si se dan razones últimas de cantidades evanescentes, también se darán magnitudes últimas; y así toda cantidad constará de indivisibles, contra lo que demostró Euclides sobre los inconmensurables en el libro décimo de los elementos. Pero esta objeción se apoya en una hipótesis falsa. Las razones últimas con las que tales cantidades desaparecen en realidad no son razones de cantidades últimas, sino límites a los que tienden a acercarse siempre las razones de cantidades continuamente decrecientes, límites a los que pueden acercarse más que una diferencia dada, pero nunca traspasarlo, ni tampoco alcanzarlo antes de que las cantidades disminuyan *in infinitum*. El tema se ve mejor en las cosas infinitamente grandes. Si dos cantidades con una diferencia dada aumentan infinitamente, habrá una razón última de dichas cantidades, a saber, la razón de igualdad, sin que por ello se den también las cantidades últimas o máximas de las cuales era esta la razón. Por tanto, cuando en lo que sigue diga, con el fin de facilitar la comprensión de las cosas, cantidades mínimas o evanescentes o últimas, no se entienda que son cantidades de determinada magnitud sino que debe pensarse siempre en cantidades infinitamente decrecientes.

Sección II[16]
SOBRE EL DESCUBRIMIENTO DE LAS FUERZAS CENTRÍPETAS

Proposición I. Teorema I

Las áreas, descritas por cuerpos que giran sujetos a un centro de fuerzas inmóvil por radios unidos a dicho centro, están en el mismo plano inmóvil y son proporcionales a los tiempos.

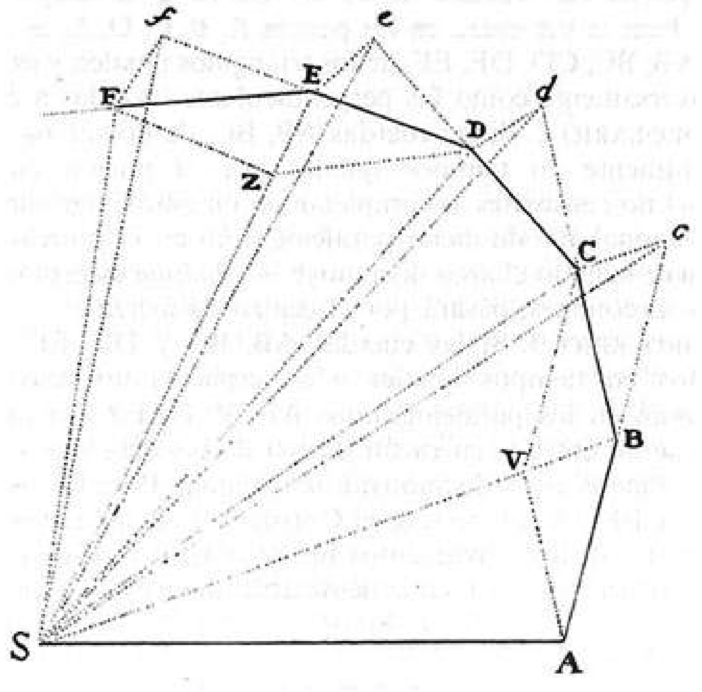
Divídase el tiempo en partes iguales y en la primera parte de tiempo el cuerpo por su fuerza ínsita recorra la recta AB. En la segunda parte de tiempo, si nada lo impide, la recta llegará hasta *c* (por la Ley I) describiendo la línea B*c* igual a la misma AB; de modo que las áreas ASB, BS*c* descritas por el trazado de los radios AS, BS, *c*S, al centro habrán de ser iguales. Pero cuando el cuerpo llega a B, supóngase que una fuerza centrípeta produce un único y gran impulso y haga que el cuerpo se separe de la línea B*c* y siga la recta BC. Trácese la paralela *c*C a BS que toca a BC en C; y al completarse la segunda parte de tiempo el cuerpo (por el Corolario I de las Leyes) se hallará en C, en el mismo plano que el triángulo ASB. Únase SC, y el triángulo SBC, por ser paralelas SB, C*c*, será igual al triángulo SB*c* y, por tanto, también al triángulo SAB. Y, por argumentos semejantes, si una fuerza centrípeta actúa sucesivamente en C, D, E, etc., haciendo que el cuerpo en cada parte de tiempo describa cada recta CD, DE, EF, etc., estarán todas ellas en el mismo plano y el triángulo SCD será igual al triángulo SBC, y SDE al propio SCD, y SEF a SDE. Por tanto, en tiempos iguales se describen áreas iguales en un plano inmóvil; y, por composición, las sumas de cualesquiera áreas SADS y SAFS son entre sí como los tiempos en que se describen. Auméntese ahora el número de triángulos y disminúyase su altura *in infinitum* y su perímetro último ADF será una línea curva[17] (por el Corolario 4 del Lema III); y por tanto la fuerza centrípeta, por la que un cuerpo es continuamente separado de la tangente de dicha curva, actúa continuamente; y áreas cualesquiera descritas SADS, SAFS proporcionales siempre a los tiempos en que se describen, serán, en este caso, proporcionales a los mismos tiempos. Q. E. D.



COROLARIO 1. La velocidad de un cuerpo atraído hacia un centro inmóvil en un espacio no resistente es inversamente como la perpendicular trazada desde tal centro a la tangente de la curva. Pues la velocidad en los puntos A, B, C, D, E, es como las bases AB, BC, CD, DE, EF, de los triángulos iguales; y estas bases son inversamente como las perpendiculares trazadas a ellas.

COROLARIO 2. Si las cuerdas AB, BC, de dos arcos descritos sucesivamente en tiempos iguales por el mismo cuerpo en espacios no resistentes se completan en un paralelogramo ABCV, y la diagonal BV de dicho paralelogramo en la posición que al final tiene cuando el arco disminuye *in infinitum* es prolongada en ambas direcciones, pasará por el centro de fuerzas.

COROLARIO 3. Si las cuerdas AB, BC y DE, EF de arcos descritos en tiempos iguales y en espacios no resistentes se completan en los paralelogramos ABCV, DEFZ, las fuerzas en B y E serán entre sí en razón última de las diagonales BV, EZ, cuando dichos arcos disminuyan *in infinitum*. Pues los movimientos BC y EF del cuerpo (por el Corolario I de las Leyes) estarán compuestos de los movimientos Be, BV y E*f*, EZ. Ahora bien, BV y EZ, iguales a C*c* y F*f*, en la demostración de esta Proposición se originaban por impulsos de la fuerza centrípeta en B y E, y por consiguiente, son proporcionales a tales impulsos.



COROLARIO 4. Las fuerzas, por las que cualesquiera cuerpos en espacios no resistentes son desviados de trayectorias rectilíneas y constreñidos a trayectorias curvas, son entre sí como las sagitas convergentes al centro de fuerzas; sagitas de los arcos descritos en tiempos iguales y bisecantes de las cuerdas de dichos arcos mientras éstos disminuyen *in infinitum*. Pues tales sagitas son las mitades de las diagonales de las que hemos hablado en el Corolario 3.

COROLARIO 5. Y, por tanto, estas fuerzas son a la fuerza de la gravedad como tales sagitas son a las sagitas perpendiculares al horizonte de los arcos parabólicos que describen los proyectiles en los mismos tiempos.

COROLARIO 6. Lo mismo vale (por el Corolario V de las Leyes) cuando los planos en que se mueven los cuerpos junto con el centro de fuerzas situado en los mismos no están en reposo, sino que se mueven uniformemente y en línea recta.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Todo cuerpo que se mueve en una curva descrita en un plano, y con un radio trazado a un punto, inmóvil o en movimiento rectilíneo y uniforme, describe áreas en torno a dicho punto proporcionales a los tiempos, es empujado por una fuerza centrípeta tendente a dicho punto.

CASO 1. Pues todo cuerpo que se mueve en una curva es desviado de su trayectoria recta por alguna fuerza actuante sobre él (por la Ley I). Y esta fuerza que aparta al cuerpo de la trayectoria rectilínea y le obliga a describir en torno al punto inmóvil S los triángulos iguales e infinitamente pequeños SAB, SBC, SDC, etc., actúa en el punto B según una línea paralela a *c*C (por la Proposición XL del Libro I de los *Elementos* y la Ley II), esto es, según la dirección de la línea BS; y en el punto C actúa según la línea paralela a *d*D, esto es, según la línea SC, etc. Por tanto, actúa siempre según líneas tendentes al mencionado punto S inmóvil. Q. E. D.

CASO 2. Y, por el Corolario V de las Leyes, es indiferente que la superficie en que un cuerpo describe una línea curva esté en reposo o que se mueva, junto con el cuerpo, la figura descrita y su punto S, uniformemente y en directo.

COROLARIO 1. En espacios o medios no resistentes, si las áreas no son proporcionales a los tiempos, las fuerzas no tienden al punto donde concurren los radios sino que se adelantan hacia la región hacia la que se dirige el movimiento, caso de que la descripción de las áreas se acelere, o se atrasan, caso de que se retarde.

COROLARIO 2. Incluso en medios resistentes, si se acelera la descripción de las áreas, las direcciones de las fuerzas se apartan del punto de encuentro de los radios hacia la dirección hacia la que va el movimiento.

ESCOLIO

Un cuerpo puede ser urgido por una fuerza centrípeta compuesta de muchas fuerzas. En tal caso el sentido de la Proposición es que dicha fuerza, compuesta de todas las demás, tiende al punto S. Además si alguna fuerza actúa constantemente según una línea perpendicular a la superficie descrita, obligará al cuerpo a separarse del plano de su movimiento; pero no aumentará ni disminuirá la cantidad de superficie descrita y, por tanto, ha de despreciarse al componer las fuerzas.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

Todo cuerpo que, unido por un radio al centro de otro cuerpo que se mueve de cualquier modo, describe alrededor de dicho centro áreas proporcionales a los tiempos es urgido por una fuerza compuesta de la fuerza centrípeta tendente a ese otro cuerpo y de toda la fuerza aceleratriz con la que es urgido ese otro cuerpo.

Sea L el primer cuerpo, y sea T el otro; y (por el Corolario VI de las Leyes) si ambos cuerpos son urgidos según líneas paralelas por una fuerza nueva, igual y contraria a aquella que urge al otro cuerpo T, el primer cuerpo L describiría alrededor del otro cuerpo T las mismas áreas que antes: en cambio la fuerza por la que era urgido el otro cuerpo T será ahora destruida por una fuerza igual y contraria y, por tanto (por la Ley I), ese otro cuerpo T abandonado ya a sí mismo o bien quedará en reposo o bien en movimiento uniforme y directo: y el cuerpo primero L urgido por la fuerza restante pasará a describir en torno al otro cuerpo T áreas proporcionales a los tiempos. Por tanto (por el Teorema II) la diferencia de fuerzas tiende hacia el otro cuerpo T como a su centro. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, si un cuerpo L, unido por un radio a otro T, describe áreas proporcionales a los tiempos y de la fuerza total (tanto si es simple como si está compuesta de muchas fuerzas según el Corolario II de las Leyes) por la que es urgido el primer cuerpo L se resta (por el mismo Corolario de las Leyes) toda la fuerza aceleratriz por la que es urgido el otro cuerpo, toda la fuerza restante por la que es urgido el primer cuerpo tenderá al otro cuerpo T como a su centro.

COROLARIO 2. Y si esas áreas son aproximadamente proporcionales a los tiempos, la fuerza restante tenderá aproximadamente al otro cuerpo T.

COROLARIO 3. Y viceversa, si la fuerza restante tiende aproximadamente al otro cuerpo T, esas áreas serán aproximadamente proporcionales a los tiempos.

COROLARIO 4. Si un cuerpo L, unido por un radio a otro cuerpo T, describe áreas que, comparadas con los tiempos, son muy desiguales y el otro cuerpo T o reposa o se mueve uniformemente en directo, la acción de la fuerza centrípeta tendente hacia ese otro cuerpo T o es nula o se mezcla y se compone con acciones muy potentes de otras fuerzas, y la fuerza total compuesta de todas ellas, si son más de una, tiende hacia otro centro (móvil o en reposo). Lo mismo ocurre cuando el otro cuerpo se mueve con cualquier clase de movimiento si se toma la fuerza centrípeta que resulta después de restar toda la fuerza que actúa sobre el otro cuerpo T.

ESCOLIO

Puesto que la igual descripción de áreas es índice del centro hacia el que tiende la fuerza por la que más afectado es un cuerpo y por la que es apartado del movimiento rectilíneo y mantenido en su órbita, ¿por qué no podemos en lo sucesivo tomar la igualdad en la descripción de áreas como un índice del centro en torno al que ocurre todo movimiento circular en los espacios libres?

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV

Las fuerzas centrípetas de los cuerpos que describen círculos distintos con movimientos iguales tienden a los centros de los mismos círculos; y son entre sí como los cuadrados de los arcos descritos en tiempos iguales divididos respectivamente por los radios de los círculos.

Estas fuerzas tienden a los centros de los círculos, por la Proposición II y por el Corolario 2, Proposición I, y son entre sí como los senos versos de los arcos descritos en tiempos iguales muy pequeños, por el Corolario 4 de la Proposición I, esto es, como los cuadrados de los mismos arcos divididos por los diámetros de los círculos, por el Lema VII; y por tanto, como estos arcos son como los arcos descritos en unos tiempos iguales y los diámetros son como los radios, las fuerzas serán como los cuadrados de los arcos descritos en el mismo tiempo divididos por los radios de los círculos. Q. E. D.

COROLARIO 1. Puesto que estos arcos son como las velocidades de los cuerpos, las fuerzas centrípetas estarán en razón compuesta, directamente de la razón cuadrada de las velocidades e inversamente de la razón simple de los radios.

COROLARIO 2. Y, como los tiempos periódicos están en razón compuesta directamente de la razón de los radios e inversamente de la razón de las velocidades, las fuerzas centrípetas están en razón compuesta directamente de la razón de los radios e inversamente de la razón cuadrada de los tiempos periódicos.

COROLARIO 3. De donde, si se igualan los tiempos periódicos y, por tanto, las velocidades son como los radios, también las fuerzas centrípetas serán como los radios; y al contrario.

COROLARIO 4. Si tanto los tiempos periódicos como las velocidades están en razón de la raíz cuadrada de los radios; las fuerzas centrípetas serán iguales entre sí; y al contrario.

COROLARIO 5. Si los tiempos periódicos son como los radios y, por tanto, las velocidades iguales, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los radios; y al contrario.

COROLARIO 6. Si los tiempos periódicos están en razón de la potencia $^3/_2$ de los radios y, por tanto, las velocidades están en razón de la raíz cuadrada de los radios, las fuerzas centrípetas serán inversamente como los cuadrados de los radios; y al contrario.

COROLARIO 7. Y, en general, si el tiempo periódico es como una potencia R^n cualquiera del radio R y, por tanto, la velocidad es inversamente como la potencia R^{n-1} del radio, la fuerza centrípeta será inversamente como la potencia R^{2n-1} del radio; y al contrario.

COROLARIO 8. Con respecto a los tiempos, las velocidades y las fuerzas con los que los cuerpos describen partes semejantes de cualesquiera figuras semejantes y que tienen los centros colocados en posición semejante dentro de dichas figuras se siguen las mismas cosas de la demostración de los casos precedentes aplicada a estas otras. Se aplica sustituyendo la descripción igual de las áreas por los movimientos iguales y tomando las distancias de los cuerpos a los centros como radios.

COROLARIO 9. Se sigue también de esta demostración que el arco que describe un cuerpo que gira uniformemente en círculo con una fuerza centrípeta dada en un tiempo cualquiera es media proporcional entre el diámetro del círculo y el descenso realizado por el cuerpo con la misma fuerza dada y cayendo durante el mismo tiempo[18].

Escolio

El caso del Corolario 6 se da en los cuerpos celestes (como ya observaron por su parte nuestros *Wren, Hooke* y *Halley*); por ello, en lo que sigue he decidido exponer más ampliamente lo relativo a la fuerza centrípeta que decrece en razón del cuadrado de las distancias a los centros.

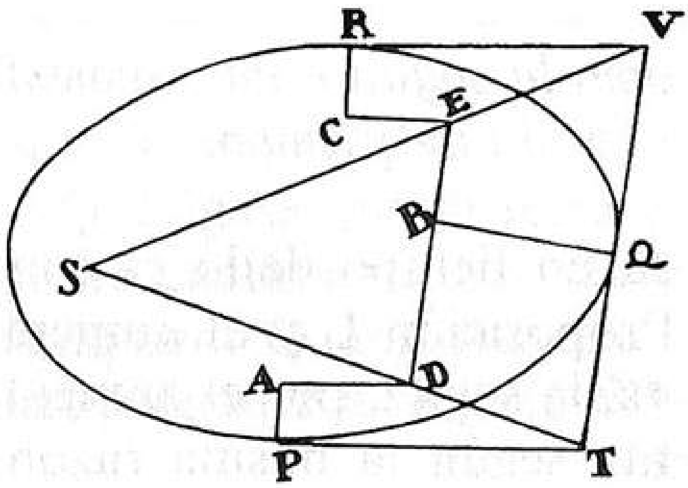
Además, como resultado de la Proposición precedente y de sus Corolarios, se puede deducir también la proporción entre una fuerza centrípeta y otra fuerza cualquiera conocida, tal como la de la gravedad, pues si un cuerpo gira en círculo concéntrico a la Tierra por la fuerza de su gravedad, esta gravedad es la fuerza centrípeta del mismo. Pues, el tiempo de una revolución, así como el arco descrito en un tiempo dado, vienen dados a partir del descenso de los graves, por el Corolario 9 de dicha Proposición. Y por medio de tales proposiciones. *Huygens* comparó la fuerza de la gravedad con las fuerzas centrífugas de los cuerpos que giran, en su célebre tratado *de Horologio Oscillatorio*.

Lo que antecede puede también demostrarse de este modo: imagínese descrito dentro de un círculo a un polígono de los lados que se quiera. Si un cuerpo moviéndose con una velocidad dada por los lados del polígono en cada ángulo del mismo es rechazado por el círculo, la fuerza con la cual en cada ocasión choca contra el círculo será como su velocidad; y por tanto la suma de las fuerzas en un tiempo dado será como dicha velocidad y el número de rechazos conjuntamente; esto es (si se da la clase del polígono) como la longitud descrita en el tiempo dado aumentada o disminuida en razón de la misma, longitud al radio del círculo predicho; es decir, como el cuadrado de dicha longitud dividido por el radio; y por tanto, si el polígono, acortando sus lados *in infinitum*, coincidiese con el círculo, como el cuadrado del arco descrito en un tiempo dado dividido por el radio. Esta es la fuerza centrífuga con la que el cuerpo empuja contra el círculo; e igual a ella es la fuerza contraria con la cual el círculo repele continuamente al cuerpo hacia el centro.

Proposición v. Problema i[19].

Hallar el centro de una figura dada, descrita por un cuerpo con fuerzas tendentes a dicho centro común y con una velocidad dada en un lugar cualquiera.

Sean las tres rectas PT, TQV, VR tangentes a la figura descrita en los puntos P, Q, R y que se corten en T y V. Trácense PA, QB, RC perpendiculares a las tangentes e inversamente proporcionales a las velocidades del cuerpo en los dichos puntos P, Q, R desde los que parten; esto es, de tal modo que PA sea a QB como la velocidad en Q a la velocidad en P y QB sea a RC como la velocidad en R a la velocidad Q. Trácense en ángulo recto por los extremos A, B, C de las perpendiculares las líneas AD, DBE, EC que se cortan en D y E. Y trazadas TD, VE se cortarán en el centro buscado S.

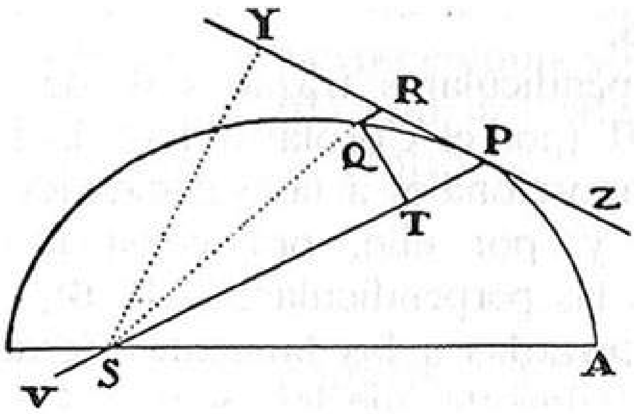


Pues las perpendiculares trazadas desde el centro S a las tangentes PT, QT (por el Corolario 1 de la Proposición I) son inversamente proporcionales a las velocidades del cuerpo en los puntos P y Q y, por ello, por construcción, directamente proporcionales a las perpendiculares AP, BQ, esto es, como las perpendiculares trazadas a las tangentes desde el punto D. De donde se sigue fácilmente que los puntos S, D, T están en una misma recta y por un argumento semejante los puntos S, E, V están también en la misma recta; y por tanto el centro S se halla en el cruce de las rectas TD, VE. Q. E. D.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA V[20]

Si en un espacio sin resistencia un cuerpo gira en una órbita alrededor de un centro inmóvil y describe en un tiempo muy pequeño un arco naciente en ese instante e imaginamos trazada la sagita del arco que a su vez divida en dos la cuerda y, prolongada, pase por el centro de fuerzas: la fuerza centrípeta en el punto medio del arco será directamente como la sagita e inversamente como el cuadrado del tiempo.

Pues la sagita en un tiempo dado es como la fuerza (por el Corolario 4 de la Proposición I) y al aumentar el tiempo según una razón cualquiera, la sagita, por el aumento del arco según la dicha razón, aumenta según la misma razón cuadrada (por los Corolarios 2 y 3 del Lema XI) y, por tanto, es como la fuerza y el cuadrado del tiempo. Divídase por el cuadrado del tiempo a ambos y la fuerza será directamente como la sagita e inversamente como el cuadrado del tiempo. Q. E. D.



También se puede demostrar esto fácilmente por el Corolario 4 del Lema X.

COROLARIO 1. Si un cuerpo P girando en torno a un centro S describe la curva APQ; hágase que la recta ZPR sea tangente a dicha curva en un punto cualquiera P y trácese hasta la tangente desde otro punto cualquiera Q una paralela a SP con distancia QR y trácese QT perpendicular a la línea SP; entonces la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido $\frac{SP^2 \text{ x } QP^2}{QR}$; siempre que se considere la magnitud del sólido alcanzada en el último momento, cuando coinciden los puntos P y Q. Pues QR es igual a la sagita del doble del arco QP en cuya mitad se halla. P, y el doble del triángulo SQP o SP x QT es proporcional al tiempo en que es descrito dicho doble arco; por tanto, puede tomarse como representación del tiempo.

COROLARIO 2. Por un argumento semejante la fuerza centrípeta es inversamente como el sólido $\frac{SP^2 \text{ x } QP^2}{QR}$, siempre que SY sea perpendicular desde el centro de fuerza a PR tangente a la órbita. Pues los rectángulos SY x QP y SP x QT son iguales.

COROLARIO 3. Si una órbita es, o un círculo, o toca concéntricamente un círculo, o corta concéntricamente a un círculo, esto es, contiene un ángulo muy pequeño de contacto o de sección con el círculo y tiene la misma curvatura y el mismo radio de curvatura en el punto P; y si la cuerda PV del círculo es trazada desde el cuerpo por el centro de fuerzas; la fuerza centrípeta será inversamente como el sólido SY^2 x PV. Pues PV es $\frac{QP^2}{QR}$.

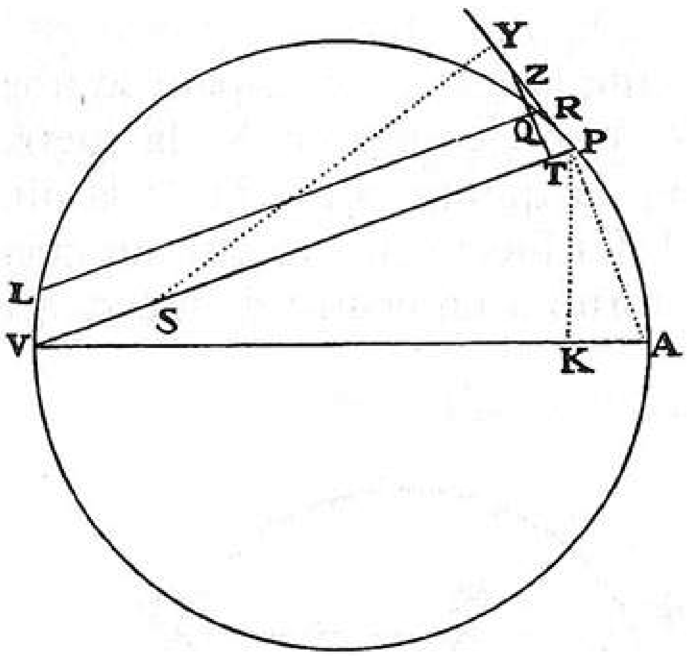
COROLARIO 4. Supuesto esto, la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la velocidad directamente, y dicha cuerda inversamente. Pues la velocidad es inversamente como la perpendicular SY, por el Corolario 1 de la Proposición I.

COROLARIO 5. De aquí que, si se da una figura curvilínea APQ y se da también en ella el punto S al que se dirige continuamente la fuerza centrípeta se puede hallar la ley de la fuerza centrípeta por la que un cuerpo P es retenido en el perímetro de dicha figura, desviado continuamente de la trayecto ria recta, figura que resultará descrita al girar. Efectivamente se puede hallar calculando, o bien el sólido $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, o bien el sólido $SY^2 \times PV$ inversamente proporcional a dicha fuerza. Daremos ejemplos de esto en los problemas siguientes.

Proposición vii. Problema ii[21].

Si un cuerpo gira en la circunferencia de un círculo, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente a un punto dado cualquiera.

Sea VQPA la circunferencia del círculo; y sea S el punto dado hacia el que tiende la fuerza como hacia su centro; sea P el cuerpo que se mueve en la circunferencia y Q el punto inmediato hacia el cual se mueve y sea PRZ la tangente del círculo en el punto precedente. Trácese por el punto S la cuerda PV; y trazado el diámetro del círculo VA únanse AP y trácese sobre SP la perpendicular QT que prolongada cortará a la tangente PR en Z y, finalmente, trácese por el punto Q la recta LR paralela a SP que corte el círculo en L y a la tangente PZ en R. Por la semejanza de los triángulos ZQR, ZTP, VPA tendremos que RP^2, esto es, QRL será a QT^2 como AV^2 a PV^2. Y, por tanto, $\frac{QRL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$. Multiplíquense estos dos miembros iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ y al coincidir los puntos P y Q sustitúyanse PV por RL. Tendremos asi que $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Luego (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición vi) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$; esto es (por estar dado AV^2) inversamente como el producto del cuadrado de la distancia o de la altura SP por el cubo de la cuerda PV. Q. E. I.

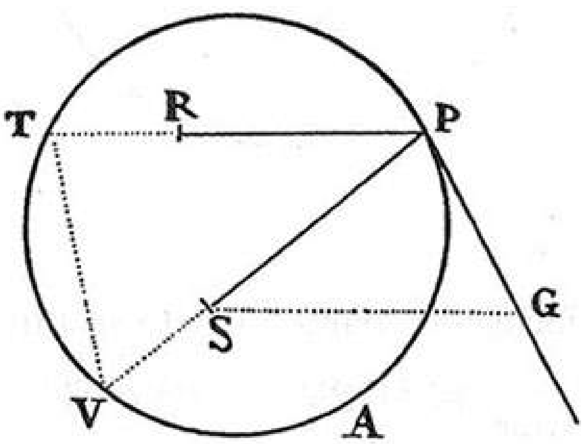


Lo mismo de otro modo

Trácese la perpendicular SY sobre la prolongación de la tangente PR; y, por semejanza de los triángulos SYP, VPA, tendremos que AV será a PV como SP a SY: por tanto $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, y $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Y por tanto (por los corolarios 3 y 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ esto es, por estar dada AV, inversamente como $SP^2 \times PV^3$ Q. E. I.

COROLARIO 1. De aquí que si el punto dado S hacia el que tiende continuamente la fuerza centrípeta se ubica en la circunferencia del círculo, por ejemplo en V, la fuerza centrípeta será inversamente como la quinta potencia de la altura SP.

COROLARIO 2. La fuerza por la que un cuerpo P gira en un círculo APTV en torno a un centro de fuerza S es a la fuerza por la que el mismo cuerpo P puede girar en el mismo círculo y en el mismo tiempo periódico en torno a otro centro de fuerza como $RP^2 \times SP$ al cubo de la recta SG trazada desde el centro de fuerza primitivo S a la tangente PG de la circunferencia y paralela a la recta que une el cuerpo P con el segundo centro de fuerza. Pues por la construcción de esta proposición la fuerza primera es a la segunda como $RP^2 \times PT^3$ es a $SP^2 \times PV^3$, esto es como $SP \times RP^2$ $SP^3 \times PV^3$ es a $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$ también (por semejanza de los triángulos PSG, TPV) a SG^3.

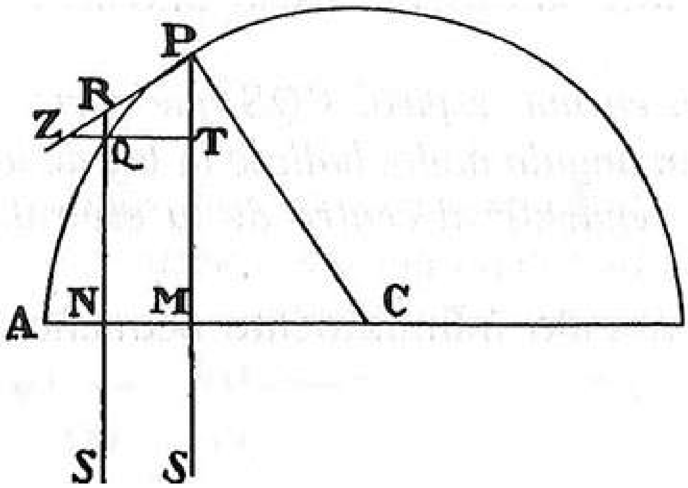


COROLARIO 3. La fuerza por la que gira un cuerpo P en una órbita en torno a un centro de fuerzas S es a la fuerza por la que el mismo cuerpo P giraría en la misma órbita en el mismo tiempo periódico en torno a otro centro de fuerzas R, como el sólido SP x RP^2, contenido a su vez por la distancia del cuerpo al primer centro de fuerzas S y por el cuadrado de su distancia al segundo centro de fuerzas R, es al cubo de la recta SG trazada desde el primer centro de fuerzas S a la tangente a la órbita PG y paralela a la recta RP que une el cuerpo P con el segundo centro de fuerzas R. Pues las fuerzas en esta órbita para un punto P son iguales que en un círculo de la misma curvatura.

PROPOSICIÓN VIII. PROBLEMA III.

Si un cuerpo se mueve en el semicírculo PQA: hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente a un punto S tan lejano que todas las líneas PS, RS dirigidas a él puedan ser consideradas como paralelas.

Desde el centro C del semicírculo trácese el semidiámetro CA que corte perpendicularmente dichas paralelas en M y N y únase CP. Por semejanza de los triángulos CPM, PZT y RZQ tenemos que CP^2 es a PM^2 como PR^2 a QT^2 y por la naturaleza del círculo PQ^2 es igual al rectángulo QR x (RN x QN) o, cuando los puntos P y Q tienden a juntarse, igual al rectángulo QR x 2PM. Luego CP^2 es a PM^2 como QR x 2PM a QT^2 y por tanto $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$, y $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$. Así pues (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2PM^2 \times SP^2}{SP^2}$, esto es $\left(\text{despreciando la razón dada } \frac{2SP^2 \times SP^2}{CP^2}\right)$ inversamente como PM^2. Q. E. I.



Esto mismo se deduce fácilmente también de la Proposición precedente.

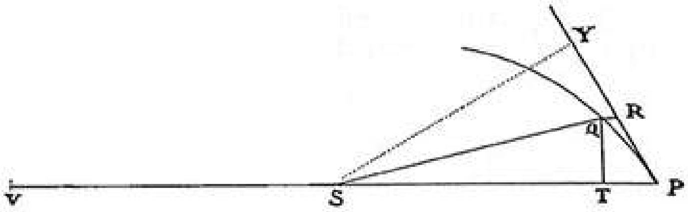
Escolio

Y por un argumento no muy distinto se hallará que un cuerpo se movería en una elipse o también en una hipérbola o en una parábola, por una fuerza centrípeta que sería a su vez inversamente como el cubo de la ordenada dirigida a un centro de fuerzas infinitamente lejano.

Proposición IX. Problema IV.

Si un cuerpo gira en una espiral PQS que corta a todos los radios SP, SQ, etc., en un ángulo dado, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al centro de la espiral.

Sea dado el ángulo infinitamente pequeño PSQ y por estar dados todos los ángulos se obtendrá una figura de la forma SPRQT. Luego está dada la razón $\frac{QT}{QR}$, y $\frac{QT^2}{QR}$ es como QT, esto es (por la forma de la figura dada) como SP. Altérese cuanto sea el ángulo PSQ y la recta que subtiende al ángulo de contacto QRT se alterará (por el Lema XI) en razón cuadrada del propio PR o QT. Luego $\frac{QT^2}{QR}$ permanecerá igual que antes, esto es como SP. Por lo tanto $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ es como SP^3 y por lo mismo (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición VI), la fuerza centrípeta es inversamente como el cubo de la distancia SP. Q. E. I.



Lo mismo de otro modo

La perpendicular SY trazada a la tangente y la cuerda PV del círculo concéntrico secante de la espiral están en razones dadas con respecto a la altura SP. Por tanto SP^3 es como $SY^2 \times PV$, esto es (por los Corolarios 3 y 5 de la Proposición VI) inversamente como la fuerza centrípeta.

LEMA XII

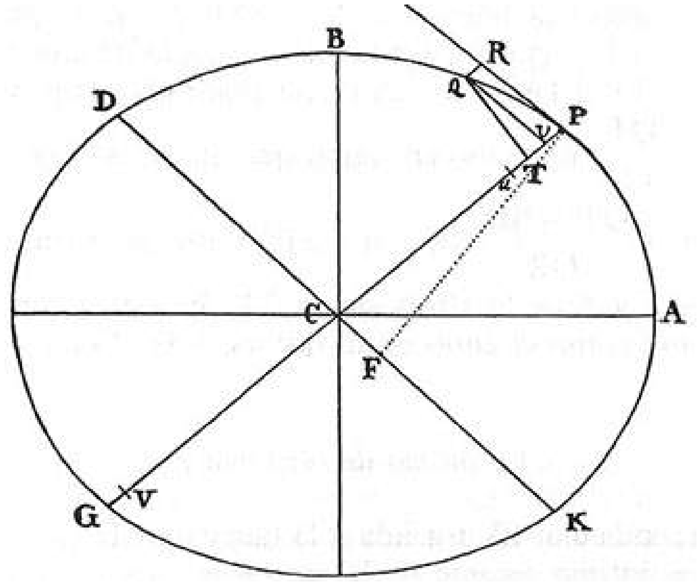
Todos los paralelogramos descritos en torno a cualesquiera diámetros conjugados de una elipse o de una hipérbola dadas son iguales entre sí.

Consta por las cónicas.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA V

Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al centro de la elipse.

Sean CA, CB los semiejes de la elipse: GP, DK diámetros conjugados; PF, QT las perpendiculares a los diámetros, QV una ordenada del diámetro GP, y si se completa el paralelogramo Q*v*PR, el rectángulo P*v*G será (por las cónicas) a Qv^2 como PC^2 A CD^2 Y (por semejanza de los triángulos Q*v*T, PCF) Qv^2 es a QT^2 como PC^2 a PF^2 y multiplicando las razones, el rectángulo P*v*G a QT^2 como PC^2 a CD^2, y PC^2 a PF^2, esto es *v*G a $\frac{QT^2}{Pv}$ como PC^2 a $\frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Sustitúyase QR por P*v* y (por el Lema XII) BC x CA por CD x PF, así como (al acercarse los puntos P y Q) 2PC por *v*G tendremos que, multiplicando extremos y medios entre sí, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Así pues (por el Corolario 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $\frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$; esto es (por estar dados $2BC^2 \times CA^2$) inversamente como $\frac{1}{PC}$; o lo que es lo mismo directamente como la distancia PC. Q. E. I.



Lo mismo de otro modo

En la recta PG y en la otra parte del punto T tómese el punto *u* de tal modo que T*u* sea igual al propio T*v*; después tómese *u*V de modo que sea a *v*G como DC^2 a PC^2. Y puesto que por las cónicas Qv^2 es a P*v*G como DC^2 a PC^2, Qv^2 será igual a P*v* x *u*V. Añádase a ambos el rectángulo *u*P*v* y el cuadrado de la cuerda del arco PQ resultará igual al rectángulo VP*v* y, por tanto, el círculo tangente a la sección cónica en el punto P, y que pase por el punto Q, pasará también por el punto V. Acérquense los puntos P y Q, y la razón *u*V a *v*G que es la misma que la de DC^2 a PC^2, vendrá a ser la misma que la de PV a PG o la de PV a 2PC; y por tanto PV será igual a $\frac{2DC^2}{PC}$. Por ello la fuerza por la que un cuerpo P gira en una elipse será inversamente como $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$ (por el Corolario 3 de la Proposición VI), esto es (por estar dado $2DC^2 \times PF^2$) directamente como PC. Q. E. I.

COROLARIO 1. La fuerza es, por tanto, como la distancia del cuerpo al centro de la elipse; y viceversa, si la fuerza es como la distancia, el cuerpo girará en una elipse que tiene su centro en el centro de fuerzas, o si no, tal vez en un círculo en el que también puede convertirse la elipse.

COROLARIO 2. Y serán iguales también los tiempos periódicos de las revoluciones efectuadas en torno al mismo centro en todas las elipses. Pues los tiempos mencionados en las elipses semejantes serán iguales (por los Corolarios 3 y 8 de la Proposición IV), en cambio en las elipses que tienen el eje mayor común están entre sí directamente como el área total de las elipses e inversamente como las partes de área descritas en el mismo tiempo; esto es directamente como sus ejes menores e inversamente como las velocidades de los cuerpos en los vértices principales; o lo que es lo mismo, directamente como los ejes menores e inversamente como las ordenadas al mismo punto del eje común; en consecuencia (por la igualdad de las razones directas e inversas) en razón de igualdad.

ESCOLIO

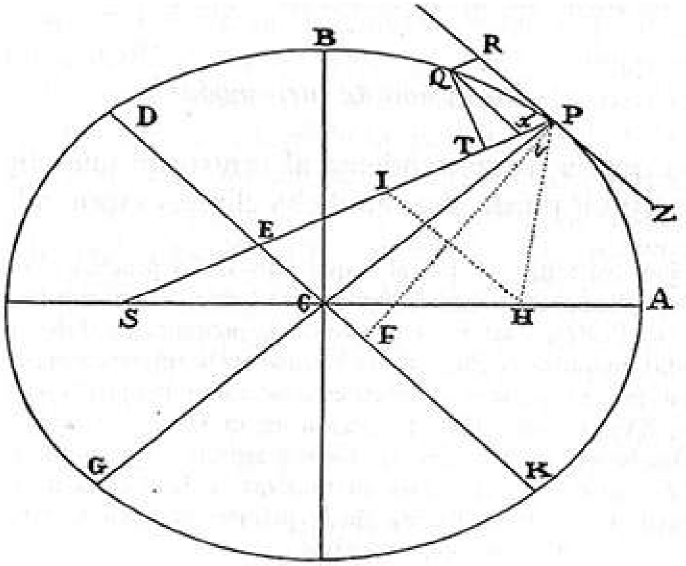
Si una elipse, por alejarse su centro infinitamente, se convierte en una parábola, el cuerpo se moverá en esta parábola; y la fuerza ahora tendente a un centro infinitamente distante resultará constante. Este es el teorema de *Galileo*. Y si la sección parabólica de un cono (al cambiar la inclinación del plano secante del cono) se convierte en una hipérbola, el cuerpo se moverá en el perímetro de ésta con una fuerza centrípeta transformada en centrífuga. Y del mismo modo que si en un círculo o una elipse las fuerzas tienden al centro de la figura situado en la abscisa, estas fuerzas, aumentando o disminuyendo las ordenadas según una razón dada o también alterando el ángulo de inclinación de las ordenadas a la abscisa, siempre aumentan o disminuyen en razón a las distancias al centro, mientras los tiempos periódicos permanezcan iguales, del mismo modo en todas las figuras si las ordenadas aumentan o disminuyen en una razón dada, o el ángulo de inclinación se altera en cualquier sentido permaneciendo igual el tiempo periódico, las fuerzas tendentes a cualquier centro situado en la abscisa aumentan o disminuyen en cada ordenada en razón a las distancias al centro.

Sección III
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS EN SECCIONES CÓNICAS EXCÉNTRICAS

PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA VI

Si un cuerpo gira en una elipse, hallar la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la elipse.

Sea S el foco de la elipse. Trácese SP secante tanto del diámetro DK de la elipse en E como de la ordenada Q*v* en *x* y complétese el paralelogramo Q*x*PR. Es evidente que EP es igual al semieje mayor AC dado que trazada desde el otro foco H la línea HI paralela a la propia EC, por ser iguales CS, CH, son iguales ES, El, igual que EP es la semisuma de PS, PI, esto es (por ser paralelas HI, PR e iguales los ángulos IPR, HPZ) de PS, PH que conjuntamente son iguales a todo el eje 2AC. Trácese la perpendicular QT sobre SP y llamando L al «latus rectum» principal de la elipse (o sea $\frac{2BC^2}{AC}$), L·QR será a L·P*v* como QR a P*v*, esto es como PE o AC a PC; y L·P*v* será a G*v*P como L a G*v*; y G*v*P será a Qv^2 como PC^2 a CD^2 y (por el Corolario 2 del Lema VII), al coincidir Q y P, ocurrirá que Qv^2 será igual a Qx^2; y Qx^2 o Qv^2 es a QT^2 como EP^2 a PF^2, esto es, como CA^2 a PF^2 o también (por el Lema XII) como CD^2 a CB^2, y multiplicando todas estas razones L·QR será a QT^2 como AC·L PC^2·CD^2 o también como 2CB^2·PC^2·CD^2 a PC·G*v*·CD^2·CB^2, o bien, como 2PC a G*v*. Pero al coincidir los puntos Q y P ocurre que 2PC es igual a G*v*. Luego también se igualan L·QR y QT^2 por ser proporcionales a aquéllos. Multiplicando ahora estos iguales por $\frac{SP^2}{QR}$ tendremos que L·SP^2 es igual a $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$. Luego (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como L·SP^2, esto es, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q. E. I.



Lo mismo de otro modo[22].

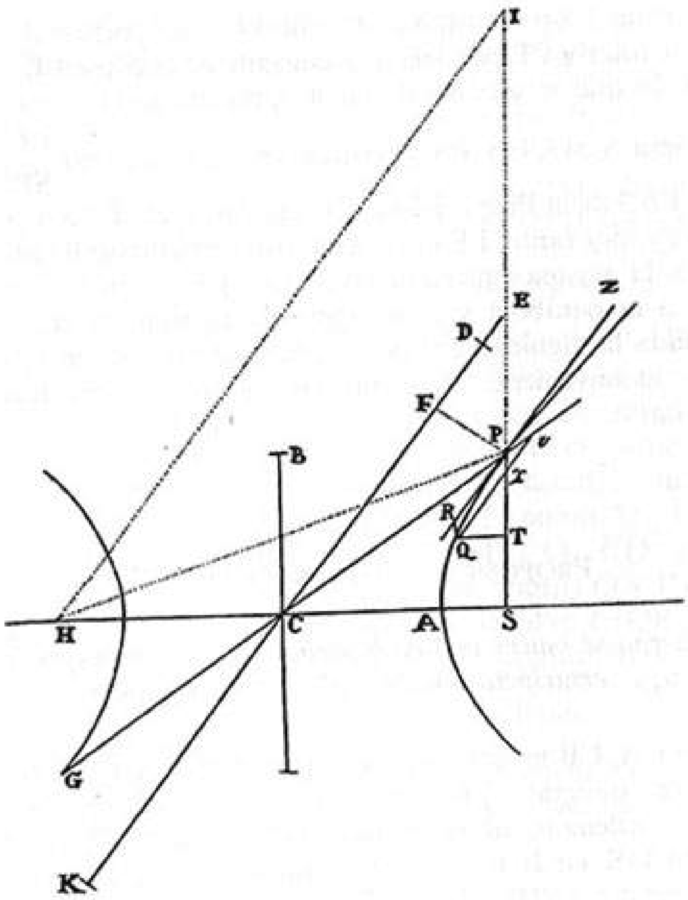
Puesto que la fuerza tendente al centro de una elipse, por la que un cuerpo P puede girar en dicha elipse, es (por el Corolario 1 de la Proposición X) como la distancia CP del cuerpo al centro de la elipse; trácese CE paralela a la tangente de la elipse PR; y la fuerza por la que el cuerpo P puede girar en torno a otro punto cualquiera S, si CE y PS se cruzan en E, será como $\frac{PE^3}{SP^2}$ (Por el Corolario 3 de la Proposición VII), esto es, si el punto S es foco de la elipse y, por tanto, PE está dado, como el inverso de SP^2. Q. E. I.

Con la misma brevedad con que aplicábamos el problema quinto a la parábola y a la hipérbola podríamos hacerlo aquí. Pero dada la dignidad del problema y su utilidad en lo sucesivo no hay inconveniente en confirmar mediante demostración los demás casos.

Proposición XII. Problema VII

Si un cuerpo se mueve en una hipérbola, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de la figura.

Sean CA, CB los semiejes de la hipérbola; sean PG, KD otros diámetros conjugados; PF una perpendicular al diámetro KD; y Q*v* una ordenada al diámetro GP. Trácese SP secante del diámetro DK en E y de la ordenada Q*v* en *x*, y complétese el paralelogramo QRP*x*. Es evidente que EP es igual al semieje transverso Ac, puesto que trazada la línea HI, paralela a EC, desde el otro foco H de la hipérbola, por la igualdad de CS y CH serán iguales ES y EI; además porque EP es la semidiferencia de PS, PI esto es (por el paralelismo de IH, PR y la igualdad de los ángulos IPR, HPZ) de PS, PH, cuya diferencia es igual a todo el eje 2AC. Trácese QT perpendicular a SP. Llamando L al «latus rectum» principal de la hipérbola $\left(\text{o } \frac{2BC^2}{AC}\right)$ tendremos $\frac{L \text{ x } QR}{L \text{ x } Pv} = \frac{QR}{Pv} = \frac{Px}{Pv}$ esto es (por la semejanza de los triángulos P*xv*, PEC) $\frac{PE}{PC} = \frac{AC}{PC}$. Y también $\frac{L \text{ x } Pv}{Gv \text{ x } Pv} = \frac{L}{Gv}$; y (por la naturaleza de las cónicas), el rectángulo $\frac{Gv \text{ x } vP}{Qv^2} = \frac{PC^2}{CD^2}$; y (por el corolario 2 del lema VII) cuando P y Q coinciden $Qx^2 = Qv^2$; y $\frac{Qx^2}{QT^2}$, o $\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{EP^2}{PF^2} = \frac{CA^2}{PF^2}$ o (por el lema XII)= $\frac{CD^2}{CB^2}$ y multiplicando (ordenadamente) todas estas razones resultara que $\frac{L \text{ x } QR}{QT^2} =$ $\frac{AC \text{ x } L \text{ x } PC^2 \text{ x } CD^2}{PC \text{ x } Gv \text{ x } CD^2 \text{ x } CB^2} = \frac{2CB^2 \text{ x } PC^2 \text{ x } CD^2}{PC \text{ x } Gv \text{ x } CD^2 \text{ x } CB^2} = \frac{2PC}{Gv}$. Pero al coincidir P y Q resulta que 2PC=G*v*. Luego también se igualan L x QR y QT^2 proporcionales a los anteriores. Multiplicando estas igualdades por $\frac{SP^2}{QR}$ tendremos que L x $SP^2 =$ $\frac{SP^2 \text{ x } QT^2}{QR}$. Luego (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como L x SP^2, es decir, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q. E. I.



Lo mismo de otra manera

Hállese la fuerza que parte desde el centro C de la hipérbola. Será proporcional a la distancia CP. Por ello la fuerza tendente al foco S será (por el Corolario 3 de la Proposición VIII) como $\frac{PE^3}{SP^2}$ esto es, por estar dada PE, inversamente como SP^2. Q. E. I.

Del mismo modo se demuestra que un cuerpo cuya fuerza centrípeta se cambia en centrífuga se moverá en una hipérbola opuesta.

LEMA XIII

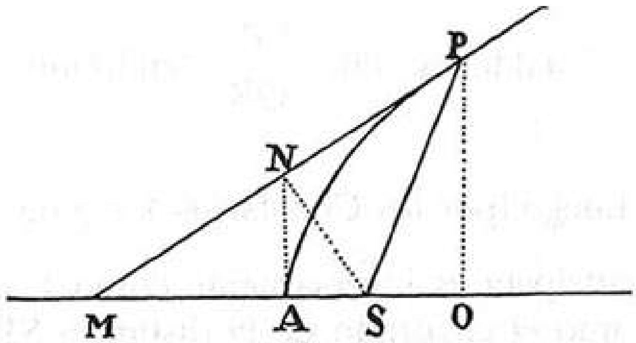
El «latus rectum» correspondiente a un vértice cualquiera de una parábola es cuatro veces la distancia de dicho vértice al foco de la figura.

Es evidente por las cónicas.

LEMA XIV

La perpendicular que se traza desde el foco de una parábola a su tangente es media proporcional entre las distancias desde el foco al punto de contacto y al vértice principal de la figura.

Sea AP la parábola, S su foco, A el vértice principal, P el punto de contacto, PO la ordenada al diámetro principal, PM la tangente al diámetro principal concurrente en M, y SN la perpendicular desde el foco a la tangente. Únanse A, N y por la igualdad de MS y SP, MN y NP, MA y AO; las rectas AN y OP serán paralelas; y por tanto el triángulo SAN será rectángulo en A y semejante a los triángulos iguales SNM, SNP; luego PS es a SN como SN a SA. Q. E. D.



COROLARIO 1. PS^2 es a SN^2 como PS a SA.

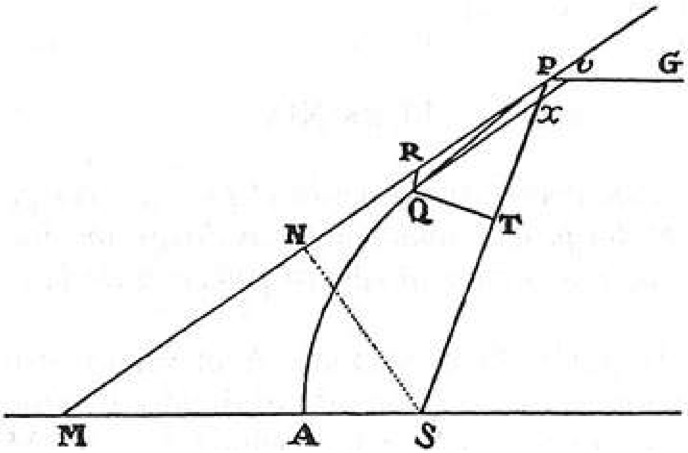
COROLARIO 2. Y por estar dada SA, SN^2 es como PS.

COROLARIO 3. Y el cruce de una tangente cualquiera PM con la recta SN que le es perpendicular desde el foco, incide sobre la recta AN que es tangente a la parábola en el vértice principal.

PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA VIII

Si un cuerpo se mueve en el perímetro de una parábola, hállese la ley de la fuerza centrípeta tendente al foco de dicha figura.

Sea la misma figura construida para el Lema, y sea P el cuerpo en el perímetro de la parábola, y desde el punto Q, hacia el que el cuerpo se mueve, tracemos QR paralela a SP así como la perpendicular QT y la recta Q*v* paralela a la tangente y que corta tanto al diámetro PG en *v* como a SP en *x*. Ahora bien por la semejanza de los triángulos P*xv*, SPM, y por la igualdad de los lados SM, SP de uno, son iguales los lados P*x* o QR y Pu del otro. Pero (por las cónicas) el cuadrado de la ordenada Q*v* es igual al rectángulo bajo el «latus rectum» y el segmento P*v* del diámetro; esto es (por el Lema XIII) al rectángulo 4PS x P*v* o 4PS x QR; y al coincidir P y Q la razón Q*v* a Q*x* (por el Corolario 2 del Lema VII) es una razón de igualdad. Luego Qx^2, en tal caso, es igual al rectángulo 4PS x QR. Por tanto (por la semejanza de los triángulos QxT, SPN) $\frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{PS^2}{SN^2}$ (esto es, por el Corolario 1 del Lema XIV) $\frac{PS}{SA} = \frac{4PS \times QR}{4SA \times QR}$, y de aquí (por la Proposición IX del Libro V de los *Elementos*), $QT^2 = 4SA \times QR$. Multiplicando estas igualdades por $\frac{SP^2}{QR}$ obtendremos que $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = SP^2 \times 4SA$; y por esto (por los Corolarios 1 y 5 de la Proposición VI) la fuerza centrípeta es inversamente como $SP^2 \times 4SA$, esto es, por estar dado 4SA, inversamente como el cuadrado de la distancia SP. Q. E. I.



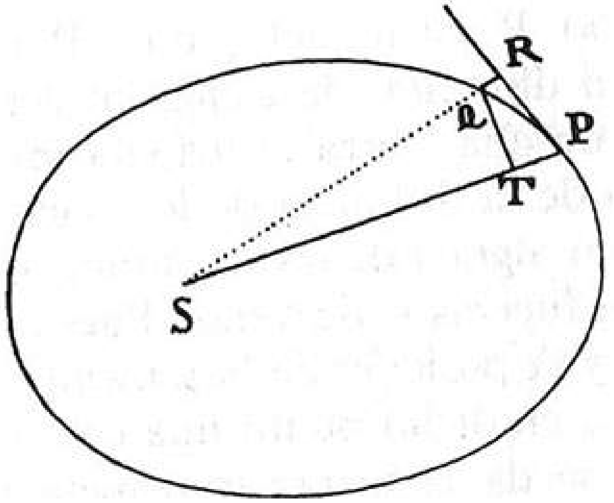
COROLARIO 1. Se sigue de las tres últimas proposiciones que si un cierto cuerpo P parte del punto P con una velocidad cualquiera según la dirección de cierta línea recta PR y bajo la acción simultánea de una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, dicho cuerpo se moverá en alguna de las secciones cónicas que tenga su foco en el centro de fuerzas y viceversa. Pues conocidos el foco, el punto de contacto y la posición de la tangente, se puede describir la cónica que tendrá en dicho punto una curvatura dada. Pero se da la curvatura si se da la fuerza centrípeta y la velocidad del cuerpo; y dos órbitas tangentes entre sí con la misma fuerza centrípeta y la misma velocidad no pueden describirse.

COROLARIO 2. Si la velocidad con que un cuerpo parte de su lugar P es tal que el segmento PR puede ser recorrido en una parte infinitésima de tiempo y la fuerza centrípeta es tal que en el mismo tiempo puede mover al cuerpo a lo largo del espacio QR, dicho cuerpo se moverá en una sección cónica cuyo «latus rectum» principal es la susodicha cantidad $\frac{QT^2}{QR}$ en el último instante cuando las líneas PR, QR, disminuyen *in infinitum*. En estos Corolarios considero al círculo como una elipse; y exceptúo el caso en que el cuerpo desciende hacia el centro según una línea recta.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA VI

Si varios cuerpos giran en torno a un centro común y la fuerza centrípeta es inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro, digo que los «latera recta» principales de las órbitas son como los cuadrados de las áreas descritas en tiempos iguales por los radios trazados al centro.

Pues (por el Corolario 2 de la Proposición XIII) el «latus rectum» L es igual a la magnitud $\frac{QT^2}{QR}$ en el último instante cuando P y Q tienden a coincidir. Pero la pequeña línea QR en un tiempo dado es como la fuerza centrípeta generatriz, esto es (por hipótesis) inversamente como SP^2. Luego $\frac{QT^2}{QR}$ es como $QT^2 \times SP^2$, esto es, el «latus rectum» L por el cuadrado del área QT x SP. Q. E. D.



COROLARIO. De aquí que el área total de la elipse así como la del rectángulo, proporcional a ella, comprendido entre los ejes es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y el tiempo periódico. Pues el área total es como el área QT x SP, descrita en un tiempo dado, multiplicada por el tiempo periódico.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA VII

Supuesto esto, digo que los tiempos periódicos en las elipses son como los ejes mayores elevados a la potencia $^3/_2$.

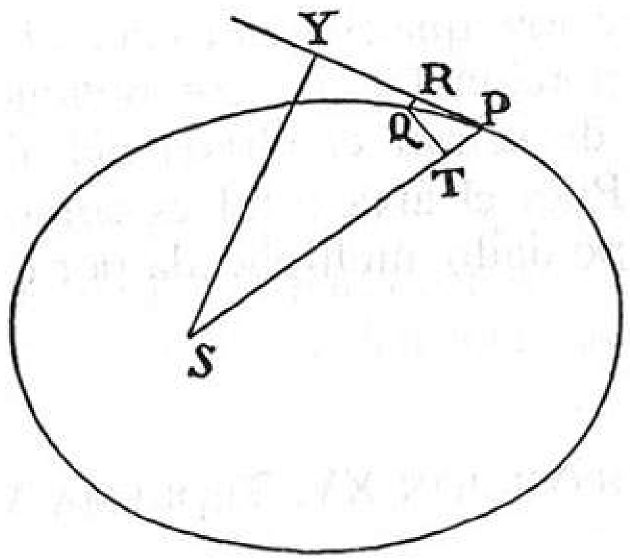
Puesto que el eje menor es media proporcional entre el eje mayor y el «latus rectum» y por tanto el rectángulo comprendido entre los ejes es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y del eje mayor elevado a $^3\!/_2$. Pero dicho rectángulo (por el Corolario de la Proposición XIV) es como el producto de la raíz cuadrada del «latus rectum» y del tiempo periódico. Dividamos uno y otro por la raíz cuadrada del «latus rectum» y tendremos que el tiempo periódico sigue en la misma razón que la potencia $^3\!/_2$ del eje mayor. Q. E. D.

COROLARIO. Los tiempos periódicos en las elipses son iguales a los de los círculos, cuyos diámetros son iguales a los ejes mayores de las elipses.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA VIII

Supuesto lo dicho y trazadas a los cuerpos líneas rectas tangentes también en ese punto a la órbita, y trazadas perpendiculares desde el foco común a dichas tangentes: digo que las velocidades de los cuerpos están en razón compuesta, inversamente, de las perpendiculares y, directamente, de la raíz cuadrada de los «latera recta» principales.

Tracemos desdé el foco S a la tangente PR la perpendicular SY y la velocidad del cuerpo P será inversamente como la raíz de la cantidad $\frac{SY^2}{L}$. Pues dicha velocidad es como el arco infinitamente pequeño PQ descrito en una partícula instantánea de tiempo, esto es (por el Lema VII) como la tangente PR, lo que es lo mismo, por la proporcionalidad de PR a QT y de SP a SY, como $\frac{SP \times QT}{SY}$, o también, inversamente como SY y directamente como SP x QT; y SP x QT es como el área descrita en un tiempo dado, esto es (por la Proposición XIV) como la raíz cuadrada del «latus rectum». Q. E. D.



COROLARIO 1. Los «latera recta» principales están en razón compuesta de los cuadrados de las perpendiculares y del cuadrado de las velocidades.

COROLARIO 2. Las velocidades de los cuerpos en las distancias máximas y mínimas al foco común están en razón compuesta inversamente de las distancias y directamente de la raíz cuadrada de los «latera recta» principales. Pues las perpendiculares son ahora las distancias mismas.

COROLARIO 3. Y, por tanto, la velocidad en una sección cónica, en la distancia máxima o mínima al foco, es a la velocidad en un círculo, a la misma distancia del centro, como la raíz cuadrada del «latus rectum» principal al doble de dicha distancia.

COROLARIO 4. Las velocidades de los cuerpos que giran en elipses a distancias medias del foco común son iguales a las de los cuerpos que giran en círculos a las mismas distancias; esto es (por el Corolario 6 de la Proposición IV) inversamente como la raíz cuadrada de las distancias. Pues ahora las perpendiculares son semiejes menores y éstos son como las medias proporcionales entre las distancias y los «latera recta». Multiplíquense la inversa de esta razón por la raíz cuadrada de la razón directa de los «latera recta» y obtendremos la raíz cuadrada de la razón inversa de las distancias.

COROLARIO 5. En la misma figura, o incluso en figuras distintas, cuyos «latera recta» principales son iguales, la velocidad del cuerpo es inversamente como la perpendicular trazada desde el foco a la tangente.

COROLARIO 6. En una parábola la velocidad es inversamente como la raíz cuadrada de la distancia del cuerpo al foco de la figura; en una elipse varía más y en una hipérbola menos que la razón susodicha. Pues (por el Corolario 2 del Lema XIV) la perpendicular trazada desde el foco a la tangente de la parábola es como la raíz cuadrada de la distancia. En la hipérbola la perpendicular varía menos y en la elipse varía más.

COROLARIO 7. En una parábola la velocidad de un cuerpo a cualquier distancia del foco es a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la misma distancia del centro, como la raíz cuadrada de la razón de 2 a 1; en la elipse es menor que esta razón y en la hipérbola mayor. Pues, por el Corolario segundo de esta Proposición, la velocidad en el vértice de la parábola está en esta razón, y, por el Corolario 6 de esta Proposición y por la cuarta, se conserva la misma proporción en todas las distancias. Y por tanto también, en una parábola, la velocidad es en todas partes igual a la velocidad de un cuerpo que gire en un círculo a la mitad de distancia, y es menor en una elipse y mayor en una hipérbola.

COROLARIO 8. La velocidad de un cuerpo que gira en una sección cónica cualquiera es a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la distancia del semi «latus rectum» principal de la sección como dicha distancia es a la perpendicular trazada desde el foco a la tangente de la sección. Es evidente por el Corolario quinto.

COROLARIO 9. De donde, dado que (por el Corolario 6 de la Proposición IV) la velocidad de un cuerpo que gira en este círculo es a la velocidad de otro cuerpo que gira en cualquier otro círculo inversamente como la raíz cuadrada de las distancias, por lo mismo se seguirá que la velocidad de un cuerpo que gira en una sección cónica será a la velocidad de un cuerpo que gira en un círculo a la misma distancia como es la media proporcional entre dicha distancia común y la mitad del «latus rectum» principal de la sección, a la perpendicular trazada desde el foco común a la tangente de la sección.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IX

Supuesto que la fuerza centrípeta es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro y que la cantidad absoluta de dicha fuerza es conocida, hállese la línea descrita por el cuerpo desde un punto dado, con una velocidad dada y partiendo en la dirección de una recta dada.

Sea la fuerza centrípeta tendente a un punto S la fuerza con la que gira un cuerpo *p* en una órbita dada *pq* y supongamos conocida su velocidad en el punto *p*. Parta el cuerpo P desde el punto P según la línea PR con una velocidad dada, e inmediatamente, obligado por la fuerza centrípeta, desvíese por la sección cónica PQ. La recta PR será tangente a la sección en P. Del mismo modo, la recta *pr* sea tangente a la órbita *pq* en *p* y si se supone que se trazan perpendiculares a dichas tangentes desde S, ocurrirá (por el Corolario 1 de la Proposición XVI) que el «latus rectum» principal de la sección cónica estará, respecto al «latus rectum» principal de la órbita, en razón compuesta de la razón cuadrada de las perpendiculares y de la razón cuadrada de las velocidades y, por ello, está dada. Sea L el «latus rectum» de la sección. Se da también el foco S de la misma sección cónica. Sea el ángulo RPH el suplementario de RPS y tendremos dada en posición la línea PH en la que está el otro foco H. Una vez trazada la perpendicular SK sobre PH, supongamos que se traza el semieje conjugado BC y tendremos que:

$$SP^2 - 2PH \times PK + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4(BH^2 - BC^2) =$$
$$(SP + PH)^2 - L(SP + PH) =$$
$$SP^2 + 2PS \times PH + PH^2 - L(SP + PH)$$

añádase a ambos miembros

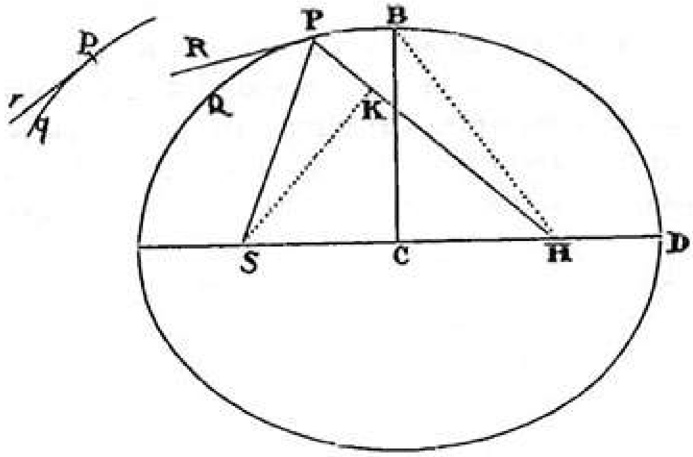
$$2PK \times PH - SP^2 - PH^2 + L(SP + PH)$$

y resultará

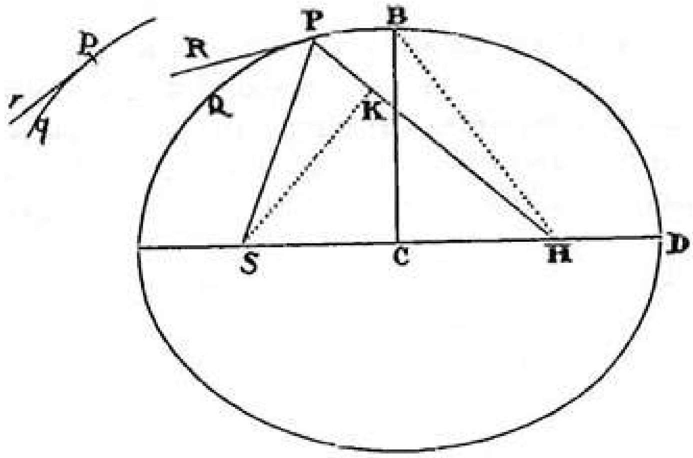
$$L(SP + PH) = 2PS \times PH + 2PK \times PH,$$

o también

$$\frac{(SP + PH)}{PH} = \frac{2(SP + KP)}{L}$$



De donde tenemos dada tanto en longitud, como en posición, PH. Esto es, si la velocidad del cuerpo en P es tal que el «latus rectum» L fuera menor que 2SP + 2KP entonces PH caerá, con la línea PS, del mismo lado de la tangente PR y, por tanto, la figura será una elipse, y vendrá dada, por estar dados los focos S, H y el eje principal SP + PH. Pero si la velocidad del cuerpo es tal que el «latus rectum» L fuese igual a 2SP + 2KP la longitud de PH será infinita; y por tanto la figura será una parábola que tiene por eje a SH paralelo a la línea PK, por tanto, también estará dada. Y si el cuerpo parte de P con una velocidad aún mayor, la longitud PH estará al otro lado de la tangente y, por tanto, la tangente pasa por entre ambos focos, siendo entonces la figura una hipérbola que tiene como eje principal la diferencia de las líneas SP y PH; y por eso estará dada. Pues si el cuerpo en todos estos casos gira en una sección cónica así hallada, está demostrado en las Proposiciones XI, XII, XIII que la fuerza centrípeta será inversamente como el cuadrado de la distancia del cuerpo al centro de fuerzas S; y por tanto la línea PQ representa correctamente la trayectoria descrita por el cuerpo con semejante fuerza, partiendo de un punto dado P, con una velocidad dada y según una recta PR dada en posición. Q. E. F.



COROLARIO 1. De aquí que en toda sección cónica, dados el vértice principal D, el «latus rectum» L y el foco S, se obtiene el otro foco H, tomando DH a DS como el «latus rectum» a la diferencia entre el «latus rectum» y 4DS. Pues la proporción $\frac{SP + PH}{PH} = \frac{2SP + 2KP}{L}$ se convierte para este Corolario en $\frac{DS + DH}{DH} = \frac{4DS}{L}$ y $\frac{DS}{DH} = \frac{4DS - L}{L}$.

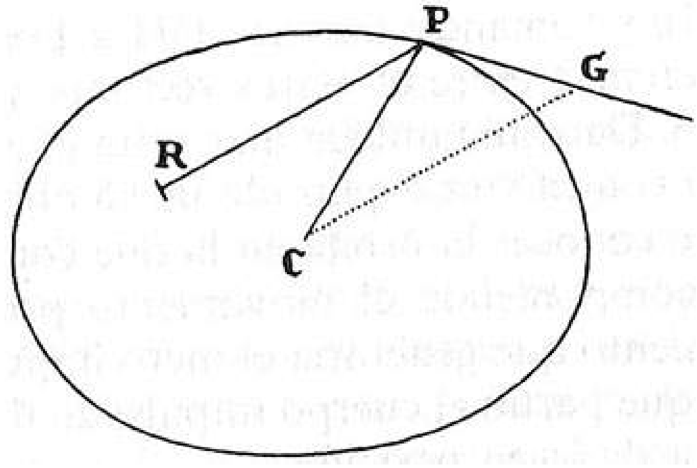
COROLARIO 2. De donde, dada la velocidad de un cuerpo en el vértice principal D, se hallará directamente la órbita, a saber, tomando su «latus rectum» al doble de la distancia DS, en razón cuadrada de esta velocidad dada a la velocidad del cuerpo que gira en el círculo a la distancia DS (por el Corolario 3 de la Proposición XVI), y tomando después DH a DS como el «latus rectum» a la diferencia entre el «latus rectum» y 4DS.

COROLARIO 3. De aquí también que, si un cuerpo se mueve en cualquier sección cónica y es expulsado de su órbita por cualquier impulso, se puede conocer la órbita en la que continuará después su curso. Pues, componiendo el movimiento propio del cuerpo con aquel movimiento que generaría el mero impulso, se tendrá el movimiento con que partió el cuerpo impulsado de un lugar dado y según una recta dada en posición.

COROLARIO 4. Y si dicho cuerpo es perturbado continuamente por una fuerza impresa desde fuera, podemos conocer muy aproximadamente su curso calculando los cambios que en algunos puntos produce dicha fuerza y estimando a partir de la analogía de la serie los cambios continuos en los lugares intermedios[23].

ESCOLIO

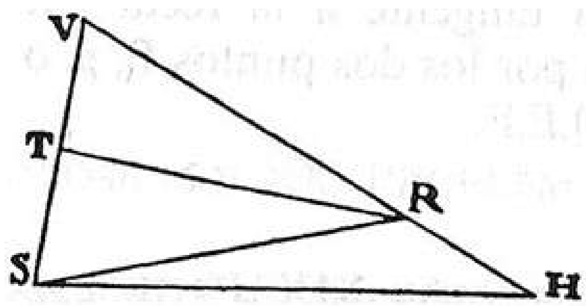
Si un cuerpo P, con una fuerza centrípeta tendente a un punto dado cualquiera R, se mueve en el perímetro de una sección cualquiera dada cuyo centro sea C, y se desea hallar la ley de la fuerza centrípeta, trácese GC paralela al radio RP y cortando a la tangente PG en G; y entonces la fuerza mencionada será (por el Corolario 1 y el Escolio de la Proposición X, y por el Corolario 3 de la Proposición VII) como $\frac{CG^3}{RP^2}$ [24].



Sección IV
DE COMO HALLAR ÓRBITAS ELÍPTICAS, PARABÓLICAS E HIPERBÓLICAS A PARTIR DE UN FOCO DADO

Lema XV

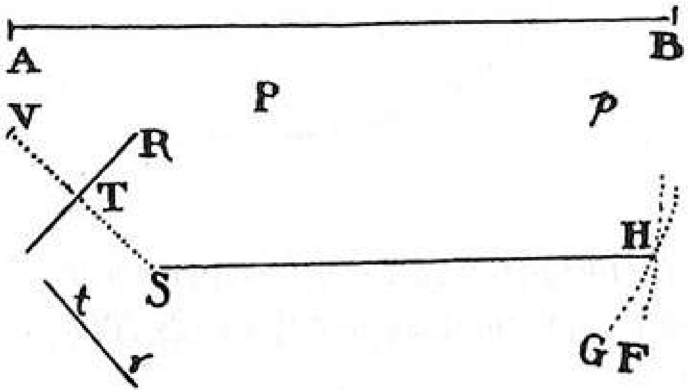
Si de los dos focos S, H, de una elipse o de una hipérbola trazamos hasta un tercer punto V las rectas SV, HV, una de las cuales HV es igual al eje principal de la figura, esto es, al eje en que están situados los focos y la otra SV es bisecada en T por la perpendicular TR trazada sobre ella, dicha perpendicular TR tocará a la sección cónica en algún punto; y al contrario, si la toca, HV será igual al eje principal de la figura.



Corte la perpendicular TR a la recta HV, prolongada si es preciso, en R, y únanse S y R. Por ser iguales TS y TV serán también iguales las rectas SR, VR, y los ángulos TRS y TRV. De donde el punto R estará en la sección cónica y la perpendicular TR será tangente a ella; «et contra». Q. E. D.

Proposición XVIII. Problema X

Dados el foco y los ejes principales trazar trayectorias elípticas e hiperbólicas que pasen por puntos dados y toquen a rectas dadas en posición.

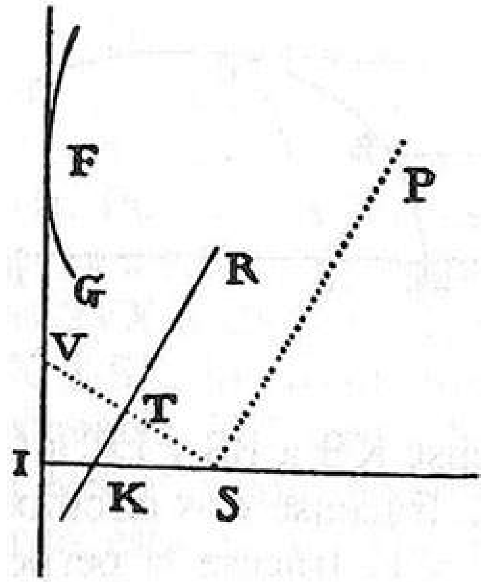


Sea S el foco común de las figuras; sea AB la longitud del eje principal de una trayectoria cualquiera; P el punto por el que debe pasar la trayectoria y sea TR la recta que debe tocar. Con centro en P y radio AB - SP, si la órbita es una elipse, AB + SP si fuere una hipérbola, trácese el círculo HG. Trácese la perpendicular ST sobre la tangente TR y prolónguese aquella hasta V, de modo que TV sea igual a ST y con centro en V y radio AB trácese el círculo FH. De esta manera, ya se den dos puntos P, *p*, ya dos tangentes, TR, *tr*, ya un punto P y la tangente TR, hay que trazar dos círculos. Sea H su intersección, y desde los focos S, H, con el eje dado trácese la trayectoria. Digo que está dada. Pues la trayectoria descrita (dado que PH + SP en una elipse y PH - SP en una hipérbola, es igual al eje) pasará por el punto P y (por el Lema anterior) será tangente a la recta TR. Y por el mismo argumento o pasará por los dos puntos P, *p*, o será tangente a las dos rectas TR, *tr*. Q. E. F.

Proposición xix. Problema xi

Trazar en torno a un foco dado una trayectoria parabólica que pase por unos puntos dados y sea tangente a rectas dadas en posición.

Sea S el foco, P el punto y TR la tangente a la trayectoria que se ha de trazar. Trácese el círculo FG, con centro en P y radio PS.

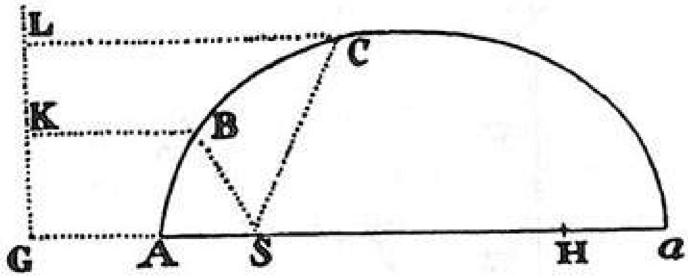


Trácese desde el foco a la tangente la perpendicular ST y prolónguese hasta V de tal modo que TV sea igual a ST. Del mismo modo habría que trazar el otro círculo *fg* si se diera otro punto *p*, o también hallar otro punto *v* si se diera otra tangente *tr*; después trácese la recta IF, tangente a los dos círculos FG, *fg* si se dan dos puntos P, *p*, o que pase por los puntos V, *v*, si se dan dos tangentes TR, *tr*, o que sea tangente al círculo FG y pase por el punto V si se da el punto P y la tangente TR. Trácese sobre FI la perpendicular SI, bisecándola en K; y con eje SK y vértice principal en K, trácese la parábola. Digo que está resuelto. Pues la parábola, por ser iguales SK, IK entre sí y SP, FP, también, pasará por el punto P; y (por el Lema XIV, Corolario 3) al ser iguales ST y TV y ser recto el ángulo STR, será tangente a la recta TR. Q. E. F.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA XII

Trazar en torno a un foco dado una trayectoria dada de cualquier género que pase por puntos dados y sea tangente a rectas dadas en posición.

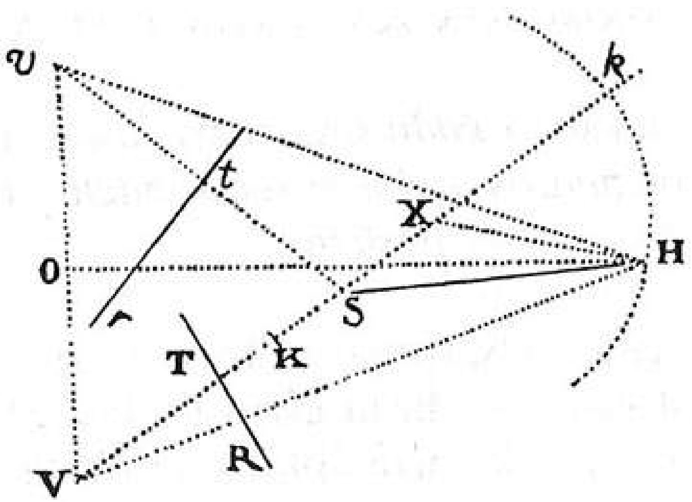
CASO 1. Dado el foco S, trazar la trayectoria ABC por los dos puntos B, C. Puesto que se da la clase de trayectoria también se dará la razón entre el eje principal y la distancia entre focos.



Según esa razón tómense KB a BS y LC a CS. Con centros en B y C, y radios BK y

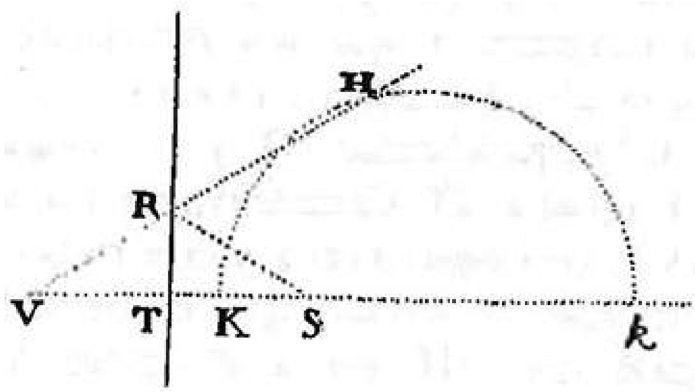
CL, trácense dos círculos y, sobre la recta KL tangente a ellos en K y L, trácese la perpendicular SG y córtese ésta en A y a de tal modo que GA sea a AS y G*a* a *a*S como KB es a BS y con eje A*a* y vértices en A, *a*, trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues sea H el otro foco de la figura trazada y al ser GA a AS como G*a* a *a*S, restando también estará G*a* - GA (o sea A*a*) a *a*S - AS (o sea SH) en la misma razón y, por tanto, en la misma razón en que está el eje principal de la figura que debe ser trazada con la distancia entre sus focos; y por tanto la figura trazada es del mismo tipo que la que había que trazar. Y, dado que KB respecto a BS y LC respecto a CS están en la misma razón, esta figura pasará por B, C, como se sabe por las cónicas.

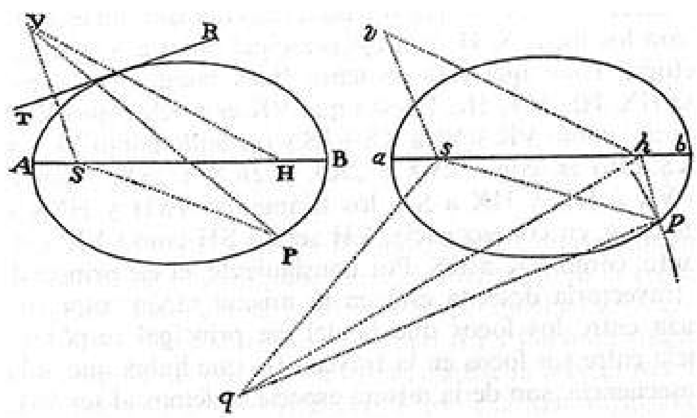
CASO 2. Dado el foco S trazar la trayectoria que sea tangente a las rectas TR, *tr*, en cualquier punto. Trácense desde el foco a las tangentes las perpendiculares ST, *st*, y prolónguense hasta V, *v*, de tal modo que TV, *tv*, sean iguales respectivamente a TS y *ts*. Bisecando V*v* en O trácese desde ésta una perpendicular infinita OH y prolónguese al infinito la recta VS cortándola en los puntos K, *k* de tal modo que VK sea a KS y V*k* a *k*S como el eje principal de la figura que ha de hallarse es a la distancia entre focos. Sobre el diámetro K*k* trácese el círculo que corte a OH en H; y con los focos S, H, y el eje principal igual a VH trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues biséquese K*k* en *x* y únanse HX, HS, HV, H*v*. Puesto que VK es a KS como V*k* a *k*S; y sumando como VK + V*ƒc* a KS + *k*S y restando como V*k* - VK a *k*S - KS, esto es, como 2VX a 2KX y 2KX a 2SX, y por tanto como VX a HX y HX a SX, los triángulos VXH y HXS serán semejantes y, en consecuencia, VH será a SH como VX a XH y, por tanto, como VK a KS. Por consiguiente, el eje principal VH de la trayectoria descrita está en la misma razón respecto a la distancia entre los focos que la del eje principal respecto a la distancia entre sus focos en la trayectoria que había que hallar y, en consecuencia, son de la misma especie. Además al ser VH, *u*H, iguales al eje principal y estar VS, *v*S, bisecadas perpendicularmente por las rectas TR, *tr*, es evidente (por el Lema XV) que dichas rectas son tangentes a la trayectoria descrita. Q. E. F.



CASO 3. Dado el foco S trazar una trayectoria que sea tangente en el punto dado R

a la recta TR. Trácese la perpendicular ST a la recta TR y prolónguese aquélla hasta V, de tal modo que TV sea igual a ST. Únase VR, y con la recta VS prolongada infinitamente y cortada en K y *k*, de tal modo que VK sea a SK y *vk* sea a S*k* como el eje principal de la elipse que hay que describir es a la distancia entre sus focos, y trazado un círculo sobre el diámetro K*k*, corte aquél en H a la prolongación de la recta VR, y con los focos S, H, y el eje principal igual a la recta VH trácese la trayectoria. Digo que está resuelto. Pues que VH es a SH como VK es a SK y, por tanto, como el eje principal de la trayectoria que hay que trazar es a la distancia entre sus focos, es evidente por las demostraciones del caso segundo y, por tanto, que la trayectoria descrita es de la misma especie que la que había que describir, mientras que la recta TR, bisectriz del ángulo VRS, es tangente a la trayectoria en el punto R, es evidente por las cónicas. Q. E. F.





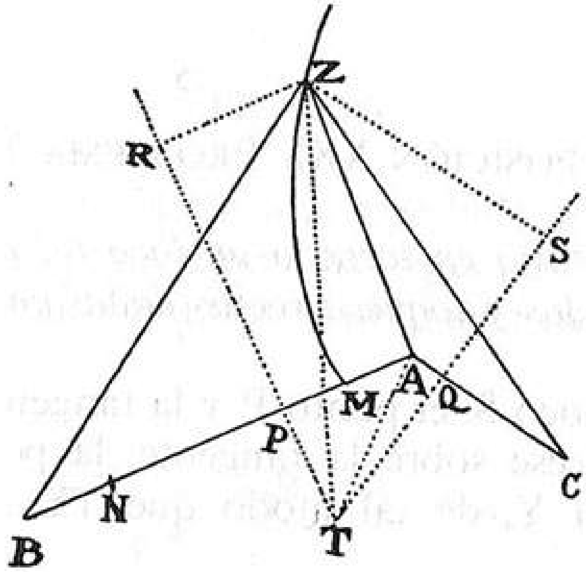
CASO 4. Trácese ahora en torno al foco S la trayectoria APB tangente a la recta TR y que pase por un punto cualquiera P dado fuera de la tangente. Y que sea semejante a la figura *apb* cuyo eje principal es *ab* y trazada con los focos *s, h*. Trácese sobre la tangente TR, la perpendicular ST y prolónguese hasta V de modo que sea TV igual a ST. Constrúyanse los ángulos *hsq*, *shq*, iguales a VSP, SVP; con centro en *q* y con radio tal que sea a *ab* como SP a VS trácese un círculo que corte la figura *apb* en *p*. Únase *sp* y hágase que SH sea a *sh* como SP a *sp* y éstas construyan así el ángulo PSH igual al ángulo *psh* y el ángulo VSH igual al *psq*. Por fin con los focos S, H, el eje principal AB, igual a la distancia VH, trácese la sección cónica. Digo que está resuelto. Pues si se hace que *sv* sea a *sp* como *sh* es a *sq*, y que el

ángulo *vsp* sea igual al ángulo *hsq* y el ángulo *vsh* igual al ángulo *psq*, entonces los triángulos *svh* y *spq* serán semejantes y, por tanto, *vh* será a *pq* como *sh* es a *sq*, esto es (por la semejanza de los triángulos VSP, *hsq*), como VS es a SP o como *ab* es a *pq*. Son pues, iguales *vh* y *ab*. Pero, por la semejanza de los triángulos VSH, *vsh*, ocurre que VH es a SH como *vh* es a *sh*, esto es, el eje de la sección cónica descrita es a la distancia entre sus focos, como el eje *ab* a la distancia *sh* entre sus focos; y por tanto, la figura descrita es semejante a la figura *apb*. Pasará, pues, dicha figura por el punto P, dado que el triángulo PSH es semejante al triángulo *psh*; y dado que VH es igual a su eje y que VS es bisecada perpendicularmente por la recta TR, también será tangente a dicha recta TR. Q. E. F.

Lema XVI

Trazar desde tres puntos dados a otro cuarto punto no dado tres rectas cuyas diferencias o se dan o son nulas.

Caso 1. Sean los puntos dados A, B, C, y el cuarto punto Z, que es necesario hallar; por la diferencia conocida de las líneas AZ, BZ, el punto Z se situará en una hipérbola cuyos focos son A y B, y el eje principal la mencionada diferencia dada. Sea tal eje MN. Tómese PM a MA como MN a AB y trácese PR perpendicular a AB y también tírese ZR perpendicular a PR; por la naturaleza de esta hipérbola ocurrirá que ZR es a AZ como MN es a AB. Por un razonamiento similar el punto Z estará ubicado en otra hipérbola cuyos focos son AC y cuyo eje principal es la diferencia entre AZ y CZ, y puede ahora trazarse QS perpendicular a AC y si después se traza ZS, normal a QS, desde el punto Z de la hipérbola, dicha ZS será a AZ como la diferencia entre AZ y CZ es a AC. Se tienen dadas, pues, las razones entre ZR y ZS con AZ y, por tanto, también las de ZR y ZS entre sí; por lo cual si las rectas RP, SQ, se encuentran en T, y se trazan TZ y TA la figura TRZS estará dada en especie y la recta TZ en la que estará contenido en algún lugar el punto Z estará dada en posición. También estará dada la recta TA lo mismo que el ángulo ATZ; y puesto que están dadas las razones de AZ y TZ a ZS, estarán dadas sus razones entre sí; y de aquí se tendrá dado el triángulo ATZ cuyo vértice es el punto Z. Q. E. I.



CASO 2. Si dos de las tres líneas, por ejemplo, AZ y BZ se igualan, trácese la recta TZ, de tal modo que biseque la recta AB; después hállese el triángulo ATZ «ut supra».

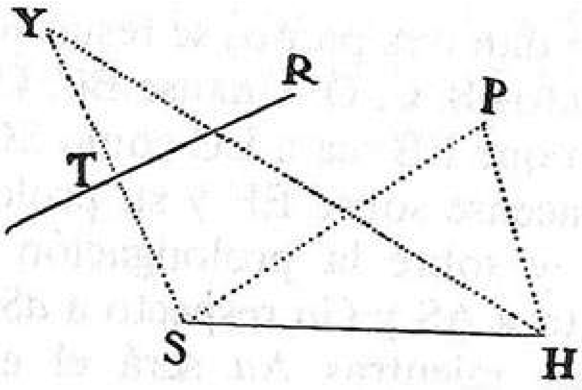
CASO 3. Si las tres son iguales, el punto Z está ubicado en el centro del círculo que pase por los puntos A, B, C. Q. E. I.

Este Lema problemático se resuelve también por el «Liber tactionum» de *Apolonio*, restituido por *Vieta*[25].

PROPOSICIÓN XXI. PROBLEMA XIII

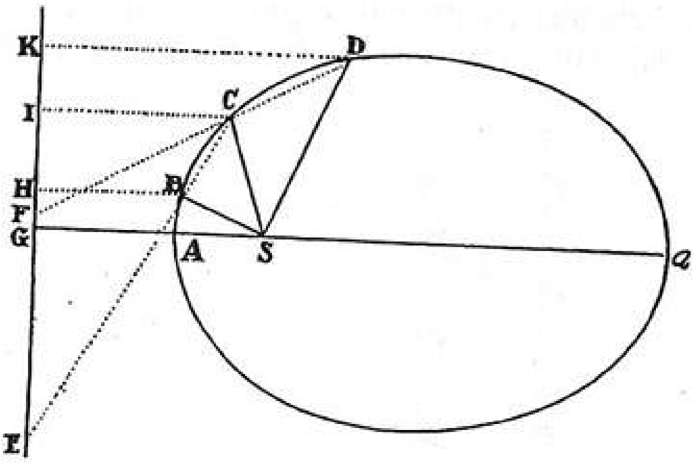
Trazar una trayectoria en torno a un foco tal que pase por unos puntos dados y toque a rectas dadas en posición.

Supóngase el foco S, el punto P y la tangente TR y hállese el otro foco H. Trácese sobre la tangente, la perpendicular ST y prolónguese hasta Y, de tal modo que TY sea igual a ST y ocurrirá que YH será igual al eje principal. Únase SP y PH, y SP será la diferencia entre HP y el eje principal. De este modo si se dieran varias tangentes TR, o varios puntos P, se llegará siempre a líneas tales como YH o PH trazadas desde dichos puntos Y o P al foco H, las cuales o son iguales a los ejes o se diferencian de ellos según las longitudes dadas SP y que, por tanto, o son iguales entre sí o tienen entre sí diferencias dadas; en consecuencia, por el Lema anterior, el otro foco H está dado. Hallados los focos y la longitud del eje (el cual o es YH, o, si la trayectoria es una elipse, PH + SP, o, si es una hipérbola, PH - SP) se tendrá la trayectoria. Q. E. I.



Escolio

Cuando la trayectoria es una hipérbola no incluyo bajo la definición de ésta a su hipérbola opuesta. Pues un cuerpo, permaneciendo en su movimiento, no puede pasar a la hipérbola opuesta.



El caso en que se dan tres puntos se resuelve más rápidamente así. Sean los tres puntos B, C, D. Únanse BC, CD, y prolónguense hasta E, F, de modo que EB sea a EC como SC a SD y FC a FD como SC a SD. Trácense sobre EF y su prolongación las rectas normales SG, BH, y sobre la prolongación al infinito de GS tómense GA respecto a AS y G*a* respecto a *a*S como HB es a BS y A será el vértice, mientras A*a* será el eje principal de la trayectoria; la cual, según que GA sea mayor, igual o menor que AS, será elipse, parábola o hipérbola; en el primer caso el punto *a* caerá al mismo lado de la línea GF que el punto A, en el segundo caso se alejará al infinito y en el tercero caerá al lado opuesto que la línea GF. Pues si se trazan sobre GF las perpendiculares CI, DK, entonces IC será a HB como EC a EB, esto es, como SC a SB; y al revés, IC a SC como HB a SB o como GA a S*a*. Y por un argumento semejante se probaría que KD está en la misma razón con SD. Están situados, pues, los puntos B, C, D, en la sección cónica descrita en torno al foco S, de tal modo que todas las rectas trazadas desde el foco S a cada punto de la sección estén en la susodicha razón con respecto a las perpendiculares trazadas desde dichos puntos a la recta GF.

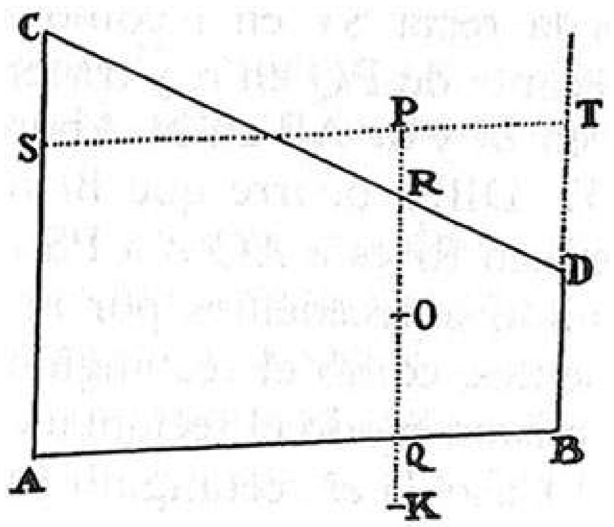
El ilustre geómetra *de la Hire* resuelve este problema por un método no muy distinto en su libro VIII de las cónicas, Proposición XXV.

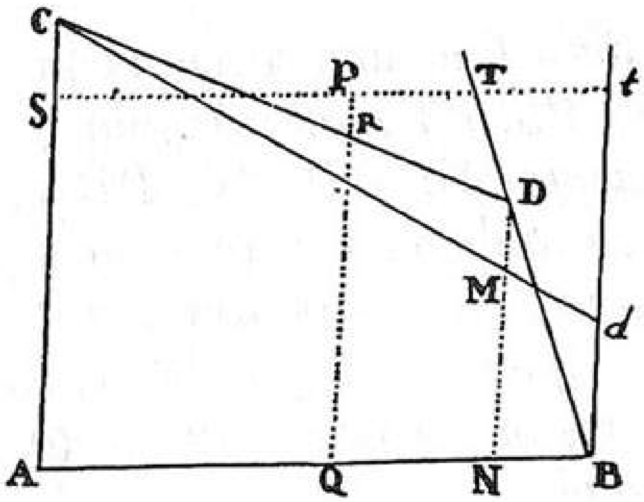
Sección V
LA OBTENCIÓN DE ÓRBITAS CUANDO NO SE DA NINGUNO DE LOS FOCOS

LEMA XVII

Si de un punto cualquiera P de una sección cónica dada se trazan las líneas rectas PQ, PR, PSy PT según ángulos dados sobre los lados prolongados infinitamente AB, CD, AC, DB de un trapecio ABDC que se halla inscrito en la dicha sección cónica y trazadas las líneas una a cada uno; ocurrirá que el rectángulo de las rectas trazadas sobre los dos lados opuestos PQ x PR estará con respecto al rectángulo de las trazadas sobre los otros dos lados opuestos PS x PT en una razón dada.

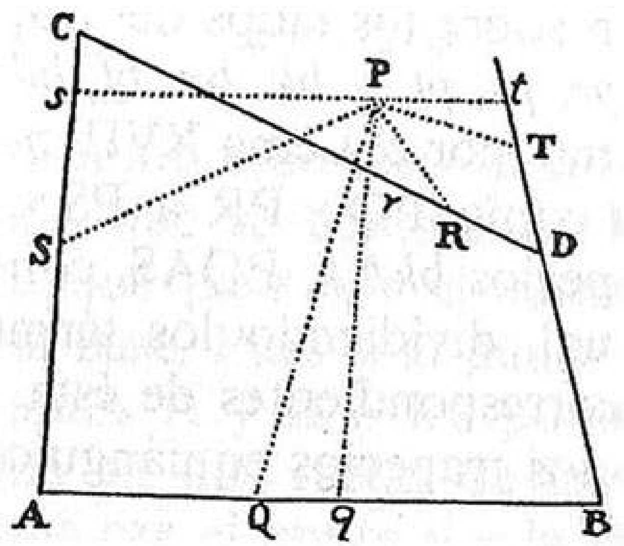
CASO 1. Supongamos, en primer lugar, que las líneas trazadas sobre los lados opuestos son paralelas a otro de los restantes lados, por ejemplo PQ y PR al lado AC, y PS y PT al lado AB. Además, sean dos de los lados opuestos, por ejemplo AC y BD, paralelos entre sí. Entonces también la recta que biseca dichos lados paralelos será uno de los diámetros de la sección cónica y bisecará también a RQ. Sea O el punto en que RQ es bisecada, y PO será ordenada aplicada al diámetro. Prolónguese PO hasta K de tal modo que OK sea igual a PO y OK será ordenada aplicada al diámetro en sentido opuesto. Dado que los puntos A, B, P y K están en la sección cónica y que PK corta a AB en un ángulo dado, tendremos (por las prop. 17, 19, 21 y 23 del Lib. III de las cónicas de *Apolonio*) que el rectángulo PQK está con el rectángulo AQB en una razón dada. Pero QK y PR son iguales, por cuanto son diferencias iguales de OK, OP y OQ, OR, y por tanto también los rectángulos PQK y PQ x PR son iguales; y en consecuencia el rectángulo PQ x PR está con el rectángulo AQB, esto es, con el rectángulo PS x PT en una razón dada. Q. E. D.





CASO 2. Supongamos ahora que los lados opuestos del trapecio AC y BD no sean paralelos. Tracemos B*d* paralela a AC y que corte tanto a la recta ST en *t* como a la sección cónica en *d*. Unamos C*d*, secante de PQ en *r*, y tracemos DM paralela a PQ y secante de C*d* en M y de AB en N. Ahora, por la semejanza de los triángulos BT*t*, DBN, ocurre que B*t* o PQ es a T*t* como DN a NB. Y así también R*r* es a AQ o a PS como DM es a AN.

Luego multiplicando antecedentes por antecedentes y consecuentes por consecuentes, como el rectángulo PQ x R*r* es al rectángulo PS x T*t* del mismo modo el rectángulo NDM es al rectángulo ANB, y (por el Caso 1) el rectángulo PQ x P*r* es al rectángulo PS x P*t* y, dividiendo, también es el rectángulo PQ x PR al rectángulo PS x PT. Q. E. D.

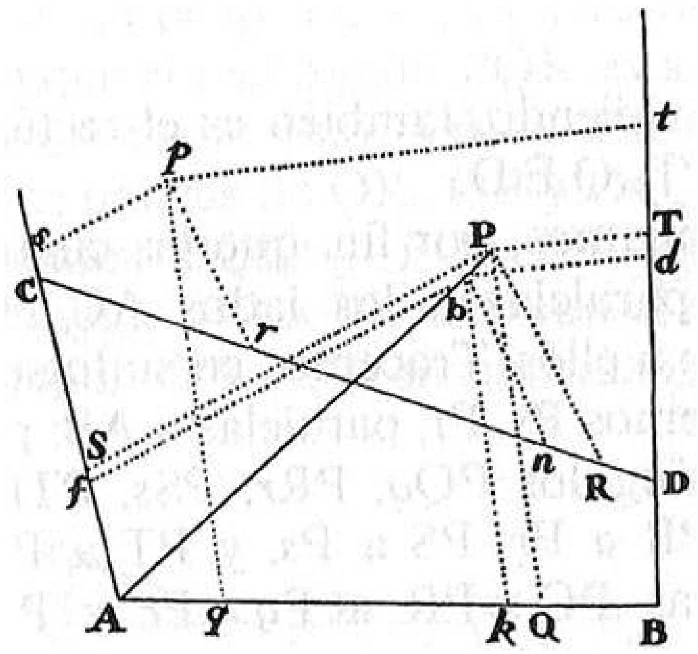


CASO 3. Supongamos, por fin, que las cuatro líneas PQ, PR, PS, PT, no son paralelas a los lados AC, AB, sino que son inclinadas respecto a ellos. Tracemos en su lugar P*q*, P*r*, paralelas al lado AC; y tracemos P*s*, P*t*, paralelas a AB; por estar dados los ángulos de los triángulos PQ*q*, PR*r*, PSS, PT*t*, se darán las razones PQ a P*q*, PR a P*r*, PS a P*s*, y PT a P*t*; y por tanto las razones compuestas PQ x PR a P*q* x P*r* y PS x PT a P*s* x P*t*. Pero según lo demostrado más arriba, la razón P*q* x P*r* a P*s* x P*t* está dada: luego también lo estará la razón PQ x PR a PS x PT. Q. E. D.

LEMA XVIII

Con los mismos supuestos, si el rectángulo de las dos líneas trazadas a dos lados opuestos del trapecio, PQ x PR, está al rectángulo PS x PT de las trazadas sobre los otros dos lados en una razón dada, entonces el punto P desde el que se trazan dichas líneas es tangente a la sección cónica descrita en torno al trapecio.

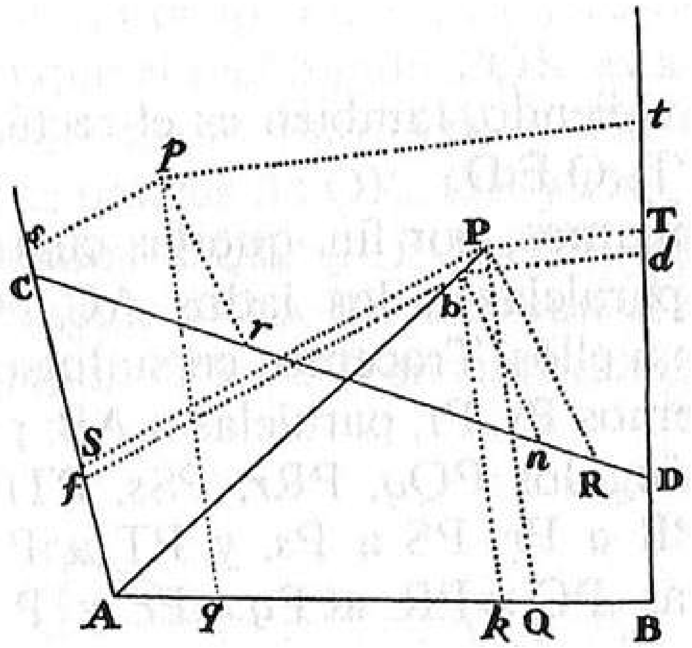
Supongamos una sección cónica descrita por los puntos A, B, C, D, e infinitos puntos P como por ejemplo *p*: digo que el punto P siempre será tangente a esta sección. Si lo negaras, únase AP secante a la sección cónica en un punto distinto de P, si ello es posible, como por ejemplo en *b*. Por consiguiente, si de estos puntos *p* y *b* se trazan sobre los lados del trapecio según ángulos dados las rectas *pq*, *pr*, *ps*, *pt*, y *bk*, *bn*, *bf*, *bd*; tendremos que *bk* x *bn* será a *bf* x *bd* como (por el Lema XVII) *pq* x *pr* a *ps* x *pt* y por tanto (por hipótesis) como PQ x PR a PS x PT. Y debido a la semejanza de los trapecios *bk*A*f*, PQAS, como es *bk* a *bf* así es PQ a PS. Por lo cual, dividiendo los términos de la primera proporción por los correspondientes de ésta, *bn* será a *bd* como PR a PT. Por tanto los trapecios equiángulos D*nbd*, DRPT son semejantes y sus diagonales D*b*, DP coinciden. Y de este modo *b* cae en la intersección de las líneas AP, DP y por tanto coincide con P. Por ello sea cual sea el punto donde se suponga P caerá en la sección cónica supuesta. Q. E. D.



COROLARIO. De aquí que, si desde un punto común P se trazan tres rectas PQ, PR, PS sobre otras tres dadas en posición, una a cada una y según ángulos dados y el rectángulo formado por dos de las trazadas PQ x PR es al cuadrado de la tercera PS según una razón dada, el punto P desde el que fueron trazadas estará ubicado en la sección cónica tangente a las líneas AB, CD en A y C; y viceversa. Pues aproxímese hasta juntarse la línea BD a la línea AC manteniendo su posición las tres AB, CD, AC; después hagamos lo mismo con PT hacia PS; y entonces el rectángulo PS x PT devendrá PS^2 y las rectas AB, CD que cortaban la curva en los puntos A y B, C y D ya no pueden cortar más la curva en aquellos puntos coincidentes, sino sólo ser tangentes en ellos.

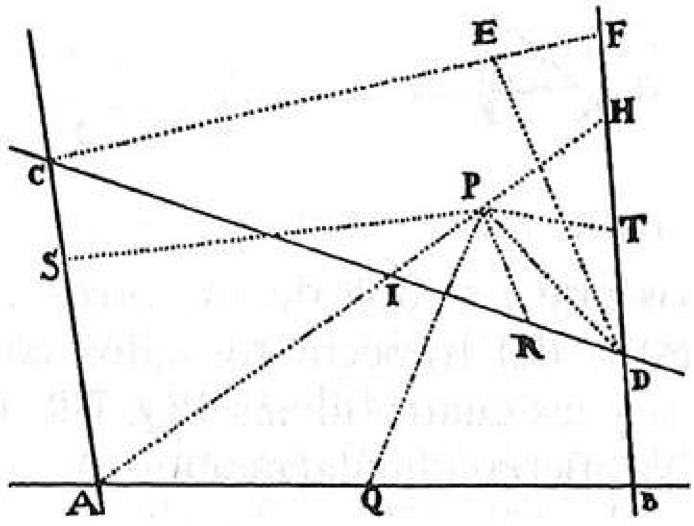
ESCOLIO

En este Lema el nombre de sección cónica se toma en sentido amplio, de modo que se comprenda bajo el mismo tanto la sección rectilínea que pase por el vértice del cono como la circular paralela a la base. Pues si el punto *p* cae en la recta con que se unen los puntos A y B o los puntos C y D la sección cónica se transforma en dos rectas de las cuales una coincide con la recta en la que cae el punto *p* y la otra es la recta con la que quedan unidos entre sí dos de los otros cuatro puntos. Si dos ángulos opuestos del trapecio tomados conjuntamente son iguales a dos rectos y las cuatro líneas PQ, PR, PS, PT, se trazan sobre sus lados ya perpendicularmente ya con un grado de inclinación dado y el rectángulo comprendido entre dos de ellas PQ x PR es igual a PS x PT comprendido entre las otras dos, entonces la sección cónica resultará un círculo. Y lo mismo ocurre si se trazan cuatro líneas con ángulos cualesquiera y el rectángulo PQ x PR comprendido entre dos de ellas es al rectángulo PS x PT comprendido entre las otras dos como el rectángulo comprendido entre los senos de los ángulos S, T, en los que inciden las dos últimas PS, PT es al rectángulo comprendido entre los senos de los ángulos Q, R, en que inciden las dos primeras PQ, PR. En todos los demás casos el lugar del punto P será una de las tres figuras que comúnmente se denominan secciones cónicas. Pero en lugar del trapecio ABCD puede colocarse un cuadrilátero cuyos dos lados opuestos se crucen mutuamente como diagonales. Y uno o dos de los cuatro puntos A, B, C, D, pueden llevarse al infinito con lo que los lados de la figura que convergen en dichos puntos resultarán paralelos; y en tal caso la sección cónica pasará por los demás puntos mientras que en la dirección de las paralelas irá hacia el infinito.



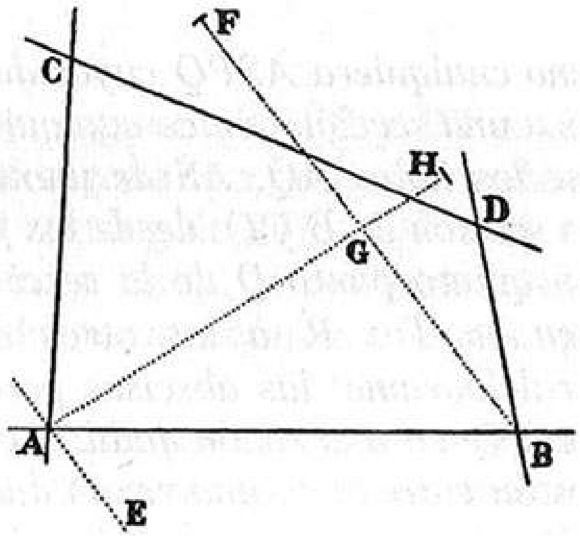
LEMA XIX

Hallar el punto P a partir del cual, si se trazan las cuatro rectas PQ, PR, PS, PT sobre otras cuatro en posición dada AB, CD, AC, BD, una a una y con ángulos dados, el rectángulo PQ x PR comprendido entre dos de aquéllas sea al rectángulo PS x PT comprendido entre las otras dos según una razón dada.



Hagamos que las líneas AB, CD, sobre las que se trazan las rectas PQ, PR, que contienen uno de los rectángulos, se crucen con las otras dos líneas de posición dada en los puntos A, B, C, D. Desde cualquiera de ellos A tracemos la recta AH en la que queremos hallar el punto P. Corte esta línea a las opuestas BD, CD, a saber, a BD en H y a CD en I y por estar dados todos los ángulos de la figura estarán dadas las razones de PQ a PA y de PA a PS y por tanto la de PQ a PS. Restando ésta de la razón dada de PQ x PR a PS x PT tendremos la razón de PR a PT, y sumando las razones dadas PI a PR y PT a PH tendremos la razón PI a PH, y por ende el punto P. Q. E. I.

COROLARIO 1. De aquí que también se pueda trazar una tangente a un punto cualquiera D del lugar de los infinitos puntos P. Pues la cuerda PD, cuando coinciden los puntos P y D, esto es, cuando discurre AH por el punto D, resulta una tangente. En tal caso la razón última de las evanescentes IP y PH, se halla como se ha visto más arriba. Tracemos CF, paralela a la propia AD, tal que corte a BD en F y cortada en E según la dicha razón última, y también de DE será tangente dado que CF y la evanescente IH son paralelas e igualmente cortadas en E y en P.



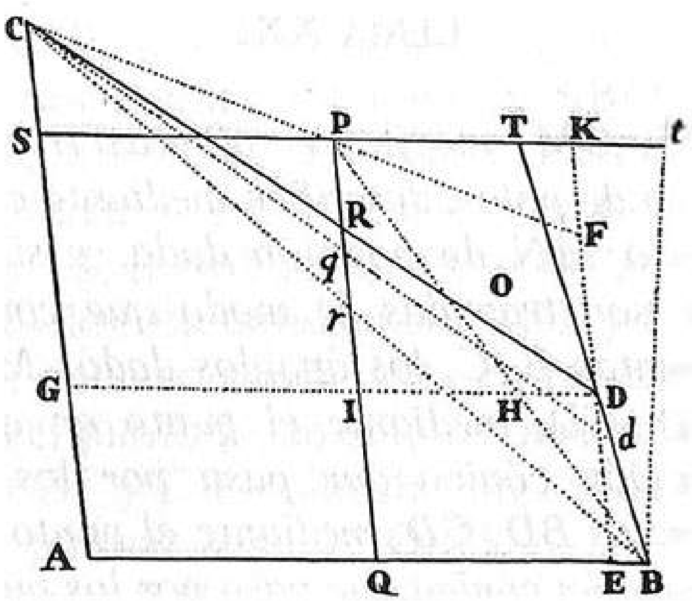
COROLARIO 2. De aquí también puede definirse el lugar de todos los puntos P. Tracemos por uno cualquiera de los puntos A, B, C, D, por ejemplo A, la tangente AE al lugar de todos los puntos y por otro punto cualquiera B tracemos una paralela BF a la tangente y que corte al lugar en F. Por el Lema XIX se hallará el punto F. Bisecando a BF en G y siendo indefinida la línea AG, ésta será la posición del diámetro al que vienen aplicadas ordenadamente BG y FG. Corte ahora AG al lugar en H y entonces AH será el diámetro o «latus transversum» al cual el «latus rectum» será como BG^2 a AG x GH. Si AG nunca cortase el lugar de los puntos, permaneciendo la línea AH infinita, entonces el lugar será una parábola y su «latus rectum» perteneciente al diámetro AG será $\frac{BG^2}{AG}$. Pero si corta al lugar en algún punto, entonces el lugar será una hipérbola cuando los puntos A y H estén situados al mismo lado del punto G; y una elipse cuando G esté entre A y H, salvo cuando por casualidad se dé que AGB sea recto y por tanto BG^2 sea igual al rectángulo AGH, caso en el que tendremos un círculo.

Y de este modo tenemos resuelto en el corolario, no por cálculo sino por composición geométrica como querían los antiguos, el problema por ellos planteado de las cuatro líneas, sugerido por *Euclides* y replanteado por *Apolonio*.

LEMA XX

Sea un paralelogramo cualquiera ASPQ cuyos dos ángulos opuestos A y P son tangentes a una sección cónica cualquiera en los puntos A y P; y prolónguense los lados AQ, AS de uno de ellos al infinito, hasta cortar a dicha sección en B y C; desde los puntos de cruce B y C trácense hasta un quinto punto D de la sección otras dos rectas BD, CD que corten en T y R a los otros dos lados PS, PQ prolongados del paralelogramo: las abscisas parciales PR y PT de los lados estarán siempre en una razón dada. Y al contrario, si tales abscisas parciales están entre sí en una razón dada, el punto D será tangente a la sección cónica que pase por los dichos cuatro puntos A, B, C, P.

CASO 1. Únanse BP, CP y trácense desde el punto D las dos rectas DG, DE, de las que la primera DG sea paralela a AB y corte a PB, PQ, CA, en H, I, G; y la otra DE sea paralela a AC y corte a PC, PS, AB, en F, K, E: (por el Lema XVII) el rectángulo DE x DF será al rectángulo DG x DH según una razón dada. Pero PQ es a DE (o IQ) como PB a HB, y por tanto como PT a DH; y miembro a miembro, PQ es a PT como DE a DH. Y además PR es a DF como RC es a DC, y por tanto como PS (o IG) a DG, y alternativamente PR es a PS como DF a DG; y conjugando las razones, el rectángulo PQ x PR es al rectángulo PS x PT como el rectángulo DE x DF al rectángulo DG x DH, y por ende en razón dada. Pero PQ y PS están dados, luego también está dada la razón PR a PT. Q. E. D.



CASO 2. Pero si se supone que PR y PT están entre sí en una razón dada, entonces razonando de igual modo en sentido inverso se seguirá que el rectángulo DE x DF está con el rectángulo DG x DH en una razón dada, y por tanto el punto D (por el Lema XVIII) cae en la sección cónica que pasa por los puntos A, B, C, P. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que si se hace a BC secante de PQ en *r*, y se toma P*t* sobre PT en razón a P*r* precisamente en la misma que guarda PT a PR: entonces B*t* será tangente a la sección cónica en el punto B. Pues imaginemos al punto D acercándose al punto B de modo que, al tender a desaparecer la cuerda BD, BT resulte tangente; y CD lo mismo que BT coincidirían con CB y B*t*.

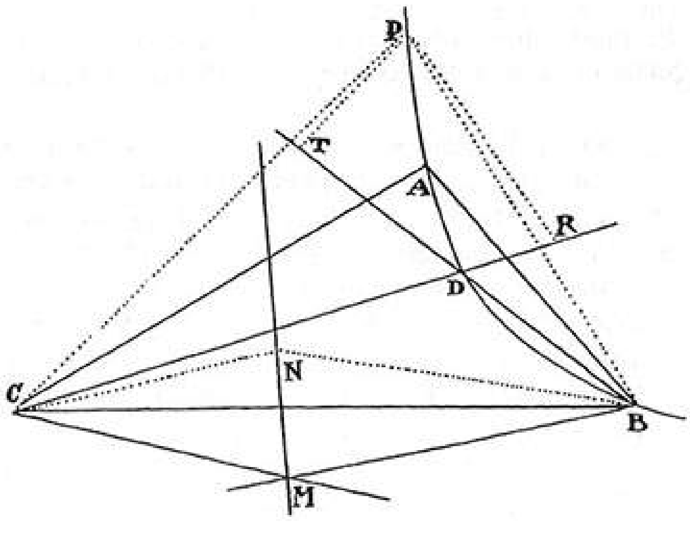
COROLARIO 2. Y viceversa, si B*t* es tangente y BD, CD coinciden en un punto D cualquiera de una sección cónica, entonces PR será a PT como P*r* a P*t*. Y, por el contrario, si PR es a PT como P*r* a P*t* entonces BD, CD coinciden en un punto cualquiera D de una sección cónica.

COROLARIO 3. Una sección cónica no corta a otra sección cónica más que en cuatro puntos. Pues, si posible fuera, pasen dos secciones cónicas por cinco puntos A, B, C, P, O, y córtelas la recta BD en los puntos D, *d*, mientras que la recta C*d* corta a PQ en *q*. En consecuencia, PR es a PT como P*q* a PT; de donde PR y P*q* son iguales entre sí, contra la hipótesis.

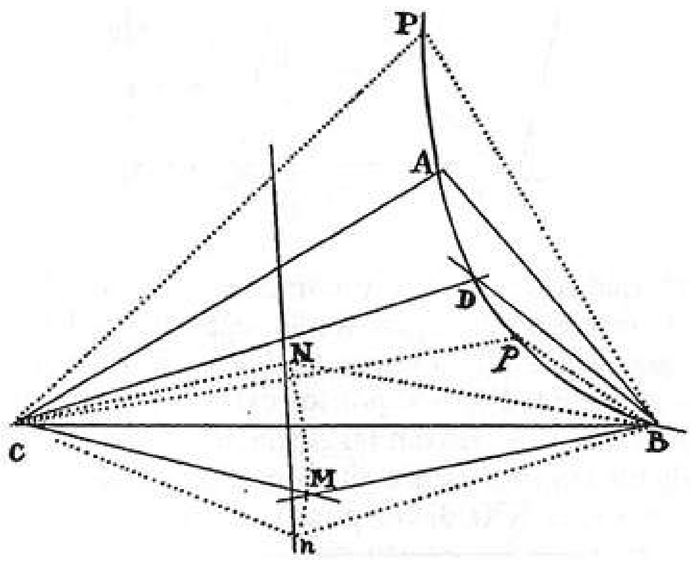
LEMA XXI

Si dos rectas BM, CM, móviles e infinitas trazadas por puntos dados B, C, a modo de polos, describen mediante el punto M en que se cruzan una recta MN de posición dada, y si otras dos rectas infinitas BD, CD, son trazadas de modo que constituyan *con las primeras en los puntos B, C, los ángulos dados MBD, MCD, digo estas dos BD, CD, mediante el punto en que se cruzan D, describen una sección cónica que pasa por los puntos B, C. Y viceversa, si las rectas BD, CD, mediante el punto en que se cruzan D describen una sección cónica que pasa por los puntos B, C, A, y el ángulo DBM es siempre igual al ángulo dado ABC y el ángulo DCM es siempre igual al ángulo dado ACB entonces el punto M cae en una recta de posición dada.*

Pues trácese sobre la recta MN el punto N y cuando el punto móvil M coincide con el inmóvil N, coincida también el punto móvil D con el inmóvil P. Únanse CN, BN, CP, BP, y desde el punto P trácense las rectas PT, PR, que cortan a BD, CD, en T y R y que forman el ángulo BPT igual al ángulo dado BNM y el ángulo CPR igual también al ángulo dado CNM. Dado (por hipótesis) que los ángulos MBD, NBP son iguales así como los ángulos MCD, NCP, si se restan los ángulos comunes NBD y NCD, permanecerán iguales los ángulos NBM y PBT, NCM y PCR: Y por tanto los triángulos NBM, PBT son semejantes lo mismo que los triángulos NCM, PCR. Por lo cual PT es a NM como PB a NB, y PR a NM como PC a NC. Pero los puntos B, C, N, P son inmóviles. En consecuencia PT y PR están en razón dada a NM y por ende en razón dada entre sí; consecuentemente (por el Lema XX) el punto D, en el que constantemente concurren las rectas móviles BT y CR, coincide con los de la sección cónica que pasa por los puntos B, C, P. Q. E. D.



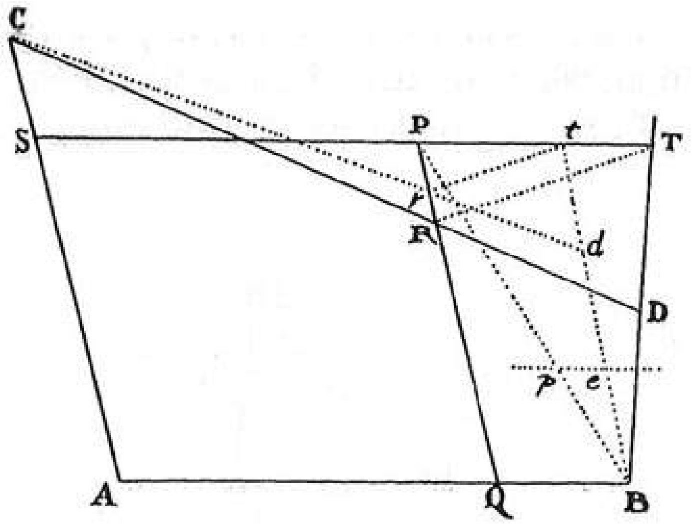
Y por el contrario, si el punto móvil D coincide con la sección cónica que pasa por los puntos B, C, A, y el ángulo DBM es siempre igual al ángulo dado ABC y el ángulo DCM también es siempre igual al ángulo dado ACB, y cuando el punto D coincide sucesivamente en dos puntos cualesquiera inmóviles *p*, P de la sección, el punto móvil M coincide también sucesivamente en dos puntos inmóviles n, N: trácese por dichos puntos *n*, N la recta *n*, N y ella será el lugar constante de dicho punto móvil M. Pues, si fuera posible, hágase correr al punto M por una curva. El punto D será tangente a una sección cónica que pase por cinco puntos B, C, A, *p*, P, mientras el punto M es tangente constantemente a una línea curva. Pero, según lo ya demostrado, el punto D toca también la sección cónica que pasa por los mismos cinco puntos B, C, A, *p*, P, mientras el punto M toca constantemente una línea recta. Luego las dos secciones cónicas pasan por los mismos cinco puntos, contra el Corolario 3 del Lema XX. Por tanto hacer al punto M recorrer una línea curva es absurdo. Q. E. D.



PROPOSICIÓN XXII. PROBLEMA XIV

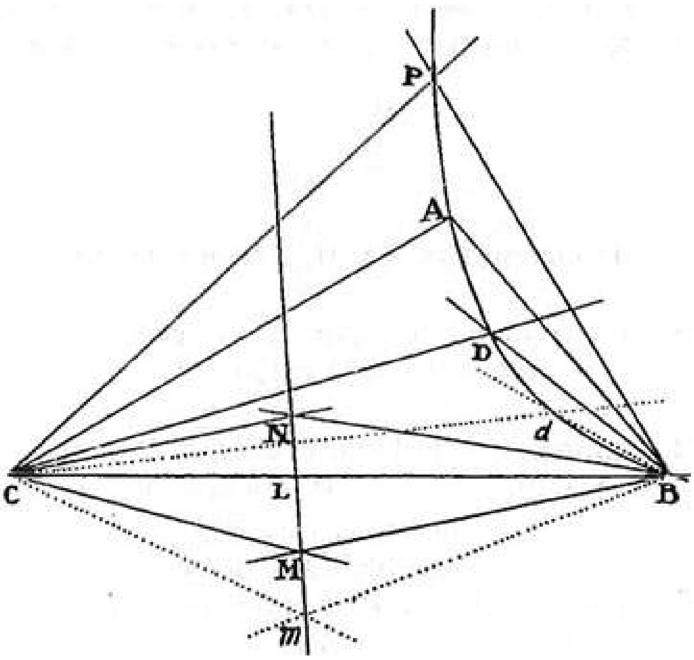
Trazar una trayectoria por cinco puntos dados.

Sean los cinco puntos A, B, C, P, D, dados. Desde uno de ellos cualquiera A hasta otros dos cualesquiera B, C, considerados como polos, tracemos las rectas AB, AC, así como las paralelas a estas TPS, PRQ, por el cuarto punto P. Tracemos después desde los dos polos B, C, por el quinto punto D, las dos rectas infinitas BDT, CRD, que corten a las últimamente trazadas TPS, PRQ (la primera a la primera y la segunda a la segunda) en T y R. Por fin, trazada *tr* paralela a TR, córtense las líneas P*t*, P*r*, tales que sean proporcionales a PT, PR; y si por los extremos *t*, *r*, de tales líneas y por los polos B, C, se trazan las líneas B*ƒ*, C*r* concurrentes en *d*, entonces dicho punto *d* estará situado en la trayectoria buscada. Pues (por el Lema XX) dicho punto está situado en la sección cónica que pasa por los cuatro puntos A, B, C, P; y al tender a desaparecer las líneas R*r*, T*t*, tiende a coincidir el punto *d* con el punto D. Luego la sección cónica pasa por los cinco puntos A, B, C, P, D. Q. E. D.



Lo mismo de otra manera

Únanse tres de entre los puntos dados, A, B, C; y en torno a dos tomados como polos, B, C, háganse girar los ángulos ABC, ACB, de magnitud dada y aplíquense los lados BA, CA primero al punto D y después al punto P y señálense los puntos M, N en los que se cruzan entre sí los otros dos lados BL, CL. Trácese la recta infinita MN y háganse girar los mencionados ángulos móviles en torno a sus polos B, C, con la condición de que la intersección de los lados BL, CL o de BM, CM, supongámosla m, caiga siempre sobre la recta infinita MN; y la intersección de los lados BA, CA o BD, CD, supongámosla d, definirá la trayectoria buscada PAD*d*B. Pues (por el Lema XXI) el punto *d* coincidirá con la sección cónica que pase por los puntos B, C: y cuando el punto *m* llega a los puntos L, M, N, el punto *d* (por construcción) llegará a los puntos A, D, P. Describirá pues una sección cónica que pase por los cinco puntos A, B, C, P, D. Q. E. F.



COROLARIO 1. De aquí que, con facilidad, se pueda trazar una recta que toque a la trayectoria en un punto dado B cualquiera. Llévese el punto *d* hasta el punto B y la recta B*d* será la tangente buscada.

COROLARIO 2. De donde también pueden hallarse los centros de las trayectorias, los diámetros y los «latera recta», como en el Corolario 2 del Lema XIX.

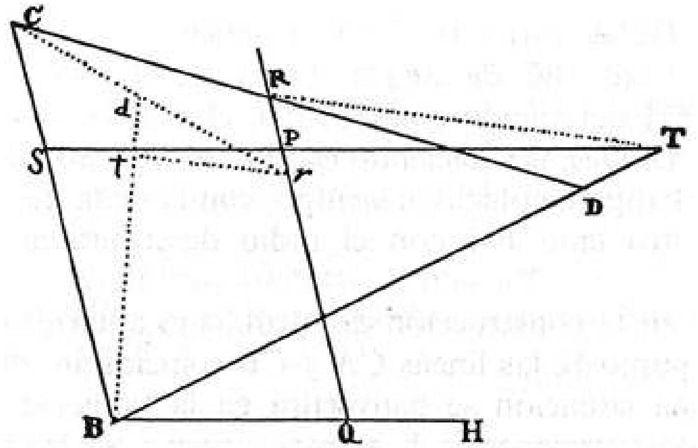
ESCOLIO

La construcción primera resulta un poco más simple uniendo BP y tomando sobre ella, prolongada si es menester, B*p* a BP como PR es a PT; y trazando por *p* la recta infinita *pe* paralela a SPT, tomando además sobre ella a *pe* siempre igual a P*r* y haciendo que las rectas B*e*, C*r*, concurran en *d*. Pues dado que serán iguales las razones de P*r* a P*t*, PR a PT, *p*B a PB, *pe* a P*t*, también lo serán *pe* y P*r*. Con este método los puntos de la trayectoria se hallan muy fácilmente, salvo que se prefiera describir la curva mecánicamente, como en la segunda construcción.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA XV

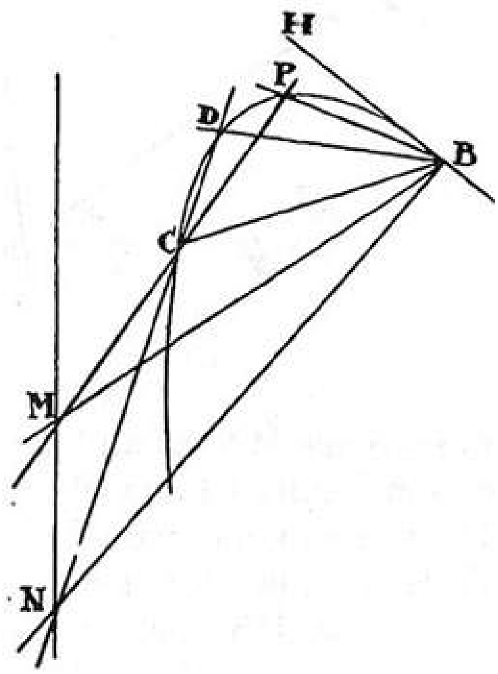
Trazar una trayectoria que pase por cuatro puntos y sea tangente a una recta dada en posición.

CASO 1. Supóngase dada la tangente HB, el punto de contacto B, y los otros tres puntos C, D, P. Únanse BC, procurando que PS sea paralela a la recta BH y que PQ lo sea a la recta BC; complétese el paralelogramo BSPQ. Trácese BD secante de SP en T, y CD secante de PQ en R. Finalmente, trazada la línea *tr* paralela a TR, tomemos sobre PQ, PS los segmentos P*r*, P*t*, respectivamente proporcionales a PR, PT; y trazadas las líneas C*r*, B*t*, el punto *d* en que se cortan (por el Lema XX) caerá siempre en la trayectoria que hay que describir.



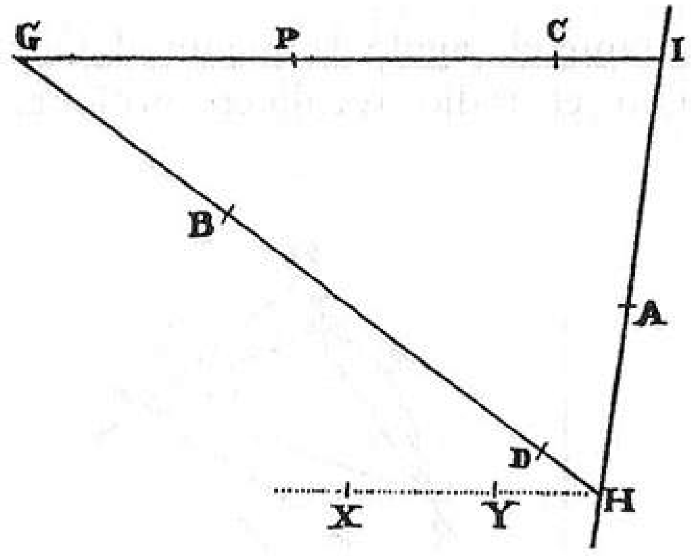
De otro modo

Hágase girar tanto el ángulo de magnitud dada CBH en torno al polo B, como el radio rectilíneo prolongado en ambas direcciones DC en torno al polo C. Señálense los puntos M, N en los cuales el lado BC del ángulo corta a dicho radio cuando el otro lado BH del ángulo coincide con el susodicho radio en los puntos P y D. Después haciendo que el radio dicho CP o CD y el lado BC del ángulo coincidan siempre con la recta infinita MN, el cruce del otro lado BH con el radio describirá la trayectoria buscada.



Pues si en la construcción del problema anterior el punto A alcanza el punto B, las líneas CA y CB coincidirán y la línea AB en su última situación se convertirá en la tangente BH; y por tanto las construcciones hechas antes vienen a ser las mismas que las hechas ahora. En consecuencia, la concurrencia del lado BH con el radio describirá la sección cónica por los puntos C, D, P y la recta BH será tangente en el punto B. Q. E. F.

CASO 2. Sean los cuatro puntos dados B, C, D, P situados fuera de la tangente HI. Únanse dos a dos con las líneas BD, CP concurrentes en G y que cortan a la tangente en H e I. Córtese la tangente en A de tal modo que HA sea a IA como es el rectángulo bajo la media proporcional entre CG y GP y la media proporcional entre BH y HD al rectángulo bajo la media proporcional entre DG y GB y la media proporcional entre PI e IC; y será A el punto de contacto. Pues si HX, paralela a PI, cortase a la trayectoria en cualesquiera puntos X e Y, habrá que colocar (por las cónicas) al punto A de tal modo que HA^2 sería a AI^2 en razón compuesta de la razón del rectángulo XHY al rectángulo BHD, o del rectángulo CGP al rectángulo DGB, y de la razón del rectángulo BHD al rectángulo PIC. Así pues, una vez hallado el punto de contacto A, se describirá la trayectoria como en el caso primero. Q. E. F.

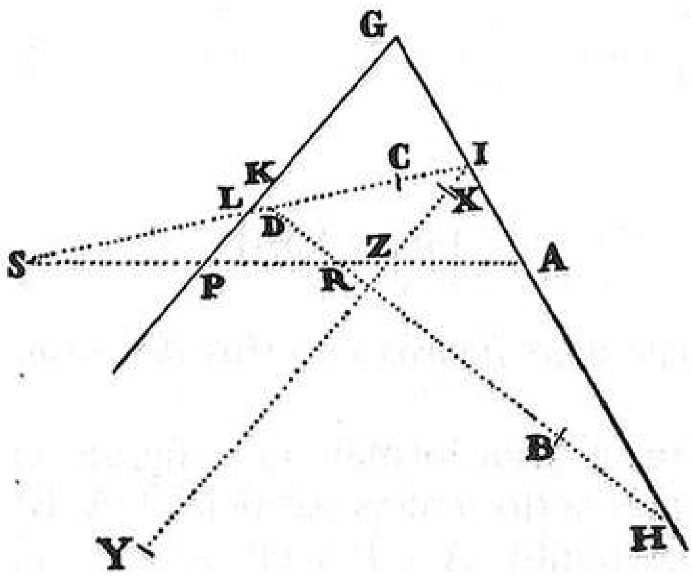


Sin embargo, puede tomarse el punto A entre los puntos H e Y o fuera de ellos; y, en consecuencia, describir por duplicado la trayectoria.

Proposición xxiv. Problema xvi

Trazar una trayectoria que pase por tres puntos dados y sea tangente a dos rectas de posición dada.

Sean las tangentes dadas HI, KL y los puntos B, C, D. Trácese por dos cualesquiera puntos B, D la recta infinita BD que cruza a las tangentes en los puntos H, K. Después por otros dos puntos cualesquiera C, D, trácese la recta infinita CD que cruce a las tangentes en los puntos I, L. Córtese a las rectas así trazadas en R y S de tal modo que sea HR a KR como es la media proporcional entre BH y HD a la media proporcional entre BK y KD, e IS a LS como la media proporcional entre CI e ID a la media proporcional entre CL y LD. Pero córtese por un punto arbitrario, ya entre les puntos K y H, I y L, ya fuera de ellos; trácese RS secante de las tangentes en A y P y serán A y P los puntos de contacto. Pues si se supone que A y P fuesen puntos de contacto situados en otros pintos de las tangentes y por uno de los puntos H, I, K, L, por ejemplo, I, situado en otra tangente HI, se traza la recta IY paralela a la otra tangente KL y que corte a la curva en X e Y, en la cual recta se toma además IZ como media proporcional entre IX e IY el rectángulo XIY, o IZ^2 (por las cónicas), será a LP^2 como el rectángulo CID al rectángulo CLD, esto es (por constricción) como SI^2 a SL^2 y por tanto IZ a LP como SI a SL. Los puntos S, P, Z, pertenecen, por tanto, a una misma recta. Ahora bien, al concurrir las tangentes en G, ocurrirá por las cónicas que el rectángulo XIY o IZ^2 será a IA^2 como GP^2 a GA^2 y por Unto IZ a IA como GP a GA. Pertenecen pues los puntos P, Z, y A a la misma recta y por tanto los puntos S, P y A están en la misma recta. Y con un argumento semejante se probará que los puntos R, P y A están en la misma recta. Pertenecen, pues, los puntos de contacto A y P a la recta RS. Y una vez hallados éstos, la trayectoria se trazará como en el caso primero del problema anterior Q. E. F.

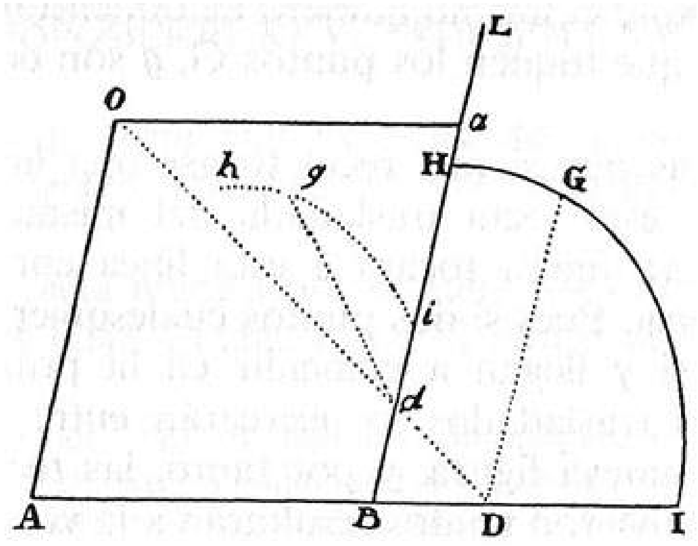


En esta proposición, y en el caso segundo de la anterior, las constricciones son las mismas, tanto si la recta XY corta a la trayectoria en X e Y como si no la corta; tales construcciones no dependan de dicha sección. Sino que, una vez demostradas las constricciones cuando la recta corta a la trayectoria, quedan también patentes las construcciones cuando no la corta; y por amor a la brevedad no me detengo en demostrarlas más profusamente.

LEMA XXII

Transformar unas figuras en otras del mismo género.

Sea la figura a transformar una figura cualquiera HGI. Trácense según plazca dos rectas paralelas OA, BL secantes a una tercera AB en los puntos A y B y en posición dada, y desde un punto cualquiera G de la figura trácese una línea GD, paralela a la misma OA. Después desde un punto O, dado en la línea OA, trácese hasta el punto D la recta OD que corte a la recta BL en *d*, y desde el punto de cruce elévese la recta *dg* de modo que contenga con la recta BL un ángulo dado, y además tal que tenga respecto a O*d* la misma razón que DG tiene respecto a OD; será *g* entonces en la nueva figura *hgi* el punto correspondiente a G. Del mismo modo cada punto de la primera figura vendrá a dar cada punto de la nueva figura. Pues imagínese que el punto G recorre con un movimiento continuo todos los puntos de la primera figura, y que el punto *g* también con movimiento continuo recorre todos los puntos de la nueva figura describiéndola de paso. Para distinguirlas llamemos DG a la primera ordenada, *dg* a la ordenada nueva; llamemos AD a la abscisa primera y *ad* a la abscisa nueva; llamemos O al polo y OD al radio abscindente, OA al radio ordenado primero y O*a* (con el que se cierra el paralelogramo OAB*a*) al radio ordenado nuevo.



Digo ahora que si el punto G toca a la línea recta en posición dada, el punto *g* tocará también a la línea recta de posición dada. Si el punto G toca la sección cónica, el punto *g* tocará también la sección cónica. Incluyo aquí el círculo entre las secciones cónicas. Pues si el punto G toca una línea de tercer orden analítico, el punto *g* tocará una línea del mismo orden; y lo mismo para curvas de orden superior. Dos líneas que sean tocadas por los puntos G, *g* serán siempre del mismo orden analítico. Puesto que *ad* es a OA como son O*d* a OD, *dg* a DG y AB a AD; por tanto, AD es $\frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{AB}}{ad}$, y DG es igual a $\frac{\mathrm{OA} \times dg}{ad}$. Ahora si el punto G toca una línea recta y por tanto en la ecuación que contenga la relación entre la abscisa AD y la ordenada DG, dichas líneas indeterminadas AD y DG no alcanzan más que una única dimensión, escribiendo en esta ecuación $\frac{\mathrm{OA} \times \mathrm{AB}}{ad}$ en lugar de AD, y $\frac{\mathrm{OA} \times dg}{ad}$ en lugar de DG, se obtendrá una nueva ecuación en la que la abscisa nueva *ad* y la nueva ordenada *dg* no alcanzarán más que una sola dimensión, y precisamente la que da por resultado una línea recta. Pero si AD y DG, o una de ellas, alcanzase en la primera ecuación una segunda dimensión, también *ad* y *dg* alcanzarán segundas dimensiones en la segunda ecuación. Y lo mismo para tres o más dimensiones. Las indeterminadas *ad*, *dg* en la segunda ecuación y AD, DG en la primera alcanzarán siempre el mismo número de dimensiones, y por tanto las líneas a las que toquen los puntos G, *g* son del mismo orden analítico.

Digo además que si una recta tocase una línea curva en la primera figura; esta recta trasladada del mismo modo con la curva a la nueva figura tocará a esta línea curva en la nueva figura; y viceversa. Pues si dos puntos cualesquiera de la curva se acercan entre sí y llegan a coincidir en la primera figura, los mismos puntos trasladados se acercarán entre sí y llegarán a coincidir en la nueva figura; y por tanto, las rectas con las que estos puntos estuvieron unidos resultarán a la vez tangentes de las curvas en ambas figuras.

Pueden construirse demostraciones de estas afirmaciones de modo más geométrico. Pero prefiero la brevedad.

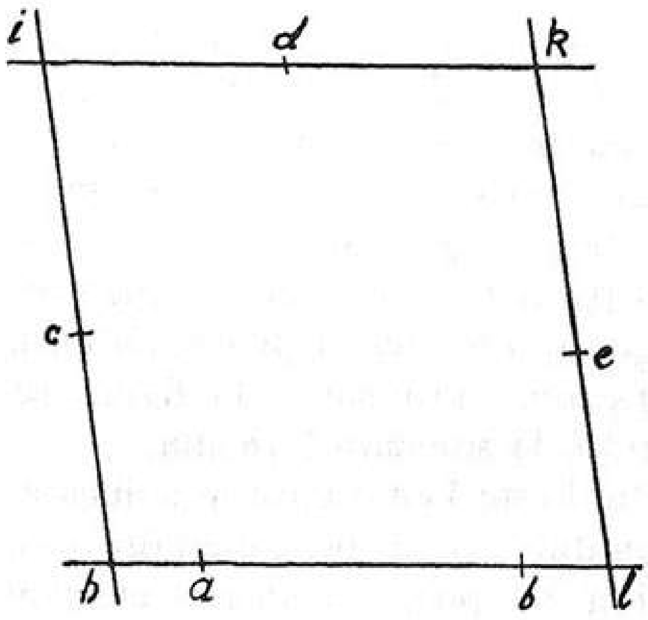
Por tanto, si se ha de transformar una figura rectilínea en otra bastará trasladar las intersecciones de las rectas que constituyen la primera figura y por ellas trazar las rectas de la nueva. Si se ha de tratar, en cambio, de transformar una figura curvilínea, hay que trasladar los puntos, las tangentes y demás rectas en cuya virtud se define la curva. Sirve así este lema para resolver los problemas más difíciles, trasformando las figuras propuestas en otras más sencillas. Por tanto, cualesquiera rectas convergentes pueden trasformarse en paralelas si se toma como primer radio ordenado una línea recta cualquiera que pasa por el punto de convergencia; y esto porque dicho punto de convergencia cae de este modo en el infinito; y líneas paralelas son aquellas que nunca se encuentran. Pero, después que se resuelve el problema en la nueva figura, si realizando operaciones inversas, esta figura se trasforma en la primitiva, se tendrá la solución buscada.

También es útil este Lema para la solución de problemas de sólidos. Pues cuantas veces se presenten dos secciones cónicas con cuya intersección se pueda resolver el problema, se puede transformar cualquiera de ellas, si es una hipérbola o una parábola en una elipse: después la elipse se transforma fácilmente en un círculo. También una recta y una sección cónica, en la construcción de problemas de planos, se transforman en una recta y un círculo[26].

PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA XVII

Describir una trayectoria que pase por dos puntos dados y sea tangente a tres rectas de posición dada.

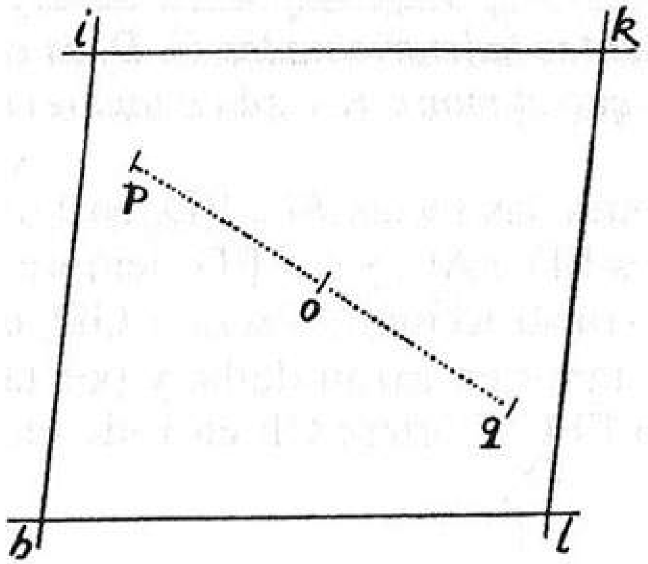
Trácese una recta infinita por el punto de intersección mutua de dos tangentes cualesquiera y por el punto de intersección de una tercera tangente con la recta que pase por los dos puntos dados; tomando como primer radio ordenado la recta así trazada, transfórmese la figura, por el lema anterior, en una nueva figura. En esta nueva figura las dos tangentes aquéllas resultarán entre sí paralelas, y la tangente tercera vendrá a ser paralela a la recta que pase por los dos puntos dados. Sean *hi*, *kl* dichas tangentes paralelas, *ik* la tercera tangente y *hl* la recta paralela a esta tercera tangente y que pasa por los puntos *ab*, por los que en esta nueva figura debe pasar la sección cónica, y que completa el paralelogramo *hikl*. Córtense las rectas *hi, ik, kl* en *c, d, e*, de modo que *he* sea al lado cuadrado del rectángulo *ahb*, que *ic* sea a *id*, y *ke* a *kd* como la suma de las rectas *hi* y *kl* es a la suma de las tres líneas de las cuales la primera es la recta *ik*, y las otras dos son los lados cuadrados de los rectángulos *ahb y alb*; y serán *c, d, e* los puntos de contacto. Pues, por las cónicas, hc^2 es al rectángulo *ahb* como ic^2 es a id^2 y como ke^2 es a kd^2 y como el^2 es al rectángulo *alb*; y por tanto están en dicha razón subduplicada *he* al lado cuadrado del rectángulo *ahb, ic* a *id, ke* a *kd* y *el* al lado cuadrado del rectángulo *alb*, y sumando estarán en la razón dada todos los antecedentes *hi* y *kl* respecto a todos los consecuentes que son el lado cuadrado del rectángulo *alb*[27]. Se tienen, pues, a partir de aquella razón dada los puntos de contacto *c, d, e,* en la nueva figura. Por las operaciones inversas del último Lema trasládense estos puntos sobre la primera figura, y en ella (por el Prob. XIV) se trazará la trayectoria. Q. E. F. Por lo demás, como los puntos *a, b,* bien caerán entre los puntos *h, l,* bien fuera, los puntos *c, d, e,* deberán caer o entre los puntos *h, i, k, l,* o fuera. Si uno de los puntos *a, b,* cae entre los puntos *h, l,* y el otro cae fuera, el problema es imposible.



PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA XVIII

Trazar una trayectoria que pase por un punto dado y sea tangente a cuatro rectas de posición dada.

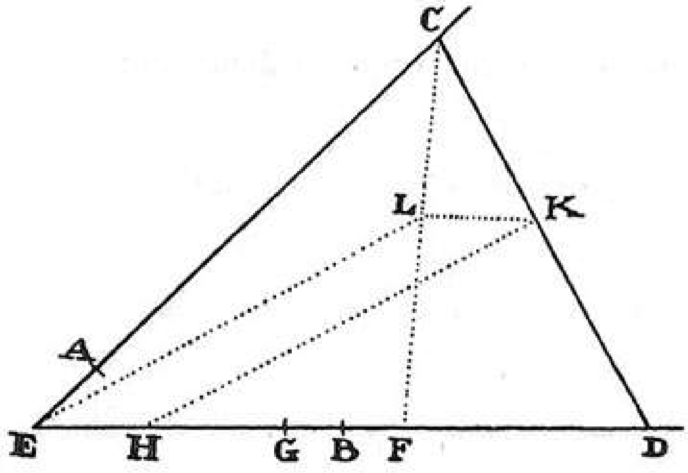
Trácese desde la intersección de dos tangentes cualesquiera una recta infinita hasta la intersección de las otras dos tangentes; y por tanto también están en dicha razón subduplicada tomando dicha recta por primer radio ordenado, trasfórmese la figura (por el Lema XXII) en una nueva figura, y los dos pares de tangentes, que concurrían en el primer radio ordenado, resultarán paralelas. Sean éstas *hi* y *kl, ik* y *hl* que completan el paralelogramo *hikl*. Sea *p* el punto correspondiente en esta nueva figura al punto dado en la primera. Trácese por el centro O de la figura la línea *pq*, y siendo O*q* igual a O*p* será *q* el otro punto por el que pasará la sección cónica en esta nueva figura. Por la operación inversa del Lema XXII trasládese este punto a la figura primera y se tendrán en ella dos puntos por los que debe trazarse la trayectoria. Por ellos, en efecto, por el Problema XVII, puede trazarse dicha trayectoria. Q. E. F.



LEMA XXIII

Si dos rectas de posición dada AC, BD terminan en dos puntos dados A, B, y están entre sí en una razón dada y la recta CD con la que se unen los puntos indeterminados C, D, es cortada en K en una razón dada: digo que el punto K está en una recta de posición dada.

Concurran, pues, las rectas AC, BD, en E, y sobre BE tómese BG a AE como es BD a AC, y sea FD siempre igual a la distancia dada EG; y por construcción EC será a GD, esto es, a EF como AC a BD, y por tanto en razón dada, y por tanto estará dado el tipo de triángulo EFC. Córtese CF en L de modo que CL esté en razón a CF como CK a CD; y por la razón dada anterior, se dará también el tipo de triángulo EFL; y por tanto, el punto L estará situado en la recta EL de posición dada. Únase LK, y los triángulos CLK, CFD serán semejantes; y por estar dadas FD y la razón de LK a FD, estará dada también LK. Igual a ésta tómese EH y ELKH será siempre un paralelogramo. Se halla pues el punto K en el lado de posición dada HK de dicho paralelogramo. Q. E. D.

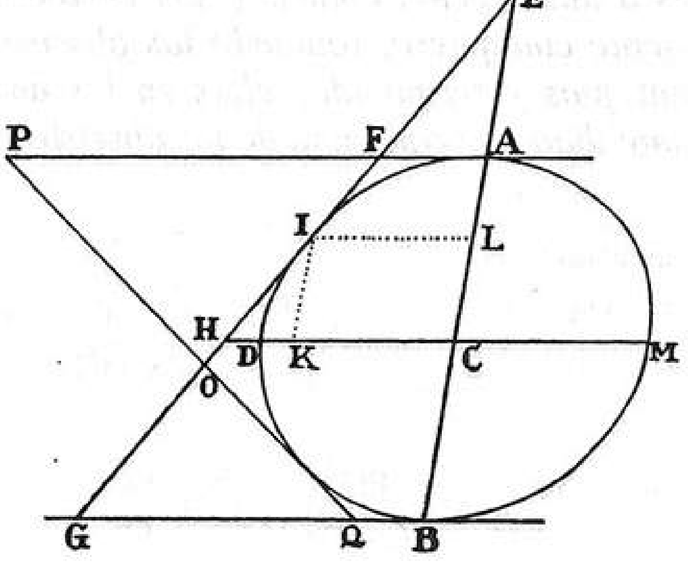


COROLARIO. Por estar la figura EFLC dada en especie, las tres rectas EF, EL y EC, esto es, GD, HK y EC están entre sí en una razón dada.

LEMA XXIV

Si tres rectas fuesen tangentes a cualquier sección cónica de las cuales dos fuesen paralelas y de posición dada, digo que el semidiámetro de la sección paralelo a estas dos será media proporcional entre los segmentos de las mismas comprendidos entre los puntos de contacto y la tercera tangente.

Sean AF, GB dos paralelas tangentes a la sección cónica ADB en los puntos A y B; sea EF una tercera recta tangente a la sección cónica en I, y que se corte con las dos tangentes anteriores en F y G; y sea CD el semidiámetro de la figura paralelo a las tangentes: digo que AF, CD, BG, están en proporción continua.



Pues si los diámetros conjugados AB, DM cortasen a la tangente FG en E y H y se cortasen mutuamente en C y se completase el paralelogramo IKCL; ocurrirá por la naturaleza de las cónicas que EC será a CA como CA a CL, y también como las diferencias EC - CA a CA - CL, esto es como EA a AL y sumando, EA a EA + AL, o sea EL como EC a EC + CA, o sea EB; y por tanto, por la semejanza de los triángulos EAF, ELI, ECH, EBG, AF es a LI como CH es a BG. Al igual que, por la naturaleza de las cónicas, LI o CK es a CD como CD es a CH; y por tanto permutadas adecuadamente AF es a CD como CD es a BG. Q. E. D[28].

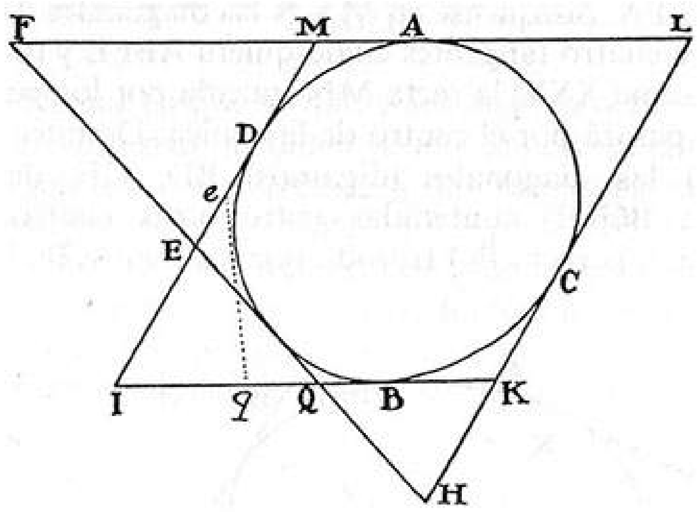
COROLARIO 1. De aquí que si dos tangentes FG, PQ cortasen a las tangentes paralelas AF, BG en F y G, P y Q y se cortasen entre sí en O; permutadas adecuadamente ocurriría que AF es a BQ como AP es a BG, y por separación como FP a GQ, y por tanto como FO a OG.

COROLARIO 2. De donde también dos rectas PG, FQ trazadas por los puntos P y G, F y Q concurren en la recta ACB que pase por el centro de la figura y por los puntos de contacto A, B.

LEMA XXV

Si los cuatro lados de un paralelogramo, prolongados infinitamente, fuesen tangentes a una sección cónica y son cortados a su vez por una quinta tangente cualquiera; tomando las abscisas de dos lados cualesquiera contiguos y terminadas ellas en los ángulos opuestos del paralelogramo: digo que cada una de las abscisas será al lado del que es abscisa como la parte del otro lado contiguo comprendida entre el punto de contacto y el tercer lado es a la otra parte de las abscisas.

Sean los cuatro lados ML, IK, KL, MI del paralelogramo MLIK tangentes a la sección cónica en A, B, C, D, y corte la quinta tangente FQ a dichos lados en F, Q, H y E; tómese sobre los lados MI, KI, las abscisas ME, KQ, o sobre los lados KL, ML, las abscisas KH, MF: digo que ME será a MI como BK a KQ; y KH a KL como AM a MF. Pues, por el corolario primero del Lema anterior ME es a El como AM o BK a BQ, y sumando ME a MI como BK a KQ. Q. E. D. Y también KH a HL como BK o AM a AF, y dividiendo KH a KL como AM a MF. Q. E. D.



COROLARIO 1. De aquí que si se tiene dado el paralelogramo IKLM, descrito en torno a una sección cónica dada, se tendrá dado también el rectángulo KQ x ME, al igual que el rectángulo igual a este KH x MF. Pues dichos rectángulos son iguales por la semejanza de los triángulos KQH, MFE.

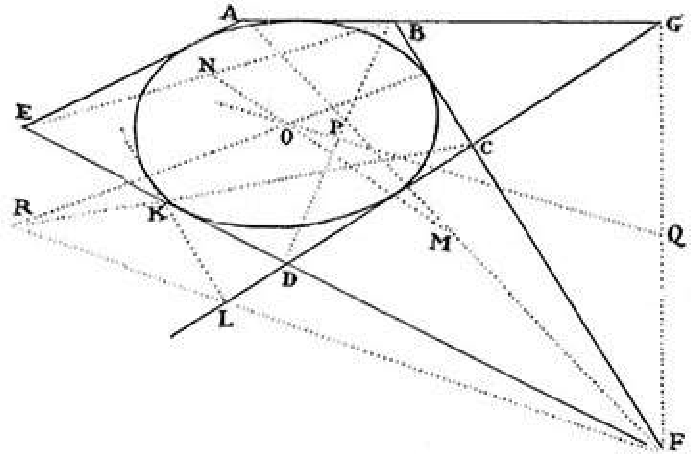
COROLARIO 2. Y si se traza una sexta tangente *eq* que incida sobre las tangentes KI, MI en *q* y *e*; el rectángulo KQ x ME será igual al rectángulo K*q* x M*e*; y KQ será a Me como K*q* a ME y sustrayendo como Q*q* a E*e*.

COROLARIO 3. De donde también, si se unen y se bisecan E*q* y *e*Q y se traza una recta por los puntos de las bisecciones, pasará esta recta por el centro de la sección cónica. Puesto que al ser Q*q* a E*e* como KQ a M*e* dicha recta pasará por la mitad de todas las rectas E*q*, *e*Q, M*k* (por el Lema XXIII) y el medio de la recta MK es el centro de la sección.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA XIX

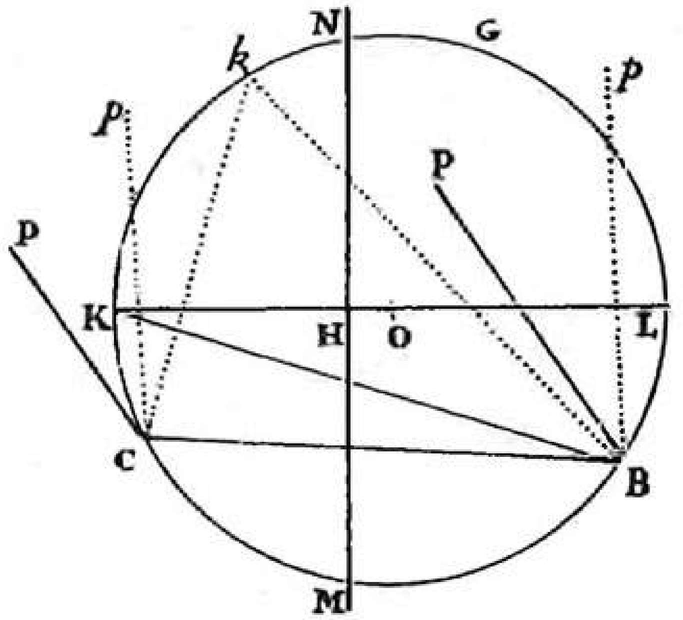
Describir una trayectoria que sea tangente a cinco rectas de posición dada.

Supónganse dadas en posición las tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Biséquense en M y N las diagonales AF, BE, contenidas entre cuatro tangentes cualesquiera ABFE y (por el Corolario 3 del Lema XXV) la recta MN trazada por los puntos de las bisecciones pasará por el centro de la cónica. Después biséquense en P y Q las diagonales (digamos) BD, GF, de la figura cuadrilátera BGDF contenidas entre otras cuatro tangentes cualesquiera, y la recta PQ trazada por los puntos de la bisección pasará por el centro de la trayectoria cónica. Se tendrá pues el centro en el punto de concurso de las bisecantes. Sea O dicho punto. Trácese a cualquiera tangente BC una paralela KL, tal que esté situada a la distancia precisa para que el centro O quede en el punto medio entre las paralelas, y trazada KL será tangente a la trayectoria a describir. Por los puntos de contacto C y K, F y L de estas tangentes no paralelas CL, FK, con las paralelas CF, KL, trácense CK, FL, concurrentes en R, y la recta OR trazada y prolongada cortará a las tangentes paralelas CF, KL, en los puntos de contacto. Esto es evidente por el Corolario 2 del Lema XXIV. Del mismo modo es posible hallar los demás puntos de contacto y finalmente, por la construcción del prob. XIV, describir la trayectoria. Q. E. F.



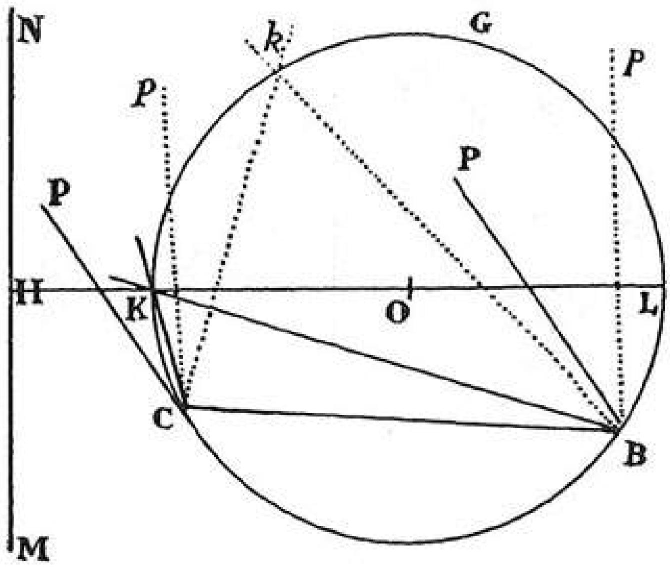
ESCOLIO

Los problemas en que se dan o los centros o las asíntotas de las trayectorias quedan incluidos en lo que precede. Pues dados a la vez los centros y los puntos y las tangentes, están dados también todos los demás puntos y tangentes de la otra parte equidistantes del centro. Una asíntota debe ser considerada como si fuera una tangente y su término infinitamente distante (por decirlo así) como el punto de contacto. Imagínese que el punto de contacto de una tangente cualquiera se alejase hasta el infinito, en tal caso la tangente se transforma en asíntota y las construcciones de los problemas precedentes se transforman en construcciones en las que se da una asíntota.



Una vez descrita la trayectoria es posible hallar los ejes y los focos de la misma por este método. En la construcción y figura del Lema XXI hágase que los lados BP, CP, de los ángulos móviles PBN, PCN, con cuya intersección se describía la trayectoria, sean entre sí paralelos y, conservando su misma posición, giren sobre sus polos B, C, en dicha figura. Entre tanto, los otros lados CN, BN, de dichos ángulos describirán con su intersección en K o *k* el círculo BGKC. Sea O el centro de este círculo. Desde este centro trácese sobre la regla MN, en la que concurrían los lados CN, BN, mientras se trazaba la trayectoria cónica, la normal OH que corta el círculo en K y L. Y cuando los otros lados CK, BK, concurren en el punto susodicho K que está más cerca de la regla, los lados primeros CP, BP, serán paralelos al eje mayor, y perpendiculares al menor; y lo contrario ocurrirá si los mismos lados concurren en el punto más distante L. De donde si se da el centro de la trayectoria se darán también los ejes. Y dados éstos, los focos están a un paso.

Pero los cuadrados de los ejes están entre sí como KH a LH, y de aquí es fácil describir una cónica de una especie dada por cuatro puntos dados. Pues si dos de los puntos dados se toman como los polos C, B, el tercero dará los ángulos móviles PCK, PBK; dados éstos se puede trazar el círculo BGKC. Entonces, por estar dada la especie de trayectoria cónica, se tendrá la razón OH a OK y por tanto la propia OH. Con centro en O y con distancia OH trácese otro círculo y la recta tangente a este círculo que pasa por el cruce de los lados CK, BK, cuando los lados primeros CP, BP, concurren en el cuarto punto dado, será la regla aquella MN con cuya ayuda se traza la trayectoria. De donde también a veces un trapecio de especie dada (si se exceptúan algunos casos imposibles) puede inscribirse en cualquiera sección cónica dada.

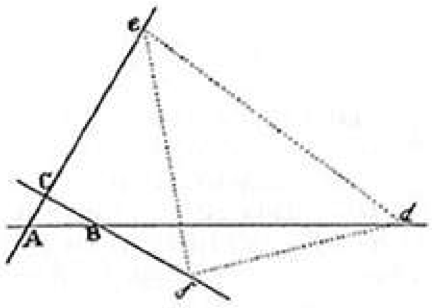


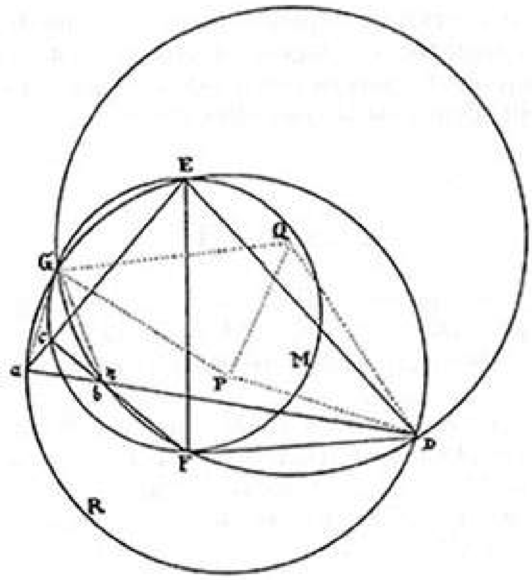
Hay otros Lemas en cuya virtud pueden trazarse trayectorias de una especie dada, si se dan los puntos y las tangentes. De este género es el de que si se traza una línea recta por un punto de posición dada que corte a una sección cónica dada en dos puntos y se biseca el intervalo comprendido entre las intersecciones, el punto de la bisección es tangente a otra sección cónica de la misma especie que la anterior y cuyos ejes son paralelos a los ejes de la anterior. Pero paso a cosas más útiles.

LEMA XXVI

Situar uno a uno los tres ángulos de un triángulo de especie y magnitud dadas sobre tres rectas dadas también en posición y que no sean entre sí paralelas ninguna.

Se tienen en posición tres rectas infinitas AB, AC, BC y es preciso colocar el triángulo DEF de tal manera que su ángulo D toque la línea AB, el ángulo E toque la línea AC y el ángulo F la línea BC. Sobre DE, DF y EF trácense tres segmentos circulares DRE, DGF, EMF, que comprendan ángulos respectivamente iguales a los ángulos BAC, ABC, ACB. Pero se han de trazar estos segmentos sobre aquellas partes de las líneas DE, DF, EF, de tal modo que al girar las letras DRFD lo hagan en el mismo orden que las letras BACB y que las letras DGFE giren en el mismo orden que las letras ACBA; después complétense estos segmentos circulares en sus círculos completos. Sea G el punto en que se corten los dos primeros círculos y sean sus centros P y Q. Unidos GP, PQ, tómese G*a* a AB como GP a PQ y, con centro en G y con distancia G*a* trácese un círculo que corte al círculo primero DGE en *a*. Únase por una parte *a*D secante del círculo segundo DFG en *b* y por otra *a*E secante del círculo tercero EMF en *c*. Y ya es factible la figura ABC*def* semejante e igual a la figura *abc*DEF. Con lo cual se completa el problema.





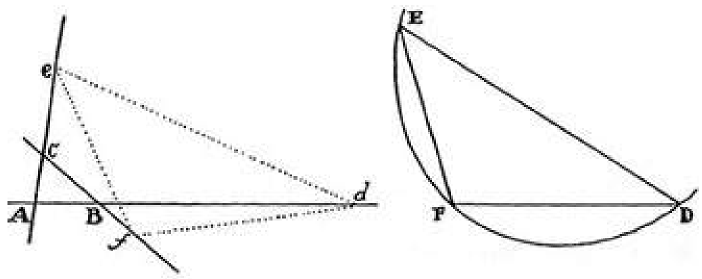
Trácese, pues, F*c* que toque a *a*D en *n*, y únanse *a*G, *b*G, QG, QD, PD. Por construcción, el ángulo E*a*D es igual al ángulo CAB, y el ángulo *ac*F igual al ángulo ACB, y por tanto el triángulo *anc* equiángulo con el triángulo ABC. Luego el ángulo *anc* o F*n*D, es igual al ángulo ABC y por tanto al ángulo F*b*D, y por eso el punto *n* coincide con el punto *b*. Además, el ángulo GPQ, que es la mitad del ángulo central GPD, es igual al ángulo ni la circunferencia G*a*D, y el ángulo GQP, que es la mitad del ángulo central GQD, es igual al complemento para dos rectos del ángulo en la circunferencia G*b*D y por tanto igual al ángulo G*ba*; v así los ángulos GPQ, G*ab* son semejantes; y G*a* es respecto a *ab* como GP es a PQ; esto es (por construcción) como G*a* a AB. Pero son iguales *ab* y AB y por tanto los triángulos *abc* y ABC, que acabamos de probar que son semejantes, son también iguales. En consecuencia, puesto que los ángulos D, E, F, del triángulo DEF caen respectivamente sobre los lados *ab*, *ac*, *bc*, del triángulo *abc*, la figura ABC*def* puede ser completada semejante e igual a la figura *abc*DEF, y construyéndola quedará resuelto el problema. Q. E. F.

COROLARIO. Ahora puede trazarse una recta cuyas partes de longitud dada queden interceptadas entre tres rectas de posición duda. Supongamos el triángulo DEF, cuyo punto D se acerca al ludo EF, y cuyos lados DE, DF, están colocados sobre una recta, convirtiéndose en una línea recta cuya parte dada DE estará interceptada por las rectas de posición dada AB, AC y la otra parte dada DF estará interceptada por las rectas de posición dada AB, BC; y aplicando la construcción precedente a este caso quedará el problema resuelto.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA XX

Describir una trayectoria dada en cuanto a forma y magnitud cuyas partes dadas queden interceptadas por tres rectas de posición dada.

La trayectoria que se ha de describir habrá de ser semejante e igual a la curva DEF y habrá de estar cortada por tres rectas AB, AC, BC, de posición dada en partes semejantes e iguales a las partes dadas de esta DE y EF.

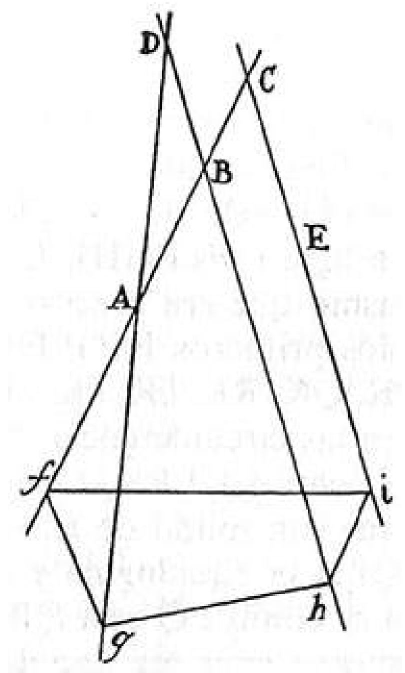


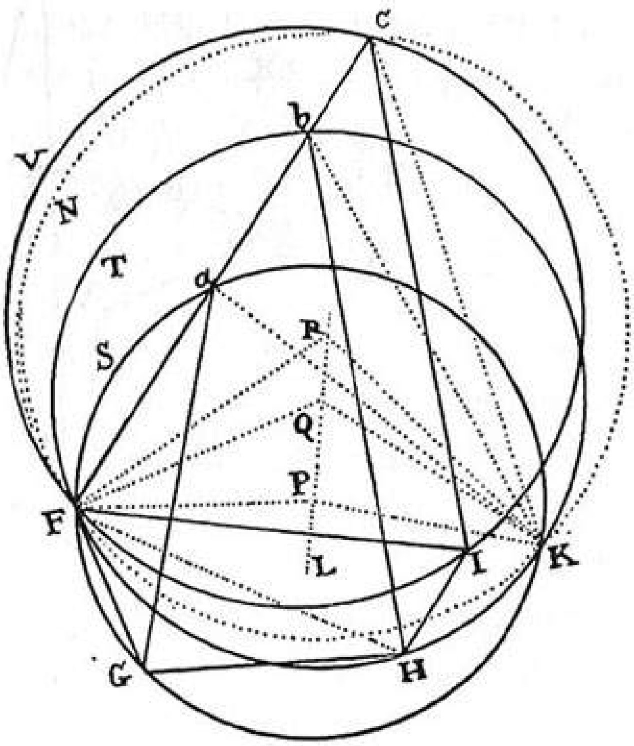
Tracemos las rectas DE, EF, DF y hagamos que los ángulo D, E, F, de este triángulo DEF caigan sobre las rectas de posición dada (por el Lema XXVI) y después tracemos la trayectoria en torno al triángulo semejante e igual a la curva DEF. Q. E. F.

LEMA XXVII

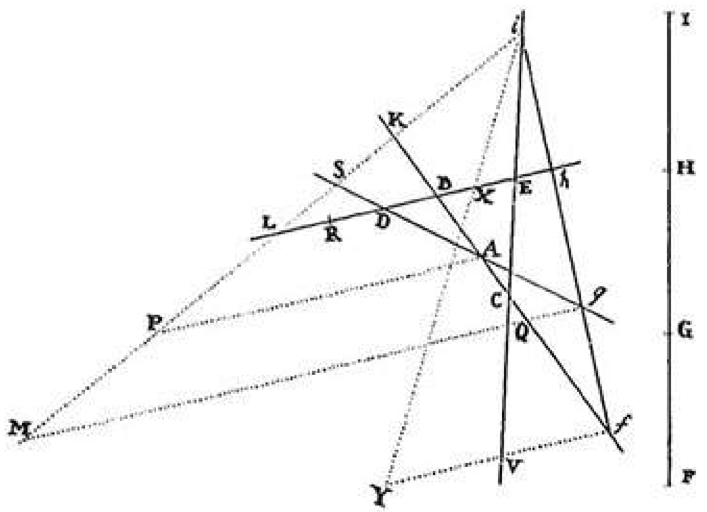
Describir un trapecio de forma dada cuyos ángulos toquen cada uno a cada una de cuatro rectas dadas en posición tales que ni toda sean paralelas ni converjan en un punto común.

Sean las cuatro rectas dadas en posición ABC, AD, BD, CE de las cuales, la primera corta a la segunda en A, a la tercera en I y a la cuarta en C; y hay que describir un trapecio *fghi*, que sea semejante al trapecio FGHI; y cuyo ángulo *f* igual al ángulo dado F, toque a la recta ABC y el resto de los ángulos *g, h, i,* iguales a los ángulos también dados G, H, I, toquen a las otra líneas AD, BD, CE, respectivamente. Únase FH y sobre FG, FH FI, trácense otros tantos segmentos circulares FSG, FTH, FVI, de los cuales el primero FSG comprenda un ángulo igual al ángulo BAD, el segundo FTH comprenda un ángulo igual al ángulo CBD y el tercero FVI comprenda un ángulo igual al ángulo ACE Pero deben trazarse los segmentos hacia aquellas partes de la: líneas FG, FH, FI, de modo tal que el orden de las letras FSGI sea el mismo orden circular que el de las letras BADB y que e orden de las letras FTHF sea el mismo que el de las letras CBDC y que el de las letras FVIF sea el mismo en su giro que el de las letras ACEA. Complétense los segmentos en círculos completos y sea P el centro del primer círculo FSG, y Q el centro del segundo ITH. Únanse y prolónguese PQ y tómese sobre ella QR en la misma proporción a PQ que tiene BC a AB. Pero tómese QR hacia el lado del punto Q tal que el orden de las letras P, Q, R, sea el mismo que el de las letras A, B, C; y con centro en R y con distancia RF trácese un cuarto círculo FN*c* que corte al círculo tercero FVI en *c*. Únase F*e* cortando al círculo primero en *a* y al segundo en *b*. Trácense *a*G, *b*H, *c*I, y puede obtenerse la figura ABC*fghi* semejante a la figura *abc*FGHI. Una vez hecho esto el trapecio *fghi* será el mismo que era preciso construir.





Pues, los dos círculos primeros FSG, FTH, córtense mutuamente en K. Únanse PK, QK, RK, *a*K, *b*K, *c*K, y prolónguese QP hasta L. Los ángulos en las circunferencias F*a*K, F*b*K, F*d*C, son mitades de los ángulos centrales FPK, FQK, FRK, y por tanto iguales a los ángulos que son mitad de ellos, LPK, LQK, LRK. Por tanto, la figura PQRK es equiángula y semejante a la figura *abc*K y por ello *ab* es a *bc* como PQ es a QR, esto es, como AB a BC. Y además por construcción los ángulos *f*A*g*, *f*B*h*, *f*C*i* son iguales a los ángulos F*a*G, F*b*H, F*el*. Luego puede construirse la figura ABC*fghi* semejante a la figura *abc*FGHl. Hecho esto se tendrá el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y con sus ángulos *f*, *g*, *h*, *i*, tocará a las rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.



COROLARIO. Ahora se puede trazar una recta cuyas partes, interceptadas por cuatro rectas dadas en posición según un cierto orden, tendrán entre sí una proporción dada. Auméntense los ángulos FGH, GHI, hasta el punto que las rectas FG, GH, HI, se hallen sobre una misma recta y para construir el problema en el presente caso se trazará la recta *fghi* cuyas partes *fg, gh, hi*, interceptadas por las cuatro rectas de posición dada AB y AD, AD y BD, BD y CE, serán entre sí como las líneas FG, GH, HI, y mantendrán entre sí el mismo orden. Pero esto mismo se halla más directamente como sigue.

Prolónguese AB hasta K y BD hasta L, de modo que BK sea u AB como HI a GH, y DL a BD como GI a FG, y únanse KL con la prolongación de CE pasando por *i*. Prolónguese *i*L hasta M de modo que LM sea a *i*M como GH es a HI y trácese ahora MQ paralela a LB y que corte a la recta AD en *g* así como *gi* que corte a AB, BD en *f, h*. Y digo que está hecho.

Pues corte M*g* a la recta AB en Q, y AD a la recta KL en S, y trácese AP que sea paralela a BD y toque a *i*L en P, y estarán en idéntica razón *g*M a L*h* (*gi* a *hi*, M*i* a L*i*, GI a HI, AK a BK) y AP a BL. Córtese DL en R de modo que DL sea a RL en la misma dicha razón; y por ser proporcionales *g*S a *g*M, AS a AP y DS a DL, por lo mismo, como *g*S es a L*h* será AS a BL y DS a RL; y conjuntamente BL - RL a L*h* - BL como AS - DS a *g*S - AS. Esto es, BR a B*h* como AD a A*g*, y por tanto, como BD a *g*Q. Y alternativamente BR a BD como *Bh* a *g*Q, o sea *fh* a *fg*. Pero por construcción la línea BL fue cortada en razón idéntica en D y en R a como lo fue la línea FI en G y en H: por ello BR es a BD como FH es a FG. Luego *fh* es a *fg* como FH es a FG. Pero como también sea *gi* a *hi* como M*i* a L*i*, esto es, como GI a HI, es evidente que las líneas FI, *fi* están cortadas de modo igual en G, H y en *g, h*. Q. E. F.

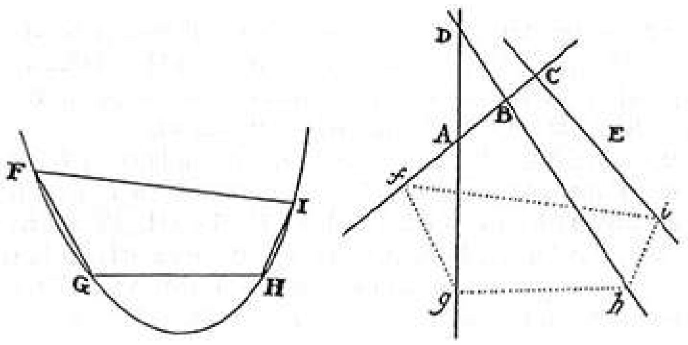
En la construcción de este Corolario, después de trazar LK secante de CE en *i*, se puede prolongar *i*E hasta V de modo que EV sea a E*i* como FH es a HI, y trazar V*f* paralela a BD. Lo mismo ocurre si con centro en i y distancia IH se describe un círculo que corte a BD en X y se prolonga *i*X hasta Y de modo que *i*Y sea igual a IF, y se traza Y*f* paralela a BD.

De este problema ya dieron otras soluciones *Wren* y *Wallis* hace tiempo.

Proposición xxix. Problema xxi

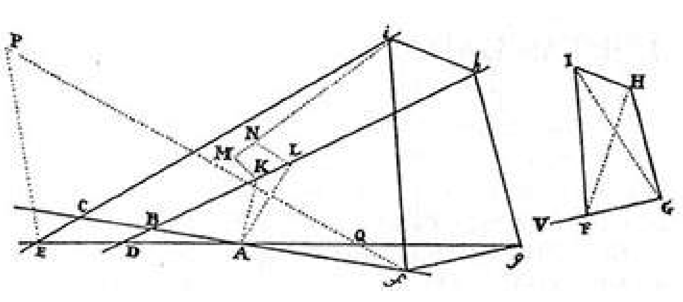
Describir una trayectoria de forma dada que esté cortada en partes dadas en orden, forma y proporción por cuatro rectas dadas en posición.

Ha de trazarse una trayectoria que sea semejante a la línea curva FGHI y cuyas partes, semejantes y proporcionales a las partes de aquella FG, GH, HI, estén interceptadas entre las rectas AB y AD, AD y BD, BD y CE dadas en posición, la primera entre las primeras, la segunda entre las segundas, la tercera entre las terceras. Trazadas las rectas FG, GH, HI, FI, trácese (por el Lema xxvii) el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y tal que sus ángulos *f, g, h, i*, toquen las rectas de posición dada AB, AD, BD, CE, cada uno a cada una en el orden dicho. Después trácese la trayectoria en torno a este trapecio y será semejante a la línea curva FGHI.



Escolio

También se puede construir este problema como sigue. Unidos FG, GH, HI, FI, prolónguese GF hasta V, y únanse FH, IG, y háganse los ángulos CAK, DAL iguales a los ángulos FGH, VFH. Sean concurrentes AK y AL con la recta BD en K y en L, y desde aquí trácense KM y LN tales que, KM forme el ángulo AKM igual al ángulo GHI y sea como HI es a GH, y LN forme el ángulo ALN igual al ángulo FHI y sea a AL como HI es a FH. Pero han de trazarse AK, KM, AL, LN hacia aquel lado de las líneas AD, AK, AL que permita que las letras CAKMC, ALKA, DALND giren en el mismo orden que las letras FGHIF; y trazada MN vaya a encontrar a CE en *i*. Hágase el ángulo *i*EP igual al ángulo IGF, y sea PE a E*i* como FG a GI; y trácese por P la recta PQ*f* que contenga con la recta ADE al ángulo PQE igual al ángulo FIG, y corte a la recta AB en *f*, y únase *fi*. Pero trácense PE y PQ hacia los lados de las líneas CE, PE de modo que la disposición circular de las letras PE*i*P y PEQP sea la misma que la de las letras FGHIF, y si sobre la línea *fi*, también con el mismo orden de las letras, se forma el trapecio *fghi*, semejante al trapecio FGHI, y se circunscribe la trayectoria de forma dada, se habrá resuelto el problema.



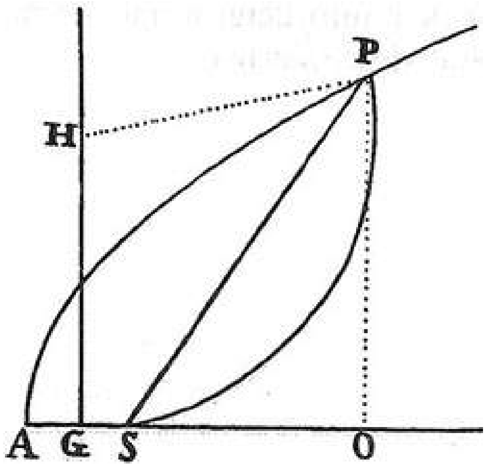
Hasta aquí hemos tratado de cómo hallar las órbitas. Falta ahora que tratemos de cómo determinar los movimientos de los cuerpos en las órbitas descubiertas.

Sección VI
SOBRE COMO HALLAR LOS MOVIMIENTOS EN ORBITAS DADAS

PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA XXII

Hallar el lugar, en un momento dado, de un cuerpo que se mueve en una trayectoria parabólica dada.

Sea S el foco y A el vértice principal de la parábola, y 4AS x M sea igual al área de la sección parabólica APS que ha sido descrita por el radio SP, bien sea después del paso del cuerpo por el vértice, bien se haya de describir hasta su llegada al dicho vértice. Se conoce la magnitud del área de dicha sección por su proporcionalidad al tiempo. Elévese la perpendicular GH tal que corte en dos partes iguales a AS en G y sea igual a 3M, y el círculo trazado con centro en H y radio HS cortará a la parábola en el lugar buscado P. Pues, trazada PO perpendicular al eje y trazada PH, ocurre que $AG^2 + GH^2[= HP^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2] = A0^2 + P0^2 - 2GAO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. De donde $2GH \times PO[= AO^2 + PO^2 - 2GAO] = AO^2 + \frac{3}{4}P0^2$. En lugar de AO^2 póngase $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$, dividiendo todos los términos por 3PO y multiplicándolos por 2AS resultará $\frac{4}{3}GH \times AS\ [= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 350}{6} \times PO =$ área de $(APO - SPO)] =$ al área de APS.



Pero GH era 3M y por tanto $\frac{4}{3}$GH x AS es 4AS x M. Luego el área comprendida en la sección APS es igual a la de la sección que corresponde a 4AS x M. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que GH es a AS como el tiempo en el que el cuerpo describe el arco AP al tiempo en que el cuerpo describe el arco comprendido entre el vértice A y la perpendicular al eje elevada por el foco S.

COROLARIO 2. Y, en el círculo ASP que pasa perpetuamente por el cuerpo en movimiento P, la velocidad en el punto H es a la velocidad que tenía el cuerpo en el vértice A como 3 a 8; y por tanto la línea GH está en esa misma razón respecto a la recta que podría describir en el tiempo de su movimiento desde A hasta POG, con la velocidad que tenía en el vértice A.

COROLARIO 3. Y viceversa, también puede hallarse, a partir de aquí, el tiempo en que un cuerpo describe un arco cualquiera determinado AP. Únase AP y por su punto medio elévese una perpendicular que toque a la recta GH en H.

LEMA XXVIII[29]

No existe figura oval alguna cuya área, seccionada por rectas cualesquiera, pueda hallarse de modo general mediante ecuaciones finitas en cuanto al número de términos y dimensiones.

Dese dentro del círculo oval un punto cualquiera, en torno al cual como polo gire perpetuamente una línea recta, con movimiento uniforme, y mientras tanto, sobre dicha línea, salga desde el polo un punto móvil que camine siempre con una velocidad que sea como el cuadrado de la recta dentro del óvalo. Con este movimiento dicho punto describirá una espiral de infinitos giros. Ahora bien, si pudiese hallarse mediante una ecuación finita la parte de área oval cortada por la tal recta, también se hallaría mediante esa misma ecuación la distancia desde el polo al punto ya que es proporcional a dicha área, y en consecuencia, podrían hallarse todos los puntos de la espiral mediante una ecuación imita; y por tanto también podría hallarse mediante una ecuación imita la intersección de cualquier recta dada en posición con la espiral. Pero toda recta prolongada infinitamente corta a la espiral en infinitos puntos, y la ecuación por la que se halla la intersección de dos líneas contiene todas las intersecciones entre ellas mediante otras tantas raíces y alcanza por tanto tantas dimensiones como intersecciones haya. Puesto que dos círculos se cortan mutuamente en dos puntos, una intersección no se halla más que mediante una ecuación de dos dimensiones, mediante la cual también puede hallarse la otra. Puesto que las intersecciones de dos secciones cónicas pueden ser cuatro, no podrá hallarse de modo general una de ellas más que mediante una ecuación de cuatro dimensiones, la cual permitirá hallarlas todas a la vez. Pues si se buscan separadamente cada una de dichas intersecciones, dado que la ley y condición de cada una es la misma, el cálculo será el mismo en todos los casos y por ello la conclusión será siempre la misma, la cual deberá además por ello contener a la vez todas las intersecciones y expresarlas indistintamente. De donde también se sigue que las intersecciones de las secciones cónicas con las curvas de tercer grado, dado que pueden ser seis, se resolverán conjuntamente mediante ecuaciones de seis dimensiones, y las intersecciones de dos curvas de tercer grado, puesto que pueden ser nueve, se resolverán a la vez mediante ecuaciones de nueve dimensiones. Si esto no fuese así de modo necesario, sería posible reducir todos los problemas de sólidos a problemas de planos y los de orden superior a los sólidos a problemas de sólidos. Hablo aquí de curvas de grado irreductible. Pues si la ecuación por la que se define la curva se puede reducir a un grado inferior, no sería una sola curva sino compuesta de dos o más cuyas intersecciones pueden hallarse por separado mediante cálculos distintos. Del mismo modo las dos intersecciones de las rectas y las secciones cónicas se resuelven siempre mediante ecuaciones de dos dimensiones; las tres intersecciones de las rectas con las curvas irreductibles de tercer grado mediante ecuaciones de tres dimensiones, las cuatro intersecciones de rectas con curvas irreductibles de cuarto grado mediante ecuaciones de cuatro dimensiones y así hasta el infinito. Por tanto, las infinitas intersecciones entre una recta y una espiral, dado que esta curva es simple y no se puede reducir a otras varias curvas, requieren ecuaciones de infinito número de dimensiones y raíces mediante las cuales puedan resolverse todas las intersecciones a la vez. Ello porque la ley y el cálculo de todas son idénticos. Pues si se traza una perpendicular desde el polo sobre dicha recta secante y se hace girar dicha perpendicular en torno al polo junto con la secante, las intersecciones de la espiral se sucederán mutuamente una a otra y la que estaba la primera o más cercana será la segunda al cabo de una revolución, la tercera después de dos, y así sucesivamente; pero mientras tanto no cambiará la ecuación salvo en la medida en que cambien las magnitudes de las cantidades por cuyo medio se determina la posición de la secante. Por lo cual, dado que dichas cantidades vuelven a ser, después de cada revolución, las mismas que eran al principio, la ecuación también vuelve a ser de la misma forma y por tanto, una y la misma ecuación ofrecerá todas las intersecciones y por ello tendrá el infinito número de raíces por medio de las cuales sería posible ofrecer todas aquellas. En consecuencia, no se puede hallar de modo general la intersección de una recta y una espiral mediante una ecuación finita, y por eso mismo no existe figura oval cuyo área cortada por rectas cualesquiera pueda ser determinada de modo general por medio de ecuación alguna de este tipo.

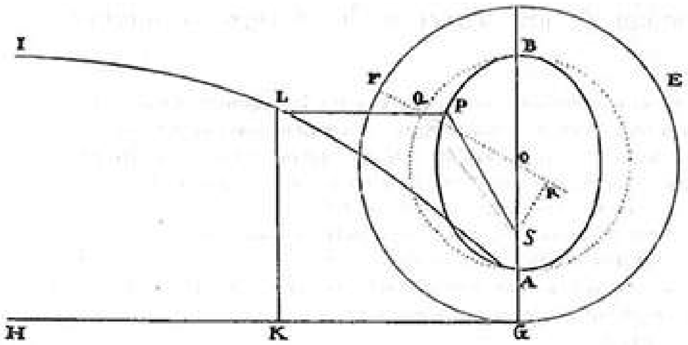
Mediante el mismo argumento puede probarse que, si el intervalo entre el polo y el punto con el que se describe la espiral se tomase proporcionalmente al perímetro de la figura oval abscindida, tampoco es posible hallar la longitud del perímetro de un modo general mediante una ecuación finita. Pero aquí hablo de óvalos a los que no son tangentes figuras conjugadas que evaden al infinito.

COROLARIO. De aquí que el área de una elipse descrita por el radio trazado desde un foco hasta un cuerpo en movimiento, no puede hallarse a partir del tiempo dado por medio de una ecuación finita; y por eso no se podrá determinar mediante la descripción de curvas racionales geométricamente. Denomino racionales geométricamente a las curvas cuyos puntos todos pueden ser establecidos por medio de longitudes definidas mediante ecuaciones, esto es, por razones complejas de longitudes; a las demás (espirales, cuadráticas, trocoides) las denomino irracionales. Pues las longitudes que son o que no son como número a número (según el libro décimo de los Elementos) son racionales o irracionales aritméticamente. Así pues, de una elipse segrego el área proporcional al tiempo mediante una curva geométricamente irracional del modo siguiente.

PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA XXIII

Hallar el lugar en un momento dado de un cuerpo que se mueve en una trayectoria elíptica dada.

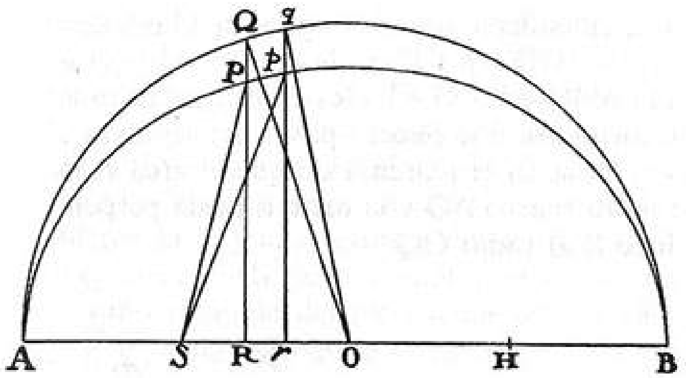
Sea A el vértice principal, S el foco y O el centro de la elipse APB, y sea P el lugar a hallar del cuerpo. Prolónguese OA hasta G de modo que OG sea a OA como OA a OS. Elévese la perpendicular GH, y con centro en O y distancia OG trácese el círculo GEF, y sobre la regla GH a modo de base hágase avanzar la rueda GEF girando sobre su eje y mientras tanto va describiendo con su punto A la trocoide ALI. Hecho esto, tómese GK en razón al perímetro de la rueda GEFG como el tiempo en que el cuerpo partiendo de A describió el arco AP al tiempo de una revolución en la elipse. Elévese la perpendicular KL que se encuentra con la trocoide en L, y trazada LP paralela a la propia KG, encontrará a la elipse en el lugar buscado, P, del cuerpo.



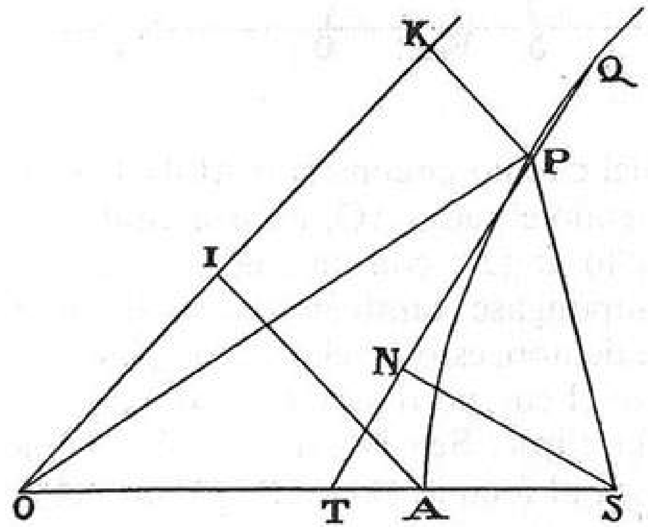
Pues con centro en O y distancia OA trácese el semicírculo AQB y LP, prolongada si es preciso, toque en Q al arco AQ, y únanse SQ y OQ. Toque OQ al arco EFG en F y sobre la propia OQ trácese la perpendicular SR. El área APS es como el área AQS, esto es, como la diferencia entre el sector PQA y el triángulo OQS o también como la diferencia entre los rectángulos ½OQ x AQ y ½OQ x SR, esto es, por estar dado ½OQ, como la diferencia entre el arco AQ y la recta SR, y por tanto (al ser iguales las razones dadas SR al seno del arco AQ, OS a OA, OA a OG, AQ a GF, y dividiendo, AQ - SR a GF - seno del arco AQ) como GK, diferencia entre el arco GF y el seno del arco AQ. Q. E. D.

Escolio[30]

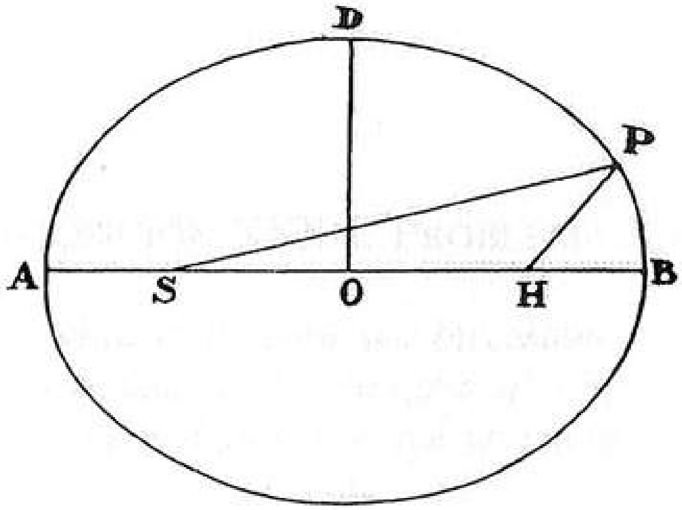
Por lo demás, como la descripción de esta curva sea dificultosa, es mejor dar una solución aproximada. Hállese entonces un cierto ángulo B que sea al ángulo de 57,29578 grados, que es el que subtiende un arco igual al radio, como la distancia SH entre focos al diámetro AB de la elipse; a continuación hállese una determinada longitud L que esté inversamente en la misma razón al radio. Una vez halladas ambas cosas, puede resolverse el problema mediante el análisis siguiente. Supóngase conocido el lugar P del cuerpo, próximo a su verdadero lugar *p*, a través de cualquiera construcción, o incluso mediante una conjetura. Trazada sobre el eje de la elipse la ordenada PR, por la proporción de los diámetros de la elipse, tendremos dada la ordenada RQ del círculo circunscrito AQB, la cual es el seno del ángulo AOQ, siendo el radio AO, y corta también a la elipse en P. Hasta hallar dicho ángulo con un cálculo rudimentario en valor aproximado. Supóngase también conocido el ángulo que es proporcional al tiempo, esto es, el que sea a cuatro rectos como el tiempo en el que el cuerpo describe el arco A*p* al tiempo de una revolución en la elipse. Sea N este ángulo. Tómense ahora un ángulo D que sea al ángulo B como el seno del ángulo AOQ al radio, y un ángulo E que sea al ángulo N - AOQ + D como la longitud L a la propia longitud L, disminuida o aumentada en el enseno del ángulo AOQ según este ángulo sea menor o mayor que un recto. Después tómense un ángulo F que sea al ángulo B mino el seno del ángulo AOQ + E al radio y un ángulo G que sea al ángulo N - AOQ - E + F como la longitud L es a la propia longitud L disminuida o aumentada en el coseno del ángulo AOQ + E según este ángulo sea menor o mayor que un recto. Por tercera vez tómense un ángulo H que sea al ángulo B como el seno del ángulo AOQ + E + G es al radio y un ángulo I que sea al ángulo N - AOQ - E - G + H como la longitud L es a la propia longitud L disminuida o aumentada en el coseno del ángulo AOQ + E + G según este ángulo sea menor o mayor que un recto. V así es posible seguir hasta el infinito. Tómese por fin el ángulo AO*q* igual al ángulo AOQ + E + G + I + etc. Y a partir de su coseno O*r* y de su ordenada *pr*, que es a su seno *qr* como es el eje menor de la elipse al eje mayor, se tendrá el lugar correcto *p* del cuerpo. Cuando el ángulo N - AOQ + D resulta negativo, el signo I de E debe cambiarse siempre en - y el signo - en +. Lo mismo ha de entenderse para los signos de G e I, cuando resultan negativos N - AOQ - E + F y N - AOQ - E - G + H. Pero la serie infinita AOQ + E + G + I, etc., converge tan rápidamente que muy escasamente será necesario pasar del segundo término E. Y el cálculo se basa en el teorema de que el área APS es como la diferencia entre el arco AQ y la recta trazada perpendicularmente desde el foco S al radio OQ.



Con un cálculo similar se resuelve el problema en la hipérbola. Sea O su centro, A su vértice, S el foco y OK la asíntota. Sea conocida la cantidad del área a segregar proporcional al tiempo. Sea ésta A, y hágase la conjetura sobre la posición de la recta SP que segrega muy aproximadamente el área verdadera de APS. Únase OP y trácense desde A y P hasta la asíntota AI, PK paralelas a la otra asíntota, y se tendrá, por la tabla de logaritmos el área AIKP y el área igual a ésta de OPA, la cual restada del área del triángulo OPS da como resto el área segregada APS. Aplicando el doble de la diferencia del área a segregar A y de la segregada APS, 2APS - 2A o 2A - 2APS, a la línea SN, que es perpendicular desde el foco S a la tangente TP, resultará la longitud de la cuerda PQ. Pero esta cuerda PQ ha de inscribirse entre A y P si el área segregada APS es mayor que el área a segregar A, de no ser así ha de inscribirse hacia el otro lado de P: y el punto Q será un lugar más exacto del cuerpo. Y repitiendo el cálculo se hallará siempre con mayor exactitud.



Así pues, con estos cálculos el problema alcanza una solución analítica general. Pero para usos astronómicos es más cómodo el cálculo particular siguiente. Sean AO, OB, OD los semiejes de la elipse, L el «latus rectum» de la misma, D la diferencia entre el semieje menor OD y la mitad del «latus rectum», ½L; hállese entonces el ángulo Y cuyo seno sea al radio como el rectángulo bajo dicha diferencia D y la semisuma de los ejes AO + OD es al cuadrado del eje mayor AB; después hállese el ángulo Z cuyo seno sea al radio como el doble del rectángulo bajo la distancia SH entre los focos y dicha diferencia D al triple del cuadrado del semieje mayor AO. Una vez hallados éstos, el lugar del cuerpo se determinará a continuación del modo siguiente. Tómese el ángulo T proporcional al tiempo en que se ha descrito el arco BP, o igual al movimiento medio (como se dice); y un ángulo V, primera ecuación del movimiento medio, al ángulo Y, primera ecuación máxima, como es el seno del doble del ángulo T al radio; y un ángulo X, segunda ecuación, al ángulo Z, segunda ecuación máxima, como el cubo del seno del ángulo T es al cubo del radio. De los ángulos T, V, X, tómese el ángulo BHP, ecuación del movimiento medio, tal que sea igual o a la suma de T + X + V si el ángulo T es menor que un recto, o a la diferencia de T + X - V si fuese mayor que un recto y menor que dos; y si HP toca a la elipse en P, trazada SP, segregará el área BSP muy aproximadamente proporcional al tiempo. Esta fórmula parece bastante fácil, habida cuenta de que basta hallar las dos o tres primeras figuras de los ángulos muy pequeños V y X establecidos, si se quiere, en minutos segundos. Y además es suficientemente exacta para la teoría de los planetas. Pues en la órbita de Marte, cuya ecuación máxima del centro es de diez grados, el error apenas será mayor que un minuto segundo. Pero una vez hallado el ángulo BHP, ecuación del movimiento medio, ya se tiene inmediatamente por un método bien conocido tanto el ángulo del movimiento real BSP como la distancia SP[31].

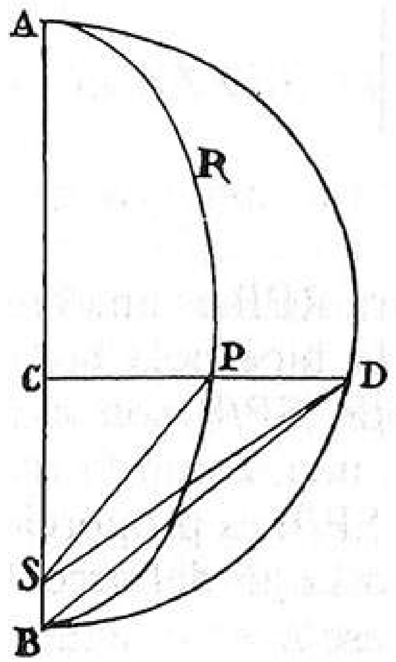


Hasta aquí sobre el movimiento de los cuerpos en líneas curvas. Pero puede ocurrir que un móvil ascienda o descienda por una línea recta, y paso a exponer ahora lo que se refiere a estos movimientos.

Sección VII
DEL ASCENSO Y DESCENSO RECTILÍNEO DE LOS CUERPOS

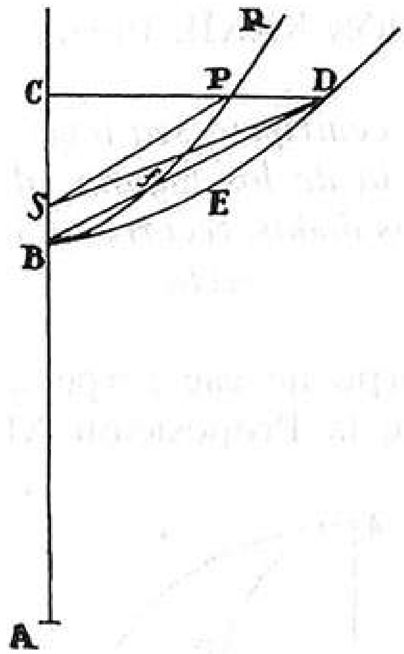
PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA XXIV

Supuesto que la fuerza centrípeta sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares al centro, determinar los espacios que, en tiempos dados, recorre un cuerpo cayendo en línea recta.

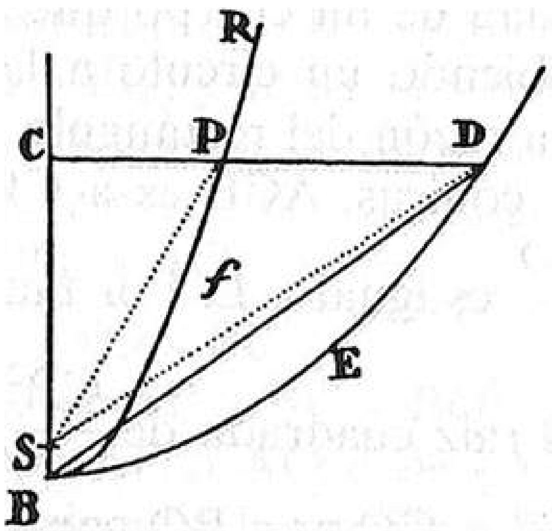


CASO 1. Si un cuerpo no cae perpendicular mente describirá (por el Corolario 1 de la Proposición XIII) una cierta sección cónica cuyo foco coincidirá con el centro de fuerzas. Sea ARPB dicha sección cónica y S su foco. Primero en el caso de que dicha figura sea una elipse; sobre su eje mayor AB trácese el semicírculo ADB, y pase por el cuerpo que cae la recta DPC perpendicular al eje; y trazadas DS, PS, el área ASD será proporcional al área ASP, así como al tiempo. Manteniendo el eje AB, disminuya la latitud de la elipse continuamente y el área ASD seguirá siendo continuamente proporcional al tiempo. Disminúyase infinitamente aquella latitud y, al coincidir la órbita APB con el eje AB y el foco S con el extremo B del eje, también resultará el

área ABD proporcional al tiempo. Y así se tendrá el espacio AC que será el descrito por el cuerpo que cae perpendicularmente desde A en un tiempo dado, siempre que se tome el área ABD proporcional al tiempo y se trace desde el punto D hasta la recta AB la perpendicular DC. Q. E. I.



CASO 2. Si dicha figura RPB es una hipérbola, trácese sobre su diámetro principal AB la hipérbola rectangular BED; y puesto que las áreas CSP, CB*f*P, SP*f*B son a las áreas CSD, CBED, SDEB, cada una a cada una, como la razón dada de las alturas CP, CD; y como el área SP*f*B es proporcional al tiempo en el que el cuerpo se moverá a lo largo del arco P*f*B, el área SDEB será también proporcional a ese mismo tiempo. Disminúyase el «latus rectum» de la hipérbola RPB hasta el infinito manteniendo el lado transverso, y el arco PB coincidirá con la recta CB y el foco S con el vértice B y la recta SD con la recta BD. Por tanto, el área BDEB será proporcional al tiempo en el que el cuerpo C en caída recta describe la línea CB. Q. E. I.



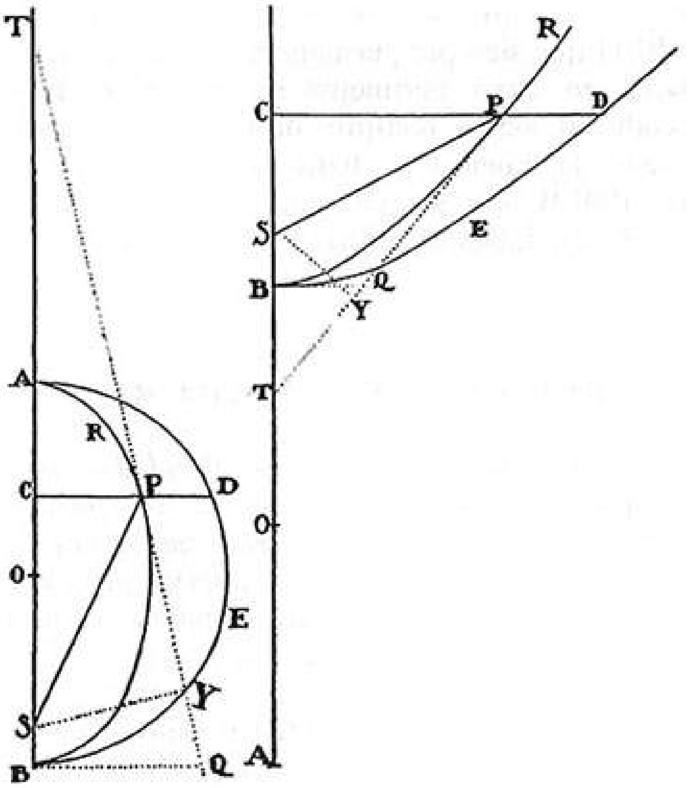
CASO 3. Y con similar argumento si la figura RPB es una parábola, y por el mismo vértice principal B se describe otra parábola BED que siempre permanezca dada, mientras la primera parábola, en cuyo perímetro se mueve el cuerpo P, va disminuyendo su «latus rectum» hasta que se anula, llegará a coincidir con la línea CB; hará entonces que el segmento parabólico BDEB sea proporcional al tiempo en que dicho cuerpo P o C cae hasta el centro S o B. Q. E. I.

PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA IX

Supuesto lo ya descubierto, digo que la velocidad de un cuerpo que cae en un lugar C es a la velocidad de un cuerpo que gira en círculo con centro B y distancia BC, como la raíz cuadrada de la razón de AC, distancia del cuerpo al vértice A ulterior del círculo o de la hipérbola rectangular, respecto a ½AB, semidiámetro principal de la figura.

Hágase en O la bisección de AB, diámetro común de ambas figuras RPB, DEB; y trácese la recta PT, tangente a la figura RPB en P, y que corte también a dicho diámetro común AB (prolongado si es necesario) en T; y sea SY perpendicular a dicha recta, lo mismo que BQ al susodicho diámetro, y supóngase que L sea el «latus rectum» de la figura RPB. Se sabe por el Corolario 9 de la Proposición XVI que la velocidad de un cuerpo que se mueve sobre la línea RPB en torno al centro S en un lugar cualquiera P será a la velocidad de un cuerpo que se mueve en torno al mismo centro describiendo un círculo a la distancia SP, como la raíz cuadrada de la razón del rectángulo ½L x SP a SY al cuadrado. Pues, por las cónicas, ACB es a CP^2 como 2AO a L, y por tanto, $\frac{2CP^2 \text{ x } AO}{ACB}$ es igual a L. Por tanto dichas velocidades son entre sí como la raíz cuadrada de $\frac{CP^2 \text{ x } AO \text{ x } SP}{AC \text{ x } CB}$ es a SY^2. Además, por las cónicas, CO es a BO como BO es a TO y, componiendo o dividiendo, como CB a BT. De donde, dividiendo o componiendo, será BO ± CO a BO como CT a BT, esto es, AC a AO como CP a BQ; y de aquí que $\frac{CP^2 \text{ x } AO \text{ x } SP}{ACB}$ sea igual a $\frac{BQ^2 \text{ x } AC \text{ x } SP}{AO \text{ x } BC}$. Disminúyase ahora la anchura CP de la figura RPB hasta el infinito de modo que el punto P coincida con el punto C y el punto S con el punto B y la línea BQ; y ahora la velocidad del cuerpo que cae por la línea recta CB será a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo de centro B y distancia BC como la raíz cuadrada de la razón

$\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ a SY^2, esto es (despreciando las razones de la igualdad de SP a BC y BQ^2 a SY^2), como la raiz cuadrada de la razón de AC a AO o de ½AB. Q. E. D.

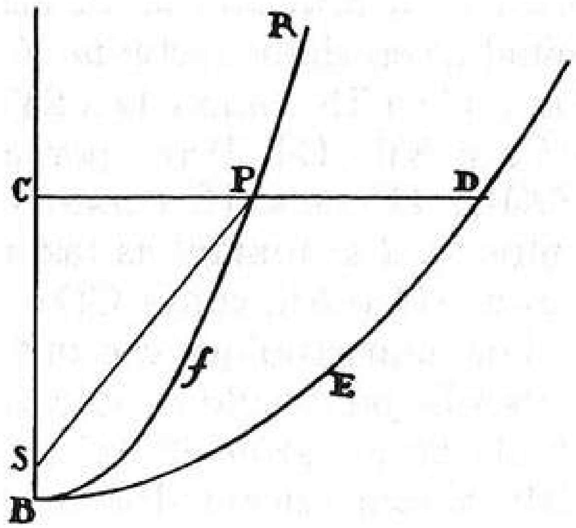


COROLARIO 1. Al coincidir los puntos B y S, TC será a TS como AC a AO.

COROLARIO 2. Si un cuerpo gira en un círculo de determinada distancia al centro, al desviar su movimiento hacia arriba subirá hasta duplicar su distancia al centro.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA X

Si la figura BED es una parábola, digo que la velocidad de un cuerpo que cae en cualquier punto C es igual a la velocidad con la que un cuerpo puede describir uniformemente un círculo de centro B y con la mitad de su intervalo BC.



Pues la velocidad de un cuerpo que describe una parábola de centro S siendo la parábola RPB será en un punto P cualquiera (por el Corolario 7 de la Proposición XVI) igual a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo uniformemente en torno al mismo centro S a la mitad del intervalo SP. Disminúyase infinitamente la anchura CP de la parábola hasta que el arco parabólico P*f*B coincida con la recta CB, el centro S con el vértice B y el intervalo SP con el intervalo BC, y la proposición será evidente. Q. E. D.

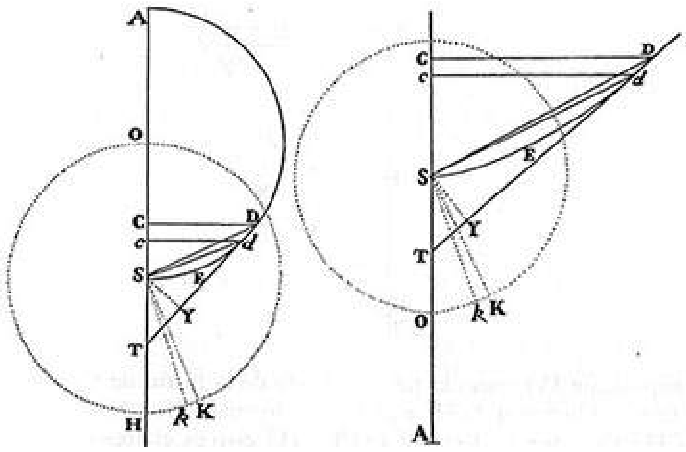
Proposición XXXV. Teorema XI

Con los mismos supuestos, digo que el área de la figura DES, descrita con radio indefinido SD, será igual al área que puede describir en el mismo tiempo un cuerpo girando uniformemente en torno al centro S y con radio igual a la mitad del «latus rectum» de la figura DES.

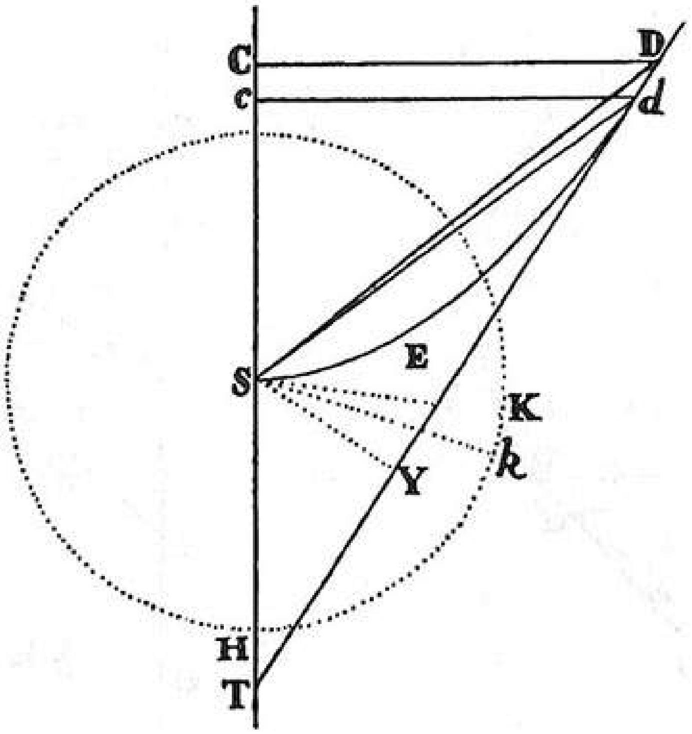
Pues imagínese que un cuerpo C describe al caer en la mínima partícula de tiempo el segmento C*c*, mientras otro cuerpo K, girando uniformemente en el círculo OK*k* en torno al centro S, describe el arco K*k*. Elévense las perpendiculares CD, *cd* que se encuentran con la figura DES en D y en *d*. Únanse SD, S*d*, SK, S*k* y trácese D*d* que encuentra al eje AS en T y sobre ella hágase descender la perpendicular SY.

Caso 1. Si ahora la figura DES es un círculo o una hipérbola rectangular trácese en O la bisección de su diámetro transverso AS, y SO será la mitad de su «latus rectum». Y puesto que TC es a TD como C*c* a D*d* y TD a TS como CD a SY, también será TC a TS como CD x C*c* a SY x D*d*. Pero (por el Corolario 1 de la Proposición XXXIII) TC es a TS como AC es a AO si al confundirse los puntos D, *d* se toman las razones últimas de las líneas. Luego AC es a AO o SK como CD x C*c* es a SY x D*d*. Además la velocidad de un cuerpo que cae en C es a la velocidad de un cuerpo que describe un círculo de intervalo SC y centro S como la raíz cuadrada de la razón de

AC a AO o SK (por la Proposición XXXIII). Y esta velocidad es a la velocidad de un cuerpo que describa el círculo OK*k* como la raíz cuadrada de la razón de SK a SC (por el Corolario 6 de la Proposición IV) y por lanío la velocidad primera es a la última, esto es el segmento C*c* al arco K*k*, como la raíz cuadrada de la razón de AC a SC, esto es, en razón de AC a CD. Por lo cual CD x C*c* es igual a AC x K*k*, y por tanto AC es a SK como AC x K*k* a SY x D*d*, y de aquí que SK x K*k* sea igual a SY x D*d*, y ½SK x K*k* igual a ½SY x D*d*, esto es, el área KS*k* igual al área SD*d*. Por lo tanto en cada partícula de tiempo se generan partículas de dos áreas KS*k* y SD*d* que si disminuyen en magnitud y aumentan en número infinitamente, llegan a ser iguales, y por consiguiente (por el Corolario del Lema IV), todas las áreas generadas a la vez son siempre iguales. Q. E. D.



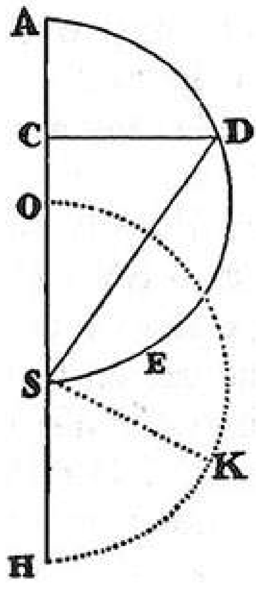
CASO 2. Pero si la figura DES fuese una parábola, hallaremos como antes que CD x C*c* es a SY x D*d* como TC a TS, esto es, como 2 a 1, y por tanto ¼CD x C*c* es igual a ½SY x D*d*. Pero la velocidad de un cuerpo que cae en C es igual a la velocidad con que puede describir un círculo uniformemente con intervalo de ½SC (por la Proposición XXXIV). Y esta velocidad es a la velocidad con la que puede describir un círculo de radio SK, esto es, el segmento C*c* al arco K*k* (por el Corolario 6 de la Proposición IV) como la raíz cuadrada de la razón de SK a ½SC, esto es, en la razón de SK a ½CD. Por lo cual ½SK x K*k* es igual a ¼CD x C*c*, y por tanto igual a ½SY x D*d*, esto es, el área KS*k* igual al área SD*d*, como antes. Q. E. D.



PROPOSICIÓN XXXVI. PROBLEMA XXV

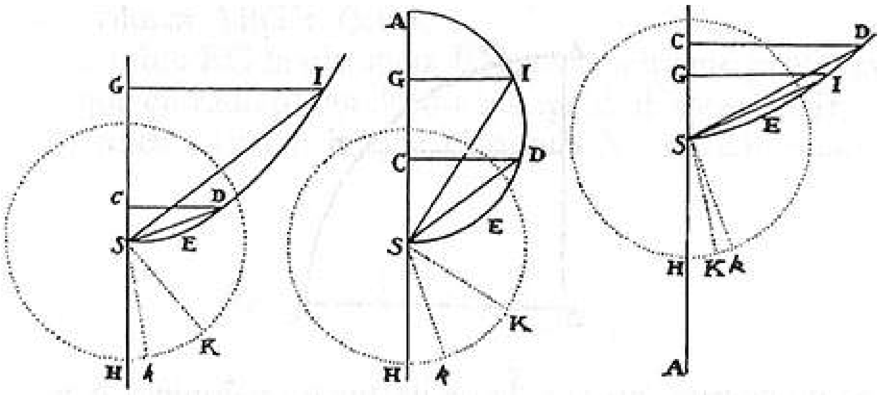
Determinar los tiempos de descenso de un cuerpo que cae desde un punto dado A.

Sobre el diámetro AS, distancia inicial del cuerpo al centro, trácese el semicírculo ADS, y también el semicírculo OKH igual al anterior y con centro en S. Desde C, lugar cualquiera del cuerpo, elévese la ordenada CD. Únase SD, y hágase el sector OSK igual al área ASD. Por la Proposición XXXV es evidente que un cuerpo al caer recorre el espacio AC en el mismo tiempo en que otro cuerpo, girando uniformemente en torno al centro S, puede describir el arco OK. Q. E. F.



Proposición xxxvii. Problema xxvi

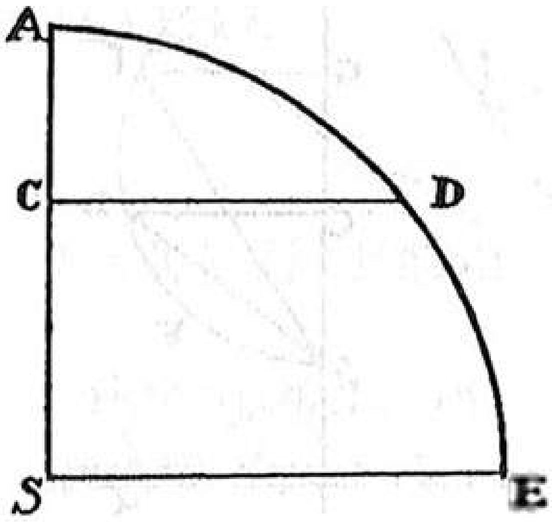
Determinar los tiempos de ascenso o caída de un cuerpo lanzado hacia arriba o hacia abajo desde un punto dado.



Sea G el punto de partida del cuerpo siguiendo la línea GS y con una velocidad cualquiera. Tómese GA a ½AS como el cuadrado de la razón de dicha velocidad a la velocidad uniforme con que un cuerpo puede girar en un círculo de intervalo dado G y centro S. Si dicha razón es de 2 a 1, el punto A dista infinitamente, en cuyo caso ha de trazarse una parábola con vértice S, eje SG, y «latus rectum» cualquiera. Esto es evidente por la Proposición xxxiv. Pero si dicha razón es menor o mayor que 2 a 1, en el primer caso, debe describirse un círculo sobre el diámetro SA y en el segundo una hipérbola rectangular. Es evidente por la Proposición xxxiii. Ahora con centro S e intervalo igual a la mitad del «latus rectum» trácese el círculo H*k*K, y desde el punto G del cuerpo que asciende o cae y desde otro punto cualquiera C elévense las perpendiculares GI, CD que tocan a la sección cónica o al círculo en I y en D. Después, unidas SI, SD, iguálense los segmentos SEIS, SEDS a los sectores HSK, HS*k*, y por la Proposición xxxv, el cuerpo G recorrerá el espacio GC en el mismo tiempo en que el cuerpo K puede describir el arco K*k*. Q. E. F.

Proposición xxxviii. Teorema xii

Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la altura o distancia de los lugares al centro, digo que los tiempos de caída, las velocidades y los espacios recorridos son respectivamente proporcionales a los arcos, a los senos rectos y a los senos versos de los arcos.



Sea un cuerpo que cae desde un lugar cualquiera A y según la línea AS; y desde el centro de fuerzas S, y con intervalo AS, trácese el cuadrante circular AE, y sea CD el seno recto de un arco cualquiera AD; y el cuerpo A, en el tiempo AD, recorrerá al caer el espacio AC, y en el punto C alcanzará la velocidad CD.

Se demuestra esto partiendo de la Proposición X del mismo modo que partiendo de la Proposición XI se demostró la Proposición XXXII.

COROLARIO 1. De aquí que sean iguales los tiempos en que un cuerpo que cae desde el punto A llega hasta S y otro cuerpo girando recorre el arco cuadrantal ADE.

COROLARIO 2. Por lo tanto, los tiempos todos en que los cuerpos que caen desde un lugar cualquiera hasta el centro son iguales. Pues todos los tiempos periódicos de cuerpos en revolución son iguales (por el Corolario 3 de la Proposición IV).

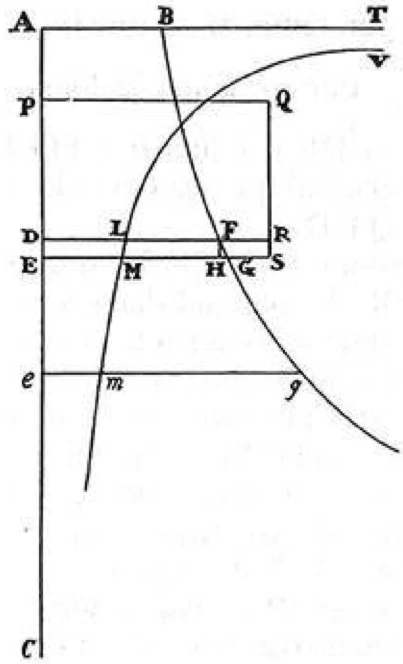
PROPOSICIÓN XXXIX. PROBLEMA XXVII

Supuesta una fuerza centrípeta de cualquier clase, y concedidas las cuadraturas de las figuras curvilíneas, se pide la velocidad de un cuerpo que asciende o cae según una recta en cada punto de la misma, y también el tiempo en que llegará a cada uno de los puntos; y viceversa.

Sea el cuerpo E que cae desde el punto cualquiera A según la recta ADEC, y desde su lugar E elévese la perpendicular EG, proporcional siempre a la fuerza centrípeta tendente en ese lugar hacia el centro C: sea BFG una línea curva continuamente tangente del punto G. Al comienzo del movimiento coincida EG con la perpendicular AB, y la velocidad del cuerpo en un punto cualquiera E será como la recta que elevada al cuadrado sea igual al área curvilínea ABGE. Q. E. I.

Tómese sobre EG la distancia EM, inversamente proporcional a la recta que elevada al cuadrado sea igual al área ABGE, y sea VLM una línea curva a la que el punto M sea continuamente tangente, y cuya asíntota sea la prolongación de la recta

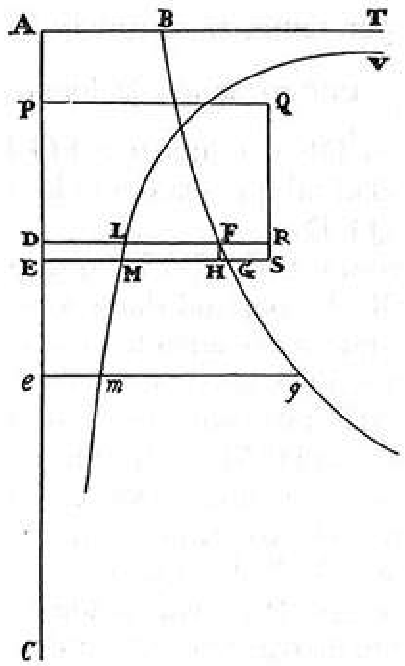
AB; y el tiempo en que un cuerpo al caer recorre el espacio AE será como el área curvilínea ABTVME. Q. E. I.



Pues sobre la recta AE tómese el segmento mínimo DE de una longitud dada, y sea DLF el lugar de la línea EMG, cuando el cuerpo pasaba por D; y si la fuerza centrípeta fuese tal que la recta, cuyo cuadrado es igual al área ABGE, sea como la velocidad del cuerpo que cae, el área misma será como el cuadrado de la velocidad, esto es, si se representan las velocidades en D y E por V y V + I, el área ABFD será como VV, y el área ABGE como VV + 2VI + II y, restando, el área DFGE como 2VI + II, por lo cual $\frac{\text{DFGE}}{\text{DE}}$ como $\frac{\text{2VI + II}}{\text{DE}}$, esto es, si se toman las razones primeras de estas cantidades en su momento inicial, la longitud DF es como $\frac{\text{2VI}}{\text{DE}}$, y en consecuencia también como la mitad de esta cantidad $\frac{\text{I x V}}{\text{DE}}$. Pero el tiempo en el que el cuerpo caer recorre el segmento aquel DE es directamente como dicho segmento e inversamente como la velocidad V, y la fuerza es directamente como el incremento 1 de la velocidad e inversamente como el tiempo, y por tanto, si se toman las razones primeras iniciales, como, $\frac{\text{I x V}}{\text{DE}}$, esto es, como la longitud DF. Luego una fuerza proporcional a DF o también a EG hará que el cuerpo caiga con una velocidad tal que sea como la recta cuyo cuadrado sea el área ABGE. Q. E. D.

Por lo demás, como el tiempo en que puede recorrerse un segmento mínimo DE de longitud dada, sea inversamente como la velocidad y por ende inversamente como la línea recta cuyo cuadrado sea el área ABFD; y, por otra parte, sea DL, y también el área naciente DLME, inversamente como dicha línea recta, el tiempo será como el área DLME, y la suma de todos los tiempos como la suma de todas las áreas, esto es (por el Corolario del Lema IV), la totalidad de los tiempos en que se recorre la línea AE como el área total ATVME. Q. E. D.

COROLARIO 1. Si fuese P el lugar desde el que debiese caer un cuerpo urgido por una fuerza centrípeta uniforme conocida (como se supone generalmente la gravedad) de modo que en el punto D adquiera una velocidad igual a la de otro cuerpo en ese punto D que la ha adquirido al caer merced a otra fuerza cualquiera, y sobre la perpendicular DF se tomara DR tal que sea a DF como dicha fuerza uniforme es a la otra fuerza en D, y se completase el rectángulo PDRQ, y se segregase el área ABFD igual al mismo; entonces A será el lugar desde el cual cayó el otro cuerpo. Pues, completando el rectángulo DRSE, como el área ABFD sea al área DFGE como VV a 2VI, y por lo mismo como ½V a I, esto es, como la mitad de la velocidad total al incremento de la velocidad del cuerpo que cae empujado por la fuerza no uniforme; y similarmente el área PQRD es al área DRSE como la mitad de toda la velocidad al incremento de la velocidad del cuerpo que cae con fuerza uniforme, y como dichos incrementos (por la igualdad de los tiempos nacientes) son como las fuerzas generatrices, esto es, como las ordenadas DF, DR, y por tanto, como las áreas nacientes DFGE, DRSE; en consecuencia, las áreas totales ABFD, PQED serán entre sí como las mitades de las velocidades totales, y por lo tanto, serán iguales por ser las velocidades iguales.



COROLARIO 2. De aquí que si un cuerpo es lanzado desde cualquier punto D hacia arriba o hacia abajo con una velocidad dada, y se supone la ley de la fuerza centrípeta, su velocidad en otro punto *e* se hallará elevando la ordenada *eg*, y

tomando dicha velocidad a la velocidad en el punto D como la recta, cuyo cuadrado equivalga al rectángulo PQRD aumentado en el área curvilínea DF*ge* si el punto *e* está por debajo del punto D y disminuido si está por arriba, es a la recta cuyo cuadrado equivalga sólo al rectángulo PQRD.

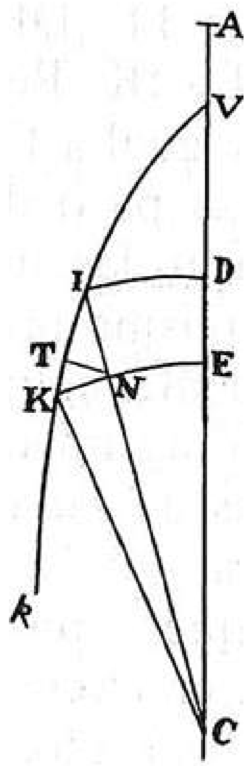
COROLARIO 3. También se halla el tiempo elevando la ordenada *em* inversamente proporcional al lado cuadrado de PQRD ± DF*ge*, y tomando el tiempo en que el cuerpo hubiese descrito la línea D*e* al tiempo en que otro cuerpo cayendo con fuerza uniforme desde P llega hasta D, como el área curvilínea DL*me* al rectángulo 2PD x DL. Puesto que el tiempo, en el que cayendo con fuerza uniforme un cuerpo describe la línea PD es al tiempo en el que el mismo cuerpo describe la línea PE, como la raíz cuadrada de la razón de PD a PE, esto es (considerando el segmento DE en el instante de su nacimiento), como la razón de PD a PD + ½DE o como 2PD + DE, y por partes, al tiempo en que dicho cuerpo recorrió el segmento DE como 2PD a DE, y por tanto como el rectángulo 2PD x DL al área DLME; y el tiempo en que un cuerpo describió el segmento DE es al tiempo en que el otro describió con movimiento variable la línea D*e* como el área DLME al área DL*me*, y por consiguiente el primer tiempo es al último como el rectángulo 2PD x DL al área DL*me*.

Sección VIII
DE CÓMO HALLAR ÓRBITAS EN LAS CUALES GIRASEN CUERPOS SUJETOS A FUERZAS CENTRÍPETAS CUALESQUIERA

Proposición XL. Teorema XIII

Si un cuerpo se mueve de cualquier forma sujeto a la acción de una fuerza centrípeta, y otro cuerpo sube o baja por una línea recta, y en algún momento de alturas iguales fuesen iguales sus velocidades, serán iguales sus velocidades en todas las alturas iguales.

Caiga un cuerpo desde A a través de D, E hacia un centro C, y muévase otro cuerpo desde V según la línea curva VIK*k*. Con centro en C y distancias cualesquiera trácense los círculos concéntricos DI, EK que tocan a la recta AC en D y E y a la curva VIK en I y K. Únase IC que cortará a KE en N; y sobre IK trácese la perpendicular NT; sea también muy pequeño el intervalo entre circunferencias DE o IN, y sean iguales las velocidades de los cuerpos en D y I. Puesto que las distancias CD, CI son iguales, las fuerzas centrípetas en D y en I serán iguales. Representen a estas fuerzas los segmentos iguales DE, IN; si una de las fuerzas IN (por el Corolario II de las Leyes) se descompone en dos NT y IT, la fuerza NT, actuando según la línea NT, perpendicular a la trayectoria ITK del cuerpo, en nada alterará la velocidad de dicho cuerpo en su curso, sino que solamente lo desviará de su curso rectilíneo y hará que dicho cuerpo, apartándose continuamente de la tangente de la órbita, camine según la trayectoria curva ITK*k*. Toda dicha fuerza se consumirá en la producción de este efecto: mientras que la otra fuerza IT, actuando según la marcha del cuerpo, toda ella lo acelerará, y en un tiempo mínimo dado generará una aceleración proporcional a ella misma. Por tanto las aceleraciones de los cuerpos en D e I alcanzadas en tiempos iguales (si se consideran las razones primeras de los segmentos nacientes DE, IN, IK, IT, NT) son como las líneas DE, IT: mientras que en tiempos desiguales son como el producto de dichas líneas por los tiempos. Por lo demás, los tiempos en que se describirán DE e IK, por la igualdad de velocidades, son como las trayectorias descritas DE e IK, y por tanto las aceleraciones en el paso de los cuerpos por DE e IK, son como el producto de DE e IT, DE e IK, esto es como DE cuadrado y el rectángulo IT x IK. Pero el rectángulo IT x IK es igual a IN cuadrado, esto es igual a DE cuadrado y por tanto las aceleraciones generadas en el paso de los cuerpos desde Del hasta E y K son iguales. Luego las velocidades de los cuerpos en E y K son iguales: y por el mismo argumento siempre resultarán iguales a distancias subsiguientes iguales. Q. E. D.



Y además por el mismo argumento cuerpos con velocidades iguales y a iguales distancias del centro se desacelerarán igual al ascender a distancias iguales. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que, si un cuerpo oscila colgado de un hilo o se ve obligado a girar en círculo mediante un impedimento completamente pulido y lubrificado, y otro cuerpo sube o baja por una recta, y a una altura cualquiera igual son sus velocidades iguales, también serán iguales sus velocidades en cualesquiera otras alturas iguales. Pues con el hilo del cuerpo pendular o con la pared completamente lubrificada del recipiente se consigue exactamente lo mismo que con la fuerza transversal NT. Por ella el cuerpo no se acelera ni se desacelera, sino que solamente es obligado a apartarse de la trayectoria recta.

COROLARIO 2. De aquí también que, si la cantidad P fuese la máxima distancia al centro que puede alcanzar un cuerpo, tanto oscilando como girando en cualquier trayectoria, y la que alcanzaría por tanto lanzado hacia arriba desde un punto cualquiera de la trayectoria con la velocidad que tiene en ese punto; y fuese la cantidad A la distancia del cuerpo al centro en otro punto cualquiera de la órbita, y siendo siempre la fuerza centrípeta como una potencia de A tal como A^{n-1}, cuyo índice $n-1$ es cualquier número n disminuido en una unidad; a cualquier altura A la velocidad del cuerpo será como $\sqrt{P^n - A^n}$, y por tanto estará dada. Pues la velocidad recta de ascenso o descenso (por la Proposición XXXIX) está en esta misma razón.

PROPOSICIÓN XLI. PROBLEMA XXVIII

Dada una fuerza centrípeta de cualquier clase y supuestas las cuadraturas de las figuras curvas, hállense tanto las trayectorias en que se mueven los cuerpos como los tiempos de los movimientos en las trayectorias halladas.

Tienda una fuerza cualquiera hacia el centro C y hállese la trayectoria VIK*k*. Sea dado el círculo VR con centro en C y trazado con una distancia cualquiera CV, y con el mismo centro trácense otros círculos ID, KE que corten a la trayectoria en I y K y a la recta CV en D y E. Trácese tanto la recta CNIX que corta a los círculos KE, VR en N y X, como la recta CKY que toca al círculo VR en Y. Y sean los puntos I y K muy próximos entre sí y que el cuerpo se mueva desde V por I y K hasta *k*; sea, así mismo A el punto desde el cual otro cuerpo debe caer para que adquiera en el punto D una velocidad igual a la del cuerpo anterior en I. Y, dado lo dicho en la Proposición XXXIX, el segmento IK, descrito en el menor tiempo dado, será como la velocidad y, por tanto, como la recta cuyo cuadrado sea igual al área ABFD, y sí tendrá dado el triángulo ICK proporcional al tiempo, y por lo mismo KN será inversamente como la altura IC, esto es, si se da una cantidad Q cualquiera y a la altura IC la denominamos A, como $\frac{Q}{A}$. A esta cantidad $\frac{Q}{A}$ llamémosla Z y supongamos que la magnitud Q es tal que en algún caso $\sqrt{ABFD}$ es a Z como IK a KN, entonces en todos los casos $\sqrt{ABFD}$ será a Z como IK a KN, y ABFD a ZZ como IK^2 a KN^2 y restando ABFD - ZZ: ZZ = IN^2: KN^2,

por tanto $\sqrt{ABFD - ZZ}$: Z o $\frac{Q}{A}$ = IN: KN

y por ello A x KN= $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$ = IN: KN

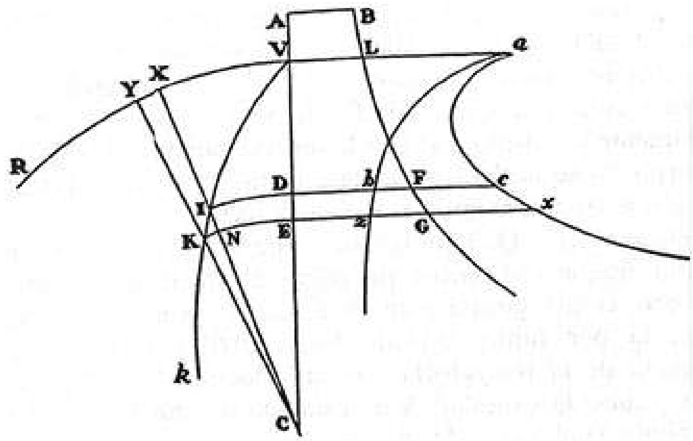
de donde, como YX x XC: A x KN = CX^2: AA

será el rectángulo XY x XC= $\frac{Q \times YN \times CX^2}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$

Por tanto, si en la perpendicular DF se toman siempre D*b*, D*c* iguales respectivamente a

$$\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}} \text{ y a } \frac{Q \times CX^2}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$$

y se trazan las curvas *ab*, *ac*, a las cuales son siempre tangentes los puntos *b*, *c*; y se eleva hasta la línea AC desde el punto V la perpendicular V*a* que corta las áreas curvilíneas VD*ba*, VD*ca* y se elevan también las ordenadas E*z*, E*x*: dado que el rectángulo D*b* x IN o D*bz*E es igual a la mitad del rectángulo A x KN o al triángulo ICK; y el rectángulo De x IN o D*cx*E es igual a la mitad del rectángulo YX x XC, o sea, al triángulo XCY; esto es, puesto que las partículas nacientes D*bz*E, ICK de las áreas VD*ba*, VIC son siempre iguales, y las partículas nacientes D*cx*E, XCY de las áreas VD*ca*, VCX son siempre iguales, el área generada VD*ba* siempre será igual al área generada VIC y por tanto proporcional al tiempo, y el área generada VD*ca* igual al sector generado VCX. Así pues, dado el tiempo de partida de un cuerpo desde V, se tendrá dada también el área VD*ba* proporcional a él, y de aquí se tendrá también la altura del cuerpo CD o CI, así como el área VD*ca* y su igual el sector VCX a la vez que su ángulo VCI. Una vez dados el ángulo VCI y la altura CI se tiene el punto I en el que al completar ese tiempo se hallará el cuerpo. Q. E. I.

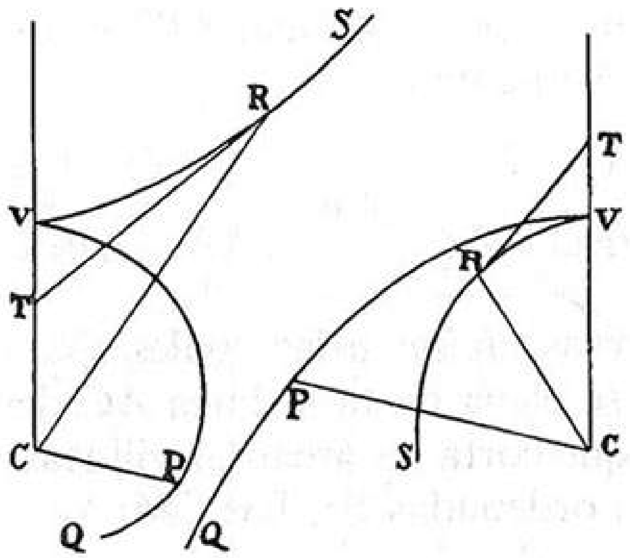


COROLARIO 1. De aquí que las alturas máximas y mínimas de los cuerpos, esto es, los ápsides de las trayectorias se puedan hallar fácilmente. Puesto que los ápsides son los puntos en los que la recta IC trazada por el centro cae perpendicularmente sobre la trayectoria VIK: cosa que ocurre cuando las rectas IK y NK se igualan, y por tanto cuando el área ABFD es igual a ZZ.

COROLARIO 2. Y también, partiendo de la altura dada del cuerpo IC, se halla fácilmente el ángulo KIN con el cual corta la trayectoria en cualquier punto a dicha línea IC; a saber, tomando el seno del ángulo al radio como KN a IK, esto es, como Z al lado cuadrado del área ABFD.

COROLARIO 3. Si con centro en C y vértice principal en V se describe una sección cónica cualquiera VRS, y desde un punto malquiera R dé la misma se traza una tangente que corte al eje principal CV prolongado infinitamente en un punto T;

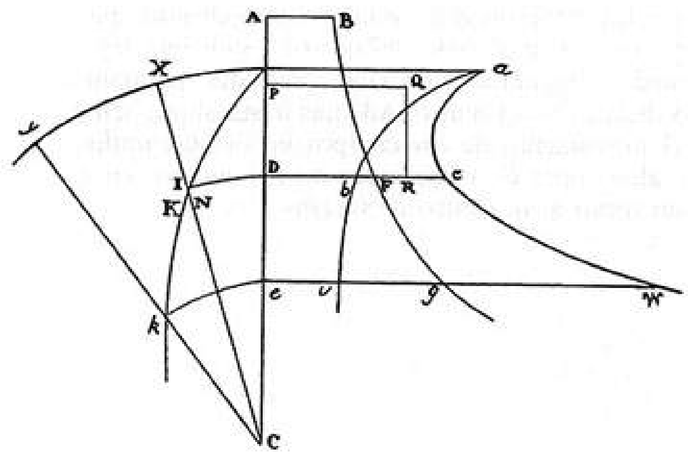
después, uniendo CR, se traza la recta CP igual a la abscisa CT, y el ángulo VCP proporcional al sector VCR; y si además una fuerza centrípeta inversamente proporcional al cubo de las distancias de los lugares al centro tiende hacia el centro C, y un cuerpo sale con una velocidad precisa desde V según una línea perpendicular a la recta CV: dicho cuerpo circulará por la trayectoria VPQ siempre tangente al punto P; y por lo tanto, si la sección cónica VRS fuese una hipérbola, descenderá hacia el centro: pero si fuese una elipse, ascenderá continuamente y marchará hacia el infinito. Y por el contrario, si un cuerpo con velocidad cualquiera parte de V y desde allí empieza bien a descender oblicuamente hacia el centro o bien a ascender oblicuamente desde él, según sea la figura VRS una hipérbola o una elipse, se puede hallar la trayectoria aumentando o disminuyendo el ángulo VCP según una razón dada. Por lo demás, al convertirse la fuerza centrípeta en centrífuga, el cuerpo ascenderá oblicuamente por la trayectoria VPC, la cual se halla tomando el ángulo VCP proporcional al sector elíptico VRC y la longitud CP igual a CT como antes. Todas estas cosas se siguen de la proposición anterior, mediante la cuadratura de determinada curva cuyo hallazgo, por ser fácil, en aras de la brevedad, doy por hecho[32].



Proposición xlii. Problema xxix

Dada la ley de la fuerza centrípeta, hallar los movimientos de un cuerpo que parte de un lugar dado, con una velocidad dada y según una recta dada.

Supuesto lo dicho en las tres proposiciones precedentes; parta un cuerpo de I según el segmento IK con la velocidad que otro cuerpo puede adquirir en D cayendo desde P con fuerza centrípeta uniforme: y sea esta fuerza uniforme a la fuerza que actúa en I sobre el cuerpo anterior, como DR a DF. Diríjase pues el cuerpo hacia *k*; y con centro en C y distancia C*k* trácese el círculo *ke* que corta a la recta PD en e y elévense *eg, ev, ew* ordenadas a las curvas BF*g, abv, acw*. A partir del rectángulo dado PDRQ y de la ley dada de la fuerza centrípeta con la que se mueve el primer cuerpo, se tiene dada la curva BF*g*, por construcción del Problema XXVII y su Corolario 1. De aquí, por estar dado el ángulo CIK, se tiene la proporción de las líneas nacientes IK, KN, y después, por la construcción del Problema XXVIII se tiene la cantidad Q junto con las líneas curvas *abv, acw*: y por lo tanto, al cumplirse cualquier tiempo D*bve*, se tiene, tanto la altura del cuerpo C*e* o C*k*, como el área D*cwe* y el sector igual a ella XZ*y*, así como el ángulo ICK y el punto *k* en el cual se hallará el cuerpo en ese momento. Q. E. I.



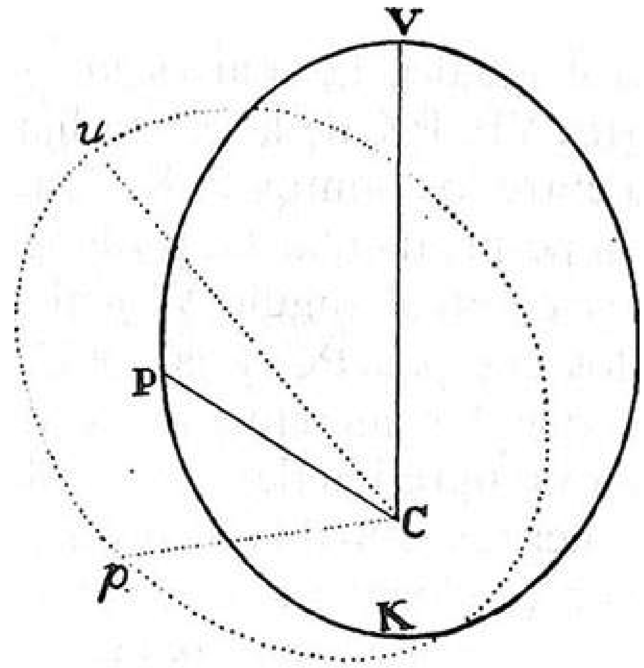
En estas proposiciones estamos suponiendo que la fuerza centrípeta varía al alejarse del centro según una ley cualquiera, que puede imaginarse cada cual, pero que permanece igual a iguales distancias del centro. Además hasta ahora hemos considerado el movimiento de los cuerpos en órbitas inmóviles. Falta añadir algo sobre el movimiento de los cuerpos en órbitas que giren en torno a un centro de fuerzas.

Sección IX
DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS EN ÓRBITAS MÓVILES Y DEL MOVIMIENTO DE APSIDES

Proposición XLIII. Problema XXX

Hágase que un cuerpo, que se halla en una trayectoria cualquiera la cual gira en torno a un centro de fuerzas, se pueda mover igual que otro cuerpo en esa misma trayectoria en reposo.

Gire el cuerpo P en la órbita de posición dada VPK partiendo de V hacia K. Desde el centro C trácese C*p*, que sea siempre igual a CP, y el ángulo VC*p* resulte proporcional al ángulo VCP; y el área descrita por la línea C*p* será al área VCP que resulta simultáneamente descrita por la línea CP como la velocidad de la línea descriptora C*p* a la velocidad de la línea descriptora CP; esto es, como el ángulo VC*p* al ángulo VCP, y por tanto en una razón dada, y por tanto proporcional al tiempo. Al ser proporcional al tiempo el área descrita por C*p* en un plano inmóvil, es evidente que un cuerpo bajo la acción de una adecuada fuerza centrípeta puede girar junto con el punto *p* en la línea curva que por la razón expuesta describe el punto *p* en el plano inmóvil. Háganse iguales el ángulo VC*u* y el ángulo PC*p*, la línea *Cu* y la línea CV y la figura *u*C*p* con la figura VCP, y el cuerpo siempre presente en *p* se moverá en el perímetro de la figura en revolución *u*C*p*, además describirá el arco de la misma *up* en el mismo tiempo en que otro cuerpo P podría describir el arco VP igual al anterior sobre la figura en reposo VPK. Hállese por consiguiente, por el Corolario 5 de la Proposición VI, la fuerza centrípeta con la que un cuerpo puede girar en la curva que describe el punto *p* en el plano inmóvil, y quedará resuelto el problema. Q. E. F.

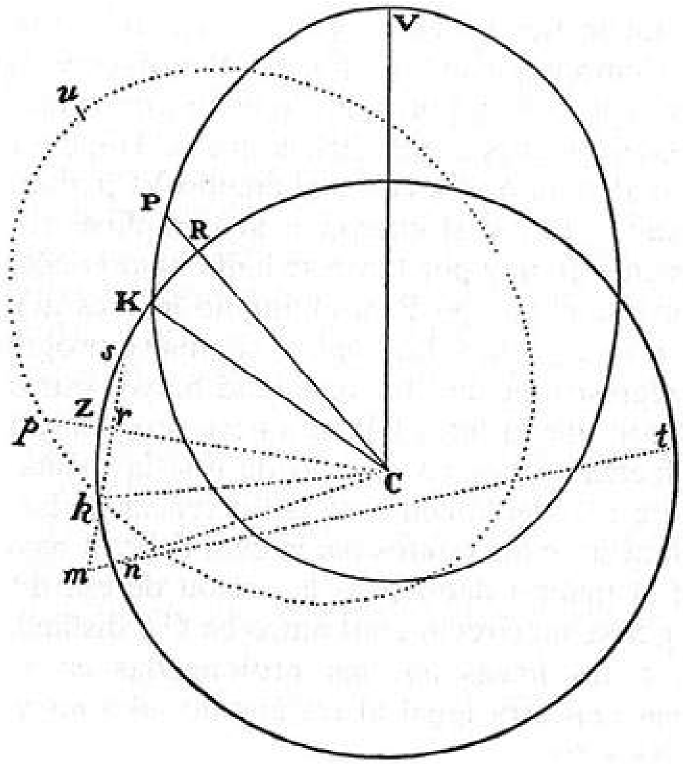


Proposición xliv. Teorema xiv

La diferencia entre las fuerzas por las que dos cuerpos pueden moverse igualmente, el uno en una órbita fija y el otro en una órbita igual en revolución, está en razón inversa del cubo de las alturas comunes.

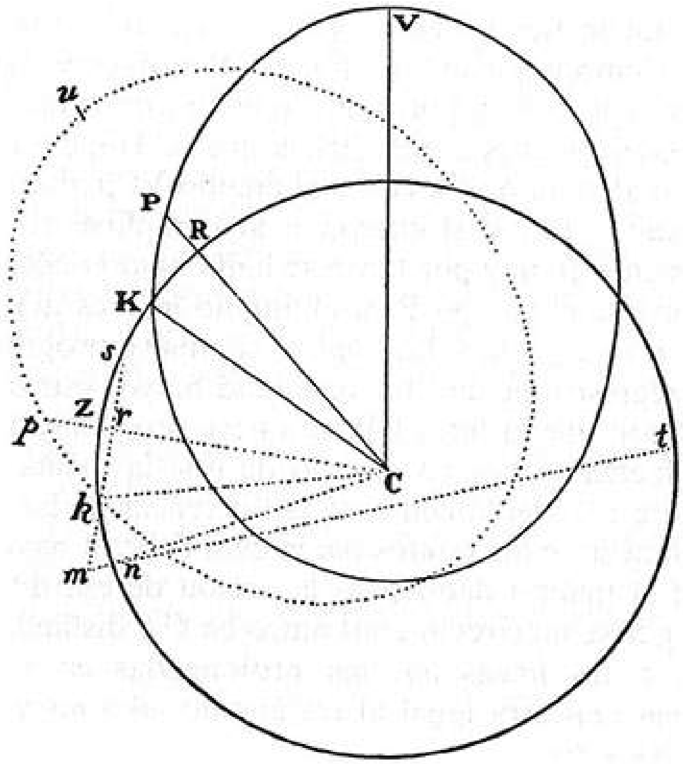
Sean semejantes e iguales las partes *up*, *pk* de la órbita en revolución a las partes VP, PK de la órbita fija; supóngase que es mínima la distancia entre los puntos P, K. Trácese desde el punto *k* sobre la recta *p*C la perpendicular *kr*, prolongándola hasta *m*, de modo que *mr* sea a *kr* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP. Dado que las alturas de los cuerpos PC y *p*C, KC y *k*C siempre son iguales, es evidente que los incrementos y decrementos de las líneas PC y *p*C serán siempre iguales, y por ello si el movimiento de cada uno de los cuerpos situados respectivamente en P y en *p* se divide en dos (por el Corolario II de las Leyes) uno de los cuales tiende al centro, o sea, según las líneas PC, pC, y el otro, transversal al anterior, tiene una dirección perpendicular a dichas lineas PC, *p*C; el movimiento hacia el centro será igual en ambos, mientras el movimiento transversal del cuerpo *p* será al movimiento transversal del cuerpo P como el movimiento angular de la línea *p*C al movimiento angular de la línea PC, esto es, como el ángulo VC*p* al ángulo VCP. Por consiguiente, en el mismo tiempo en el que el cuerpo P con sus dos movimientos alcanza el punto K, el cuerpo *p* con movimiento igual hacia el centro se moverá igualmente desde *p* hacia C, y por tanto, al cumplirse dicho tiempo, se hallará en algún lugar sobre la línea *mkr* que es perpendicular a *p*C pasando por *k*; y con el movimiento transversal habrá adquirido una distancia de *p*C que será a la distancia adquirida por el otro cuerpo P respecto a

PC como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del cuerpo p. Por lo cual, al ser *kr* igual a la distancia adquirida por el cuerpo P respecto a la línea PC, y al ser *mr* a *kr* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP, esto es, como el movimiento transversal del cuerpo *p* al movimiento transversal del cuerpo P, es evidente que al cumplirse dicho tiempo el cuerpo *p* se hallará en el punto *m*. Esto será así siempre que los cuerpos *p* y P se muevan igualmente según las líneas *p*C, PC, y por tanto siempre que se hallen bajo la acción de fuerzas iguales según dichas líneas. Tómese en cambio el ángulo *p*C*n* al ángulo *p*C*k* como el ángulo VC*p* al ángulo VCP y sea *n*C igual a *k*C, y el cuerpo *p* al cumplirse el tiempo se hallará realmente en *n*; y por tanto se halla bajo la acción de una fuerza mayor que el cuerpo P, si el ángulo *n*C*p* es mayor que el ángulo *k*C*p*, esto es, si la órbita *upk*, o se mueve progresivamente o se mueve regresivamente, con velocidad mayor que el doble de la velocidad con que la línea CP se mueve progresivamente; y es urgido con fuerza menor en el caso de que la órbita se mueva regresivamente más lentamente. Y la diferencia de las fuerzas es como la distancia de los puntos *mn* la cual debería recorrer dicho cuerpo *p* en el tiempo dado bajo la acción de esa diferencia de fuerzas. Imagínese un círculo con centro en C y distancia C*n* o C*k* que cortase a las líneas *mr*, *mn* prolongadas en *s* y *f*, y el rectángulo *mn* x *mt* será igual al rectángulo *mk* x *ms* y por tanto *mn* igual a $\frac{mk \times ms}{mt}$. Como, por otra parte, los triángulos *p*C*k*, *p*C*n* para un tiempo dado alcancen magnitudes dadas, *kr* y *mr*, y su diferencia *mk* y su suma *ms* son inversamente como la altura *p*C, por tanto, el rectángulo *mk* x *ms* es inversamente como el cuadrado de la altura *p*C. Y además, *mt* es directamente como ½*mt*, esto es, como la altura *p*C. Estas son las razones primeras de las lineas nacientes; y por ello ocurre que $\frac{mk \times ms}{mt}$, esto es, que el segmento naciente *mn*, y la diferencia de fuerzas proporcional a ella sea como el inverso del cubo de la altura *p*C. Q. E. D.

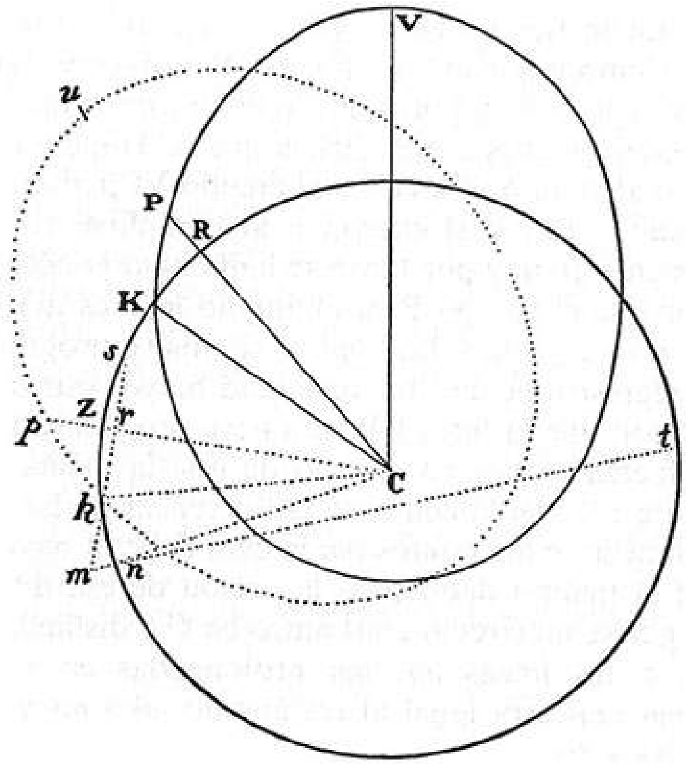


COROLARIO 1. De aquí que la diferencia de fuerzas en los puntos P y *p*, o K y *k*, es a la fuerza con que un cuerpo podría girar con movimiento circular desde R a K en el mismo tiempo en que el cuerpo P describe en la órbita fija el arco PK, como el segmento naciente *mn* al seno verso del arco naciente RK, esto es, como $\frac{mk \times ms}{mt}$ a $\frac{rk^2}{2kC}$, o como *mk* x *ms* a *rk* cuadrado; esto es, si se toman cantidades dadas, F, G, mutuamente en la misma proporción que tienen entre sí el ángulo VCP a VC*p*, como GG - FF a FF. Y por tanto, si con centro en C y distancia cualquiera CP o C*p* se traza un sector circular igual al área de todo VPC, el cual ha sido descrito por el cuerpo P girando en la órbita inmóvil en mi tiempo cualquiera con el radio trazado al centro, la diferencia de fuerzas, con las que el cuerpo P en la órbita inmóvil y el cuerpo *p* en la órbita en revolución están girando, será a la fuerza centrípeta con la que otro cuerpo con radio trazado al centro puede describir uniformemente ese sector en el mismo tiempo en que se describe el área VPC, como GG - FF a FF. Pues dicho sector y el área *p*C*k* son entre sí como los tiempos en que son descritos.

COROLARIO 2. Si la órbita VPK fuese una elipse con su foco en C y su ápside superior en V; y se supone la elipse *upk* semejante e igual a ella de modo que *p*C sea siempre igual a PC y el ángulo VC*p* respecto a VCP en una razón dada G a F, y por la altura PC o *p*C se escribe A, y por el «latus rectum» de la elipse 2R: la fuerza, con la que un cuerpo puede girar en la elipse móvil, sera como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ y viceversa. Represéntese la fuerza con la cual un cuerpo puede girar en una elipse fija por la cantidad $\frac{FF}{AA}$ y la fuerza en V será $\frac{FF}{CV^2}$. Pero la fuerza con la que un cuerpo puede girar en un círculo a la distancia CV con la velocidad que tiene un cuerpo en V girando en una elipse, es a la fuerza con la que un cuerpo girando en una elipse se ve urgido en el ápside V, como la mitad del «latus rectum» de la elipse al semidiámetro CV del círculo, siendo por tanto $\frac{RFF}{CV^3}$; y la fuerza que sea a ésta como GG - FF a FF vale $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$; y esta fuerza (por el Corolario 1 de esta Proposición) es la diferencia de fuerzas en V con las cuales giran el cuerpo P en la elipse inmóvil VPK y el cuerpo *p* en la elipse móvil *upk*. De donde, puesto que (por esta Proposición) dicha diferencia en otra altura cualquiera A es a sí misma en la altura CV como a $\frac{1}{A^3}$ a $\frac{1}{CV^3}$, dicha diferencia para toda altura A valdrá $\frac{RGG - RFF}{A^3}$. Por lo tanto añádase a la fuerza $\frac{FF}{AA}$ con la cual un cuerpo puede girar en una elipse fija VPK el exceso $\frac{RGG - RFF}{A^3}$ y se tendrá la fuerza total $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$ con la cual puede un cuerpo girar en la elipse móvil *upk* en tiempos iguales.

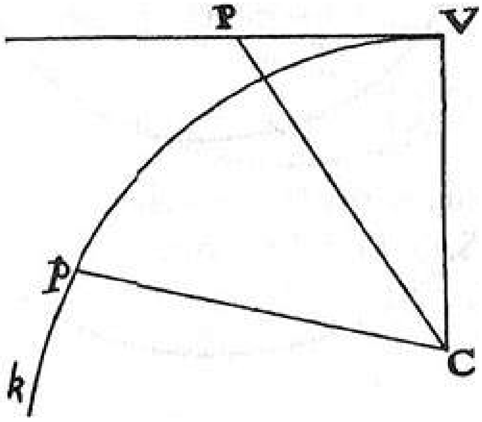


COROLARIO 3. De igual modo se hallará que si la órbita inmóvil VPK fuese una elipse cuyo centro está en el centro de fuerzas C; y si se supone la elipse móvil *upk* semejante, igual y concéntrica a ella; y fuese 2R el «latus rectum» principal de tal elipse, y 2T el «latus transversum» o eje mayor, y el ángulo VC*p* es constantemente a VCP como G a F; las fuerzas, con las cuales los cuerpos pueden girar en la elipse fija y en la móvil en tiempos iguales, serán respectivamente como $\frac{FFA}{T^3}$ y $\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$.



COROLARIO 4. Y, en general, si llamamos T a la altura máxima del cuerpo CV, y llamamos R al radio de la curvatura que tiene en V la órbita VPK, esto es, al radio de un círculo de curvatura igual, y se denomina $\frac{FFA}{TT}$ a la fuerza centrípeta con que un cuerpo puede girar en cualquier trayectoria inmóvil VPK ni el punto V, mientras en otros puntos P se denomina indeterminadamente X, y se denomina A a la altura CP, y se loma G respecto a F en la razón dada del ángulo VC*p* al ángulo VCP: la fuerza centrípeta con la cual el mismo cuerpo podría o alizar los mismos movimientos en los mismos tiempos sobre la misma trayectoria movida circularmente *upk* será como la suma de las fuerzas X + $\frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

COROLARIO 5. Por lo tanto, dado el movimiento de un cuerpo en una órbita fija cualquiera, su movimiento angular en torno al centro de fuerzas puede aumentarse o disminuirse en una razón dada, de donde se pueden encontrar órbitas fijas nuevas en las cuales giren los cuerpos con nuevas fuerzas centrípetas.



COROLARIO 6. Así pues, si sobre la recta CV de posición dada se eleva la perpendicular VP de longitud indeterminada y se une CP y se traza C*p* igual a la anterior formando el ángulo VC*p* tal que sea al ángulo VCP según una razón dada; la fuerza con que un cuerpo puede girar en la curva V*pk*, que describe continuamente el punto *p*, será inversamente como el cubo de la altura C*p*. Pues el cuerpo P, por la fuerza de inercia, no actuando ninguna otra fuerza, continuará por la recta VP. Añádase la fuerza tendente hacia el centro C inversamente proporcional al cubo de la altura CP o C*p* y (por lo que se acaba de demostrar) el movimiento aquel rectilíneo se desviará según la línea curva V*pk*. Pero esta curva V*pk* es la misma que aquella curva VPK hallada en el Corolario 3 de la Proposición XLI por la cual, dijimos allí, ascienden oblicuamente los cuerpos atraídos por fuerzas como éstas.

PROPOSICIÓN XLV. PROBLEMA XXXI[33]

Hallar el movimiento de ápsides en órbitas muy próximas a círculos.

Se resuelve aritméticamente este problema haciendo que la órbita descrita en un plano fijo por un cuerpo que gira en una elipse móvil (como en los Corolarios 2 y 3 de la Proposición anterior) se convierta en la figura de la órbita cuyos ápsides se buscan, y calculando después los ápsides de la órbita descrita por bicho cuerpo en el plano fijo. Pero las órbitas devienen de formas iguales si las fuerzas centrípetas con las que son descritas, comparadas entre sí, resultan proporcionales a alturas iguales. Sea el punto V el ápside superior, y escríbase T por la altura máxima CV, A por la altura cualquiera CP o C*p*, y X por la diferencia de alturas CV - CP; entonces, la fuerza con la que un cuerpo se mueve en la elipse que gira en torno a su foco C (como en el Corolario 2) y que en el Corolario 2 era como $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, esto es, como $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$, sustituyendo T - X por A, sera como

$\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$. De modo semejante ha de reducirse otra fuerza centrípeta a una fracción cuyo denominador sea A^3 y los numeradores habrán de ser análogos mediante la correlación de términos homólogos entre sí. Resultará más claro con ejemplos.

EJEMPLO I. Supongamos que la fuerza centrípeta es uniforme y, por consiguiente, como $\frac{A^3}{A^3}$, o (escribiendo T - X por A en el numerador) como $\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$; y al poner en correspondencia los términos de los numeradores, a saber, los valores dados con los dados y los no dados con los no dados, resultará RGG - RFF + TFF a T^3 como -FFX a $-3TTX + 3TXX - X^3$ o como -FF a - 3TT + 3TX - XX. Al suponer ahora que la órbita se aproxima mucho a un círculo, hágase coincidir con él, y al hacerse iguales R y T, y disminuir X a la vez hasta el infinito, las razones últimas serán RGG a T^3 como -FF a -3TT, o también, GG a TT como FF a 3TT y, viceversa, GG a FF como TT a 3TT, esto es, como 1 a 3; y por tanto G a F, esto es, el ángulo VC*p* al ángulo VCP como 1 a √3. Por tanto, dado que un cuerpo en una elipse inmóvil completa al caer desde el ápside superior al inferior un ángulo (por así decirlo) de 180 grados; el otro cuerpo en una elipse móvil, pero también en la órbita inmóvil de que tratamos, al caer desde el ápside superior al inferior completará un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grados: esto también gracias a la semejanza de esta órbita, descrita por un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta uniforme, con la órbita descrita por un cuerpo que gira en una elipse en revolución sobre un plano fijo. Por la correlación de términos anterior devienen dichas órbitas semejantes, no universalmente sino sólo cuando se aproximan muy sensiblemente a la forma circular. Por tanto, cuando un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta gira en una órbita casi circular completará siempre entre los ápsides superior e inferior un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grados, o sea, de 103.º, 55′, 23″ en el centro; cada vez que pasa del ápside superior al inferior completa dicho ángulo, y al volver desde aquí hasta el ápside superior de nuevo completa el mismo ángulo; y así siempre hasta el infinito.

EJEMPLO II. Supongamos que la fuerza centrípeta fuese como una potencia cualquiera de la altura A tal como A^{n-3}, o $\frac{A^n}{A^3}$, donde *n*-3 y *n* significan exponentes enteros o fraccionarios cualesquiera, racionales o irracionales, positivos o negativos. Dicho numerador A^{n-3} o $(T - X)^n$ convertido en serie indeterminada por nuestro método de series convergentes devendrá en $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn - n}{2} XXT^n$, etc. Y comparados sus términos con los del otro numerador RGG - RFF + TFF - FFX resulta que RGG - RFF + TFF es a T^n como -FF a $-nT^{n-1} + \frac{nn - n}{2} XT^{n-2}$, etc. Y tomando las razones últimas en el momento en que las órbitas se aproximan a la forma de círculos RGG será a T^n como -FF a $-nT^{n-1}$ o también GG a T^{n-1} como FF a nT^{n-1} y alternativamente, GG a FF como T^{n-1} a nT^{n-1}, esto es, como 1 a n; y por tanto G es a F, esto es, el ángulo VCp es al ángulo VCP, como 1 a $\sqrt{n}$. Por lo cual, al ser de 180 grados el ángulo descrito por el cuerpo en su descenso desde el ápside superior al inferior de una elipse, el ángulo VCp, descrito en el descenso del cuerpo desde el ápside superior al inferior de una órbita cuasicircular la cual es descrita por el cuerpo que gire con una fuerza centrípeta proporcional a la potencia A^{n-3}, será igual a un ángulo de $\frac{180}{\sqrt{n}}$ grados, y al repetirse este ángulo el cuerpo regresará al ápside superior y así hasta el infinito. De modo que si la fuerza centrípeta fuese como la distancia del cuerpo al centro, esto es, como A o como $\frac{A^4}{A^3}$ entonces n será igual a 4, y $\sqrt{n}$ igual a 2; y por lo tanto, el ángulo entre ápsides superior e inferior igual a $\frac{180}{2}$ grados, o sea, de 90 grados. Por consiguiente, al completar la cuarta parte de una revolución el cuerpo llegará al ápside inferior, y al completar otra cuarta parte llegará al ápside superior, y así cada vez hasta el infinito. Lo cual es también evidente por la Proposición x. Pues un cuerpo bajo la acción de dicha fuerza centrípeta gira en una elipse inmóvil cuyo centro está en el centro de fuerzas. Pero si la fuerza centrípeta es inversamente como la distancia, esto es, como $\frac{1}{A}$ o como $\frac{A^2}{A^3}$, n será igual a 2, y por tanto el ángulo entre ápsides superior e inferior sera de $\frac{180}{\sqrt{2}}$ o sea de 127.º, 16′, 45″ y por lo mismo, el cuerpo que gire con semejante fuerza se moverá desde el ápside superior al inferior y de éste al superior repitiendo siempre este ángulo. Pero si la fuerza fuese como el inverso de la raíz cuarta de la onceava potencia de la altura, esto es, inversamente como $A^{11/4}$, y por tanto, directamente como $\frac{1}{A^{11/4}}$, o como $\frac{A^{1/4}}{A^3}$, entonces n sera igual a ¼ y $\frac{180}{\sqrt{n}}$ grados sera igual a 360 grados y por tanto el cuerpo que descienda desde el ápside superior en su descenso continuo desde él alcanzará el ápside inferior cuando complete una revolución completa, y después, al cumplir desde allí en su ascenso continuo otra revolución completa, regresará al ápside superior; y así sucesivamente para siempre.

EJEMPLO III. Si se toman m y n por cualesquiera índices de potencias de la altura y b, c, por números dados cualesquiera, supongamos que la fuerza centrípeta fuese como $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, esto es, como

$$\frac{b(T - X)^m + c(T - X)^n}{A^3}$$

o (por nuestro método de series convergentes) como

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + {}^{mm-m}\!/_2\, bXXT^{m-2} + {}^{nn-n}\!/_2\, cXXT^{n-2} \ldots}{A^3},$$

y al comparar los términos de los numeradores ocurrirá que RGG-RFF + TFF será a $bT^m + cT^n$ como -FF a $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{mm - m}{2}\, bXT^{m-2} + \frac{nn - n}{2}\, cXT^{n-2}$, etc. Y tomando las razones últimas resultantes cuando las órbitas se aproximan a la forma circular resultará que GG es a $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ como FF a $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$ y, viceversa, GG a FF como $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ a $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Expresando la altura máxima CY o T aritméticamente por la unidad, esta proporción se transforma en GG a FF como $b + c$ a $mb + nc$ y, por tanto, como 1 a $\frac{mb + nc}{b + c}$. De donde G es a F, esto es, el ángulo VCp al ángulo CVP, como 1 a $\sqrt{\frac{mb + nc}{b + c}}$. Y por tanto, al ser de 180 grados el ángulo VCP entre los ápsides superior e inferior en la elipse fija, el ángulo VCp entre los mismos ábsides en la órbita descrita por un cuerpo con fuerza centrípeta proporcional a $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, será igual a un ángulo de 180.º $\sqrt{\frac{b + c}{mb + nc}}$. Y por el mismo argumento si la fuerza centrípeta fuese como $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, el ángulo entre ábsides resultará de 180.º $\sqrt{\frac{b - c}{mb - nc}}$. Y el problema se resuelve de igual modo en casos más difíciles. La cantidad, a la cual es proporcional la fuerza centrípeta, debe descomponerse siempre en series convergentes cuyo denominador sea A^3. Después hay que suponer en la misma razón la parte dada del numerador proveniente de dicha operación respecto a la parte no dada del mismo, la parte dada de este numerador RGG - RFF + TFF - FFX a su otra parte no dada: eliminando las cantidades superfluas y tomando como unidad a T, se obtiene la proporción G a F.

COROLARIO 1. De aquí que, si la fuerza centrípeta fuese como cualquier potencia de la altura, podría hallarse dicha potencia a partir del movimiento de los ápsides y viceversa. Efectivamente, si la totalidad del movimiento angular con el cual el cuerpo retorna al mismo ápside es al movimiento angular de una sola revolución o a 360 grados como un número *m* a otro número *n* y se denomina A a la altura: entonces la fuerza será como aquella potencia de la altura $A^{nn/mm-3}$ cuyo índice es $\frac{nn}{mm}$ - 3. Lo cual está claro por el segundo ejemplo. De donde es evidente que dicha fuerza al alejarse del centro no puede decrecer en razón mayor que el cubo de la altura: un cuerpo girando con tal fuerza y partiendo del ápside si empieza a descender, nunca llegará al apside inferior o altura mínima, sino que caerá hasta el centro, describiendo aquella línea curva que hemos visto en el Corolario 3 de la Proposición XLI. Pero si al partir del ápside, éste fuese el inferior y comenzase a ascender mínimamente, ascenderá hasta el infinito y jamás llegará al ápside superior. Pues describirá aquella curva de que se trató en el mismo Corolario y en el Corolario 6 de la Proposición XLIV. Así cuando la fuerza, al alejarse del centro, decrece en razón mayor que el cubo de la altura, el cuerpo que parte de un ápside, en cuanto comience a descender o a ascender, o bien desciende hasta el centro o bien asciende hasta el infinito. Pero si la fuerza, al alejarse del centro, o decrece en razón menor que el cubo de la altura, o crece en una razón cualquiera de la altura, el cuerpo nunca descenderá hasta el centro, sino que en algún momento alcanzará el ápside inferior; y por el contrario, si un cuerpo asciende y desciende alternativamente desde un ápside a otro y jamás alcanza el centro, la fuerza o bien crece con la lejanía al centro, o bien decrece en razón menor que el cubo de la altura; y cuanto más rápidamente retorne un cuerpo de un ápside a otro, más se aleja la razón de las fuerzas de la razón cúbica. Si el cuerpo hubiese de retornar desde y hasta el ápside superior mediante ascensos y descensos alternos en 8 revoluciones, o en 4, o en 2, o en $1\frac{1}{2}$, esto es, si *m* fuese a *n* como 8 ó 4 ó 2 ó $1\frac{1}{2}$ son a 1, y $\frac{nn}{mm}$ - 3 valiese entonces $\frac{1}{64}$ - 3, o $\frac{1}{16}$ - 3, o $\frac{1}{4}$ - 3, o $\frac{4}{9}$ - 3, la fuerza será como $A^{1/64-3}$, o $A^{1/16-3}$, o $A^{1/4-3}$, o $A^{4/9-3}$, esto es, inversamente como $A^{3-1/64}$, o $A^{3-1/16}$, o $A^{3-1/4}$, o $A^{3-4/9}$. Si después de cada revolución el cuerpo regresa al mismo ápside y éste permanece inmóvil, entonces *m* será a *n* como 1 a 1 y por ello

$A^{nn/mm - 3}$ será igual a A^{-2}, o también $\frac{1}{AA}$; de donde el decremento de las fuerzas estará en razón cuadrada de la altura, como antes se ha demostrado. Si el cuerpo alcanzase el mismo ápside en tres cuartos, o en dos tercios, o en un tercio, o en un cuarto de revolución completa, entonces *m* sera a *n* como $\frac{3}{4}$, o $\frac{2}{3}$, o $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$, a 1 respectivamente, y por lo tanto $A^{nn/mm - 3}$ será igual a $A^{16/9 - 3}$, o $A^{9/4 - 3}$, o A^{9-3}, o A^{16-3}, de tal modo que la fuerza o bien es inversamente como $A^{11/9}$, o $A^{3/4}$, o directamente como A^6 o A^{13}. Por fin, si el cuerpo en su recorrido desde el ápside superior hasta alcanzar de nuevo el mismo ápside hiciese una revolución completa y tres grados más y, por tanto, en cada revolución del cuerpo dicho ápside avanza tres grados, entonces *m* será a 363 grados a 360 grados, o como 121 a 120, y por tanto $A^{nn/mm - 3}$ será igual a $A^{-29523/14641}$; y en consecuencia la fuerza centrípeta será inversamente como $A^{29523/14641}$ o inversamente como $A^{2\frac{4}{243}}$ aproximadamente. La fuerza centrípeta decrece, por tanto, en razón algo mayor que la del cuadrado, pero esta razón es 59¾ veces más próxima a la razón cuadrada que a la razón cúbica.

COROLARIO 2. De aquí también que, si un cuerpo bajo la acción de una fuerza centrípeta que sea como el inverso del cuadrado de la altura girase en una elipse cuyo foco se hallase en el centro de fuerzas, y a dicha fuerza centrípeta se añadiese o se quitase otra fuerza externa cualquiera, podría conocerse (por el ejemplo tercero) el movimiento de los ápsides originado por dicha tuerza externa: y viceversa. Pues si la fuerza con la cual gira el cuerpo en la elipse fuese como $\frac{1}{AA}$, y la fuerza externa aplicada fuese como cA, y por tanto la fuerza restante fuese como $\frac{A - cA^4}{A^3}$; (en el ejemplo tercero) *b* será igual a 1, *m* igual a 1 y *n* igual a 4, y por lo tanto el ángulo de revolución entre ápsides será igual a un angulo de $180\sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$ grados. Supongamos que la fuerza externa fuese 357,45 veces menor que la otra fuerza con que el cuerpo se mueve en la elipse, esto es, $\frac{100}{35745}$, siendo A o T igual a 1, y $180\sqrt{\frac{1 - c}{1 - 4c}}$ resultará valer $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ o sea 180, 7623, esto es, 180.º, 45′, 44″. Por lo tanto, el cuerpo que parte del ápside superior con un movimiento angular de 180.º, 45′, 44″, llegará al ápside inferior, y repitiendo este movimiento regresará al superior: y en consecuencia el ápside superior vendrá a progresar en cada revolución 1.º, 31′, 28″.

Aproximadamente dos veces más veloz es el ápside de la Luna.

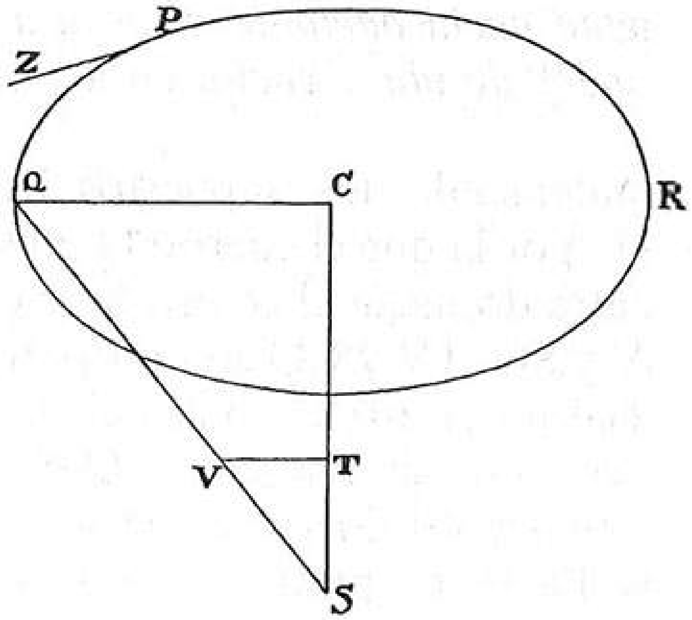
Hasta aquí sobre el movimiento de cuerpos en órbitas cuyos planos pasan por el centro de fuerzas. Falta determinar también los movimientos en planos excéntricos. Pues los autores que tratan el movimiento de los graves suelen considerar los ascensos y descensos de los pesos tanto perpendicular como oblicuamente en cualesquiera planos dados: y con igual razón se ha de considerar aquí el movimiento de cuerpos tendentes a un centro bajo cualesquiera fuerzas y moviéndose en planos excéntricos. Suponemos que dichos planos son perfectamente lisos y lubricados de modo que no retarden a los cuerpos. Además, en estas demostraciones, en lugar de planos sobre los que se deslizan los cuerpos y a los que tocan al deslizarse, utilizaremos planos paralelos a ellos, en los cuales se mueven los centros de los cuerpos y describen órbitas al moverse. Y por la misma ley determinamos después los movimientos de los cuerpos realizados en superficies curvas.

Sección x
DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS EN SUPERFICIES DADAS, Y DEL MOVIMIENTO DE VAIVÉN DE LOS PÉNDULOS

Proposición xlvi. Problema xxxii

Supuesta una fuerza centrípeta de cualquier tipo, y dado tanto el centro de fuerzas como un plano cualquiera en el que gira el cuerpo, y concedidas las cuadraturas de las figuras curvas: hállese el movimiento de un cuerpo que parte de un lugar dado, con velocidad dada y según una recta dada en dicho plano.

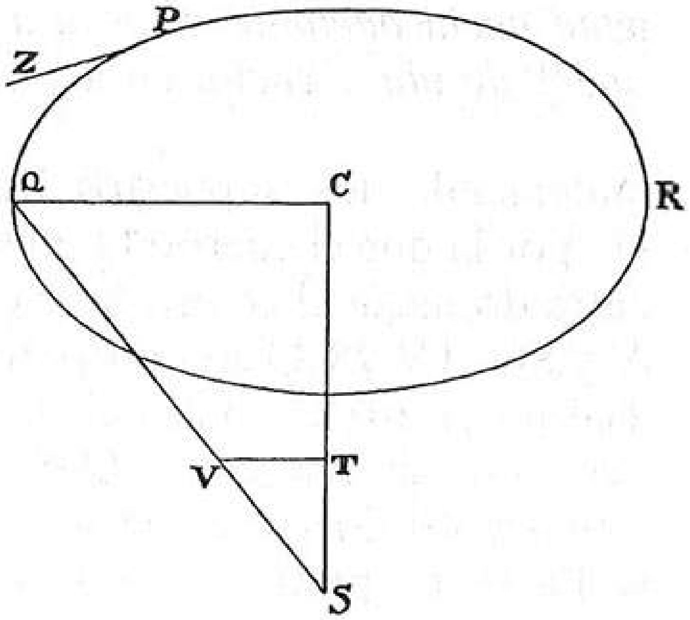
Sea S el centro de fuerzas, SC la distancia mínima desde ese centro al plano dado, P un cuerpo que parte del punto P según la recta PZ, Q el mismo cuerpo girando en su trayectoria, y PQR dicha trayectoria descrita en dicho plano y que ha de hallarse. Únanse CQ, QS, y si sobre QS se toma SV proporcional a la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo es atraído hacia el centro S, y se traza VT paralela a CQ cortando a SC en T: la fuerza SV (por el Corolario ii de las Leyes) se descompone en las fuerzas ST, TV, de las cuales ST atrayendo al cuerpo según la línea perpendicular al plano en nada cambia su movimiento en este plano. Pero la otra fuerza TV, actuando según la posición del plano, atrae al cuerpo directamente hacia el punto C dado en el plano y, por tanto, hace que por ello dicho cuerpo se mueva en ese plano como si la fuerza ST desapareciese y el cuerpo girase únicamente con la fuerza TV en torno al centro C en un espacio libre. Mas, estando dada la fuerza centrípeta TV con la que el cuerpo Q gira en un espacio libre en torno al centro dado C, está dada (por la Proposición xlii) también la trayectoria PQR, descrita por el cuerpo, así como el punto Q donde se hallará el cuerpo en un tiempo cualquiera dado y, finalmente, la velocidad del cuerpo en dicho punto Q. Y viceversa. Q. E. I.



PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XV

Supuesto que la fuerza centrípeta sea proporcional a la distancia desde el cuerpo al centro, todos los cuerpos que giren en planos cualesquiera describirán elipses y completarán sus revoluciones en tiempos iguales; mientras que aquellos que se muevan según líneas rectas, alternativamente hacia adelante y hacia atrás, completarán sus diferentes períodos de ida y vuelta en los mismos tiempos.

Puesto que, manteniendo los supuestos de la Proposición anterior, la fuerza SV, por la que el cuerpo Q que gira en un plano cualquiera PQR es atraído hacia el centro S, es como la distancia SQ; y puesto que SV y SQ, TV y CQ son proporcionales, la fuerza TV, con la cual el cuerpo es atraído hacia el punto dado C en el plano de la órbita, es como la distancia CQ. Consecuentemente, las fuerzas, por las cuales los cuerpos que se hallan en el plano PQR son atraídos hacia el punto C, son proporcionales, a distancias iguales, a las fuerzas por las que los mismos cuerpos son atraídos en dondequiera hacia el centro S; y por tanto, los cuerpos se moverán en iguales tiempos y con iguales figuras, en cualquier plano PQR que rodee al punto C, tal y como lo harían en espacios libres en torno al centro S; y en consecuencia (por el Corolario 2 de la Proposición X y el Corolario 2 de la Proposición XXXVIII) siempre en tiempos iguales, o bien describirán elipses en dicho plano en torno al centro C, o bien completarán períodos moviéndose adelante y atrás según líneas rectas trazadas en dicho plano por el centro C. Q. E. D.



Escolio

Afines a éstos son los ascensos y descensos de los cuerpos en superficies curvas. Imagínense líneas curvas descritas en un plano que giran luego en torno a ciertos ejes dados que pasan por el centro de fuerzas y, mediante esa revolución, describen superficies curvas; y también que los cuerpos se mueven de tal forma que sus centros se encuentren siempre en dichas superficies. Si tales cuerpos ascendiendo y descendiendo oblicuamente marchan hacia adelante y hacia atrás, realizarán sus movimientos en planos que pasan por el eje y, por tanto, en líneas curvas por cuya revolución se generaron aquellas superficies. En estos casos, por consiguiente, será suficiente considerar el movimiento en dichas líneas curvas.

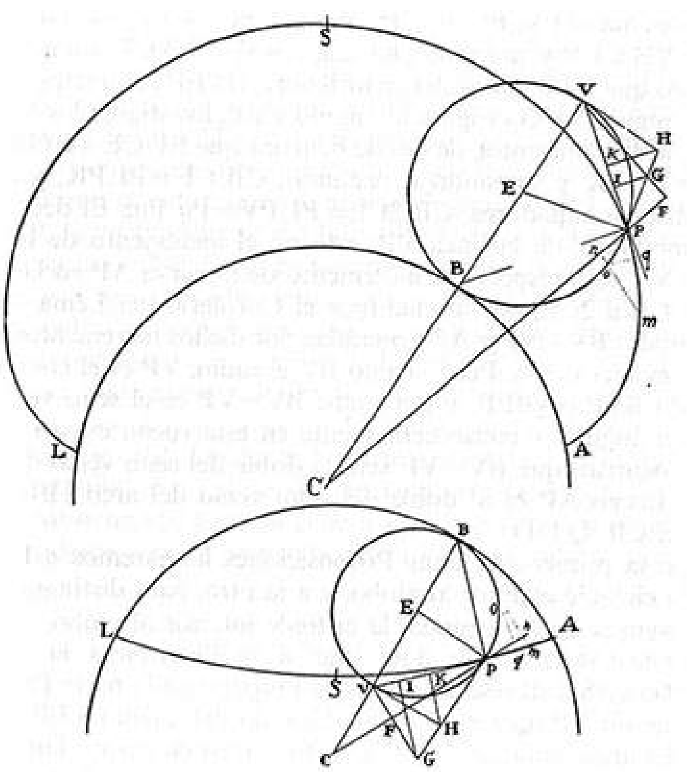
Proposición xlviii. Teorema xvi

Si una rueda se apoya en el exterior de un globo formando ángulo recto y, girando como una rueda, describiese un círculo máximo, la longitud del camino curvilíneo descrito por un punto cualquiera dado en el perímetro de la rueda desde que toca al globo (que se puede llamar cicloide o epicicloide) será al doble del seno verso de la mitad del arco que ha tocado al globo al ir recorriéndolo desde aquel momento, como la suma de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.

Proposición xlix. Teorema xvii

Si una rueda se apoya en el interior de un globo cóncavo formando ángulo recto y *avanza rodando por un círculo máximo, la longitud del camino curvilíneo descrito por un punto cualquiera dado en el perímetro de la rueda desde que toca al globo será al doble del seno verso de la mitad del arco que ha tocado al globo al ir recorriéndolo durante todo ese tiempo, como la diferencia de los diámetros del globo y la rueda al semidiámetro del globo.*

Sea ABL el globo, C su centro, BPV la rueda que se apoya en él, E el centro de la rueda, B el punto de contacto y P el punto dado en el perímetro de la rueda. Imaginemos a esta rueda moviéndose sobre el círculo máximo ABL desde A por B hacia L, y girando de tal modo al desplazarse que los arcos AB, PB sean siempre iguales entre sí y mientras tanto el punto P dado en el perímetro de la rueda va describiendo el camino curvilíneo AP. Sea AP el total del camino curvilíneo descrito desde que la rueda tocó al globo en A, y la longitud AP de este camino será al doble del seno verso del arco ½PB como 2CE a CB. Pues toque la recta CE (prolongada si es preciso) a la rueda en V, y únanse CP, BP, EP, VP y descienda VF normal sobre la prolongación de CP. Sean PH, VH tangentes al círculo en P y V y concurrentes en H, y corte PH a VF en G, y sobre VP caigan las perpendiculares GI, HK. De nuevo con centro en C e intervalo cualquiera descríbase el círculo *nom* que corte a la recta CP en *n*, al perímetro BP de la rueda en *o*, y al camino curvilíneo AP en m; y con centro en V e intervalo V*o* descríbase el círculo que corta en *q* a VP prolongada.



Puesto que la rueda al moverse gira siempre en torno al punto de contacto B, es evidente que la recta BP es perpendicular a aquella línea curva AP descrita por el punto P de la rueda y, por lanío, que la recta VP es tangente a dicha curva en el punto P. El radio del círculo *nom* aumentado o disminuido gradualmente iguale siempre a la distancia CP; y por la semejanza de la figura evanescente P*nomq* y de la figura PFGVI, la razón última de los segmentos evanescentes P*m*, P*n*, P*o*, P*q*, esto es, la razón de las variaciones instantáneas de la curva AP, de la recta CP, del arco circular BP, y de la recta VP será respectivamente la misma que la de las líneas PY, PF, PG, PI. Pero como VF es perpendicular a CF y VH a CV y, por tanto, los ángulos HYG, VCF son iguales; y (puesto que los ángulos del cuadrilátero HVEP son rectos en Y y P) el ángulo VHG es igual al ángulo CEP, los triángulos VHG y CEP serán semejantes; de donde ocurrirá que EP: CE = HG: HV, o HP = KI: PK y sumando o restando, CB: CE = PI: PK, y duplicando denominadores, CB: 2CE = PI: PV = P*q*: Pm. El decremento, por tanto, de la línea VP, esto es, el incremento de la línea BV - VP, está respecto al incremento de la curva AP en la razón dada CB a 2CE, por lo cual (por el Corolario del Lema IV) las longitudes BV - VP y AP generadas por dichos incrementos están en la misma razón. Pero, siendo BV el radio, VP es el coseno del ángulo BVP o ½BEP, y por tanto BV - VP es el seno verso del mismo ángulo; y consecuentemente en esta rueda cuyo radio es ½BV, ocurrirá que BV - VP será el doble del seno verso del arco ½BP. Luego AP es al doble del seno verso del arco ½BP como 2CE a CB. Q. E. D.

En la primera de estas Proposiciones llamaremos a la línea AP la cicloide exterior al globo, y a la otra, para distinguirlas, la llamaremos, en la segunda, la cicloide interior al globo.

COROLARIO 1. De aquí que si se describiera la cicloide completa ASL, al bisecarla en S, la longitud de la parte PS será a la longitud VP (que es el doble del seno del ángulo VBP, siendo EB el radio) como 2CE a CB, y por tanto en razón dada.

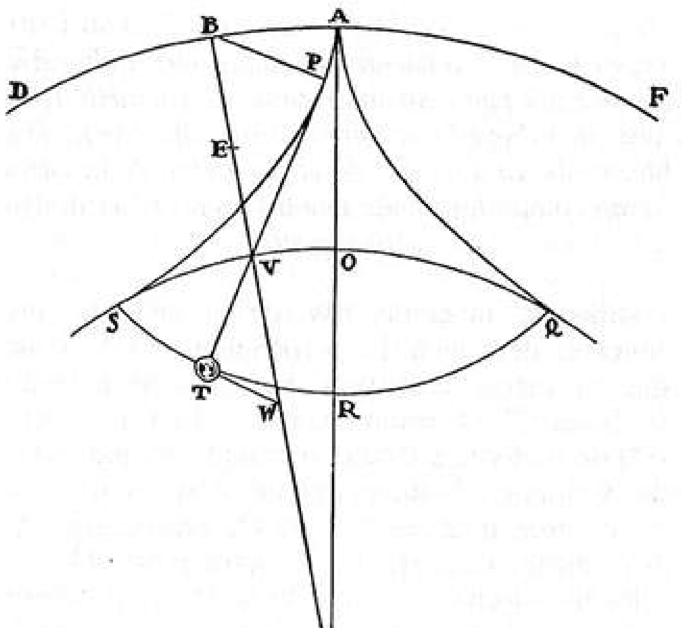
COROLARIO 2. Y la longitud del semiperímetro de la cicloide AS será igual a la recta que sea al diámetro BV de la rueda como 2CE a CB.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XXXIII

Hacer oscilar a un cuerpo pendular en una cicloide dada.

Dentro del globo QVS, descrito con centro en C, sea dada la cicloide QRS bisecada en R y que toca a ambos lados con sus puntos extremos Q y S a la superficie del globo. Trácese CR bisecante del arco QS en O y prolónguese hasta A, de modo que CA sea a CO como CO a CR. Y con centro en C e intervalo CA descríbase el globo exterior DAF, y dentro de este globo descríbanse por medio de una rueda cuyo diámetro sea AO las tíos semicicloides AQ y AS tangentes al globo interior en Q y S y que toquen al globo exterior en A. Desde dicho punto A, mediante un hilo APT igual en longitud a AR, suspéndase el cuerpo T y hágasele oscilar entre las semicicloides AQ, AS de modo tal que, cuantas veces se aparta el péndulo de la perpendicular AR, la parte superior del hilo AP se aplica a la semicicloide APS hacia la cual se dirige el movimiento, plegándose en torno a ella como si fuera un obstáculo, y la parte restante PT a la cual no obstaculiza la cicloide permanezca extendida en línea recta; y el peso T oscilará en la cicloide dada QRS. Q. E. F.

Hágase, pues, que el hilo PT se encuentre con la cicloide QRS en T, y con el círculo QOS en V, y trácese CV; y elévense las perpendiculares BP, TW hasta la parte recta del hilo PT desde los puntos extremos P y T, tales que encuentren a la recta CV en B y W. Por construcción y por la génesis de las figuras semejantes AS, SR, es evidente que las perpendiculares PB, TW cortan sobre CV las longitudes VB, VW iguales a los diámetros OA, OR de las ruedas. Por lo tanto TP es a VP (doble del seno del ángulo VBP, siendo V el radio) como BW a BV, o AO 4 + OR a AO, esto es (siendo proporcionales CA a CO, CO a CR y por división AO a OR) como CA + CO a CA, o, bisecando a BY en E, como 2CE a CB. Por consiguiente (por el Corolario 1 de la Proposición XLIX) la longitud de la parte recta del hilo PT es siempre igual al arco PS de la cicloide, y el hilo completo APT es siempre igual a la mitad del arco cicloide APS, esto es (por el Corolario 2 de la Proposición XLIX) a la longitud AR. Y por lo mismo a la inversa, si el hilo permanece siempre igual a la longitud AR el punto T se moverá en la cicloide dada QRS. Q. E. D.

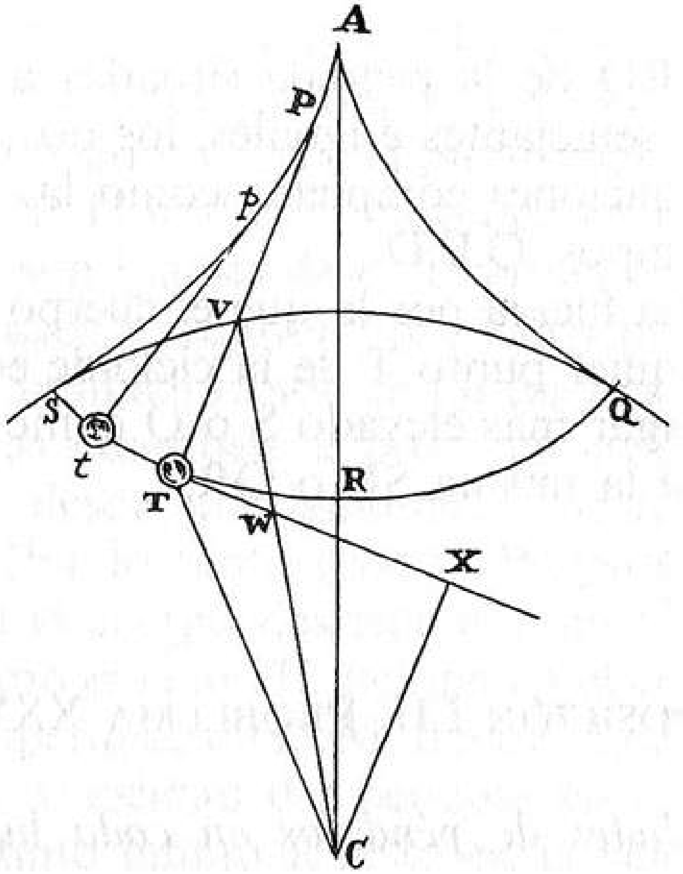


Corolario. El hilo AR es igual a la semicicloide AS y, por lo tanto, está en la misma razón respecto al semidiámetro AC del globo exterior, que la semicicloide SR semejante a aquélla tiene con respecto al semidiámetro CO del globo interior.

Proposición LI. Teorema XVIII

Si una fuerza centrípeta tendente por todas partes al centro C de un globo fuese en *cada punto singular como la distancia de cada lugar desde el centro, y bajo la acción de esta sola fuerza el cuerpo T oscilase (del modo ya descrito) en el perímetro de la cicloide QRS: digo que serán iguales los tiempos de las oscilaciones desiguales bajo otro aspecto.*

Pues, sobre la tangente TW de la cicloide, prolongada indefinidamente, descienda la perpendicular CX y únase CT. Puesto que la fuerza centrípeta por la que el cuerpo T es impulsado hacia C es como la distancia CT y ésta (por el Corolario II de las Leyes) se descompone en las partes CX, TX, de las cuales CX empujando directamente al cuerpo desde P estira al hilo PT y se agota íntegramente en esa resistencia sin producir ningún otro efecto; mientras que la otra parte TX, al empujar transversalmente al cuerpo, o sea, hacia X, acelera directamente su movimiento en la cicloide; es evidente que la aceleración del cuerpo, proporcional a esta fuerza aceleratriz, es en cada momento como la longitud TX, esto es, por estar dadas CV, WV y las proporcionales a ellas TX, TW, como la longitud TW, esto es (por el Corolario 1 de la Proposición XLIX) como la longitud del arco cicloide TR. Por tanto, si se desvían desigualmente de la perpendicular AR dos péndulos APT, A*pt* y se dejan caer a la vez, sus aceleraciones serán siempre como los arcos a describir TR, *t*R. Pero las partes descritas en el inicio son como las aceleraciones, esto es, como el total a describir desde el principio y, por lo tanto, las partes que restan por describir y las aceleraciones subsiguientes, proporcionales a estas partes, son también como el total; y así sucesivamente. Por tanto las aceleraciones, así como las velocidades generadas y las partes descritas con estas velocidades y las partes a describir son siempre como el total; y en consecuencia, las partes a describir, al conservar entre sí una razón dada, evanescen a la vez, esto es, los dos cuerpos oscilantes llegarán a la vez a la perpendicular AR. Y puesto que el respectivo ascenso de los péndulos desde el punto inferior R, realizado a través de los mismos arcos cicloides con movimiento retrógrado, es retardado en cada lugar por las mismas fuerzas por las que eran acelerados los descensos, es evidente que las velocidades de los ascensos y descensos realizados por los mismos arcos son iguales y que, por tanto, se cumplen en tiempos iguales; y por lo mismo, como las dos partes RS y RQ de la cicloide situadas a cada lado de la perpendicular son semejantes e iguales, los dos péndulos realizarán, tanto las oscilaciones completas como las mitades, siempre en los mismos tiempos. Q. E. D.

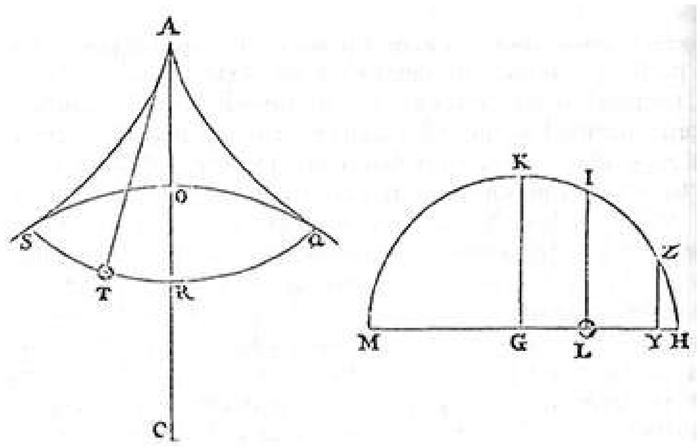


Corolario. La fuerza por la que el cuerpo T es acelerado o retardado en cualquier punto T de la cicloide es al peso total de ese cuerpo en el lugar más elevado S o Q como el arco TR de la cicloide al arco de la misma SR o QR.

Proposición lii. Problema xxxiv

Definir las velocidades de péndulos en cada lugar así como los tiempos en que se completan tanto las oscilaciones como cada parte de ellas.

Con centro cualquiera G, con radio GH igual al arco de la cicloide RS, trácese el semicírculo HLM bisecado por el semidiámetro GK. Y si una fuerza centrípeta proporcional a las distancias de los lugares al centro tendiera hacia el centro G y fuera en el perímetro HIK igual a la fuerza centrípeta tendente Inicia el mismo centro en el perímetro del globo QOS, y a la vez que se deja caer el péndulo desde el punto más alto S se deja caer otro cuerpo L desde H hasta G, dado que las fuerzas que actúan sobre los cuerpos son iguales desde el principio y proporcionales siempre a los espacios a recorrer TR y LG y por lo mismo, si TR y LG son iguales, también lo son en los lugares T y L, es evidente que dichos cuerpos describen al principio espacios iguales ST y HL y continúan desde allí igualmente urgidos y recorriendo espacios iguales. Por lo tanto (por la Proposición xxxviii) el tiempo en el cual el cuerpo describe el arco ST es al tiempo de una oscilación como el arco HI, tiempo en el cual el cuerpo H va hasta L, es al semiperímetro HKM, tiempo en el cual el cuerpo H va hasta M. Y la velocidad del péndulo en el punto T es a su velocidad en el punto ínfimo R (esto es, la velocidad del cuerpo H en el punto L a su velocidad en el punto G, o también el incremento momentáneo de la línea HL al incremento momentáneo de la línea HG, siendo constante la velocidad de crecimiento de los arcos HI y HK) como la ordenada LI al radio GK, o también como $\sqrt{(SR^2 - TR^2)}$ a SR. De donde, como para oscilaciones desiguales los arcos descritos en tiempos iguales son proporcionales a los arcos enteros de las oscilaciones, si se tienen dados los tiempos se tendrán tanto las velocidades como los arcos descritos en cualquiera oscilación. Que era lo primero que había que hallar[34].



Oscilen ahora los cuerpos pendulares en cicloides distintas descritas en el interior de globos diferentes cuyas fuerzas absolutas son también distintas; y, si se denomina V a la fuerza absoluta de un globo cualquiera QOS, la fuerza aceleratriz que actúa sobre el péndulo en la circunferencia de dicho globo cuando empieza a moverse directamente hacia su centro será como la distancia del cuerpo pendular a dicho centro conjuntamente con la fuerza absoluta del globo, esto es, como CO x V. Y, por tanto, el segmento HY, que es como la fuerza aceleratriz CO x V, será descrito en un tiempo dado: y si se eleva la perpendicular YZ que toque a la circunferencia en Z, el arco naciente HZ denotará dicho tiempo dado. Pero este arco naciente HZ es como la raíz cuadrada del rectángulo GHY y, por tanto, como $\sqrt{GH \times CO \times V}$. De aquí que el tiempo de una oscilación completa en la cicloide QRS (siendo directamente como el semiperímetro HKM, que denota esa oscilación completa; e inversamente como el arco HZ, que análogamente denota el tiempo dado) será directamente como GH e inversamente como $\sqrt{GH \times CO \times V}$, esto es, puesto que GH y SR son iguales, como $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$ o (por el Corolario de la Proposición L) como $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Por consiguiente, las oscilaciones en todos los globos y cicloides, efectuadas con cualesquiera fuerzas absolutas, están en razón compuesta directamente de la raíz cuadrada de la longitud de la cuerda e inversamente de la raíz cuadrada de la distancia entre el punto de suspensión y el centro del globo y también inversamente de la raíz cuadrada de la fuerza absoluta del globo. Q. E. I.

COROLARIO 1. De aquí también que puedan compararse entre sí los tiempos de los cuerpos en oscilación, en caída o en giro. Pues si el diámetro de la rueda con la cual se describe la cicloide dentro del globo se supone igual al semidiámetro del globo, la cicloide resultará una línea recta que pasa por el centro del globo, y la oscilación será ahora un descenso y posterior ascenso en dicha recta. De donde están dados tanto el tiempo del descenso desde cualquier lugar hasta el centro como el tiempo igual a éste en el cual el cuerpo, girando uniformemente en torno al centro del globo y a cualquier distancia, describe el arco cuadrante. Pues dicho tiempo (por el Caso 2) es al tiempo de una semioscilación en toda cicloide QRS como 1 a $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

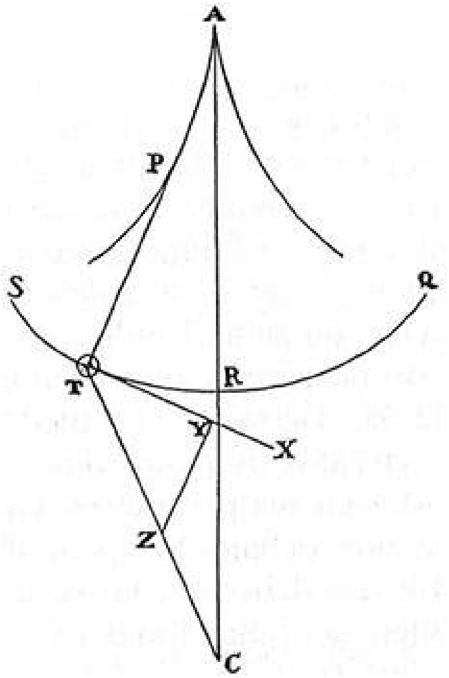
COROLARIO 2. De aquí se siguen también los descubrimientos de *Wren* y de *Huygens* sobre la cicloide común. Pues si se aumenta infinitamente el diámetro de un globo, la superficie esférica del mismo se convertirá en un plano y la fuerza centrípeta actuará uniformemente en la dirección de las líneas perpendiculares a dicho plano, con lo que nuestra cicloide viene a ser una cicloide común. En este caso la longitud del arco de la cicloide entre ese plano y el punto descriptor resultará ser cuatro veces el seno verso del semiarco de la rueda entre dicho plano y el punto descriptor, como lo mostró *Wren*: y el péndulo entre dos cicloides semejantes oscilará con tiempos iguales en una cicloide semejante e igual, como demostró *Huygens*. Y también el descenso de los graves en el tiempo de una oscilación será el indicado por *Huygens*.

Se adaptan las proposiciones que hemos demostrado a la constitución real de la Tierra en la medida en que ruedas circulantes sobre sus círculos máximos describirán, con el movimiento de clavos fijados en sus perímetros, cicloides exteriores al globo; mientras que por debajo los péndulos suspendidos en minas y cavernas terrestres deben oscilar en cicloides interiores al globo para que resulten isócronas todas las oscilaciones. Pues la gravedad (como se mostrará en el Libro tercero) decrece al alejarse de la superficie terrestre; hacia arriba como el cuadrado de la distancia al centro y hacia abajo en razón simple.

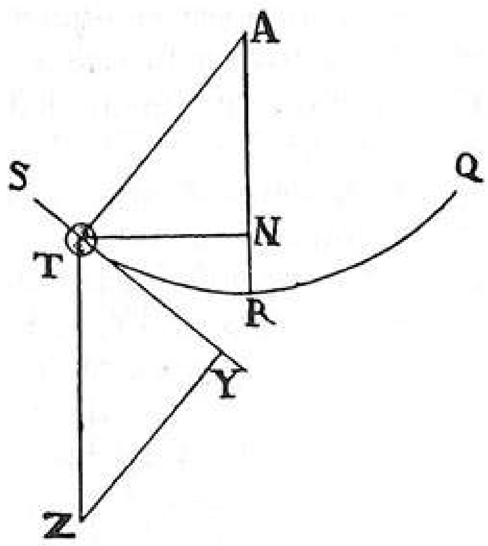
PROPOSICIÓN LIII. PROBLEMA XXXV

Concedidas las cuadraturas de figuras curvas, hallar las fuerzas con las cuales cuerpos que se muevan en curvas dadas realicen siempre sus oscilaciones en tiempos iguales.

Oscile el cuerpo T en una curva cualquiera STRQ, cuyo eje sea AR que pasa por el centro de fuerzas C. Trácese TX, que loque a dicha curva en un lugar cualquiera T del cuerpo, y en esa tangente TX tómese TY igual al arco TR. La longitud de dicho arco es conocida por los métodos usuales para la cuadratura de figuras. Trácese desde el punto Y la recta YZ perpendicular a la tangente. Trácese CT que corte a dicha perpendicular en Z y la Fuerza centrípeta será proporcional a TZ. Q. E. I.



Ya que si la fuerza con la cual es atraído el cuerpo desde T hacia C se expresa por la recta TZ tomada proporcionalmente a ella, dicha fuerza se descompondrá en las fuerzas TY e YZ, de las cuales YZ, atrayendo el cuerpo según la longitud del hilo PT, en nada cambia su movimiento, mientras la otra fuerza TY acelera o retarda directamente su movimiento en la curva STRQ. Por tanto, al ser ésta como el espacio a recorrer TR, las aceleraciones o retardos del cuerpo al recorrer partes (mayor y menor) proporcionales de dos oscilaciones, siempre serán como esas partes, y por ende harán que esas partes siempre sean descritas simultáneamente. Pero los cuerpos que siempre describen a la vez partes proporcionales al todo, describirán los todos a la vez. Q. E. D.



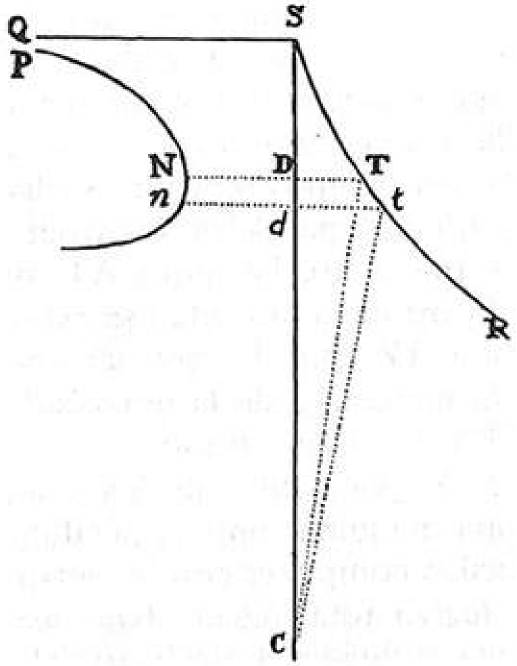
Corolario 1. De aquí que si el cuerpo T pende del hilo rectilíneo AT desde el centro A y describe el arco circular STRQ, y entre tanto es urgido hacia abajo según líneas paralelas por una fuerza que sea a la fuerza uniforme de la gravedad como el arco TR a su seno TN, los tiempos de cada oscilación serán iguales. Puesto que TZ y AR son paralelas, los triángulos ATN y ZTY serán semejantes y, por tanto, TZ será a AT como TY a TN; esto es, si la fuerza uniforme de la gravedad se expresa por la longitud dada AT, la fuerza TZ, por la que las oscilaciones resultan isócronas, será a la fuerza AT de la gravedad como el arco TR, igual a TY, es a TN, seno del mismo.

Corolario 2. Y por tanto en los relojes, si las fuerzas impresas por alguna máquina sobre el péndulo para conservar el movimiento se pueden componer con la fuerza de la gravedad de tal modo que la fuerza total hacia abajo sea siempre como la línea que se obtenga al dividir el producto del arco TR y el radio AR por el seno TN, todas las oscilaciones serán isócronas.

Proposición liv. Problema xxxvi

Concedidas las cuadraturas de figuras curvas, hallar los tiempos en que con cualquier fuerza centrípeta los cuerpos descenderán o ascenderán por cualesquiera líneas curvas descritas sobre un plano que atraviesa el centro de fuerza.

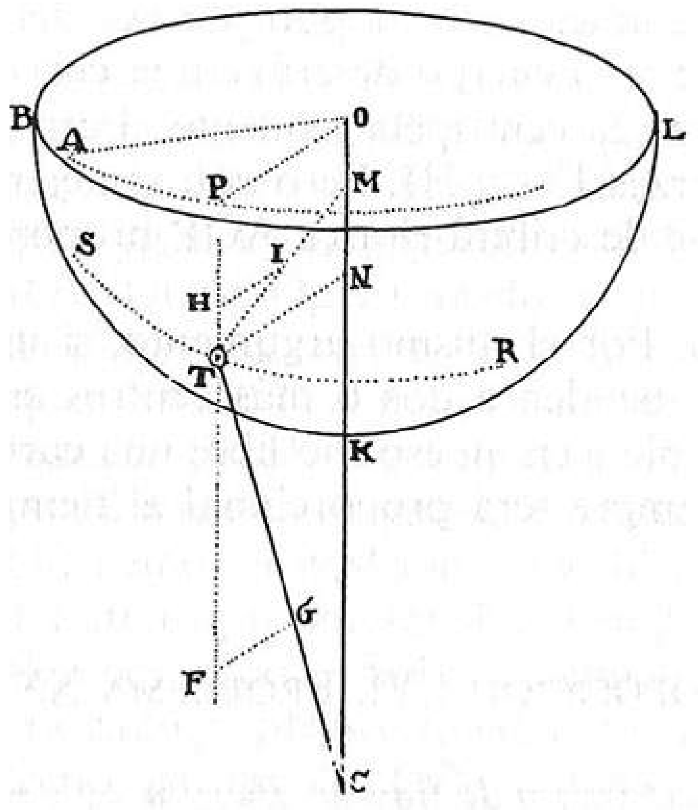
Descienda un cuerpo desde un lugar cualquiera S a través de una cierta línea curva ST*t*R dada en un plano que pasa por el centro de fuerzas C. Únase CS y divídase en innumerables partes iguales, y sea una de ellas D*d*. Con centro en C y distancias CD y C*d* trácense los círculos DT *dt* que encuentran a la curva ST*r*R en T y *t*. Y estando dadas tanto la ley de la fuerza centrípeta como la altura CS desde la que cayó el cuerpo, estará dada la velocidad del cuerpo en cualquiera otra altura CT (por la Proposición xxxix). Pero el tiempo en que el cuerpo describe el segmento T*t* es como la longitud de este segmento, esto es, directamente como la secante del ángulo *t*TC; e inversamente como la velocidad. Sea proporcional a este tiempo la ordenada DN perpendicular a CS en el punto D, y, por estar dada D*d*, el rectángulo D*d* x DN, esto es el área DN*nd*, será proporcional a dicho tiempo. Por lo tanto, si PN*n* fuese aquella línea curva a la que siempre es tangente el punto N y su asíntota fuese la recta SQ que cae perpendicularmente sobre la recta CS, el área SQPND será proporcional al tiempo en que el cuerpo al caer ha descrito la línea ST; por tanto, hallada esta área estará dado el tiempo. Q. E. I.



Proposición lv. Teorema xix

Si un cuerpo se mueve en cualquier superficie curva cuyo eje pasa por el centro de fuerzas y se traza una perpendicular desde el cuerpo al eje; y desde cualquier punto dado del eje se traza otra línea igual y paralela a la anterior, digo que dicha paralela describirá un área proporcional al tiempo.

Sea BKL la superficie curva, T el cuerpo que gira en ella, STR la trayectoria descrita en ella por el cuerpo, S el comienzo de la trayectoria, OMK el eje de la superficie curva, TN la perpendicular del cuerpo al eje, OP la paralela e igual a ésta trazada desde el punto dado O en el eje; sea AP la proyección de la trayectoria descrita por el punto P de la línea giratoria OP sobre el plano AOP; sea A el comienzo del trazo correspondiente al punto S, TC la recta trazada desde el cuerpo al centro, TG una parte de la misma proporcional a la fuerza centrípeta con que el cuerpo es ut raído hacia el centro C, TM una recta perpendicular a la superficie curva, TI una parte de la misma que es proporcional a la presión con la que el cuerpo actúa sobre la superficie y a la vez es repelido por ella hacia M; PTF una paralela al eje y que pasa (por el Corolario II de las Leyes) se descompone en las fuerzas TF, desde los puntos G e I sobre dicha paralela PHTF. Digo ahora que el área AOP, descrita por el radio OP desde el inicio del movimiento, es proporcional al tiempo. Puesto que la fuerza TG (por el Corolario 2 de las Leyes) se descompone en las fuerzas TF, FG; y la fuerza TI en las fuerzas TH, HI: ahora bien, las fuerzas TF, TH al actuar según la línea PF perpendicular al plano AOP sólo cambian el movimiento del cuerpo respecto a la perpendicular a dicho plano. Y por tanto su movimiento, en tanto que realizado según la posición del plano, esto es, el movimiento del punto P, con el que se describe el trazo de la trayectoria AP en dicho plano, es el mismo que si se suprimiesen las fuerzas TF, TH y el cuerpo fuese únicamente urgido por las fuerzas FG, HI; esto es, el mismo que si el cuerpo describiese la curva AP en el plano AOP con una fuerza centrípeta tendente al centro O e igual a la suma de las fuerzas FG y HI. Pero con semejante fuerza (por la Proposición I) se describirá el área AOP proporcional al tiempo. Q. E. D.

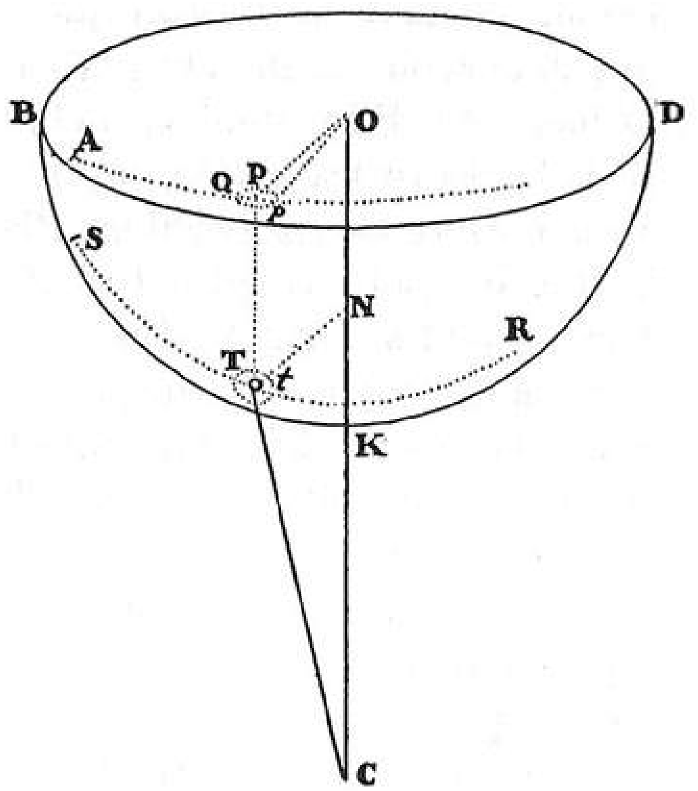


COROLARIO. Por el mismo argumento, si un cuerpo, urgido por fuerzas que tienden a dos o más centros en la misma recta dada CO, describiese en un espacio libre una curva cualquiera ST, el área AOP siempre será proporcional al tiempo.

PROPOSICIÓN LVI. PROBLEMA XXXVII

Concedida la cuadratura de figuras curvilíneas y supuesto que tanto la ley de la *fuerza centrípeta tendente a un centro dado como la superficie curva cuyo eje pasa por dicho centro están dadas, hallar la trayectoria que en esa superficie describirá un cuerpo que parte de un lugar dado, con una velocidad dada y hacia una dirección dada en esa superficie.*

Manteniendo la construcción de la Proposición anterior, salga el cuerpo T desde el lugar dado S según una recta de posición dada hacia la trayectoria a hallar STR, cuya proyección en el plano BDO sea AP. Y al estar dada la velocidad del cuerpo en la altura SC estará dada su velocidad en cualquier otra altura TC. Con dicha velocidad describa en un tiempo dado mínimo la parte 17 de su trayectoria, y sea P*p* la proyección de la misma descrita sobre el plano AOP. Únase O*p* y trazado un pequeño círculo en la superficie curva con centro en T e intervalo T*t* sea su proyección en el plano AOP la elipse *p*Q. Y puesto que está dado en magnitud el pequeño círculo T*t*, y está dada su distancia TN o PO del eje CO, estará dada en magnitud dicha elipse *p*Q tanto en especie y magnitud como en posición respecto a la recta PO. Y dudo que el área PO*p* es proporcional al tiempo y está dada al estar dado el tiempo, estará dado el ángulo PO*p*. Y, por consiguiente, estará dado *p*, intersección común de la elipse y de la recta O*p*, así como el ángulo OP*p*, ángulo con el que la proyección AP*p* de la trayectoria corta a la línea OP. Y de aquí (aplicando la Proposición XLI y su Corolario 2) se ve fácilmente el modo de determinar AP*p*. Entonces, a partir de cada punto P de la proyección, elevando sobre el plano AOP las perpendiculares PT que corten a la superficie curva en T, quedará dado cada punto T de la trayectoria. Q. E. I.



Sección XI
DEL MOVIMIENTO DE CUERPOS QUE TIENDEN UNOS A OTROS CON FUERZAS CENTRÍPETAS

He expuesto hasta aquí los movimientos de cuerpos atraídos hacia un centro inmóvil, aunque puede que tal cosa no exista en la naturaleza de las cosas. Pues las atracciones suelen darse hacia los cuerpos, y las acciones de los cuerpos atrayentes y atraídos son siempre mutuas e iguales, por la Ley Tercera: hasta el punto de que, si fuesen dos cuerpos, ni el atrayente ni el atraído podrían estar en reposo, sino que ambos (por el Corolario IV de las Leyes) girarán en torno a un centro común de gravedad, como con atracción mutua; y, si fuesen varios los cuerpos, bien sean atraídos por uno y éste por los otros, bien se atraigan todos mutuamente, habrán de moverse entre sí de tal modo que o bien esté en reposo el centro común de gravedad o bien se mueva uniformemente en línea recta. Por lo cual paso ahora a exponer el movimiento de cuerpos que se atraen mutuamente, considerando a las fuerzas centrípetas como atracciones, aunque quizá, si hablásemos en términos físicos, se denominarían más propiamente impulsos. Pero ahora nos movemos en matemáticas y, por tanto, dejando de lado disputas físicas, hacemos uso de un lenguaje común en el cual podemos ser comprendidos más fácilmente por lectores matemáticos[35].

PROPOSICIÓN LVII. TEOREMA XX

Dos cuerpos que se atraen mutuamente describen figuras semejantes tanto en torno a su centro común de gravedad como uno en torno al otro mutuamente.

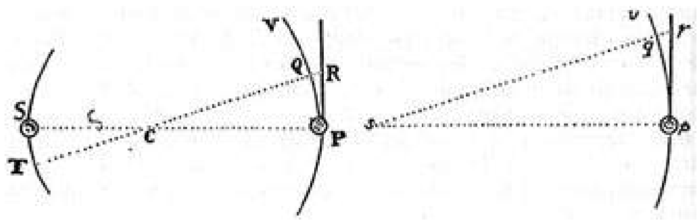
Pues las distancias de los cuerpos a su centro común de gravedad son inversamente proporcionales a los cuerpos, y se hallan, por tanto, en una razón dada entre sí, y componiendo razones, en una razón dada respecto a la distancia total entre cuerpos. Tales distancias se desplazan en torno a su extremo común con igual movimiento angular, puesto que al estar sobre una recta jamás cambian su inclinación mutua. Mas las líneas rectas que guardan entre sí una razón dada y giran en torno a sus extremos con igual movimiento angular en planos que, o bien reposan a la vez que dichos extremos, o bien se mueven con cualquier movimiento no angular, describen en torno a tales extremos figuras totalmente semejantes. Por consiguiente, las figuras descritas con los giros de estas distancias, son semejantes. Q. E. D.

Proposición lviii. Teorema xxi

Si dos cuerpos se atraen mutuamente con fuerzas cualesquiera, y giran también en torno al centro común de gravedad, digo que con las mismas fuerzas y en torno a uno cualquiera de los dos cuerpos en reposo se puede describir una figura semejante e igual a las figuras que describen los cuerpos uno en torno a otro con los movimientos mencionados.

Giren los cuerpos S, P en torno al centro común de gravedad C, progresando de S a T y de P a Q: desde el punto dado *s* trácense *sp*, *sq* siempre iguales y paralelas a SP, TQ; y la curva *pqv*, descrita por el punto *p* al girar en torno al punto inmóvil *s*, será semejante e igual a las curvas descritas por los cuerpos S, P al girar mutuamente uno en torno a otro: por tanto (por el Teorema xx) será semejante a las curvas ST y PQV descritas por los mismos cuerpos en torno al centro común de gravedad C: y esto porque las proporciones de las líneas SC, CP, y SP o sp entre sí están dadas.

Caso 1. Dicho centro común de gravedad C, por el Corolario iv de las Leyes, o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta. Primero supongamos que reposa y que en *s* y *p* se sitúan dos cuerpos, uno inmóvil en *s* y otro móvil en *p*, semejantes e iguales a los cuerpos S y P. Hágase después que las rectas PR y *pr* sean tangentes a las curvas PQ y *pq* en P y *p* y prolónguense CQ y *sq* hasta R y *r*. Y por la semejanza de las figuras CPRQ, RQ será a *rg* como CP a *sp* y, por tanto, en una razón dada. En consecuencia, si la fuerza con la cual es atraído el cuerpo P hacia el cuerpo S y, por tanto, hacia el centro intermedio C, se hallase respecto a la fuerza con la cual el cuerpo *p* es atraído hacia el centro *s* en esa misma razón dada, esas fuerzas en tiempos iguales atraerán siempre a los cuerpos desde las tangentes PR y *pr* hacia los arcos PQ y *pq* a través de los intervalos RQ y *rq* proporcionales a dichas fuerzas; por ello, la segunda fuerza hará que el cuerpo *p* gire en la curva *pqv*, semejante a la curva PQV en la cual la primera fuerza hará girar al cuerpo P; y completarán revoluciones en los mismos tiempos. Pero como dichas fuerzas no son entre sí como CP a *sp* sino que (por la semejanza e igualdad de los cuerpos S y *s*, P y *p*, y la igualdad de las distancias SP, *sp*) son iguales entre sí, los cuerpos en tiempos iguales son atraídos igualmente de las tangentes; y por tanto, para que el cuerpo segundo *p* sea atraído a través de un intervalo mayor *rq*, se requiere un tiempo mayor y esto como la raíz cuadrada de los intervalos, por cuanto que (por el Lema x) los espacios recorridos en el mismo comienzo del movimiento son como el cuadrado de los tiempos. Supóngase, pues, que la velocidad del cuerpo *p* es a la velocidad del cuerpo P como la raíz cuadrada de la distancia *sp* a la distancia CP, de tal modo que en tiempos que estén en esta misma razón se describan los arcos *pq*, PQ que están en razón simple: los cuerpos P, *p* atraídos siempre por fuerzas iguales describirán alrededor de los centros en reposo C y *s* las figuras semejantes PQV, *pqv*, de las cuales la segunda *pqv* es semejante e igual a la descrita por el cuerpo P al girar en tomo al cuerpo móvil S. Q. E. D.



CASO 2. Ahora supongamos que el centro común de gravedad junto con el espacio en el cual los cuerpos se mueven entre ellos, avanza uniformemente en línea recta; y (por el Corolario VI de las Leyes) todos los movimientos en tal espacio se producirán igual que antes y, por tanto, los cuerpos describirán entre sí las mismas figuras que antes, y consecuentemente iguales y semejantes a la figura *pqv*. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que dos cuerpos que se atraigan entre sí con fuerzas proporcionales a su distancia (por la Proposición X) describen alrededor de su centro común de gravedad y uno alrededor del otro elipses concéntricas; y viceversa, si las figuras descritas son tales, entonces las fuerzas son proporcionales a la distancia.

COROLARIO 2. Y dos cuerpos, con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia entre ellos, describirán (por las Proposiciones XI, XII, XIII) tanto alrededor de su centro común de gravedad como el uno en torno al otro secciones cónicas que tienen su foco en el centro en torno al cual se describen las figuras. Y viceversa, si las figuras descritas son tales, entonces las fuerzas centrípetas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia.

COROLARIO 3. Dos cuerpos cualesquiera girando en torno al centro común de gravedad describen áreas proporcionales a los tiempos con los radios trazados a dicho centro y a sí mismos.

PROPOSICIÓN LIX. TEOREMA XXII

El tiempo periódico de dos cuerpos S y P en giro alrededor de su centro común de gravedad C es al tiempo periódico de uno de los cuerpos P en giro alrededor del otro S en reposo y describiendo una figura semejante e igual a las figuras que resultan al girar uno en torno a otro como la raíz cuadrada de un cuerpo S a la raíz cuadrada de la suma de los cuerpos S + P.

Pues, por la demostración de la Proposición anterior, los tiempos en que son descritos cualesquiera arcos semejantes PQ y *pq* son como las raíces cuadradas de CP y SP o *sp*, esto es, como la raíz cuadrada del cuerpo S a la de la suma de los cuerpos S + P. Y componiendo, las sumas de los tiempos en que son descritos todos los arcos semejantes PQ y *pq*, esto es, los tiempos totales en que son descritas todas las figuras semejantes, se hallan en la susodicha razón subduplicada. Q. E. D.

Proposición lx. Teorema xxiii

Si dos cuerpos S y P que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de sus distancias giran en torno a su centro común de gravedad: digo que el eje principal de la elipse que uno de los cuerpos, P, describe con su movimiento en torno al otro, S, será al eje principal de la elipse que dicho cuerpo P pudiera describir en el mismo tiempo periódico en torno al otro cuerpo S en reposo como la suma de los dos cuerpos S + P a la primera de las dos medias proporcionales entre esta suma y el otro cuerpo S.

Pues si las elipses descritas fuesen iguales entre sí, los tiempos periódicos (por el Teorema anterior) serán como la raíz cuadrada de la razón del cuerpo S a la suma de los cuerpos S + P. Disminúyase el tiempo periódico en la última elipse según la dicha razón y los tiempos periódicos se harán iguales; pero el eje principal de la elipse (por la Proposición XV) disminuirá en una razón, de la cual ésta es sesquiplicada, esto es, en una razón respecto a la cual la razón S a S + P es cúbica, por lo cual será al eje principal de la otra elipse como la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S a S + P. Y, ala inversa, el eje principal de la elipse descrita en torno al cuerpo móvil será al eje principal de la descrita en torno al inmóvil como S + P a la primera de dos medias proporcionales entre S + P y S. Q. E. D.

Proposición lxi. Teorema xxiv

Si dos cuerpos se atraen mutuamente con cualquier fuerza y no son empujados ni obstruidos externamente y se mueven de cualquier modo; sus movimientos vienen a ser los mismos que si no se atrajesen entre ellos, sino que ambos fuesen atraídos por un tercero situado en el centro común de gravedad con las mismas fuerzas; y la, ley de tales fuerzas de atracción será la misma tanto respecto a la distancia a dicho centro común como respecto a la distancia total entre cuerpos.

Pues las fuerzas con las cuales los cuerpos se atraen mutuamente, al tender hacia los cuerpos, tienden al centro intermedio común de gravedad; y por eso son las mismas que si procediesen del cuerpo intermedio. Q. E. D.

Y como está dada la razón de la distancia de cada cuerpo respecto a dicho centro común a la distancia entre cuerpos, está dada la razón entre cualquier potencia de una distancia y la misma potencia de la otra distancia; y también la razón de cualquier cantidad derivada de cualquier forma de una distancia y de cantidades dadas, respecto a otra cantidad derivada similarmente de la otra distancia y de cuantas cantidades dadas que posean respecto a la primera la dicha razón dada de distancias. Por lo cual, si la fuerza por la que un cuerpo es atraído por otro fuese directa o inversamente como la distancia mutua entre cuerpos, o como cualquier potencia de esta distancia, o, finalmente, como cualquier cantidad derivada de cualquier forma de esta distancia y cantidades dadas: la fuerza por la cual el dicho cuerpo es atraído hacia el centro común de gravedad será también directa o inversamente como la distancia del cuerpo atraído al centro común de gravedad, o como la dicha potencia de esta distancia o, por fin, como la cantidad derivada de esta distancia y de análogas cantidades dadas. Esto es, la ley de la fuerza de atracción será la misma para una y otra distancia. Q. E. D.

Proposición lxii. Problema xxxviii

Determinar los movimientos de dos cuerpos que atrayéndose mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de la distancia entre ellos, se dejan caer desde lugares dados.

Los cuerpos (por el último Teorema) se moverán de modo semejante a como lo harían siendo atraídos por un tercero situado en el centro común de gravedad; dicho centro, por hipótesis, estará en reposo en el comienzo mismo del movimiento, y por lo tanto (por el Corolario iv de las Leyes) siempre estará en reposo. Por lo tanto, los movimientos de los cuerpos (por el Problema xxv) han de ser determinados como si fuesen impelidos por fuerzas tendentes a ese centro; y se tendrán los movimientos de los cuerpos que se atraen mutuamente. Q. E. I.

Proposición lxiii. Problema xxxix

Determinar los movimientos de dos cuerpos que se atraen mutuamente con fuerzas inversamente proporcionales a los cuadrados de su distancia y parten de lugares dados, según rectas dadas y con velocidades dadas.

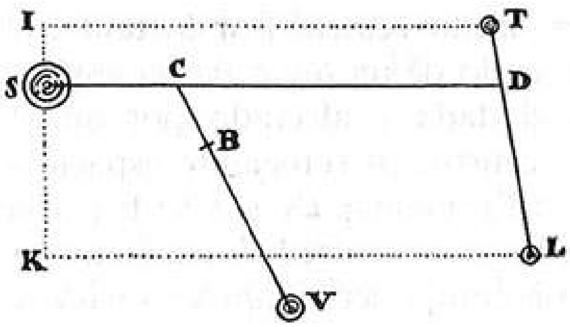
Al estar dados los movimientos de los cuerpos en el inicio, también está dado el movimiento del centro común de gravedad, así como el movimiento del espacio que se mueve uniformemente en línea recta junto con dicho centro, lo mismo que los movimientos iniciales de los cuerpos respecto a dicho espacio. Pero los movimientos siguientes (por el Corolario V de las Leyes y el Teorema anterior) tendrán lugar en ese espacio como si éste reposase junto con el centro común de gravedad y los cuerpos no se atrajesen mutuamente, sino que fuesen atraídos por un tercer cuerpo situado en dicho centro. Por lo tanto, el movimiento de cada cuerpo, partiendo de un lugar dado, según una recta dada y con una velocidad dada y afectado por una fuerza centrípeta tendente a dicho centro, en semejante espacio móvil, ha de determinarse por los Problemas IX y XXVI: y a la vez se tendrá el movimiento del otro cuerpo alrededor del mismo centro. Con este movimiento ha de componerse aquel movimiento uniforme del sistema espacial y de los cuerpos que giran en él y se tendrá el movimiento absoluto de los cuerpos en el espacio inmóvil. Q. E. I[36].

Proposición LXIV. Problema XL

Si los cuerpos se atraen mutuamente con fuerzas que crecen en razón simple de sus distancias a los centros, hállense los movimientos de varios cuerpos entre sí.

Primero supónganse dos cuerpos T y L que tienen su centro común de gravedad en D. Describirán (por el Corolario I del Teorema XXI) elipses con centro en D, cuyas magnitudes son conocidas por el Problema V.

Ahora un tercer cuerpo S atraiga a los dos primeros T y L con las fuerzas aceleratrices ST, SL y sea a la vez atraído por ellos. La fuerza ST (por el Corolario II de las Leyes) se descompone en las fuerzas SD y DT; y la fuerza SL en las fuerzas SD y DL. Pero las fuerzas DT, DL, que son como su suma TL y, por tanto, como las fuerzas aceleratrices con las cuales los cuerpos T y L se atraen mutuamente, añadidas a las fuerzas de los cuerpos T y L, la primera a la primera y la segunda a la segunda, componen fuerzas proporcionales a las distancias DT y DL como al principio, pero ahora con fuerzas mayores que antes; y por tanto (por el Corolario I de la Proposición X y por los Corolarios 1 y 8 de la Proposición IV) hacen que describan elipses como antes, pero con movimiento más rápido. Las restantes fuerzas aceleratrices SD y SD, por las acciones motrices SD x T y SD x L, que son como los cuerpos, al atraer a dichos cuerpos igualmente y según las líneas TI, LK paralelas a la propia DS, en nada cambian sus posiciones relativas, sino que hacen que se acerquen a la línea IK, la cual ha de imaginarse trazada por el centro de S y perpendicular a DS.



Pero esta aproximación a IK se impedirá procurando que el sistema de cuerpos T y L por una parte, y el cuerpo S por otra, piren con velocidades precisas en torno al centro común de pravedad C. Con tal movimiento, dado que la suma de las fuerzas motrices SD x T y SD x L proporcional a la distancia CS tiende al centro C, el cuerpo S describe una elipse en torno al centro C; y el punto D, al ser proporcionales CS y CD, describirá en su zona tina elipse similar. Pero los cuerpos T y L, atraídos por las fuerzas motrices SD x T y SD x L, el primero por la primera y el segundo por la segunda, igualmente y según las paralelas TI y LK, como se dijo antes, continuarán describiendo (por los Corolarios V y VI de las Leyes) sus elipses en torno al centro móvil D, como anteriormente. Q. E. I.

Añádase ahora un cuarto cuerpo V y, con un razonamiento semejante se concluirá que dicho cuerpo junto con el punto C describirá elipses en torno al punto común de gravedad B; los movimientos de los cuerpos T, L y S en torno a los centros D y C, permanecerán, pero acelerados. Y con el mismo método podríamos añadir muchos cuerpos. Q. E. I.

Esto es así, aun cuando los cuerpos T y L se atrajesen mutuamente con fuerzas aceleratrices mayores o menores que aquellas con las cuales atraen a los demás cuerpos en razón de las distancias. Sean las atracciones aceleratrices de todos mutuamente como las distancias multiplicadas por los cuerpos atrayentes, y de lo dicho se desprende fácilmente que todos los cuerpos describirán elipses distintas en iguales tiempos periódicos en torno a su centro común de gravedad B, en el plano inmóvil. Q. E. I.

PROPOSICIÓN LXV. TEOREMA XXV

Varios cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros, pueden moverse entre sí en elipses, y describir mediante radios trazados a los focos áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos.

Se ha demostrado en la Proposición anterior el caso en el cual los movimientos ocurren exactamente en elipses. Cuanto más se aparte la ley de las fuerzas de la ley allí propuesta, tanto más perturbarán los cuerpos sus mutuos movimientos; y tampoco es posible que los cuerpos, con atracción mutua según la ley aquí supuesta, se muevan en elipses exactas, salvo que mantengan entre sí determinada proporción de distancias. En los casos siguientes, no obstante, no nos apartaremos mucho de las elipses.

CASO 1. Imagínese que varios cuerpos pequeños giran en torno de uno muy grande a distancias diferentes, y fuerzas absolutas, proporcionales a cada uno de ellos, tendiendo hacia cada uno. Y puesto que el centro común de gravedad de todos (por el Corolario IV de las Leyes) o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta, imaginemos que los cuerpos pequeños lo son tanto que el cuerpo mayor jamás dista sensiblemente de dicho centro: y dicho cuerpo mayor o está en reposo o se mueve uniformemente en línea recta sin desvío apreciable: los cuerpos pequeños girarán en elipses en torno del mayor y con radios trazados hasta éste describirán áreas proporcionales a los tiempos, salvo en la medida en que puedan ocurrir desvíos procedentes de la separación del cuerpo mayor del centro común de gravedad o de las interacciones mutuas de los cuerpos menores. Pero los cuerpos pequeños pueden disminuirse tanto que, tanto dicho desvío, como las interacciones mutuas, sean menores que unas dadas y, por tanto, hasta que las órbitas coincidan con elipses y las áreas respondan a los tiempos sin error mayor que uno dado. Q. E. O.

CASO 2. Supongamos ahora un sistema de cuerpos pequeños que giran en torno a uno muy grande del modo antes descrito; u otro sistema cualquiera de dos cuerpos, que giran uno en torno al otro, que se desplaza con movimiento uniforme y rectilíneo, y que a la vez es influido lateralmente por la fuerza de otro cuerpo mucho mayor y situado a gran distancia. Y, puesto que las fuerzas aceleratrices iguales que influyen en los cuerpos según líneas paralelas no cambian la situación de los cuerpos entre sí, sino que hacen que todo el sistema cambie de lugar preservándose los movimientos de las partes entre ellas, es evidente que en esos movimientos de los cuerpos atraídos no puede ocurrir ningún cambio procedente de la atracción del mayor, sino sólo de las desigualdades de las atracciones aceleratrices o de las inclinaciones de las líneas según las cuales ocurren las respectivas atracciones. Supóngase, pues, que todas las atracciones aceleratrices hacia el cuerpo mayor sean entre sí inversamente como el cuadrado de las distancias; aumentando, entonces, la distancia del cuerpo mayor hasta que las diferencias entre longitudes de las rectas trazadas desde él hasta los otros, y las inclinaciones respectivas de dichas líneas sean menores que unas dadas, los movimientos de las partes del sistema entre sí proseguirán sin errores que no sean menores que unos dados. Y como la distancia mutua entre dichas partes es muy pequeña, el sistema entero, como si fuera un solo cuerpo, es atraído y se moverá bajo dicha atracción como si de un solo cuerpo se tratara; esto es, con su centro de gravedad describirá alrededor del cuerpo mayor alguna sección cónica (i. e. una hipérbola o una parábola si la atracción es suave y una elipse si es más fuerte) y con un radio trazado hasta el cuerpo mayor describirá áreas proporcionales a los tiempos sin más errores que los originados de las distancias de las partes, desde luego pequeñas, y disminuíbles cuanto se quiera. Q. E. O.

Con argumentos similares pueden tratarse casos más complejos hasta el infinito.

COROLARIO 1. En el Caso segundo, cuanto más se acerca el cuerpo mayor al sistema de dos o más cuerpos, tanto más resultarán perturbados los movimientos de las partes del sistema cutre sí; puesto que mayores serán las inclinaciones de las líneas trazadas desde este cuerpo mayor hasta los otros y también será mayor la desigualdad de la proporción.

COROLARIO 2. Pero resultará máxima la perturbación suponiendo que las atracciones aceleratrices de las partes del sistema hacia el cuerpo mayor no son entre sí como el inverso del cuadrado de las distancias desde dicho cuerpo mayor; sobre todo si la desigualdad de dicha proporción es mayor que la desigualdad de la proporción de las distancias desde dicho cuerpo mayor. Porque si la fuerza aceleratriz, al actuar igualmente y según líneas paralelas, no produce perturbación alguna entre los movimientos del sistema, es necesario que surja alguna perturbación debida a la desigualdad de acción, y que sea mayor o menor según sea mayor o menor dicha desigualdad. El exceso de impulsos mayores actuando sobre algunos cuerpos y no sobre otros cambiará necesariamente su situación respectiva. Y esta perturbación, añadida a la que surge de la inclinación y desigualdad de las líneas, aumenta la perturbación total.

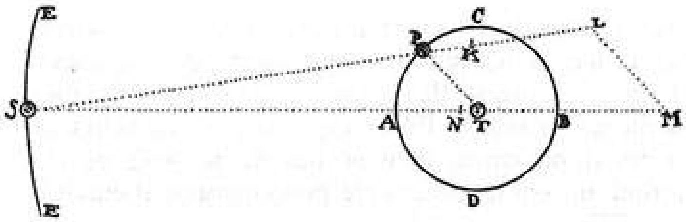
COROLARIO 3. Por tanto, si las partes de este sistema se mueven en elipses o en círculos sin perturbaciones notables, es evidente que o no se hallan impelidas hacia otros cuerpos por fuerzas aceleratrices más que de modo insensible o lo son de un modo uniforme y según líneas paralelas muy aproximadamente.

PROPOSICIÓN LXVI. TEOREMA XXVI

Si tres cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias, se atraen mutuamente y las atracciones aceleratrices de dos cualesquiera sobre el tercero son entre ellas inversamente como el cuadrado de las distancias, y los más pequeños giran en torno al mayor, digo: que el interior más próximo al central y mayor, con radios trazados hasta él describirá áreas más proporcionales a los tiempos, y una figura más cercana a la de una elipse con foco en el punto de intersección de los radios, tanto si el cuerpo mayor es perturbado por dichas atracciones, como si permanece en reposo no siendo atraído por los pequeños o si, siendo atraído unas veces mucho y otras poco, resultase perturbado unas veces mucho y otras poco.

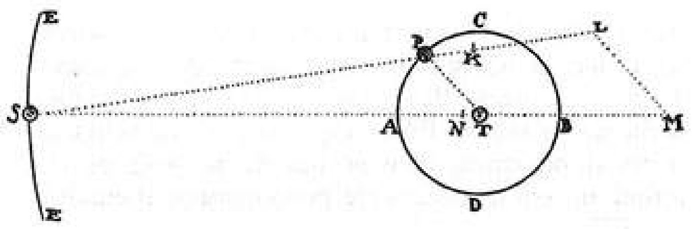
Casi se sigue de la demostración del segundo Corolario de la Proposición anterior; pero se prueba mediante una demostración más clara y estricta del modo siguiente.

CASO 1. Supongamos que en torno al cuerpo mayor T giran los cuerpos menores P y S en el mismo plano, de los cuales P describe la órbita interior PAB, y S la exterior ESE. Sea SK la distancia media entre los cuerpos P y S, y valga también como expresión de la atracción aceleratriz de P hacia S a esa distancia media. Tómese SL a SK como el cuadrado de la razón de SK a SP, y SL será la atracción aceleratriz de P hacia S a cualquier distancia SP. Únase PT, y paralela a ella trácese LM que toca a ST en M; y la atracción SL se descompondrá (por el Corolario II de las Leyes) en las atracciones SM, LM. El cuerpo P será urgido de este modo por una triple fuerza aceleratriz. Una fuerza tiende hacia T, y se origina por la atracción mutua entre los cuerpos T y P. Con esta fuerza sola el cuerpo P debería describir, en torno al cuerpo T y con el radio PT, áreas proporcionales a los tiempos así como una elipse cuyo foco se halla en el centro del cuerpo T, y esto tanto si T permanece en reposo como si oscila por causa de esta atracción, listo es evidente por la Proposición XI y por los Corolarios 2 y 3 del Teorema XXL La otra fuerza es la de la atracción LM, que porque tiende de P hacia T se superpone a la fuerza anterior y coincide con ella, y de este modo hará que las áreas sigan siendo proporcionales a los tiempos, por el Corolario 3 del Teorema XXL Pero, puesto que no es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia PT, al ser añadida a la anterior compondrá con ella una fuerza que se aparta de dicha proporción; y esto tanto más cuanto mayor sea la proporción de esta fuerza respecto a la anterior, permaneciendo igual el resto. Por tanto, ya que (por la Proposición XI y por el Corolario 2 del Teorema XXI) la fuerza con la cual se describe la elipse en torno al foco T ha de tender hacia dicho foco y ser inversamente proporcional al cuadrado de dicha distancia PT, tal fuerza compuesta, al apartarse de dicha proporción, hará que la órbita PAB se aparte de la forma elíptica con foco en T, y esto tanto más cuanto mayor sea la diferencia con respecto a dicha proporción; y por lo tanto también cuanto mayor es la proporción de la segunda fuerza LM respecto a la primera, manteniendo el resto igual. Pero, ahora, la tercera fuerza, SM, al atraer al cuerpo P en una dirección paralela a ST, compone con las fuerzas anteriores una fuerza que ya no se dirige de P hacia T; y que diverge tanto más de esa dirección cuanto mayor es la proporción de esta tercera fuerza respecto a las anteriores, *caeteris paribus*; la cual, por tanto, hace que el cuerpo P, con radio TP, ya no describa más áreas proporcionales a los tiempos, y que la aberración con respecto a esta proporcionalidad sea mayor cuanto mayor sea la proporción de esta tercera fuerza respecto de las otras. Pero esta tercera fuerza aumentará la aberración de la órbita PAB respecto a la mencionada forma elíptica por doble causa, bien porque no se dirija de P hacia T, bien porque no sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia PT. Comprendido esto, es evidente que las áreas se tornan más proporcionales a los tiempos, permaneciendo las demás fuerzas, cuanto más pequeña sea la tercera fuerza; y que la órbita PAB se aproxima máximamente a la mencionada forma elíptica cuando tanto la segunda como la tercera fuerza, y sobre todo la tercera, se hacen mínimas, permaneciendo la primera.



Represéntese mediante la linea SN la atracción aceleratriz del cuerpo T hacia S; y si las atracciones aceleratrices SM, SN fuesen iguales, al atraer éstas a los cuerpos T, P, igualmente y según líneas paralelas, en nada cambiarán sus situaciones respectivas. Los movimientos de dichos cuerpos entre sí serían iguales (por el Corolario VI de las Leyes) que si desapareciesen dichas atracciones, Y por similar razón, si la atracción SN fuese menor que la SM, la propia SN restará una parte de la atracción SM, y quedará sólo la parte MN con la que resultarán perturbadas tanto la proporcionalidad de tiempos y áreas como la susodicha forma elíptica de la órbita. De manera semejante si la atracción SN fuese mayor que la atracción SM, surgirá de la sola diferencia MN la perturbación de la proporcionalidad y de la órbita. Así la atracción SN siempre reduce la atracción SM, tercera de antes, a la atracción MN, permaneciendo iguales la primera y la segunda; y por lo tanto las áreas y los tiempos se aproximan de modo máximo a la proporcionalidad, y la órbita PAB a la figura elíptica mencionada, cuando la atracción MN es nula o la mínima posible; esto es, cuando las atracciones aceleratrices de los cuerpos P y T realizadas hacia S se aproximan cuanto sea posible a la igualdad; o sea, cuando la atracción SN ni es nula ni es inferior a la más pequeña de todas las atracciones SM, sino como la media entre la máxima y la mínima de las atracciones SM, esto es, ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q. E. D.

CASO 2. Ahora supóngase que los cuerpos menores S, P giran en distintos planos en torno a otro mayor T; y la fuerza LM, al actuar según la línea PT situada sobre el plano de la órbita PAB, producirá el mismo efecto que antes, y no desviará al cuerpo P del plano de su órbita. Pero, la otra fuerza MN, al actuar según una línea paralela a ST (y por tanto, cuando el cuerpo S se mueve fuera de la línea nodal, inclinada hacia el plano de la órbita PAB) produce, además de la perturbación del movimiento ya mencionada de sentido longitudinal, otra de sentido latitudinal, al atraer al cuerpo P fuera de su plano orbital. Y esta perturbación, para cualquier situación mutua dada de los cuerpos P y T, será como la fuerza generadora MN; y resultará, por tanto, mínima cuando MN sea mínima, esto es (como ya dije) cuando la atracción SN no es ni mucho mayor ni mucho menor que la atracción SK. Q. E. D.

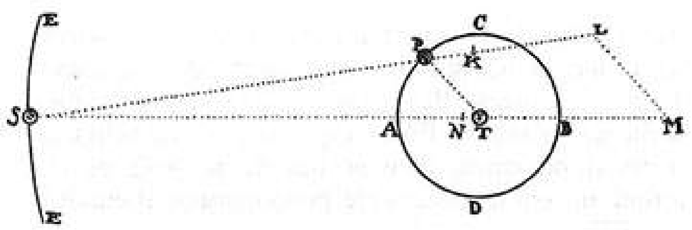


COROLARIO 1. De esto se sigue fácilmente que si varios cuerpos pequeños, P, S, R, etc., giran en torno a otro mayor T, el movimiento del cuerpo más interior P será perturbado mínimamente por las atracciones de los exteriores, toda vez que el cuerpo mayor T es atraído y perturbado en igual medida por los demás, ch razón de las fuerzas aceleratrices, que los otros entre sí.

COROLARIO 2. Pero en un sistema de tres cuerpos, T, P, S, si las atracciones aceleratrices de dos cualesquiera sobre un tercero son entre sí como el inverso del cuadrado de las distancias; el cuerpo P, con radio PT, describirá el área en torno al cuerpo T más rápidamente en las inmediaciones de la conjunción A y de la oposición B, que en las inmediaciones de las cuadraturas C, D. Pues toda fuerza que actúa sobre el cuerpo P y no actúa sobre el cuerpo T, puesto que no actúa según la línea PT, acelera o retarda la descripción del área, según actúe por delante o por detrás. Tal es la fuerza MN. Esta fuerza, al ir el cuerpo P desde C hacia A atrae hacia adelante y acelera el movimiento; después hasta llegar a D actúa por detrás y retarda el movimiento, después por delante hasta B, y finalmente por detrás al ir desde B hasta C.

COROLARIO 3. Y por el mismo razonamiento es claro que el cuerpo P, permaneciendo iguales las demás cosas, se mueve más rápidamente en la conjunción y en la oposición que en las cuadraturas.

COROLARIO 4. La órbita del cuerpo P, permaneciendo igual lo demás, es más curva en las cuadraturas que en la conjunción y en la oposición. Puesto que cuanto más rápidamente se mueve un cuerpo menos se desvía de la línea recta. Y además, la fuerza KL, o MN, en la conjunción y en la oposición es contraria a la fuerza con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P, y por lo tanto hace disminuir a la tal fuerza; y entonces el cuerpo P se desviará de la línea recta tanto menos cuanto menos es atraído hacia el cuerpo T.

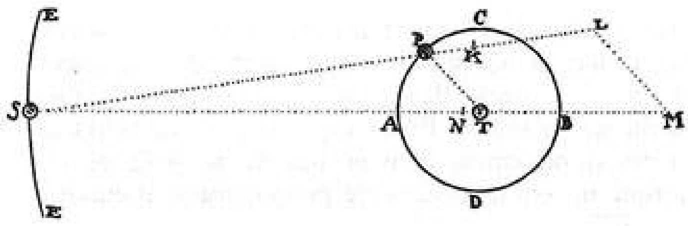


COROLARIO 5. De donde, el cuerpo P, permaneciendo el resto igual, se alejará más del cuerpo T en las cuadraturas que en la conjunción y la oposición. Esto es así

excluyendo el movimiento de excentricidad. Puesto que si la órbita del cuerpo P fuese excéntrica, su excentricidad (como se verá en el siguiente Corolario 9) resultará máxima cuando los ápsides se hallen en las sicigias; y por ello puede ocurrir que el cuerpo P, al alcanzar el ápside máximo, se aleje más del cuerpo T en las sicigias que en las cuadraturas.

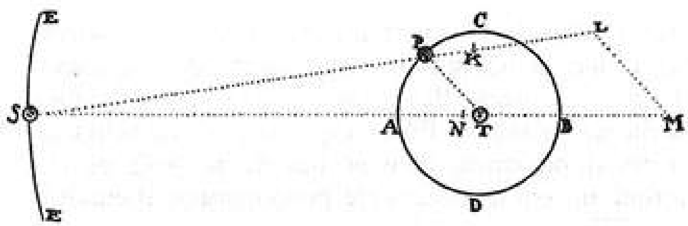
COROLARIO 6. Dado que la fuerza centrípeta del cuerpo central T, mediante la cual el cuerpo P es retenido en su órbita, aumenta en las cuadraturas por la suma de la fuerza LM y disminuye en las sicigias por la resta de la fuerza KL, y, dada la magnitud de la fuerza KL, disminuye más que aumenta; y además, puesto que dicha fuerza centrípeta (por el Corolario 2 de la Proposición IV) está en razón compuesta directamente como el radio TP e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico, es evidente que dicha razón compuesta es disminuida por la acción de la fuerza KL; y por lo mismo que el tiempo periódico aumenta, si el radio TP de la órbita permanece constante, y ello como la raíz cuadrada de la razón en que disminuye dicha fuerza centrípeta; y, por tanto, al aumentar o disminuir este radio, el tiempo periódico aumentará más o disminuirá menos que la potencia $^3\!/_2$ de dicho radio (por el Corolario 6 de la Proposición IV). Si la fuerza del cuerpo central disminuyera paulatinamente, el cuerpo P se alejaría siempre más del centro T al estar cada vez menos atraído; y, por el contrario, si dicha fuerza aumenta se acercará cada vez más. Por tanto, si la acción del cuerpo lejano S, mediante la cuál disminuye la susodicha fuerza, aumenta y disminuye alternativamente, aumentará y disminuirá alternativamente el radio TP; y también el tiempo periódico aumentará y disminuirá según una razón compuesta de la potencia $^3\!/_2$ del radio y de la raíz cuadrada de la cantidad en que disminuyó o aumentó la fuerza centrípeta del cuerpo central T por causa del aumento o disminución de la acción del cuerpo lejano S.

COROLARIO 7. De lo antedicho se desprende también que el eje de la elipse descrita por el cuerpo P, o línea de los ápsides, en cuanto a su movimiento angular, avanza y retrocede alternativamente, aunque los avances son mayores, y gracias a estos excesos, en conjunto se desplaza hacia adelante. Pues la fuerza con la cual el cuerpo P es atraído hacia el cuerpo T en las cuadraturas, momento en que la fuerza MN se desvanece, se compone de la fuerza LM y de la fuerza centrípeta con la cual el cuerpo T atrae al cuerpo P. Si se aumenta la distancia PT la primera fuerza LM aumenta casi en la misma proporción que la distancia, mientras la segunda disminuye como el cuadrado de dicha distancia; con lo cual la suma de ambas fuerzas decrece en una razón menor que la del cuadrado de la distancia PT, y por lo mismo (por el Corolario 1 de la Proposición XLV) el auge, o ápside superior, resultará retrasado. Pero en la conjunción y en la oposición la fuerza con la cual el cuerpo P es atraído hacia el cuerpo T es la diferencia entre la fuerza con la cual el cuerpo atrae al cuerpo P y la fuerza KL; y esta diferencia, por cuanto que la fuerza KL aumenta muy aproximadamente en razón de la distancia PT, disminuye en razón mayor que la del cuadrado de la distancia PT, y por tanto (por el Corolario 1 de la Proposición XLV) hará que el auge se adelante. En los puntos comprendidos entre sicigias y cuadraturas el movimiento del auge depende conjuntamente de ambas causas, de modo que avanza o retrocede según el exceso de una o de otra. Puesto que la fuerza KL en las sicigias es casi el doble que la fuerza LM en las cuadraturas, el exceso se hallará hacia el lado de la fuerza KL y empujará hacia adelante al auge. Se comprenderá más fácilmente la verdad de este Corolario y la del precedente imaginando el sistema de los dos cuerpos T y P rodeado por todas partes de muchos cuerpos S, S, S, etc. colocados sobre la órbita ESE. Puesto que por la acción de éstos disminuye por todas partes la acción del propio T, disminuirá ésta más que en razón del cuadrado de la distancia.



COROLARIO 8. Pero como el progreso o retroceso de los ápsides depende de la disminución de la fuerza centrípeta, según resulte aquélla en razón mayor o menor que el cuadrado de la distancia TP, al ir pasando el cuerpo desde el ápside inferior al superior; lo mismo que del incremento análogo al regresar al ápside inferior; y es por tanto máximo cuando la proporción de la fuerza en el ápside superior a la fuerza en el ápside inferior resulte más alejada de la razón del inverso del cuadrado de las distancias: es evidente que los ápsides en sus sicigias progresarán más rápidamente —gracias a la fuerza sustractiva KL o NM - LM— mientras en sus cuadraturas regresarán más lentamente gracias a la fuerza aditiva LM. Al ser tan largo el período de tiempo en el cual ocurren tanto la velocidad del progreso como el retardo del regreso, dicha desigualdad se torna máxima a la larga.

COROLARIO 9. Si un cuerpo gira en una elipse en torno a un centro desde el cual es atraído por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde dicho centro; y después, al caer desde el ápside superior o auge hacia el ápside inferior, dicha fuerza, por la presencia continua de otra fuerza nueva, aumentase hasta ser mayor que la razón del cuadrado de la distancia disminuida; es evidente que el cuerpo, empujado siempre hacia el centro por la presencia continua de la nueva fuerza, tenderá más hacia dicho centro que si solamente se viese afectado por la fuerza creciente según el cuadrado de la distancia disminuida; y por lo tanto describirá una órbita interior a la órbita elíptica, a la vez que el ápside inferior se acercará más al centro que antes. Pues la órbita, con la presencia de esta nueva fuerza, se tornará más excéntrica. Pero si la fuerza, al retornar el cuerpo desde el ápside inferior hasta el superior, decreciese en las mismas proporciones en que antes crecía, el cuerpo retornará a su distancia anterior, y por consiguiente, si la fuerza decrece en una razón mayor, el cuerpo atraído ahora en menor grado ascenderá hasta una distancia mayor, con lo cual se aumentará más aún la excentricidad de la órbita. Por lo cual, si la razón del incremento o decremento de la fuerza centrípeta aumenta en cada revolución, la excentricidad será siempre creciente; y, por el contrario, será decreciente si dicha razón disminuye. Ahora bien, en el sistema de cuerpos T, P, S, cuando los ápsides de la órbita PAB están en las cuadraturas, dicha razón de incrementos y decrementos es mínima, y máxima cuando los ápsides están en las sicigias. Cuando los ápsides se hallan en las cuadraturas, la razón es menor junto a las cuadraturas y mayor junto a las sicigias que el cuadrado de la razón de las distancias; y de dicha razón mayor surge el movimiento directo del auge, como ya se ha dicho. Pero si se considera globalmente la razón de aumento y disminución en el recorrido entre ápsides, ésta resulta menor que el cuadrado de la razón de las distancias. La fuerza en el ápside inferior es a la fuerza en el ápside superior en razón menor que la razón entre los cuadrados de la distancia entre el ápside superior y el foco de la elipse y la distancia entre el ápside inferior y el mismo foco; y al contrario, cuando los ápsides se hallan en las sicigias la fuerza en el ápside inferior está en razón mayor, con respecto a la fuerza en el ápside superior, que la razón de los cuadrados de las distancias. Puesto que en las cuadraturas las fuerzas LM sumadas a las fuerzas del cuerpo T componen fuerzas en menor razón, y las fuerzas KL restadas en las sicigias de las del cuerpo T dejan fuerzas que están en razón mayor. Por lo tanto, la razón global de incremento y decremento en el recorrido entre ápsides es mínima en las cuadraturas y máxima en las sicigias: por lo mismo en el recorrido de los ápsides desde las cuadraturas hasta las sicigias aumenta continuamente, y aumenta de paso la excentricidad de la elipse; mientras que en el recorrido desde las sicigias hasta las cuadraturas disminuye continuamente a la vez que decrece la excentricidad.



COROLARIO 10. Para poder calcular los errores de latitud, supongamos que permanece inmóvil el plano de la órbita EST; y supuesta la causa de los errores ya explicada, es evidente que de las dos fuerzas NM y ML que son la causa total antedicha, la fuerza ML actuando siempre según el plano PAB de la órbita jamás perturba los movimientos en latitud; y que la fuerza NM, cuando los nodos están en las sicigias, al actuar también según el mismo plano de la órbita, tampoco perturba estos movimientos; pero cuando están en las cuadraturas, los perturba máximamente y, al atraer continuamente al cuerpo P del plano de su órbita, disminuye la inclinación

del plano durante el tránsito del cuerpo de las cuadraturas a las sicigias y la aumenta cuando pasa de las sicigias a las cuadraturas. De donde viene a ocurrir que cuando el cuerpo se halla en las sicigias la inclinación resulte mínima entre todas, mientras que vuelve a alcanzar la magnitud anterior aproximadamente, cuando el cuerpo llega al nodo siguiente. Pero si los nodos se sitúan en los octantes tras las cuadraturas, esto es, entre C y A, D y B, de lo dicho se entiende que al pasar el cuerpo P desde cualquier nodo hasta el grado nonagésimo siguiente la inclinación del plano disminuye continuamente; y a partir de aquí durante los siguientes cuarenta y cinco grados hasta llegar a la siguiente cuadratura, la inclinación aumenta, para disminuir de nuevo mientras transita por los siguientes cuarenta y cinco grados hasta el nodo siguiente. Y así la inclinación disminuye más que aumenta, por lo cual es siempre menor en el nodo siguiente que en el anterior. Y por un razonamiento semejante, la inclinación aumenta más que disminuye cuando los nodos están en los otros octantes, entre A y D, B y C. Y por ello la inclinación es máxima cuando los nodos están en las sicigias. Al ir pasando los nodos de las sicigias a las cuadraturas la inclinación va disminuyendo con cada aproximación del cuerpo a los nodos; y llega a ser mínima cuando los nodos están en las cuadraturas y el cuerpo en las sicigias; después crece de nuevo al mismo paso que antes decreció; y al acercarse los nodos a las sicigias siguientes, alcanza la anterior magnitud.

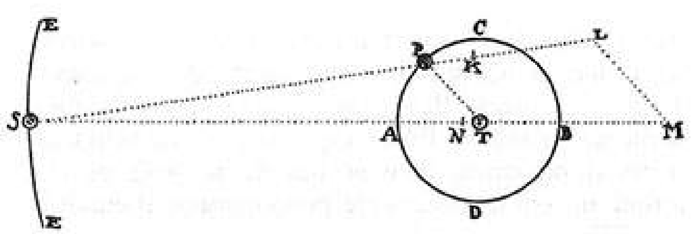
COROLARIO 11. Puesto que el cuerpo P es atraído continuamente del plano de su órbita cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, y ello en dirección a S durante su tránsito del nodo C hasta el D pasando por la conjunción A; y en dirección contraria durante su tránsito del nodo D al C pasando por la oposición B: es evidente que en su movimiento desde el nodo C el cuerpo se separa continuamente del primitivo plano de su órbita CD hasta su llegada al nodo siguiente; y por esto, al distanciarse mucho en este nodo del plano primitivo CD, pasa por el plano de la órbita EST no por el otro nodo D correspondiente a dicho plano, sino por un punto situado hacia el lado de S, punto que se convierte, por tanto, en el nuevo lugar del nodo en retroceso. Y, por un razonamiento similar, los nodos continúan retrocediendo cu cada tránsito del cuerpo de este nodo al siguiente. Por consiguiente los nodos situados en las cuadraturas retroceden continuamente; en las sicigias, donde los movimientos no se perturban en absoluto en el sentido de la latitud, están en reposo; en los puntos intermedios, al participar de ambas condiciones, retroceden más lentamente: y por lo tanto, al ser siempre o retrógrados o estacionarios, resultarán adelantados con cada revolución.

COROLARIO 12. Todos los errores descritos en estos Corolarios son algo mayores en las conjunciones de los cuerpos P, S que en sus oposiciones; y esto por ser mayores las fuerzas generadoras NM y ML.

COROLARIO 13. Pese a que las razones dadas en estos Corolarios no dependan de la magnitud del cuerpo S, todo lo que antecede se cumple cuando se atribuye al cuerpo S una magnitud tan grande como para que el sistema de los cuerpos T y P gire en torno a él. Y al aumentar el tamaño del cuerpo S y con ello su fuerza centrípeta de la que surgen los errores del cuerpo P, resultarán mayores, a distancias iguales, los susodichos errores en este caso que en el otro, cuando el cuerpo S gira en torno al sistema de cuerpos P y T.

COROLARIO 14. Pero como las fuerzas NM y ML, cuando el cuerpo S se halla a gran distancia, son aproximadamente como la fuerza SK y la razón PT a ST conjuntamente, esto es, si se diesen tanto la distancia PT como la fuerza absoluta de S, como el inverso de ST^3; y son también las dichas fuerzas NM y ML las causas de todos los errores y efectos vistos en los anteriores Corolarios: es evidente que todos los efectos mencionados, permaneciendo el sistema de cuerpos P y T, y cambiando solamente la distancia ST y la fuerza absoluta del cuerpo S, estarán muy aproximadamente en razón compuesta de la razón directa de la fuerza absoluta del cuerpo S y de la razón inversa de la distancia ST al cubo. De donde se sigue que, si el sistema de cuerpos T y P gira en torno al cuerpo lejano S, las fuerzas NM y ML, así como sus efectos, serán (por los Corolarios 2 y 6 de la Proposición IV) inversamente como el cuadrado del tiempo periódico. Y además, si la magnitud del cuerpo S es proporcional a su fuerza absoluta, las fuerzas NM y ML y sus efectos serán en razón directa del cubo del diámetro aparente del cuerpo lejano S visto desde T, y viceversa. Ya que estas razones son las mismas que la anterior razón compuesta.

COROLARIO 15. Y aunque si las órbitas ESE y PAB, conservando sus formas, proporciones e inclinación mutua, alterasen su magnitud y si las fuerzas de los cuerpos S y T permaneciesen constantes o cambiasen en una razón dada, estas fuerzas (esto es, la fuerza del cuerpo T que hace al cuerpo P desviarse de su curso recto para seguir la órbita PAB, y la fuerza del cuerpo S que obliga al cuerpo P a desviarse de dicha órbita) siempre actuarán del mismo modo y en la misma proporción, necesariamente todos los efectos serán semejantes y proporcionales, como también serán proporcionales los tiempos de los efectos; esto es, todos los errores lineales serán como los diámetros de las órbitas, mientras los errores angulares serán como antes, y los tiempos de errores lineales semejantes, o de errores angulares iguales serán como los tiempos periódicos de las órbitas.



COROLARIO 16. De donde, si están dadas las formas de las órbitas y sus inclinaciones mutuas, y se alteran de cualquier modo las magnitudes, fuerzas y distancias de los cuerpos, de los errores dados y de los tiempos de los errores en un caso se pueden inferir los errores y los tiempos de los errores de otro caso con gran

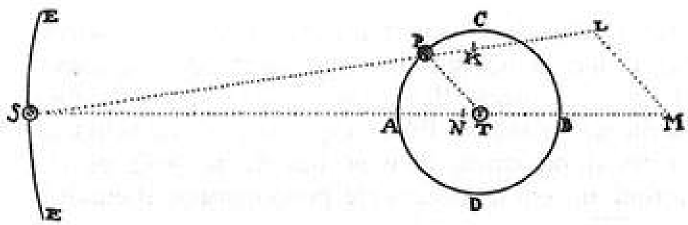
aproximación; pero más brevemente aún con el método siguiente. Las fuerzas NM y ML, permaneciendo constante el resto, son como el radio TP; y sus efectos periódicos (por el Corolario 2 del Lema X) como las fuerzas y el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P conjuntamente. Estos son los errores lineales del cuerpo P; y de aquí que los errores angulares vistos desde el centro T (esto es, tanto el movimiento del auge y de los nodos como todos los errores aparentes en longitud y en latitud) son para cada revolución del cuerpo P aproximadamente como el cuadrado del tiempo de la revolución. Al componer estas razones con las razones del Corolario 14 resulta que en todo sistema de cuerpos T, P, S, en donde P gira en torno a T muy cercano a él, y T gira en torno a S muy distante, los errores angulares del cuerpo P visto desde T serán, en cada revolución del cuerpo P, directamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo P, e inversamente como el cuadrado del tiempo periódico del cuerpo T. Y por tanto el movimiento medio del auge estará en una razón dada con el movimiento medio de los nodos; y ambos movimientos serán directamente como el tiempo periódico de P, c inversamente como el cuadrado del tiempo periódico de T. Aumentando o disminuyendo la excentricidad e inclinación de la órbita PAB no se alteran los movimientos del auge y de los nodos de manera sensible, salvo que aquellos sean demasiado grandes.

COROLARIO 17. Dado que la línea LM resulta unas veces mayor y otras menor que el radio PT, represéntese el valor medio de la fuerza LM por dicho radio PT; y este valor será a la fuerza media SK o SN (que puede representarse también por ST) como la longitud PT a la longitud ST. Pero la fuerza media SN o ST, mediante la cual el cuerpo T es retenido en su órbita en torno a S, es a la fuerza, mediante la cual el cuerpo P es retenido en su órbita en torno a T, en razón compuesta de la razón del radio ST al radio PT y de la razón cuadrada del tiempo periódico del cuerpo P en torno a T al tiempo periódico del cuerpo T en torno a S. Y por lo mismo la fuerza media LM es a la fuerza que retiene al cuerpo P en su órbita en torno a T (o también por la que el susodicho cuerpo P podría girar en el mismo tiempo periódico en torno al punto móvil T a la distancia PT) en dicha razón cuadrada de los tiempos periódicos. Por tanto, dados los tiempos periódicos y la distancia PT, está dada la fuerza media LM; y dada ésta, también está dada muy aproximadamente la MN, por la analogía de las líneas PT, MN.

COROLARIO 18. Supongamos que muchos cuerpos fluidos se mueven en torno al mismo T a distancias iguales y bajo las mismas leyes con las que el cuerpo P gira en torno al cuerpo T; y que al llegar a ser contiguos acaban formando un anillo fluido, redondo y concéntrico con el cuerpo T; y cada parte del anillo, realizando todos sus movimientos según la ley del cuerpo P, se acercará más al cuerpo T, y se moverá más rápidamente en las conjunciones y oposiciones de la misma y del cuerpo S, que en las cuadraturas. Los nodos de dicho anillo, o sea, sus intersecciones con el plano de la órbita del cuerpo S o T, estarán en reposo en las sicigias; pero fuera de las sicigias, se moverán hacia atrás, y en las cuadraturas muy rápidamente, en otros puntos más lentamente. La inclinación del anillo también variará y su eje oscilará en cada revolución, y al completarse ésta retornará a su estado anterior, salvo en la medida en que sea desplazada circularmente por la precesión de los nodos.

COROLARIO 19. Imaginemos ahora que la esfera del cuerpo T, constituida de materia no fluida, se expande y se extiende hasta alcanzar dicho anillo, y que hay agua en un foso excavado a lo largo de toda su circunferencia mientras gira uniformemente sobre su eje con el mismo movimiento periódico. Al ser este líquido acelerado y retardado alternativamente (como en el Corolario anterior) será más veloz en las sicigias y más lento en las cuadraturas que la superficie de la esfera, y así experimentará flujo y reflujo dentro del foso como el mar. Si se suprimiese la atracción del cuerpo S, el agua no adquiriría ningún movimiento de flujo o reflujo al girar en torno al centro en reposo de la esfera. La razón es la misma para una esfera que se desplaza uniformemente en línea recta mientras gira en torno a su centro (por el Corolario V de las Leyes) y para una esfera uniformemente desviada de su curso rectilíneo (por el Corolario VI de las mismas Leyes). Pero si se acerca el cuerpo S, por su desigual atracción, el agua será perturbada inmediatamente. Y será efectivamente mayor la atracción del agua más cercana y menor la de la más lejana. Pues la fuerza LM atraerá el agua en las cuadraturas hacia abajo, y la hará descender hasta las sicigias; y la fuerza KL la atraerá hacia arriba en las sicigias, detendrá su descenso y la hará ascender hasta las cuadraturas, salvo en la medida en que el flujo y reflujo del agua es obligado por el foso, y resulta algo retardado por el rozamiento.

COROLARIO 20. Si ahora el anillo se torna rígido y el globo disminuye, cesará el movimiento de flujo y reflujo; pero permanecerá el movimiento oscilatorio de la inclinación así como la precesión de los nodos. Supóngase que el globo tiene el mismo eje que el anillo y que completa sus revoluciones en el mismo tiempo, que toca por dentro al anillo con su superficie y esté adherido a él; al compartir el movimiento del anillo, el conjunto de los dos oscilará, y los nodos retrocederán. Pues el globo, como diremos ahora, es indiferente para recibir todas las impresiones. El ángulo máximo de inclinación para el anillo que rodea al globo ocurre cuando los nodos se hallan en las sicigias. Al pasar los nodos desde aquí hacia las cuadraturas, intenta reducir su inclinación y con este intento comunica un movimiento al globo entero. El globo retiene este movimiento impreso hasta que el anillo con un intento contrario suprime este movimiento e imprime otro en sentido contrario: de este modo el movimiento máximo de inclinación decreciente ocurre cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, y el ángulo mínimo de inclinación en los octantes posteriores a las cuadraturas; y de nuevo el máximo movimiento de reclinación en las sicigias y el ángulo máximo en los octantes siguientes. Igual es el caso para el globo despojado de anillo cuando en las regiones ecuatoriales es algo más alto o conste de materia algo más densa que en los polos. Pues este exceso de materia en la parte ecuatorial hace las veces de anillo. Y aunque se suponga que, al aumentar la fuerza centrípeta de este globo en cualquier forma, todas sus partes tenderían hacia abajo, como las partes en gravitación de la Tierra, apenas cambiarían por ello los fenómenos de este Corolario y del precedente; salvo en lo que variasen los lugares de máximas y mínimas alturas del agua. Pues el agua en su órbita ya no se sostiene y permanece por su fuerza centrífuga, sino por el foso donde fluye. Y además la fuerza LM atrae el agua hacia abajo en máximo grado en las cuadraturas, y la fuerza KL o NM - LM la atrae en el mayor grado hacia arriba en las sicigias. Y las dos fuerzas conjuntas dejan de atraer el agua hacia abajo y empiezan a atraerla hacia arriba en los octantes anteriores a las sicigias; y dejan de atraer el agua hacia arriba y empiezan a atraerla hacia abajo en los octantes posteriores a las sicigias. De aquí que la máxima altura del agua pueda ocurrir en los octantes posteriores a las sicigias, y la mínima aproximadamente en los octantes siguientes a las cuadraturas; salvo en la medida en la que el movimiento ascendente o descendente impreso por dichas fuerzas pueda continuar un poco por causa de la fuerza ínsita del agua, o detenerse un poco más pronto por causa de los obstáculos en el foso.



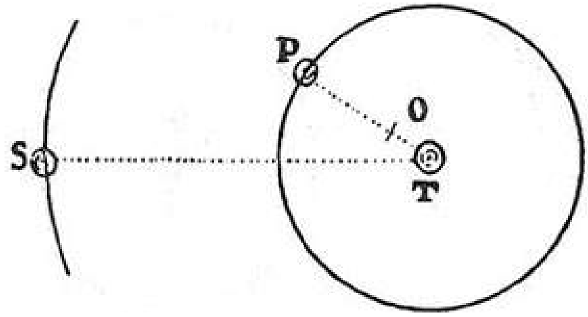
COROLARIO 21. Por la misma razón es por la que el exceso de materia del globo en el ecuador hace que los nodos sean retrógrados, y también que el aumento de dicho exceso aumente tal regreso, y que por su disminución disminuya y que con la supresión desaparezca. Si se suprimiese la materia redundante, esto es, si el globo en el ecuador fuese menos abultado o menos denso que en los polos, se originaría un movimiento de los nodos hacia adelante.

COROLARIO 22. Y de aquí, a su vez, que del movimiento de los nodos se desprenda la constitución del globo. Ya que si el globo conserva los mismos polos de modo constante y el movimiento de los nodos es retrógrado, en el ecuador hay un exceso de materia; pero si se mueven hacia adelante entonces hay falta de ella. Supóngase que un globo uniforme y perfectamente redondo se halle primero en reposo en un espacio libre; después es empujado por un impulso cualquiera ejercido oblicuamente sobre su superficie, y adquiere así un movimiento en parte circular y en parte rectilíneo. Puesto que semejante globo es completamente indiferente respecto a todos los ejes que pasan por su centro, ni es más propenso hacia un eje, o hacia una posición del eje, que hacia otra; es evidente que jamás cambiará ni de eje ni de posición del eje por su propia fuerza. Sea empujado ahora con un nuevo impulso oblicuamente ejercido sobre la misma parte de la superficie en que se ejerció antes; y como el antes o el después en nada cambia el efecto de un impulso, es evidente que estos dos impulsos ejercidos sucesivamente producen el mismo movimiento que si se hubiesen ejercido a la vez, esto es, el mismo que tendría el globo si hubiese sido empujado por una sola fuerza compuesta de las dos (por el Corolario II de las Leyes), esto es, un movimiento simple en torno a un eje de inclinación dada. E igual es el caso si el segundo impulso se diese en cualquier lugar del ecuador del primero, lo mismo que ocurriría si el primer impulso se aplicase sobre un lugar cualquiera del ecuador del movimiento generado por el segundo impulso sin el concurso del primero; y por tanto, el de ambos impulsos ejercidos sobre cualesquiera lugares: dichos impulsos generarán el mismo movimiento circular que si se efectuasen a la vez y cada vez en el lugar de la intersección de los ecuadores de los movimientos generados por cada uno de ellos. Por tanto, un globo homogéneo y perfecto no retiene muchos movimientos diferenciados, sino que compone todos los movimientos impresos y los reduce a uno, y en tanto depende de él, gira siempre con un movimiento simple y uniforme en torno a un único eje dado y de inclinación invariable. Y ni siquiera la fuerza centrípeta podrá cambiar la inclinación del eje o la velocidad de rotación. Pues si suponemos el globo dividido en dos hemisferios por un plano que pase por su centro y por el centro al que se dirige la fuerza, dicha fuerza urgirá siempre por igual a ambos hemisferios y, por tanto, el globo no se inclinará hacia ningún lado en cuanto a su movimiento de rotación. Pero añádase en cualquier lugar entre el polo y el ecuador nueva materia acumulada en forma de monte, y ésta, con el intento continuo de alejarse de su centro de movimiento, perturbará el movimiento del globo y hará que sus polos vaguen por su superficie, describiendo círculos en torno de sí mismos y de sus puntos opuestos continuamente. Y tamaña desviación no se corregirá hasta que dicho monte no se sitúe, bien en cualquiera de los polos, en cuyo caso (por el Corolario 21) los nodos ecuatoriales se adelantarán; bien en el ecuador, y por esta causa (por el Corolario 20) retrocederán; o bien, finalmente, añadiendo materia nueva al otro lado del eje que venga a equilibrar el movimiento del monte, y de este modo los nodos se adelantarán o retrocederán según se hallen el monte y esta nueva materia más cerca del polo o del ecuador.

PROPOSICIÓN LXVII. TEOREMA XXVII

Supuestas las mismas leyes de las atracciones, digo que el cuerpo exterior S, con radios trazados al centro común de gravedad O de los cuerpos interiores P, T, describe en torno a dicho centro áreas más proporcionales a los tiempos y una órbita más cercana a la forma de una elipse con foco en dicho centro, que la que describiría en torno al cuerpo mayor y más interior T con radios trazados a él.

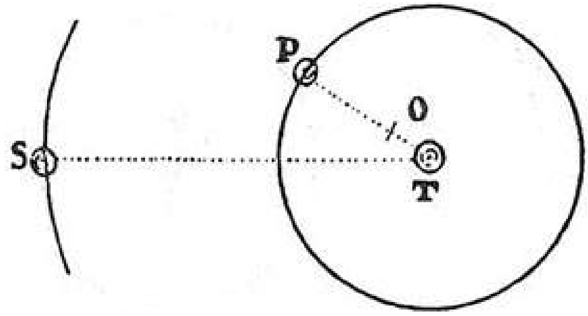
Puesto que las atracciones del cuerpo S hacia T y P componen su atracción absoluta, que se dirige más hacia O, centro común de gravedad de T y P, que hacia el cuerpo mayor T, y es más proporcional al inverso del cuadrado de la distancia SO que al del cuadrado de la distancia ST; como fácilmente verá quien piense en ello.



Proposición LXVIII. Teorema XXVIII

Supuestas las mismas leyes de las atracciones, digo que el cuerpo exterior S, con radios trazados al centro común de gravedad O de los cuerpos interiores P y T, describe áreas más proporcionales a los tiempos en torno a dicho centro y una órbita más semejante a la forma de una elipse con foco en dicho centro, si el cuerpo mayor y más interior fuese perturbado por tales atracciones igual que los demás, que si éste, o bien reposa sin atracción alguna, o bien es atraído mucho más o mucho menos o perturbado mucho más o mucho menos.

Se demuestra casi del mismo modo que la Proposición LXVI, pero con un argumento más prolijo, del cual prescindo por eso. Bastará considerarlo como sigue. De la última Proposición se sigue que el centro hacia el que se ve urgido el cuerpo S por las tuerzas conjuntas está próximo al centro común de gravedad de los otros dos. Si aquel centro coincide con este centro común y el centro común de gravedad de los tres estuviese en reposo, el cuerpo S por una parte, y el centro común de los otros dos por oirá, describirán elipses exactas en torno al centro común en reposo de los tres. Esto se sigue del Corolario 2 de la Proposición LVIII, al compararlo con lo demostrado en las Proposiciones LXIV y LXV. Este movimiento elíptico es un tanto perturbado por la distancia entre el centro de los dos cuerpos y el centro hacia el cual es atraído el tercer cuerpo S. Añádase además un movimiento al centro común de los tres, y aumentará la perturbación. Por lo tanto, la perturbación será mínima cuando el centro común de los tres está en reposo; esto es, cuando el cuerpo mayor y más interior T es atraído con la misma ley de los otros: y se hace mayor cada vez cuando el centro común de los tres, al disminuir el movimiento del cuerpo T, empieza a moverse y se va agitando más y más.



Corolario. Y de aquí que, si varios cuerpos pequeños giran en torno a uno mayor, se pueda inferir que las órbitas descritas se aproximarán más a elipses, y la descripción de las áreas será más uniforme si todos los cuerpos se atraen y perturban mutuamente con fuerzas aceleratrices directamente proporcionales a sus fuerzas absolutas e inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias, y el foco de cada órbita se halla en el centro común de gravedad de todos los cuerpos interiores (a saber, si el foco de la órbita primera y más interior se halla en el centro de gravedad del cuerpo mayor y más interior; el foco de la segunda en el centro común de gravedad de los dos cuerpos más interiores; el de la tercera en el centro común de gravedad de los tres interiores, y así sucesivamente) que si el cuerpo interior estuviese en reposo y se convirtiera en el foco común de todas las órbitas.

Proposición lxix. Teorema xxix

En un sistema de varios cuerpos A, B, C, D, etc., si un cuerpo A atrae a todos los otros B, C, D, etc., con fuerzas aceleratrices que son inversamente como los cuadrados de las distancias al cuerpo atrayente; y otro cuerpo B atrae también a los otros cuerpos A, C, D, etc., con fuerzas que son inversamente como el cuadrado de las distancias al cuerpo atrayente: las fuerzas absolutas de los cuerpos atrayentes A, B, serán entre sí como los propios cuerpos A, B, a quienes corresponden dichas fuerzas.

Pues las atracciones aceleratrices de todos los cuerpos B, C, D, etc., hacia A son iguales entre sí a distancias iguales, por hipótesis; y de igual modo las atracciones aceleratrices de todos los cuerpos hacia B son iguales a distancias iguales. Pero la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es a la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la atracción aceleratriz de todos los cuerpos hacia A es a la atracción aceleratriz de todos los cuerpos hacia B, a distancias iguales; y así es la atracción aceleratriz del cuerpo B hacia A a la atracción aceleratriz del cuerpo A hacia B. Pero la atracción aceleratriz del cuerpo B hacia A es a la atracción aceleratriz del cuerpo A hacia B, como la masa del cuerpo A a la masa del cuerpo B; puesto que las fuerzas motrices, que (por las Definiciones segunda, séptima y octava) son como las fuerzas aceleratrices y los cuerpos atraídos conjuntamente, son en este caso (por la Ley tercera del movimiento) iguales entre sí. Por lo tanto, la fuerza atractiva absoluta del cuerpo A es a la fuerza atractiva absoluta del cuerpo B como la masa del cuerpo A es a la masa del cuerpo B. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, si cada cuerpo del sistema, A, B, C, D, etc., considerado individualmente, atrae a todos los otros con fuerzas aceleratrices que son inversamente como los cuadrados de las distancias al atrayente; las fuerzas absolutas de todos estos cuerpos serán unas a otras como los propios cuerpos.

COROLARIO 2. Por la misma razón, si cada cuerpo del sistema, A, B, C, D, etc., considerado individualmente atrae a lodos los otros con fuerzas aceleratrices que están en razón directa o inversa de alguna potencia de las distancias al atrayente, o que vienen definidas por las distancias desde cada cuerpo atrayente según alguna ley común; está claro que las fuerzas absolutas de dichos cuerpos son como los cuerpos.

COROLARIO 3. En un sistema de cuerpos cuyas fuerzas decrecen en razón del cuadrado de las distancias, si los cuerpos menores giran en torno al mayor en elipses que tienen el foco común en el centro del cuerpo mayor y se aproximan lo más posible a dicha figura, a la vez que con radios trazados a dicho cuerpo mayor describen áreas lo más proporcionales posible a los tiempos: las fuerzas absolutas de dichos cuerpos serán entre sí en razón exacta o muy aproximada de los cuerpos; y viceversa. Es evidente por el Corolario de la Proposición XLVIII junto con el Corolario primero de esta Proposición.

ESCOLIO

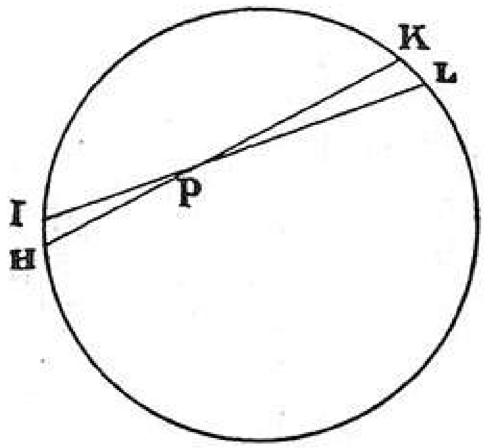
Estas proposiciones nos conducen a la analogía entre fuerzas centrípetas y cuerpos centrales, hacia los cuales suelen dirigirse dichas fuerzas; pues parece razonable que las fuerzas que se dirigen hacia los cuerpos dependan de la naturaleza y magnitud de dichos cuerpos, como ocurre con los imanes. Y cuantas veces ocurren estos casos se tendrán que calcular las atracciones de los cuerpos atribuyendo a cada una de sus partículas las fuerzas adecuadas y obteniendo la suma de fuerzas. Tomo aquí la palabra atracción de modo genérico para cualquier conato de los cuerpos de acercarse mutuamente, tanto si tal conato acontece por la acción de los cuerpos, que se buscan unos a otros o se agitan mutuamente mediante emisión de espíritus, como si surge de la acción del éter o del aire o de cualquier otro medio corpóreo o incorpóreo que empuje de alguna forma a los cuerpos inmersos en él unos hacia otros. Y en el mismo sentido genérico utilizo el término impulso, ocupándome en este tratado no de las especies de fuerzas y cualidades físicas, sino de las cantidades y proporciones matemáticas, como expliqué en las definiciones. En matemáticas se han de investigar las magnitudes de las fuerzas y las razones que se siguen en cualesquiera condiciones supuestas: después, al descender a la física, hay que comparar estas razones con los fenómenos; para que aparezca cuáles condiciones de esas fuerzas corresponden a cada clase de cuerpos atractivos. Y sólo después será posible discutir con más seguridad sobre las clases de fuerzas, de las causas y razones físicas. Veamos, pues, con qué fuerzas deberán interaccionar entre sí los cuerpos esféricos constituidos de partículas atractivas de la manera ya dicha y qué movimientos van a seguirse de ello.

Sección XII
DE LAS FUERZAS ATRACTIVAS DE CUERPOS ESFÉRICOS

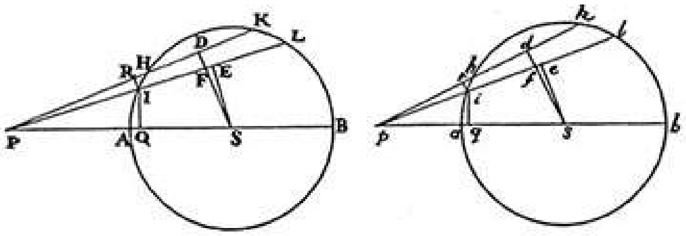
PROPOSICIÓN LXX. TEOREMA XXX

Si hacia cada punto de una superficie esférica se dirigiesen fuerzas centrípetas iguales y decrecientes en razón del cuadrado de la distancia desde dichos puntos: digo que un corpúsculo situado en el interior de dicha superficie no es atraído hacia ningún lado por tales fuerzas.

Sea HIKL la superficie esférica y P el corpúsculo ubicado en el interior. Trácense por P hasta esa superficie las dos líneas HK, IL, que intercepten arcos HI, KL, muy pequeños; y, por la semejanza de los triángulos HPI, LPK (por el Corolario 3 del Lema VII), dichos arcos serán proporcionales a las distancias HP, LP; y las partículas ubicadas en HI, KL, de la superficie esférica delimitada por rectas que pasen por P en cualquier dirección se hallarán bajo la susodicha razón del cuadrado. Luego las fuerzas de dichas partículas ejercidas hacia el cuerpo P son iguales entre sí. Puesto que son directamente como las partículas, e inversamente como el cuadrado de las distancias. Y esas dos razones componen una razón de igualdad. Pero las atracciones iguales hechas en sentido contrario se destruyen mutuamente. Por la misma razón todas las atracciones de toda la superficie esférica son destruidas por atracciones contrarias. Por consiguiente, el cuerpo P no será impelido hacia parte alguna por dichas atracciones. Q. E. D.



Con los mismos supuestos, digo que un corpúsculo situado fuera de una superficie esférica es atraído hacia el centro de la esfera con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la esfera.



Sean AHKB, *ahkb*, dos superficies esféricas iguales descritas con centros en S, *s*, y diámetros AB, *ab*, y sean P, *p*, corpúsculos situados en el exterior sobre la prolongación de dichos diámetros. Desde los corpúsculos trácense las líneas PHK, PIL y *phk*, *pil*, seccionando de los círculos máximos AHB, *ahb*, los arcos iguales HK, *hk*, e IL, *il*: desciendan sobre ellas las perpendiculares SD, *sd*; SE, *se*; IR, *ir*; tales que SD, *sd*, corten a PL, *pl*, en F y *f*; caigan también sobre los diámetros las perpendiculares IQ, *iq*. Desvanézcanse los ángulos DPE, *dpe*; y por ser iguales las líneas DS y *ds*, ES y *es*, pueden considerarse iguales las líneas PE, PF, y *pe*, *pf*, así como los pequeños segmentos DF, *df*; puesto que su razón última es de igualdad al desvanecerse a la vez los ángulos DPE, *dpe*. Una vez hecho esto, PI será a PF como RI a DF, y *pf* a *pi* como *df* o DF a *ri*; y por tanto PI x *pf* a PF x *pi* como RI a *ri*, esto es (por el Corolario 3 del Lema vii) como el arco IH al arco *ih*. De nuevo PI a PS como IQ a SE, y *ps* a *pi* como *se* o SE a *iq*; y por tanto PI x *ps* a PS x *pi* como IQ a *iq*. Y el producto de las razones PI^2 x *pf* x *ps* es a pz^2 x PF x PS, como IH x IQ a *ih* x *ig*; esto es, como la superficie circular que describiría el arco IH al girar el semicírculo AKB sobre el diámetro AB es a la superficie circular que describiría el arco *ih* al girar el semicírculo *akb* sobre el diámetro *ab*. Y las fuerzas con las cuales estas superficies atraen según líneas tendentes hacia ellas a los corpúsculos P y *p* son (por hipótesis) directamente como dichas superficies e inversamente como el cuadrado de las distancias entre los cuerpos y las superficies, esto es, como *pf* x *ps* a PF x PS. Y estas fuerzas son a sus partes oblicuas que (una vez descompuestas las fuerzas según el Corolario ii de las Leyes) tienden al centro según las líneas PS, ps, como PI a PQ, y *pi* a *pq*; esto es (por la semejanza de los triángulos PIQ y PSF, *piq* y *psf*) como PS a PF y *ps* a *pf*. De donde resulta que la atracción del corpúsculo P hacia S es a la atracción del corpúsculo *p* hacia *s* como $\frac{\mathrm{PF} \times pf \times ps}{\mathrm{PS}}$ a $\frac{pf \times \mathrm{PF} \times \mathrm{PS}}{ps}$, esto es, como ps^2 a PS^2. Y por igual razón las fuerzas con las cuales las superficies descritas por la revolución de los arcos KL y *kl* atraen a los corpúsculos serán como

ps^2 a PS^2. hallándose siempre en esta proporción las fuerzas de todas las superficies esféricas en que puedan dividirse ambas superficies esféricas, siempre que se tomen *sd* igual a SD y *se* igual a SE. Y, por composición, las fuerzas de todas las superficies esféricas ejercidas sobre los corpúsculos se hallarán en la misma proporción. Q. E. D.

Proposición LXXII. Teorema XXXII

Si hacia cada punto de una esfera tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes como el cuadrado de las distancias desde dichos puntos; y si está dada tanto la densidad como la razón del diámetro de la esfera a la distancia desde su centro hasta el corpúsculo: digo que la fuerza con la cual el corpúsculo es atraído será proporcional al semidiámetro de la esfera.

Pues supongamos que dos corpúsculos son atraídos cada uno de ellos por dos esferas, uno por una y otro por otra, y que sus distancias a los centros de las esferas son respectivamente proporcionales a los diámetros de las esferas, a la vez que las esferas se hallan compuestas de partículas semejantes y semejantemente dispuestas respecto a los corpúsculos. En tal caso las atracciones de un corpúsculo respecto a cada partícula de una esfera serán a las atracciones del otro corpúsculo respecto a cada partícula de la otra esfera como la razón compuesta de la razón directa de las partículas y de la razón inversa del cuadrado de las distancias. Pero las partículas son como las esferas, esto es, como el cubo de los diámetros, y las distancias son como los diámetros; y la primera razón directamente junto con el cuadrado de la segunda inversamente es la razón de diámetro a diámetro. Q. E. D.

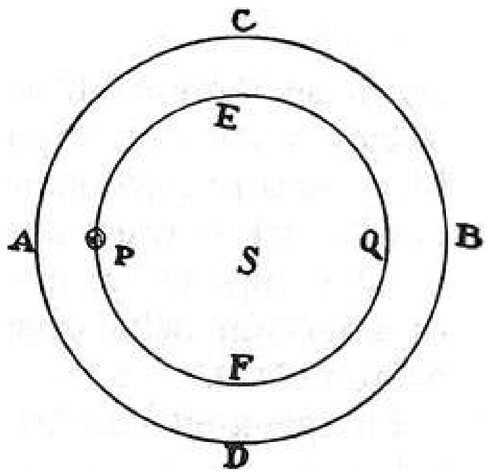
Corolario 1. De aquí que si giran unos corpúsculos en círculos en torno a esferas que constan de materia igualmente atractiva, y las distancias a los centros de esas esferas son proporcionales a los diámetros de las mismas; los tiempos periódicos serán iguales.

Corolario 2. Y viceversa, si los tiempos periódicos son iguales, las distancias serán proporcionales a los diámetros. Estos dos constan por el Corolario 3 de la Proposición IV.

Corolario 3. Si hacia cada punto de dos sólidos cualesquiera semejantes e igualmente densos tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de las distancias a dichos puntos, las fuerzas, por las cuales los corpúsculos son atraídos hacia tales sólidos desde posiciones semejantes respecto a ellos, serán entre sí como los diámetros de los sólidos.

Proposición LXXIII. Teorema XXXIII

Si hacia cada punto de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de la distancia a dichos puntos, digo que un corpúsculo situado dentro de la esfera es atraído con una fuerza proporcional a su distancia al centro.



En la esfera ABCD, trazada con centro en S, póngase el corpúsculo P; y con centro en el mismo S y distancia SP supóngase trazada la esfera PEQF. Es evidente (por la Proposición LXX) que las superficies esféricas concéntricas de que se compone la diferencia entre esferas AEBF en nada actúa sobre el cuerpo P, al destruirse sus atracciones por las contrarias. Sólo queda la atracción de la esfera interior PEQF. Y (por la Proposición LXXII) ésta es como la distancia PS. Q. E. D.

Escolio

Las superficies de que se componen los cuerpos no son aquí puramente matemáticas, sino orbes tan tenues que su espesor es casi nulo; o sea, orbes evanescentes de los cuales consta la esfera al final cuando el número de dichos orbes aumenta y su espesor disminuye hasta el infinito. Igualmente hay que entender los puntos, de los que se dice que constituyen las líneas, las superficies y los sólidos, como partículas iguales de magnitud despreciable.

Proposición LXXIV. Teorema XXXIV

Con los mismos supuestos, digo que un corpúsculo situado fuera de una esfera es atraído con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la misma.

Pues divídase la esfera en innumerables superficies esféricas concéntricas, y las atracciones sobre el corpúsculo resultantes de cada una de las superficies serán inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia del corpúsculo al centro (por la Proposición LXXI). Y al componer resultará la suma de las atracciones, esto es, la atracción del corpúsculo hacia toda la esfera, en la misma razón. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que a iguales distancias de los centros de esferas homogéneas las atracciones son como las esferas. Pues (por la Proposición LXXII) si las distancias son proporcionales a los diámetros de las esferas, las fuerzas serán como los diámetros. Disminúyase en esa razón la distancia mayor; y al ser ahora iguales las distancias, la atracción aumentará como el cuadrado de dicha razón; y, por lo tanto, será a la otra atracción como el cubo de dicha razón, esto es, como la razón de las esferas.

COROLARIO 2. A distancias cualesquiera las atracciones son como las esferas divididas por el cuadrado de las distancias.

COROLARIO 3. Si un corpúsculo se halla fuera de una esfera homogénea, es atraído con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de aquélla y la esfera está constituida de partículas atractivas; la fuerza de cualquier partícula decrecerá como el cuadrado de la distancia desde la partícula.

PROPOSICIÓN LXXV. TEOREMA XXXV

Si hacia cada punto de una esfera dada tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según el cuadrado de las distancias a cada punto; digo que otra esfera cualquiera semejante será atraída por ella con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre los centros.

Pues la atracción de cada partícula es inversamente como el cuadrado de su distancia al centro de la esfera atrayente (por la Proposición LXXIV) y, por tanto, resulta ser la misma que si toda la fuerza atractiva procediese de un único corpúsculo situado en el centro de la tal esfera. Pero dicha atracción es tanta cuanta, a su vez, sería la atracción del mismo corpúsculo si fuese atraído por cada partícula de la esfera atraída con una fuerza igual a aquélla con la que él mismo atrae. Pero dicha atracción del corpúsculo (por la Proposición LXXIV) sería inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de la esfera; y, por lo tanto, la atracción de una esfera igual a ella se halla también en la misma razón. Q. E. D.

COROLARIO 1. Las atracciones de esferas hacia otras esferas homogéneas son como las esferas atrayentes divididas por el cuadrado de las distancias entre sus centros y los de las atraídas.

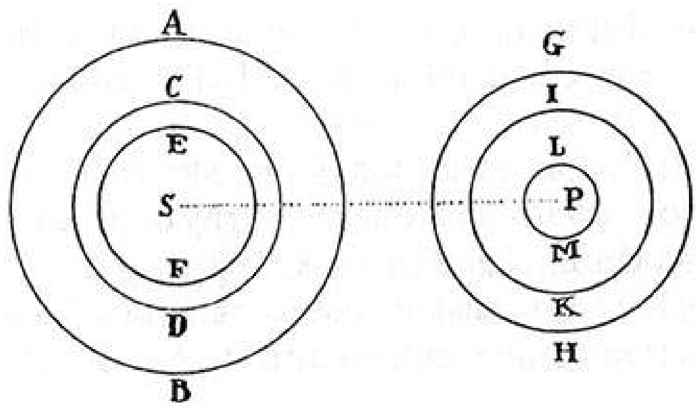
COROLARIO 2. Lo mismo ocurre cuando la esfera atraída también atrae. Puesto que cada punto de ésta atrae a cada punió de la otra con la misma fuerza con que a su vez son atraídos; por lo tanto, dado que en toda atracción (por la Ley III) son urgidos tanto el punto atrayente como el atraído, se igualarán las fuerzas de atracción mutua, manteniéndose las proporciones.

COROLARIO 3. Todo lo anteriormente demostrado sobre el movimiento de los cuerpos en torno al foco de las secciones cónicas vale cuando la esfera atrayente se sitúa en el foco y los cuerpos se mueven fuera de la misma.

COROLARIO 4. Y las cosas que se demostraron sobre el movimiento de los cuerpos en torno al centro de las secciones cónicas valen cuando el movimiento ocurra dentro de la esfera.

PROPOSICIÓN LXXVI. TEOREMA XXXVI

Si las esferas fueren desiguales de forma continua desde el centro hasta la circunferencia (en cuanto a densidad de materia y fuerza atractiva), mientras son iguales en todo lo demás, en todo su perímetro y para cada distancia dada al centro; y la fuerza atractiva de cada punto decrece según el cuadrado de la distancia del cuerpo atraído: digo que la fuerza total con la cual una esfera de este tipo atrae a otra será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre centros.



Sean varias esferas concéntricas semejantes AB, CD, EF, etc., que al añadir las interiores a las exteriores compongan una materia más densa hacia el centro y al suprimirlas la dejen más tenue; éstas (por la Proposición LXXV) atraerán a cualesquiera otras esferas concéntricas semejantes, GH, IK, LM, etc., cada una a cada una, con fuerzas inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia SP. Y por suma o resta, el total de todas esas fuerzas o el exceso de unas sobre otras, esto es, la fuerza con la cual toda la esfera AB, compuesta de todas las concéntricas o de todas las diferencias de las concéntricas, atrae a toda la esfera GH, compuesta de las concéntricas o de las diferencias de las concéntricas, estará en la misma razón. Auméntese hasta el infinito el número de esferas concéntricas de modo que la densidad de la materia a la vez que la fuerza atractiva crezca o decrezca según alguna ley desde la periferia hacia el centro; y añadiendo materia no atractiva complétese donde sea preciso la falta de densidad hasta que las esferas adquieran la forma deseada; y la fuerza con la cual una atraerá a la otra también ahora estará, por el argumento anterior, en esa misma razón inversa del cuadrado. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que si muchas esferas de éstas, mutuamente semejantes en todo, se atraen entre sí, a distancias iguales cualesquiera entre centros, sus atracciones aceleratrices una a una serán como las esferas atrayentes.

COROLARIO 2. Y a distancias desiguales cualesquiera, serán como las esferas atrayentes divididas por los cuadrados de las distancias entre centros.

COROLARIO 3. Y las atracciones motrices o los pesos de una esfera hacia otra serán, a distancias iguales de los centros, como las esferas atrayentes y las atraídas conjuntamente, esto es, como el contenido de las esferas resultante de su multiplicación.

COROLARIO 4. Y a distancias desiguales, directamente como dichos contenidos e inversamente como los cuadrados de las distancias entre centros.

COROLARIO 5. Lo mismo vale cuando la atracción procede de la fuerza atractiva de ambas esferas atrayéndose mutuamente una a otra. Pues la atracción se duplica con ambas fuerzas, guardando la proporción.

COROLARIO 6. Si esferas de esta clase giran en torno a otras en reposo, una en torno a cada una, y las distancias entre los centros de las que giran y los de las que están en reposo fuesen proporcionales a los diámetros de las que están en reposo, los tiempos periódicos serán iguales.

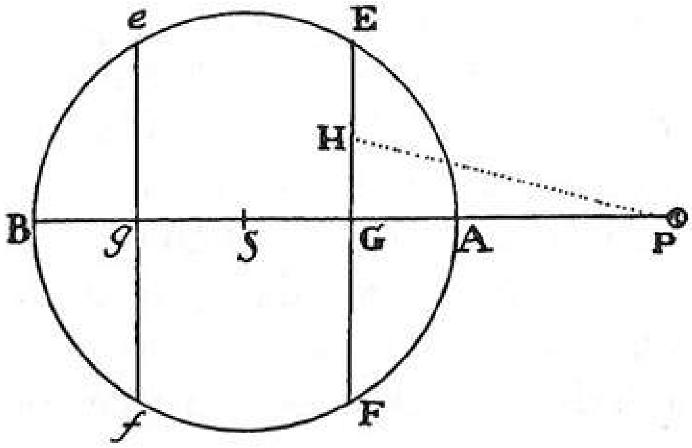
COROLARIO 7. Y viceversa, si los tiempos periódicos son iguales; las distancias serán proporcionales a los diámetros.

COROLARIO 8. A esto mismo se atienen todas las cosas demostradas más arriba sobre el movimiento de cuerpos en torno a focos de secciones cónicas, cuando en el foco se sitúa la esfera atractiva de cualquiera forma o condición de las descritas.

COROLARIO 9. Y de igual modo cuando los cuerpos que giran son también esferas atractivas de cualquier condición ya descrita.

PROPOSICIÓN LXXVII. TEOREMA XXXVII

Si hacia cada uno de los puntos de esferas tienden fuerzas centrípetas proporcionales a las distancias de los puntos a los cuerpos atraídos: digo que la fuerza compuesta con la cual se atraen mutuamente dos esferas es como la distancia entre los centros de las esferas.

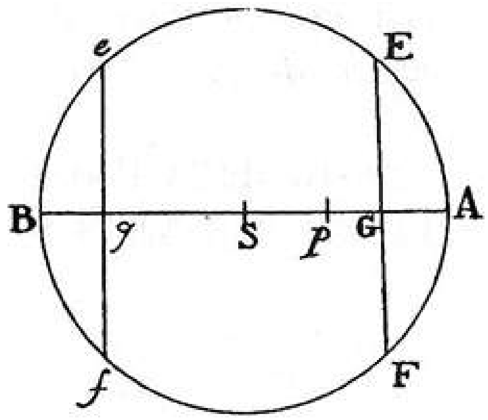


CASO 1. Sea la esfera AEBF, S su centro, P un corpúsculo atraído, PASB el eje de la esfera que pasa por el centro del corpúsculo, EF, *ef*, dos planos perpendiculares al eje y que cortan la esfera y equidistantes a un lado y otro del centro de la esfera; G, *g*, las intersecciones de los planos y el eje y H un punto cualquiera en el plano EF. La fuerza centrípeta del punto H sobre el corpúsculo P ejercida según la línea PH es como la distancia PH; y (por el Corolario II de las Leyes) según la línea PG, o sea hacia el centro S, es como la longitud PG. Por lo tanto, la fuerza de todos los puntos del plano EF, esto es, la fuerza de todo el plano, con la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro S es como la distancia PG multiplicada por el número de puntos, esto es, como el sólido contenido bajo el plano EF y la distancia PG. E igualmente la fuerza del plano *ef*, por la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro S, es como dicho plano multiplicado por su distancia P*g*, o como el plano EF igual al anterior multiplicado por esa distancia P*g*; y la suma de las fuerzas de ambos planos es como el plano EF multiplicado por la suma de las distancias PG + P*g*, esto es, como dicho plano multiplicado por el doble de la distancia PS del centro hasta el corpúsculo, o como el doble del plano EF multiplicado por la distancia PS, o como la suma de los planos iguales EF + *ef* multiplicada por esa misma distancia. Y por un argumento similar, las fuerzas de todos los planos en toda la esfera, equidistantes del centro de la misma, son como la suma de los planos multiplicada por la distancia PS, esto es, como toda la esfera y la distancia PS conjuntamente. Q. E. D.

CASO 2. El corpúsculo P atraiga ahora a la esfera AEBF. Por el mismo argumento se probará que la fuerza por la que dicha esfera es atraída será como la distancia PS. Q. E. D.

CASO 3. Sea ahora otra esfera compuesta de innumerables corpúsculos P; y puesto que la fuerza por la que es atraído cada corpúsculo es como la distancia del corpúsculo al centro de la primera esfera y la esfera conjuntamente, y por lo tanto es la misma que si toda ella procediera de un corpúsculo único situado en el centro de la esfera; la fuerza total con la cual todos los corpúsculos son atraídos hacia la segunda esfera, esto es, con la cual es atraída toda la dicha esfera, será la misma que si dicha esfera fuera atraída por una fuerza procedente de un único corpúsculo en el centro de la primera esfera, y por tanto proporcional a la distancia entre los centros de las esferas. Q. E. D.

CASO 4. Si las esferas se atraen mutuamente se duplicarán las fuerzas manteniéndose la proporción. Q. E. D.



CASO 5. Sitúese ahora el corpúsculo *p* dentro de la esfera AEBF; y puesto que la fuerza del plano *ef* sobre el corpúsculo es como el sólido contenido bajo dicho plano y la distancia *pg*, y la fuerza contraria del plano EF es como el sólido contenido bajo dicho plano y la distancia *p*G, la fuerza compuesta de ambas será como la diferencia de los sólidos, esto es, como la suma de los planos iguales multiplicada por la semidiferencia de las distancias, esto es, como dicha suma multiplicada por la distancia *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera. Y, por un argumento similar la atracción de todos los planos EF, *ef*, de toda la esfera, esto es, la atracción de toda la esfera es conjuntamente como la suma de todos los planos, o sea la esfera toda y, como *p*S, distancia del corpúsculo al centro de la esfera Q. E. D.

CASO 6. Y si se compone una nueva esfera con innumerables corpúsculos *p* situada dentro de la esfera anterior AEBF, se probará como antes que la atracción, tanto simple de una esfera hacia otra, como mutua entre ambas una hacia otra, será como la distancia entre centros *p*S. Q. E. D.

PROPOSICIÓN LXXVIII. TEOREMA XXXVIII

Si al pasar del centro hacia la circunferencia las esferas son constantemente desiguales y heterogéneas, pero en cada círculo a distancias dadas del centro son continuamente iguales; y la fuerza atractiva de cada punto fuese como la distancia del cuerpo atraído: digo que la fuerza total con la cual dos esferas de este tipo se atraerán mutuamente será proporcional a la distancia entre los centros de las esferas.

Esto se demuestra a partir de la Proposición precedente, del mismo modo que la Proposición LXXVI se demostró a partir de la Proposición LXXV.

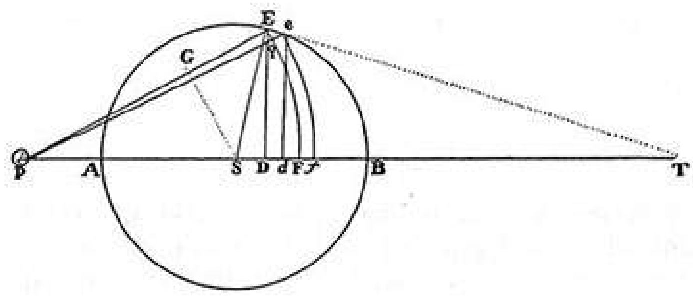
COROLARIO. Lo que se demostró más arriba en las Proposiciones X y LXIV sobre el movimiento de los cuerpos en torno a los centros de secciones cónicas, tiene valor cuando todas las atracciones surgen de fuerzas de cuerpos esféricos del tipo recién descrito, y los cuerpos atraídos son esferas también del mismo tipo.

ESCOLIO

Acabo de exponer los dos casos más notables de atracciones; a saber, cuando las fuerzas centrípetas decrecen en razón del cuadrado de las distancias, o cuando crecen según la razón simple de las distancias, haciendo en ambos casos que los cuerpos giren en secciones cónicas, y componiendo con dicha ley las fuerzas centrípetas de los cuerpos esféricos al separarse del centro haciéndolas crecer o decrecer según el caso. Lo cual es digno de tenerse en cuenta. Resultaría demasiado prolijo contemplar uno a uno los demás casos que ofrecen soluciones menos elegantes. Prefiero incluirlos y determinarlos a la vez a todos juntos con el método general siguiente.

LEMA XXIX

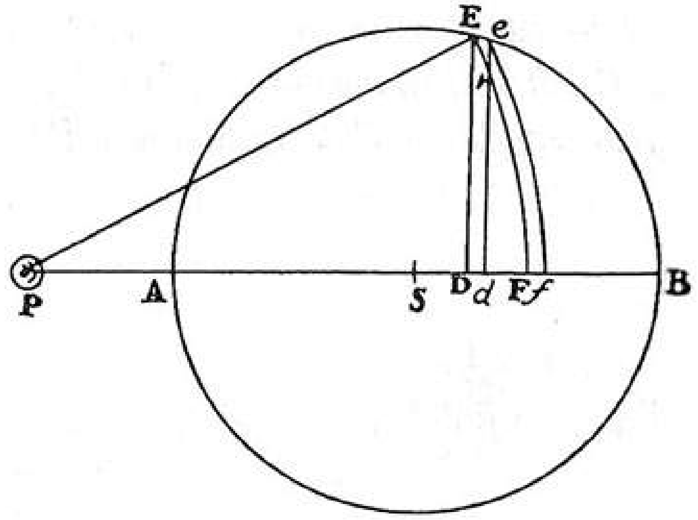
Si en torno a un centro S se describe un círculo cualquiera AEB y se trazan con centro en P dos círculos EF, eƒ, que cortan al primero en E, e, y a la línea PS en F, ƒ; y sobre PS descienden las perpendiculares ED, ed: digo que, si se supone que disminuyen infinitamente las distancias de los arcos EF, eƒ, la razón última de la línea evanescente Dd a la línea evanescente Fƒ será la misma que la de la línea PE a la línea PS.



Pues si la línea Pe corta al arco EF en *q*; y la recta E*e*, que coincide con el arco evanescente E*e*, prolongada, corta a la recta PS en T; y desde S se traza sobre PE la normal SG: por la semejanza de los triángulos DTE, *d*T*e*, DES; D*d* será a E*e* como DT a TE, o como DE a ES; y por la semejanza de los triángulos E*eq*, ESG (por el Lema VIII y el Corolario 3 del Lema VII), E*e* será a *eq* o Fƒ como ES a SG; y, por consiguiente, D*d* es a Fƒ como DE a SG; esto es (por la semejanza de los triángulos PDE, PGS) como PE a PS. Q. E. D.

PROPOSICIÓN LXXIX. TEOREMA XXXIX

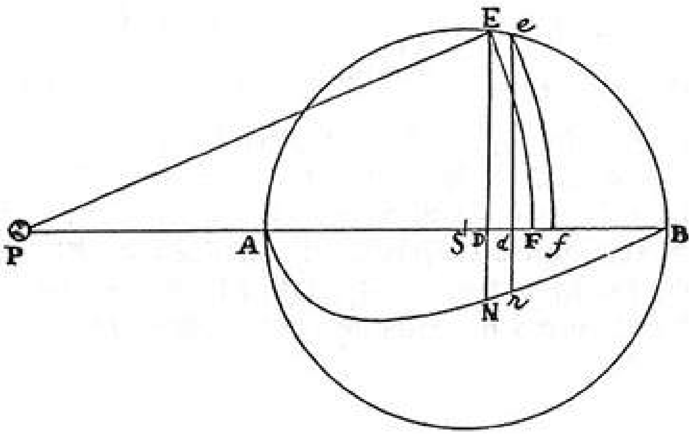
Si una superficie EF fe llega a ser evanescente al disminuir continuamente hasta el infinito su anchura y con su giro en torno al eje PS describe un sólido esférico cóncavo-convexo hacia cada una de cuyas partículas iguales tienden fuerzas centrípetas iguales: digo que la fuerza con la cual dicho sólido atrae a un corpúsculo situado en P está en razón compuesta de la razón del sólido DE^2 x Ff y la razón de la fuerza con la cual la partícula dada en el lugar Ff atraería al mismo corpúsculo.



Pues si consideramos primero la fuerza de la superficie esférica FE generada por el giro del arco FE y cortada en un punto cualquiera *r* por la línea *de*; la parte anular de la superficie, generada por el giro del arco *r*E, será como el segmento D*d*, manteniéndose el radio PE de la esfera (como demostró ARQUÍMEDES en el libro *De Sphera et Cylindro*). Y la fuerza de tal superficie, ejercida según las líneas PE o P*r* colocadas en la superficie cónica en cualquier punto, será como dicha superficie cónica anular; esto es, como el segmento D*d* o, lo que es lo mismo, como el rectángulo comprendido por el radio de la esfera PE y el segmento D*d*: pero si se ejerce según la línea PS tendente hacia el centro S será menor en la razón de PD a PE, y por tanto como PD x D*d*. Supóngase ahora que la línea DF se divide en innumerables partículas iguales, cada una de las cuales se denomina D*d*; entonces la superficie FE quedará dividida en otros tantos anillos iguales, cuyas fuerzas serán como la suma de todos los PD x D*d*, esto es, como $\frac{1}{2}PF^2$ - $\frac{1}{2}PD^2$ y, por lo tanto, como DE^2. Ahora multiplíquese la superficie FE por la altura Ff y resultará la fuerza del sólido EFf*e* ejercida sobre el corpúsculo P como DE^2 x Ff, esto cuando se dé la fuerza que una partícula dada Ff ejerce sobre el corpúsculo P a la distancia PF. Pero si no se da dicha fuerza, la fuerza del sólido EF f*e* será como el sólido DE^2 x Ff y la fuerza no dada conjuntamente. Q. E. D.

Si hacia cada partícula igual de una esfera ABE, descrita con centro en S, tienden fuerzas centrípetas iguales, y desde cada punto D sobre el eje de la esfera AB, en el que se halla situado un corpúsculo P, se elevan las perpendiculares DE que tocan a la esfera en E, y sobre ellas se toman las longitudes DN, que son conjuntamente como $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ *y la fuerza que la partícula de la esfera situada en el eje a la distancia PE ejerce sobre el corpúsculo P: digo que la fuerza total con la cual el corpúsculo P es atraído hacia la esfera es como el área ANB comprendida bajo el eje AB de la esfera y la línea curva ANB, de la cual el punto N es siempre tangente.*

Pues, manteniendo las construcciones del Lema y del Teorema anteriores, imagínese al eje de la esfera AB dividido en innumerables partículas iguales D*d*, y a toda la esfera dividida en otras tantas láminas esféricas cóncavo-convexas EFF*e*; y elévese la perpendicular *dn*. Por el Teorema anterior, la fuerza con la cual la lámina EF*fe* atrae al corpúsculo P es como DE^2 x F*f* y la fuerza de una sola partícula ejercida a la distancia PE o PF conjuntamente. Pero (por el Lema anterior) D*d* es a F*f* como PE a PS, y por tanto F*f* es igual a $\frac{PS \times Dd}{PE}$, y DE^2 x F*f* es igual a D*d* x $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, y por tanto la fuerza de la lámina EF*fe* es como D*d* x $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$ y la fuerza de la partícula ejercida a la distancia PF conjuntamente, esto es (por hipótesis), como DN x D*d*, o el área evanescente DN*nd*. Por tanto, las fuerzas de todas las láminas ejercidas sobre el cuerpo P son como todas las áreas DN*nd*, esto es, la fuerza total de la esfera como toda el área ANB. Q. E. D.



COROLARIO 1. De aquí que si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula

permanece siempre la misma a todas las distancias y DN es como $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la fuerza total con la que el corpúsculo es atraído por la esfera será como el área ANB.

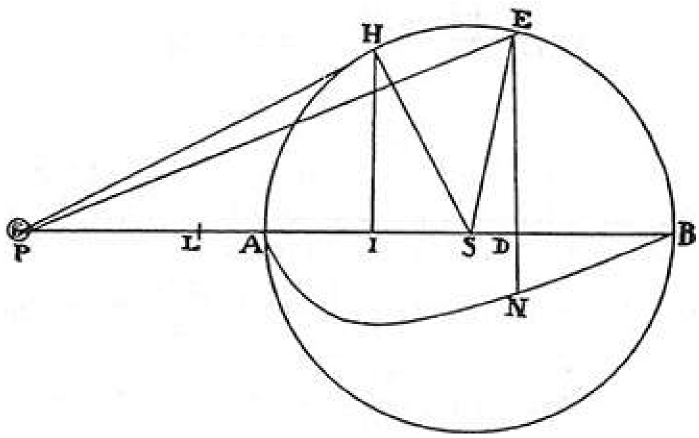
COROLARIO 2. Si la fuerza centrípeta de las partículas es inversamente como la distancia del corpúsculo atraído por ellas y DN como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$ la fuerza con la cual el corpúsculo P es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

COROLARIO 3. Si la fuerza centrípeta de las partículas es inversamente como el cubo de la distancia del corpúsculo atraído por ellas y DN es como $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$, la fuerza con la cual el corpúsculo es atraído por toda la esfera será como ANB.

COROLARIO 4. Y, en general, si se supone que la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera es inversamente como la cantidad V y DN como $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, la fuerza con la que el corpúsculo es atraído por toda la esfera será como el área ANB.

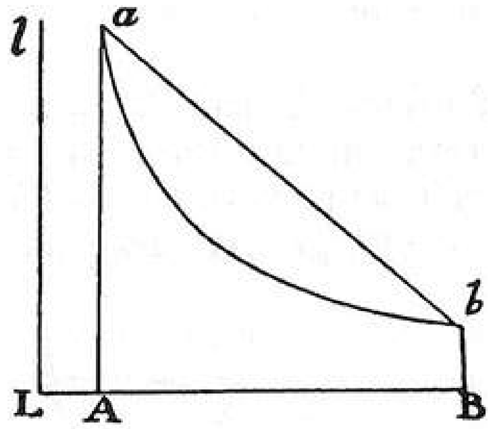
PROPOSICIÓN LXXXI. PROBLEMA XLI

Suponiendo lo anterior, mídase el área ANB.



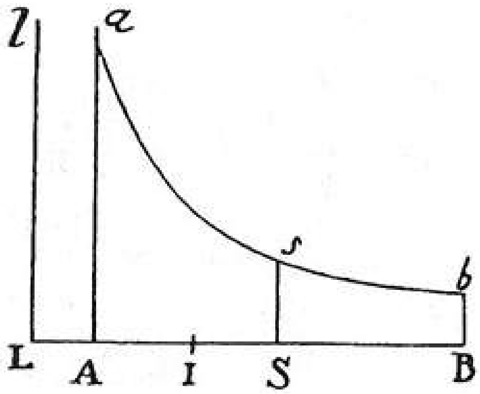
Desde el punto P trácese la recta PH tangente a la esfera en H, y sobre el eje PAB descienda la normal HI y biséquese PI en L; y (por la Proposición XII del libro II de los [*Elementos*]) $PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PSD$. Pero SE^2 o SH^2 (por la semejanza de los triángulos SPH, SHI) es igual al rectángulo PSI. Por tanto, PE^2 es igual al contenido bajo PS y PS + SI + 2SD, esto es, bajo PS y 2LS + 2SD, esto es, bajo PS y 2LD.

Además, DE^2 es igual a SE^2 - SD^2, o sea, $SE^2 - LS^2 + 2SLD - LD^2$, esto es, $2SLD - LD^2$ - ALB. Pues $LS^2 - SE^2$ o $LS^2 - SA^2$ (por la Proposición VI del libro II de los [*Elementos*]) es igual al rectángulo ALB. Si por DE^2 se escribe $2SLD - LD^2$ - ALB; y la cantidad $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, que según el Corolario 4 de la Proposición anterior es como la longitud de la ordenada aplicada en DN, quedará descompuesta en tres partes $\frac{2SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: donde si en lugar de V escribimos la razón inversa de la fuerza centrípeta, y en lugar de PE la media proporcional entre PS y 2LD, dichas tres partes resultan ordenadas de las curvas correspondientes, cuyas áreas se obtienen por métodos ya comunes. Q. E. F.

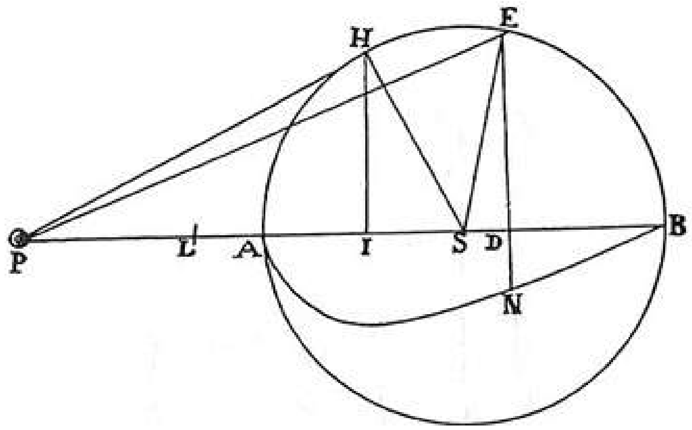


EJEMPLO 1. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera fuese inversamente como la distancia; escríbase por V la distancia PE y en lugar de PE^2 escríbase 2PS x LD, y DN será como $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2LD}$. Supóngase a DN igual a su doble $2SL - LD - \frac{ALB}{LD}$; y transportando a lo largo de la longitud AB la parte dada de la ordenada 2SL describirá el área rectangular 2SL x AB; mientras la parte indefinida LD, transportada normalmente por la misma longitud, con un movimiento continuo tal que al moverse crezca o decrezca para permanecer siempre igual a la longitud LD, describirá el área $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, esto es, el área SL x AB; la cual restada del área anterior 2SL x AB deja el área SL x AB. Y la tercera parte $\frac{ALB}{LD}$, transportada también con un movimiento local normal sobre la misma longitud, describirá un área hiperbólica; la cual, restada del área SL x AB dejará el área buscada ANB. De donde surge la construcción siguiente del problema. Elévense por los puntos L, A, B, las

perpendiculares L*l*, A*a*, B*b*, haciendo que A*a* sea igual a LB y B*b* igual a LA. Siendo asíntotas L*l*, LB, trácese por los puntos *a*, *b*, la hipérbola *ab*. Y trazada la cuerda *ba* cerrará el área *aba* igual al área buscada ANB.



EJEMPLO 2. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera fuere inversamente como el cubo de la distancia, o (lo que es igual) como dicho cubo dividido por un plano dado; escríbase $\frac{PE^2}{2AS^2}$ en lugar de V, ya también 2PS x LD en lugar de PE^2, y DM será como $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{ALB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, esto es (por la proporcionalidad continua de PS, AS, SI) como $\frac{LSI}{LD}$ - ½SI - $\frac{ALB \times SI}{2LD^2}$. Si se llevan estas tres partes sobre la longitud AB, la primera de ellas $\frac{LSI}{LD}$ generará un área hiperbólica; la segunda ½SI el área ½AB x SI; la tercera $\frac{ALB \times SI}{2LD^2}$ el área $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, esto es, ½AB x SI. Réstese de la primera suma de la segunda y la tercera y quedará el área buscada ANB. De donde la construcción del problema resulta como sigue. Por los puntos L, A, S, B, elévense las perpendiculares L*l*, A*a*, S*s*, B*b*, de las cuales S*s* sea igual a SI y por el punto *s* con las asíntotas L*l*, LB, trácese la hipérbola *asb* que encuentre a las perpendiculares A*a* y B*b* en *a* y *b*; y restando el rectángulo 2ASI del área hiperbólica A*asb*B quedará el área buscada ANB.



EJEMPLO 3. Si la fuerza centrípeta tendente hacia cada partícula de la esfera decrece como la cuarta potencia de la distancia de las partículas, escríbase $\frac{PE^4}{2AS^3}$ en lugar de V, después $\sqrt{(2PS \times LD)}$ en lugar de PE, y DN vendrá a ser como $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD^5}}$; y al llevar estas tres partes sobre la longitud AB producen otras tantas áreas, a saber: $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right)$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}}$ en $(\sqrt{LB} - \sqrt{LA})$; y $\frac{SI^2 \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{LA^3}} - \frac{1}{\sqrt{LB^3}}\right)$. Y tras la reducción debida dan $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$, SI^2, y $SI^2 + \frac{2SI^3}{3LI}$. De estas, a su vez, después de resta las últimas de la primera, resulta $\frac{4SI^3}{3LI}$. Por tanto la fuerza total con la cual el corpúsculo P es atraído hacia el centro de la esfera es como $\frac{SI^3}{PI}$ esto es, como el inverso de $PS^3 \times PI$. Q. E. I.

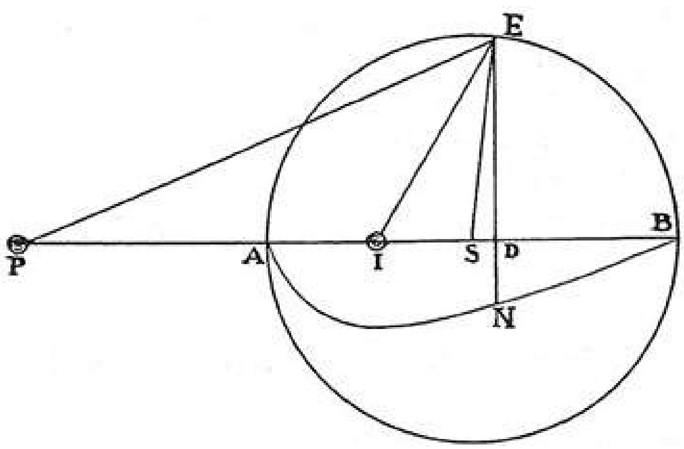
Con el mismo método podemos determinar la atracción de un corpúsculo ubicado dentro de la esfera, pero es más directo por el Teorema siguiente.

PROPOSICIÓN LXXXII. TEOREMA XLI

En una esfera descrita con centro en S y radio SA, si se toman SI, SA, SP, continuamente proporcionales: digo que la atracción de un corpúsculo dentro de la *esfera en un lugar cualquiera I es a la atracción del mismo juera de la esfera en el lugar P en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón de las distancias al centro IS, PS, y de la raíz cuadrada de la razón de las fuerzas centrípetas tendentes al centro en dichos lugares P, I.*

Puesto que si las fuerzas centrípetas de las partículas de la esfera fuesen inversamente como la distancia al corpúsculo atraído por ellas, la fuerza, con la cual el corpúsculo situado en I es atraído por toda la esfera, será a la fuerza con la cual es atraído en P, en razón compuesta de la raíz cuadrada de la razón de las distancias SI a SP, y de la raíz cuadrada de la razón de la fuerza centrípeta en el lugar I de una partícula que la produce desde el centro, respecto a la fuerza centrípeta en P generada también por la misma partícula desde el centro, esto es, inversamente como la raíz cuadrada de las distancias respectivas SI, SP. Estas dos razones de ralees cuadradas componen razón de igualdad, y por tanto, las atracciones en I y P producidas por toda la esfera son iguales. Con un cálculo similar se encontrará que, si las fuerzas de las partículas de la esfera son inversamente como el cuadrado de la razón de las distancias, la atracción en I es a la atracción en P como la distancia SP al semidiámetro SA de la esfera; si dichas fuerzas son inversamente como la razón cúbica de las distancias, las atracciones en I y P serán entre sí como SP^2 a SA^2; si fuesen como la cuarta potencia, como SP^3 a SA^3. Por tanto, como la atracción en P, en este último caso, resulta ser inversamente como PS^3 x PI, la atracción en I será inversamente como SA^3 x PI, esto es (por estar dado SA^3) inversamente como PI. Y así sucesivamente hasta el infinito. El teorema, pues, se demuestra así:

Manteniendo las construcciones anteriores, y existiendo un corpúsculo en un lugar cualquiera P, la ordenada DN resultó ser como $\frac{DE^2 \text{ x } PS}{PE \text{ x } V}$. Luego si se traza IE, ordenada para otro lugar I del corpúsculo, «*mutatis mutandis*», resultará ser como $\frac{DE^2 \text{ x } IS}{IE \text{ x } V}$.

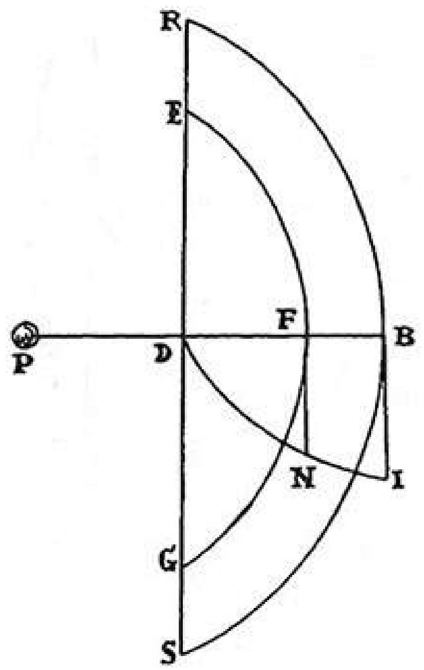


Supóngase que las fuerzas centrípetas procedentes de un punto E cualquiera de la esfera son entre sí a las distancias IE y PE como PE^n a IE^n (donde *n* representa la potencia de PE y de IE) y dichas ordenadas resultarán como $\frac{DE^2 \text{ x } PS}{PE \text{ x } PE^n}$ y $\frac{DE^2 \text{ x } IS}{IE \text{ x } IE^n}$, cuya razón mutua es como PS x IE x IE^n a IS x PE x PE^n. Por ser SI, SE, SP, continuamente proporcionales, los triángulos SPE, SEI, son semejantes, y por ello IE es a PE como IS a SE o SA; en lugar de la razón IE a PE escríbase la razón IS a SA; y la razón de las ordenadas resultará ser PS x IE^n a SA x PE^n. Pero la razón de PS a la raíz cuadrada de SA es la razón de las distancias PS, SI; y la razón de IE^n a la raíz cuadrada de PE^n (por ser IE a PE como IS a SA) es la razón de las fuerzas para las distancias PS, IS. Luego las ordenadas, y las áreas que describen las ordenadas, y las atracciones proporcionales a éstas, están en razón compuesta de las raíces cuadradas de aquellas razones. Q. E. D.

Proposición LXXXIII. Problema XLII

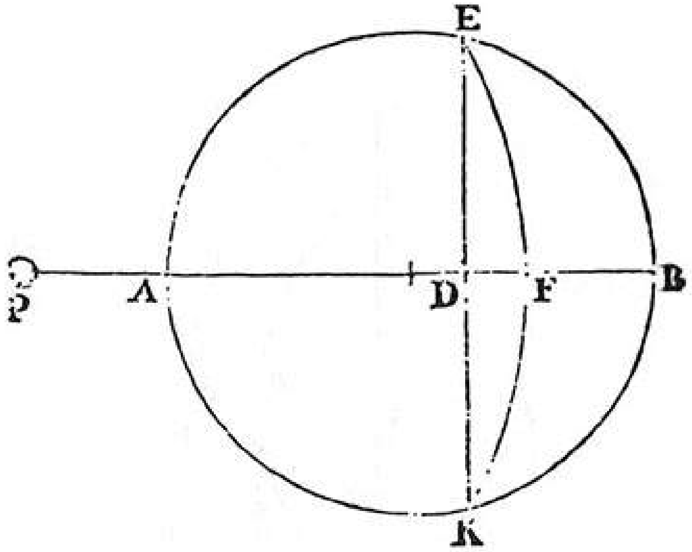
Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado en el centro de una esfera es atraído hacia cualquier segmento de la misma.

Sea P un cuerpo en el centro de la esfera y RBSD el sector de la misma contenido entre el plano RDS y la superficie esférica RBS. Con la superficie esférica EFG descrita con centro en P córtese DB en F, y distínganse las dos partes del sector BREFGS y FEDG. Sea dicha superficie no algo puramente matemático, sino físico, que tiene una profundidad mínima. Llámese a esta profundidad O, y esta superficie será (por las demostraciones de Arquímedes) como PF x DF x O. Supongamos además que las fuerzas atractivas de las partículas de la esfera son inversamente como la potencia de las distancias de índice *n*; y la fuerza con la cual la superficie EFG atrae al cuerpo P será (por la Proposición LXXIX) como $\frac{DE^2 \text{ x } O}{PF^n}$, esto es, como $\frac{2DF \text{ x } O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \text{ x } O}{PF^n}$. Sea la perpendicular FN multiplicada por O proporcional a esta cantidad; y el área curvilínea BDI, descrita por la ordenada FN al ser aplicada sobre la longitud DB con un movimiento continuo, será como la fuerza total con la cual el segmento completo RBSD atrae al cuerpo P. Q. E. I.



PROPOSICIÓN LXXXIV. PROBLEMA XLIII

Hallar la fuerza con la cual un corpúsculo situado sobre el eje de cualquier segmento de una esfera y fuera del centro de la misma es atraído por dicho segmento.



Atraiga el segmento EBK al corpúsculo P situado sobre su eje ADB. Con centro en P y distancia PE descríbase la superficie esférica EFK mediante la cual se segregan las dos partes del segmento EBKFE y EFKDE. Hállese la fuerza de la parte primera por la Proposición LXXXI y la fuerza de la segunda por la Proposición LXXXIII; y la suma de las fuerzas será la fuerza del segmento completo EDKDE. Q. E. I.

Escolio

Explicadas las atracciones de los cuerpos esféricos, es ya hora de pasar a las leyes de las atracciones de otros cuerpos que constan también de partículas atractivas; pero tratarlas minuciosamente es menos necesario para mi propósito. Será suficiente, por su escaso uso en temas filosóficos, añadir algunas Proposiciones más generales sobre las fuerzas de tales cuerpos y de los movimientos resultantes.

Sección XIII
SOBRE LAS FUERZAS ATRACTIVAS DE CUERPOS NO ESFÉRICOS

Proposición LXXXV. Teorema XLII

Si la atracción padecida por un cuerpo es mucho mayor cuando está contiguo al atrayente que cuando están separados aunque sea por un intervalo mínimo; las fuerzas de las partículas del cuerpo atrayente decrecen al separarse del cuerpo atraído en razón mayor que el cuadrado de las distancias de las partículas.

Pues si las fuerzas decrecen en razón del cuadrado de las distancias de las partículas, la atracción hacia un cuerpo esférico, dado que (por la Proposición LXXIV) es inversamente como el cuadrado de la distancia al cuerpo atraído desde el centro de la esfera, no aumentará sensiblemente por el contacto; y todavía aumentará menos por el contacto si la atracción decrece en una proporción menor al retroceder el cuerpo atraído. La Proposición resulta, pues, evidente tratándose de esferas atractivas. Y lo mismo ocurre con orbes esféricos cóncavos que atraen a cuerpos externos. Y todavía es más claro para orbes que atraen a cuerpos ubicados en su interior, dado que las atracciones difundidas por las cavidades de los orbes en todas direcciones son (por la Proposición LXX) destruidas por las atracciones contrarias, y por ello son nulas hasta en el mismo contacto. Pero si de estas esferas y orbes esféricos se suprimen partes cualesquiera distantes del lugar de contacto y se añaden partes nuevas en otros lugares, pueden cambiarse a voluntad las figuras de los cuerpos atractivos, sin que las partes suprimidas o añadidas, al estar alejadas del lugar de contacto, aumenten notablemente el exceso de atracción que procede del contacto. Por tanto la Proposición se mantiene para cuerpos de cualesquiera figuras. Q. E. D.

Proposición LXXXVI. Teorema XLIII

Si las fuerzas de las partículas de que consta un cuerpo atractivo decrecen, al alejarse el cuerpo atraído, en razón cúbica o mayor de la distancia de las partículas, la atracción en el lugar de contacto será mucho mayor que cuando los cuerpos *atrayente y atraído se hallan separados por un intervalo aunque sea mínimo.*

Pues, que la atracción aumenta hasta el infinito cuando el corpúsculo atraído se aproxima a una esfera atractiva de este tipo consta por la solución al Problema XLI, mostrada en los ejemplos segundo y tercero. Lo mismo se infiere fácilmente a partir de dichos ejemplos comparados con el Teorema XLI para el caso de las atracciones de cuerpos hacia orbes cóncavo-convexos, tanto si los cuerpos atraídos se sitúan fuera como dentro de dichas cavidades. Y añadiendo o quitando a estas esferas y orbes por doquier menos en el lugar de contacto cuanta materia atractiva se precise hasta que adquieran la figura requerida, la Proposición se mantendrá para todos los cuerpos. Q. E. D.

PROPOSICIÓN LXXXVII. TEOREMA XLIV

Si dos cuerpos entre sí semejantes que constan de materia igualmente atractiva atraen cada uno a un corpúsculo que le es proporcional y está ubicado respecto a ellos de modo semejante, las atracciones aceleratrices de los corpúsculos hacia los cuerpos enteros serán como las atracciones aceleratrices de los corpúsculos hacia partículas de aquellos cuerpos proporcionales a los todos y ubicados semejantemente en los todos.

Pues, si los cuerpos se dividen en partículas que sean proporcionales a los todos y ubicadas semejantemente en los todos, la atracción hacia una partícula cualquiera de un cuerpo será a la atracción hacia la correspondiente partícula del otro cuerpo como las atracciones hacia cada partícula del primer cuerpo son a las atracciones hacia cada partícula correspondiente del otro; y componiendo, también es así la atracción hacia todo el primer cuerpo respecto a la atracción hacia todo el segundo. Q. E. D.

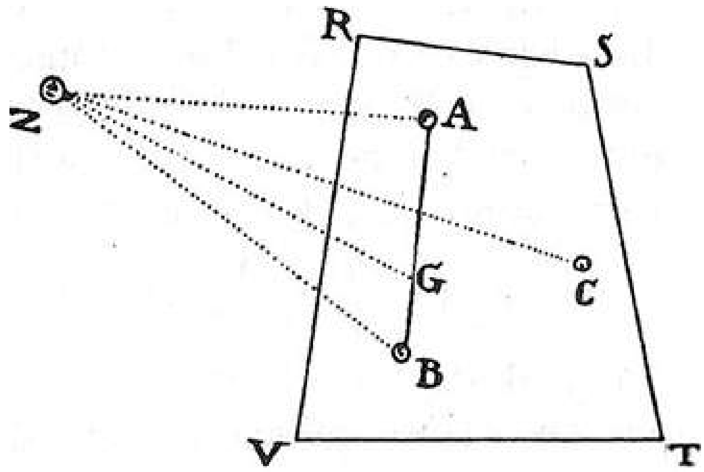
COROLARIO 1. Luego si las fuerzas atractivas de las partículas, al aumentar las distancias de los corpúsculos atraídos, decreciesen en razón de alguna potencia de las distancias, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos enteros serán directamente como los cuerpos e inversamente como las dichas potencias de las distancias. Y si las fuerzas de las partículas decrecen en razón del cuadrado de las distancias respecto a los corpúsculos atraídos, y los cuerpos son como A^3 y B^3 y por ello tanto los lados cúbicos de los cuerpos como las distancias de los corpúsculos atraídos hasta los cuerpos son como A y B, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^2}$ y $\frac{B^3}{B^3}$, esto es, como los lados cúbicos aquellos A y B de los cuerpos. Si las fuerzas de las partículas decrecen en razón cúbica de las distancias a los corpúsculos atraídos, las atracciones aceleratrices hacia los cuerpos completos serán como $\frac{A^3}{A^3}$ y $\frac{B^3}{B^3}$, esto es, iguales. Si las fuerzas decrecen en razón de la cuarta potencia, las atracciones hacia los cuerpos serán como $\frac{A^3}{A^4}$ y $\frac{B^3}{B^4}$, esto es, inversamente como los lados cúbicos A y B. Y así para los demás.

COROLARIO 2. De donde, a la inversa, de las fuerzas con las cuales cuerpos semejantes atraen a corpúsculos ubicados semejantemente respecto a ellos, se puede inferir la razón del decremento de las fuerzas atractivas de las partículas al alejarse el corpúsculo atraído, siempre que dicho decremento se halle en alguna razón directa o inversa respecto a las distancias.

PROPOSICIÓN LXXXVIII. TEOREMA XLV

Si las fuerzas atractivas de partículas iguales de un cuerpo cualquiera fuesen como las distancias de los lugares a las partículas, la fuerza del cuerpo entero tenderá hacia su centro de gravedad; y será la misma que la de un globo que constase de materia semejante e igual, y que tuviese su centro en el centro de gravedad.

Las partículas A, B, del cuerpo RSTV atraen a un corpúsculo cualquiera Z con fuerzas que, si las partículas son iguales entre sí, son como las distancias AZ, BZ; y si son desiguales, serán como dichas partículas y sus distancias AZ, BZ, conjuntamente, o también (por así decirlo) como dichas partículas multiplicadas respectivamente por sus distancias AZ, BZ. Expresemos estas fuerzas mediante dichos productos, A x AZ y B x BZ. Únase AB y córtesela en G de tal modo que AG sea a BG como la partícula B es a la partícula A; y G será el centro común de gravedad de las partículas A y B. La fuerza A x AZ (por el Corolario II de las Leyes) se descompondrá en las fuerzas A x GZ y A x AG, mientras la fuerza B x BZ se descompondrá en B x GZ y B x BG. Pero las fuerzas A x AG y B x BG, al ser proporcionales A respecto a B y BG respecto a AG, son iguales; y como tienen direcciones contrarias se anulan mutuamente. Quedan las fuerzas A x GZ y B x GZ. Estas tienden desde Z hacia el centro G y componen la fuerza (A + B) x GZ; esto es, la misma fuerza que si las partículas atractivas A, B, estuviesen ubicadas en su centro común de gravedad G, formando allí un globo.



Por el mismo argumento, si se añade una tercera partícula C, y se compone su fuerza con la fuerza (A + B) x GZ tendente hacia el centro G; la fuerza resultante de ello tenderá al centro común de gravedad de dicho globo en G y de la partícula C; esto es, hacia el común centro de gravedad de las tres partículas A, B, C; y será la misma que si el globo y la partícula C se hallasen en dicho centro común, formando allí un globo mayor. Y así se puede seguir hasta el infinito. Por lo mismo, la fuerza total de todas las partículas de un cuerpo cualquiera RSTV es la misma que si dicho cuerpo, manteniendo el centro de gravedad, tomase la forma de un globo. Q. E. D.

COROLARIO. De aquí que el movimiento del cuerpo atraído Z será el mismo que si el cuerpo atrayente RSTV fuese esférico; y por tanto lo mismo si el cuerpo atrayente reposa como si se mueve uniformemente en línea recta, el cuerpo atraído se moverá en una elipse que tiene su centro en el centro de gravedad del cuerpo atrayente.

PROPOSICIÓN LXXXIX. TEOREMA XLVI

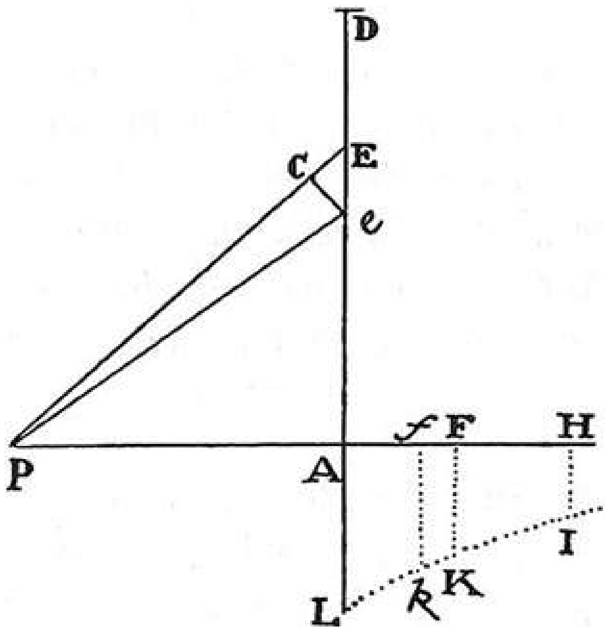
Si se tienen varios cuerpos que constan de partículas iguales, cuyas fuerzas son como las distancias de los lugares hasta cada uno: la fuerza compuesta de todas las fuerzas con la cual es atraído un corpúsculo cualquiera tenderá al centro común de gravedad de los atrayentes; y será la misma que si dichos cuerpos atrayentes, manteniendo el mismo centro común de gravedad, se reuniesen y formasen un globo.

Se demuestra de igual modo que la Proposición anterior.

COROLARIO. Por tanto, el movimiento del cuerpo atraído será el mismo que si los cuerpos atrayentes, manteniendo el centro común de gravedad, se reuniesen y formasen un globo. Y, por lo mismo, si el centro común de gravedad de los cuerpos atrayentes reposa o progresa uniformemente en línea recta, el cuerpo atraído se moverá en una elipse cuyo centro está en el centro común de gravedad de los cuerpos atrayentes.

Si hacia cada punto de un círculo cualquiera tienden fuerzas centrípetas iguales, crecientes o decrecientes según alguna razón de las distancias, hállese la fuerza con la que es atraído un corpúsculo situado en un punto cualquiera de una recta levantada perpendicularmente desde el plano del círculo y en su punto central.

Imagínese un círculo descrito con centro en A y un radio cualquiera AD en un plano al que es perpendicular la recta AP; y hay que hallar la fuerza con la cual es atraído hacia él un corpúsculo cualquiera P. Desde un punto cualquiera del círculo, tal como E, trácese hasta el corpúsculo la recta PE. Sobre la recta PA tómese PF igual a PE y elévese la normal FK, que sea como la fuerza con la que el punto E atrae al corpúsculo P y sea IKL una línea curva a la que el punto K es continuamente tangente. Y toque ésta al plano del círculo en L. Sobre PA tómese PH igual a PD, y elévese la perpendicular HI que se encuentra con la curva antedicha en I; y la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como el área AHIL multiplicada por la altura AP. Q. E. I.



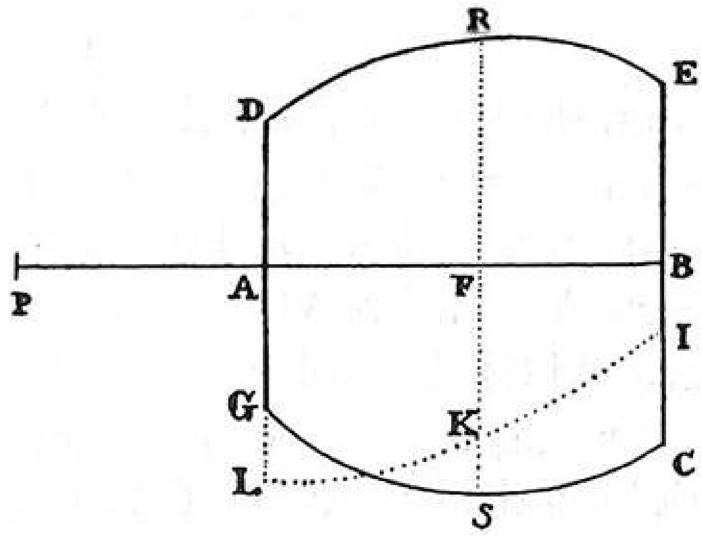
Efectivamente, tómese sobre AE el segmento mínimo E*e*. Únase P*e*, y sobre PE, PA, tómense PC, P*f*, iguales a P*e*. Y puesto que la fuerza con la cual un punto cualquiera E del anillo descrito con centro en A y radio AE sobre el plano antedicho atrae hacia sí al cuerpo P supongamos que es como FK, y por tanto la fuerza con la que el dicho punto atrae al cuerpo P hacia A es como $\frac{AP \times FK}{PE}$, y la fuerza con la cual el anillo completo atrae al cuerpo P hacia A es como el anillo y $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjuntamente; pero dicho anillo es como el rectángulo comprendido bajo el radio AE y la anchura E*e*, y este rectángulo (por la proporcionalidad de PE y AE, E*e* y CE) es igual al rectángulo PE x CE o PE x F*f*; la fuerza con la cual este anillo atraerá al cuerpo P hacia A será como PE x F*f* y $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjuntamente, esto es, como el contenido bajo F*f* x FK x AP, o también como el área FK*kf* multiplicada por AP. Y por tanto la suma de las fuerzas con las cuales todos los anillos sobre el círculo que se describe con centro en A y radio AD, atraen al cuerpo P hacia A es como toda el área AHIKL multiplicada por AP. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que si las fuerzas de los puntos decrecen en razón del cuadrado de las distancias, esto es, si FK se hace como $\frac{1}{PF^2}$ y por lo mismo el área AHIKL como $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; la atracción del corpúsculo P hacia el círculo será como $1 - \frac{PA}{PH}$, esto es, como $\frac{AH}{PH}$.

COROLARIO 2. Y, en general, si las fuerzas de los puntos a las distancias D fuesen inversamente como una potencia cualquiera D^n de las distancias; esto es, si FK fuese como $\frac{1}{D^n}$, y por tanto el área AHIKL como $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$, la atracción del corpúsculo P hacia el círculo sera como $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

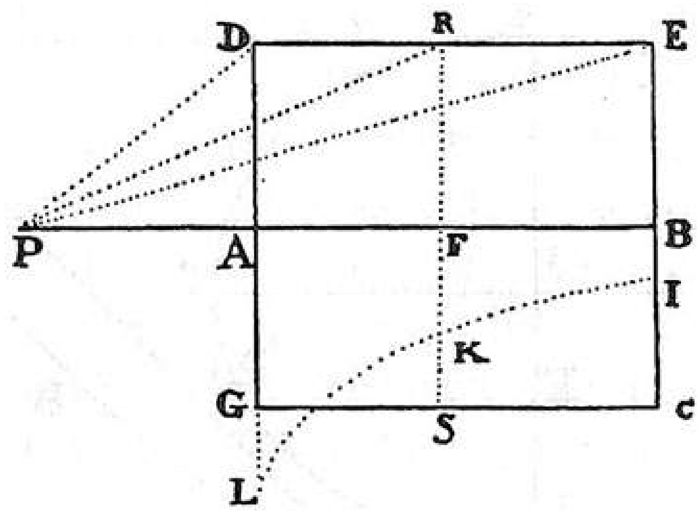
COROLARIO 3. Y si el diámetro del círculo se aumentase hasta el infinito y el número *n* es mayor que la unidad, la atracción del corpúsculo P hacia el plano entero infinito será inversamente como PA^{n-2}, ya que el otro termino $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ se desvanece.

PROPOSICIÓN XCI. PROBLEMA XLV



Hallar la atracción de un corpúsculo situado en el eje de un sólido redondo, hacia cada uno de cuyos puntos tienden fuerzas centrípetas iguales y decrecientes según una razón cualquiera de las distancias.

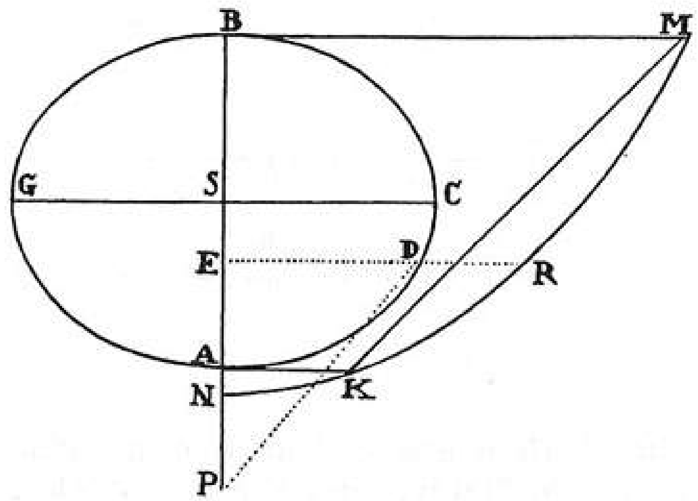
El corpúsculo P sea atraído hacia el sólido DECG y esté situado sobre su eje AB. Córtese el sólido con un círculo cualquiera RFS perpendicular a dicho eje, y en su semidiámetro FS, sobre un plano cualquiera PALKB que pasa por el eje, tómese (por la Proposición XC) la longitud FK proporcional a la fuerza con la que el corpúsculo P es atraído hacia dicho círculo. Sea el punto K tangente a la línea curva LKI que se encuentra con los planos más exteriores de los círculos AL y BI en L e I; y la atracción del corpúsculo P hacia el sólido será como el área LABI. Q. E. I.



COROLARIO 1. De donde, si el sólido es un cilindro descrito por el paralelogramo ADEB al girar sobre su eje AB, y las fuerzas centrípetas tendentes hacia cada uno de sus puntos fuesen inversamente como los cuadrados de las distancias hasta los puntos; la atracción del corpúsculo P hacia dicho cilindro será como AB - PE + PD.

Ya que la ordenada FK (por el Corolario 1 de la Proposición XC) será como $1 - \frac{PF}{PR}$. El miembro 1 de esta cantidad multiplicado por la longitud AB describe el área 1 x AB: y el otro miembro $\frac{PF}{PR}$ multiplicado por la longitud PB describe el área 1 x (PE - AD) (fácil de mostrar a partir de la cuadratura de la curva LKI); y de modo similar, aquel mismo miembro multiplicado por la longitud PA describe el área 1 x (PD - AD) y multiplicado por AB, que es la diferencia entre PB, PA, describe la diferencia de las áreas 1 x (PE - PD). Réstese del primer valor 1 x AB el del último 1 x (PE - PD) y el resto será el área LABI igual a 1 x (AB - PE + PD). Luego la fuerza proporcional a esta área es como AB - PE + PD.

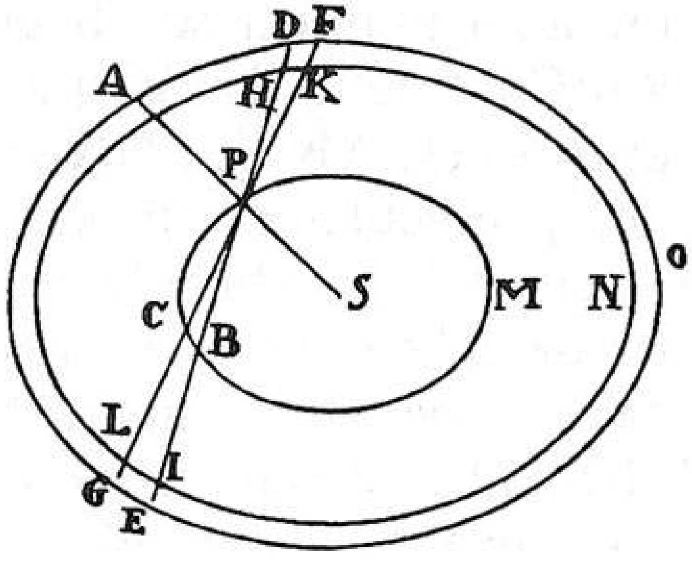
COROLARIO 2. De aquí también se obtiene la fuerza con la cual el esferoide AGBC atrae a un corpúsculo cualquiera P situado externamente en su eje AB. Sea NKRM la sección cónica cuya ordenada ER, perpendicular a PE, sea siempre igual a la longitud PD que se traza hasta el punto D en el cual la susodicha ordenada corta al esferoide. Desde los vértices del esferoide A, B, elévense, perpendiculares al eje AB, las líneas AK, BM, respectivamente iguales a AP, BP, que, por tanto, encontrarán a la sección cónica en K y M; y únanse KM, separando el segmento KMRK.



Sea S el centro del esferoide y SC el semidiámetro máximo; y la fuerza con la cual el esferoide atrae al cuerpo P será a la fuerza con la cual atrae al mismo cuerpo una esfera descrita con diámetro AB como $\frac{AS \times CS^2 - PS \times KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ a $\frac{AS^3}{3PS^2}$. Y con la misma base de cálculo es posible hallar las fuerzas de los segmentos del esferoide.

COROLARIO 3. Y si el corpúsculo se colocase sobre el eje dentro del esferoide, la atracción será como su distancia al centro. Cosa que se infiere fácilmente con el argumento siguiente, tanto si la partícula se halla en el eje como en otro diámetro dado cualquiera. Sea AGOF el esferoide atrayente, S su centro y P el cuerpo atraído.

Trácese por dicho cuerpo P tanto el semidiámetro SPA como las dos rectas cualesquiera DE, FG, que cortan al esferoide a uno y otro lado en D y E, y F y G; y sean PCM, HLN, las superficies de dos esferoides interiores, semejantes y concéntricas de la exterior, de las cuales la primera pasa por el cuerpo P y corta a las rectas DE y FG en B y C y la segunda corta a las mismas rectas en H, I y K, L. Tengan todos los esferoides el eje común y serán las partes de las rectas interceptadas a uno y otro lado iguales entre sí, DP y BE, FP y CG, DH e IE, FK y LG: por cuanto que las rectas DE, PB y HI son bisecadas en el mismo punto, al igual que las rectas FG, PC y KL. Supóngase ahora que DPF, EPG, designan conos opuestos, descritos por los ángulos verticales infinitamente pequeños DPF, EPG, y que las líneas DH, El, son también infinitamente pequeñas; y las partículas de los conos DHKF y GLIE, separadas por las superficies de los esferoides, serán entre sí, debido a la igualdad de las líneas DH, El, como los cuadrados de sus distancias al cuerpo P, y por ello atraerán igualmente a dicho corpúsculo. Y por la misma razón, si los espacios DPF, EGCB, se dividen en partículas mediante las superficies de innumerables esferoides semejantes, concéntricos y con eje común, todas ellas a ambos lados atraerán igualmente al cuerpo P en sentidos contrarios. Por tanto, las fuerzas del cono DPF y las del segmento cónico EGCB son iguales, y por ser contrarias se destruyen mutuamente. Y lo mismo ocurre con las fuerzas de toda materia exterior al esferoide más interior PCBM. En consecuencia, el cuerpo P es atraído únicamente por el esferoide interior PCBM, y por ello (por el Corolario 3 de la Proposición LXXII) su atracción es a la fuerza con la que el cuerpo A es atraído por el esferoide total AGOD, como la distancia PS a la distancia AS. Q. E. D.



PROPOSICIÓN XCII. PROBLEMA XLVI

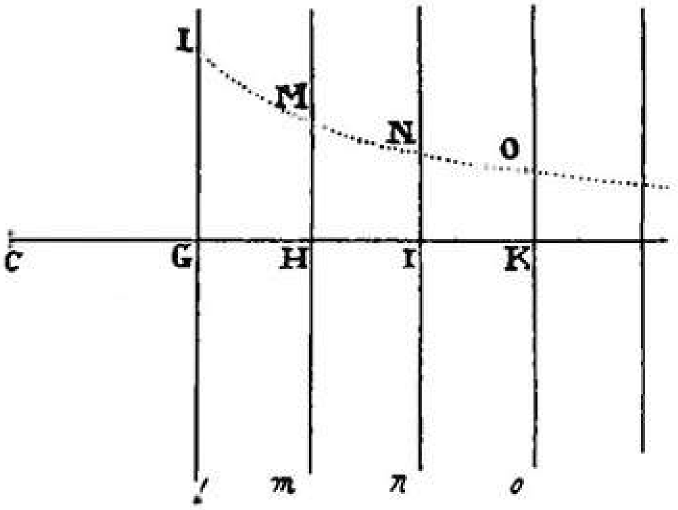
Dado un cuerpo atrayente, hallar la razón del decrecimiento de las fuerzas centrípetas tendentes hacia cada uno de sus puntos.

Del cuerpo dado hay que obtener una esfera o un cilindro u otra figura regular cualquiera cuya ley de atracción concuerde con alguna razón de decrecimiento calculable (por las Proposiciones LXXX, LXXXI y XCI). Después, mediante experimentos hay que hallar la fuerza de atracción a distintas distancias, y descubierta así la ley de la atracción hacia el todo, permitirá hallar la razón del decrecimiento de las fuerzas de cada parte, que era preciso hallar.

Proposición XCIII. Teorema XLVII

Si un sólido, plano por un lado e infinito por todos los demás, constase de partículas iguales e igualmente atrayentes, cuyas fuerzas al alejarse del sólido decrecen en razón de una potencia de las distancias mayor que el cuadrado de las mismas, y un corpúsculo situado a una u otra parte del plano es atraído por la fuerza del sólido entero; digo que la tal fuerza atractiva del sólido, al alejarse de su superficie plana, decrece en razón de una potencia cuya base es la distancia del corpúsculo al plano y su índice es 3 unidades menos que el índice de la potencia de las distancias.

Caso 1. Sea LG*l* el plano en que termina el sólido. Extiéndase éste hacia el lado del plano que mira hacia I, y descompóngase en innumerables planos *m*HM, *nl*N, *o*KO, etc., paralelos a GL. Y colóquese primero el cuerpo atraído C fuera del plano. Trácese CGHI perpendicular a esos innumerables planos, y decrezcan las fuerzas atractivas de los puntos del sólido en razón de una potencia de las distancias, cuyo índice n no sea menor que 3. Entonces (por el Corolario 3 de la Proposición XC) la fuerza con la que cualquier plano *m*HM atrae al punto C es inversamente como CH^{n-2}. Sobre el plano *m*HM tómese la longitud HM, inversamente proporcional a CH^{n-2}, y dicha fuerza será como HM. E igualmente para cada plano *l*GL, *n*IN, o KO, etc., tómense longitudes GL, IN, KO, etc., inversamente proporcionales a CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, etc.; y las fuerzas de tales planos serán como las longitudes tomadas, y por lo mismo la suma de las fuerzas como la suma de las longitudes, esto es, la fuerza del sólido entero como el área GLOK prolongada infinitamente hacia OK. Pero dicha área (por el conocido método de las cuadraturas) es inversamente como CG^{n-3}, y por tanto la fuerza del cuerpo entero es inversamente como CG^{n-3}. Q. E. D.



CASO 2. Ahora colóquese el corpúsculo C al otro lado del plano *l*GL dentro del sólido, y tómese la distancia CK igual a la distancia CG. Y la parte del sólido *l*GL*o*KO, delimitada por los planos paralelos *l*GL, o KO, no atraerá hacia ninguna parte al corpúsculo C, al estar situado en el medio, por cuanto que las acciones contrarias de los puntos opuestos se anulan en razón de su igualdad. Por lo cual el corpúsculo C será atraído por la sola fuerza del sólido que se halla más allá del plano OK. Pero esta fuerza (por el Caso 1) es inversamente como CK^{n-3}, esto es (por ser iguales CG y CK) inversamente como CG^{n-3}. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que si el sólido LGIN estuviese delimitado a cada lado por dos planos paralelos infinitos LG, IN, su fuerza atractiva resulta de restar de la fuerza atractiva de todo el sólido infinito LGKO la fuerza atractiva de la parte posterior NIKO prolongada infinitamente hacia KO.

COROLARIO 2. Si se despreciase la parte posterior de este sólido infinito, porque, al compararla con la atracción de la parte anterior, su atracción es insignificante, la atracción de dicha parte anterior decrecerá, al aumentar las distancias, en una razón muy próxima de la potencia CG^{n-3}.

COROLARIO 3. Y de aquí que, si un cuerpo finito y plano por un lado atrae a un corpúsculo desde la región media de dicho plano y la distancia entre el corpúsculo y el plano fuese muy pequeña comparada con las dimensiones del cuerpo atrayente, y éste constase de partículas homogéneas cuyas fuerzas atractivas decrecen en razón de alguna potencia de las distancias mayor que la cuarta; la fuerza atractiva del cuerpo entero decrecerá muy aproximadamente en razón de una potencia cuya base es aquella distancia muy pequeña y el índice 3 unidades menor que el índice de la potencia anterior. La afirmación no vale para un cuerpo compuesto de partículas cuyas fuerzas atractivas decrezcan en razón del cubo de las distancias; por cuanto que, en tal caso, la atracción de la parte posterior del cuerpo infinito del Corolario segundo es siempre infinitamente mayor que la atracción de la parte anterior.

Escolio

Si un cuerpo cualquiera es atraído perpendicularmente hacia un plano dado y, a partir de una ley de atracción dada, se pide el movimiento del cuerpo, el problema se resuelve buscando (por la Proposición XXXIX) el movimiento del cuerpo descendiendo en línea recta hacia ese plano, y (por el Corolario II de las [*Leyes*]) componiendo dicho movimiento con un movimiento uniforme, realizado según líneas paralelas a dicho plano. Y viceversa, si se busca la ley de atracción hacia un plano según líneas paralelas y con la condición de que el cuerpo atraído se mueva en una línea curva cualquiera dada, el problema se resuelve operando al modo del Problema tercero.

Pero las operaciones pueden reducirse descomponiendo las ordenadas en series convergentes. Así, si a una base A se aplica con un ángulo dado la longitud ordenada B, que sea como una potencia cualquiera de la base $A^{m/n}$; y se busca la fuerza con la cual un cuerpo, tanto si es atraído como repelido respecto a la base según la posición de la ordenada, puede moverse en una línea curva a la que siempre toca la ordenada con su extremo superior: supongo que la base aumenta en una parte mínima O, y descompongo la ordenada $(A + O)^{m/n}$ en la serie infinita:

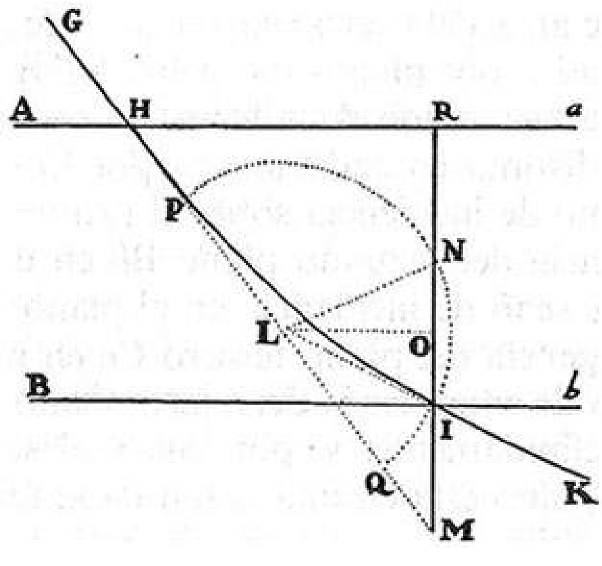
$$A^{m/n} + \frac{m}{n} OA^{m-n/n} + \frac{mm - mn}{2nn} OOA^{m-2n/n}, \text{ etc.},$$

y supongo que la fuerza es proporcional al término en que O tiene dos dimensiones, esto es, al termino $\frac{mm - mn}{2nn} OOA \frac{m - 2n}{2n}$. La fuerza buscada es, pues, como $\frac{mm - mn}{nn} A^{m-2n/n}$ o, lo que es lo mismo, como $\frac{mm - mn}{nn} B^{m-2n/n}$. Y si la ordenada es tangente a una parábola, siendo $m = 2$ y $n = 1$ la fuerza será como 2Bº ya dado, y por tanto resultará dada. Por tanto, con una fuerza dada el cuerpo se moverá en una parábola como demostró Galileo. Y si la ordenada es tangente a una hipérbola, siendo $m = 0 - 1$ y $n = 1$, la fuerza será como $2A^{-3}$ o como $2B^3$; y por tanto con una fuerza que sea como el cubo de la ordenada el cuerpo se moverá en una hipérbola. Pero una vez dadas éstas, paso a otras Proposiciones sobre el movimiento que aún no he tocado[37].

Sección XIV
SOBRE EL MOVIMIENTO DE CUERPOS MÍNIMOS QUE SON SOMETIDOS A FUERZAS CENTRÍPETAS TENDENTES HACIA CADA PARTE DE OTRO CUERPO MUY GRANDE

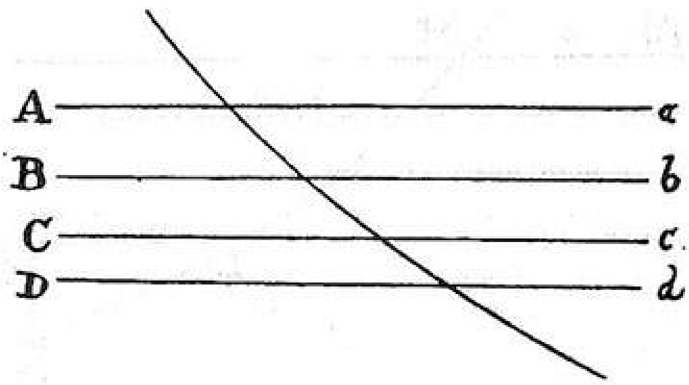
PROPOSICIÓN XCIV. TEOREMA XLVIII

Si dos medios semejantes se hallasen separados entre sí por un espacio delimitado a ambos lados por planos paralelos y un cuerpo al pasar por este espacio es atraído o impelido perpendicular mente hacia uno u otro medio sin ser ni agitado ni impedido por ninguna otra fuerza, y la atracción fuese la misma en todas partes a distancias iguales de uno y otro plano tomadas hacia la misma parte del mismo: digo que el seno de incidencia en uno u otro plano estará respecto al seno de emergencia del otro plano en una razón dada.



CASO 1. Sean A*a* y B*b* dos planos paralelos. Incida el cuerpo sobre el primer plano A*a* según la línea GH, y en todo su recorrido a través del espacio intermedio sea atraído o impelido hacia el medio de incidencia, y sea obligado por esa acción a describir la línea curva HI, y emerja según la línea IK. Elévese IM, perpendicular al plano de emergencia B*b*, y que se encuentre tanto con la prolongación de la línea de

incidencia en M como con el plano de incidencia A*a* en R; a su vez la línea de emergencia prolongada encuentre a HM en L. Con centro en L y radio LI trácese un círculo secante de HM en P y en Q, así como de la prolongación de MI en N; y, en primer lugar, si la atracción o el impulso se supone uniforme, la curva HI (por las demostraciones de Galileo) será una parábola que tiene la propiedad de que el rectángulo comprendido bajo un *latus rectum* dado y la línea IM es igual a HM^2; pero la línea HM será bisecada en L. De donde si se traza sobre MI la perpendicular LO, resultarán iguales MO y OR; y añadiéndoles las iguales ON, OI, los totales MN, IR, resultarán iguales. Por tanto, al estar dado IR, también está dado MN; y el rectángulo NMI es al rectángulo comprendido bajo el *latus rectum* y IM, esto es a HM^2, en una razón dada. Pero el rectángulo NMI es igual al rectángulo PMQ, esto es, a la diferencia de los cuadrados ML^2 y PL^2 o LI^2, y HM^2 guarda una razón dada con su cuarta parte ML^2: luego está dada la razón de ML^2 - LI^2 respecto a ML^2, y convirtiendo, la razón de LI^2 a ML^2 y la de la raíz cuadrada de LI a ML. Pero en todo triángulo LMI los senos de los ángulos son proporcionales a los lados opuestos. Luego se da la razón del seno del ángulo de incidencia LMR al seno del ángulo de emergencia LIR. Q. E. D.

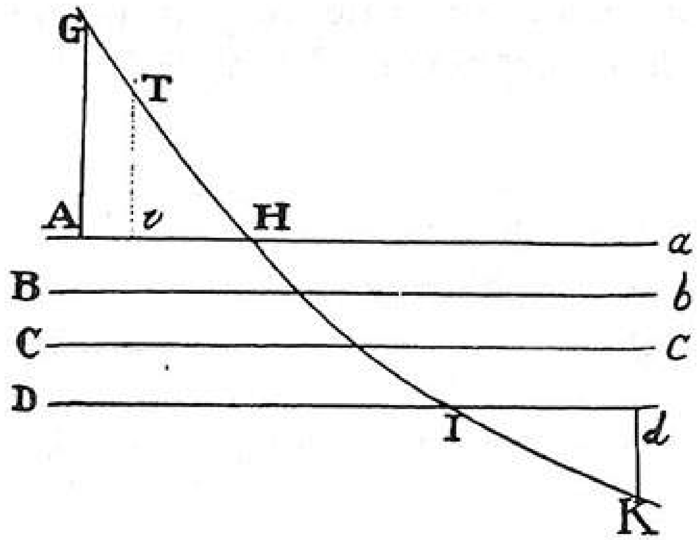


CASO 2. Pase ahora el cuerpo sucesivamente a través de varios espacios delimitados por planos paralelos A*ab*B, B*bc*C, etc., y sea afectado por una fuerza que es uniforme en cada uno de ellos por separado, pero distinta en cada uno; y por lo que acabamos de demostrar, el seno de incidencia sobre el primer plano A*a* será al seno de emergencia del segundo plano B*b* en una razón dada; y este seno, que es seno de incidencia en el plano segundo B*b*, será al seno de emergencia del plano tercero C*c* en una razón dada; y este seno al seno de emergencia del cuarto plano D*d* en una razón dada; y así indefinidamente: y, por tanto, el seno de incidencia sobre el primer plano está en una razón dada respecto al seno de emergencia del último plano. Disminúyanse ahora los intervalos entre los planos y auméntese su número hasta el infinito, para que la acción de atracción o impulso que obedezca a cualquier ley asignada se haga continua; y la razón del seno de incidencia sobre el primer plano respecto al seno de emergencia del último plano, al estar siempre dada, también ahora estará dada. Q. E. D.

PROPOSICIÓN XCV. TEOREMA XLIX

Con los mismos supuestos digo que la velocidad del cuerpo antes de su incidencia es a su velocidad después de la emergencia como el seno de emergencia al seno de incidencia.

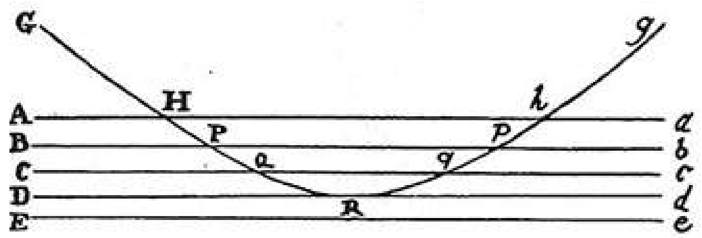
Tómense AH, Id, iguales y elévense las perpendiculares AG, *d*K, que corten a las líneas de incidencia y emergencia GH, IK en G y K. Sobre GH tómese TH igual a IK, y sobre el plano A*a* caiga la perpendicular T*v*. Y (por el Corolario II de las [*Leyes*]) descompóngase el movimiento del cuerpo en dos, uno perpendicular a los planos A*a*, B*b*, C*c*, etc., y el otro paralelo a ellos. La fuerza de atracción o de impulso actuando según las líneas perpendiculares en nada cambia al movimiento según las paralelas, y por tanto con ese movimiento el cuerpo recorre en tiempos iguales los intervalos iguales según las paralelas que están entre la línea AG y el punto H, y entre el punto I y la línea *d*K; esto es, en tiempos iguales describe las líneas GH, IK. Por tanto, la velocidad antes de la incidencia es a la velocidad después de la emergencia como GH a IK o TH, esto es, como AH o Id a *p*H, esto es (respecto al radio TH OIK) como el seno de emergencia al seno de incidencia. Q. E. D.



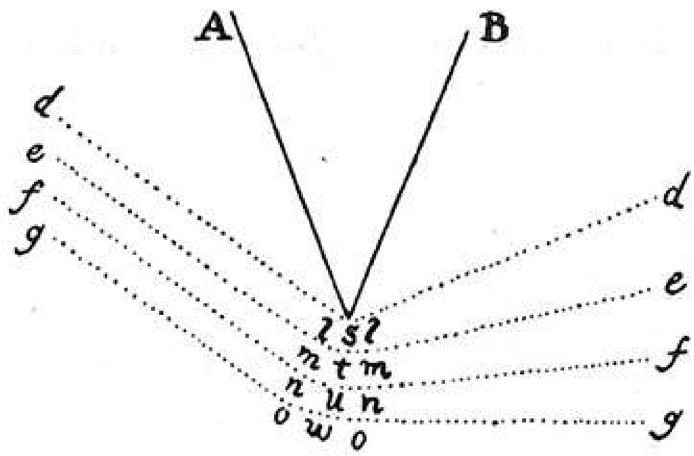
PROPOSICIÓN XCVI. TEOREMA L

Supuesto lo anterior y que el movimiento antes de la incidencia es más veloz que después: digo que el cuerpo, inclinando la línea de incidencia, acabará por ser reflejado, y el ángulo de reflexión será igual al de incidencia.

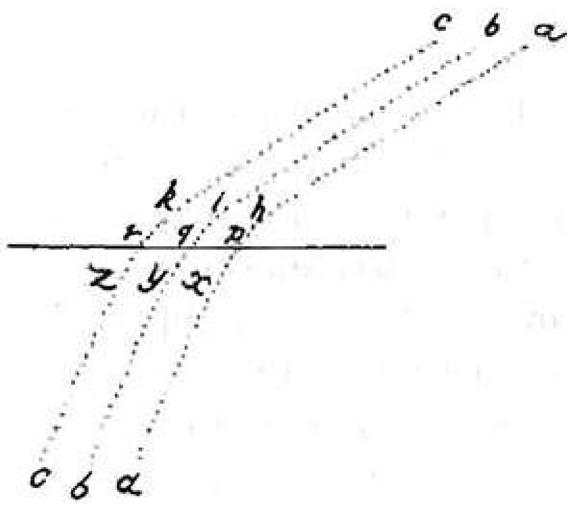
Pues imagínese el cuerpo describiendo arcos parabólicos al pasar entre los planos paralelos A*a*, B*b*, C*c*, etc., como antes; y sean tales arcos HP, PQ, QR, etc. Y la oblicuidad de la línea de incidencia GH sea tal respecto al primer plano A*a* que haga que el seno de incidencia sea al radio del círculo del que es seno en la misma razón en que se halla el propio seno de incidencia respecto al seno de emergencia del plano D*d* en el espacio D*de*E: al ser ahora el seno de emergencia igual al radio, el ángulo de emergencia será recto, y por tanto la línea de emergencia coincidirá con el plano D*d*. Alcance el cuerpo a este plano en el punto R; y puesto que la línea de emergencia coincide con dicho plano, es evidente que el cuerpo no puede pasar más allá hacia el plano E*e*. Pero tampoco puede proseguir por la línea de emergencia R*d*, ya que es atraído o impelido continuamente hacia el medio de incidencia. Regresará, por tanto, entre los planos C*c*, D*d*, describiendo el arco de parábola QR*q*, cuyo vértice principal (como demostró GALILEO) está en R; cortará al plano C*c* con el mismo ángulo en *q* que antes en Q; después, continuando por los arcos parabólicos *qp*, *ph*, etc., semejantes e iguales a los primeros QP, PH, cortará a los demás planos con los mismos ángulos en *p*, *h*, etc., que antes en P, H, etc., y por fin emergerá en *h* con la misma oblicuidad con que incidió en H. Imagínese ahora que los intervalos de los planos A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., se reducen y su número aumenta infinitamente, de modo que la atracción o impulso aplicados según una ley cualquiera determinada resulten continuos; y al permanecer siempre iguales el ángulo de emergencia y el ángulo de incidencia, también aquí lo seguirán siendo. Q. E. D.



ESCOLIO



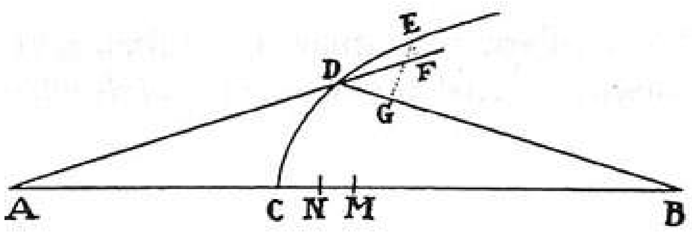
Las reflexiones y refracciones de la luz no difieren mucho de estas atracciones, al efectuarse aquéllas según una razón dada de las secantes, como descubrió SNELL, y, por consiguiente, según una razón dada de los senos, como explicó DESCARTES. Pues consta por los fenómenos de los satélites de Júpiter, confirmados por observaciones de diferentes astrónomos, que la luz se propaga sucesivamente y viene del Sol a la Tierra en un espacio de siete u ocho minutos. Y los rayos existentes en el aire (como recientemente descubrió Grimaldi al introducir luz en un cuarto oscuro a través de un orificio, y yo mismo he experimentado) al pasar junto a ángulos de cuerpos opacos o transparentes (tales como los bordes rectangulares de los círculos de monedas de oro, plata o bronce, y de los filos de cuchillos o de láminas de piedra o de vidrios rotos) se curvan hacia los cuerpos, como si fueran atraídos por ellos; y de esos rayos, los que pasan más cerca de los cuerpos, al pasar se curvan más, como si fueran más atraídos, como yo mismo he observado con todo cuidado. Y los que pasan a distancias mayores se curvan menos; y a distancias aún mayores, se curvan un tanto hacia el lado contrario, y forman tres haces de colores. En la figura sea *s* el corte de un cuchillo o cuña cualquiera A*s*B; y *gowog, ƒnunƒ, emtme, dlsld,* son rayos curvados hacia el cuchillo con arcos *owo, nun, mtm, lsl,* y esto más o menos según su distancia al cuchillo. Pero como dicha curvatura de los rayos ocurra en el aire fuera del cuchillo, deberán también los rayos incidentes en el cuchillo curvarse en el aire antes de alcanzar el cuchillo. Y lo mismo ocurre para los que inciden en un cristal. Por tanto, la refracción no ocurre en el punto de incidencia, sino paulatinamente por incurvación continua de los rayos, parte de la cual ocurre en el aire antes de alcanzar el cristal y parte en el cristal (si no me equivoco) después de haber penetrado en él: como aparece diseñado en los rayos *ckzc, biyb, ahxa*, incidiendo sobre *r, q, p*, etc., curvados entre *k* y *z, i* e *y*, *h* y *x*. Por consiguiente, dada la analogía existente entre la propagación de los rayos de luz y el movimiento de los cuerpos, parece oportuno añadir las proposiciones siguientes para usos ópticos, sin discutir cosa alguna sobre la naturaleza de los rayos (si son cuerpos o no) determinando tan sólo las trayectorias de cuerpos muy semejantes a las trayectorias de los rayos.



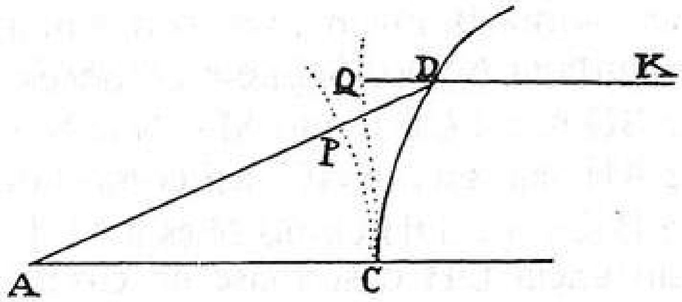
PROPOSICIÓN XCVII. PROBLEMA XLVII

Supuesto que el seno de incidencia sobre una superficie cualquiera esté respecto al seno de emergencia en una razón dada, y que la incurvación de la trayectoria de los cuerpos junto a dicha superficie ocurra en un espacio muy breve, que puede considerarse un punto; determinar la superficie que haga converger a todos los corpúsculos procedentes de un lugar dado sobre otro lugar dado.

Sea A el lugar desde el cual los corpúsculos divergen; B el lugar sobre el cual deben converger; CDE la línea curva que, al girar sobre el eje AB, describa la superficie buscada; D, E, dos puntos cualesquiera de esa curva; y EF, EG, perpendiculares que descienden sobre las trayectorias del cuerpo AD, DB. Aproxímese el punto D al punto E; y la razón última de la línea DF, con la que se incrementa AD, a la línea DG, con la que DB disminuye, será la misma que la del seno de incidencia al seno de emergencia. Luego está dada la razón del incremento de la línea AD a la disminución de la línea DB; y, por tanto, si sobre el eje AB se toma un punto cualquiera C, por el cual deba pasar la curva CDE, y se toma para AC el incremento CM, que esté respecto al decremento CN de la línea BC en la razón dada, y con centros en A, B, e intervalos AM, BN, se trazan dos círculos mutuamente secantes en D; dicho punto D será tangente a la curva buscada CDE y manteniéndose tangente a ella continuamente la determinará. Q. E. I.



COROLARIO 1. Haciendo que los puntos A o B ya se alejen al infinito, ya se acerquen hacia el punto C, se tendrán todas las figuras que Descartes expuso en la *Optica* y en la *Geometría* sobre las refracciones. Me pareció oportuno explicar en esta Proposición, ya que DESCARTES se lo reservó, la manera de hallarlas.



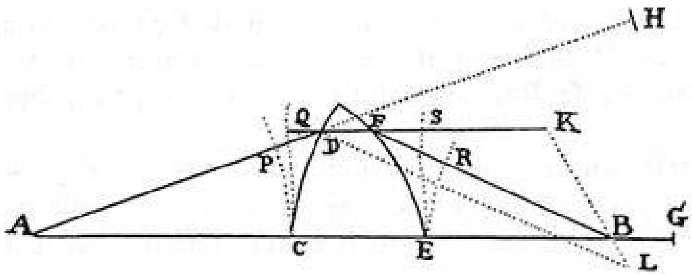
COROLARIO 2. Si un cuerpo incide sobre una superficie cualquiera CD, según la dirección AD, y la superficie obedece a una ley cualquiera, y el cuerpo emerge según otra recta cualquiera DK y por el punto C se imaginan trazadas dos curvas CP, CQ, siempre perpendiculares a AD y a DK: los incrementos de las líneas PD, QD y, por

tanto, las propias líneas PD, QD, resultantes de esos incrementos, serán entre sí como los senos de incidencia y emergencia respectivamente, y viceversa.

Proposición xcviii. Problema xlviii

Con los mismos supuestos, y trazando en torno al eje AB, una superficie atractiva CD cualquiera, sea regular o irregular, a cuyo través deben pasar los cuerpos procedentes de un lugar dado A: hallar una segunda superficie atractiva EF que haga converger a dichos cuerpos en otro lugar dado B.

Trazada la línea AB corte a la primera superficie en C y a la segunda en E, y fíjese D en un punto cualquiera. Supuesto que el seno de incidencia sobre la primera superficie respecto al seno de emergencia de la misma, y el seno de emergencia de la segunda al seno de incidencia sobre la misma, sea como una cantidad dada M a otra cantidad dada N: prolónguese entonces tanto AB hasta G de modo que BG sea a CE como M - N a N, como AD hasta H de modo que AH sea igual a AG, así como también DF hasta K, de modo que DK sea a DH como N es a M. Únase KB, y con centro en D y distancia DH descríbase un círculo que encuentre en L a KB prolongada, y trácese BF paralela a DL: y el punto F toca a la línea EF que al girar sobre el eje AB describe la superficie buscada. Q. E. F.



Pues imagínese que las lineas CP y CQ respecto a AD y a DF, y las líneas ER y ES respecto a FB y a FD son siempre perpendiculares, y por ello QS es siempre igual a CE; y (por el Corolario 2 de la Proposición xcvii) PD será a QD como M a N, y por tanto como DL a DK o FB a FK; y por partes, como DL - FB o PH - PD - FB a FD o FQ - QD; y conjuntamente, como PH - FB a FQ, esto es (por ser iguales PH y CG, QS y CE), como CE + BG - FR a CE - FS. Y (por ser proporcionales BG a CE y M - N a N) también ocurre que CE + BG es a CE como M a N; y parcialmente también FR es a FS como M a N; y por ello (por el Corolario 2 de la Proposición xcvii) la superficie EF obliga al cuerpo incidente sobre ella según la línea DF a proseguir según la línea FR hasta el lugar B. Q. E. D.

Escolio

Con el mismo método podríamos proseguir hasta tres o más superficies. Pero para usos ópticos es la esférica la figura más adecuada. Si los objetivos de los telescopios estuviesen construidos con dos cristales esféricos que encerrasen agua entre ellos, pudiera ser que los errores de refracción que ocurren en los extremos de los cristales, pudieran corregirse con bastante exactitud mediante las refracciones del agua. Semejantes objetivos deben preferirse a los cristales elípticos e hiperbólicos, no sólo por ser más fáciles de construir con precisión, sino también porque refractan más exactamente los haces de rayos situados fuera del eje del cristal. No obstante, la diversa refrangibilidad de los distintos rayos es el verdadero obstáculo con el que tropieza la óptica para perfeccionarse, tanto con formas esféricas como con otras. A no ser que se corrijan los errores que de ahí proceden, el esfuerzo por corregir los demás no tendrá éxito.

Libro segundo
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS

Sección primera
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE EN RAZÓN DE LA VELOCIDAD

Proposición I. Teorema I

La pérdida de movimiento, debida a la resistencia, de un cuerpo al que se resiste en razón de la velocidad es como el espacio recorrido en el movimiento.

Puesto que como el movimiento perdido en cada partícula igual de tiempo es como la velocidad, esto es, como la partícula de espacio recorrido: componiendo, el movimiento perdido en el tiempo total será como el espacio total recorrido. Q. E. D.

Corolario. Por lo tanto, si un cuerpo desprovisto de toda gravedad se mueve en los espacios libres con la sola fuerza ínsita en él; y se dan tanto el movimiento total inicial como el movimiento restante tras recorrer algún espacio, quedará dado también el espacio total que puede recorrer el cuerpo en un tiempo infinito. Pues dicho espacio será al espacio recorrido ya como el movimiento total inicial a la parte perdida de dicho movimiento.

Lema I

Las cantidades proporcionales a sus diferencias son continuamente proporcionales.

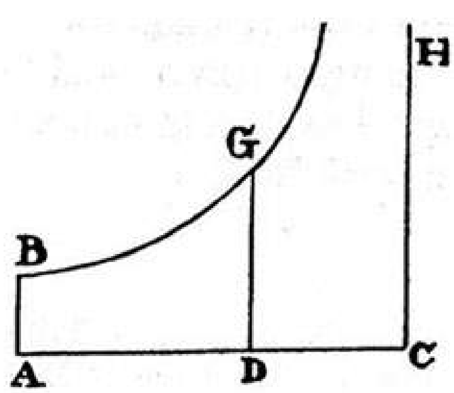
Sea A: A - B, como B: B - C, como C: C - D, etc.; y, al convertir, A será a B como B a C, como C a D, etc. Q. E. D.

Proposición II. Teorema II

Si se resiste a un cuerpo en razón de la velocidad y se mueve en un medio homogéneo con su sola fuerza inercial y se toman tiempos iguales, las velocidades en los *momentos iniciales de cada tiempo están en progresión geométrica, y los espacios recorridos en cada tiempo son como las velocidades.*

CASO 1. Divídase el tiempo en partículas iguales; y si en los comienzos de cada una de esas partículas actúa la resistencia con un único impulso que es como la velocidad: el decremento de la velocidad en cada partícula de tiempo será como la velocidad. Luego las velocidades son proporcionales a sus diferencias, y (por el Lema I del Libro II) por ello continuamente proporcionales. Por consiguiente, si con un número igual de partículas se componen cualesquiera tiempos iguales, las velocidades en los comienzos de esos tiempos serán como los términos de una progresión continua, tomados salteadamente, siempre que en cada salto se omitan igual número de términos intermedios. Pero las razones de tales términos se componen de las razones mutuas mismas de los términos intermedios repetidas igualmente, y por tanto también dichas razones compuestas son iguales entre sí. Por lo cual, las velocidades proporcionales a dichos términos están en progresión geométrica. Disminúyanse ahora aquellas partículas iguales de tiempo y auméntese su número hasta el infinito de modo que el impulso de la resistencia resulte continuo; y las velocidades al principio de tiempos iguales, siempre continuamente proporcionales, serán también en este caso continuamente proporcionales. Q. E. D.

CASO 2. Y, por partes, las diferencias de velocidades, esto es, las partes de las mismas perdidas en cada tiempo, son como los todos; ya que los espacios recorridos en cada tiempo son como las partes perdidas de las velocidades (por la Proposición I del Libro II) y por tanto también como los todos. Q. E. D.

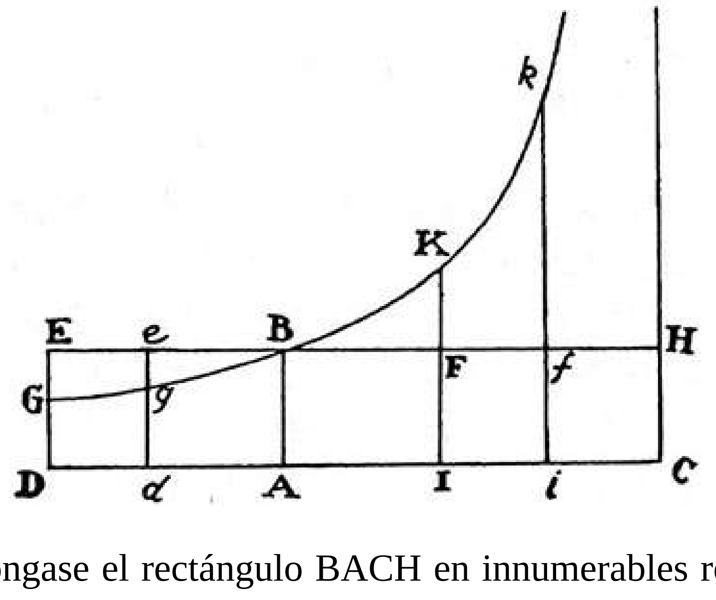


COROLARIO. De aquí que si se traza una hipérbola BG con las asíntotas rectangulares AC, CH y AB, DG son perpendiculares a la asíntota AC, y se representa tanto la velocidad del cuerpo como la resistencia del medio, al comienzo del movimiento, mediante una línea dada AC, y un tiempo transcurrido cualquiera mediante la línea indefinida DC: el tiempo puede representarse por el área ABGD y el espacio recorrido en dicho tiempo por la línea AD. Pues si dicha área se aumenta por el movimiento del punto D uniformemente con el tiempo, la recta DC decrecerá en razón geométrica al modo de la velocidad, mientras las partes de la recta AC, descritas en tiempos iguales decrecerán en la misma razón.

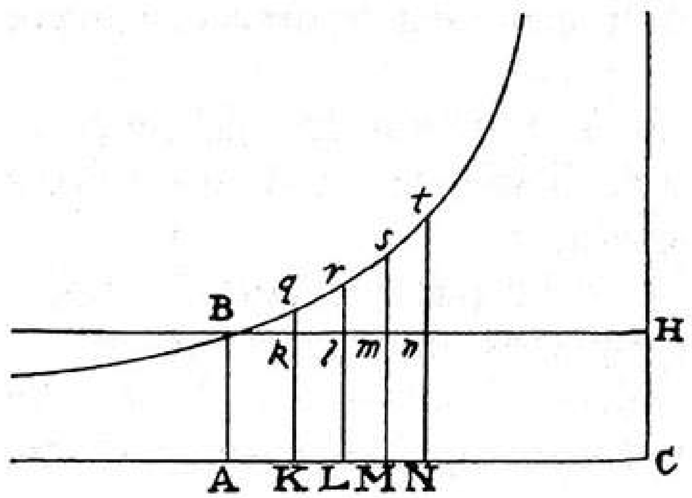
PROPOSICIÓN III. PROBLEMA I

Definir el movimiento de un cuerpo al cual, mientras asciende o desciende en línea recta en un medio homogéneo, se resiste en razón de la velocidad y es urgido por una gravedad uniforme.

Para el cuerpo ascendente, represéntese la gravedad por un rectángulo cualquiera dado BACH, y la resistencia del medio al comienzo del ascenso por el rectángulo BADE tomado al lado contrario de la recta AB. Con las asíntotas rectangulares AC, CH, trácese por el punto B una hipérbola que corte a las perpendiculares DE, *de*, en G, *g*; y el cuerpo al ascender en el tiempo DG*gd* recorrerá el espacio EG*ge*, y en el tiempo DGBA el espacio de todo el ascenso EGB; en el tiempo ABKI el espacio de descenso BFK y en el tiempo IK*ki* el espacio de descenso KF*fk*; y las velocidades del cuerpo (proporcionales a la resistencia del medio) en esos períodos de tiempo serán ABED, AB*ed*, nula, ABFI, AB*fi*, respectivamente; y la velocidad máxima que puede adquirir el cuerpo al descender será BACH.



Pues, descompóngase el rectángulo BACH en innumerables rectángulos, A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etc., que sean como los incrementos de las velocidades producidos en los correspondientes tiempos iguales; y entonces, cero, A*k*, A*l*, A*m*, A*n*, etc., serán como las velocidades totales y, por tanto (por hipótesis) como las resistencias del medio al principio de cada tiempo igual. Hágase AC a AK o ABHC a AB*k*K como la fuerza de la gravedad a la resistencia al comienzo del segundo tiempo, y réstese de la fuerza de gravedad las de las resistencias, y ABHC, K*k*HC, L*l*HC, M*m*HC, etc., seguirán siendo como las fuerzas absolutas con las cuales el cuerpo es urgido al comienzo de cada uno de los tiempos, y por tanto (por la Ley II del movimiento) como los incrementos de las velocidades, esto es, como los rectángulos A*k*, K*l*, L*m*, M*n*, etc., y por ello (por el Lema I del Libro II) en progresión geométrica. Por lo cual, si las rectas K*k*, L*l*, M*m*, N*n*, etc., al prolongarse cortan a la hipérbola en *q*, *r*, *s*, *t*, etc., las áreas AB*q*K, K*gr*L, L*rs*M, M*st*N, etc., serán iguales y, por tanto, análogas a tiempos y fuerzas gravitatorias iguales. Pero el área AB*q*K (por el Corolario 3 del Lema VII, y el Lema VIII del Libro I) es al área B*kq* como K*q* a ½*kq* o como AC a ½AK, esto es, como la fuerza de la gravedad a la resistencia en la mitad del tiempo primero. Y por un argumento similar las áreas *g*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son a las áreas *qklr*, *rlms*, *smnt*, etc., como las fuerzas de gravedad a las resistencias en la mitad de los tiempos segundo, tercero, cuarto, etc. Por lo tanto, puesto que las áreas iguales BAK*g*, *g*KL*r*, *r*LM*s*, *s*MN*t*, etc., son análogas a las fuerzas de gravedad, las áreas B*kq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, etc., serán análogas a las resistencias en la mitad de cada tiempo, esto es (por hipótesis) a las velocidades y, por ello, análogas a los espacios recorridos. Tómense las sumas de las cantidades análogas y las áreas B*kq*, B*lr*, B*ms*, B*nt*, etc., serán análogas a los espacios totales recorridos; lo mismo que las áreas AB*q*K, AB*r*L, AB*s*M, AB*r*N, etc., a los tiempos. Por tanto, un cuerpo mientras desciende describe en un tiempo cualquiera AB*r*L el espacio B*lr*, y en un tiempo L*rt*N un espacio *rlnt*. Q. E. D. Semejante es la demostración para un movimiento ascendente. Q. E. D.



COROLARIO 1. Por tanto, la mayor velocidad que puede adquirir un cuerpo al caer es a la velocidad adquirida en un tiempo dado como la fuerza dada de la gravedad por la que es urgido continuamente es a la fuerza de resistencia que se le opone al final de dicho tiempo.

COROLARIO 2. Y si el tiempo aumenta en progresión aritmética, la suma de dicha velocidad máxima y de la velocidad en ascenso, así como su diferencia en descenso, decrece en progresión geométrica.

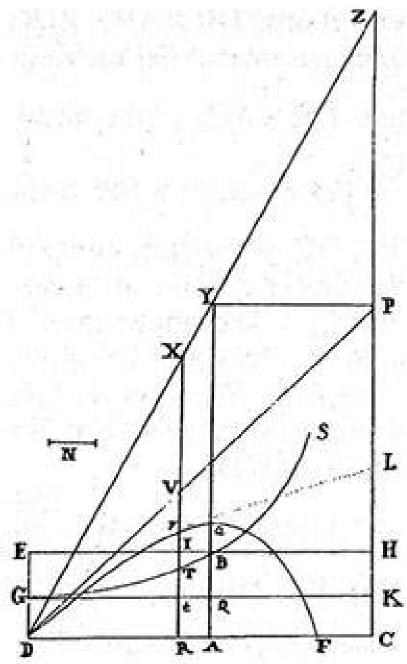
COROLARIO 3. Y también las diferencias de los espacios recorridos en iguales diferencias de tiempos decrecen en la misma progresión geométrica.

COROLARIO 4. El espacio recorrido por el cuerpo es la diferencia de dos espacios, uno de los cuales es como el tiempo tomado desde el inicio de la caída, y el otro, como la velocidad, los cuales, por cierto, son iguales entre sí al inicio del descenso.

PROPOSICIÓN IV. PROBLEMA II[1]

Supuesto que la fuerza de la gravedad sea uniforme en un medio homogéneo cualquiera y que tienda perpendicularmente hacia el plano horizontal; definir en dicho medio el movimiento de un proyectil que sufre una resistencia proporcional a la velocidad.

Parta un proyectil desde un lugar cualquiera D según una recta cualquiera DP, y represente la longitud DP su velocidad al comienzo del movimiento. Desde el punto P sobre la horizontal DC descienda la perpendicular PC, y córtese DC en A de modo que DA sea a AC como la resistencia del medio originada al comienzo del movimiento hacia arriba es a la fuerza de la gravedad; o (lo que es lo mismo) de modo que el rectángulo comprendido entre DA y DP sea al rectángulo entre AC y CP como la resistencia total al comienzo del movimiento es a la fuerza de la gravedad. Con asíntotas DC, CP, trácese una hipérbola GTBS secante de las perpendiculares DG, AB, en G y B; y complétese el paralelogramo DGKC, cuyo lado GK corte a AB en Q. Tómese una línea N que esté en razón a QB como DC a CP; y desde un punto cualquiera R de la recta DC elévese la perpendicular RT, que encuentre a la hipérbola en T y a las rectas EH, GK, DP, en I, *t* y V; sobre esta perpendicular tómese V*r* igual a $\frac{t\mathrm{GH}}{\mathrm{N}}$ o, lo que es lo mismo, tómese R*r* igual a $\frac{\mathrm{GTIE}}{\mathrm{N}}$; y el proyectil, en el tiempo DRTG alcanzará el punto *r* describiendo la curva D*ra*F, que siempre toca el punto *r*, alcanzando la altura máxima *a* en la perpendicular AB, y aproximándose después siempre a la asíntota PC. Y su velocidad en un punto cualquiera *r* es como la tangente de la curva *rl* Q. E. I.

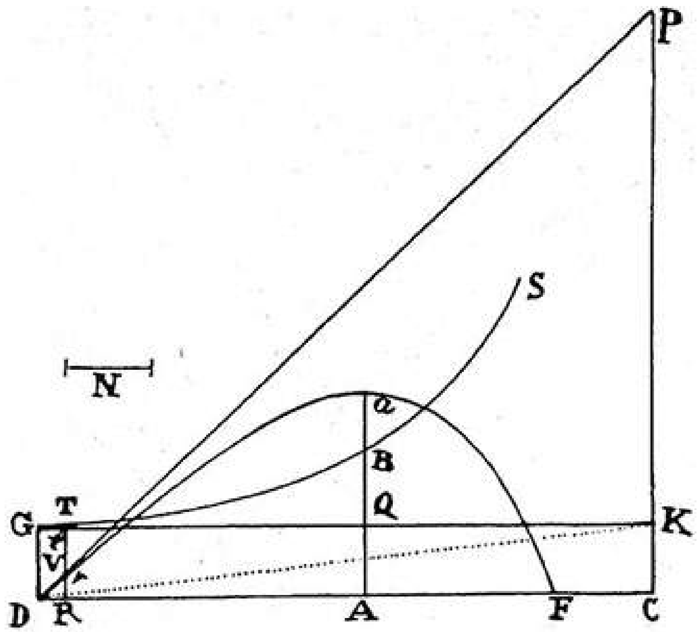


Pues N es a QB como DC a CP o DR a RV, y por tanto RV es igual a $\frac{DR \times QB}{N}$, y R*r* $\left(\text{esto es } Rr - Vr \text{ o } \frac{DR \times QB - tGT}{N}\right)$ es igual a $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Ahora represéntese el tiempo mediante el área RDGT y (por el Corolario II de las [*Leyes*]) descompóngase el movimiento del cuerpo en dos, uno de ascenso y otro hacia el lado. Y puesto que la resistencia es como el movimiento, descompóngase ésta también en dos partes contrarias y proporcionales a las dos partes del movimiento: y por ello, la longitud descrita por el movimiento hacia el lado será (por la Proposición II de este Libro) como el área DR x AB - RDGT, esto es, como la línea R*r*. Pero al comienzo mismo del movimiento el área RDGT es igual al rectángulo DR x AQ, y por tanto dicha línea R*r* $\left(\text{o } \frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}\right)$ es entonces a DR como AB - AQ o QB a N, esto es, como CP a DC, y por ende como el movimiento hacia arriba al movimiento hacia el lado al inicio. Puesto que R*r* es siempre como la altura y DR siempre como la longitud: se sigue necesariamente que R*r* sea siempre a DR como la altura a la longitud, y por lo tanto que el cuerpo se mueva en la línea D*ra*F, a la cual toca siempre el punto r. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, R*r* es igual $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$; y por ello, si se prolonga RT hasta X de modo que RX sea igual a $\frac{DR \times AB}{N}$; esto es, si se completa el paralelogramo ACPY, se une DY cortando a CP en Z, y se prolonga RT hasta que toque a DY en X: X*r* será igual a $\frac{\mathrm{RDGT}}{\mathrm{N}}$, y por lo mismo proporcional al tiempo.

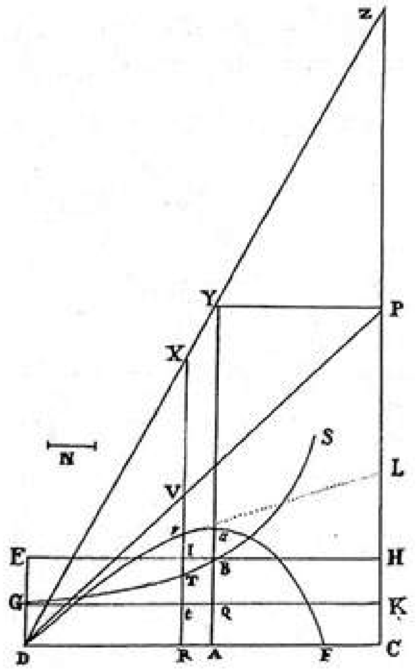
COROLARIO 2. De donde, si se toman innumerables CR o, lo que es lo mismo, innumerables ZX, en progresión geométrica; habrá otras tantas X*r* en progresión aritmética. Y de aquí que la curva D*ra*F se pueda delinear fácilmente por la tabla de logaritmos.

COROLARIO 3. Si se construye una parábola con vértice en D, con diámetro DC prolongado hacia abajo y con un *latus rectum* que sea a 2DP como la resistencia total en el mismo comienzo del movimiento a la fuerza de la gravedad: la velocidad con la que un cuerpo debe partir desde el punto D según la recta DP, para que describa en un medio uniformemente resistente la curva D*ra*F, será la misma que aquella con la que debe partir desde el mismo punto D y según la misma línea DP, para describir la parábola en un espacio sin resistencia. Pues el *latus rectum* de esta parábola en el momento inicial del movimiento es $\frac{\mathrm{DV}^2}{\mathrm{V}r}$; y V*r* es $\frac{t\mathrm{GT}}{\mathrm{N}}$ o también $\frac{\mathrm{DR} \text{ x } \mathrm{T}t}{2\mathrm{N}}$. Pero si se trazase una recta que fuese tangente a la hipérbola GTS en G, sería paralela a DK y, por tanto, T*t* es $\frac{\mathrm{CK} \text{ x } \mathrm{DR}}{\mathrm{DC}}$, y N era $\frac{\mathrm{QB} \text{ x } \mathrm{DC}}{\mathrm{CP}}$. Y por tanto V*r* es $\frac{\mathrm{DR}^2 \text{ x } \mathrm{CK} \text{ x } \mathrm{CP}}{2\mathrm{DC}^2 \text{ x } \mathrm{QB}}$ esto es (por ser proporcionales DR y DC, DV y DP) $\frac{\mathrm{DV}^2 \text{ x } \mathrm{CK} \text{ x } \mathrm{CP}}{2\mathrm{DP}^2 \text{ x } \mathrm{QB}}$, y el *latus rectum* $\frac{\mathrm{DV}^2}{\mathrm{V}r}$ resulta ser $\frac{2\mathrm{DP}^2 \text{ x } \mathrm{QB}}{\mathrm{CK} \text{ x } \mathrm{CP}}$ esto esto es (por ser proporcionales QB y CK, DA y AC) $\frac{2\mathrm{DP}^2 \text{ x } \mathrm{DA}}{\mathrm{AC} \text{ x } \mathrm{CP}}$ y por lo tanto es a 2DP como DP x DA a CP x AC; esto es como la resistencia a la gravedad. Q. E. D.



COROLARIO 4. De aquí que si se lanza un cuerpo desde un punto D con una velocidad dada, según una recta de posición dada DP, y se da la resistencia del medio al comienzo mismo del movimiento: puede hallarse la curva D*ra*F que describirá dicho cuerpo. Pues, como es sabido, al dar la velocidad se da también el *latus rectum* de la parábola. Y tomando 2DP a dicho *latus rectum* como la fuerza de la gravedad a la de resistencia, DP está dado. Cortando entonces DC en A de modo que CP x AC esté respecto a DP x DA en la susodicha razón de la gravedad a la resistencia, se tendrá dado el punto A. Y con ello está dada la curva D*ra*F.

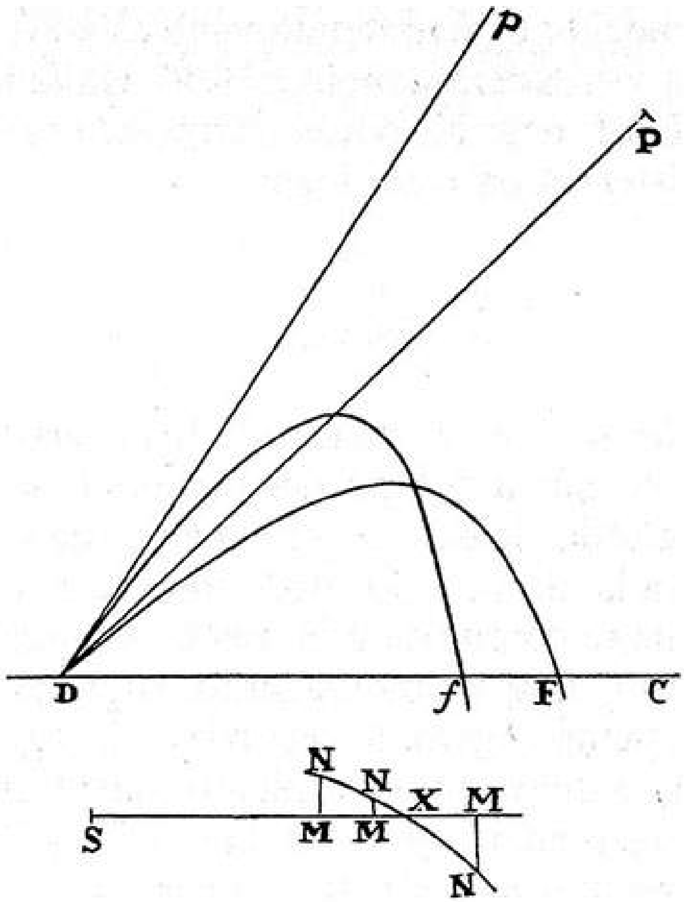
COROLARIO 5. Y, al contrario, si la curva D*ra*F está dada, también estarán dadas la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio en cada lugar r. Puesto que por estar dada la razón CP x AC a DP x DA, viene dada también tanto la resistencia del medio al comienzo del movimiento como el *latus rectum* de la parábola: y con ello también se da la velocidad al comienzo del movimiento. Y después, a partir de la longitud de la tangente *r*L, viene dada tanto la velocidad proporcional a ella como la resistencia proporcional a la velocidad en un punto cualquiera *r*.



COROLARIO 6. Pero como la longitud 2DP es al *latus rectum* de la parábola como la gravedad a la resistencia en D, y al aumentar la velocidad aumenta en la misma razón la resistencia, mientras el *latus rectum* de la parábola aumenta en el cuadrado de dicha razón: es evidente que la longitud 2DP aumenta en dicha razón simple, y por lo tanto siempre resulta proporcional a la velocidad, y tampoco aumenta o disminuye al cambiar el ángulo CDP, a no ser que también se cambie la velocidad.

COROLARIO 7. De donde se tiene el método para determinar a partir de los fenómenos la curva D*ra*F muy aproximadamente, y después hallar la resistencia y la velocidad con la que es proyectado el cuerpo. Láncense dos cuerpos semejantes e iguales con la misma velocidad desde el punto D, según los ángulos distintos CDP, CD*p*, y sean conocidos los puntos F, f, donde inciden en el plano horizontal DC. Entonces, supuesta una longitud cualquiera para DP o D*p*, imagínese que la resistencia en D sea a la gravedad en una razón cualquiera, y represéntese dicha razón por una longitud cualquiera SM. Después, por cálculo, hállense a partir de la longitud supuesta DP las longitudes DF y Df; y de la razón $\frac{\mathrm{F}f}{\mathrm{DF}}$ hallada por cálculo réstese la misma razón hallada experimentalmente, y represéntese la diferencia mediante la perpendicular MN. Hágase lo mismo por segunda y tercera vez, imponiendo siempre una nueva razón SM de la resistencia a la gravedad, y obteniendo una nueva diferencia MN. Trácense las diferencias positivas hacia un lado de la recta SM y las negativas hacia el otro, y por los puntos N, N, N, trácese la curva regular NNN que corte a la recta SMMM en X, y SX será la verdadera razón de la resistencia a la gravedad que se trataba de hallar. La longitud DF hay que obtenerla por cálculo a partir de esta razón; y una longitud, que sea a la longitud supuesta DP como la longitud DF conocida experimentalmente es a la longitud DF así hallada, será la verdadera longitud DP.

Hallada ésta se tiene tanto la curva D*ra*F descrita por el cuerpo como la velocidad del cuerpo y la resistencia en cada lugar.



Escolio

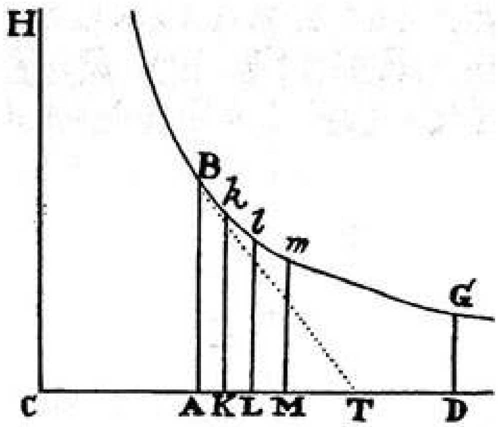
Por lo demás, que la resistencia de los cuerpos esté en razón de la velocidad es más una hipótesis matemática que natural. En medios libres de toda rigidez, las resistencias de los cuerpos están en razón cuadrada de la velocidad. Pues con la acción de un cuerpo más veloz se comunica a la misma cantidad de un medio, en menor tiempo, mayor movimiento en razón de la mayor velocidad; y en tiempo igual, al ser mayor la cantidad de medio perturbada, se comunica un movimiento mayor en razón cuadrada; ya que la resistencia (por las Leyes II y III) es como el movimiento comunicado. Veamos, pues, qué movimientos se siguen de esta ley de resistencia.

Sección II
DEL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE EN RAZÓN DEL CUADRADO DE LAS VELOCIDADES

Proposición v. Teorema iii

Si se resiste a un cuerpo en razón del cuadrado de la velocidad, y el mismo se mueve sólo por la fuerza insita a través de un medio homogéneo; y los tiempos se toman en progresión geométrica que va desde los términos menores a los mayores: digo que las velocidades al comienzo de cada tiempo son como el inverso de dicha progresión; y que los espacios descritos en cada uno de los tiempos son iguales.

Pues al ser la resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad y el decremento de la velocidad proporcional a la resistencia, si se divide el tiempo en innumerables partículas iguales, los cuadrados de las velocidades al comienzo de cada tiempo serán proporcionales a las diferencias de las mismas velocidades. Tómense dichas partículas de tiempo AK, KL, LM, etc., sobre la recta CD, y elévense las perpendiculares AB, K*k*, L*l*, M*m*, hasta que encuentren a la hipérbola B*klm*G, descrita con centro en C y las asíntotas rectangulares CD, CH, en los puntos B, *k*, *l*, *m*, etc., y AB será a K*k* como CK a CA, y por partes AB - K*k* a K*k* como K*k* a CA y, en consecuencia, como AB x K*k* a AB x CA. Por lo cual, como están dados AK y AB x CA, AB - K*k* será como AB x K*k*; y por fin, cuando AB y K*k* coinciden, como AB^2. Y por un argumento similar, K*k* - L*l*, L*l* - M*m*, etc., serán como Kk^2, Ll^2, etc. Por tanto, los cuadrados de las líneas AB, K*k*, L*l*, M*m*, etcétera, son como sus diferencias y, por eso, al ser también los cuadrados de las velocidades como las diferencias de las mismas, la progresión de ambas será semejante. Demostrado esto, también se sigue que las áreas descritas con estas líneas están en progresión igual que los espacios descritos por las velocidades. Luego si la velocidad al inicio del primer tiempo AK se representa por la línea AB, y la velocidad al inicio del segundo KL se representa por la línea K*k*, y la longitud descrita en el primero por el área AK*k*B; todas las velocidades subsiguientes serán representadas por las líneas siguientes L*l*, M*m*, etc., y las longitudes descritas por las áreas K*l*, L*m*, etc. Y componiendo, si el tiempo total se representa por la suma de sus partes AM, la longitud total descrita se representa por la suma de sus partes AM*m*B. Imagínese ahora que el tiempo AM se divide en partes AK, KL, LM, etc., de tal modo que CA, CK, CL, CM, etc., estén en progresión geométrica; aquellas partes también estarán en la misma progresión, lo mismo que las velocidades AB, K*k*, L*l*, M*m*, etc., estarán en dicha progresión inversa, y los espacios descritos A*k*, K*l*, L*m*, etc., serán iguales. Q. E. D.



COROLARIO 1. Por tanto, es evidente que si se representa el tiempo por una parte cualquiera AD de la asíntota, y la velocidad al inicio del tiempo por la ordenada AB, la velocidad al fin del tiempo se representará por la ordenada DG, y el espacio total descrito por el área hiperbólica adyacente ABDG; lo mismo que el espacio que puede recorrer un cuerpo en el tiempo AD con la primera velocidad AB en un medio no resistente, mediante el rectángulo AB x AD.

COROLARIO 2. De donde, el espacio recorrido en un medio resistente viene dado si se lo toma respecto al espacio que puede recorrerse con velocidad uniforme AB en el mismo tiempo y en medio no resistente, en la proporción del área hiperbólica ABGD al rectángulo AB x AD.

COROLARIO 3. También está dada la resistencia del medio estableciéndola, al comienzo mismo del movimiento, igual a una fuerza centrípeta uniforme, la cual pudiese generar en un cuerpo en descenso a través de un medio no resistente la velocidad AB en el tiempo AC. Pues, si se traza BT tangente a la hipérbola en B y encuentra a la asíntota en T, la recta AT será igual a la propia AC, y representará al tiempo, en el cual la resistencia inicial continuada uniformemente anularía a toda la velocidad AB.

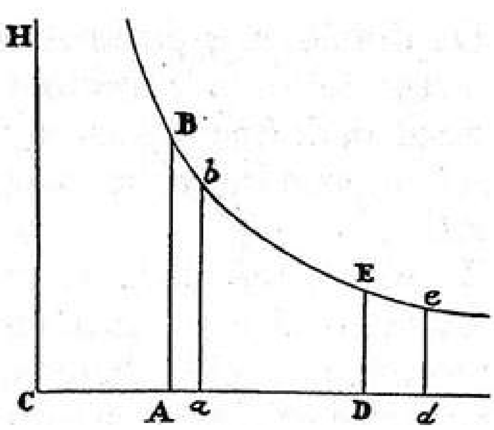
COROLARIO 4. Y de aquí que también esté dada la proporción de esta resistencia respecto a la gravedad o a otra cualquiera fuerza centrípeta dada.

COROLARIO 5. Y viceversa, si se da la proporción de la resistencia a una fuerza centrípeta dada; viene dado el tiempo AC en el que la fuerza centrípeta igual a la resistencia puede generar una velocidad AB cualquiera: y de aquí viene dado el punto B por el cual debe pasar la hipérbola con asíntotas CH, CD; al igual que el espacio ABGD que puede recorrer un cuerpo que inicia su movimiento con la susodicha velocidad AB, en un tiempo cualquiera AD y en un medio homogéneo resistente.

Proposición vi. Teorema iv

Los cuerpos esféricos homogéneos e iguales a los que se oponen resistencias como el cuadrado de las velocidades y que se mueven por su sola fuerza ínsita describen espacios iguales siempre en tiempos que sean inversamente como las velocidades iniciales, y pierden partes de las velocidades proporcionales a los todos.

Con asíntotas rectangulares CD, CH, trácese una hipérbola cualquiera B*b* E*e* que corte a las perpendiculares AB, *ab*, DE, *de*, en B, *b*, E, *e*, y representen las velocidades iniciales las perpendiculares AB, DE, etc., y los tiempos las líneas A*a*, D*d*. Pero (por hipótesis) DE es a AB como A*a* es a D*d*, y también (por la naturaleza de la hipérbola) como CA a DC; y por composición, como C*a* a C*d*. Luego las áreas AB*ba*, DE*ed*, esto es, los espacios descritos son iguales entre sí, y las velocidades iniciales AB, DE, son proporcionales a las últimas *ab*, *de*, y por ello, por división, también proporcionales a sus partes perdidas AB - *ab*, DE - *de*. Q. E. D.



Proposición vii. Teorema v

Los cuerpos esféricos a los que se resiste en razón cuadrada de la velocidad en tiempos que son directamente como los movimientos iniciales e inversamente como las resistencias iniciales, perderán partes de sus movimientos proporcionales a los todos, y describirán espacios proporcionales al producto de esos tiempos por las velocidades iniciales.

Puesto que las partes perdidas de los movimientos son como el producto de la resistencia y los tiempos. Por tanto, al ser dichas partes proporcionales a los todos, el producto de la resistencia y el tiempo deberá ser como el movimiento. Por lo cual, el tiempo será directamente como el movimiento e inversamente como la resistencia. Por lo tanto, tomadas las partículas de tiempo según dicha razón, los cuerpos perderán siempre partículas de movimiento proporcionales a los todos, y por lo mismo, retendrán velocidades siempre proporcionales a sus velocidades iniciales. Y, por la razón de velocidades dada, siempre describirán espacios que son como las velocidades iniciales multiplicadas por los tiempos. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón del cuadrado de los diámetros: los globos homogéneos que se mueven con cualquier velocidad, al describir espacios proporcionales a sus diámetros, perderán partes del movimiento proporcionales a los todos. Pues el movimiento de un globo cualquiera será como el producto de su velocidad y masa, esto es, como el producto de la velocidad y el cubo del diámetro; la resistencia (por hipótesis) será como el producto del cuadrado del diámetro y el cuadrado de la velocidad; y el tiempo (por esta Proposición) estará en razón directa de la primera razón y en razón inversa de la segunda, esto es, directamente del diámetro e inversamente de la velocidad; y por ello el espacio, proporcional al tiempo y a la velocidad, es como el diámetro.

COROLARIO 2. Si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón de la potencia $^3/_2$ del diámetro: los globos homogéneos que se muevan a cualquier velocidad, al describir espacios en razón de la potencia $^3/_2$ de los diámetros, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos.

COROLARIO 3. Y en general, si a cuerpos igualmente veloces se los resiste en razón de una potencia cualquiera del diámetro: los espacios en los cuales los globos homogéneos, al moverse con una velocidad cualquiera, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos, serán como los cubos de los diámetros aplicados a dicha potencia. Sean dichos diámetros D y E; y si las resistencias, cuando se suponen las velocidades iguales, son D^n y E^n, los espacios en los cuales los globos, al moverse con cualquier velocidad, perderán partes de movimiento proporcionales a los todos serán como D^{3-n} y E^{3-n}. Y por lo tanto, los globos homogéneos que describan espacios proporcionales a dichos D^{3-n} y E^{3-n} retendrán velocidades en la misma mutua proporción que al principio.

COROLARIO 4. Pero si los globos no fuesen homogéneos, el espacio descrito por el globo más denso debe aumentarse en razón de la densidad. Pues el movimiento, a igual velocidad, es mayor en razón de la densidad, y el tiempo (por esta Proposición) aumenta en razón directa del movimiento, y el espacio recorrido en razón del tiempo.

COROLARIO 5. Y si los globos se mueven en distintos medios, el espacio, si el medio es más resistente, «caeteris paribus», habrá de disminuirse en razón de la resistencia. Pues el tiempo (por esta Proposición) disminuirá en razón del aumento de la resistencia, y el espacio en razón del tiempo.

LEMA II[2]

El momento de una generada es igual a los momentos de cada lado generador multiplicados por los índices de las potencias de dichos lados y sus coeficientes *continuamente.*

Llamo generada a cualquier cantidad que se engendra, en aritmética por multiplicación, división y extracción de raíces de lados o términos cualesquiera; en geometría del cálculo de áreas y lados, o de extremos y medios proporcionales sin sumar ni restar. Este tipo de cantidades son productos, cocientes, raíces, rectángulos, cuadrados, cubos, lados cuadrados, lados cúbicos y similares. Considero aquí a dichas cantidades como indeterminadas y variables y como si creciesen y decreciesen con un movimiento o flujo continuo; y a sus incrementos o decrementos momentáneos es a lo que llamo momentos: de modo que los incrementos pueden considerarse como momentos añadidos o positivos y los decrementos como negativos o substraídos. Pero cuídese de no entenderlo como partículas finitas. Las partículas finitas no son momentos, sino las cantidades mismas generadas por los momentos. Han de entenderse como los mismos principios nacientes de las magnitudes finitas. Y ni siquiera se contempla en este lema la magnitud de los momentos, sino la proporción primera entre momentos nacientes. Lo mismo ocurre si en lugar de momentos se trata de las velocidades de los incrementos (que también pueden llamarse movimientos, mutaciones, fluxiones de cantidades) o bien de cualquier cantidad finita proporcional a dichas velocidades. El coeficiente de cualquier lado generador es la cantidad que resulta al aplicar la generada a dicho lado.

Por lo cual el sentido del lema es que si los momentos de unas cantidades A, B, C, etc., que aumentan o disminuyen en flujo continuo, o las velocidades de las mutaciones proporcionales a aquellos se llaman *a, b, c*, etc., el momento o mutación del rectángulo generado AB sería aB + bA, el momento del área generada ABC sería aBC + bAC + cAB: y los de las potencias generadas A^2, A^3, A^4, $A^{1/2}$, $A^{3/2}$, $A^{1/3}$, $A^{2/3}$, A^{-1}, A^{-2} y $A^{-1/2}$ serán respectivamente: $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-1/2}$, $\frac{2}{3}aA^{1/2}$, $\frac{1}{3}aA^{-2/3}$, $\frac{2}{3}aA^{-1/3}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$ y $-\frac{1}{2}aA^{-3/2}$; y, en general, que el momento de una potencia cualquiera $A^{n/m}$ sería $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. También que el momento de la cantidad generada A^2B será $2aAB + bA^2$, que el momento de la generada $A^3B^4C^2$ será $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$, y de la generada $\frac{A^3}{B^2}$ o de A^3B^{-2} será $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^3$, etc. Y el Lema se demuestra del siguiente modo:

CASO 1. Un rectángulo cualquiera AB que crece con un movimiento continuo, cuando de sus lados A y B faltaban la mitad de los momentos ½a y ½b, era A - ½a por B - ½b, o también AB - ½bA + ¼ab; y en el momento en que ambos lados A y B quedan aumentados con las otras mitades de los momentos resulta A + ½a por B + ½b, o AB + ½aB + ½bA + ¼ab. De este rectángulo réstese el anterior y quedará un exceso de aB + bA. Por tanto, con todos los incrementos a y b de los lados se genera el incremento aB + bA del rectángulo. Q. E. D.

CASO 2. Supóngase que AB es siempre igual a G y el momento del contenido ABC, o sea, de GC (por el caso 1) será gC + cG, esto es (si se sustituyen G y g por AB y aB + bA), aBC + bAC + cAB. Y lo mismo para cualquier contenido bajo cualquier número de lados. Q. E. D.

CASO 3. Supóngase que los lados A, B, C, son siempre iguales entre sí, y el momento del rectángulo AB, esto es, de A^2, que sería aB + bA, vendrá a ser $2aA$; y el de A^3, esto es, el del contenido ABC, que sería aBC + bAC + cAB, $3aA^2$. Y por la misma razón el momento de una potencia cualquiera A^n será naA^{n-1}. Q. E. D.

CASO 4. De donde, como $\frac{1}{A}$ por A sea 1, el momento de $\frac{1}{A}$ multiplicado por A, junto con $\frac{1}{A}$ multiplicado por a, será el momento de 1, es decir, nulo. Por tanto, el momento de $\frac{1}{A}$ o de A^{-1} es $\frac{-a}{A^2}$. Y, en general, puesto que $\frac{1}{A^n}$ por A^n es 1, el momento de $\frac{1}{A^n}$ multiplicado por A^n junto con $\frac{1}{A^n}$ por naA^{n-1} será nulo. Y por lo mismo el momento de $\frac{1}{A^n}$ o de A^n será $-\frac{na}{A^{n+1}}$. Q. E. D.

CASO 5. Y, puesto que $A^{½}$ por $A^{½}$ es A, el momento de $A^{½}$ multiplicado por $2A^{½}$ será a por el caso 3: por lo mismo el momento de $A^{½}$ será $\frac{a}{2A^{½}}$ o $½aA^{-½}$. Y, en general, siendo $A^{m/n}$ igual a B, entonces A^m será igual a B^n y, por tanto, maA^{m-1} igual a nbB^{n-1}, o $nbA^{-m/n}$ y, por ello, $\frac{m}{n}aA^{m-n/n}$ es igual a b, es decir, igual al momento de $A^{m/n}$. Q. E. D.

CASO 6. Por tanto, el momento de cualquier cantidad generada A^mB^n es el momento de A^m multiplicado por B^n, junto con el momento de B^n multiplicado por A^m, esto es, $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$; y esto tanto si los índices de las potencias m, n, son números enteros o fraccionarios, positivos o negativos. Y lo mismo ocurre para contenidos bajo muchas potencias. Q. E. D.

Corolario 1. De aquí que, cuando son cantidades continuamente proporcionales, si se da un término, los momentos de los otros términos serán como los mismos términos multiplicados por el número de intervalos entre ellos y el término dado. Sean A, B, C, D, E, F, continuamente proporcionales; y si se da el término C, los momentos del resto de los términos serán entre sí como -2A, -B, D, 2E, 3F.

COROLARIO 2. Y si en cuatro proporcionales se dan los dos medios, los momentos de los extremos serán como los propios extremos. Lo mismo hay que entender respecto a los lados de un rectángulo dado cualquiera.

COROLARIO 3. Y si se da la suma o la diferencia de dos cuadrados, los momentos de los lados serán inversamente como los lados.

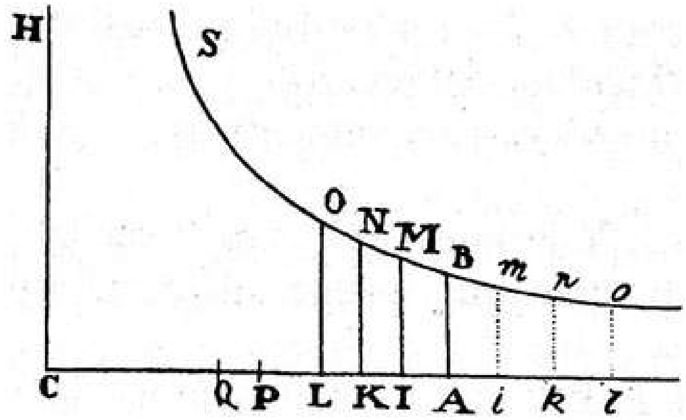
ESCOLIO

En una carta que escribí al Sr. Collins el 10 de diciembre de 1672 una vez que describí el método de tangentes que sospechaba ser el mismo que el de *Sluse*, no publicado todavía en aquella fecha, añadí: «Esto es un caso particular o mejor un Corolario de un método general que se extiende sin farragosos cálculos, no sólo al trazado de tangentes a cualquier línea curva geométrica o mecánica, o relacionadas de cualquier forma a otras líneas rectas o curvas, sino también a la resolución de otras clases de problemas más abstrusos sobre curvaturas, áreas, longitudes, centros de gravedad de curvas, etc., y tampoco (como el método de máximos y mínimos de *Hudden*) se limita a las solas ecuaciones que se hallan libres de cantidades irracionales. He combinado dicho método con este otro mediante el cual resuelvo las ecuaciones reduciéndolas a series infinitas». Hasta aquí la carta. Y estas últimas palabras se refieren a un tratado que había escrito sobre estos temas en el año 1671. Mas, el fundamento de dicho método general se halla contenido en el Lema anterior.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VI[3]

Si un cuerpo, en un medio uniforme, bajo la acción uniforme de la gravedad, asciende o desciende en línea recta, y se divide la totalidad del espacio recorrido en partes iguales, y se averiguan las fuerzas absolutas al principio de cada una de las partes (sumando la resistencia del medio a la fuerza de la gravedad cuando el cuerpo asciende y restándola cuando desciende), digo que dichas fuerzas absolutas se hallan en progresión geométrica.

Represéntese la fuerza de la gravedad por una línea dada AC; la resistencia por una línea indefinida AK; la fuerza absoluta en el descenso del cuerpo por la diferencia KC; la velocidad del cuerpo por la línea AP, que sea media proporcional entre AK y AC, y por tanto como la raíz cuadrada de la resistencia; el incremento de la resistencia producido en una partícula de tiempo dada por el segmento KL, y el incremento simultáneo de velocidad por el segmento PQ; y con centro en C y con las asíntotas rectangulares CA, CH trácese una hipérbola BNS que corte a las perpendiculares AB, KN, LO, en los puntos B, N, O. Puesto que AK es como AP^2, el momento KL de éste será como el momento 2APQ de aquél, esto es, como AP x KC; pues el incremento PQ de la velocidad (por la Ley II del movimiento) es proporcional a la fuerza generatriz KC. Multiplicando la razón de KL por la razón de KN se tendrá el rectángulo KL x KN que será como AP x KC x KN; esto es, por estar dado el rectángulo KC x KN, como AP. Pero la razón última del área hiperbólica KNOL al rectángulo KL x KN cuando coinciden los puntos K y L es la de igualdad. Luego dicha área hiperbólica evanescente es como AP. Por tanto, toda el área hiperbólica ABOL se compone de partículas KNOL siempre proporcionales a la velocidad AP, y en consecuencia es proporcional al espacio descrito con dicha velocidad. Divídase ahora la susodicha área en partes iguales ABMI, IMNK, KNOL, etcétera, y las fuerzas absolutas AC, IC, KC, LC, etc., estarán en proporción geométrica. Q. E. D. Y por el mismo argumento, cuando el cuerpo asciende, tomando, hacia el lado contrario del punto A, las áreas iguales AB*mi*, *imnk*, *knol*, etc., se verá que las fuerzas absolutas AC, *i*C, *k*C, *l*C, etc., son continuamente proporcionales. Y por lo tanto, si en el ascenso y en el descenso se toman iguales todos los espacios, todas las fuerzas absolutas *l*C, *k*C, *i*C, AC, IC, KC, LC, etc., serán continuamente proporcionales. Q. E. D.



COROLARIO 1. De aquí que si se representa el espacio recorrido mediante el área hiperbólica ABNK, la fuerza de la gravedad, la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio pueden representarse respectivamente por las líneas AC, AP y AK; y viceversa.

COROLARIO 2. Y la línea AC viene a ser la representación de la velocidad máxima que puede alcanzar un cuerpo en un descenso infinito.

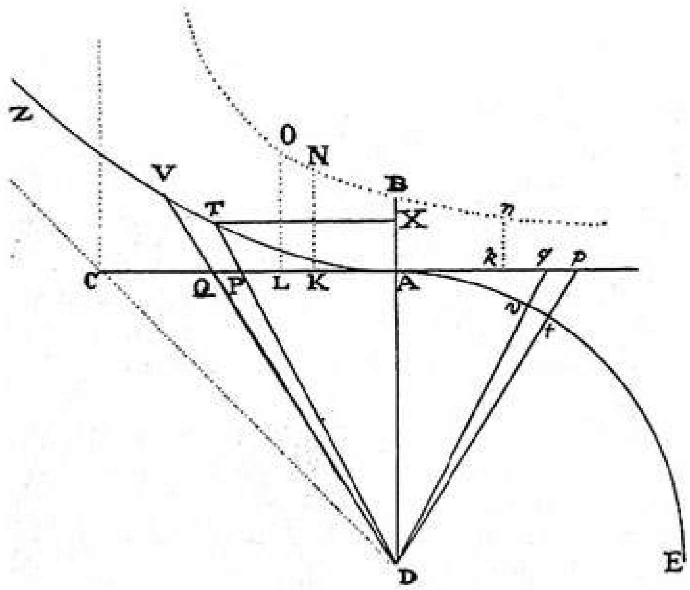
COROLARIO 3. Por tanto, si se conoce la resistencia de un medio a una velocidad dada, se hallará la velocidad máxima tomando a ésta con relación a dicha velocidad dada como la raíz cuadrada de la razón entre la fuerza de la gravedad y la resistencia dada del medio ya conocida.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA VII

Supuesto lo ya demostrado, digo que si las tangentes de los ángulos de un sector circular y de un sector hiperbólico se toman proporcionalmente a las velocidades, siendo el radio de una magnitud determinada, el tiempo total de ascenso hasta el punto más alto será como el sector del círculo, y el tiempo total de descenso desde el punto más alto como el sector de la hipérbola.

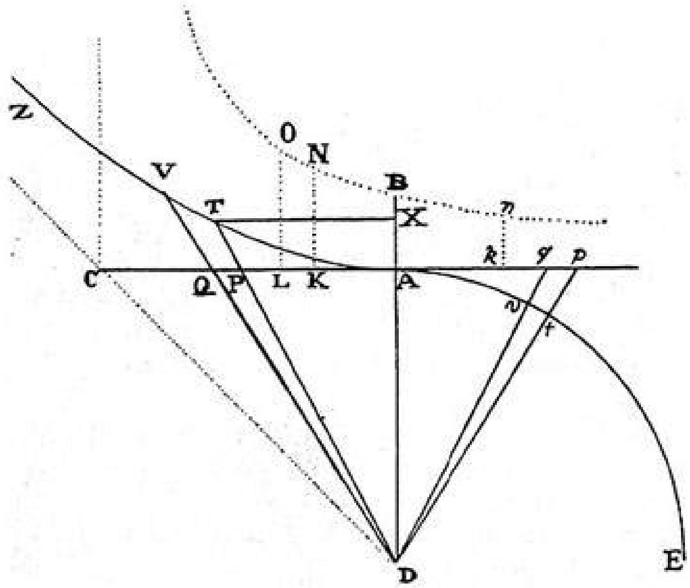
Trácese AD perpendicular e igual a la recta AC que representa a la fuerza de la gravedad. Con centro en D y semidiámetro AD, trácese tanto el cuadrante de círculo A*t*E, como la hipérbola rectangular AVZ que tiene como eje AX, el vértice principal en A y la asíntota DC. Únanse D*p*, DP y el sector circular A*t*D será como el tiempo total de ascenso al punto más alto; y el sector hiperbólico ATD como el tiempo total de descenso desde el punto más alto, mientras las tangentes A*p*, AP de los sectores sean como las velocidades.

CASO 1. Trácese D*vq* de modo que corte los momentos del sector AD*t* y del triángulo AD*p*, o partículas mínimas descritas al mismo tiempo *t*D*v*, y *q*D*p*. Como dichas partículas, por tener el mígalo D común, son como el cuadrado de los lados, la partícula *t*D*v* será como $\frac{q\mathrm{D}p \text{ x } t\mathrm{D}^2}{p\mathrm{D}^2}$, esto es, por estar dada *t*D, como $\frac{q\mathrm{D}p}{p\mathrm{D}^2}$. Pero $p\mathrm{D}^2$ es $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{A}p^2$, es decir, AD^2 + AD x A*k*, o, AD x C*k*, y *q*D*p* es ½ AD x *pq*. Por lo tanto, *t*D*v*, la partícula del sector, es como *pq*/C*k*; esto es, directamente como el decremento mínimo de la velocidad *pq*, e inversamente como la fuerza C*k* que hace disminuir la velocidad; y por tanto como la partícula de tiempo correspondiente al decremento de la velocidad. Y, componiendo, la suma de todas las partículas *t*D*v* en el sector AD*t* vendrá a resultar como la suma de las partículas de tiempo correspondientes a cada partícula *pq* perdida de la velocidad decreciente A*p*, hasta que dicha velocidad, disminuyendo hasta anularse, desaparezca; esto es, el sector completo AD*t* es como el tiempo total de ascenso hasta el punto más alto. Q. E. D.



CASO 2. Trácese DQV tal que corte las partículas mínimas TDV y PDQ tanto del sector DAV como del triángulo DAQ; y dichas partículas serán entre sí como DT^2 a DP^2, esto es (si TX y AP son paralelas) como DX^2 a DA^2 o TX^2 a AP^2 y, por partes, como $DX^2 - TX^2$ a $DA^2 - AP^2$. Pero, por la naturaleza de la hipérbola, $DX^2 - TX^2$ es AD^2, y por hipótesis, AP^2 es AD x AK. Luego, las partículas son entre sí como AD^2 a AD^2 - AD x AK; esto es, como AD a AD - AK, o también, AC a CK; y por ello la partícula TDV del sector es $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; y por estar dadas AC y AD, como PQ/CK, esto es, directamente como el incremento de la velocidad e inversamente como la fuerza que genera el incremento. Y, componiendo, se tendrá la suma de las partículas de tiempo en las cuales se generan todas las partículas PQ de la velocidad AP, que vendrá a ser como la suma de las partículas del sector ATD, esto es, el tiempo total como el sector total. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que, si AB es igual a la cuarta parte de AC, el espacio recorrido por un cuerpo que cae en un tiempo cualquiera será al espacio que puede recorrer dicho cuerpo con la velocidad máxima AC, moviéndose uniformemente durante el mismo tiempo, como el área ABNK, que representa el espacio recorrido en la caída, al área ATD, que representa el tiempo. Pues, dado que AC es a AP como AP a AK, LK será (por el corolario 1 del Lema II de este libro) a PQ como 2AK a AP, esto es, como 2AP a AC, y por ello LK a ½PQ como AP a ¼AC o AB; pero KN es a AC o AD como AB a CK; y por tanto, «*ex aequo*», LKNO es a DPQ como AP a CK. Pero DPQ era a DTV como CK a AC. Luego «*ex aequo*» otra vez, LKNO es a DTV como AB a AC; esto es, como la velocidad del cuerpo que cae a la velocidad máxima que puede adquirir el cuerpo al caer. Puesto que los momentos LKNO y DTV de las áreas ABNK y ATD son como las velocidades, todas las partes de dichas áreas generadas en los mismos tiempos, serán como los espacios recorridos en los mismos tiempos y, por lo mismo, las áreas totales ABNK y ATD generadas desde el principio serán como los espacios totales recorridos desde el comienzo del descenso. Q. E. D.



COROLARIO 2. Y lo mismo se sigue para el espacio recorrido en el ascenso. A saber, que dicho espacio total es al espacio recorrido con velocidad uniforme AC en el mismo tiempo, como el área AB*nk* al sector AD*t*.

COROLARIO 3. La velocidad del cuerpo que cae en el tiempo A I D es a la velocidad que adquiriría en el mismo tiempo en un espacio sin resistencia, como el triángulo APD al sector hiperbólico ATD. Pues la velocidad en un medio no resistente sería como el tiempo ATD, mientras en un medio resistente es como AP, esto es, como el triángulo APD. Y estas velocidades al comienzo del descenso son iguales entre sí, como lo son las áreas ATD, APD.

COROLARIO 4. Por la misma razón la velocidad en el ascenso es a la velocidad con la cual un cuerpo en un espacio no resistente perdería todo su movimiento ascendente, como el triángulo A*p*D al sector circular A*t*D, o como la recta A*p* al arco A*t*.

COROLARIO 5. Por lo tanto, el tiempo en el cual un cuerpo, cayendo en un medio resistente, adquiriría la velocidad AP es al tiempo en el cual adquiriría la velocidad máxima AC cayendo en un espacio no resistente, como el sector ADT al triángulo ADC: y el tiempo en el cual perdería ascendiendo en un medio resistente la velocidad A*p* será al tiempo en el cual puede perder la misma velocidad ascendiendo en un espacio no resistente, como el arco A*t* a su tangente A*p*.

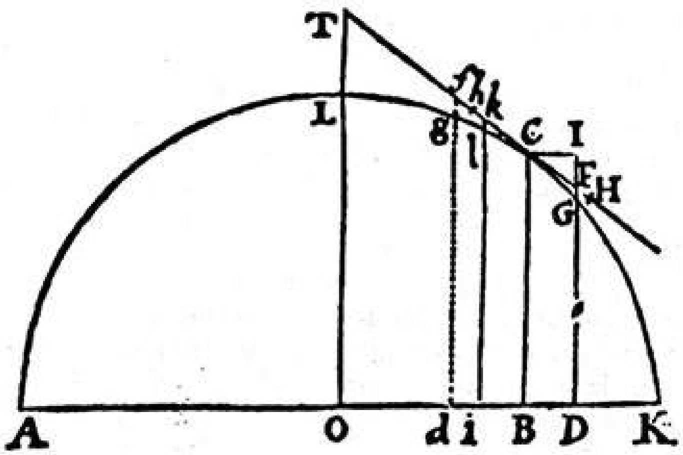
COROLARIO 6. De aquí que, dado el tiempo, está dado el espacio recorrido en el ascenso o en el descenso. Pues la velocidad máxima de un cuerpo que desciende hasta el infinito está dada (por los Corolarios 2 y 3 del Teorema VI del Libro II) y con ello se da el tiempo en el cual el cuerpo puede alcanzar dicha velocidad cayendo en un espacio no resistente. Y tomando el sector ADT o AD*t* respecto al triángulo ADC en la razón del tiempo dado al tiempo recién hallado, se tendrán tanto la velocidad AP o A*p* como el área ABNK o AB*nk* que es al sector ADT o AD*t* como el espacio buscado al espacio que, en un tiempo dado, y con la velocidad máxima ya antes hallada, podría recorrer uniformemente.

COROLARIO 7. Y en sentido inverso, a partir de los espacios dados de ascenso o descenso AB*nk* o ABNK, se tendrá el tiempo AD*t* o ADT.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA III[4]

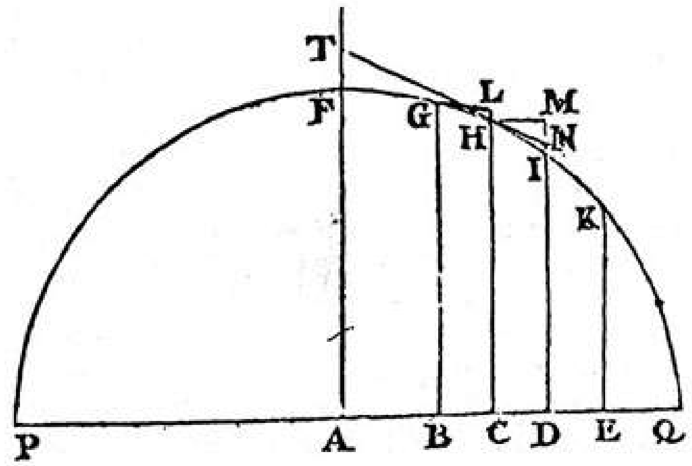
Suponiendo que la fuerza uniforme de la gravedad tiende directamente hacia el plano del horizonte, y que la resistencia del medio es como la densidad del mismo y el cuadrado de la velocidad conjuntamente: hallar tanto la densidad del medio en cada punto capaz de obligar al cuerpo a moverse en una curva dada cualquiera, como la velocidad del cuerpo y la resistencia del medio en cada punto.

Sea PQ un plano perpendicular al plano de la figura; PFHQ una línea curva que corta a dicho plano en los puntos P y Q; G, H, I, K, cuatro lugares del cuerpo que recorre dicha curva desde F hacia Q; y GB, HC, ID, KE, cuatro paralelas ordenadas trazadas desde dichos puntos sobre el plano horizontal y que caen sobre la línea horizontal PQ en los puntos B, C, D, E; y sean iguales las distancias BC, CD, DE, comprendidas entre esas ordenadas. Desde los puntos G y H trácense las rectas GL, HN, tangentes a la curva en G y H, y cortando a las ordenadas CH, DI, prolongadas hacia arriba en L y N, y complétese el paralelogramo HCDM. Y los tiempos en los cuales el cuerpo describe los arcos GH, HI, serán como la raíz cuadrada de las alturas LH, NI que describiría el cuerpo en dichos tiempos, cayendo desde las tangentes; y las velocidades serán como las longitudes recorridas GH, HI, directamente e inversamente como los tiempos. Represéntense los tiempos por T y *t* y las velocidades por GH/T y HI/*t*; y el decremento de la velocidad ocurrido en el tiempo *t* represéntese por $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{HI}}{t}$. Este decremento surge de la resistencia que retarda al cuerpo y de la gravedad que lo acelera. La gravedad genera, en un cuerpo que cae y al caer recorre el espacio NI, una velocidad capaz de hacer al cuerpo recorrer un espacio doble de aquel en el mismo tiempo, como demostró GALILEO; esto es, 2NI/*t*; pero en el cuerpo que describe el arco HI solamente aumenta en dicho arco la longitud HI - HN o $\frac{\mathrm{MI} \times \mathrm{NI}}{\mathrm{HI}}$; y, por lo mismo, tan sólo genera la velocidad $\frac{2\mathrm{MI} \times \mathrm{NI}}{t \times \mathrm{HI}}$. Añádase esta velocidad al decremento antedicho, y se tendrá el decremento de la velocidad debido a la sola resistencia, a saber, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Y por tanto, puesto que en el mismo tiempo la gravedad genera en un cuerpo que cae la velocidad $\frac{2NI}{t}$, la resistencia será a la gravedad como $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ a $\frac{2NI}{t}$ o como $\frac{t \times GH}{T}$ - HI + $\frac{2MI \times NI}{HI}$ a 2NI.



Y ahora, en lugar de las abscisas CB, CD, CE, escríbase -o, o, 2o. Por la ordenada CH escríbase P, y por MI una serie cualquiera como $Qo + Roo + So^3$ + etc. Y todos los términos de la serie posteriores al primero, a saber, $Roo + So^3$ + etc., serán NI, y las ordenadas DI, EK y BG serán $P - Qo - Roo - So^3$ - etc., $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3$ - etc., y $P + Qo - Roo + So^3$ - etc., respectivamente. Elevando al cuadrado las diferencias de las ordenadas BG - CH y CH - DI y sumando a los cuadrados resultantes los cuadrados de las propias BC, CD se obtendrán $oo + QQoo - 2QRo^3$ + etc., y $oo + QQoo + 2QRo^3$ + etc., cuadrados de los arcos GH, HI, cuyas raíces $o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1 + QQ}}$ y $o\sqrt{1 + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1 + QQ}}$ son los arcos GH y HI. Además, si de la ordenada CH se resta la semisuma de las ordenadas BG y DI, y de la ordenada DI se resta la semisuma de las ordenadas CH y EK quedarán Roo y $Roo + 3So^3$, sagitas de los arcos GI y HK. Pero éstas son proporcionales a los segmentos LH y NI y, por tanto, como el cuadrado de los tiempos infinitamente pequeños T y t; y de aquí que la razón $\frac{t}{T}$ es $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ o $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; mientras que $\frac{t \times GH}{T}$ - HI + $\frac{2MI \times NI}{HI}$, una vez sustituido los valores de t/T, GH, HI, MI y NI por los ahora hallados, resulta

$\frac{3Soo}{2R}$ x $\sqrt{1 + QQ}$. Y puesto que 2NI es 2R*oo*, la resistencia será ahora a la gravedad como $\frac{3Soo}{2R}$ x $\sqrt{1 + QQ}$ a 2R*oo*, esto es, como $3S\sqrt{1 + QQ}$ a 4RR.



Y la velocidad es aquella con la cual un cuerpo partiendo de un punto cualquiera H según la tangente HN podría moverse descendiendo en el vacío por una parábola de diámetro HC y «latus rectum» $\frac{HN^2}{NI}$ o $\frac{1 + QQ}{R}$.

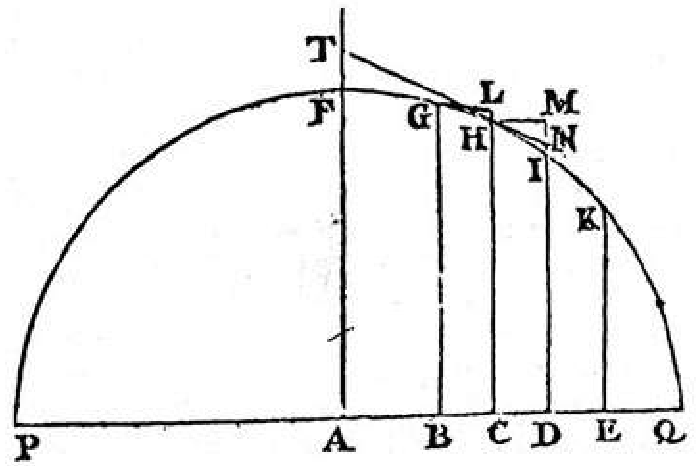
Y la resistencia es como la densidad del medio y el cuadrado de la velocidad conjuntamente, y por tanto la densidad del medio es directamente como la resistencia e inversamente como el cuadrado de la velocidad, esto es, como $\frac{3S\sqrt{1 + QQ}}{4RR}$ directamente y $\frac{1 + QQ}{R}$ inversamente, esto es, como $\frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$. Q. E. I.

COROLARIO 1. Si la tangente HN se prolonga a ambos lados de modo que llegue a cortar a una ordenada cualquiera AF en T, $\frac{HT}{AC}$ será igual a $\sqrt{1 + QQ}$, y por tanto en lo que antecede se puede escribir en lugar de $\sqrt{1 + QQ}$. Por lo cual la resistencia será a la gravedad como 3S x HT a 4RR x AC, la velocidad será como $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ y la densidad del medio como $\frac{S \text{ x } AC}{R \text{ x } HT}$.

COROLARIO 2. Y por ello, si se definiese la línea curva PFHQ mediante la relación entre la base o abscisa AC y la ordenada CH, como es habitual, y el valor de la ordenada se resuelve en una serie convergente, el problema se resuelve rápidamente mediante los primeros términos de la serie, como en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Sea la línea PFHQ un semicírculo descrito sobre el diámetro PQ, y hállese la densidad del medio que obligue a un proyectil a moverse en dicha línea.

Bisecado el diámetro PQ en A, llámese a AQ, *n*; a AC, *a*; a CH, *e*; y a CD, *o*: y DI^2 o $AQ^2 - AD^2$ será igual a: $nn - aa - 2ao - oo$, o también, $ee - 2ao - oo$, y al extraer la raíz según nuestro método, resultará



$$DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

Aquí sustituyase $ee + aa$ por nn y resultará

$$DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

En esta serie distingo entre los términos sucesivos del modo siguiente. Llamo término primero a aquel en el que no se da la cantidad pequeña *o*; segundo a aquel en el que dicha cantidad es de una sola dimensión; tercero al que la contiene con dos; cuarto al que la contiene con tres; y así indefinidamente. Y el término primero, que aquí es *e*, denotará siempre la longitud de la ordenada CH incidente en el comienzo de la cantidad indefinida *o*. El término segundo, que aquí es $\frac{ao}{e}$, denotará la diferencia entre CH y DN, esto es, el segmento MN, que queda cortado al completar el paralelogramo HCDM, y por lo tanto determina siempre la posición de la tangente HN; como en este caso tomando MN a HM como $\frac{ao}{e}$ a *o*, o también *a* a *e*. El tercer término que es aquí $\frac{nnoo}{2e^3}$, denotara el segmento IN que se halla entre la tangente y la curva, y por tanto determina el ángulo de contacto IHN o la curvatura que tiene la línea curva en H. Si dicho segmento IN es de magnitud finita será designada por el término tercero junto con los que le siguen hasta el infinito. Pero si dicho segmento disminuye hasta el infinito, los términos siguientes resultarán infinitamente más pequeños que el tercero y, por tanto, pueden despreciarse. El término cuarto determina la variación de la curvatura, el quinto la variación de la variación y así sucesivamente. De lo cual, de paso, se desprende la utilidad no desdeñable de estas series en la solución de problemas que dependen de tangentes y de la curvatura de las curvas.

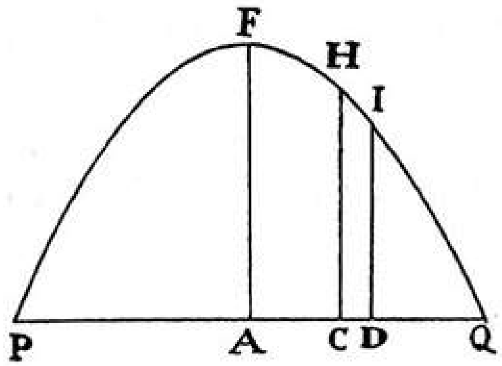
Compárese ahora la serie

$$e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} - \text{etc.}$$

con la serie P - Qo - Roo - So^3 - etc. y después en lugar de P, Q, R y S escríbase e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, $\frac{ann}{2e^5}$ y en lugar de $\sqrt{1 + QQ}$ escríbase $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ o $\frac{n}{e}$, y la densidad del medio resultará como $\frac{a}{ne}$, esto es (por estar n dada) como $\frac{a}{e}$ o como $\frac{AC}{CH}$, es decir, como la longitud de la tangente HT que termina en el semidiámetro AF que se eleva perpendicularmente sobre PQ; mientras la resistencia será a la gravedad como 3a a 2n, esto es, como 3AC al diámetro del círculo PQ; la velocidad en cambio será $\sqrt{CH}$. Por tanto, si el cuerpo parte del punto F, con la velocidad precisa, según una línea paralela a PQ, y la densidad del medio en cada punto H es como la longitud HT de la tangente, y la resistencia es también en cada punto H respecto a la fuerza de la gravedad como 3AC a PQ, dicho cuerpo describirá el cuadrante FHQ del círculo. Q. E. I.

Pero si dicho cuerpo partiese del punto P según una línea perpendicular a PQ, y comenzase a moverse en el arco del semicírculo PFQ, habría que tomar AC o a hacia el otro lado del centro A y por tanto habría que cambiar su signo y escribir -a en lugar de +a. Con ello resultaría la densidad del medio como $-\frac{a}{e}$. Pero la naturaleza no admite una densidad negativa o, lo que es lo mismo, que acelere el movimiento: y por lo tanto no puede acontecer naturalmente que un cuerpo ascendiendo desde P describa el cuadrante PF del círculo. Para esto el cuerpo tendría que ser acelerado por un medio impelente, no ser retardado por un medio resistente.

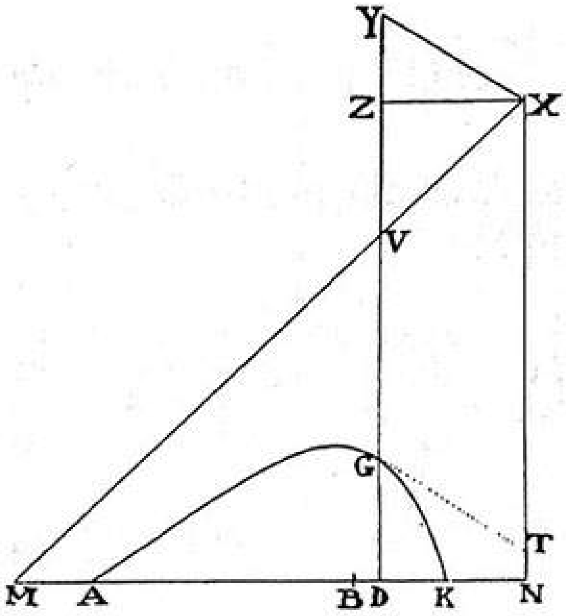
EJEMPLO 2. Sea la línea PFQ una parábola que tiene su eje AF perpendicular a la línea del horizonte PQ, y hállese la densidad del medio que haga que un proyectil se mueva por ella.



De la naturaleza de la parábola se sigue que el rectángulo PDQ es igual al rectángulo comprendido bajo la ordenada DI y una cierta recta dada: esto es, si llamamos a dicha recta b, a PC, a; a PQ, c; a CH, e; y a CD, o; el rectángulo $(a + o) \times (c - a - o)$, o, $ac - aa - 2ao + co - oo$ es igual a $b \times$ DI, y por tanto, DI es igual a $\frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b}o - \frac{oo}{b}$.

Ahora habrá que escribir el segundo término de esta serie $\frac{c - 2a}{b} \times o$, por Qo, mientras el tercero $\frac{oo}{b}$, lo sera en lugar de Roo. Pero como no hay más términos, el coeficiente S del cuarto desaparecerá, con lo cual la cantidad $\frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$ a laque es proporcional la densidad, se anula. Y por consiguiente, un proyectil se moverá en una parábola cuando la densidad del medio sea nula, como ya demostró Galileo. Q. E. I.

EJEMPLO 3. Sea la línea AGK una hipérbola que tiene como asíntota a NX perpendicular al plano horizontal AK; y se trata de hallar la densidad del medio que haga a un proyectil moverse en dicha línea.



Sea MX la otra asíntota que corta a la prolongación de la ordenada DG en V; y por la naturaleza de la hipérbola vendrá dado el rectángulo XV x VG. También estará dada la razón de DN a VX, y por tanto está dado también el rectángulo DN x VG. Sea éste *bb*: y completando el paralelogramo DNXZ, escríbase por BN, *a*; por BD, o; por NX, *c*; y la razón dada de VZ a ZX o DN supongamos que es $\frac{m}{n}$. Y entonces DN será igual a $a - o$, VG igual $\frac{bb}{a - o}$, VZ igual a $\frac{m}{n}(a - o)$ y GD o NX - VZ - VG igual a

$$c - \frac{m}{n}\mathrm{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a - o}\ ,$$

Resuélvase el término $\frac{bb}{a - o}$ en la serie convergente

$$\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3\text{, etc.;}$$

y GD resultará igual a

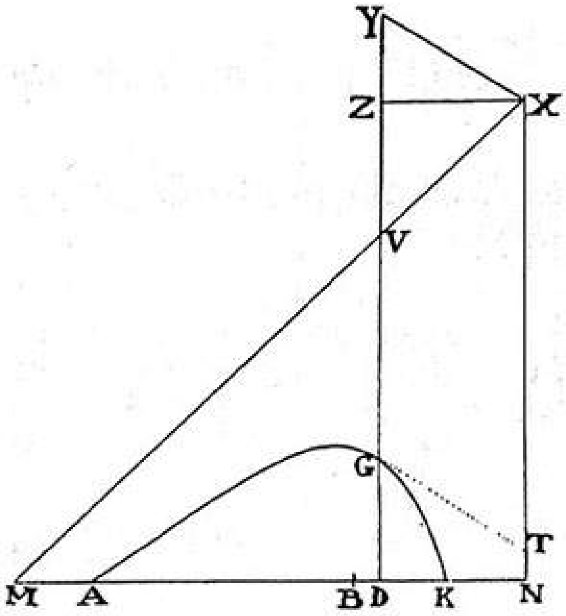
$$c - \frac{m}{n}\mathrm{a} - \frac{bb}{a}o + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3\text{, etc.}$$

El segundo término, $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$, de esta serie ha de tomarse por Q*o*, el tercero con el signo cambiado, $\frac{bb}{a^3}o^2$, por Ro^2, el cuarto también con el signo cambiado, $\frac{bb}{a^4}o^3$ por So^3, y sus coeficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ y $\frac{bb}{a^4}$ deben ponerse en la regla anterior en lugar de Q, R y S. Una vez hecho esto, la densidad del medio resultará como

$$\frac{bb/a^4}{bb/a^3 \sqrt{1 + mm/nn - 2mbb/naa + b^4/a^4}}$$

o como, $\frac{1}{\sqrt{aa + mm/nn\, aa - 2mbb/n + b^4/aa}}$, esto es, si sobre VZ se toma VY igual a VG, como $\frac{1}{\mathrm{XY}}$. Porque aa y $\frac{mm}{nn}aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ son los cuadrados de XZ y de ZY. Luego la razón de la resistencia a la gravedad es la de 3XY a 2TG; y la velocidad es aquella con la que un cuerpo recorrería una parábola que tuviese el vértice G, el diámetro DG, y el «latus rectum» $\frac{\mathrm{XY}^2}{\mathrm{VG}}$. Supóngase también que las densidades del medio en cada punto G son inversamente como las distancias XY, y que la resistencia en un punto G es a la gravedad como 3XY a 2YG; y un cuerpo lanzado desde el punto A con la velocidad adecuada describirá la hipérbola dicha AGK. Q. E. I.

EJEMPLO 4. Supóngase indefinidamente que la línea AGK es una hipérbola con centro en X, descrita entre las asíntotas MX, NX, de tal modo que, construido el rectángulo XZDN, cuyo lado ZD corte a la hipérbola en G y a su asíntota en V, y fuese VG inversamente como ZX o DN a una potencia cualquiera DN^n, cuyo índice es el número n; y se busca la densidad del medio con la cual un proyectil recorra dicha curva.



Escríbanse A, O, C, en lugar de BN, BD, NX respectivamente, y sea VZ a XZ o DN como *d* a *e*, y VG igual a $\frac{bb}{\mathrm{DN}^3}$; y DN será igual a A - O, VG= $\frac{bb}{(\mathrm{A - O})^n}$, VZ= $\frac{d}{e}$(A - O), y GD o NX - VZ - VG igual a C - $\frac{d}{e}$A + $\frac{d}{e}$O - $\frac{bb}{(\mathrm{A - O})^n}$. Resuélvase el termino $\frac{bb}{(\mathrm{A - O})^n}$ en la serie infinita

$$\frac{bb}{\mathrm{A}^n} + \frac{nbb}{\mathrm{A}^{n+1}}\,\mathrm{O} + \frac{nn+n}{2\mathrm{A}^{n+2}}\,bb\mathrm{O}^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6\mathrm{A}^{n+3}}\,bb\mathrm{O}^3, \text{etc.}$$

y GD será igual a

$$\mathrm{C} - \frac{d}{e}\,\mathrm{A} - \frac{bb}{\mathrm{A}^n} + \frac{d}{e}\,\mathrm{O} - \frac{nbb}{\mathrm{A}^{n+1}}\,\mathrm{O}$$

$$- \frac{+nn+n}{2\mathrm{A}^{n+2}}\,bb\mathrm{O}^2 - \frac{+n+3nn+2n}{6\mathrm{A}^{n+3}}\,bb\mathrm{O}^3$$

etcétera. El segundo término, $\frac{d}{e}$O - $\frac{nbb}{\mathrm{A}^{n+1}}$O, de esta serie habrá de tomarse por Q*o*, mientras el tercero, $\frac{nbb+n}{2\mathrm{A}^{n+2}}bb\mathrm{O}^2$, lo será por R$o^2$, el cuarto, $\frac{n^3+3nn+2n}{6\mathrm{A}^{n+3}}bb\mathrm{O}^3$, por

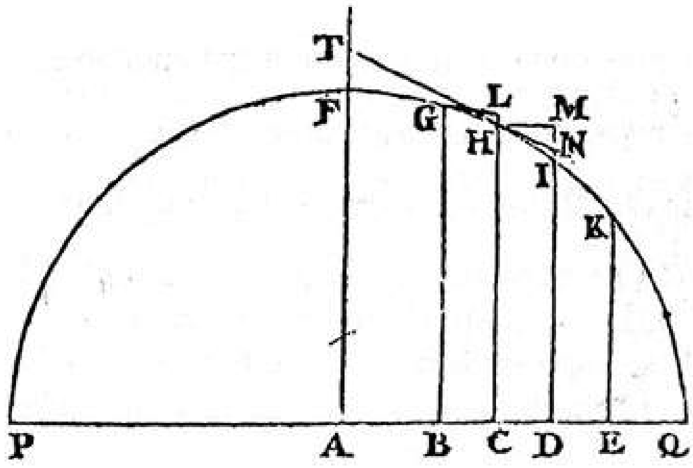
So^3. Y de aquí que la densidad del medio, $\frac{S}{R\sqrt{1 + QQ}}$, en un punto G cualquiera resulte

$$\frac{n + 2}{3\sqrt{a^2 + {}^{dd}\!/_{ee}A^2 - {}^{2dnbb}\!/_{eA^n}A + {}^{nnb^4}\!/_{A^{2n}}}}$$

y por lo tanto, si sobre VZ se toma VY igual a n x VG, dicha densidad es inversamente como XY. Porque A^2 y $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ son los cuadrados de las propias XZ y ZY. Y la resistencia en el mismo punto G se hace respecto a la gravedad como 3S x $\frac{XY}{A}$ a 4RR, es decir, como XY a $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$VG. Y la velocidad es allí la misma que aquella con la cual el cuerpo lanzado se movería en una parábola con vértice en G, diámetro GD y «latus rectum» $\frac{1 + QQ}{R}$ o $\frac{2XY^2}{(nn + n) \text{ x } VG}$. Q. E. I.

Escolio

Por la misma razón por la que en el Corolario primero resulta la densidad del medio como $\frac{S \text{ x } AC}{R \text{ x } HT}$, si la resistencia se supone como una potencia cualquiera V^n de la velocidad V, la densidad del medio resultará como $\frac{S}{R^{4 - n/2}}$ x $\left(\frac{AC}{HT}\right)^{n - 1}$. Y por lo tanto, si la curva puede ser establecida de modo que responda a la razón de $\frac{S}{R^{4 - n/2}}$ a $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n - 1}$, o $\frac{S^2}{R^{4 - n}}$ a $(1 + QQ)^{n - 1}$, el cuerpo se moverá en dicha curva en un medio uniforme con resistencia que sea como la potencia V^n de la velocidad. Pero volvamos a curvas más sencillas.

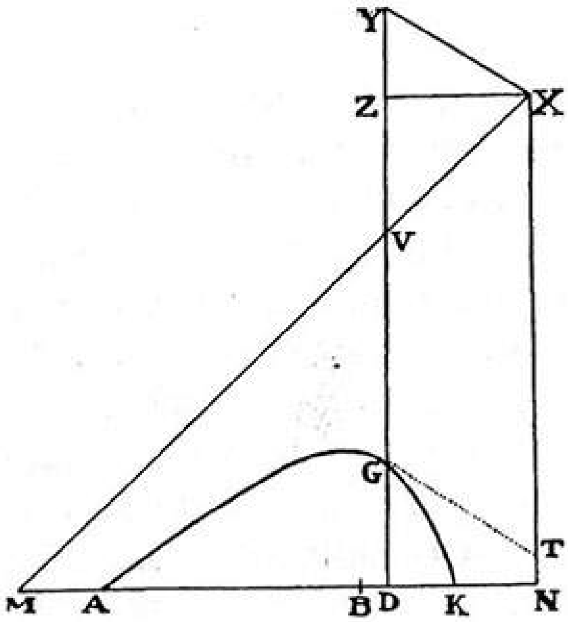


Puesto que el movimiento no ocurre en parábolas salvo en medios no resistentes, mientras que en las hipérbolas descritas aquí ocurre con resistencia continua, es evidente que la línea descrita por un proyectil en un medio uniformemente resistente se acerca más a estas hipérbolas que a una parábola. La línea es ciertamente de naturaleza hiperbólica, pero tal que en el vértice dista más de las asíntotas y en las partes lejanas del vértice se acerca más a las asíntotas de lo que se refleja en las hipérbolas aquí descritas. Sin embargo, la diferencia entre éstas y aquélla no es tan acusada como para impedir el uso adecuado de unas por otra en la práctica. Y quizá sean más útiles éstas que una hipérbola más exacta y a la vez más compleja. Por lo demás pueden utilizarse como sigue.

Complétese el paralelogramo HYGT, y la recta GT tocará a la hipérbola en G, y por tanto la densidad del medio en G es inversamente como la tangente GT, y la velocidad en ese punto como $\frac{GT^2}{GV}$, la resistencia, en cambio, respecto a la fuerza de la gravedad es como GT a $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ x GV.

Por tanto, si un cuerpo lanzado desde el punto A, según la línea AH describiere la hipérbola AGK, y prolongada AH cortase a la asíntota NX en H, y trazada AI paralela a la anterior cortase a la otra asíntota MX en I; la densidad del medio será en A inversamente como AH, y la velocidad del cuerpo como $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, y la resistencia respecto a la gravedad en ese punto como AH a $\frac{2nn + 2n}{n + 2}$ x AI. De donde se deducen las siguientes reglas.

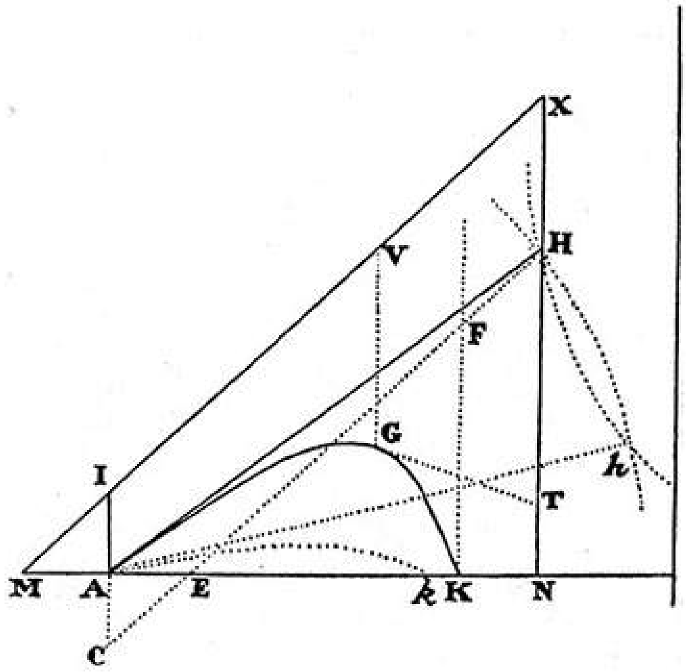
REGLA 1. Si se mantienen tanto la densidad del medio en A como la velocidad con que se lanza el cuerpo, y se cambia el ángulo NAH, se mantendrán las longitudes AH, AI, HX. Y por tanto, si dichas longitudes fuesen halladas en algún caso, podrá determinarse la hipérbola sin dificultad a partir de un ángulo NAH cualquiera dado.



REGLA 2. Si se mantienen el ángulo NAH y la densidad del medio en A, pero se cambia la velocidad con que se proyecta al cuerpo, se mantendrá la longitud AH, y variará IA en razón inversa del cuadrado de la velocidad.

REGLA 3. Si se mantienen el ángulo NAH, la velocidad del cuerpo en A y la gravedad aceleratriz, mientras se aumenta la proporción de la resistencia en A respecto a la gravedad motriz según una razón cualquiera, la proporción de AH a AI aumentará en la misma razón, pero se mantendrá el «latus rectum» de la parábola susodicha y la proporcionalidad a él de la longitud $\frac{AH^2}{AI}$; y por tanto, AH disminuye en esa proporción, mientras AI disminuye como el cuadrado de dicha razón. Pero la proporción de la resistencia al peso aumenta, tanto si a igual tamaño la gravedad específica es menor, como si la densidad del medio es mayor, o si la resistencia, a menor tamaño, disminuye en menor razón que el peso.

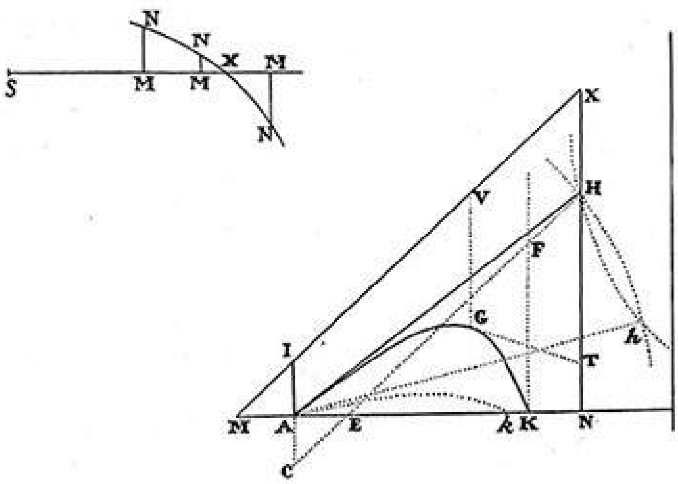
REGLA 4. Puesto que la densidad del medio es mayor cerca del vértice de la hipérbola que en el punto A, para obtener la densidad media debe hallarse la razón de la menor de las tangentes GT a la tangente AH, y aumentar la densidad en A en una razón algo mayor que la de la semisuma de estas tangentes respecto a la menor de las tangentes GT.



REGLA 5. Si se dan las longitudes AH, AI y hay que trazar la figura AGK; prolónguese HN hasta X, de modo que HX sea a AI como n + 1 a 1, y con centro en X y asíntotas MX, NX trácese la hipérbola por el punto A, de tal suerte que AI sea a cualquiera VG como XV^n a XI^n.

REGLA 6. Cuanto mayor es el número n, tanto más exactas son estas hipérbolas al ascender el cuerpo desde A y tanto menos exactas en su descenso hacia K; y viceversa. La hipérbola cónica goza de una razón media y es más simple que las otras. Por lo cual, si la hipérbola es de este tipo y hay que hallar el punto K, en el cual el cuerpo lanzado incide sobre una recta cualquiera AN que pasa por el punto A: la recta AN prolongada corte a las asíntotas MX, NX, en M y N, y tómese NK igual a AM.

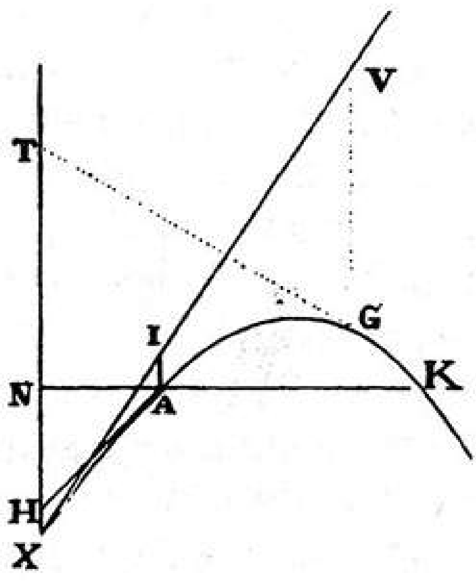
REGLA 7. Y de aquí se sigue un método expeditivo para determinar esta hipérbola partiendo de fenómenos. Láncense dos cuerpos semejantes e iguales, con la misma velocidad, con ángulos distintos AHK, *h*A*k*, que caigan sobre el plano horizontal en K y *k*; y anótese la proporción de AK a A*k*. Sea ésta *d* a *e*. Levantando ahora una perpendicular AI de una longitud cualquiera, señálese en cualquier forma la longitud AH o A*h*, y desde esto, mediante la Regla 6, obténgase gráficamente la longitud de AK y de A*k*. Si la razón de AK a A*k* es la misma que la de *d* a *e*, la longitud AH se tomó correctamente. Pero si es menor, tómese sobre la recta indefinida SM la longitud SM igual a la longitud asumida AH y elévese la perpendicular MN igual a la diferencia de las razones $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A}k} - \frac{d}{e}$ multiplicada por una recta dada cualquiera. Con método semejante, a partir de la asunción de varias longitudes AH se tendrán varios puntos N, y por todos ellos se hará pasar una curva regular NNXN que corta en X a la recta SMMM. Asúmase por fin AH igual a la abscisa SX; de nuevo determínese desde aquí la longitud AK; y las longitudes, que sean respecto a la asumida longitud AI y a esta última AH como la longitud AK conocida experimentalmente a la longitud AK últimamente hallada, serán las verdaderas longitudes AI y AH que era preciso hallar. Pero una vez dadas éstas, también estará dada la resistencia del medio en el lugar A, toda vez que ésta será a la fuerza de la gravedad como AH a 2AI. Y aumentando la densidad del medio según la Regla 4, si la resistencia así hallada aumenta en la misma proporción, será aún más exacta.



REGLA 8. Halladas las longitudes AH, HX; si ahora se busca la posición de la recta AH, según la cual, un proyectil lanzado con aquella velocidad, incidirá sobre un punto cualquiera K, elévense por los puntos A y K las rectas AC, KF perpendiculares al horizonte, de ellas AC en dirección hacia abajo y que sea igual a AI o a ½HX. Con asíntotas AK, KF trácese una hipérbola cuya conjugada pase por el punto C, y con centro en A y distancia AH trácese un círculo que corte a dicha hipérbola en el punto H; y el proyectil lanzado según la recta AH caerá en el punto K. Q. E. I. Porque el punto H, debido a la longitud dada AH, está ubicado en un punto del círculo descrito. Trácese CH de modo que encuentre a AK y KF en E y F respectivamente; y por ser paralelas CH y MX, y por ser iguales AC y AI, AE será igual a AM, y por tanto también a KN. Pero CE es a AE como FH a KN, y por tanto CE y FH son iguales. Luego el punto H cae sobre la hipérbola descrita con asíntotas AK, KF, cuya conjugada pasa por el punto C, y por lo tanto se halla en la intersección de esta hipérbola y el círculo descrito. Q. E. D. Pero hay que observar que esta operación resulta lo mismo, tanto si la recta AKN es paralela al horizonte, como si está inclinada respecto a él en algún ángulo; y que de las dos intersecciones H, *h*, surgen dos ángulos NAH, NA*h*; y que en la práctica mecánica basta con describir un solo círculo y después aplicar una línea indefinida CH sobre el punto C de modo que su sección comprendida entre el círculo y la recta FK sea igual a la parte CE situada entre el punto C y la recta AK.

Lo dicho sobre las hipérbolas se aplica fácilmente a las parábolas. Efectivamente, si

XAGK representa una parábola a la cual XV es tangente en el vértice X, y las ordenadas IA, VG fuesen como unas potencias cualesquiera XI^n, XV^n de las abscisas XI, XV; trácense XT, GT, AH, de las cuales XT sea paralela a VG, y GT, AH sean tangentes de la parábola en G y A: y un cuerpo lanzado desde un lugar cualquiera A, según la línea AH prolongada, y con la velocidad adecuada, describirá esta parábola, siempre que la densidad del medio en cada lugar G sea inversamente como la tangente GT. La velocidad en G será aquella con la cual se desplazaría el proyectil en un espacio no resistente en una parábola cónica de vértice G, diámetro prolongado hacia abajo VG, y «latus rectum» $\frac{2GT^2}{(nn - n) \times VG}$. Y la resistencia en G será a la fuerza de la gravedad como GT a $\frac{2nn - 2n}{n - 2}$ VG. De donde si NAK representa una línea horizontal y se mantienen tanto la densidad del medio en A como la velocidad con la cual se lanza al cuerpo, mientras varía el ángulo NAH, las longitudes AH, AI, HX, permanecerán, y de aquí se tiene dado el vértice X de la parábola, la posición de la recta XI, y, tomando VG a IA como XV^n a XI^n, se tienen dados los puntos todos G de la parábola por los cuales pasará el proyectil.

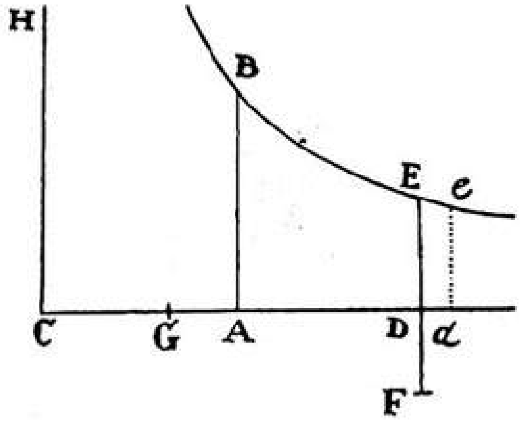


Sección III
SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS A LOS QUE SE RESISTE PARTE EN RAZÓN DE LAS VELOCIDADES Y PARTE EN RAZÓN DEL CUADRADO DE DICHA RAZÓN

Proposición XI. Teorema VIII

Si se resiste a un cuerpo parte en razón de su velocidad y parte en razón del cuadrado de su velocidad, y se mueve en un medio uniforme con su sola fuerza ínsita, mientras los tiempos se toman en progresión aritmética; las cantidades inversamente proporcionales a las velocidades, aumentadas en una cantidad dada, estarán en progresión geométrica.

Con centro en C y asíntotas rectangulares CAD*d* y CH, trácese la hipérbola BE*e*, y AB, DE, *de*, sean paralelas a la asíntota CH. Sobre la asíntota CD sean dados los puntos A, G: y si el tiempo se representa por el área hiperbólica uniformemente creciente ABED, digo que la velocidad se puede representar por la longitud DF, cuya inversa GD junto con la línea dada CG compone la longitud CD que crece en progresión geométrica.



Pues sea DE*ed* el área mínima correspondiente a un incremento mínimo de tiempo, y D*d* será inversamente como DE, y tanto directamente como CD. Pero el decremento

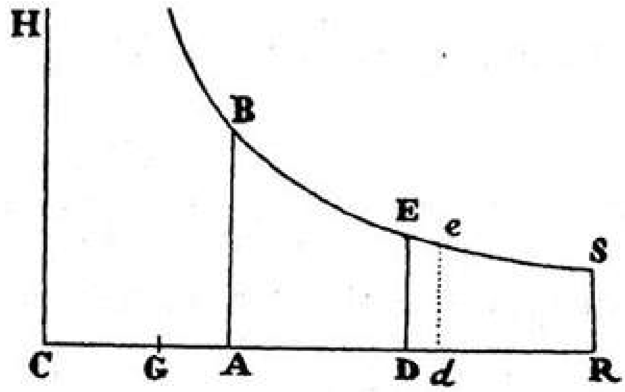
$\frac{1}{GD}$ del mismo, que (por el Lema II de este Libro) es $\frac{Dd}{GD^2}$, sera como $\frac{CD}{GD^2}$ o $\frac{CG + GD}{GD^2}$, esto es, como $\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2}$. Por tanto, al crecer uniformemente el tiempo ABED por la adición de las partículas dadas ED*de*, decrece $\frac{1}{GD}$ junto con la velocidad en la misma razón. Pues el decremento de la velocidad es como la resistencia, esto es (por hipótesis), como la suma de dos cantidades, una de las cuales es como la velocidad y la otra como el cuadrado de la velocidad; y el decremento del propio $\frac{1}{GD}$ es como la suma de las cantidades $\frac{1}{GD}$ y $\frac{CG}{GD^2}$, de las cuales la primera es la misma $\frac{1}{GD}$, y la otra, $\frac{CG}{GD}$, es como $\frac{1}{GD^2}$: por tanto, $\frac{1}{GD}$, por tener el mismo decremento, es como la velocidad. Y si la cantidad GD, inversamente proporcional a $\frac{1}{GD}$, es aumentada en una cantidad dada CG; la suma CD, creciendo uniformemente el tiempo ABED, crecerá en progresión geométrica. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por lo tanto, si dados los puntos A, G, se representa el tiempo por el área hiperbólica ABED, la velocidad puede representarse por $\frac{1}{GD}$, inverso de GD.

COROLARIO 2. Y tomando GA a GD como el inverso de la velocidad al comienzo al inverso de la velocidad al final de un tiempo cualquiera ABED, se hallará el punto G. Hallado éste, se puede hallar la velocidad para cualquier otro tiempo dado.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA IX

Con los mismos supuestos, digo que si los espacios descritos se toman en progresión aritmética, las velocidades, aumentadas en una cantidad dada cualquiera, estarán en progresión geométrica.



Sobre la asíntota CD sea dado el punto R, y elevada la perpendicular RS que encuentre a la hipérbola en S, represéntese el espacio descrito mediante el área hiperbólica RSED; y la velocidad será entonces como la longitud GD, que con la cantidad dada CG compone la longitud CD decreciente en progresión geométrica, mientras el espacio RSED crece en progresión aritmética.

Puesto que, al estar dado el incremento ED*de* del espacio, el segmento D*d*, que es el decremento de la propia GD, será como el inverso de ED y por tanto directamente como CD, esto es como la suma del mismo GD y de la longitud dada CG. Pero el decremento de la velocidad, en el tiempo inversamente proporcional a ella, en el cual es descrita la partícula dada de espacio D*de*E, es una cantidad que es como la resistencia y el tiempo conjuntamente, esto es, directamente como la suma de dos cantidades, de las cuales la una es como la velocidad, la otra como el cuadrado de la velocidad, e inversamente como la velocidad; y por lo tanto, directamente como la suma de dos cantidades, de las cuales la una está dada y la otra es como la velocidad. Por consiguiente, tanto el decremento de la velocidad como el de la línea GD es como una cantidad dada y una cantidad decreciente conjuntamente, y al ser análogos los decrementos, las cantidades decrecientes siempre serán análogas; a saber, la velocidad y la línea GD. Q. E. D.

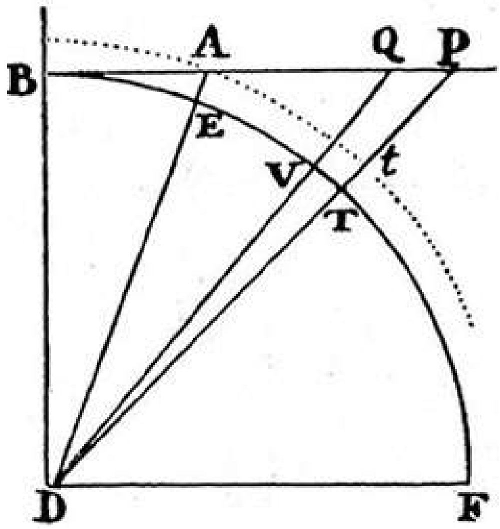
COROLARIO 1. Si la velocidad se representa por la línea GD, el espacio descrito será como el área hiperbólica DESR.

COROLARIO 2. Y si se supone en cualquier parte el punto R, se hallará el punto G tomando GR a GD como es la velocidad inicial a la velocidad tras recorrer un espacio cualquiera RSED. Hallado el punto G, se obtiene el espacio a partir de una velocidad dada y viceversa.

COROLARIO 3. De donde, puesto que (por la Proposición XI) se obtiene la velocidad a partir de un tiempo dado, y por esta Proposición se obtiene el espacio a partir de una velocidad dada; de un tiempo dado se obtendrá el espacio y viceversa.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA X

Supuesto que un cuerpo, atraído hacia abajo por una gravedad uniforme, asciende o *desciende por una recta, y que sufre una resistencia en parte proporcional a la velocidad y en parte proporcional al cuadrado de la velocidad: digo que, si se trazan rectas paralelas a los diámetros de un círculo y de una hipérbola, las cuales pasen por los extremos de los diámetros conjugados, y las velocidades fuesen como ciertos segmentos de las paralelas trazados desde un punto dado; los tiempos serán como los sectores de las áreas separados por rectas trazados desde el centro hasta los extremos de los segmentos; y viceversa.*

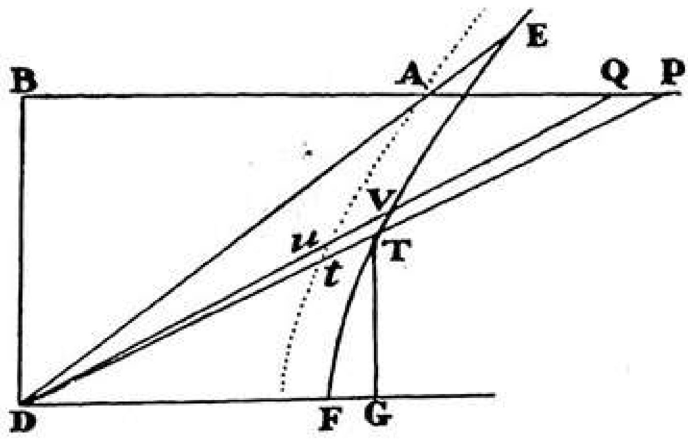


CASO 1. Supongamos primero que el cuerpo asciende, y con centro en D y un semidiámetro cualquiera DB, trácese el cuadrante del círculo BETF, y por el extremo B del semidiámetro DB trácese la recta indefinida BAP paralela al semidiámetro DF. Sobre ella sea dado el punto A, y tómese el segmento AP proporcional a la velocidad. Y puesto que una parte de la resistencia es como la velocidad y otra parte como el cuadrado de la velocidad, la resistencia total será como $AP^2 + 2BAP$. Únanse DA, DP cortando al círculo en E y T, y represéntese la gravedad por DA^2 de modo que la gravedad sea a la resistencia como DA^2 a $AP^2 + 2BAP$: y el tiempo de todo el ascenso será como el sector EDT del círculo.

Pues, trácese DVQ, separando el momento PQ de la velocidad AP y el momento DTV del sector DET correspondiente a un momento dado de tiempo; y este decremento PQ de la velocidad será como la suma de las fuerzas de la gravedad DA^2 y de la resistencia $AP^2 + 2BAP$, esto es (por la Proposición XII del Libro II de los Elementos), como DP^2. Luego el área DPQ, proporcional a PQ, es como DP^2, y el área DTV, que es al área DPQ como DT^2 a DP^2, es como DT^2 ya dada. Por tanto, el área EDT decrece uniformemente, al modo del tiempo futuro, mediante la pérdida de partículas DTV dadas, y por tanto es proporcional al tiempo de ascenso total. Q. E. D.

CASO 2. Si la velocidad en el ascenso del cuerpo se representa por la longitud AP como antes, y se supone la resistencia como $AP^2 + 2BAP$, y la gravedad fuese menor que la representable por DA^2, tómese entonces la longitud de BD tal que $AB^2 - BD^2$

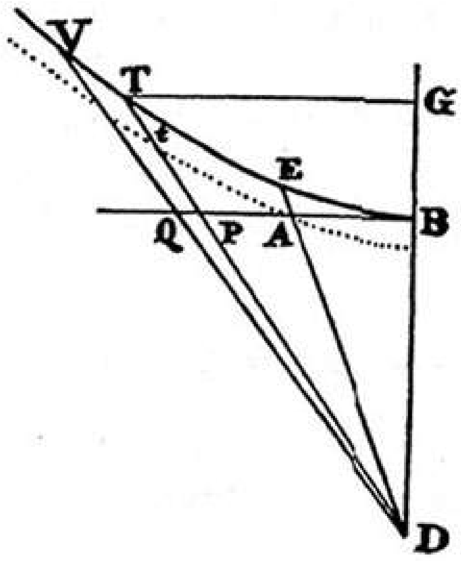
sea proporcional a la gravedad, y DF sea perpendicular e igual a DB, trazando por el vértice F la hipérbola FTVE, de cuyo semidiámetro sean conjugadas DB y DF, la cual hipérbola corta a DA en E, y a DP, DQ, en T y V; y el tiempo de todo el ascenso será como el sector TDE de la hipérbola.



Pues el decremento PQ de la velocidad, ocurrido en una partícula dada de tiempo, es como la suma de la resistencia $AP^2 + 2BAP$ y la gravedad $AB^2 - BD^2$, esto es, como $BP^2 - BD^2$. Pero el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2; y por tanto, si sobre DF cae una perpendicular GT, como GT^2 o GD^2 - DF a BD^2, y como GD^2 a BP^2, y por partes, como DF^2 a $BP^2 - BD^2$. Por lo cual, dado que el área DPQ es como PQ, esto es, como $BP^2 - BD^2$, el área DTV será como la ya dada DF^2. Por consiguiente, el área EDT decrece uniformemente en cada partícula igual de tiempo por sustracción de otras tantas partículas dadas DTV, y por lo mismo es proporcional al tiempo. Q. E. D.

CASO 3. Sea AP la velocidad de descenso de un cuerpo, y $AP^2 + 2BAP$ la resistencia, y $BD^2 - AB^2$ la fuerza de la gravedad, siendo recto el ángulo DBA. Y si con centro en D, vértice principal F, se traza la hipérbola rectangular BETV que corte a las prolongaciones de DA, DP y DQ en E, T y V; el sector DET de esta hipérbola será como el tiempo total de descenso.

Pues el incremento PQ de la velocidad, y el área DPQ proporcional a él, es como el exceso de la gravedad sobre la resistencia, esto es, como $BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2$, o $BD^2 - BP^2$. Y el área DTV es al área DPQ como DT^2 a DP^2, y por tanto, como GT^2 o $GD^2 - BD^2$ a BP^2 y como GD^2 a BD^2 y por partes como BD^2 a $BD^2 - BP^2$. Por lo tanto, dado que el área DPQ es como $BD^2 - BP^2$, el área DTV será como el ya dado BD^2. Crece, pues, el área EDT uniformemente en cada partícula igual de tiempo según se vaya añadiendo cada partícula dada DTV, y por tanto es proporcional al tiempo de descenso. Q. E. D.



Corolario. Si con centro en D y semidiámetro DA se traza por el vértice A el arco A*t*, semejante al arco ET, que subtienda similarmente al ángulo ADT: la velocidad AP será a la velocidad, que podría perder subiendo o adquirir bajando dicho cuerpo en el tiempo EDT en un espacio no resistente, como el área del triángulo DAP al área del sector DA*t*; y por tanto estará dada para un tiempo dado. Pues la velocidad, en un medio no resistente, es proporcional al tiempo y, por ello, a dicho sector; en un medio resistente es como el triángulo; y en ambos, cuando es muy pequeña, se acerca a la razón de igualdad, como ocurre con el sector y el triángulo.

Escolio

El caso podría demostrarse lo mismo en el ascenso de un cuerpo, cuando la fuerza de la gravedad es menor que la que es representable por DA^2 o $AB^2 + BD^2$ y mayor que la representable por $AB^2 - BD^2$, y debe representarse por AB^2. Pero vayamos a otras cosas.

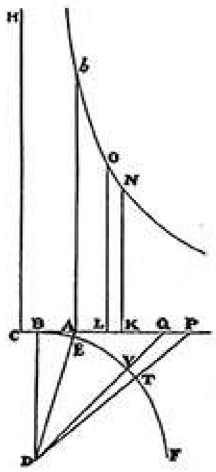
Proposición xiv. Teorema xi[5]

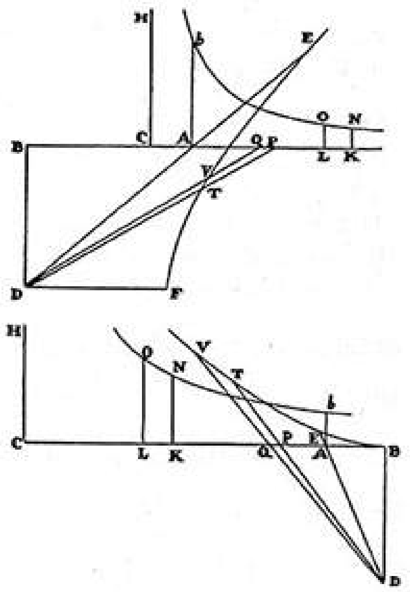
Con los mismos supuestos digo que el espacio descrito en el ascenso o descenso es como la diferencia del área con la que se representa el tiempo, y alguna otra área aumentada o disminuida en progresión aritmética, siempre que las fuerzas compuestas de la resistencia y la gravedad se tomen en progresión geométrica.

Tómese AC (en las tres figuras últimas) proporcional a la gravedad, y AK a la resistencia. Pero tómense hacia el mismo lado del punto A si el cuerpo desciende, y de no ser así en lados opuestos. Elévese A*b* de modo que sea a DB como DB^2 a

4BAC: V una vez trazada la hipérbola *b*N respecto a las asíntotas rectangulares CK, CH, y elevada KN perpendicular a CK, el área A*b*NK aumentará o disminuirá en progresión aritmética, siempre que las fuerzas CK se tomen en progresión geométrica. Por tanto digo que la distancia del cuerpo respecto a su máxima altitud es como el exceso del área A*b*NK sobre el área DET.

Pues, dado que la resistencia es como AK, esto es, como $AP^2 + 2BAP$, supuesta una cantidad dada cualquiera Z, supongamos que AK es igual a $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; y (por el Lema II de este Libro), el momento KL de AK será igual a $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ o a $\frac{2BPQ}{Z}$, y el momento KLON del área A*b*NK será igual a $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ o a $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.





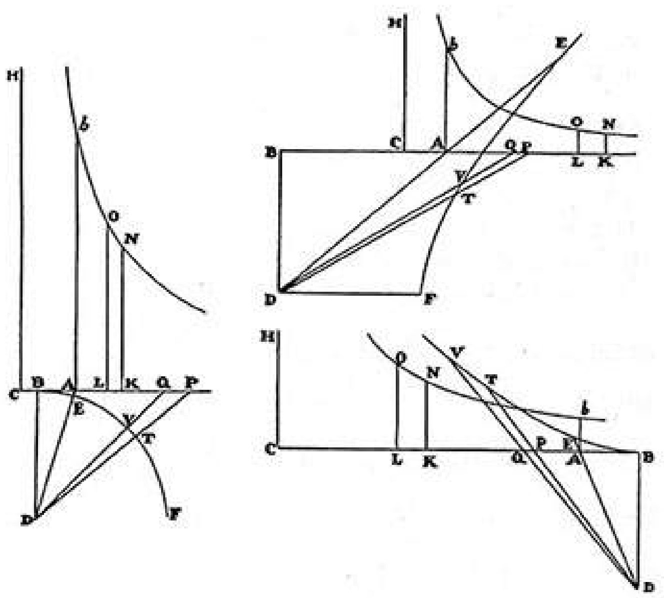
CASO 1. Ahora si el cuerpo está ascendiendo, sea la gravedad como $AB^2 + BD^2$ y siendo BET un círculo (en la primera figura), la línea AC que es proporcional a la gravedad, será $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, y DP^2 o $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$ será AK x Z + AC x Z o también CK x Z; y por tanto, el área DTV será al área DPQ como DT^2 o DB^2 a CK x Z.

CASO 2. Pero si el cuerpo asciende y la gravedad es como $AB^2 - BD^2$, la línea AC (en la segunda figura) será $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$, y DT^2 será a DP^2 como DF^2 o DB^2 a $BP^2 - BD^2$ o $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, esto es, como a AK x Z + AC x Z, o CK x Z. Y por tanto, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a CK x Z.

CASO 3. Y, por la misma razón, si el cuerpo desciende, y por tanto la gravedad es como $BD^2 - AB^2$, y la línea AC (en la tercera figura) es igual a $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, el área DTV será al área DPQ como DB^2 a CK x Z, como antes.

Ahora bien, al estar estas áreas siempre en dicha razón, si el; área DTV, mediante la cual se representa el momento de tiempo siempre igual a ella, es sustituida por un rectángulo cualquiera determinado, tal como BD x *m*, el área DPQ, esto es, ½BD x PQ, será a BD x *m* como CK x Z a BD^2. Y de aquí que PQ x BD^3 sea igual a 2BD x *m* x CK x Z, y el momento KLON del área A*b*NK, hallado antes, sea $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Réstese del área DET el momento DTV, o sea, BD x *m*, y quedará $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Luego, la diferencia de los momentos, esto es, el momento de la diferencia de áreas, es igual a $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, y por tanto, por estar dado $\frac{BD \times m}{AB}$, como la velocidad AP, esto es, como el momento de espacio descrito por el cuerpo en el ascenso o en el descenso. Y, en consecuencia, la diferencia de áreas y dicho espacio, al crecer o decrecer en momentos proporcionales que comienzan y se desvanecen a la vez, son proporcionales. Q. E. D.

COROLARIO. Si se llama M a la longitud que resulta de dividir el área DET por la línea BD, y se toma otra longitud V que esté en razón de la longitud M como la de la línea DA a la línea DE: el espacio descrito por un cuerpo en todo el ascenso o el descenso en un medio resistente será al espacio descrito por un cuerpo en el mismo tiempo cayendo desde un estado de reposo, como la diferencia de las áreas mencionadas a $\frac{BD \times V^2}{AB}$; y por tanto, para un tiempo dado, está dado. Pues, el espacio en un medio no resistente es como el cuadrado del tiempo, o como V^2; y, por estar dadas BD y AB, como $\frac{BD \times V^2}{AB}$. Esta área es igual al área $\frac{DA^2 + BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, y el momento de M es n; y por tanto el momento de dicha área es $\frac{DA^2 \text{ x } BD \text{ x } 2M \text{ x } m}{DE^2 \text{ x } AB}$. Pero este momento es al momento de la diferencia de las áreas antedichas DET y A*b*NK, o sea, a $\frac{AP + BD \text{ x } m}{AB}$, como $\frac{DA^2 \text{ x } BD \text{ x } M}{DE^2}$ a ½BD x AP, o como $\frac{DA^2}{DE^2}$ x DET a DAP, por consiguiente, cuando las áreas DET y DAP son mínimas, están en razón de igualdad. Pues el área $\frac{BD \text{ x } V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK, cuando todas estas áreas son mínimas, tienen iguales momentos, y por lo mismo, son iguales. De donde las velocidades, y por tanto también los espacios recorridos en ambos medios en el mismo tiempo tienden a ser iguales al principio del descenso o al final del ascenso, y por tanto son entonces entre sí como el área $\frac{BD \text{ x } V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK; y además, puesto que el espacio en un medio no resistente es siempre como $\frac{BD \text{ x } V^2}{AB}$ mientras el espacio es un medio resistente es siempre como la diferencia de las áreas DET y A*b*NK: es preciso que los espacios en ambos medios, descritos en tiempos iguales cualesquiera, sean entre sí como dicha área $\frac{BD \text{ x } V^2}{AB}$ y la diferencia de las áreas DET y A*b*NK. Q. E. D.



ESCOLIO[6]

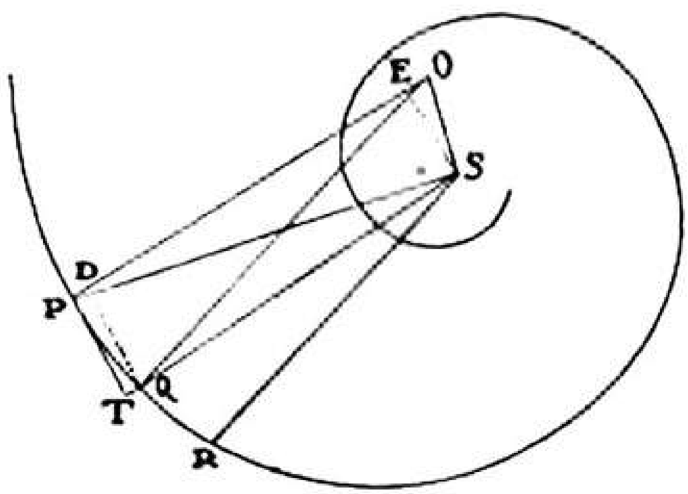
En los fluidos la resistencia de los cuerpos esféricos procede en parte de la tenacidad, en parte del rozamiento y en parte de la densidad del medio. Y la parte de la resistencia procedente de la densidad del fluido es como dijimos, como el cuadrado de la velocidad; la parte procedente de la tenacidad del fluido es uniforme, o sea, como el momento del tiempo; por lo mismo se podría pasar a considerar el movimiento de los cuerpos a los cuales se resiste en parte con una fuerza uniforme, o sea, en razón de los momentos de tiempo, y parte en razón cuadrada de la velocidad. Pero basta haber abierto la puerta para esta especulación en las Proposiciones VIII y IX precedentes y sus Corolarios. Efectivamente, en dichas Proposiciones se puede sustituir la resistencia uniforme a un cuerpo ascendente debida a la gravedad por la resistencia uniforme procedente de la tenacidad del medio, cuando el cuerpo se mueve por la sola fuerza ínsita; y cuando el cuerpo asciende por una recta habrá que añadir esta resistencia uniforme a la fuerza de gravedad; mientras que habrá que restarla, cuando el cuerpo desciende por una recta. También se podría pasar al movimiento de cuerpos a los que se resiste en parte uniformemente, parte en razón de la velocidad y parte en tazón cuadrada de la velocidad. He abierto un camino en las Proposiciones precedentes XIII y XIV, en las que también puede sustituirse la resistencia uniforme debida a la tenacidad del medio en lugar de la fuerza de la gravedad, o componerse con ella como antes. Pero paso a otras cosas.

Sección IV
DEL MOVIMIENTO CIRCULAR DE LOS CUERPOS EN MEDIOS RESISTENTES

Lema III

Sea PQR una espiral que corte todos los radios SP, SQ, SR, etc., en ángulos iguales. Trácese la línea recta PT tangente a la espiral en un punto cualquiera P y que corte al radio SQ en T; y, elevadas las perpendiculares PO, QO a la espiral que concurren en O, únase SO. Digo que si los puntos P y Q se aproximan hasta coincidir, el ángulo PSO resulta recto, y la razón última del rectángulo TQ x 2PS a PQ^2 *será la razón de igualdad.*

Puesto que al restar de los ángulos rectos OPQ, OQR, los ángulos iguales SPQ, SQR, quedarán los ángulos iguales OPS, OQS. Luego el círculo que pasa por los puntos O, S, P pasará también por el punto Q. Coincidan los puntos P y Q, y este círculo será tangente a la espiral en el lugar de coincidencia de PQ, y por tanto cortará perpendicularmente a la recta OP. Resultará, pues, OP diámetro de este círculo y el ángulo OSP recto sobre el semicírculo. Q. E. D.



Sobre OP trácense las perpendiculares QD, SE y las últimas razones de las líneas serán como sigue: TQ a PD como TS o PS a PE, o sea, 2PO a 2PS; y también PD a PQ como PQ a 2PO; y permutando, TQ a PQ como PQ a 2PS. De donde resulta que

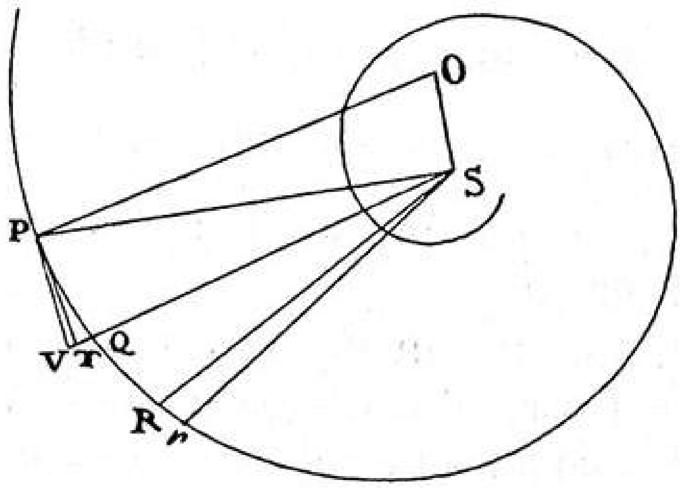
PQ^2 es igual a $TQ \times 2PS$. Q. E. D.

Proposición xv. Teorema xii

Si la densidad de un medio en cada punto es inversamente como la distancia del punto a un centro inmóvil, y la fuerza centrípeta es como el cuadrado de la densidad: digo que un cuerpo puede girar en una espiral que corte en un ángulo dado a todos los radios trazados desde dicho centro.

Dense los supuestos del Lema anterior, y prolónguese SQ hasta V, de modo que SV sea igual a SP. En un tiempo cualquiera y en medio resistente, describa el cuerpo el arco mínimo PQ, y en doble tiempo el arco mínimo PR; y los decrementos de estos arcos procedentes de la resistencia, o las diferencias respecto a los arcos que describirían en los mismos tiempos en un medio no resistente, serán entre sí como los cuadrados de los tiempos en que se generan: por tanto, el decremento del arco PQ es la cuarta parte del decremento del arco PR. De donde también, si se toma el área PSQ igual al área QSr, el decremento del arco PQ será igual a la mitad del segmento Rr; y por tanto, la fuerza de resistencia y la fuerza centrípeta son entre sí como los mismos segmentos $\frac{1}{2}Rr$ y TQ que generan a la vez. Puesto que la fuerza centrípeta, con la que el cuerpo es urgido en P, es inversamente como SP^2, y (por el Lema x del Libro i) el segmento TQ, generado por dicha fuerza, está en razón compuesta de la razón de dicha fuerza y de la razón del cuadrado del tiempo en que se describe el arco PQ (pues en este caso desprecio la resistencia por ser infinitamente más pequeña que la fuerza centrípeta), $TQ \times SP^2$, esto es (por el Lema anterior), $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP$, será como el cuadrado del tiempo, y por tanto el tiempo es como $PQ \times \sqrt{SP}$; y la velocidad del cuerpo con la que describe en dicho tiempo el arco PQ como $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ o $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, esto es, como el inverso de la raíz cuadrada de SP. Y por la misma razón, la velocidad con la que se describe el arco QR es como el inverso de la raíz cuadrada del propio SQ. Pero dichos arcos PQ y QR son como las velocidades descriptoras entre ellas, es decir, como la raíz cuadrada de SQ a SP, o sea, como SQ a $\sqrt{SP \times SQ}$, y por ser iguales los ángulos SPQ, SQr y las áreas PSQ, QSr también iguales, el arco PQ es al arco Qr como SQ a SP. Tómense las diferencias de consecuentes proporcionales y resultará el arco PQ al arco Rr como SQ a $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, es decir, $\frac{1}{2}VQ$. Pues, al coincidir los puntos P y Q, la razón última de $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ a $\frac{1}{2}VQ$ es la de igualdad. Dado que el decremento del arco PQ originado por la resistencia, o el doble del mismo Rr, es como la resistencia y el cuadrado del tiempo conjuntamente, la resistencia será como $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Pero PQ era a R*r* como SQ a ½VQ, y de aquí que

$\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ sea como $\frac{½VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ o como $\frac{½OS}{OP \times SP^2}$.

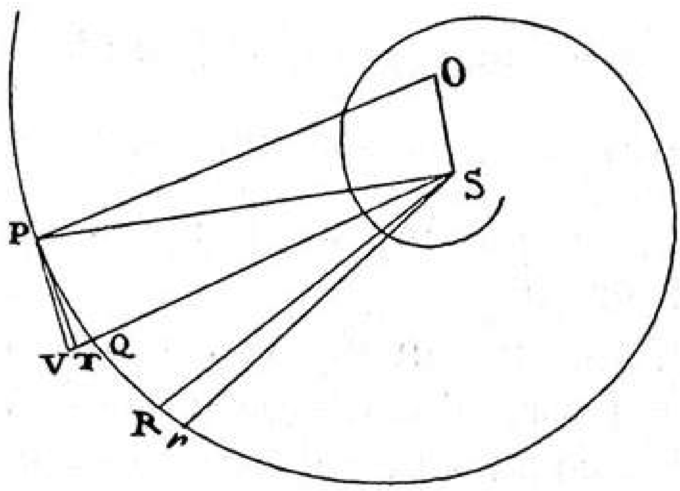


Pues cuando los puntos P y Q coinciden, coinciden también SP y SQ, y el ángulo PVQ se hace recto; y por ser semejantes los triángulos PVQ, PSO, resulta PQ a ½VQ como OP a ½OS. Luego $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ es, entonces, como la resistencia, esto es, como la densidad del medio en P y como el cuadrado de la velocidad conjuntamente. Réstese la razón del cuadrado de la velocidad, o sea, $\frac{1}{SP}$ y quedará la densidad del medio en P como $\frac{OS}{OP \times SP}$. Dése, pues, una espiral, y por estar dada la razón de OS a OP, la densidad del medio en P será como $\frac{1}{SP}$. Por tanto, en un medio cuya densidad sea inversamente proporcional a la distancia al centro SP, un cuerpo puede girar en dicha espiral. Q. E. D.

Corolario 1. En un punto cualquiera P la velocidad será siempre aquella con la que un cuerpo, en un medio no resistente y la misma fuerza centrípeta, giraría en un círculo a la misma distancia SP del centro.

Corolario 2. Si la distancia SP está dada, la densidad del medio es como $\frac{OS}{OP}$, pero si no se da dicha distancia es como $\frac{OS}{OP \times SP}$. Y por ello una espiral puede acomodarse a cualquiera densidad de medio.

COROLARIO 3. La fuerza de resistencia en un punto cualquiera P es a la fuerza centrípeta en el mismo punto como ½OS a OP. Pues tales fuerzas son entre sí como ½R*r* y TQ, o como $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ y $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, es decir, como ½VQ y OP. Dada, pues, una espiral, está dada la proporción de la resistencia respecto a la fuerza centrípeta y, viceversa, dada dicha proporción, está dada la espiral.

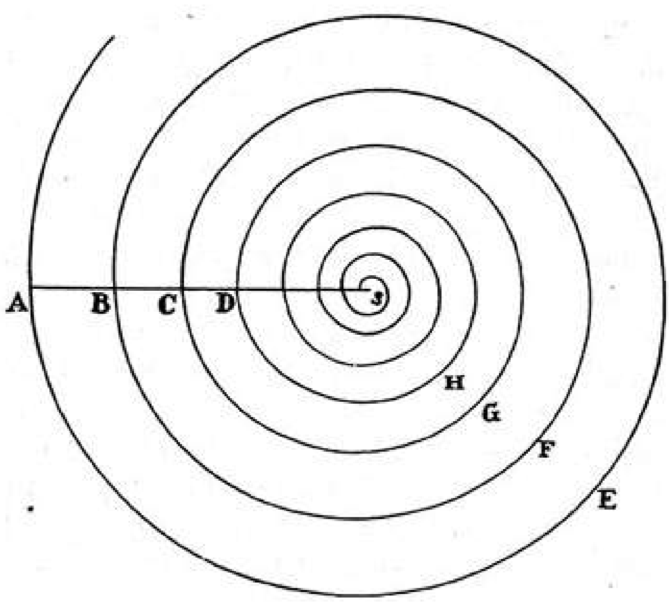


COROLARIO 4. Por consiguiente, el cuerpo no puede girar en esta espiral a no ser que la fuerza de resistencia sea menor que la mitad de la fuerza centrípeta. Sea la resistencia igual a la mitad de la fuerza centrípeta, y la espiral coincidirá con la línea recta PS, y el cuerpo descenderá hacia el centro por dicha recta con una velocidad que será a la velocidad con la que, según hemos probado antes para una parábola (Teorema X del Libro I) ocurre el descenso en un medio no resistente, como la raíz cuadrada de la razón de la unidad al número dos. Y los tiempos de descenso serán aquí como el inverso de las velocidades, y por tanto están dados.

COROLARIO 5. Y puesto que a distancias iguales del centro la velocidad es igual en la espiral PQR y en la recta SP, y la longitud de la espiral a la longitud de la recta se halla en una razón dada, a saber, en la razón de OP a OS, el tiempo de descenso por la espiral será al tiempo de descenso por la recta SP en esa misma razón dada y, por tanto, también dado.

COROLARIO 6. Si con centro en S y con dos distancias dadas cualesquiera se trazan dos círculos, y manteniendo estos círculos se hace cambiar en alguna forma el ángulo que forma la espiral con el radio PS, el número de revoluciones que puede completar un cuerpo en el interior de las circunferencias de dichos círculos caminando en espiral de una circunferencia a otra es como $\frac{PS}{OS}$, o como la tangente del ángulo que forma la espiral con el radio PS, mientras el tiempo de dichas revoluciones será como $\frac{OP}{OS}$, es decir, como la secante del mismo ángulo, o inversamente proporcional a la densidad del medio.

COROLARIO 7. Si un cuerpo, en un medio con densidad inversamente proporcional a la distancia de cada punto al centro, gira por una curva cualquiera AEB en torno a dicho centro, y corta al primer radio AS en B con el mismo ángulo con que lo hiciese antes en A, y esto con una velocidad que sea a la velocidad anterior en A en razón inversa de la raíz cuadrada de las distancias al centro (esto es, como AS a la media proporcional entre AS y BS) dicho cuerpo describirá innumerables revoluciones semejantes BFC, CGD, etc. y con sus intersecciones dividirá el radio AS en partes continuamente proporcionales AS, BS, CS, DS, etc. Mas, los tiempos de las revoluciones serán directamente como los perímetros de las órbitas AEB, BFG, CGD, etc. e inversamente como las velocidades en A, B, C; esto es, como $AS^{3/2}$, $BS^{3/2}$, $CS^{3/2}$. Y el tiempo total empleado por el cuerpo para llegar al centro será al tiempo de la primera revolución como la suma de todas las continuamente proporcionales hasta el infinito $AS^{3/2}$, $BS^{3/2}$, $CS^{3/2}$ al primer término $AS^{3/2}$; esto es, como dicho primer término $AS^{3/2}$ a la diferencia de los dos primeros $AS^{3/2}$ - $BS^{3/2}$, o como $\frac{3}{2}$AS a AB, muy aproximadamente. De donde dicho tiempo total puede hallarse sin dificultad.



COROLARIO 8. De lo cual puede obtenerse con relativa facilidad el movimiento de cuerpos en medios de densidad uniforme o que se atenga a cualquiera otra ley determinada. Con centro en S, y distancias continuamente proporcionales SA, SB, SC, etc., trácense círculos cualesquiera, y establézcase que los tiempos de revolución entre los perímetros de dos cualesquiera de estos círculos en el medio del que hablé antes es al tiempo de revolución en el medio propuesto entre los mismos círculos, como la densidad media del medio propuesto entre los dos círculos a la densidad

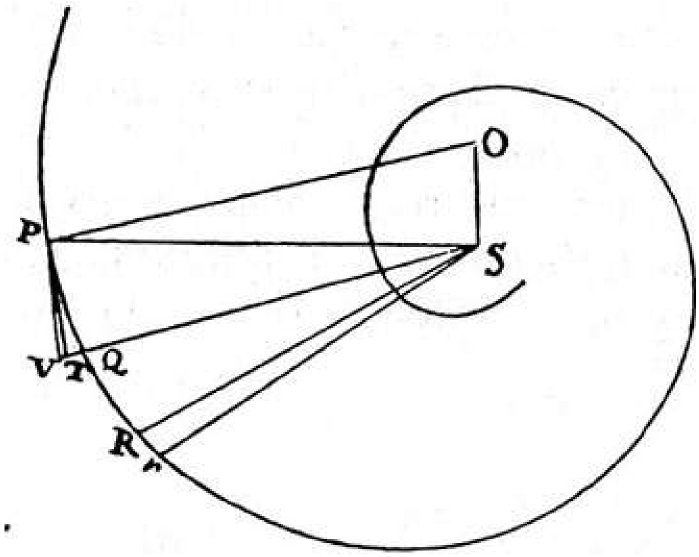
media del medio del que se trató más arriba entre los mismos círculos muy aproximadamente: y asimismo que la secante del ángulo con que la espiral antes determinada corta al radio AS en el medio arriba considerado está en la misma razón respecto a la secante del ángulo con que esta nueva espiral corta al mismo radio en el medio ahora propuesto; y también que los números totales de revoluciones entre dichos dos círculos son muy aproximadamente como las tangentes de sus ángulos. Si esto ocurre continuamente entre cada par de círculos, el movimiento se continuará a través de todos los círculos. Y de este modo no será difícil imaginar cómo y en qué tiempos deberán girar los cuerpos en cualquier medio regular.

COROLARIO 9. Y aunque los movimientos excéntricos ocurran en espirales próximas a la forma oval, no obstante, si imaginamos cada revolución de dichas espirales distante de las siguientes con los mismos intervalos y acercándose al centro en los mismos grados que la espiral anteriormente descrita, comprenderemos también cómo ocurren los movimientos de los cuerpos en semejantes espirales.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA XIII

Si la densidad de un medio es en cada punto inversamente proporcional a la distancia de esos puntos a un centro inmóvil, y la fuerza centrípeta es inversamente proporcional a una potencia cualquiera de dicha distancia: digo que un cuerpo puede girar en una espiral que corta a todos los radios trazados desde dicho centro con un ángulo dado.

Se demuestra del mismo modo que la Proposición anterior. Pues si la fuerza centrípeta es en P inversamente proporcional a cualquiera potencia SP^{n+1} de la distancia SP, cuyo índice es $n + 1$, se deduce, como más arriba, que el tiempo en el cual el cuerpo describe un arco PQ será como $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$ y la resistencia en P como $\dfrac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, o también, como $\dfrac{(1 - \frac{1}{2}n) \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ y, por tanto, como $\dfrac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, esto es, por estar dado $\dfrac{(1 - \frac{1}{2}n) \times OS}{OP}$, inversamente como SP^{n+1}. Y, por lo mismo, puesto que la velocidad es inversamente como $SP^{\frac{1}{2}n}$, la densidad en P será inversamente proporcional a SP.



COROLARIO 1. La resistencia es a la fuerza centrípeta como (1 - ½*n*) x OS a OP.

COROLARIO 2. Si la fuerza centrípeta fuese como SP^3, entonces (1 - ½*n*) = 0; y, por tanto, la resistencia y la densidad del medio serán nulas, como en la Proposición IX del Libro I.

COROLARIO 3. Si la fuerza centrípeta es inversamente como una potencia cualquiera del radio SP cuyo índice sea mayor que 3, la resistencia positiva se transforma en negativa.

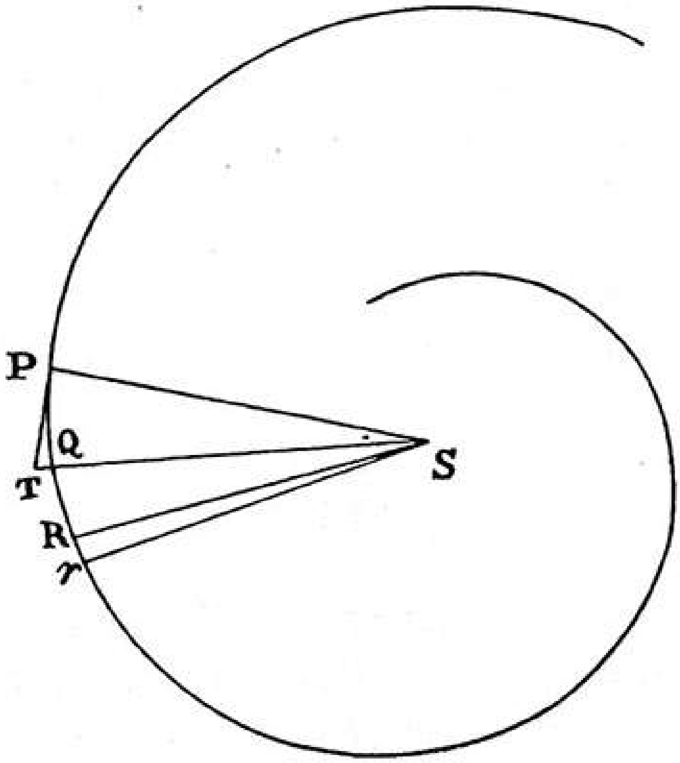
ESCOLIO

Por lo demás, esta Proposición y las anteriores, que se refieren a medios con densidades desiguales, deben entenderse referidas al movimiento de cuerpos tan pequeños que la densidad del medio mayor hacia un lado del cuerpo que hacia el otro, no venga a ser digna de consideración. También supongo que la resistencia, «caeteris paribus», es proporcional a la densidad. Por lo cual, para medios cuya fuerza de resistencia no sea como la densidad, deberá la densidad aumentarse o disminuirse de modo que quede suprimido el exceso de resistencia o suplida su falta.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA IV

Hallar tanto la fuerza centrípeta como la resistencia del medio que permitan a un cuerpo, dada la ley de la velocidad, girar en una espiral dada.

Sea dicha espiral PQR. De la velocidad con la cual el cuerpo recorre el arco mínimo PQ se tendrá dado el tiempo, y de la altura TQ, que es como la fuerza centrípeta y el cuadrado del tiempo, se tendrá dada la fuerza. Después, de la diferencia RS*r* de áreas PSQ, QSR, completadas en partículas iguales de tiempo, se obtendrá la retardación del cuerpo, y a partir de ésta se hallarán la resistencia y la densidad del medio.



Proposición xviii. Problema v

Dada la ley de la fuerza centrípeta, hallar la densidad del medio en cada punto, con la cual describa un cuerpo una espiral dada.

Hay que hallar la velocidad en cada punto a partir de la fuerza centrípeta, y después, hay que hallar la densidad del medio a partir de la retardación de la velocidad, como en la Proposición anterior.

Pero ya indiqué el método para tratar estos problemas en la Proposición décima de este Libro y en el Lema segundo; y no deseo entretener más al lector en estas abstrusas disquisiciones. Ahora habrá que añadir algo sobre las fuerzas de los cuerpos que se desplazan y sobre la densidad y resistencia de los medios en los cuales ocurren los movimientos vistos hasta ahora y otros similares a ellos.

Sección v
SOBRE LA DENSIDAD Y COMPRESIÓN DE LOS FLUIDOS, Y SOBRE HIDROSTÁTICA

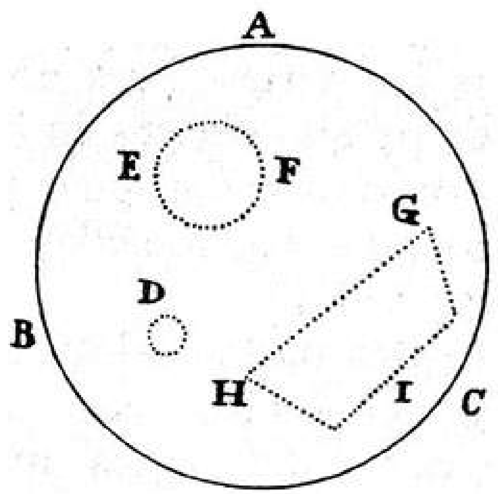
Definición de fluido

Fluido es todo cuerpo cuyas partes ceden a la aplicación de cualquier fuerza, y, al ceder, se mueven entre sí con facilidad.

Proposición xix. Teorema xiv

Todas las partes de un fluido homogéneo e inmóvil encerrado en un vaso cualquiera inmóvil y comprimido por todos lados (sin tomar en cuenta ni la condensación ni la gravedad ni fuerza centrípeta alguna) soportan igual presión por todas partes y permanecen en sus lugares sin que dicha presión origine movimiento alguno.

Caso 1. Introdúzcase un fluido en el vaso esférico ABC y comprímase uniformemente por todas partes: digo que ninguna parte del mismo se moverá debido a la tal presión. Pues, si una parte D se moviese, sería preciso que todas las partes del mismo situadas a la misma distancia del centro se moviesen a la vez con un movimiento similar, y esto por ser semejante e igual la presión de todas, y se supone excluido todo otro movimiento, salvo el procedente de la presión. Pero no pueden acercarse más hacia el centro, salvo que el fluido sea condensado hacia el centro; contra la hipótesis. Tampoco pueden alejarse de él más, a no ser que el Huido se condense hacia la circunferencia; también contra la hipótesis. Tampoco pueden, manteniendo su distancia al centro, moverse en dirección alguna, porque, por la misma razón, se moverían en dirección contraria; pues la misma parte no puede moverse en direcciones opuestas en el mismo momento. Luego ninguna parte del fluido se moverá de su lugar. Q. E. D.



Caso 2. Ahora digo que todas las partes esféricas de este fluido soportan presiones iguales por todos lados. Pues, sea EF una parte esférica del fluido, y si no recibiese igual presión por todas partes, auméntese la presión menor hasta que resulte presionada igual por todas partes; y sus partes, por el Caso primero, permanecerán en su lugar. Pero antes de aumentar la presión, también permanecían en su lugar, por el mismo primer Caso, y con la presión añadida se moverían de su lugar, por la definición de fluido. Pero estas dos afirmaciones son contradictorias. Luego era falsa la afirmación de que la esfera EF no padecía igual presión por todos lados. Q. E. D.

Caso 3. Además digo que la presión de las diversas partes esféricas es igual. Pues las partes esféricas contiguas se presionan mutuamente e igualmente en los puntos de contacto, por la Ley III del Movimiento. Pero, por el Caso segundo, soportan igual fuerza de presión por todos lados. Luego dos partes esféricas no contiguas soportarán la misma fuerza, toda vez que una parte esférica intermedia puede tocar a ambas. Q. E. D.

Caso 4. Ahora digo que todas las partes de un fluido soportan igual presión en todas las partes. Pues dos partes cualesquiera pueden ser tocadas por partes esféricas en cualquier punto, y ahí dichas partes esféricas presionan por igual, por el Caso tercero, y a la inversa son presionadas por aquéllas por igual, por la Ley tercera del Movimiento. Q. E. D.

Caso 5. Puesto que una parte cualquiera GHI del fluido está encerrada en el resto del fluido como en un recipiente y es presionada por igual por todas partes, mientras las partes del mismo se presionan entre sí por igual y están entre sí en reposo; es evidente que las partes de cualquier GHI de un fluido, al estar igualmente presionadas por todos lados, se presionan entre sí por igual y reposan entre sí. Q. E. D.

Caso 6. Por tanto, si dicho fluido está encerrado en un vaso no rígido, y no fuese presionado por igual por todos lados, cederá ante la presión más fuerte, por la definición de fluidez.

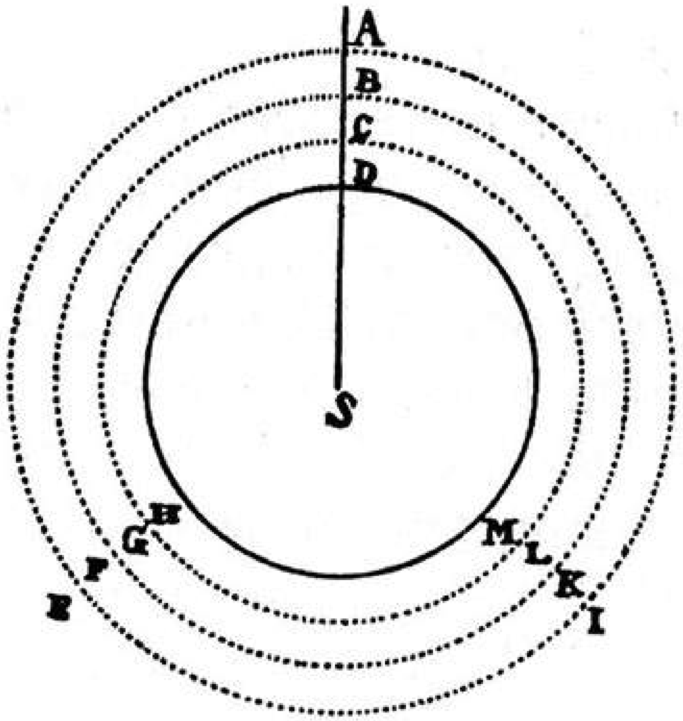
Caso 7. Y por lo mismo, un fluido en un vaso rígido no soportará una presión más fuerte por un lado que por otro, sino que cederá ante ella, y esto instantáneamente, porque el lado rígido del vaso no sigue al líquido que cede. Pero al ceder presionará sobre el lado opuesto, y así la presión tiende a igualarse por doquier. Y puesto que el fluido trata de apartarse instantáneamente de la parte más presionada, mientras es soportado por la resistencia del vaso en el lado contrario, la presión se restablece instantáneamente por todos lados por igual sin movimiento local, con lo que las partes del fluido, por el Caso quintó, se presionan entre sí por igual y reposan entre sí. Q. E. D.

COROLARIO. De donde, tampoco podrá cambiarse el movimiento de las partes del fluido entre sí, mediante una presión efectuada sobre la superficie externa del fluido, salvo en la medida en que la superficie cambie de forma en algún punto, o en que las partes del fluido oprimiéndose entre ellas más o menos intensamente se deslicen entre ellas con mayor o menor facilidad.

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA XV

Si cada parte de un fluido esférico, homogéneo a distancias iguales del centro, que descansa sobre un fondo esférico concéntrico, gravita hacia el centro del todo, el fondo soportará el peso de un cilindro cuya base fuese igual a la superficie del fondo y cuya altura fuese igual a la altura del fluido sobrepuesto.

Sea DHM la superficie del fondo, y AEI la superficie superior del fluido. Divídase el fluido en esferas concéntricas de igual grosor, mediante innumerables superficies esféricas BFK, CGL; imagínese que la fuerza de la gravedad actúe únicamente sobre la superficie exterior de cada esfera y que las acciones son iguales sobre cada parte igual de todas las superficies. Entonces, la superficie más externa AE sufre la sola presión de su fuerza de gravedad, que presiona no sólo sobre las partes todas de la superficie superior sino que también (por la Proposición XIX) presiona igualmente en razón de su extensión sobre la superficie segunda BFK. Esta segunda superficie BFK sufre la presión de su propia fuerza de gravedad, además de la presión añadida de la primera, lo que duplica la presión. La tercera superficie CGL padece una presión triple, esto es, la de su propia fuerza de gravedad junto con la presión de la anterior que padece en función de su propia extensión. Y de igual modo, la superficie cuarta padece una presión cuádruple, la quinta quíntuple, y así sucesivamente. Por consiguiente, la presión que padece cada superficie, no es como el volumen de fluido que reposa encima de ella, sino como el número de esferas que hay hasta la superficie superior del fluido; y es igual a la gravedad del orbe inferior multiplicada por el número de orbes: esto es, a la gravedad de un sólido que tiene razón última de igualdad con el cilindro susodicho (siempre que aumente el número de orbes y disminuya su grosor infinitamente, de manera que la acción de la gravedad desde la superficie inferior hasta la superior se haga continua). Luego la superficie inferior soporta el peso del cilindro definido arriba. Q. E. D. Y, por la misma razón, será evidente la proposición cuando la gravedad decrece en una razón cualquiera dada desde el centro, lo mismo que cuando el fluido es más raro arriba y más denso abajo. Q. E. D.



COROLARIO 1. Por tanto, el fondo no soporta todo el peso del fluido que hay encima, sino sólo aquella parte del peso que se describe en la Proposición; el peso restante es soportado por la forma abovedada del fluido.

COROLARIO 2. A distancias iguales del centro la cantidad de presión es siempre la misma, tanto si la presión sobre la superficie es paralela al horizonte como si es perpendicular u oblicua; tanto si el fluido, rebosando por encima de la superficie presionada, asciende perpendicularmente en línea recta como si serpea oblicuamente por sinuosas cavidades y canales, sean regulares o irregulares, anchos o angostos. Se infiere que la presión en nada cambia por estas circunstancias al aplicar la demostración de este Teorema a cada uno de los casos de fluidos.

COROLARIO 3. Por la misma demostración se infiere también (por la Proposición XIX) que las partes de un fluido pesado no adquieren, por la presión del peso que soportan, ningún movimiento entre ellas; si se excluye el movimiento debido a la condensación.

COROLARIO 4. Y, por lo tanto, si otro cuerpo de la misma gravedad específica, que no admita condensación, se sumergiese en este fluido, tampoco adquirirá movimiento alguno por causa del peso que incide sobre él: no descenderá, no ascenderá ni se verá obligado a cambiar su forma. Si es esférico permanecerá esférico, pese a la presión; si es -cuadrado permanecerá cuadrado: y esto tanto si es blando como si es muy fluido, tanto si flota libremente en el fluido como si reposa en el fondo. Pues toda parte perteneciente al fluido posee la misma razón que el cuerpo sumergido, y la razón de todos los cuerpos sumergidos, que tengan la misma figura y gravedad específica siendo de la misma magnitud, es la misma también. Si un cuerpo sumergido, conservando su peso, se licuase y tomase la forma del fluido, tal cuerpo, si antes ascendía o descendía o tomaba una forma nueva debido a la presión, también ahora ascenderá o descenderá o habrá de tomar una forma nueva: y esto precisamente porque permanecen su gravedad y las demás causas de los movimientos. Pero (por el Caso 5 de la Proposición XIX) ahora reposaría y conservaría su figura. Luego también antes.

COROLARIO 5. Por consiguiente, el cuerpo específicamente más grave que el fluido contiguo a él se hundirá y el específicamente más leve ascenderá, y se seguirá el movimiento y cambio de figura que puedan deberse al exceso o defecto de gravedad susodichos. Pues tales exceso o defecto son la razón del impulso que urge al cuerpo, que de otro modo está en equilibrio con las partes del fluido; y puede compararse con el exceso o defecto de peso en uno de los dos platillos de la balanza.

COROLARIO 6. Por tanto, hay una doble gravedad en los cuerpos ubicados en un fluido; una verdadera y absoluta, otra aparente, común y relativa. Gravedad absoluta es la fuerza total con la que el cuerpo tiende hacia abajo; relativa y común es el exceso de gravedad con el cual el cuerpo tiende hacia abajo más que el fluido que lo rodea. Con el primer tipo de gravedad las partes de los fluidos y de todos los cuerpos gravitan hacia los lugares que ocupan; y por ello componen, con sus pesos juntos, el peso del todo. Pues el todo completo es grave, como se puede ver en los vasos llenos de líquido; y el peso del todo es igual a los pesos de todas las partes y, por tanto, se compone de ellas. Con el otro tipo de gravedad los cuerpos no gravitan hacia sus lugares, esto es, al concurrir no se sobrecargan, sino que impidiendo los mutuos intentos de descenso reposan en sus lugares. Las cosas que están en el aire y no sobrecargan comúnmente no se juzgan pesadas. Las que sobrecargan sí lo son, en la medida en que no son sostenidas por el peso del aire. Para el común de la gente los pesos no son sino los excesos de peso verdadero por encima del peso del aire. De aquí que vulgarmente se llamen leves a las cosas que son menos graves y, al ceder ante la sobrecarga del aire, se elevan hacia arriba. Son relativamente leves, pero no absolutamente, toda vez que en el vacío descienden. Así como en el agua los cuerpos, que por su mayor o menor gravedad descienden o ascienden, son relativa y aparentemente graves o leves, y su gravedad o levedad relativa y aparente es el exceso o defecto con el que su verdadera gravedad o supera a la gravedad del agua o es superada por ella. Pero las cosas que no descienden sobrecargando ni ascienden cediendo a una sobrecarga, pese a que con sus pesos verdaderos aumenten el peso del todo, no gravitan en el agua relativamente y para el sentir común. Pues la demostración de estos casos es similar.

COROLARIO 7. Lo demostrado para la gravedad, tiene valor para otras fuerzas centrípetas cualesquiera.

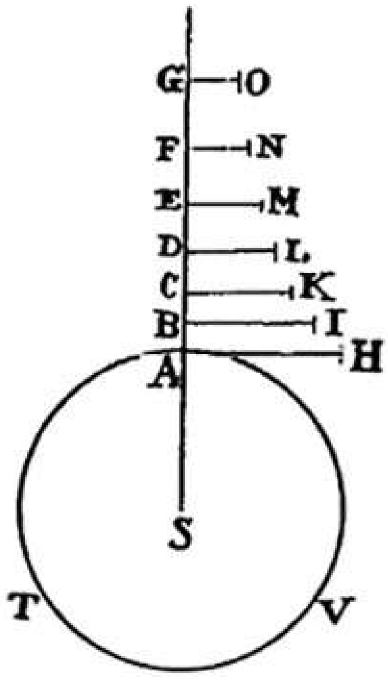
COROLARIO 8. Por consiguiente, si el medio, en el cual se mueve un cuerpo cualquiera, estuviese sometido a la acción de su propia gravedad o de otra fuerza centrípeta cualquiera, y el cuerpo padece esta misma acción más fuertemente, la diferencia de fuerzas es aquella fuerza motriz que hemos considerado en las Proposiciones anteriores como fuerza centrípeta. Si, en cambio, el cuerpo sufre esa acción más levemente, la diferencia de fuerzas debe considerarse como fuerza centrífuga.

COROLARIO 9. Pero como los fluidos, al presionar sobre los cuerpos inmersos en ellos, no cambian sus figuras externas, también se sigue (por el Corolario de la Proposición XIX) que no cambiarán la ubicación de las partes internas entre sí: y por ende, si se sumergen animales, y toda sensación procede del movimiento de las partes, ni sufrirán daño los cuerpos sumergidos ni tendrán excitación sensorial alguna, salvo en la medida en que estos cuerpos pudieran ser objeto de condensación por compresión. Y lo mismo ocurre con cualquier sistema de cuerpos contenido en un fluido que lo comprima. Todas las partes del sistema sufrirán los mismos movimientos que si se hallasen en el vacío y retuviesen únicamente su gravedad, salvo en la medida en que el fluido o bien resista algo a sus movimientos o bien las obligue con su compresión a aglutinarse.

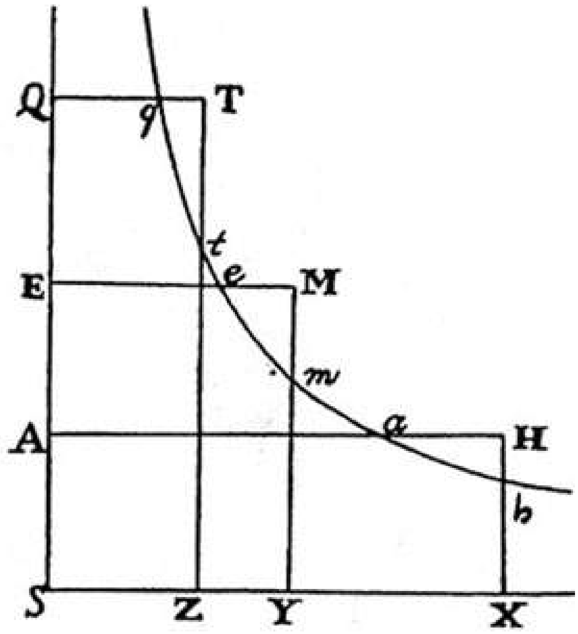
PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA XVI

Sea la densidad de un fluido cualquiera proporcional a la compresión y sean sus partes atraídas hacia abajo por una fuerza centrípeta inversamente proporcional a las distancias de esas partes al centro: y digo que, si tales distancias se toman continuamente proporcionales, las densidades del fluido a esas mismas distancias también serán continuamente proporcionales.

Represente ATV el fondo esférico sobre el que descansa el fluido, S el centro, SA, SB, SD, SE, SF, etc., distancias continuamente proporcionales. Elévense las perpendiculares AH, BI, CK, DL, EM, FN, etc., que sean como las densidades del medio en los lugares A, B, C, D, E, F; y las gravedades específicas en esos puntos serán como $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, etc., o, lo que es lo mismo, como $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, etc. Imaginemos, en primer lugar, que estas gravedades son uniformemente continuas de A a B, de B a C, de C a D, etc., ocurriendo los decrementos por grados en los puntos B, C, D, etc. Multiplicadas estas gravedades por las alturas AB, BC, CD, etc., se obtendrán las presiones AH, BI, CK, etc., con las cuales está urgido el fondo ATV (según el Teorema XV). Por tanto, la partícula A soporta todas las presiones AH, BI, CK, DL, y así sucesivamente hasta el infinito; y la partícula B soportará todas menos la primera AH; la partícula C soportará a todas menos las dos primeras AH, BI; y así sucesivamente: y en consecuencia, la densidad AH de la partícula primera A es a la densidad BI de la segunda partícula B como la suma de todos los AH + BI + CK + DL, hasta el infinito, a la suma de todos los BI + CK + DL, etc. Y la densidad BI de la segunda partícula B es a la densidad CK de la tercera C como la suma de BI + CK + DL, etc., a la suma de CK + DL, etc. Por tanto, dichas sumas son proporcionales a sus diferencias AH, BI, CK, etc., y por ello continuamente proporcionales (por el Lema I de este libro) y, por tanto, las diferencias AH, BI, CK, etc., proporcionales a las sumas, son también continuamente proporcionales. Por lo cual, al ser las densidades en los puntos A, B, C, etc., como AH, BI, CK, etc., éstas serán también continuamente proporcionales. Procédase por tramos, y por corresponder a las distancias SA, SC, SE, continuamente proporcionales, serán también las densidades AH, CK, EM, continuamente proporcionales. Y por la misma razón, para distancias cualesquiera SA, SD, SG, continuamente proporcionales, las densidades AH, DL, GO, serán continuamente proporcionales. Júntense ahora los puntos A, B, C, D, E, etc., de modo que la progresión de las gravedades específicas desde el fondo A hasta la cima del fluido resulte continua, y para distancias cualesquiera SA, SD, SG, continuamente proporcionales, las densidades AH, DL, GO, al ser siempre continuamente proporcionales, permanecerán también ahora continuamente proporcionales. Q. E. D.



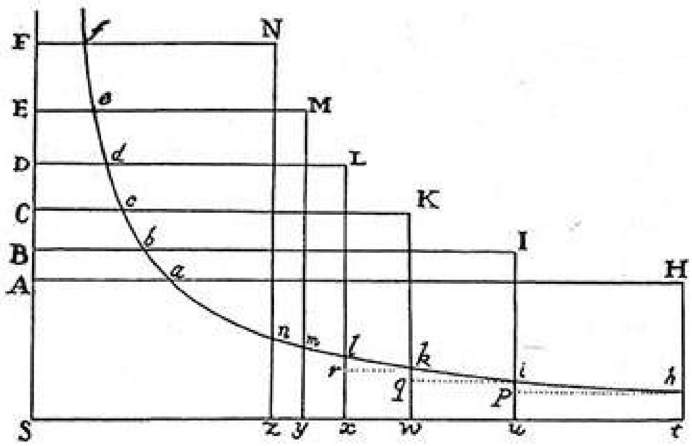
COROLARIO. De aquí que si se tiene dada la densidad en dos puntos, como A y E, puede inferirse la densidad del fluido en otro punto cualquiera Q. Trácese, con centro en S y asíntotas rectas SQ, SX, una hipérbola que corte a las perpendiculares AH, EM, QT, en *a, e, q,* lo mismo que a las perpendiculares HX, MY, TZ, trazadas sobre la asíntota SX, en *h, m, t.* Sea el área Y*mt*Z respecto al área dada Y*mh*X como el área dada E*eq*Q al área dada E*ea*A; y la línea Z*t* prolongada cortará a la línea QT proporcional a la densidad. Pues si las líneas SA, SE, SQ, son continuamente proporcionales, las áreas E*eq*Q, E*ea*A serán iguales y, por tanto, las áreas proporcionales a ellas, Y*mt*Z, X*hm*Y, serán iguales también, y las líneas SX, SY, SZ, esto es, AH, EM, QT, necesariamente serán continuamente proporcionales. Y si las líneas SA, SE, SQ, adquieren otro orden cualquiera en la serie de proporciones continuas, las líneas AH, EM, QT, por la proporcionalidad de las áreas hiperbólicas, adquirirán el mismo orden en otra serie de proporcionalidades continuas.



PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVII

Sea la densidad de un fluido cualquiera proporcional a la compresión y sus partes sean atraídas hacia ahajo por una gravedad inversamente proporcional a los cuadrados de sus distancias al centro: digo que si las distancias se toman en proporción armónica, las densidades del fluido a esas distancias estarán en progresión geométrica.

Sea S el centro y SA, SB, SC, SD, SE las distancias en progresión geométrica. Elévense las perpendiculares AH, BI, CK, etc., que sean como las densidades de los fluidos en los puntos A, B, C, D, E, etc., y sus gravedades específicas en esos puntos serán como $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$, etc. Supongamos que estas gravedades son uniformemente continuas, la primera desde A hasta B, la segunda desde B hasta C, la tercera desde C hasta D, etc. Y éstas multiplicadas por las alturas AB, BC, CD, DE, etc., o, lo que es lo mismo, por las distancias SA, SB, SC, etc., proporcionales a dichas alturas, darán las representaciones de las presiones $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, etc. Por lo cual, ya que las densidades son como las sumas de estas presiones, las diferencias de las densidades AH - BI, BI - CK, etc., serán como las diferencias de las sumas $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, etc. Con centro en S y asíntotas SA, S*x*, trácese una hipérbola que corte a las perpendiculares AH, BI, CK, etc., en *a, b, c*, etc., así como a H*t*, I*u*, K*w*, perpendiculares trazadas sobre la asíntota S*x*, en *h, i, k*; y las diferencias de densidades *tu, uw*, etc., serán como, $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, etc. Y los rectángulos *tu* x *th*, *uw* x *ui*, etc., o *tp, uq*, etc., serán como $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, etc., esto es, como A*a*, B*b*, etc. Pues, por la naturaleza de la hipérbola, SA es a AH o S*t* como *th* a A*a*, y por tanto $\frac{AH \times th}{SA}$ es igual a A*a*. Y por igual razonamiento $\frac{BI \times ui}{SB}$ es igual a B*b*, etc. Pero A*a*, B*b*, C*c*, etc., son continuamente proporcionales y, por tanto, proporcionales a sus diferencias A*a* - B*b*, B*b* - C*c*, etc.; y por ello, los rectángulos *tp, uq*, etcétera, son proporcionales a las susodichas diferencias; al igual que las sumas de los rectángulos *tp* + *uq o tp* + *uq* + *wr* lo son a las sumas de las diferencias A*a* - C*c* o A*a* - D*d*. Si se suponen muchos términos de éstos, la suma de todas las diferencias, pongamos A*a* - F*f*, será proporcional a la suma de todos los rectángulos, pongamos *zthn*. Auméntese el número de términos y disminúyanse las distancias de los puntos A. B, C etc., hasta el infinito, y dichos rectángulos resultarán iguales al área hiperbólica *zthn* y, por tanto, la diferencia A*a* - F*f* es proporcional a esta área. Ahora tómense unas distancias cualesquiera, como SA, SD, SF en progresión armónica, y las diferencias A*a* - D*d*, D*d* - F*f* serán iguales; y por ello, las áreas *thlx*, *xlnz* proporcionales a dichas diferencias, serán iguales entre sí, y las densidades S*t*, S*x*, S*z*, esto es, AH, DL, FN, continuamente proporcionales. Q. E. D.



COROLARIO. De aquí que, si se dan dos densidades cualesquiera, AH y BI, de un fluido, estará dada el área *thiu*, correspondiente a su diferencia *tu*; y de ahí se hallará la densidad FN para cualquier altura SF, tomando el área *thnz* respecto al área susodicha dada *thiu* como es la diferencia de A*a* - F*f* a la diferencia de A*a* - B*b*.

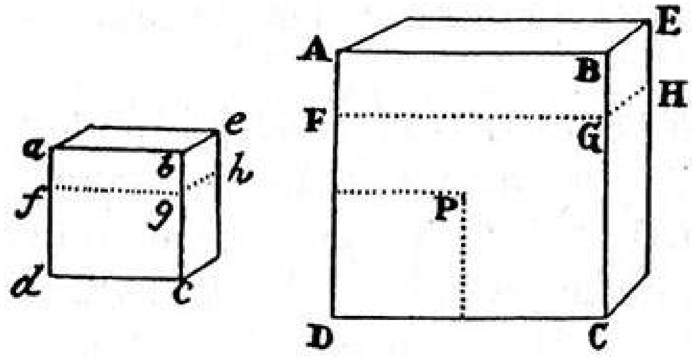
ESCOLIO

Por un razonamiento similar se puede probar que, si la gravedad de las partículas de un fluido disminuye en razón cúbica de las distancias al centro mientras los inversos del cuadrado de las distancias SA, SB, SC, etc. $\left(\text{o sea, } \frac{SA^3}{SA^2}, \frac{SA^3}{SB^2}, \frac{SA^3}{SC^2}\right)$ se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y si la gravedad disminuye en razón de la cuarta potencia de las distancias y los inversos de los cubos de las distancias $\left(\text{como, } \frac{SA^4}{SA^3}, \frac{SA^4}{SB^3}, \frac{SA^4}{SC^3}\right)$, etc. se toman en progresión aritmética, las densidades AH, BI, CK, etc., estarán en progresión geométrica. Y así hasta el infinito. Y también, si la gravedad de las partículas de un fluido es la misma a todas las distancias, y las distancias están en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica, como descubrió el eminente *Edmund Halley*. Si la gravedad es como la distancia y los cuadrados de las distancias se hallan en progresión aritmética, las densidades estarán en progresión geométrica. Y así hasta el infinito. Esto ocurre así cuando la densidad del fluido condensado por compresión es como la fuerza de compresión, o, lo que es igual, cuando el espacio ocupado por el fluido es inversamente como dicha fuerza. Se pueden imaginar otras leyes de condensación, tales como que el cubo de la fuerza de condensación es como la cuarta potencia de la densidad, o que el cubo de la fuerza es igual que la cuarta potencia de la densidad. En tal caso, si la gravedad es inversamente como el cuadrado de la distancia al centro, la densidad será inversamente como el cubo de la distancia. Imagínese que el cubo de la fuerza de compresión sea como la quinta potencia de la densidad, y si la gravedad es inversamente como el cuadrado de las distancias, la densidad será inversamente proporcional a la potencia $3/2$ de la distancia. Supongamos que la fuerza de compresión sea como el cuadrado de la densidad, y la gravedad inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la densidad será entonces inversamente proporcional a la distancia. Sería demasiado prolijo repasar todos los casos. Pero consta experimentalmente que la densidad del aire es como la fuerza de compresión exacta o al menos muy aproximadamente: y, por tanto, la densidad del aire en la atmósfera de la tierra es como el peso de todo el aire que sobrecarga, esto es, como la altura del mercurio en el barómetro.

Proposición xxiii. Teorema xviii[7]

Si la densidad de un fluido compuesto de partículas que huyen unas de otras es como la compresión, las fuerzas centrífugas de las partículas son inversamente proporcionales a las distancias de sus centros. Y viceversa, las partículas que se rehuyen con fuerzas inversamente proporcionales a las distancias de sus centros componen un fluido elástico cuya densidad es proporcional a la compresión.

Supongamos que el fluido está contenido en un espacio cúbico ACE, y de éste, por compresión, se reduce a otro espacio cúbico menor *ace*; y las distancias entre las partículas que tienen Ubicación semejante entre sí en uno y otro espacio, serán como los lados AB, *ab* de los cubos; y las densidades de uno y otro medio serán inversamente proporcionales a los espacios que los contienen, AB^3 y ab^3. Sobre el lado plano ABCD del cubo mayor tómese el cuadrado DP, igual al lado plano del cubo menor *db*; y por hipótesis, la presión con la cual actúa el cuadrado DP sobre el fluido contenido será a la presión con la que el susodicho cuadrado *db* actúa sobre el fluido contenido como las densidades de los medios entre sí, esto es como ab^3 a AB^3. Pero la presión con la cual el cuadrado DB actúa sobre el fluido contenido es a la presión con la cual el cuadrado DP actúa sobre el mismo contenido como el cuadrado DB al cuadrado DP, esto es, como AB^2 a ab^2. Por consiguiente, la presión con la cual el cuadrado DB actúa sobre el fluido es a la presión con la cual actúa sobre el fluido el cuadrado *db* como *ab* a AB. Trazando por el interior de los cubos los planos FGH, *fgh*, quede el fluido separado en dos partes, y éstas se oprimirán entre sí con las mismas fuerzas con las cuales son presionadas por los planos AC, *ac*, esto es, en la proporción de *ab* a AB: y por ello, las fuerzas centrífugas que responden a estas presiones, están en la misma proporción, puesto que el número de partículas es el mismo y la disposición semejante en ambos cubos, las fuerzas con las cuales todas las partículas actúan sobre todas según los planos FGH, *fgh*, son como las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una. Luego las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una según el plano FGH en el cubo mayor son a las fuerzas que cada una ejerce sobre cada una según el plano *fgh* en el cubo menor como *ab* a AB, esto es, inversamente proporcionales a las distancias mutuas de las partículas. Q. E. D.



Y viceversa, si las fuerzas de cada partícula son inversamente proporcionales a la distancia, es decir, inversamente proporcionales a los lados AB, *ab*, de los cubos; las sumas de las fuerzas estarán en la misma proporción, y las presiones de los lados DB, *db,* serán como las sumas de las fuerzas; y la presión del cuadrado DP será a la presión del lado DB como ab^2 a AB^2. Y, por consiguiente, la presión del cuadrado DP será a la presión del lado *db* como ab^3 a AB^3, es decir, la fuerza de compresión a la fuerza de compresión como la densidad a la densidad. Q. E. D.

Escolio

Y por un razonamiento semejante, si las fuerzas centrífugas de las partículas son inversamente proporcionales a los cuadrados de las distancias entre centros, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la cuarta potencia de las densidades. Si las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a la tercera o cuarta potencia de las distancias, los cubos de las fuerzas de compresión serán como la quinta o sexta potencia de las densidades. Y de modo general, si D representa la distancia, E la densidad del fluido comprimido y las fuerzas centrífugas son inversamente proporcionales a una potencia cualquiera de la distancia D cuyo índice sea *n* las fuerzas de compresión serán como las raíces cúbicas de la potencia de E^{n+2}, cuyo índice sea $n + 2$: y viceversa. Pero esto ha de entenderse respecto a fuerzas centrífugas de partículas que limitan con partículas próximas o que no se expanden mucho más allá. Tenemos un ejemplo en los cuerpos magnéticos. El poder de atracción de los cuales termina casi en los cuerpos contiguos de su propio género. La fuerza magnética disminuye por la interposición de una lámina de hierro, y casi termina en la lámina. Pues los cuerpos ulteriores son atraídos más por la lámina que por el imán. Del mismo modo, si unas partículas repelen a otras partículas de su especie que están próximas, mientras que no ejercen fuerza alguna sobre otras partículas más lejanas, es de partículas de este género de las que se componen los fluidos sobre los que se ha tratado en esta Proposición. Porque si la fuerza de una partícula cualquiera se propagase hasta el infinito, se necesitaría una fuerza mayor para alcanzar una condensación igual de una mayor cantidad de fluido. Pero es una cuestión física la de si los fluidos elásticos constan de partículas que se repelen mutuamente. Por nuestra parte hemos demostrado matemáticamente la propiedad de los fluidos compuestos de tales partículas, para dar a los filósofos un asidero al tratar esta cuestión.

Sección VI
DEL MOVIMIENTO Y RESISTENCIA DE CUERPOS PENDULARES

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

Las cantidades de materia de cuerpos pendulares cuyos centros de oscilación están a igual distancia del centro de suspensión se hallan en razón compuesta de la razón del peso y de la razón del cuadrado de los tiempos de oscilación en el vacío.

Pues la velocidad que sobre una materia dada puede engendrar una fuerza dada en un tiempo dado, es directamente como la fuerza y el tiempo e inversamente como la materia. Cuanto mayores son la fuerza o el tiempo, o menor la materia, tanto mayor será la velocidad generada. Esto es evidente por la segunda Ley del Movimiento. Ahora bien, si los péndulos son de igual longitud, las fuerzas motrices en puntos equidistantes de la perpendicular son como los pesos: y por ello, si dos cuerpos oscilando describen arcos iguales y dichos arcos se dividen en partes iguales, por ser los tiempos en que los cuerpos describen cada parte de los arcos correspondientes como los tiempos totales de oscilación, las velocidades en cada parte correspondiente de oscilación serán entre sí como las fuerzas motrices y los tiempos totales de oscilación directamente e inversamente como las cantidades de materia: y por tanto, las cantidades de materia serán directamente como las fuerzas y los tiempos de oscilación e inversamente como las velocidades. Pero las velocidades son inversamente como los tiempos y, por consiguiente, los tiempos directamente y las velocidades inversamente son como los cuadrados de los tiempos, por lo cual las cantidades de materia son como las fuerzas motrices y los cuadrados de los tiempos, es decir, como los pesos y el cuadrado de los tiempos. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, si los tiempos son iguales, las cantidades de materia en cada cuerpo serán como los pesos.

COROLARIO 2. Si los pesos son iguales, las cantidades de materia serán como los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 3. Si las cantidades de materia son iguales, los pesos serán inversamente proporcionales a los cuadrados de los tiempos.

COROLARIO 4. De donde, al ser, «caeteris paribus», los cuadrados de los tiempos como las longitudes de los péndulos, si son iguales los tiempos y las cantidades de materia, los pesos serán como la longitud de los péndulos.

COROLARIO 5. Y en general, la cantidad de materia pendular es directamente proporcional al peso y al cuadrado del tiempo, e inversamente a la longitud del péndulo.

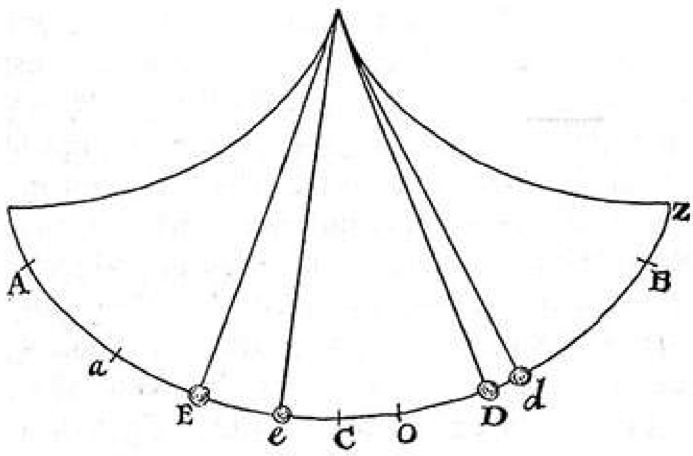
COROLARIO 6. Pero en medio no resistente la cantidad de materia pendular es directamente como el peso relativo y el cuadrado del tiempo e inversamente como la longitud del péndulo. Pues el peso relativo es la fuerza motriz del cuerpo en un medio grave cualquiera, como expliqué más arriba; y por tanto, cumple el mismo papel en un medio no resistente que el peso absoluto en el vacío.

COROLARIO 7. Y de aquí se obtiene la razón tanto para comparar los cuerpos entre sí en cuanto a la cantidad de materia en cada uno, como para comparar los pesos del mismo cuerpo en distintos lugares, para conocer las variaciones de la gravedad. Pero, mediante experimentos realizados con la mayor precisión siempre hallé que la cantidad de materia en cada cuerpo es proporcional a su peso.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA XX

Los cuerpos pendulares a los cuales, en un medio cualquiera, se resiste en razón de los momentos de tiempo y los cuerpos pendulares que se mueven en un medio no resistente de la misma gravedad especifica, completan en el mismo tiempo las oscilaciones en una cicloide y describen en tiempos iguales partes proporcionales de arcos.

Sea AB el arco de la cicloide que el cuerpo D describe al oscilar en un tiempo cualquiera y en medio no resistente. Sea bisecado en C de modo que C resulte su punto inferior; y la fuerza aceleratriz que empuja al cuerpo en un punto cualquiera D, o *d*, o E, será como la longitud del arco CD, o C*d*, o CE. Represéntese esa fuerza por dicho arco, y al ser la resistencia como el momento de tiempo, y por ello estar dada, represéntese ésta por una parte dada del arco cicloide CO, y tómese el arco O*d* respecto al arco CD en la misma proporción que tiene el arco OB respecto al arco CB: y la fuerza que empuja al Cuerpo en *d* en medio resistente, al ser el exceso de la fuerza C*d* sobre la resistencia CO, vendrá representada por el arco O*d*, y por eso será a la fuerza que empuja al cuerpo D en un medio no resistente en el punto D, como el arco O*d* al arco CD; por tanto, también en el punto B como el arco OB al arco CB. De suerte que si dos cuerpos D, *d*, parten del punto B empujados por estas fuerzas, al ser las fuerzas al comienzo como los arcos CB y OB, las velocidades iniciales y los arcos inicialmente descritos estarán en la misma razón. Sean dichos arcos BD y B*d* y los arcos restantes CD, O*d*, estarán en la misma proporción. Por consiguiente, las fuerzas proporcionales a los propios CD, O*d* seguirán siendo proporcionales en la misma razón que al principio y, por tanto, los cuerpos seguirán describiendo arcos simultáneamente en la misma proporción. Por lo cual, las fuerzas, las velocidades y los restantes arcos CD, O*d*, siempre serán como los arcos totales CB, OB, y por tanto dichos arcos restantes siempre serán descritos simultáneamente. Por lo cual los dos cuerpos D, *d*, llegarán a la vez a los puntos C y O, uno, en un medio no resistente, al punto C, mientras el otro, en un medio resistente, al punto O. Mas, como las velocidades en C y O son como los arcos CB, OB, los arcos que describen los cuerpos después, al marchar a la vez, serán arcos que estén en la misma razón. Sean estos CE, O*e*. La fuerza que retarda al cuerpo D en un medio no resistente en el punto E es como CE, y la fuerza que retarda al cuerpo *d* en un medio resistente en el punto *e* es como la suma de la fuerza C*e* y de la resistencia CO, es decir, como O*e*; por tanto, las fuerzas que retardan a los cuerpos son como los arcos CB, OB, proporcionales a los arcos CE, O*e*; y por lo mismo las velocidades, retardadas en esa razón dada, se mantienen en esa misma razón dada. Por consiguiente, las velocidades y los arcos descritos con ellas siempre están entre sí en la susodicha razón de los arcos CB y OB; y por ello, si se toman los arcos totales AB, *a*B, en la misma razón, los cuerpos D, *d*, describirán esos arcos simultáneamente, y en los puntos A, *a*, perderán a la vez todo su movimiento. Y, por consiguiente, las oscilaciones totales son isócronas y cualesquiera partes de arcos, BD, B*d*, o BE, B*e* descritas a la vez son proporcionales a los arcos totales BA, B*a*. Q. E. D.



COROLARIO. Por lo cual, el movimiento más rápido en un medio resistente no ocurre en el punto más bajo C, sino que se encuentra en el punto O, en el cual es bisecado el arco total descrito *a*B. Y el cuerpo al ir desde allí hasta *a* se va retardando en el mismo grado en que antes se aceleraba al descender desde B hasta O.

PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA XXI

Las oscilaciones en una cicloide de los cuerpos pendulares, a los que se resiste en razón de las velocidades, son isócronas.

Pues si dos cuerpos igualmente distantes de sus centros de suspensión describen oscilando arcos desiguales y las velocidades en las partes correspondientes de arcos son entre sí como los arcos totales, las resistencias, proporcionales a las velocidades, serán también entre sí como los propios arcos. Por lo cual, si estas resistencias se suman o restan a las fuerzas motrices originadas por la gravedad que son como los propios arcos, las sumas o las diferencias serán entre sí en la misma razón de los arcos: y como los incrementos o decrementos de las velocidades son como estas sumas o diferencias, las velocidades serán siempre como los arcos totales: por consiguiente, las velocidades, si en una ocasión son como los arcos totales, permanecerán siempre en esa proporción. Pero al principio del movimiento, cuando los cuerpos comienzan a descender y describir dichos arcos, las fuerzas, al ser proporcionales a los arcos, generarán velocidades proporcionales a los arcos. Luego las velocidades siempre serán como los arcos totales a describir, y por consiguiente, dichos arcos serán descritos en el mismo tiempo. Q. E. D.

Proposición xxvii. Teorema xxii

Si se resiste a los cuerpos pendulares en razón del cuadrado de las velocidades, las diferencias entre los tiempos de oscilación en un medio resistente y los tiempos de oscilación en un medio no resistente de la misma gravedad específica serán aproximadamente proporcionales a los arcos descritos al oscilar.

Pues, si con péndulos iguales se describen en un medio resistente los arcos desiguales A, B; la resistencia del cuerpo en el arco A será a la resistencia del cuerpo en la parte correspondiente del arco B como el cuadrado de las velocidades, esto es, aproximadamente como AA a BB. Si la resistencia en el arco B fuese a la resistencia en el arco A como AB a AA, los tiempos en los arcos A y B serían iguales, por la Proposición anterior. Por consiguiente, la resistencia AA en el arco A, o AB en el arco B, produce el exceso de tiempo en el arco A sobre el tiempo en medio no resistente; y la resistencia BB produce el exceso de tiempo en el arco B sobre el tiempo en medio no resistente. Pero tales excesos son como las fuerzas productoras muy aproximadamente, esto es, como los arcos A y B. Q. E. D.

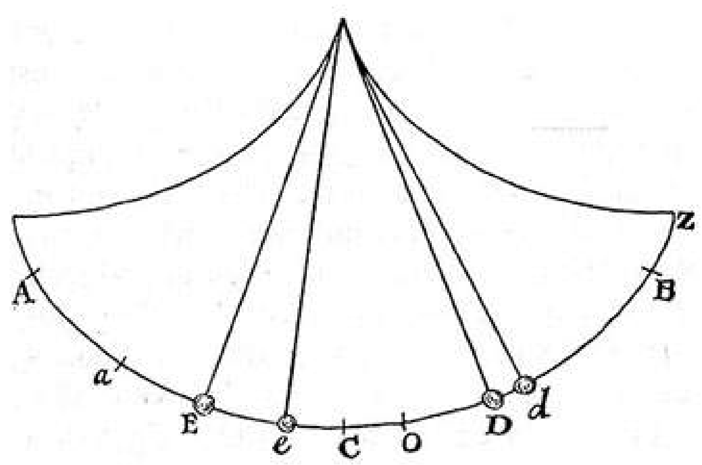
Corolario 1. Por ello, a partir de los tiempos de oscilaciones realizadas en arcos desiguales y en medios resistentes se puede conocer el tiempo de oscilación en un medio no resistente de la misma gravedad específica. Pues la diferencia de tiempos será al exceso de tiempo en el arco menor sobre el tiempo en medio no resistente como la diferencia de los arcos al arco menor.

Corolario 2. Las oscilaciones más cortas son más isócronas, y las muy cortas se realizan aproximadamente en los mismos tiempos que en un medio no resistente. Pero los tiempos de aquellas que se realizan en arcos más grandes son un poco mayores, debido a que la resistencia al descender el cuerpo, por la que el tiempo se alarga, es mayor con relación a la longitud descrita en el descenso que la resistencia en el ascenso subsiguiente gracias a la cual el tiempo se acorta. Pero los tiempos de oscilación, tanto breves como largas, parecen alargarse un poco por el movimiento del medio. Pues a los cuerpos que se retardan los resiste algo menos en razón de su velocidad, mientras que a los que se aceleran los resiste algo más que a aquellos que se producen uniformemente: y esto por cuanto que el medio, desplazándose con el movimiento recibido de los cuerpos hacia el mismo lado, se agita más en el primer caso y menos en el segundo; y por ello colabora más o menos con los cuerpos en movimiento. De suerte que en el descenso resiste más a los péndulos y en el ascenso menos que en razón de su velocidad, con lo que por una y otra causa el tiempo resulta prolongado.

Proposición xxviii. Teorema xxiii

Si a un cuerpo pendular que oscila por una cicloide se le resiste en razón de los momentos de tiempo, su resistencia será a la fuerza de la gravedad como el exceso del arco descrito en el descenso total sobre el arco de ascenso descrito subsiguientemente al doble de la longitud del péndulo.

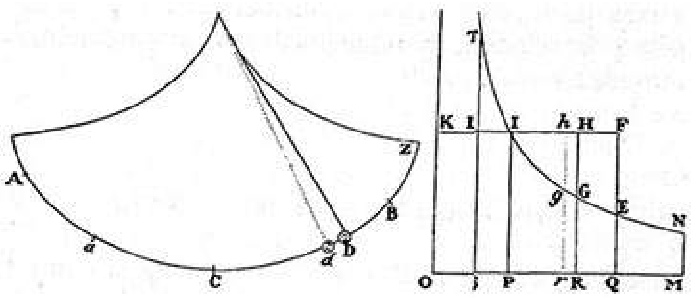
Sea BC el arco descrito en el descenso, C*a* el arco descrito en el ascenso, y A*a* la diferencia entre los arcos: y manteniendo las cosas construidas y demostradas en la Proposición xxv, la fuerza que actúa sobre el cuerpo en oscilación en un punto cualquiera D será a la fuerza de resistencia como el arco CD al arco CO, que es la mitad de la dicha diferencia A*a*. Y por ello, la fuerza que actúa sobre el cuerpo oscilante al principio de la cicloide o en el punto más alto, esto es, la fuerza de la gravedad será a la resistencia como el arco cicloide comprendido entre el punto más alto y el punto más bajo C al arco CO; es decir (si los arcos se duplican) como el arco de toda la cicloide, o el doble de la longitud del péndulo, al arco A*a*. Q. E. D.



PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA VI

Supuesto que a un cuerpo oscilante en una cicloide se le resiste en razón del cuadrado de la velocidad, hallar la resistencia en cada punto.

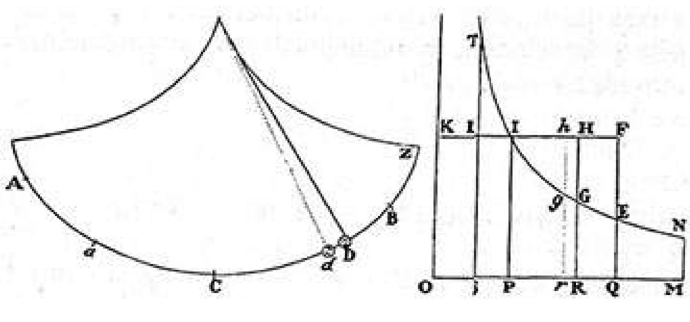
Sea B*a* el arco descrito con la oscilación completa, y sea C el punto más bajo de la cicloide y CZ la mitad del arco cicloide total, igual a la longitud del péndulo; y tratemos de hallar la resistencia del cuerpo en un punto cualquiera D. Córtese la recta infinita OQ en los puntos O, S, P, Q, con la condición de que (si se elevan las perpendiculares OK, ST, PI, QE, y con centro en O y asíntotas OK, OQ se traza la hipérbola TIGE que corte a las perpendiculares ST, PI, QE, en T, I, E, y por el punto I se traza KF paralela a la asíntota OQ y que corte a la asíntota OK en K y a las perpendiculares ST y QE en L y F) el área hiperbólica PIEQ sea al área hiperbólica PITS como el arco BC descrito en el descenso del cuerpo al arco C*a* descrito en el ascenso, y el área IEF al área ILT como OQ a OS. Después, con la perpendicular MN sepárese el área hiperbólica PINM que sea al área hiperbólica PIEQ como el arco CZ al arco BC descrito en el descenso. Y si con la perpendicular RG se segrega el área hiperbólica PIGR que sea al área PIEQ como un arco cualquiera CD al arco BC descrito en el descenso completo; la resistencia en el punto D será a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF - IGH al área PINM.



Y si las fuerzas procedentes de la gravedad que actúan sobre el cuerpo en los puntos Z, B, D, a, son como los arcos CZ, CB, CD, C*a*, y dichos arcos son como las áreas PINM, PIEQ, PIGR, PITS; entonces, represéntense tanto los arcos como las fuerzas por estas áreas. Además, sea D*d* un espacio muy pequeño recorrido por el cuerpo en descenso y represéntese por el área mínima RG*gr*, comprendida entre las paralelas RG, *rg*; y prolónguese *rg* hasta *h* de suerte que GH*hg* y RG*gr* sean los decrementos simultáneos de las áreas IGH, PIGR. El incremento GH*hg* - $\frac{Rr}{OQ}$IEF, o R*r* x HG - $\frac{Rr}{OQ}$IEF del área $\frac{OR}{OQ}$IEF - IGH será al decremento RG*gr*, o R*r* x RG del área PIGR como HG - $\frac{IEF}{OQ}$ a RG; y por tanto, como OR x HG - $\frac{OR}{OQ}$ IEF a OR x GR, o OP x PI, es decir (por ser iguales OR x HG, OR x HR - OR x GR, ORHK - OPIK, PIHR y PIGR + IGH) como PIGR + IGH - $\frac{OR}{OQ}$ IEF a OPIK. Luego, si el área $\frac{OR}{OQ}$ IEF - IGH se llama Y, y el decremento RG*gr* del área PIGR se hallase dado, el incremento del área Y sería como PIGR - Y.

Porque si V designase la fuerza procedente de la gravedad proporcional al arco a describir CD y que actúa sobre el cuerpo en D, y se escribe R para representar la resistencia, V - R será la fuerza total que actúa sobre el cuerpo en D. Y así el incremento de la velocidad es como V - R y la partícula de tiempo en que se produce conjuntamente: pero la propia velocidad es directamente como el incremento contemporáneo de espacio recorrido e inversamente como la misma partícula de tiempo. De donde, al ser, por hipótesis, la resistencia como el cuadrado de la velocidad, el incremento de la resistencia (por el Lema II) será como la velocidad y el incremento de la velocidad conjuntamente, es decir, como el momento de espacio y V - R conjuntamente; y por consiguiente, si se da el momento de espacio, como V - R; de suerte que, si por la fuerza V escribimos su representación PIGR, y la resistencia R se representa por otra área cualquiera Z, vendrá a ser como PIGR - Z.

Por tanto, al decrecer continuamente el área PIGR por la sustracción de momentos dados, crecen las áreas, Y, en razón de PIGR - Y, y Z en razón de PIGR - Z. Y por consiguiente, si las áreas Y y Z comienzan a la vez y son iguales al principio, continuarán siendo iguales por la adición de momentos iguales, de igual modo que después desaparecerán a la vez al decrecer por momentos iguales. Y viceversa, si empiezan y se desvanecen a la vez, tendrán momentos iguales y serán siempre iguales: y esto además porque, si la resistencia Z aumenta, la velocidad junto con el arco aquel C*a*, que se describe en si ascenso del cuerpo, disminuirán; y al acercarse el punto en que cesan todo movimiento y toda resistencia al punto C, la resistencia se desvanece más rápidamente que el área Y. Lo contrario habrá de ocurrir cuando se disminuye la resistencia.



Ahora bien, el área Z comienza y acaba cuando la resistencia es nula, es decir, al principio del movimiento, cuando el arco CD se iguala al arco CB y la recta RG incide sobre la recta QE, y al final del movimiento, cuando el arco CD se iguala al arco C*a* y RG incide sobre la recta ST. Y el área Y, o sea $\frac{OR}{OQ}$EIF - IGH, comienza y acaba también cuando es nula, y por ello cuando $\frac{OR}{OQ}$IEF y IGH son iguales: es decir (por construcción) cuando la recta RG incide sucesivamente sobre las rectas QE y ST. Y por tanto, dichas áreas comienzan y se desvanecen a la vez, por lo que siempre son iguales. En consecuencia el área $\frac{OR}{OQ}$IEF - IGH es igual al área Z, por la cual se representa la resistencia, y por ello es al área PINM por la que se representa la gravedad, como la resistencia a la gravedad. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por tanto, la resistencia en el punto más bajo C es a la fuerza de la gravedad como el área $\frac{OP}{OQ}$ IEF al área PINM.

COROLARIO 2. En cambio se hace máxima cuando el área PIHR es al área IEF como OR a OQ. Pues en tal caso su momento (a saber PIGR - Y) resulta nulo.

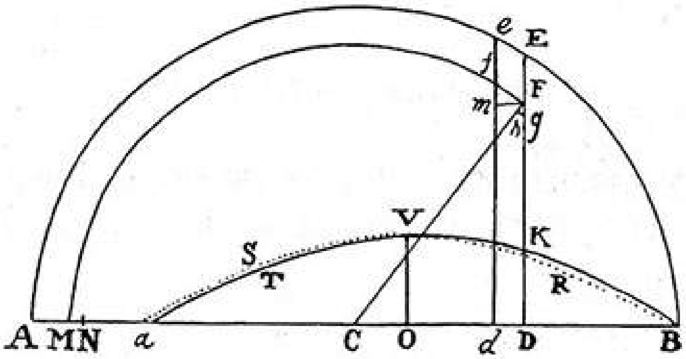
COROLARIO 3. De aquí se obtiene también la velocidad en cada punto: ya que es como la raíz cuadrada de la resistencia, y al comienzo mismo del movimiento es igual a la velocidad del cuerpo oscilante en la misma cicloide sin resistencia alguna.

Por otra parte, dada la dificultad del cálculo para hallar la resistencia y la velocidad por medio de esta proposición, parece oportuno añadir la siguiente.

PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA XXIV

Si la recta aB fuese igual al arco de la cicloide descrito por un cuerpo oscilante, y por cada uno de sus puntos D se elevan las perpendiculares DK, tales que sean a la longitud del péndulo como la resistencia del cuerpo en los puntos correspondientes del arco a la fuerza de la gravedad: digo que la diferencia entre el arco descrito en todo el descenso y el arco descrito en todo el ascenso subsiguiente multiplicada por la semisuma de ambos arcos será igual al área BKa ocupada por todas las perpendiculares DK.

Represéntese, pues, el arco de la cicloide descrito en una oscilación completa mediante la susodicha recta *a*B, igual a él, y el arco que se hubiere descrito en el vacío mediante la longitud AB. Al bisecar AB en C, el punto C representará el punto inferior de la cicloide, y CD será como la fuerza procedente de la gravedad que actúa sobre el cuerpo en D según la tangente de la cicloide, y tendrá respecto a la longitud del péndulo la misma razón que tiene la fuerza en D respecto a la fuerza de la gravedad. Represéntese, pues, dicha fuerza por la longitud CD y la fuerza de la gravedad mediante la longitud del péndulo, y si sobre DE se toma DK en la misma razón respecto a la longitud del péndulo que la de la resistencia respecto a la gravedad, DK representará a la resistencia. Con centro en C y distancia CA o CB constrúyase el semicírculo BE*e*A. Y el cuerpo recorra en un tiempo mínimo el espacio D*d*, y elevando las perpendiculares DE, *de* que toquen a la circunferencia en E y e, éstas serán como las velocidades que adquiriría el cuerpo cayendo en el vacío desde el punto B al alcanzar los puntos D y *a*. Esto es evidente (por la Proposición LII del Libro I). Represéntense, pues, estas velocidades por las susodichas perpendiculares DE, *de*; y sea DF la velocidad que adquiere en D al caer desde B en un medio resistente. Y si con centro en C y distancia CF se traza el círculo F*f*M que corte a las rectas *de* y AB en *f* y M, será M el punto hasta el que ascendería sin resto de resistencia, y *df* la velocidad que alcanzaría en *d*. De donde también, si F*g* representa el momento de velocidad que pierde el cuerpo D al describir el espacio mínimo D*d* por causa de la resistencia, y si se toma CN igual a C*g*, será N el punto hasta el cual ascienda el cuerpo sin resto de resistencia, y MN será el decremento de ascenso debido a la pérdida antedicha de velocidad. Sobre *df* trácese la perpendicular F*m*, y el decremento F*g* de la velocidad DF debido a la resistencia DK será al incremento *fm* de la misma velocidad debido a la fuerza CD como la fuerza generatriz DK a la fuerza generatriz CD. Pero por ser semejantes los triángulos F*mf*, F*hg*, FDC, resulta que *fm* es a F*m* o D*d* como CD a DF; y por tanto F*g* a D*d* como DK a DF. Y además, F*h* a F*g* como DF a CF; y por transposición, F*h* o MN a D*d* como DK a CF o CM; y por consiguiente, la suma de todos los MN x CM será igual a la suma de todos los D*d* x DK. En el punto móvil M supóngase siempre levantada una ordenada rectangular igual a la indeterminada CM, que moviéndose continuamente es multiplicada por toda la longitud A*a*; y el trapecio resultante de dicho movimiento, o su igual, el rectángulo A*a* x ½*a*B será igual a la suma de todos los D*d* x DK, es decir, al área BKVT*a*. Q. E. D.



COROLARIO. De aquí que, de la ley de la resistencia y de la diferencia A*a* entre los arcos C*a*, CB, se pueda inferir la proporción de la resistencia respecto a la gravedad muy aproximadamente.

Pues si la resistencia DK es uniforme, la figura BKT*a* será un rectángulo comprendido entre B*a* y DK, y DK será igual a ½A*a*. Por lo cual, al ser DK la representación de la resistencia, y la longitud del péndulo la de la gravedad, la resistencia será a la gravedad como ½A*a* es a la longitud del péndulo; tal y como se demostró en la Proposición XXVIII.

Si la resistencia fuese como la velocidad, la figura BKTa será muy aproximadamente una elipse. Pues si el cuerpo, en un medio no resistente, describiera con una oscilación completa la longitud BA, la velocidad en un punto cualquiera D sería como la ordenada DE aplicada al diámetro AB del círculo descrito. Por consiguiente, dado que B*a* en un medio resistente y BA en un medio no resistente son descritas casi en los mismos tiempos, por eso mismo las velocidades en cada punto de B*a* son muy aproximadamente a las velocidades en los puntos correspondientes de la longitud BA como B*a* a BA; la velocidad en el punto D en un medio resistente será como la ordenada aplicada al diámetro B*a* del círculo o elipse descritos con él; y por ello, la figura BKVT*a* será aproximadamente una elipse. Al suponer la resistencia proporcional a la gravedad, OV será la representación de la resistencia en el punto medio O; y la elipse BRVS*a*, descrita con centro en O y semiejes OB, OV, será aproximadamente igual a la figura BKVT*a*, o a su igual rectangular A*a* x BO. Por tanto, A*a* x BO es a OV x BO como el área de dicha elipse a OV x BA; es decir, A*a* es a OV como el área del semicírculo al cuadrado del radio, o también, como 11 a 17 aproximadamente: y por consiguiente $\frac{7}{11}$A*a* es a la longitud del péndulo como la resistencia en O del cuerpo oscilante a su gravedad.

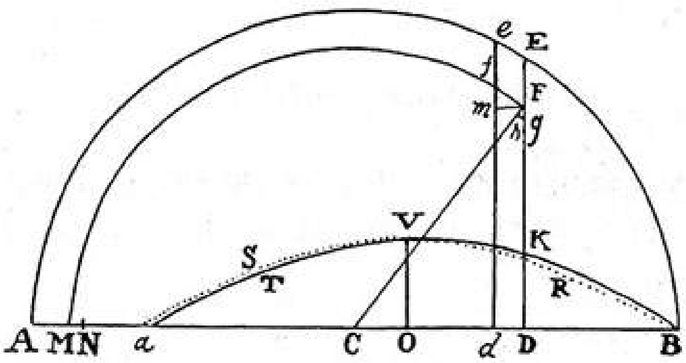
Pero si la resistencia DK fuese como el cuadrado de la velocidad, la figura BKVT*a* sería casi una parábola de vértice en V y eje OV, y, por tanto, igual al rectángulo comprendido entre ⅔B*a* y OV muy aproximadamente. Por consiguiente, el rectángulo ⅔B*a* x A*a* es igual al comprendido entre ⅔B*a* y OV, y por ello, OV es igual a ¼A*a*: por lo cual la resistencia en O de un cuerpo oscilante es a su gravedad como ¼A*a* a la longitud del péndulo.

Y considero que estas conclusiones son más que suficientemente exactas en la práctica. Porque, al coincidir la elipse o la parábola BRVS*a* con la figura BKVT*a* en el punto medio V, si esta figura excede hacia una parte BRV o hacia otra VS*a* a la otra figura, será más pequeña que ella hacia la otra parte, y de ese modo se igualará muy aproximadamente con ella.

Proposición XXXI. Teorema XXV

Si la resistencia de un cuerpo oscilante en cada parte proporcional de los arcos descritos es aumentada o disminuida en una razón dada, la diferencia entre el arco descrito en el descenso y el descrito en el subsiguiente ascenso aumentará o disminuirá en la misma razón.

Pues dicha diferencia procede de la retardación del péndulo debida a la resistencia del medio, y es, por tanto, como la retardación total y como la resistencia retardante, proporcional a aquélla. En la Proposición anterior el rectángulo comprendido bajo la recta ½*a*B y la diferencia A*a* de los dichos arcos CB, C*a* era igual al área BKT*a*. Y dicha área, si se mantiene la longitud *a*B, aumenta o disminuye en razón de las ordenadas aplicadas DK; es decir, en razón de la resistencia y, por ello, es como la longitud *a*B y la resistencia conjuntamente. Y por lo mismo, el rectángulo comprendido entre A*a* y ½*a*B es como *a*B y la resistencia conjuntamente y, por lo tanto, A*a* es como la resistencia. Q. E. D.



COROLARIO 1. De donde, si la resistencia es como la velocidad, la diferencia de arcos en el mismo medio será como el arco total descrito, y viceversa.

COROLARIO 2. Si la resistencia fuese como el cuadrado de la velocidad, dicha diferencia sería como el cuadrado del arco total, y viceversa.

COROLARIO 3. Y en general, si la resistencia es como el cubo u otra potencia cualquiera de la velocidad, la diferencia será como esa potencia del arco total, y viceversa.

COROLARIO 4. Y si la resistencia es en parte proporcional a la velocidad y en parte proporcional al cuadrado de la velocidad, la diferencia será en parte como el arco total y en parte como el cuadrado del mismo: y viceversa. La misma será la ley y la razón de la resistencia respecto a la velocidad que la ley y razón de la dicha diferencia con respecto a la longitud del arco.

COROLARIO 5. Y, por consiguiente, si para un péndulo que describe sucesivamente arcos desiguales es posible hallar la razón del incremento o decremento de esta diferencia con respecto a la longitud del arco descrito, se tendrá también la razón del incremento o decremento de la resistencia respecto a una velocidad mayor o menor.

ESCOLIO GENERAL[8]

De estas proposiciones, a través de oscilaciones de péndulos en medios cualesquiera, se puede hallar la resistencia de los medios. Por mi parte he investigado la resistencia del aire con los experimentos siguientes. Suspendí con un hilo delgado de un clavo bien firme a una bola de madera de $57\frac{7}{22}$ onzas *Romanas* de peso y de un diámetro de $6\frac{7}{8}$ pulgadas de *Londres* y de modo que entre el clavo y el centro de oscilación de la bola la distancia fuese de $10\frac{1}{2}$ pies. Sobre el hilo señalé un punto a diez pies y una pulgada del centro de suspensión, y a la altura de dicho punto situé una regla dividida en pulgadas que permitiesen anotar las longitudes de los arcos descritos por el péndulo. Después conté las oscilaciones en las que la bola perdía la octava parte de su movimiento. Si el péndulo se apartaba de la perpendicular hasta una distancia de dos pulgadas y desde allí se soltaba, de modo que en su descenso total recorriese un arco de dos pulgadas y con toda la primera oscilación un arco de casi cuatro pulgadas, aquél, al cabo de 164 oscilaciones, había perdido la octava parte de su movimiento, de suerte que en el último ascenso recorría un arco de una pulgada y tres cuartos. Si en el primer descenso describió un arco de cuatro pulgadas, perdió la octava parte de su movimiento en 121 oscilaciones, de suerte que en la última ascensión describió un arco de $3\frac{1}{2}$ pulgadas. Si en el primer descenso describió un arco de ocho pulgadas, o dieciséis, o treinta y dos, o sesenta y cuatro, perdió la octava parte de su movimiento con 69 oscilaciones, o $35\frac{1}{2}$, o $18\frac{1}{2}$, o $9\frac{2}{3}$, respectivamente. Por tanto, la diferencia entre los arcos descritos con el primer descenso y el último ascenso era en el caso primero, segundo, tercero, cuarto, quinto, sexto de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, pulgadas, respectivamente. Divídanse estas diferencias por el número de oscilaciones en cada caso y, para una oscilación media en la que se describió un arco de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60 y 120 pulgadas, la diferencia de los arcos descritos en el descenso y el subsiguiente ascenso será de $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes de pulgada, respectivamente. Ahora bien, estas diferencias, en las oscilaciones mayores, son aproximadamente como los cuadrados de los arcos descritos, mientras que en las menores, son un poco mayores que en dicha proporción; y por tanto (por el Corolario 2 de la Proposición XXXI de este Libro), la resistencia de la bola, cuando se mueve con mayor celeridad, es aproximadamente como el cuadrado de la velocidad; y cuando se mueve más lentamente es algo mayor que en dicha proporción.

Ahora llamemos V a la velocidad máxima en una oscilación cualquiera, y sean A, B, C unas cantidades dadas, y supongamos que la diferencia de los arcos sea $AV + BV^{3/2} + CV^2$. Puesto que las velocidades máximas son en la cicloide como las mitades de los arcos descritos en la oscilación, mientras en el círculo son como las cuerdas de los dichos semiarcos y, por tanto, a iguales arcos sean mayores en la cicloide que en el círculo y ello en razón de los semiarcos a sus cuerdas; mientras por otra parte, los tiempos en el círculo son mayores que en la cicloide y ello en razón inversa de la velocidad, es evidente que las diferencias de los arcos (que son como la resistencia y el cuadrado del tiempo conjuntamente) han de ser las mismas aproximadamente en una y otra curva: pues deberán las susodichas diferencias aumentar en la cicloide, a la vez que la resistencia, casi como la razón cuadrada del arco a la cuerda, por estar aumentada la velocidad en dicha razón simple; y disminuir, junto con el cuadrado del tiempo, en la misma razón cuadrada. Para trasladar esto a la cicloide, se han de tomar las mismas diferencias de arcos que fueron observadas en el círculo, y las velocidades máximas análogas a los arcos medios o enteros, es decir, análogos a los números ½, 1, 2, 4, 8, 16. Entonces, para los casos segundo, cuarto y sexto, escribamos en lugar de V los números 1, 4 y 16; y la diferencia de arcos resultará $\frac{½}{121} = A + B + C$, para el segundo caso; $\frac{2}{35½} = 4A + 8B + 16C$, para el cuarto caso; y $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$, para el sexto caso. Una vez que estas ecuaciones han sido resueltas por la debida reducción, resultará A = 0,0000916, B = 0,0010847, y C = 0,0029558. Por tanto, la diferencia de los arcos es como $0{,}0000916V + 0{,}0010847V^{3/2} + 0{,}0029558V^2$; y por consiguiente, dado que (por el Corolario de la Proposición XXX aplicado a este caso) la resistencia del globo en la mitad del arco de oscilación, cuando la velocidad es V, es a su peso como $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{3/2} + \frac{3}{4}CV^2$ es a la longitud del péndulo, si se escriben en lugar de A, B, y C los números hallados, la resistencia del globo será a su peso como $0{,}0000583V + 0{,}0007593V^{3/2} + 0{,}0022169V^2$ a la longitud del péndulo entre el centro de suspensión y la regla, es decir, a 121 pulgadas. Y puesto que V en el segundo caso representa a 1, en el cuarto a 4 y en el sexto a 16, la resistencia será al peso del globo en el segundo caso como 0,0030345 a 121, en el cuarto como 0,041748 a 121 y en el sexto como 0,61705 a 121.

El arco descrito por el punto marcado en el hilo era en el caso sexto de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, o $119\frac{5}{29}$ pulgadas. Y puesto que el radio es de 121 pulgadas y la longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro de la bola era de 126 pulgadas, el arco descrito por el centro del globo era de $124\frac{3}{31}$ pulgadas. Dado que la velocidad máxima del cuerpo oscilante, por la resistencia del aire, no coincide con el punto inferior del arco descrito, sino que ocurre casi en el punto medio del arco total, ésta será casi la misma que si el globo en todo su descenso en un medio no resistente describiese la mitad de dicho arco, mitad equivalente a $62\frac{3}{62}$ pulgadas, y esto en una cicloide, a la que antes hemos reducido el movimiento del péndulo: y por consiguiente, dicha velocidad será igual a la velocidad que adquiriría el globo cayendo perpendicularmente y describiendo en su caída una altura igual al seno verso de aquel arco. Pero en la cicloide dicho seno verso es a este arco de $62\frac{3}{62}$ como el propio arco a 252, doble de la longitud del péndulo y, por tanto, igual a 15,278 pulgadas. Por lo cual, la velocidad es la misma que la que adquiriría el cuerpo cayendo y describiendo en su caída un espacio de 15,278 pulgadas. Luego a semejante velocidad el cuerpo sufre una resistencia que es a su peso como 0,61705 a 121, o (si se tiene en cuenta solamente aquella parte de resistencia que es como el cuadrado de la velocidad) como 0,56752 a 121.

Por medio de experimentos hidrostáticos hallé que el peso de esta bola de madera era al peso de un globo de agua de la misma magnitud como 55 a 97: y por tanto, al estar 121 respecto a 213,4 en la misma proporción, la resistencia del globo de agua que se desplaza con la velocidad antedicha será a su peso como 0,56752 a 213,4, es decir, como 1 a $376\frac{1}{50}$. Y por tanto, dado que el peso del globo de agua generaría toda esa velocidad en el globo que cae en el mismo tiempo en el cual dicho globo con velocidad uniformemente continua describiría un espacio de 30,556 pulgadas, es evidente que la fuerza de resistencia uniformemente continua durante ese mismo tiempo podría quitar una velocidad menor en razón de 1 a $376\frac{1}{50}$, es decir, $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$ parte de la velocidad total. Y por consiguiente, en el tiempo en que el globo describiría, con dicha velocidad uniformemente continua, la longitud de su semidiámetro, o sea $3\frac{7}{16}$ pulgadas, en ese tiempo perdería $\frac{1}{3342}$ parte de su movimiento.

También contaba las oscilaciones en las que el péndulo perdía la cuarta parte de su movimiento. En la tabla siguiente los números superiores significan la longitud del arco descrito en el primer descenso, expresada en pulgadas y partes de pulgada; los números intermedios significan la longitud del arco descrito en el último ascenso; en último lugar aparecen los números de las oscilaciones. He reseñado el experimento por resultar más exacto que el que sólo cuenta la pérdida de la octava parte de movimiento. Trate de calcularlo el que quiera.

Primer descenso ………………………………	2	4	8	16	32	64
Último ascenso ………………………………	1½	3	6	12	24	48
Número de oscilaciones ………………………	374	272	162½	83⅓	41⅔	22⅔

Suspendí después del mismo hilo una bola de plomo de dos pulgadas de diámetro y de 26¼ onzas *romanas* de peso, de suerte que entre el centro del globo y el punto de suspensión hubiese una distancia de 10½ pies, y conté las oscilaciones en que se perdía una parte dada del movimiento. La primera tabla de las siguientes muestra el número de oscilaciones en que se perdió la octava parte del movimiento total; la segunda muestra el número de oscilaciones en que se perdió la cuarta parte del mismo.

Primer descenso ………………………………	1	2	4	8	16	32	64
Último ascenso ………………………………	⅞	7/4	3½	7	14	28	56
Número de oscilaciones							

………………………	226	228	193	140	90½	53	30
Primer descenso ………………………………	1	2	4	8	16	32	64
Último ascenso ………………………………	¾	1½	3	6	12	24	48
Número de oscilaciones ………………………	510	518	420	318	204	121	70

Seleccionando en la tabla primera las observaciones tercera, quinta y séptima y expresando las velocidades máximas en estas observaciones por los números 1, 4, 16, respectivamente, y en general por V como antes, resultará $\frac{½}{193}$ = A + B + C para la tercera; $\frac{2}{90½}$ = 4A + 8B + 16C, para la quinta; y $\frac{8}{30}$ = 16A + 64B + 256C, para la séptima. Una vez resueltas estas ecuaciones dan, A = 0,001414, B = 0,000297, y C = 0,000879. Y de ello se desprende que la resistencia del globo moviéndose con la velocidad V estará respecto a su peso de 26¼ onzas en la misma razón que la que hay entre $0{,}0009V + 0{,}000208V^{3/2} + 0{,}000659V^2$ y la longitud de 121 pulgadas del péndulo. Y si consideramos solamente aquella parte de resistencia que es como el cuadrado de la velocidad, ésta será al peso del globo como $0{,}000659V^2$ a 121 pulgadas. Pero esta parte de resistencia era en el experimento primero respecto al peso de la bola de madera de $57\frac{7}{22}$ onzas como $0{,}002217V^2$ a 121: de aquí que la resistencia del globo de madera a la resistencia del globo de plomo (siendo iguales sus velocidades) sea como $57\frac{7}{22}$ multiplicado por 0,002217 a 26¼ multiplicado por 0,000659, es decir, como 7⅓ a 1. Los diámetros de los dos globos eran de 6⅞ y 2 pulgadas, y los cuadrados de éstos son entre sí como 47¼ y 4, o $11\frac{13}{16}$ y 1 muy aproximadamente. Luego la resistencia de los globos a igual velocidad estaba en menor proporción que la razón del cuadrado de los diámetros. Pero no hemos considerado aún la resistencia del hilo, que ciertamente era grande, y que debe restarse de la resistencia hallada para los péndulos. No pude definirla con precisión, pero encontré que era, no obstante, mayor que la tercera parte de la resistencia total del péndulo menor; y de ello inferí que las resistencias de los globos, descontada la resistencia del hilo, están aproximadamente como el cuadrado de los diámetros. Pues, la razón 7⅓ - ⅓ a 1 - ⅓, o 10½ a 1 no dista mucho de la razón cuadrada de los diámetros $11\frac{13}{16}$ a 1.

Puesto que la resistencia del hilo en globos mayores es de menor importancia, traté también de probar con un globo de 18¾ pulgadas de diámetro. La longitud del péndulo entre el punto de suspensión y el centro de oscilación era de 122½ pulgadas, y entre el punto de suspensión y el nudo del hilo de 109½ pulgadas. El arco descrito por el nudo en el primer descenso del péndulo fue de 32 pulgadas. El arco descrito por el mismo nudo en el último ascenso, después de cinco oscilaciones, fue de 28 pulgadas. La suma de arcos, o el arco total descrito en una oscilación media fue de 60 pulgadas. La diferencia de arcos de 4 pulgadas. Su décima parte o la diferencia entre el descenso y el ascenso en una oscilación media fue de $\frac{2}{5}$ de pulgada. Y como el radio $109\frac{1}{2}$ es al radio $122\frac{1}{2}$ así también el arco total de 60 pulgadas descrito por el nudo en una oscilación media es al arco total de $67\frac{1}{8}$ descrito por el centro del globo en una oscilación media; y así también la diferencia de y es a la nueva diferencia de 0,4475. Si se aumentase la longitud del péndulo, manteniendo la longitud del arco descrito, en la razón de 126 a $122\frac{1}{2}$, el tiempo de oscilación aumentaría y la velocidad del péndulo disminuiría como la raíz cuadrada de aquella razón, pero, en cambio, se conservaría la diferencia de 0,4475 entre los arcos descritos en el descenso y consiguiente ascenso. Pero si el arco descrito aumentase en razón de $124\frac{3}{31}$ a $67\frac{1}{8}$, la diferencia de 0,4475 aumentaría como el cuadrado de dicha razón y vendría a ser de 1,5295. Esto sería así, bajo la hipótesis de que la resistencia del péndulo fuese como el cuadrado de la velocidad. Luego, si el péndulo describiese un arco total de $124\frac{3}{31}$ pulgadas y su longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación fuese de 126 pulgadas, la diferencia de arcos descritos en el descenso y consiguiente ascenso sería de 1,5295 pulgadas. Y esta diferencia multiplicada por el peso del globo-péndulo, que era de 208 onzas, da un producto de 318,136. Ahora bien, cuando el péndulo primero, hecho de una bola de madera, describía con su centro de oscilación, que distaba del punto de suspensión 126 pulgadas, un arco total de $124\frac{3}{31}$ pulgadas, la diferencia de arcos descritos en el descenso y el ascenso fue de $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ que multiplicada por el peso del globo, que era de $57\frac{7}{22}$ onzas da un producto de 49,396. Multipliqué estas diferencias por los pesos de los globos para hallar sus resistencias. Pues, las diferencias proceden de las resistencias y son directamente como las resistencias e inversamente como los pesos. Las resistencias son, por tanto, como los números 318,136 y 49,396. Pero la parte de resistencia del globo menor, que es como el cuadrado de la velocidad, resultaba ser con respecto a la resistencia total como 0,56752 a 0,61675, es decir, como 45,453 a 49,396; mientras que la parte de resistencia correspondiente del globo mayor venía a ser casi igual a la resistencia total del mismo y, por tanto, dichas partes son como 318,136 y 45,453 muy aproximadamente, es decir, como 7 y 1. Pero los diámetros de los globos son $18\frac{3}{4}$ y $6\frac{7}{8}$; y sus cuadrados $351\frac{9}{16}$ y $47\frac{17}{64}$ son como 7,438 y 1, es decir, aproximadamente como las resistencias 7 y 1 de los globos. La diferencia de razones no es mayor que la que pudo provenir de la resistencia del hilo. Por consiguiente, aquellas partes de las resistencias que, a globos iguales, son como los cuadrados de las velocidades, son también, a velocidades iguales, como los cuadrados de los diámetros de los globos.

también, a velocidades iguales, como los cuadrados de los diámetros de los globos.

Por lo demás, el mayor de los globos que utilicé en estos experimentos no era perfectamente esférico y por ello en el cálculo aquí presentado prescindí de minucias en razón de la brevedad, sin poner mayor empeño en la exactitud en un experimento que no era bastante exacto. Y por eso quisiera, al depender de esto la demostración del vacío, que se realizaran estos experimentos con globos más numerosos, más grandes y más exactos. Si se toman los globos en progresión geométrica, cuyos diámetros sean, pongamos de 4, 8, 16, 32, pulgadas, se inferirá de la progresión de los experimentos qué es lo que debería acontecer con globos aún mayores.

Ahora bien, para comparar las resistencias de distintos fluidos entre sí, hice lo siguiente. Preparé una caja de madera de cuatro pies de larga y de un pie de ancha y otro de alta. Desprovista de tapa la llené de agua de la fuente, e hice que unos péndulos sumergidos en ella se moviesen oscilando. Un globo de plomo de 166⅙ onzas de peso y de 3⅝ pulgadas de diámetro se movía como se expone en la tabla siguiente, siendo además la longitud del péndulo desde el punto de suspensión hasta un punto señalado en el hilo de 126 pulgadas, hasta el centro de oscilación de 134⅜ pulgadas.

Arco del primer descenso descrito por el punto señalado en el hilo, en pulgadas	64	32	16	8	4	2	1	½	¼
Arco del último ascenso, en pulgadas	48	24	12	6	3	1½	¾	⅜	3⁄16
Diferencia de arcos proporcional al movimiento perdido, en pulgadas	16	8	4	2	1	½	¼	⅛	1⁄16
Número de oscilaciones en el agua			39⁄60	1⅕	3	7	11 1⁄14	12 2⁄3	13⅓
Número de oscilaciones en el aire	85½		287	535					

En el experimento de la cuarta columna se perdieron iguales movimientos con 535 oscilaciones en el aire y con 1⅕ en el agua. Ciertamente las oscilaciones en el aire eran algo más veloces que en el agua. Pero si las oscilaciones en el agua se acelerasen de modo que los movimientos de los péndulos fuesen igualmente veloces en ambos medios, se mantendría el mismo número de oscilaciones de 1⅕ en el agua, en las cuales se perdería el mismo movimiento que antes, por el hecho de haber aumentado la resistencia y a la vez haber disminuido el cuadrado del tiempo según el cuadrado de esa misma razón. Luego con iguales velocidades de los péndulos se han perdido iguales movimientos con 535 oscilaciones en el aire y con 1⅕ en el agua;

a 1⅕. Esta es la proporción de las resistencias en el caso de la columna cuarta.

Ahora llamemos $AV + CV^2$ a la diferencia de arcos descritos en el descenso y subsiguiente ascenso por el globo moviéndose con la máxima velocidad; y puesto que la velocidad máxima en el caso de la columna cuarta es a la velocidad máxima en el caso de la columna primera como 1 a 8, y la susodicha diferencia de arcos en el caso de la columna cuarta es a la diferencia de arcos en el caso de la columna primera como $\frac{2}{535}$ a $\frac{16}{85\frac{1}{4}}$, o como 85½ a 4280, escribamos en estos casos 1 y 8 por las velocidades, y 85½ y 4280 por las diferencias de arcos, y resultará $A + C = 85\frac{1}{2}$, y $8A + 64C = 4280$, o $A + 8C = 535$; y resolviendo las ecuaciones resultará de aquí que $7C = 449\frac{1}{2}$, y $C = 64\frac{3}{14}$, y $A = 21\frac{2}{7}$; y por tanto, la resistencia, al ser como $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}V^2$, será como $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}V^2$. Por lo cual, en el caso de la cuarta columna, donde la velocidad era 1, la resistencia total es a la parte de ella misma que es proporcional al cuadrado de la velocidad como $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$, o $61\frac{12}{17}$ a $48\frac{9}{56}$; y por esto, la resistencia del péndulo en el agua es a la susodicha parte de resistencia en el aire que es proporcional al cuadrado de la velocidad y que solamente entra en consideración en los movimientos más veloces, como $61\frac{13}{17}$ a $48\frac{9}{56}$ y 535 a 1⅕ conjuntamente, es decir, como 571 a 1. Si se hubiese sumergido el hilo entero del péndulo que oscilaba en el agua, su resistencia aún habría sido mayor; hasta el punto que aquella resistencia del péndulo oscilante en el agua que es proporcional al cuadrado de la velocidad y que solamente merece consideración en los cuerpos más veloces, será a la resistencia del péndulo mismo completo, moviéndose con la misma velocidad en el aire, aproximadamente como 850 a 1, es decir, aproximadamente como la densidad del agua a la densidad del aire.

En este cálculo también se debería considerar aquella parte de resistencia del péndulo en el agua que fuese como el cuadrado de la velocidad, pero (aunque parezca extraño) la resistencia en el agua aumentaba más que en razón del cuadrado de la velocidad. Buscando la causa de ello, vine a dar en que la caja era demasiado pequeña para el tamaño del globo del péndulo e impedía demasiado el movimiento del agua en retroceso por su estrechez. Pues, si se sumergía un globo pendular de una pulgada de diámetro, la resistencia aumentaba aproximadamente como el cuadrado de la velocidad. Ensayaba esto construyendo un péndulo de dos globos, de los cuales el menor y más bajo oscilase en el agua, mientras el mayor y más alto estaba sujeto por el hilo encima de ella, y oscilando en el aire ayudaba al movimiento del péndulo y lo hacía más rápido. Y los experimentos realizados de este modo tuvieron los resultados recogidos en la tabla siguiente.

Arco descrito en el primer descenso …………	16	8	4	2	1	½	¼
Arco descrito en el último ascenso …………………	12	6	3	1½	¾	⅜	$\frac{3}{16}$

Diferencia de arcos proporcionales al movimiento perdido ………………………	4	2	1	½	¼	⅛	$\frac{1}{16}$
Número de oscilaciones ………………………	3⅜	6½	12½	21⅕	34	53	62⅕

También hice, comparando entre sí las resistencias de los medios, que péndulos de hierro oscilasen en mercurio. La longitud del hilo de hierro era de casi tres pies y el diámetro del globo pendular de casi un tercio de pulgada. Otro globo de plomo estaba sujeto al hilo inmediatamente encima del mercurio para que el movimiento del péndulo continuase durante más tiempo. Entonces llenaba un recipiente, de casi tres libras de capacidad de mercurio, alternativamente con mercurio y agua común, para hallar así la proporción de resistencias al péndulo oscilante sucesivamente en uno y otro fluido: y la resistencia en el mercurio resultó ser a la del agua aproximadamente como 13 ó 14 a 1, es decir, como la densidad del mercurio a la del agua. Cuando ponía un globo pendular algo mayor, como de un tercio o de dos tercios de pulgada de diámetro, la resistencia del mercurio venía a ser a la del agua casi como la de 12 ó 10 a 1. Pero es más fiable el experimento anterior, ya que en este último el vaso era demasiado pequeño para el tamaño del globo sumergido. Al aumentar el globo se debería ampliar también el vaso. Había pensado en repetir experimentos de este tipo utilizando recipientes mayores y con líquidos de metales fundidos o bien con otros tanto calientes como fríos: pero no hay tiempo de hacer todos los experimentos, y por los ya descritos consta suficientemente que la resistencia de los cuerpos velozmente movidos es proporcional aproximadamente a la densidad de los fluidos en que se mueven. No digo exactamente. Pues, los fluidos más tenaces, a igual densidad, sin duda resisten más que los más líquidos, como el aceite frío más que el caliente, el caliente más que el agua de lluvia, el agua más que el espíritu de vino. Pero en los líquidos que suelen ser bastante fluidos, como en el aire, en agua dulce o salada, en espíritus de vino, trementina, y sales, en aceite caliente y limpio por destilación de residuos, en aceite de vitriolo y en mercurio, en metales fundidos y otros por el estilo que son tan fluidos que permiten, al ser agitados en los vasos, conservar durante largo tiempo el movimiento, y cuando se derraman se producen gotas fácilmente, no me cabe duda de que la regla dada resulte bastante exacta: sobre todo si los experimentos se hicieren con cuerpos pendulares mayores y movidos más velozmente.

Y por fin, dada la opinión de algunos, según la cual existe un cierto medio etéreo y muy sutil que impregna los poros e intersticios de todos los cuerpos y además debe dar origen a alguna resistencia debida al tal medio fluyente por los poros de los cuerpos, con el fin de averiguar si la resistencia que experimentamos en los cuerpos en movimiento se halla toda en la superficie externa de los mismos o también las partes internas en sus propias superficies la experimentan de modo perceptible, diseñé el siguiente experimento. Con un hilo de once pies de largo suspendí de un gancho de acero, con un anillo de acero también, una caja redonda de abeto para construir un péndulo de dicha longitud. El gancho superior estaba muy afilado por su construir un péndulo de dicha longitud. El gancho superior estaba muy afilado por su cara cóncava, para que el anillo con su arco superior fijado al filo se moviese con toda libertad. El hilo estaba atado al arco inferior. Una vez hecho el péndulo de esta manera, lo separé de la perpendicular hasta una distancia de casi seis pies, y esto según un plano perpendicular al filo del gancho, para que el anillo, al oscilar el péndulo, no resbalase sobre el filo del gancho hacia un lado o hacia otro. Pues el punto de suspensión en que el anillo toca al gancho, debe permanecer inmóvil. Señalé exactamente el lugar hasta el cual separé al péndulo, y después de soltarlo, señalé los tres puntos hasta los que regresó al final de las oscilaciones primera, segunda y tercera. Repetí esto muchas veces para determinar lo más exactamente posible dichos puntos. Después llené la caja de plomo y de los metales más pesados que tenía a mano. Pero antes pesé la caja vacía, lo mismo que el hilo que la rodeaba y la mitad del resto del hilo que se extendía entre el gancho y la caja suspendida. Pues el hilo tendido actúa siempre con la mitad de su peso sobre el péndulo separado de la perpendicular. A este peso añadí el peso del aire contenido en la caja. El peso total vino a ser aproximadamente como una setenta y ochava parte del peso de la caja llena de metales. Entonces, como la caja llena de metales estiraba el hilo con su peso, aumentando la longitud del péndulo, reduje el hilo para que, al oscilar, tuviese la misma longitud que antes. Después, separando el péndulo hasta el primer punto señalado y dejándolo caer, conté las oscilaciones, unas setenta y siete, hasta que la caja regresó al punto señalado en segundo lugar, y otras tantas hasta que llegó a la tercera señal, y de nuevo otras tantas hasta que llegó a la cuarta. De donde, concluyo que la resistencia total de la caja llena no guarda mayor proporción respecto a la caja vacía que 78 a 77. Pues si las resistencias de ambas fuesen iguales, la caja llena, debido a que su fuerza ínsita es setenta y ocho veces mayor que la fuerza ínsita de la caja vacía, debería conservar su movimiento de oscilación durante tanto más tiempo y, por tanto, retornar hasta los puntos señalados tras 78 oscilaciones completas. Pero regresó a ellos tras 77 oscilaciones completas.

Represente A la resistencia de la caja en su superficie externa y B la resistencia de la caja vacía en sus partes interiores; y si la resistencia de los cuerpos igualmente veloces en sus partes internas es como la materia o el número de partículas que resisten, 78B será la resistencia de la caja llena en sus partes internas y, por tanto, la resistencia total A + B de la caja vacía será a la resistencia total A + 78B de la caja llena como 77 a 78, y parcialmente, A + B a 77B, como 77 a 1, y por ello, A + B a B como 77 x 77 a 1, y parcialmente, A a B como 5928 a 1. Por consiguiente, la resistencia de la caja vacía en sus partes internas es más de cinco mil veces menor que su resistencia en la superficie externa. Argumentamos así bajo la hipótesis de que la mayor resistencia de la caja llena no obedece a otra causa oculta sino sólo a la acción sobre el metal incluido de algún fluido sutil.

He expuesto este experimento de memoria. Pues he perdido los papeles en que lo había anotado. Por ello he tenido que omitir algunas fracciones numéricas que

Pero ahora no hay tiempo de intentarlo otra vez. La primera vez, por utilizar un gancho no seguro, la caja llena se retardaba más rápidamente. Al buscar la causa, hallé que el gancho, débil, cedía al peso de la caja y cediendo a sus oscilaciones se doblaba hacia todas partes. Preparé entonces un gancho firme, que garantizase la inmovilidad del punto de suspensión, y después todo ocurrió como arriba queda descrito.

Sección VII[9]
SOBRE EL MOVIMIENTO DE FLUIDOS Y LA RESISTENCIA DE PROYECTILES

Proposición XXXII. Teorema XXVI

Si dos sistemas semejantes de cuerpos constan de igual número de partículas y las partículas correspondientes son semejantes y proporcionales una a una en cada sistema y están situadas de manera semejante entre sí y además tienen entre sí una razón dada de densidad, y además empiezan a moverse de manera semejante entre sí en tiempos proporcionales (las de un sistema entre sí y las del otro entre ellas) y las que pertenecen a un sistema no se tocan entre ellas más que en el momento de reflexión, ni se atraen ni repelen más que con las fuerzas aceleratrices que sean inversamente proporcionales al diámetro de las partículas correspondientes y directamente al cuadrado de las velocidades: digo que las partículas de los sistemas continuarán moviéndose de manera semejante entre ellas y con tiempos proporcionales.

Digo que cuerpos iguales en sitios semejantes se mueven de modo semejante entre ellos en tiempos proporcionales, si sus situaciones mutuas al final de dichos movimientos son siempre semejantes: tal y como si se comparasen las partículas de un sistema con las partículas correspondientes de otro. De donde los tiempos, en los cuales se describen por las partículas correspondientes partes semejantes y proporcionales de figuras semejantes, serán proporcionales también. Por consiguiente, si se diesen dos sistemas de esta clase, las partículas correspondientes, debido a la semejanza de los movimientos iniciales, continuarán moviéndose con movimientos semejantes hasta que choquen entre sí. Pues si no actúa sobre ellas fuerza alguna, proseguirán uniformemente en línea recta, por la Ley I del Movimiento. Si se perturban mutuamente con alguna fuerza, y ésta es inversamente como el diámetro de las partículas correspondientes y directamente como el cuadrado de las velocidades, puesto que las situaciones de las partículas son semejantes y las fuerzas proporcionales, las fuerzas totales que actúan sobre las partículas correspondientes, que resultan compuestas de las fuerzas singulares en acción (por el Corolario II de las Leyes) tendrán las mismas direcciones, como si se dirigiesen a centros similarmente situados entre las partículas; y dichas fuerzas totales serán entre sí, como las fuerzas componentes singulares, es decir, inversamente como los diámetros de las partículas correspondientes y directamente como los cuadrados de las velocidades: por lo cual, harán que las partículas correspondientes continúen describiendo figuras semejantes. Esto será así (por los Corolarios 1 y 8 de la Proposición IV del Libro I) si los centros susodichos están en reposo. Pero si están en movimiento, gracias a la semejanza de las traslaciones, sus situaciones permanecen semejantes entre las partículas de los sistemas, y producirán cambios semejantes en las figuras que describen las partículas. Por tanto, los movimientos de partículas correspondientes y semejantes serán semejantes hasta sus primeros choques y, por ser semejantes los choques, y semejantes las reflexiones, también después serán (por lo ya mostrado) semejantes los movimientos entre sí hasta que de nuevo choquen entre ellas, y así sucesivamente hasta el infinito. Q. E. D.

COROLARIO 1. De aquí que si dos cuerpos cualesquiera, semejantes entre sí y semejantemente situados respecto a las partículas correspondientes de los sistemas, empiezan a moverse entre éstas de modo semejante y en tiempos proporcionales y sus magnitudes y densidades son mutuamente como las magnitudes y densidades de las partículas correspondientes, continuarán moviéndose semejantemente en tiempos proporcionales. Pues la razón de las partes mayores de uno y otro sistema es la misma que la de las partículas de los mismos.

COROLARIO 2. Y si todas las partes semejantes y semejantemente dispuestas de los sistemas reposan entre ellas, y dos de ellas, mayores que las otras, y mutuamente correspondientes entre sí en uno y otro sistema, empiezan a moverse según líneas semejantemente situadas y con movimientos semejantes en cualquiera dirección, producirán en las otras partes de los sistemas movimientos semejantes, movimientos que continuarán de modo semejante entre las partes en tiempos proporcionales; y describirán, por ello, espacios proporcionales a sus diámetros.

PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA XXVII

Con los mismos supuestos, digo que las partes mayores de los sistemas padecen una resistencia que está en razón compuesta del cuadrado de sus velocidades, del cuadrado de sus diámetros y de la razón simple de la densidad de las partes de los sistemas.

Pues la resistencia procede en parte de las fuerzas centrípetas o centrífugas, con las cuales las partículas de los sistemas se agitan mutuamente, parte de las colisiones y reflexiones de las partículas y las partes mayores. Las resistencias del primer género son entre sí como las fuerzas totales motrices que las producen, es decir, como las fuerzas totales aceleratrices y las cantidades de materia en las partes correspondientes; es decir (por hipótesis), directamente como el cuadrado de las velocidades e inversamente como las distancias de las partículas correspondientes y directamente como las cantidades de materia en las partículas correspondientes; y por lo mismo, como las distancias de las partículas de un sistema son a las distancias correspondientes de las partículas del otro como el diámetro de la partícula o de una parte en el primer sistema al diámetro de la partícula o parte correspondiente en el otro, y la cantidad de materia es como las densidades de las partes y el cubo de los diámetros, las resistencias son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes de los sistemas. Q. E. D. Las resistencias de la segunda especie son como el número de reflexiones correspondientes y sus fuerzas conjuntamente. Pero el número de reflexiones son entre sí directamente como las velocidades de las partes correspondientes, e inversamente como los espacios entre las reflexiones de las mismas. Y las fuerzas de las reflexiones son como las velocidades, las magnitudes y las densidades de las partes correspondientes conjuntamente, es decir, como las velocidades, los cubos de los diámetros y las densidades de las partes. Y reunidas todas estas razones, las resistencias de las partes correspondientes son entre sí como los cuadrados de las velocidades y los cuadrados de los diámetros y las densidades de las partes conjuntamente. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por consiguiente, si tales sistemas fuesen dos fluidos elásticos, como el aire, y sus partes están en reposo entre ellas, y dos cuerpos semejantes y proporcionales en volumen y densidad a las partes de los fluidos y, además, situados semejantemente entre esas partes, fuesen lanzados en cualquier dirección según líneas semejantemente dispuestas, mientras las fuerzas aceleratrices con las cuales se agitan mutuamente las partículas de los fluidos son inversamente como los diámetros de los cuerpos lanzados y directamente como los cuadrados de las velocidades, dichos cuerpos en tiempos proporcionales excitarán movimientos semejantes en los fluidos y describirán espacios semejantes y proporcionales a sus diámetros.

COROLARIO 2. Por lo cual, en dicho fluido un proyectil veloz sufre una resistencia que es aproximadamente como el cuadrado de su velocidad. Pues si las fuerzas que agitan entre sí a las partículas distantes se aumentasen como el cuadrado de la velocidad, la resistencia estaría en dicha razón cuadrada exactamente; y por tanto, en un medio cuyas partes distantes entre sí no se agitan con fuerza alguna, la resistencia es exactamente como el cuadrado de la velocidad. Sean, pues, A, B, C, tres medios que constan de partes semejantes e iguales y dispuestas regularmente según distancias iguales. Las partes de los medios A y B repélanse entre sí con fuerzas que sean también entre sí como T y V, mientras que las partes del medio C carecen por completo de estas fuerzas. Y si cuatro cuerpos iguales D, E, F, G se movieran en estos medios, los dos primeros D y E en los dos medios primeros A y B, y los otros dos F y G en el tercer medio C, y la velocidad del cuerpo D es a la velocidad del cuerpo E, y la velocidad del cuerpo F a la del cuerpo G como la raíz cuadrada de las fuerzas T a las fuerzas V, la resistencia del cuerpo D será a la resistencia del cuerpo E, y la resistencia del cuerpo F a la del cuerpo G, como el cuadrado de las velocidades; y por tanto, la resistencia del cuerpo D será a la resistencia del cuerpo F como la resistencia del cuerpo E a la del cuerpo G. Tengan los cuerpos D y F las mismas velocidades, así como los cuerpos E y G; y aumentando las velocidades de los cuerpos D y F en una razón cualquiera, y disminuyendo las fuerzas de las partículas del medio B según el cuadrado de la misma razón, el medio B se aproximará cuanto se quiera a la forma y condición del medio C, y por lo mismo, las resistencias de los cuerpos iguales y a iguales velocidades E y G en tales medios se aproximarán constantemente a la igualdad, de suerte que su diferencia resulte al final menor que una dada cualquiera. Por tanto, cuando las resistencias de los cuerpos D y F sean entre sí como las resistencias de los cuerpos E y G, también éstas se aproximan a la razón de igualdad. Pues las resistencias de los cuerpos D y F, cuando se mueven muy velozmente, son aproximadamente iguales: y por ello, cuando la resistencia del cuerpo F sea como el cuadrado de la velocidad, la resistencia del cuerpo D estará aproximadamente en esa razón.

COROLARIO 3. La resistencia de un cuerpo moviéndose muy velozmente en un fluido elástico es casi la misma que si las partes del fluido careciesen de sus fuerzas centrífugas y no se repeliesen entre sí; ello siempre que la fuerza elástica del fluido proceda de las fuerzas centrífugas de las partículas y la velocidad sea tan grande que las fuerzas no tengan tiempo suficiente para actuar.

COROLARIO 4. Puesto que las resistencias de cuerpos semejantes y con velocidades iguales, en medios cuyas partes distantes no se repelen entre sí, son como los cuadrados de los diámetros; las resistencias de cuerpos a iguales velocidades y con movimiento muy veloz en un fluido elástico son también muy aproximadamente como los cuadrados de los diámetros.

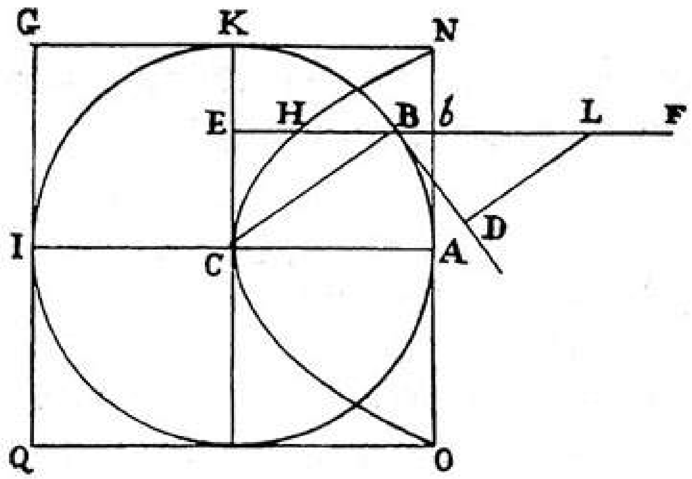
COROLARIO 5. Y puesto que cuerpos semejantes, iguales y con velocidades iguales, en medios de la misma densidad y cuyas partículas no se repelen unas a otras, tanto si dichas partículas son muchas y pequeñas como si son pocas y grandes, tropezarán con igual cantidad de materia en tiempos iguales, y trasmitirán a ésta igual cantidad de movimiento, y a su vez (por la Ley tercera del Movimiento) padecerán de ella la misma cantidad de reacción, es decir, serán resistidos por igual: también es evidente que, en fluidos elásticos de igual densidad, cuando se mueven a grandísima velocidad, sus resistencias serán aproximadamente las mismas; tanto si dichos fluidos están formados de partículas más gruesas como si lo están de las más sutiles imaginables. La resistencia de los proyectiles con movimientos muy rápidos no disminuye mucho por la sutileza del medio.

COROLARIO 6. Todas estas cosas son así en fluidos cuya fuerza elástica tiene origen en las fuerzas centrífugas de las partículas. Pero si dicha fuerza obedeciese a otra causa, como la expansión de partículas al modo de la lana o las ramas de los árboles, o a otra causa cualquiera, por la cual los movimientos de las partículas entre sí resulten menos libres, la resistencia, por la menor fluidez del medio, sería mayor que en los Corolarios anteriores[10].

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA XXVIII[11]

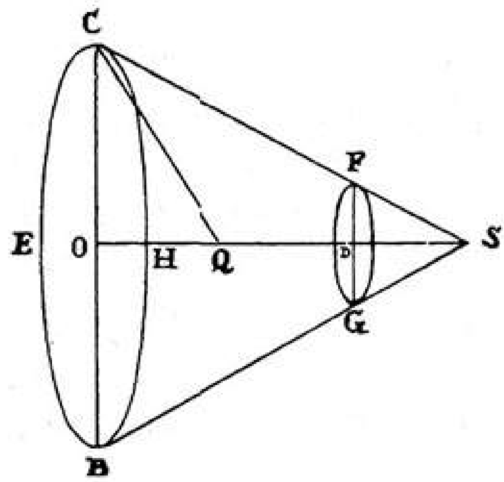
Si un globo y un cilindro de diámetros iguales se mueven con iguales velocidades en la dirección del eje del cilindro, en un medio raro y que consta de partículas iguales y libremente dispuestas a distancias mutuas iguales entre ellas: la resistencia del globo será la mitad de la resistencia del cilindro.

Puesto que la acción del medio sobre un cuerpo es idéntica (por el Corolario V de las Leyes) tanto en el caso de que el cuerpo se mueva en un medo en reposo como si las partículas del medio chocan a la misma velocidad contra el cuerpo en reposo, consideremos al cuerpo en reposo y veamos con qué fuerza es urgido por el medio en movimiento. Sea, pues, ABKI un cuerpo esférico descrito con centro en C y semidiámetro CA, e incidan sobre dicho cuerpo esférico las partículas del medio con una velocidad dada y según rectas paralelas a AC; y sea FB una recta de éstas. Tómese sobre ella LB, igual al semidiámetro CB, y trácese BD tangente a la esfera en B. Sobre KC y BD caigan las perpendiculares BE, LD, y la fuerza con la cual una partícula del medio, incidiendo oblicuamente según la recta FB, golpeará al globo en B, será a la fuerza con la que la misma partícula golpearía perpendicular mente en *b* al cilindro ONGQ descrito con eje ACI en torno al globo, como LD a LB, o BE a BC. Efectivamente, la eficacia de esta fuerza para mover el globo según la dirección FB o AC de su incidencia es a su eficacia para moverlo según la dirección de su propia determinación, es decir, según la dirección de la recta BC con la que actúa directamente sobre el globo como BE a BC. Y, por ambas razones conjuntas, la eficacia de una partícula incidente oblicuamente según la recta FB sobre un globo para moverlo en la dirección de su incidencia es a la eficacia de la misma partícula incidente perpendicularmente según la misma recta sobre un cilindro para moverlo en la misma dirección, como BE^2 a BC^2. Por lo tanto, si sobre *b*E, que es perpendicular a la base circular NAO del cilindro e igual al radio AC se toma *b*H igual a $\frac{BE^2}{CB}$, resultará que *b*H es a *b*E como el efecto de la partícula sobre el globo al efecto de la partícula sobre el cilindro. Y por lo mismo, el sólido que comprende a todas las líneas *b*H será al sólido que comprende a todas las líneas *b*E, como el efecto de todas las partículas sobre el globo al efecto de todas las partículas sobre el cilindro. Pero el primer sólido es un paraboloide descrito con vértice en C, eje CA y «latus rectum» CA; mientras el segundo es un cilindro circunscrito al paraboloide: y es sabido que un paraboloide es la mitad del cilindro circunscrito. Luego la fuerza total del medio sobre el globo es la mitad de la fuerza total del medio sobre el cilindro. Y por ello, si las partículas del medio reposasen y el globo y el cilindro se moviesen con velocidades iguales, la resistencia del globo sería la mitad que la resistencia del cilindro. Q. E. D.

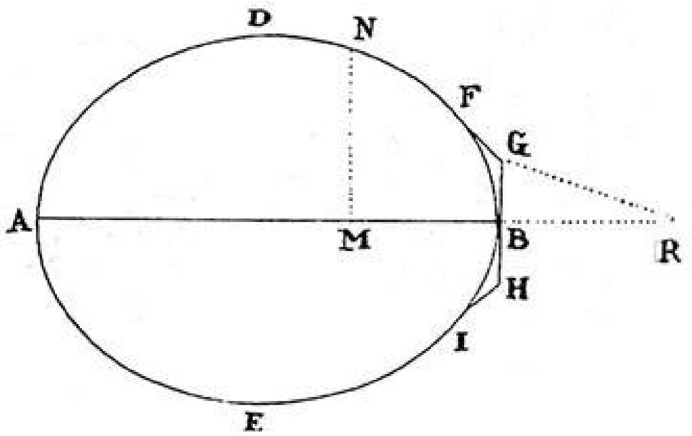


Escolio

Con el mismo método pueden compararse entre sí otras figuras en lo relativo a la resistencia y encontrar aquellas que sean más adecuadas para mantener sus movimientos en medios resistentes. Así, si hubiese que construir, con la base circular CEBH, que tiene su centro en O y radio OC, y con la altura OD, un tronco de cono CBGF que fuese el de menor resistencia de todos los troncos de cono construidos con la misma base y altura al desplazarse según la dirección de su eje hacia D, biséquese la altura OD en Q y prolónguese OQ hasta S de modo que QS sea igual a QC, y S será el vértice del cono cuyo tronco se busca.



Y, de paso, puesto que el ángulo CSB siempre es agudo, se infiere que si el sólido ADBE fuese generado por circunvolución de la figura elíptica u oval ADBE en torno a su eje AB, mientras la figura generatriz es tocada por tres rectas FG, GH, HI, en los puntos F, B e I, bajo la condición de que GH sea perpendicular al eje en el punto de contacto B, y FG, HI y la propia GH encierren ángulos FGB, BHI de 135 grados, el sólido generado por la circunvolución de la figura ADFGHIE sobre su mismo eje AB sufrirá menor resistencia que el sólido anterior; siempre que ambos se muevan en la dirección de su eje AB y vaya por delante el extremo B de ambos. Proposición esta que no creo haya de ser inútil para la construcción de naves.

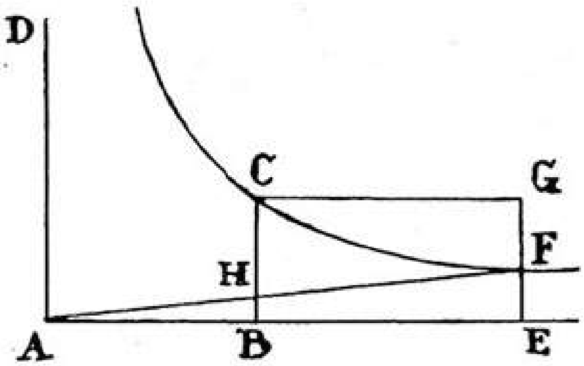


Pero si la figura DNFG fuese una curva tal que, si de su punto N cualquiera se hace descender NM perpendicular al eje AB, y desde un punto dado G se traza la recta GR que sea paralela a la tangente de la figura en N, y corte a la prolongación del eje en R, MN vendría a ser a GR como GR^3 a $4BR \times GB^2$; el sólido, descrito por la revolución de esta figura sobre su eje AB, moviéndose en el susodicho medio raro desde A hacia B, sufre menor resistencia que cualquier otro sólido circular descrito con las mismas longitud y anchura.

Proposición xxxv. Problema vii

Si un medio raro está constituido de partículas mínimas en reposo y colocadas libremente a iguales distancias entre ellas, hallar la resistencia de un globo que se desplaza uniformemente en dicho medio.

Caso 1. Imagínese que un cilindro descrito con el mismo diámetro y la misma altura se desplaza a la misma velocidad según la línea de su eje en el mismo medio. Y supongamos que las partículas del medio sobre las que inciden el globo o el cilindro retrocedan con la máxima fuerza de reflexión. Y, puesto que la resistencia del globo (por la última Proposición) es la mitad de la resistencia del cilindro y el globo es al cilindro como dos a tres y el cilindro al chocar perpendicularmente con las partículas y reflejándolas así de modo máximo, les comunica el doble de su propia velocidad, el cilindro, en el tiempo en que recorre desplazándose uniformemente la longitud de su semieje, comunicará a las partículas un movimiento que será al movimiento total del cilindro como la densidad del medio a la densidad del cilindro; y el globo, en el tiempo en que recorre toda la longitud de su diámetro desplazándose uniformemente, comunicará el mismo movimiento a las partículas; y en el tiempo en que recorre los dos tercios de su diámetro, comunicará a las partículas un movimiento que será al movimiento total del globo como la densidad del medio a la densidad del globo. Y por tanto, el globo sufre una resistencia que será a la fuerza con la cual puede suprimirse o generarse todo su movimiento en el tiempo en que puede recorrer, desplazándose uniformemente, las dos terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo.



CASO 2. Supongamos que las partículas del medio incidentes sobre el globo o sobre el cilindro no son reflejadas; entonces el cilindro, al incidir perpendicularmente sobre las partículas, les comunicará simplemente su propia velocidad, y por ello sufre una resistencia que será la mitad de la del caso anterior, y la resistencia del globo también será la mitad que la anterior.

CASO 3. Supongamos que las partículas del medio se reflejen del globo con una fuerza que no es la máxima ni tampoco nula, sino una fuerza media; en tal caso la resistencia del globo estará en la misma razón media entre la resistencia del primer caso y la del segundo. Q. E. I.

COROLARIO 1. De aquí que si la dureza del globo y de las partículas es infinita y, por tanto, están desprovistos de toda fuerza elástica y, por tanto, también carecen de toda fuerza de reflexión, la resistencia del globo será a la fuerza con la cual puede suprimirse o generarse todo su movimiento en el tiempo en que recorre cuatro terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo.

COROLARIO 2. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como el cuadrado de la velocidad.

COROLARIO 3. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como el cuadrado del diámetro.

COROLARIO 4. La resistencia del globo, «caeteris paribus», es como la densidad del medio.

COROLARIO 5. La resistencia del globo está en razón compuesta del cuadrado de la velocidad, del cuadrado del diámetro y de la densidad del medio.

COROLARIO 6. Y el movimiento del globo con su resistencia puede representarse como sigue: sea AB el tiempo en el cual el globo puede perder todo su movimiento a causa de su resistencia uniformemente continua. Sobre AB elévense las perpendiculares AD, BC. Y sea BC dicho movimiento total, mientras por el punto C y con asíntotas AD, AB se traza la hipérbola CF. Prolónguese AB hasta un punto cualquiera E. Elévese la perpendicular EF que toque a la hipérbola en F. Complétese el paralelogramo CBEG, y trácese AF que corte a BC en H. Y si el globo en un tiempo cualquiera BE, con su movimiento inicial BC continuado uniformemente, recorre en un medio no resistente el espacio representado por el área del paralelogramo CBEG, el mismo globo en un medio resistente describirá el espacio CBEF representado por el área de la hipérbola, y su movimiento al final de aquel tiempo vendrá representado por la ordenada de la hipérbola EF, una vez perdida su parte FG de movimiento. Y su resistencia, al final del mismo tiempo, vendrá representada por la longitud BH, una vez perdida la parte CH de resistencia. Todo esto es evidente por los Corolarios 1 y 3 de la Proposición V del Libro II.

COROLARIO 7. De aquí que si un globo, debido a su resistencia uniformemente continua R, perdiese todo su movimiento M en el tiempo T, el mismo globo en el tiempo t en un medio resistente debido a una resistencia decreciente en razón del cuadrado de la velocidad, perderá de su movimiento M la parte $\frac{tM}{T+t}$, reteniendo la parte $\frac{TM}{T+t}$; y describirá un espacio que será al espacio descrito con el movimiento uniforme M en el tiempo t como el logaritmo del numero $\frac{T+t}{T}$ multiplicado por el número 2,302585092994 es al número $\frac{t}{T}$ dado que el área hiperbólica BCFE es al rectángulo BCGE en esta misma proporción.

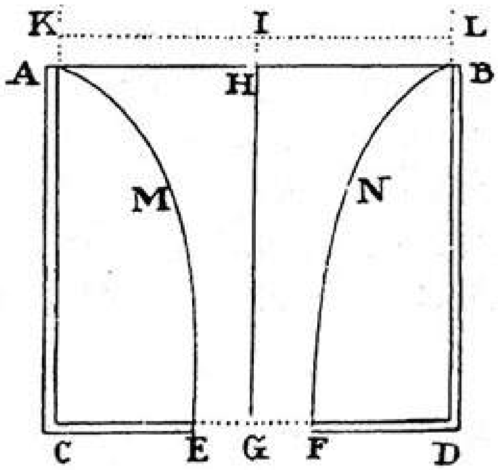
ESCOLIO

En esta Proposición he expuesto la resistencia y retardación de proyectiles esféricos en medios no continuos, y he mostrado que esta resistencia es a la fuerza con la cual podría suprimirse o generarse todo el movimiento del globo en el tiempo en que el globo describiría con velocidad uniformemente continua las dos terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo, con tal de que tanto el globo como las partículas del medio sean sumamente elásticas y gocen de la máxima fuerza de reflexión: y también que esta fuerza es el doble menor cuando el globo y las partículas del medio son infinitamente duras y prácticamente carentes de fuerza de reflexión. Pero en medios continuos como es el agua, el aceite caliente, el mercurio, en los cuales el globo no incide inmediatamente sobre todas las partículas del fluido generadoras de resistencia, sino que más bien presiona solamente sobre las partículas más próximas y éstas presionan a las siguientes y éstas a las siguientes, la resistencia es todavía otra mitad menor. Efectivamente, en esta clase de medios muy fluidos el globo padece una resistencia que es a la fuerza con la cual se podría suprimir o generar todo su movimiento en el tiempo en el cual, con el susodicho movimiento continuo uniforme, recorrería ocho terceras partes de su diámetro, como la densidad del medio a la densidad del globo. Es lo que trataremos de mostrar en lo que sigue.

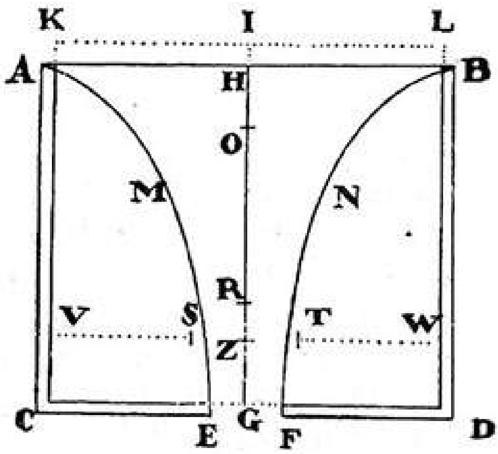
Proposición xxxvi. Problema viii[12]

Definir el movimiento del agua que fluye por un orificio hecho en el fondo de un vaso cilíndrico.

Sea ACDB un vaso cilíndrico, AB su orificio superior, CD el fondo paralelo al horizonte, EF un orificio circular en mitad del fondo, G el centro del orificio y GH el eje del cilindro perpendicular al horizonte. Y supongamos que un cilindro de hielo APQB de la misma anchura que la cavidad del vaso y con el mismo eje desciende con movimiento uniforme y continuo y que sus partes en cuanto tocan la superficie AB se licúan y convertidas en agua discurren en el vaso por su gravedad y forman al caer una catarata o columna de agua ABNFEM y atravesando el orificio EF lo llenan completamente. La velocidad uniforme del hielo que cae y la del agua contigua en el círculo AB sea la misma que la que tendría el agua cayendo y describiendo en su caída la altura IH; y estén IH y HG sobre la misma línea, y por el punto I trácese la recta KL paralela al horizonte y que toca a los lados del hielo en K y L. Y la velocidad del agua que cae por el orificio EF será aquella que adquiriría el agua cayendo desde I y describiendo en su caída la altura IG. Y por consiguiente, por los teoremas de *Galileo*, IG será a IH como el cuadrado de la velocidad del agua que cae por el orificio a la velocidad del agua en el círculo AB, es decir, como el cuadrado del círculo AB al círculo EF; pues estos círculos son inversamente como las velocidades de las aguas que llenándolos completamente pasan a su través en el mismo tiempo y en igual cantidad. Se trata aquí de la velocidad del agua hacia el plano horizontal. Y los movimientos paralelos al horizonte con los cuales se aproximan mutuamente las partes del agua que cae, al no proceder de la gravedad, no cambiarán el movimiento perpendicular al horizonte surgido de la gravedad, y no se consideran, por tanto, aquí. Ciertamente suponemos que las partes de agua cohesionan entre sí un tanto y que, mientras caen, por esa cohesión, se aproximan unas a otras mediante movimientos horizontales de modo que constituyan una sola catarata y no se dividan en muchas. Pero el movimiento paralelo al horizonte, proveniente de la susodicha cohesión, no lo consideramos aquí.



CASO 1. Ahora supongamos que toda la cavidad del vaso alrededor del agua que cae ABNFEM está llena de hielo, de modo que el agua caiga a través del hielo como si fuera a través de un embudo. Si el agua ni siquiera tocase al hielo, o lo que es lo mismo, si lo toca pero, por lo sumamente pulido de la superficie del hielo, resbala libremente y sin resistencia alguna, caerá por el orificio EF con la misma velocidad que antes, y todo el peso de la columna de agua ABNFEM presionará para generar su caída como antes, mientras el fondo del vaso soportará el peso del hielo que rodea a la columna.



Ahora licúese el hielo del vaso, y el flujo del agua, en cuanto a la velocidad, permanecerá como antes. No será menor, porque el hielo hecho agua tratará de salir: tampoco mayor, porque el hielo hecho agua no puede descender si no es impidiendo el descenso de otra agua igual a su propio descenso. La misma fuerza debe generar la misma velocidad del agua que fluye.

Pero el orificio del fondo del vaso, debido a los movimientos oblicuos de las partículas del agua que fluye, debe ser algo mayor que antes. Pues las partículas de agua ya no pasan todas por el orificio discurriendo perpendicularmente, sino que, concurriendo por doquier desde los costados del vaso y convergiendo sobre el orificio, lo atraviesan con movimientos oblicuos, y curvando su trayectoria hacia abajo confluyen en la vena de agua que cae, que es algo más delgada bajo el orificio que en el orificio mismo, siendo su diámetro, respecto al diámetro del orificio como 5 a 6, o como 5½ a 6½ aproximadamente, si he medido bien los diámetros. Preparé una lámina plana y muy delgada perforada en el centro, siendo el orificio circular de un diámetro de cinco octavos de pulgada. Para que la vena de agua fluyente no se acelerase al caer y al acelerarse se hiciese más estrecha, coloqué esta lámina, no en el fondo sino en un costado del vaso, de tal modo que la susodicha vena brotase según una línea paralela al horizonte. Después, una vez lleno el vaso de agua, abrí el orificio para que saliese el agua; y el diámetro de la vena, a una distancia de casi media pulgada del orificio, medido con la máxima exactitud, vino a ser de $^{21}/_{40}$ partes de pulgada. Por tanto, el diámetro del orificio circular era al diámetro de la vena de agua aproximadamente como 25 a 21. Por consiguiente, el agua, al atravesar el orificio, converge desde todas partes, y después de salir del vaso, se hace más estrecha con la convergencia, y por el estrechamiento se hace más rápida, hasta alcanzar una distancia de media pulgada del orificio, y a esa distancia se torna más acelerada y estrecha que en el orificio mismo en la razón de 25 x 25 a 21 x 21 o de 17 a 12 aproximadamente, es decir, aproximadamente como la raíz cuadrada de dos a la unidad. Pero consta experimentalmente que la cantidad de agua que fluye en un tiempo dado por el orificio circular efectuado en el fondo del vaso es aquella que con la velocidad antedicha debería fluir en el mismo tiempo, no por aquel orificio, sino por el orificio circular cuyo diámetro es al diámetro de aquel orificio como 21 a 25. Y por tanto, la susodicha agua que cae tiene una velocidad hacia abajo en el mismo orificio que es la misma que adquiriría un grave cayendo y describiendo en su caída la semialtura del agua contenida en el vaso muy aproximadamente. Pero, después de salir del vaso, se acelera convergiendo hasta que llega a una distancia del orificio casi igual al diámetro del orificio, y adquiere una velocidad mayor casi en la proporción de la raíz cuadrada de dos a uno; velocidad que, ciertamente, casi adquiriría un grave cayendo y recorriendo en su caída la altura total del agua contenida en el vaso.

En lo sucesivo, por tanto, designemos al diámetro de la vena mediante aquel orificio menor, al cual hemos llamado EF. Y supóngase que se traza un plano VW encima y paralelo al del orificio EF y a una distancia igual al diámetro del orificio, dotado también de un orificio ST mayor que el primero, y así caiga por él una vena de agua que llene completamente el orificio inferior EF y que además tenga un diámetro de una proporción respecto al del orificio inferior como 25 a 21 aproximadamente. De este modo la vena de agua pasará perpendicularmente por el orificio inferior, y la cantidad de agua fluyente, según el tamaño de este orificio, será aproximadamente aquella que exige la solución del problema. En cambio, el espacio comprendido entre los dos planos y la vena de agua que cae puede considerarse como fondo del vaso. Pero para que la solución del problema sea más simple y más matemática, es más conveniente considerar solamente al plano inferior como fondo del vaso y suponer que el agua, que caía por el hielo o por el embudo y salía del vaso por el orificio EF practicado en el plano inferior, conserva continuamente su movimiento, mientras el hielo está en reposo. Por tanto, sea en lo sucesivo ST el diámetro del orificio descrito con centro en Z a cuyo través fluye del vaso la catarata cuando el agua toda del vaso es fluida. Y sea EF el diámetro del orificio que el chorro, al pasar, llena completamente, tanto si el agua sale del vaso a través del orificio superior ST, como si cae a través del hielo a modo de embudo. Y sea el diámetro del orificio superior ST al del inferior EF aproximadamente como 25 a 21, y la distancia perpendicular entre los planos de los orificios sea igual al diámetro del orificio menor EF. En tal caso, la velocidad del agua que sale del vaso por el orificio ST será en el mismo orificio hacia abajo la misma que la que adquiriría un cuerpo cayendo desde la mitad de la altura IZ: mientras que la velocidad de la catarata que cae de ambos será en el orificio EF la que adquiriría un cuerpo que cayese de la altura total IG.

CASO 2. Si el orificio EF no estuviese en el centro del fondo del vaso, sino que el fondo estuviese perforado en otro lugar, el agua saldrá con la misma velocidad que antes, siempre que el orificio sea del mismo tamaño. Pues, un grave desciende ciertamente en un tiempo mayor hasta la misma profundidad siguiendo una línea oblicua que siguiendo la perpendicular, pero al bajar adquiere la misma velocidad en uno y otro caso, como demostró *Galileo*.

CASO 3. La misma es la velocidad del agua que fluye por un orificio abierto en un costado del vaso. Pues si el orificio fuese pequeño, de modo que la distancia entre las superficies AB y KL sea imperceptible para los sentidos y la vena de agua que sale horizontalmente venga a tener una forma parabólica, del «latus rectum» de esta parábola se infiere que la velocidad del agua que discurre será aquella que adquiriría un cuerpo al caer desde la altura HG o IG del agua retenida en el vaso. Efectivamente, hecho el experimento, hallé que si la altura del agua retenida en el vaso era de veinte pulgadas sobre el orificio y la altura del orificio sobre el plano horizontal era también de 20 pulgadas, la vena de agua que fluía caía sobre dicho plano a la distancia de casi 37 pulgadas de la perpendicular trazada desde el orificio sobre el plano horizontal. Pues, sin resistencia, la vena debería haber caído sobre el plano a una distancia de 40 pulgadas, siendo el «latus rectum» de la vena parabólica de 80 pulgadas.

CASO 4. E incluso si el agua fluyente se orienta hacia arriba, saldrá con la misma velocidad. Pues la pequeña vena de agua fluyente asciende con un movimiento perpendicular hasta la altura GH o GI del agua retenida en el vaso, salvo en la medida en que su ascenso es un tanto impedido por la resistencia del aire; y por tanto, sale con la velocidad que adquiriría cayendo desde dicha altura. Cada partícula del agua retenida sufre igual presión por todas partes (por la Proposición XIX del Libro II) y al ceder a la presión, se desplaza hacia todas partes con igual impulso, tanto si cae por el orificio en el fondo del vaso, como si fluye horizontalmente a través de un orificio lateral, o si penetra en un canal y después asciende por un pequeño orificio abierto en la parte superior del canal. Que la velocidad con que fluye el agua es la que se ha establecido en esta Proposición no sólo se infiere racionalmente, sino que también se evidencia mediante los bien conocidos experimentos que acabamos de describir.

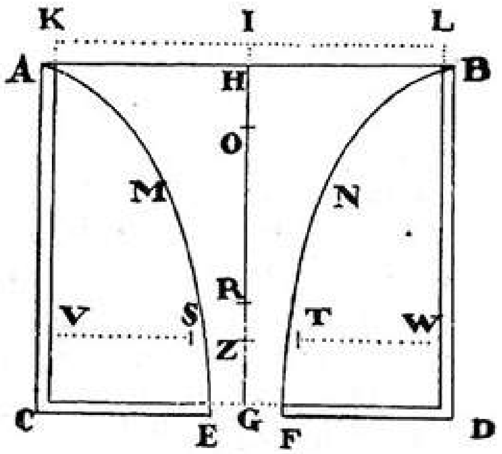
CASO 5. La velocidad del flujo de agua es la misma tanto si la forma del orificio es circular como si es cuadrada, triangular u otra cualquiera igual a la circular. Porque la velocidad del agua fluyente no depende de la figura del orificio sino que surge de su altura por debajo del plano KL.

CASO 6. Si la parte inferior del vaso ABDC se sumerge en agua estancada y la altura del agua estancada sobre el fondo del vaso fuera GR, la velocidad con la que el agua que está en el vaso saldría por el orificio EF hacia el agua estancada sería la misma que la que adquiriría el agua cayendo desde la altura IR y recorriéndola en su caída. Pues el peso de toda el agua del vaso que está por debajo de la superficie del agua estancada, será sostenido en equilibrio por el peso del agua estancada, y por ello en nada acelerará el movimiento del agua que desciende en el vaso. También puede mostrarse este caso mediante experimentos, midiendo el tiempo en que el agua fluye.

COROLARIO 1. Por ello, si la altura CA del agua se prolonga hasta K, de modo que AK sea a CK como el cuadrado de la razón del área de un orificio abierto en cualquier parte del fondo al área del círculo AB; la velocidad del agua fluyente será igual a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y recorriendo en su caída la altura KC.

COROLARIO 2. Y la fuerza con la cual se puede generar el movimiento total del agua fluyente es igual al peso de la columna cilíndrica de agua cuya base es el orificio EF y cuya altura es 2GI o 2CK. Pues el agua que sale, en el tiempo en que iguala a dicha columna, adquiriría cayendo por su propio peso desde la altura GI la velocidad con que sale.

COROLARIO 3. El peso de toda el agua contenida en el vaso ABDC es a la parte del peso que presiona para que salga el agua como la suma de los círculos AB y EF al doble del círculo EF. Pues sea IO la media proporcional entre IH e IG; y el agua que sale por el orificio EF en el tiempo en que una gota cayendo desde I puede recorrer la altura IG, es igual a un cilindro cuya base es el círculo EF y cuya altura es 2IG, es decir, a un cilindro cuya base es el círculo AB y cuya altura es 210, pues el círculo EF es al círculo AB como la raíz cuadrada de la altura IH a la de la altura IG, es decir, en razón simple de la media proporcional IO a la altura IG; y en el tiempo en que la gota cayendo desde I describiría la altura IH, el agua que sale será igual a un cilindro cuya base es el círculo AB y cuya altura es 2IH; y en el tiempo en que la gota cayendo desde I por H hasta G describe la diferencia de alturas HG, el agua que sale, es decir, toda el agua contenida en el sólido ABNFEM, será igual a la diferencia de los cilindros, es decir, al cilindro cuya base es AB y cuya altura es 2HO. Y por consiguiente, toda el agua contenida en el vaso ABDC es al agua toda que cae contenida en el sólido ABNFEM como HG a 2HO, es decir, como HO + OG a 2HO, o IH + IO a 2IH. Pero el peso de toda el agua contenida en el sólido ABNFEM presiona para que salga el agua; y por tanto, el peso de toda el agua contenida en el vaso es a la parte de peso que presiona para que salga el agua como IH + IO a 2H, y por tanto, como la suma de los círculos EF y AB al doble del círculo EF.

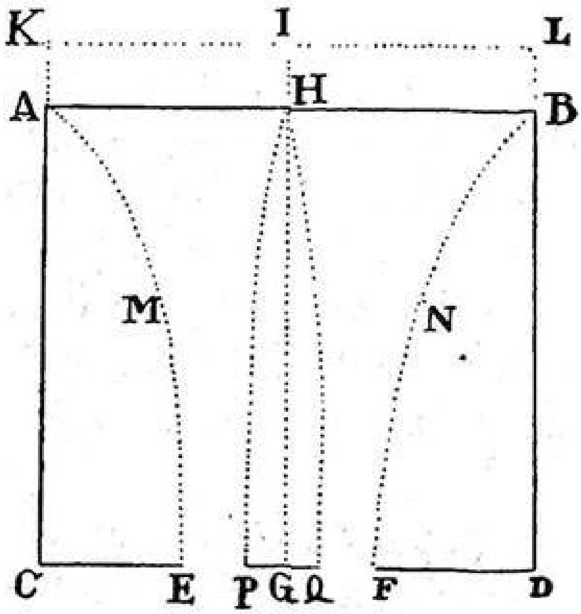


COROLARIO 4. Y por ello el peso de toda el agua contenida en el vaso ABDC es a aquella parte del peso que soporta el fondo del vaso, como la suma de los círculos AB y EF a la diferencia de los propios círculos.

COROLARIO 5. Y la parte de peso soportada por el fondo del vaso es a la parte de peso que presiona sobre la salida del agua, como la diferencia de los círculos AB y EF al doble del círculo menor, o como el área del fondo al doble del orificio.

COROLARIO 6. Mas, la parte de peso que presiona solamente sobre el fondo es al peso de toda el agua que descansa perpendicularmente sobre el fondo como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF, o como el círculo AB al exceso del duplo del círculo AB sobre el fondo. Pues la parte de peso, que presiona sola sobre el suelo, es al peso de toda el agua del vaso, como la diferencia de los círculos AB y EF a la suma de esos círculos, por el Corolario 4; y el peso de toda el agua contenida en el vaso es al peso de toda el agua que descansa perpendicularmente sobre el fondo como el círculo AB a la diferencia de los círculos AB y EF. Y por tanto, permutando adecuadamente, la parte de peso que sólo urge sobre el fondo, es al peso de toda el agua que descansa sobre el fondo perpendicularmente, como el círculo AB a la suma de los círculos AB y EF o exceso del duplo del círculo AB sobre el fondo.

COROLARIO 7. Si en el centro del orificio EF se coloca el pequeño círculo PQ, descrito en torno al centro G y paralelo al horizonte, el peso del agua sostenida por dicho pequeño círculo es mayor que el peso de la tercera parte del cilindro de agua cuya base fuese el pequeño círculo y la altura GH. Pues, sea ABNFEM la catarata o columna de agua que cae con eje GH como más arriba, e imagínese que toda el agua contenida en el vaso se congelase, tanto en torno de la catarata como sobre el pequeño círculo, por no ser necesaria su fluidez para un descenso inmediato y rápido del agua. Y sea PHQ la columna de agua congelada sobre el pequeño círculo, con vértice en H y altura GH. Imagínese que semejante catarata cae con todo su peso, y no se apoya sobre PHQ ni presiona en absoluto, sino que libremente y sin fricción se va deslizando, salvo acaso en el vértice mismo del hielo donde la catarata al comenzar a caer puede ser cóncava. Y, puesto que, el agua congelada AMEC, ANFD que rodea a la catarata es convexa en su superficie interior AME, BNF hacia la catarata que cae, también la columna PHQ será convexa hacia la catarata, y por tanto, mayor que el cono cuya base es el pequeño círculo PQ y la altura GH, es decir, mayor que la tercera parte del cilindro descrito con tales base y altura. Sostiene, pues, dicho pequeño círculo el peso de esta columna, es decir, un peso que es mayor que el peso del cono o mayor que la tercera parte de aquel cilindro.



COROLARIO 8. El peso de agua que el círculo muy pequeño PQ soporta parece ser menor que el peso de las dos terceras partes del cilindro de agua cuya base es dicho círculo y la altura HG. Pues, supuesto lo que hemos dicho antes, imagínese que se describe un semiesferoide cuya base es el susodicho pequeño círculo y cuyo semieje o altura es HG. Esta figura será igual a dos terceras partes de aquel cilindro y comprenderá a la columna de agua congelada PHQ cuyo peso sostiene el pequeño círculo. Pues, como el movimiento del agua sea directo en gran medida, la superficie externa de la dicha columna concurrirá con la base PQ en ángulo un tanto agudo, toda vez que el agua se acelera continuamente al caer y, debido a esa aceleración se va haciendo más estrecha. Por tanto, puesto que el ángulo es menor que un recto, las partes inferiores de la columna estarán dentro del semiesferoide. Y en sus partes superiores también será aguda o puntiaguda, pues de lo contrario el movimiento horizontal del agua habría de ser infinitamente más veloz en el vértice que su movimiento hacia el plano horizontal. Y cuanto menor sea el círculo PQ, más agudo será el vértice de la columna, y si el círculo disminuye hasta el infinito, el ángulo PHQ disminuirá hasta el infinito, por lo cual la columna estará dentro del semiesferoide. Por consiguiente, la columna es menor que el semiesferoide, o que las

dos terceras partes del cilindro cuya base es el pequeño círculo y cuya altura es GH. Así el pequeño círculo soporta una fuerza de agua igual al peso de la columna, mientras el peso del agua que la rodea presiona para que el agua salga por el orificio.

COROLARIO 9. El peso de agua que soporta el pequeño círculo PQ muy reducido es aproximadamente igual al peso de un cilindro de agua cuya base fuese dicho pequeño círculo y su altura ½GH. Pues este peso es una media aritmética de los pesos del cono y el semiesferoide mencionado más arriba. Pero si el pequeño círculo no fuese muy reducido, sino más bien aumentase hasta igualar al orificio EF, soportaría el peso de toda el agua que reposa perpendicularmente sobre él, es decir, el peso del cilindro de agua cuya base es el pequeño círculo y cuya altura es GH.

COROLARIO 10. Y (hasta donde me es posible precisarlo) el peso que soporta este pequeño círculo es siempre al peso de un cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura ½GH como EF^2 es a EF^2 - ½PQ^2, o como el círculo EF al exceso de dicho círculo sobre la mitad del pequeño círculo, muy aproximadamente.

LEMA IV

Si un cilindro se desplaza uniformemente en la dirección de su longitud, la resistencia que sufre no cambia en absoluto aumentando o disminuyendo la longitud y, por tanto, es igual a la resistencia que sufriría un círculo descrito con el mismo diámetro y que se desplazase a la misma velocidad según una línea recta perpendicular a su plano.

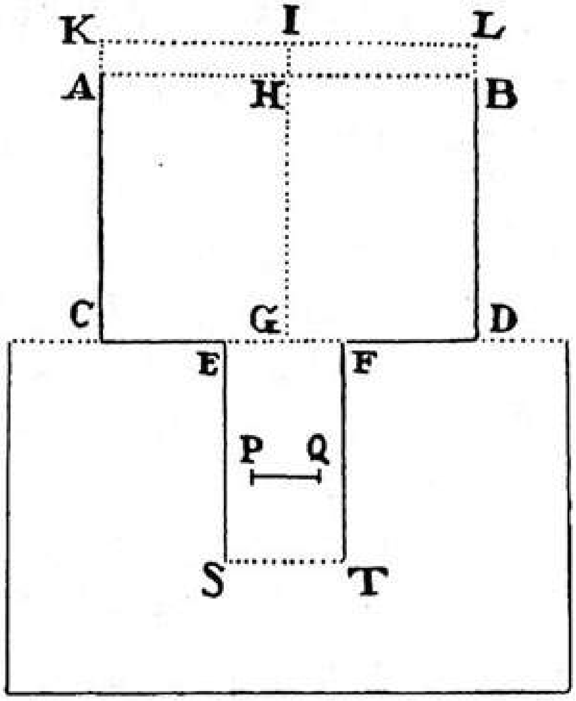
Pues los lados no se oponen en absoluto al movimiento y un cilindro se transforma en un círculo cuando su longitud disminuye hasta el infinito.

PROPOSICIÓN XXXVII. TEOREMA XXIX[13]

Si un cilindro se desplaza uniformemente según la dirección de su longitud en un fluido comprimido, ilimitado y no elástico, la resistencia debida a la magnitud de su sección transversal es a la fuerza con la cual se generaría o anularía todo su movimiento en el tiempo en que recorre el cuádruplo de su longitud como la densidad del medio a la densidad del cilindro muy aproximadamente.

Pues sea ABDC un vaso que toca con su fondo CD la superficie del agua estancada; hágase que el agua salga de dicho vaso hacia el agua estancada por el canal cilíndrico EFTS, perpendicular al horizonte, sitúese el pequeño círculo PQ paralelo al horizonte en una posición cualquiera en medio del canal y prolónguese CA hasta K de modo que AK sea a CK como el cuadrado del exceso del orificio del canal

EF sobre el pequeño círculo PQ al círculo AB. Y es evidente (por el Caso 5, el Caso 6 y el Corolario 1 de la Proposición XXXVI) que la velocidad del agua que pasa por el anillo comprendido entre el pequeño círculo y los costados del recipiente será aquella que adquiriría el agua cayendo y describiendo en su caída la altura KC o IG.



Y (por el Corolario 10 de la Proposición XXXVI) si la anchura del vaso es infinita, de modo que la breve línea HI desaparece y las alturas IG, HG se hacen iguales, la fuerza del agua que cae sobre el pequeño círculo será al peso del cilindro cuya base es el mismo pequeño círculo y cuya altura es ½IG, como EF^2 a EF^2 - ½PQ^2 muy aproximadamente. Pues la fuerza del agua que fluye con movimiento uniforme por todo el canal será siempre igual sobre el pequeño círculo en cualquier parte del canal en que se halle colocado.

Ciérrense ahora los orificios EF, ST del canal, hágase ascender al pequeño círculo en el fluido comprimido por doquier y obligue con su ascenso al agua de arriba a descender por el espacio anular comprendido entre el pequeño círculo y los costados del canal: y la velocidad de ascenso del pequeño círculo será a la velocidad de descenso del agua como la diferencia entre los círculos EF y PQ al círculo PQ, y la velocidad de ascenso del pequeño círculo a la suma de las velocidades, es decir, a la velocidad relativa de descenso del agua con la cual discurre al lado del pequeño círculo ascendente, como la diferencia de los círculos EF y PQ al círculo EF, o sea, como EF^2 - PQ^2 a EF^2. Sea dicha velocidad relativa igual a la velocidad con la cual se vio más arriba que el agua pasaba por el mismo espacio anular mientras el pequeño círculo permanecía inmóvil, es decir, a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y describiendo en su caída la altura IG: en tal caso, la fuerza del agua sobre el pequeño círculo ascendente será la misma que antes (por el Corolario V de estas Leyes), es decir, la resistencia del pequeño círculo ascendente será al peso del cilindro de agua cuya base sea el pequeño círculo y su altura ½IG como EF^2 a EF^2 - ½PQ^2 muy aproximadamente. Pero la velocidad del pequeño círculo será a la velocidad que adquiriría el agua cayendo y describiendo con su caída la altura IG, como EF^2 - PQ^2 a EF^2.

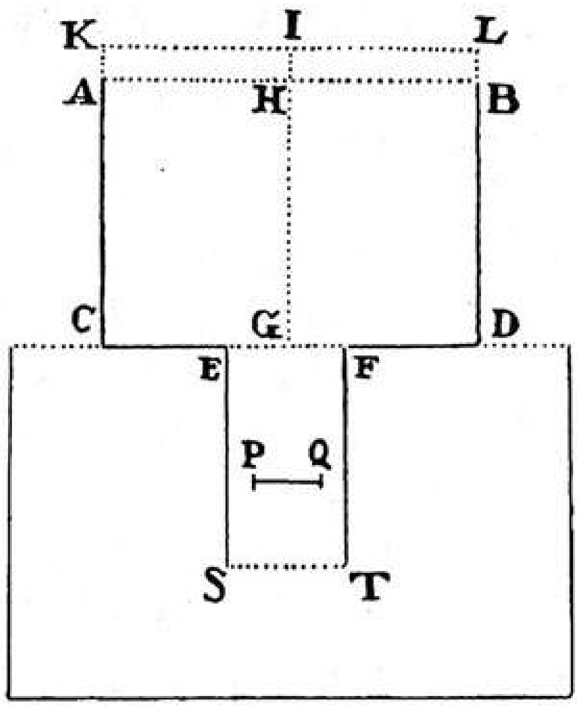
Auméntese la anchura del canal hasta el infinito, y las susodichas razones entre EF^2 - PQ^2 y EF^2 y entre EF^2 y EF^2 - ½PQ^2 llegarán en último término a ser razones de igualdad. Y, por consiguiente, la velocidad del pequeño círculo será ahora aquella que adquiriría el agua cayendo y describiendo con su caída la altura IG, mientras su resistencia vendrá a ser igual al peso del cilindro cuya base sea el pequeño círculo y su altura la mitad de la altura IG, desde la cual deberá caer el cilindro para adquirir la velocidad con que asciende el pequeño círculo; y a esta velocidad, en el tiempo de su caída, describirá el cuádruplo de su longitud. En cambio, la resistencia del cilindro, desplazándose a esta velocidad en la dirección de su longitud, es la misma que la resistencia del pequeño círculo (por el Lema IV) y en consecuencia, es igual a la fuerza con la cual se generaría su movimiento mientras describe el cuádruplo de su longitud muy aproximadamente.

Si la longitud del cilindro se aumentase o disminuyese, su movimiento al igual que el tiempo en que describe el cuádruplo de su longitud, aumentarán o disminuirán en la misma proporción; y por tanto, la fuerza con la cual se generaría o suprimiría el movimiento aumentado o disminuido, en tiempo correlativamente aumentado o disminuido, no sufrirá cambio alguno; y por ende, también ahora es igual a la resistencia del cilindro, pues también esta permanece sin cambios según el Lema IV.

Si la densidad del cilindro aumenta o disminuye, su movimiento, al igual que la fuerza con la cual en el mismo tiempo se generaría o suprimiría el movimiento, aumentará o disminuirá en la misma proporción. Por consiguiente, la resistencia de todo el cilindro será a la fuerza con la cual se generaría o se suprimiría todo su movimiento en el tiempo que tarda en recorrer el cuádruplo de su longitud, como la densidad del medio a la densidad del cilindro muy aproximadamente. Q. E. D.

Pero un fluido ha de ser comprimido para que sea continuo, y debe ser continuo y no elástico para que toda la presión debida a su compresión pueda propagarse instantáneamente y no cambie la resistencia actuando para ello de modo igual sobre todas las partes del cuerpo movido. La presión debida al movimiento del cuerpo se consume en generar el movimiento de las partes del fluido y crea la resistencia. Pero la presión que surge de la compresión del fluido, aunque sea fuerte, si se propaga instantáneamente, no genera movimiento alguno en las partes de un fluido continuo, no provoca cambio alguno de movimiento; y por ello ni aumenta ni disminuye la resistencia. Ciertamente, la acción del fluido debida a su compresión no puede ser en las partes posteriores más fuerte que en las anteriores de un cuerpo movido, y por ello la resistencia descrita en esta Proposición no puede disminuirse: y no será más fuerte en las partes anteriores que en las posteriores, siempre que la propagación de la misma sea infinitamente más rápida que el movimiento del cuerpo presionado. Pero será infinitamente más rápida y se propagará instantáneamente siempre que el fluido sea continuo y no elástico.

COROLARIO 1. Las resistencias que sufren cilindros que se desplazan en la dirección de sus longitudes uniformemente y en medios infinitos están en razón compuesta del cuadrado de las velocidades, del cuadrado de los diámetros y de la densidad del medio.

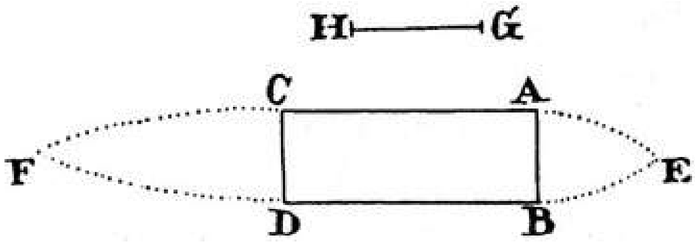


COROLARIO 2. Si la anchura del canal no se aumenta hasta el infinito, sino que el cilindro avanza según la dirección de su longitud en el medio contenido en reposo, coincidiendo además el eje del cilindro con el eje del canal, su resistencia vendrá a ser, respecto a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo su movimiento, en el tiempo en que describe el cuádruplo de su longitud, como la razón compuesta de la razón EF^2 a $EF^2 - ½PQ^2$, del cuadrado de la razón EF^2 a $EF^2 - PQ^2$ y de la razón de la densidad del medio a la densidad del cilindro.

COROLARIO 3. Con los mismos supuestos y también que la longitud L sea al cuádruplo de la longitud del cilindro en la razón compuesta de la razón de $EF^2 - ½PQ^2$ a EF^2 y del cuadrado de la razón de $EF^2 - PQ^2$ a EF^2, la resistencia del cilindro será a la fuerza con la que se generaría o suprimiría todo su movimiento en el tiempo en que describe la longitud L, como la densidad del medio a la densidad del cilindro.

ESCOLIO

En esta Proposición hemos investigado la resistencia que procede solamente de la magnitud de la sección transversal del cilindro, prescindiendo de la parte de resistencia que puede surgir de la oblicuidad de los movimientos. Ya que, al igual que en el Caso 1 de la Proposición XXXVI, la oblicuidad de los movimientos, con los cuales las partes del agua en el vaso convergían de todos lados sobre el orificio EF, impedía la salida del agua por el orificio, del mismo modo en esta Proposición, la oblicuidad de los movimientos con los cuales las partes del agua presionadas por el extremo anterior del cilindro ceden a la presión y divergen en todas direcciones, retardan sus traslaciones por los alrededores de dicho extremo anterior hacia las partes posteriores del cilindro y hace que el fluido se remueva hasta distancias mayores y aumente la resistencia, y esto casi en la misma razón en la que disminuye la salida de agua del vaso, es decir, casi como el cuadrado de la razón de 25 a 21. Y, al igual que en el caso primero de la susodicha Proposición, hacíamos que las partes de agua pasasen a caño lleno y perpendicularmente por el orificio EF, suponiendo que toda el agua del vaso en torno a la catarata estaba congelada, y cuyo movimiento oblicuo e inútil permanecía inmóvil, del mismo modo en esta Proposición, para eliminar la oblicuidad de los movimientos, y para que las partes del agua, cediendo con un movimiento directo y breve, faciliten al máximo el tránsito del cilindro y únicamente permanezca la resistencia debida a la magnitud de la sección transversal, resistencia que sólo puede disminuir disminuyendo el diámetro del cilindro, habremos de suponer que las partes del fluido cuyos movimientos oblicuos e inútiles crean resistencia, están en reposo entre sí en ambos extremos del cilindro, cohesionadas entre sí y unidas al cilindro. Sea ABCD un rectángulo y sean AE y BE dos arcos parabólicos descritos con eje AB y con un «latus rectum» tal que sea al espacio HG, que habría de ser descrito por el cilindro en su caída para adquirir la velocidad con que se mueve, como HG a ½AB. Y sean también CF y DF otros dos arcos parabólicos descritos con eje CD y con «latus rectum» cuatro veces mayor que el anterior; y por revolución de la figura en torno al eje EF se generará un sólido cuya parte intermedia ABDC será el cilindro del que tratamos, y las partes extremas ABE y CDF contienen las partes del fluido en reposo entre sí, y condensadas en dos cuerpos rígidos adheridos al cilindro por ambas partes como si fueran cabeza y cola. En tal caso, la resistencia de este sólido EACFDB, desplazándose según la longitud de su eje FE en dirección a E, será aproximadamente la misma que la que hemos determinado en esta Proposición, es decir, aquella que estaría respecto a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo el movimiento del cilindro en el tiempo en que con dicho movimiento uniformemente continuo recorrería la longitud 4AC, como la densidad del fluido a la densidad del cilindro, muy aproximadamente. Y, por el Corolario 7 de la Proposición XXXVI, esta resistencia no puede ser menor respecto a dicha fuerza que la razón de 2 a 3.



Lema v

Si una esfera, un cilindro y un esferoide de igual anchura se colocan sucesivamente en medio del canal cilíndrico de tal modo que el eje de los mismos coincida con el eje del canal, dichos cuerpos impedirán por igual el flujo del agua a través del canal.

Pues los espacios entre el canal y el cilindro, la esfera y el esferoide, a través de los cuales pasa el agua, son iguales: y el agua pasa igual por espacios iguales.

Esto es así bajo la hipótesis de que toda el agua que está sobre el cilindro, sobre la esfera o sobre el esferoide y cuya fluidez no es necesaria para que el agua pase con toda rapidez, se congele, como ya expuse en el Corolario 7 de la Proposición xxxvi.

Lema vi

Con los mismos supuestos, los susodichos cuerpos son igualmente urgidos por el agua que fluye por el canal.

Se sigue del Lema v y de la tercera Ley. Pues el agua y los cuerpos actúan entre sí mutua e igualmente.

Lema vii

Si el agua del canal está en reposo y los susodichos cuerpos se desplazan por el canal a velocidades iguales y en direcciones opuestas, sus resistencias serán iguales entre sí.

Se sigue del Lema anterior, pues los movimientos relativos siguen siendo iguales entre sí.

Escolio

El mismo es el caso para los cuerpos todos convexos y redondos cuyos ejes coinciden con el eje del canal. Alguna diferencia podría surgir de la fricción mayor o menor, pero en estos Lemas suponemos que los cuerpos son sumamente pulidos y que la tenacidad del medio y la fricción son nulas y también que las partes del fluido, que con sus movimientos oblicuos y superfluos pudieran perturbar, impedir y retardar el flujo del agua por el canal, reposan entre ellas como constreñidas por la congelación y pegadas a las partes anteriores y posteriores de los cuerpos, tal y como he expuesto en el Escolio de la Proposición anterior. Pues en lo que sigue se trata de la resistencia mínima que pueden tener los cuerpos redondos descritos con una sección transversal máxima dada.

Los cuerpos flotantes en fluidos, cuando se desplazan en línea recta, hacen que el fluido ascienda por la parte delantera y descienda por la parte posterior, sobre todo si las figuras son obtusas; y por ello, padecen una resistencia algo mayor que si la cabeza y la cola fuesen agudas. Y los cuerpos que se mueven en fluidos elásticos, si son obtusos por delante y por detrás, condensan el fluido un poco más por delante y lo relajan algo más por la parte de atrás; y por ello sufren una resistencia algo mayor que si fuesen agudos por la cabeza y por la cola. Pero nosotros en estos Lemas no tratamos de fluidos elásticos, sino de los no elásticos, tampoco de los cuerpos que flotan en los fluidos, sino de los hundidos en los mismos. Y cuando se conoce la resistencia de los cuerpos en fluidos no elásticos, hay que aumentar esta resistencia un poco, tanto para los fluidos elásticos, como el aire, como para las superficies de fluidos estancados, como los mares y los lagos.

PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA XXX

La resistencia de un globo, que se desplaza uniformemente en un fluido comprimido, infinito y no elástico, es a la fuerza, que generaría o suprimiría todo su movimiento en el mismo tiempo en que recorre ocho terceras partes de su diámetro, como la densidad del fluido a la densidad del globo muy aproximadamente.

Pues el globo es al cilindro circunscrito como dos a tres; y por tanto aquella fuerza que suprimiese todo el movimiento del cilindro en el tiempo en que éste recorre una longitud de cuatro diámetros, suprimirá todo el movimiento del globo en el tiempo en que éste recorra dos terceras partes de dicha longitud, es decir, ocho terceras partes del propio diámetro. Pero la resistencia del cilindro es a esta fuerza muy aproximadamente como la densidad del fluido a la densidad del cilindro o del globo por la Proposición XXXVII, y la resistencia del globo es igual a la resistencia del cilindro, por los Lemas V, VI y VIII. Q. E. D.

COROLARIO 1. Las resistencias de los globos, en medios comprimidos infinitos, están en razón compuesta del cuadrado de la velocidad, del cuadrado del diámetro y de la densidad de los medios.

COROLARIO 2. La máxima velocidad con la cual un globo puede descender por su peso relativo en un fluido resistente es aquella que puede adquirir el mismo globo, con el mismo peso, cayendo sin resistencia y describiendo en su caída un espacio que sea a las cuatro terceras partes de su diámetro como la densidad del globo a la densidad del fluido. Pues el globo en el tiempo de su caída, con la velocidad adquirida al caer, describirá un espacio que resultará ser a ocho tercios de su diámetro, como la densidad del globo a la densidad del fluido; y la fuerza del peso generadora de este movimiento será a la fuerza que generaría este mismo movimiento en el tiempo en que el globo recorrería las ocho terceras partes de su diámetro a la misma velocidad, como la densidad del fluido a la densidad del globo: y por consiguiente, por esta Proposición, la fuerza del peso será igual a la fuerza de resistencia y, por ello, no puede acelerar al globo.

COROLARIO 3. Dadas la densidad del globo y su velocidad al principio del movimiento, así como la densidad del fluido comprimido en reposo en que el globo se mueve, están dados en todo momento, tanto la velocidad del globo como su resistencia, al igual que el espacio descrito por él, por el Corolario 7 de la Proposición XXXV.

COROLARIO 4. Un globo moviéndose en un fluido comprimido en reposo y de su misma densidad, perderá la mitad de su movimiento antes de que haya recorrido una longitud de dos diámetros propios, por el mismo Corolario 7.

PROPOSICIÓN XXXIX. TEOREMA XXXI

La resistencia de un globo que se desplaza por un fluido encerrado en un canal cilíndrico y uniformemente comprimido, es a la fuerza con la cual se generaría o suprimiría todo su movimiento en el tiempo en que recorrería ocho terceras partes de su diámetro, como la razón compuesta de la razón del orificio del canal al exceso de este orificio sobre la mitad del círculo máximo del globo, del cuadrado de la razón del orificio del canal al exceso de este orificio sobre el círculo máximo del globo y de la razón de la densidad del fluido a la densidad del globo, muy aproximadamente.

Es evidente por el Corolario 2 de la Proposición XXXVII, mientras que la demostración sigue los pasos de la demostración de la Proposición anterior.

ESCOLIO

En las dos últimas Proposiciones (lo mismo que en el Lema V) he supuesto que toda el agua que precede al globo y cuya fluidez aumenta la resistencia del globo, se halla congelada. Pero si toda dicha agua está líquida, aumentará la resistencia un tanto. Aunque dicho aumento en estas Proposiciones será pequeño y puede despreciarse, dado que la superficie convexa del globo produce casi todo el efecto del hielo.

PROPOSICIÓN XL. PROBLEMA IX

Hallar a partir de los fenómenos la resistencia de un globo que se desplaza en un medio comprimido muy fluido.

Sea A el peso del globo en el vacío, B su peso en un medio resistente, D el diámetro del globo, F el espacio que sea a $\frac{4}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del medio, es decir, como A a A - B, G el tiempo en el cual el globo cayendo sin resistencia con el peso B describe el espacio F, y H la velocidad que adquiere el globo con esta su caída. Y H será la velocidad máxima con que el globo, con su peso B, puede descender en un medio resistente, por el Corolario 2 de la Proposición XXXVIII, y la resistencia que sufre el globo, descendiendo con dicha velocidad, será igual a su peso B, mientras que la resistencia que sufre a otra velocidad cualquiera será al peso B como la razón cuadrada de esta velocidad a la susodicha velocidad máxima H, por el Corolario 1 de la Proposición XXXVIII.

Esta es la resistencia que se debe a la inercia de la materia del fluido. Pero la que se debe a la elasticidad, tenacidad y fricción de sus partes se hallará como sigue.

Déjese caer el globo de modo que descienda en el fluido por su peso B; y sea P el tiempo de caída y sea medido en segundos si el tiempo G está dado en segundos. Hállese el número absoluto N correspondiente al logaritmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, y sea L el logaritmo del número $\frac{N + 1}{N}$, y la velocidad adquirida al caer será $\frac{N - 1}{N + 1}$H, y la altura descrita será $\frac{2PF}{G}$ - 1,3862943611F + 4,605170186LF. Si el fluido es suficientemente profundo, se puede despreciar el término 4,605170186LF, y la altura descrita será muy aproximadamente la de $\frac{2PF}{G}$ - 1,3862943611F. Todo esto se sigue de la Proposición novena del Libro segundo y de sus Corolarios en la hipótesis de que el globo no sufra otra resistencia que la debida a la inercia de la materia. Pero si sufriese otra resistencia además de ésta, el descenso será más lento, y de la retardación se inferirá la cantidad de esa resistencia.

Para conocer más fácilmente la velocidad y el descenso de un cuerpo que cae en un fluido, he compuesto la siguiente tabla, cuya primera columna expresa los tiempos de caída, la segunda las velocidades adquiridas en la caída, siendo la velocidad máxima 100000000, la tercera representa los espacios descritos al caer en dichos tiempos, siendo 2F el espacio descrito por el cuerpo en el tiempo G y con la velocidad máxima, y la cuarta representa los espacios descritos en los mismos tiempos máxima. Los números de la cuarta columna son $\frac{2PF}{G}$, y sustrayendo el número 1,3862944 - 4,6051702L, se hallarán los números de la tercera columna, números estos que hay que multiplicar por el espacio F para hallar los espacios descritos al caer. A estas anteriores se ha añadido una quinta columna que contiene los espacios descritos por el cuerpo en estos mismos tiempos cayendo en el vacío con la fuerza de su peso de comparación B.

Tiempos P	*Velocidades de caída en el fluido*	*Espacios descritos cayendo en el fluido*	*Espacios descritos con movimiento máximo*	*Espacios descritos cayendo en el vacío*
0,001G	99999 29/30	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09 F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49 F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49 F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999 3/5	18,6137056F	20F	100F

Escolio

Con objeto de investigar mediante experimentos las resistencias de los fluidos me procuré un vaso de madera cuadrado y con longitud y latitud interiores de nueve pulgadas de pie *londinense* y con una profundidad de nueve pies y medio, y lo llené de agua de lluvia; y con globos hechos de cera conteniendo plomo, anoté los tiempos de descenso de los globos, siendo la altura del descenso de 112 pulgadas. El pie cúbico sólido *londinense* contiene 76 libras *romanas* de agua de lluvia, y la pulgada sólida cúbica de este pie contiene $\frac{19}{36}$ onzas de esa libra, o también 253⅓ granos; y un globo de agua de una pulgada de diámetro 132,645 granos en el aire, o también 132,8 granos en el vacío; y otro globo cualquiera será como el exceso de su peso en el vacío sobre su peso en el agua.

EXPERIMENTO 1. Un globo, cuyo peso era de 156¼ granos en el aire y de 77 granos en el agua describió la altura completa de 112 pulgadas en un tiempo de cuatro segundos. Y repetido el experimento, el globo de nuevo cayó en el mismo tiempo de cuatro segundos.

El peso del globo en el vacío es de $156\frac{13}{38}$ granos, y el exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua es de $79\frac{13}{18}$ granos. De ello se sigue que el diámetro del globo es de 0,84224 partes de pulgada. Pero la densidad del agua a la densidad del globo es como dicho exceso al peso del globo en el vacío, igual que las ocho terceras partes del diámetro del globo (es decir, 2,24597 pulgadas) al espacio 2F, que será, por tanto, de 4,4256 pulgadas.

El globo en un segundo, con todo su peso de $156\frac{13}{38}$ granos cayendo en el vacío, describe 193⅓ pulgadas; y en el tiempo G, que es a un segundo como la raíz cuadrada del espacio F, es decir, como 2,2128 pulgadas a 95,219 pulgadas, describirá 2,2128 pulgadas, y adquirirá la velocidad máxima H con la que puede descender en el agua. Por tanto, el tiempo G es de 0,15244 segundos. Y en este tiempo G, con la susodicha velocidad máxima H, el globo describirá el espacio 2F de 4,4256 pulgadas; y por tanto, en un tiempo de 4 segundos describirá un espacio de 116,1245 pulgadas. Réstese el espacio de 1,3862944F o de 3,0676 pulgadas, y quedará un espacio de 113,0569 pulgadas, que describirá el globo cayendo en agua en un vaso muy ancho y en un tiempo de 4 segundos. Este espacio, por la estrechez del vaso de madera antedicho, debe disminuirse en una razón que está compuesta de la razón de la raíz cuadrada del orificio del vaso al exceso de este orificio sobre el semicírculo máximo del globo y de la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre el círculo máximo del globo, o sea, en la razón de 1 a 0,9914. Hecho esto, se tendrá un espacio de 112,08 pulgadas, que según la teoría debería haber descrito el globo cayendo en el agua en dicho vaso de madera en un tiempo de 4 segundos, muy aproximadamente. Y según el experimento describió 112 pulgadas.

EXPERIMENTO 2. Tres globos iguales, cuyos pesos eran de 76⅓ granos cada uno en el aire, y de $5\frac{1}{16}$ granos en el agua, se dejaron caer sucesivamente; y cada uno cayó en el agua en el tiempo de 15 segundos, describiendo en su caída la altura de 112 pulgadas.

Haciendo un cálculo, resulta un peso del globo en el vacío de $76\frac{5}{12}$ granos, el exceso de este peso sobre el peso en el agua de $71\frac{17}{48}$ granos, el diámetro del globo de 0,81296 pulgadas, las ocho terceras partes de este diámetro 2,16789 pulgadas, el espacio 2F de 2,3217 pulgadas, el espacio que describirá el globo cayendo con un peso de $5\frac{1}{16}$ granos sin resistencia en el tiempo de un segundo será de 12,808 pulgadas, y el tiempo G será 0″,301056. Por tanto, el globo, con la máxima velocidad que puede recibir de la fuerza de un peso de $5\frac{1}{16}$ granos y con la cual descendería, recorrerá un espacio de 2,3217 pulgadas en el tiempo de 0″,301056, y en un tiempo de 15″, recorrerá un espacio de 115,678 pulgadas. Réstese el espacio 1,3862944F, o sea, 1,609 pulgadas y quedará un espacio de 114,069 pulgadas, que debería recorrer el globo en el mismo tiempo al caer en un vaso muy ancho. Por la estrechez de nuestro vaso debe restarse un espacio de aproximadamente 0,895 pulgadas. Y entonces quedará un espacio de 113,174 pulgadas, que es lo que, según la teoría, debió recorrer cayendo en este vaso en un tiempo de 15 segundos. Pero describió según el experimento 112 pulgadas. La diferencia es inapreciable.

EXPERIMENTO 3. Tres globos iguales, cuyos pesos eran de 121 granos cada uno en el aire, y de 1 grano en el agua, se dejaron caer sucesivamente; y caían en el agua en tiempos de 46, 47 y 50 segundos, describiendo la altura de 112 pulgadas.

Según la teoría estos globos debieron caer en un tiempo de 40 segundos aproximadamente. Creo que no es determinable por qué cayeron más lentamente, si fue debido a la menor proporción de resistencia que se sigue de la fuerza de inercia en los movimientos lentos respecto a la resistencia que surge de otras causas, o si más bien ha de atribuirse a algunas burbujas adheridas al globo, o a la rarefacción de la cera por el calor tanto del ambiente como de la mano que dejaba caer el globo, o quizá también a errores insensibles al pesar los globos en agua. Por todo ello el peso del globo en agua debe ser de varios granos para que el experimento sea cierto y digno de confianza.

EXPERIMENTO 4. Inicié los experimentos descritos hasta aquí, con el fin de investigar las resistencias de los fluidos, antes de elaborar la teoría expuesta en las Proposiciones recién expuestas. Después, para examinar la teoría recién hallada, me procuré un vaso de madera de una anchura interna de $8\frac{2}{3}$ pulgadas y de una profundidad de $15\frac{1}{3}$ pies. A continuación construí cuatro globos de cera con plomo incluido, cada uno de un peso de $139\frac{1}{4}$ granos en el aire, y de $7\frac{1}{8}$ granos en el agua. Y los deje caer de modo que pudiera medir los tiempos de caída en el agua mediante un péndulo oscilante ajustado a oscilaciones de medios segundos. Los globos, mientras los pesaba y después caían, estaban fríos y permanecían fríos durante algún tiempo; porque el calor enrarece un tanto la cera y por esa rarefacción el peso del globo en el agua disminuye, y la cera enrarecida no se reduce instantáneamente por el frío a la densidad anterior. Antes de dejarlos caer los sumergía completamente en el agua, para que su descenso inicial no se viese acelerado por el peso de alguna parte situada fuera del agua. Y cuando estaban completamente sumergidos y en reposo, eran soltados con todo cuidado para que no recibiesen impulso alguno procedente de la mano que los soltaba. Cayeron, pues, sucesivamente en los tiempos de $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 y 51 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas. Pero el ambiente estaba un poco más frío que cuando se pesaban los globos, de modo que repetí el experimento otro día, y los globos cayeron en tiempos de 49, 49½, 50 y 53 oscilaciones, y un tercero en tiempos de 49½, 50, 51 y 53 oscilaciones. Y repetido varias veces el experimento, los globos cayeron en la mayor parte de las veces en tiempos de 49½ y 50 oscilaciones. Cuando cayeron más lentamente sospecho que fueron retardados por los choques con los costados del vaso.

Haciendo ahora el cálculo según la teoría, resulta un peso del globo en el vacío de 139⅖ granos. El exceso de este peso sobre el peso del globo en el agua de $132\frac{11}{40}$ granos. El diámetro del globo de 0,99868 pulgadas. Las ocho terceras partes del diámetro 2,66315 pulgadas. El espacio 2F de 2,8066 pulgadas. El espacio que describe el globo cayendo sin resistencia con el peso de 7⅛ granos en el tiempo de un segundo de 9,88164 pulgadas. Y el tiempo G de 0″,376843. Por lo tanto, el globo, con la velocidad máxima con que puede descender en el agua con la fuerza del peso de 7⅛ granos en el tiempo de 0″,376843 describe un espacio de 2,8066 pulgadas, y en el tiempo de 1″ un espacio de 7,44766 pulgadas, y en el tiempo de 25″, o de 50 oscilaciones, un espacio de 186,1915 pulgadas. Réstese el espacio 1,386294F, o 1,9454 pulgadas, y quedará un espacio de 184,2461 pulgadas, que describirá el globo en el mismo tiempo en un vaso muy ancho. Por la estrechez de nuestro vaso disminúyase este espacio en una razón que esté compuesta ce la raíz cuadrada de la razón del orificio del vaso al exceso de este orificio sobre el semicírculo máximo del globo, y de la razón simple del mismo orificio a su exceso sobre el círculo máximo del globo; y se tendrá un espacio de 181,86 pulgadas, que debió describir el globo aproximadamente, según la teoría, en el tiempo de las 50 oscilaciones. Y describió, según el experimento, 182 pulgadas en el tiempo de 49½ o de 50 oscilaciones.

EXPERIMENTO 5. Cuatro globos de 154⅜ granos de peso en el aire y de 21½ granos en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de 28½, 29, 29½ y 30 oscilaciones, y algunas veces de 31, 32 y 33, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de 29 oscilaciones muy aproximadamente.

EXPERIMENTO 6. Cinco globos de 212⅜ granos de peso en el aire y de 79½ en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de 15, 15½, 16, 17 y 18 oscilaciones, describiendo una altura de 15 pies y 2 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo muy aproximado al de 15 oscilaciones.

EXPERIMENTO 7. Cuatro globos de 293⅜ granos de peso en el aire y de 35⅞ granos en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de 29½, 30, 30½, 31, 32 y 33 oscilaciones describiendo una altura de 15 pies y 1½ pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo muy aproximado al de 28 oscilaciones.

Indagando la causa de que globos del mismo peso y magnitud cayeran unos más lentos y otros más rápidos, di con la siguiente; los globos, tan pronto como se soltaban y empezaban a caer, oscilaban en torno a sus centros, cayendo por delante el lado que por casualidad fuese más pesado, generando un movimiento de oscilación. Pero, el globo por sus oscilaciones comunica al agua un movimiento mayor que si descendiese sin oscilar; y al comunicarlo pierde una parte de su propio movimiento con el cual debía descender: y según la mayor o menor oscilación, se retarda más o menos. Pero además, el globo siempre se desvía del lado que desciende por oscilación, y desviándose se aproxima a los costados del vaso y, a veces, choca con ellos. Y esta oscilación es más fuerte en los globos más graves, y en los más grandes agita más el agua. Por lo cual, para que la oscilación de los globos fuese menor, construí nuevos globos de cera y plomo, incrustando el plomo en un costado del globo cerca de su superficie; y solté el globo de tal forma que el lado más grave en la medida de lo posible, estuviese debajo desde el principio del descenso. Así, las oscilaciones resultantes son mucho menores que antes, y los globos cayeron en tiempos mucho menos desiguales, como en los experimentos siguientes.

Experimento 8. Cuatro globos de 139 granos de peso en el aire y 6½ en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos de no más de 52 oscilaciones y no menos de 50, y la mayor parte de las veces en tiempos de casi 51, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de casi 52 oscilaciones.

Experimento 9. Cuatro globos de 273¼ granos en el aire y de 140¾ en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos, no menores de 12 oscilaciones y no mayores de 13, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Según la teoría estos globos debieron caer en un tiempo muy aproximado a 11⅓ oscilaciones.

Experimento 10. Cuatro globos de un peso de 384 granos en el aire y 119½ en el agua, soltados muchas veces, caían en tiempos de $17\frac{1}{7}$, 18, 18½ y 19 oscilaciones, describiendo una altura de 181½ pulgadas. Y cuando cayeron en un tiempo de 19 oscilaciones, pude oír algunas veces su golpear sobre los costados del vaso antes de que llegasen al fondo.

Pero según la teoría debieron caer en un tiempo de $15\frac{5}{9}$ oscilaciones muy aproximadamente.

Experimento 11. Tres globos iguales de un peso de 48 granos en el aire y $3\frac{29}{32}$ en el agua, soltados muchas veces, cayeron en tiempos de 43½, 44, 44½, 45 y 46 oscilaciones, y la mayor parte de las veces 44 y 45 oscilaciones, describiendo una altura de 182½ pulgadas aproximadamente.

Según la teoría debieron caer en un tiempo de $46\frac{5}{9}$ oscilaciones muy aproximadamente.

Experimento 12. Tres globos iguales de un peso de 141 granos en el aire y de 4⅜ en el agua, soltados algunas veces, cayeron en tiempos de 61, 62, 63, 64 y 65 oscilaciones, describiendo una altura de 182 pulgadas.

Y según la teoría debieron caer en un tiempo de 64½ oscilaciones muy aproximadamente.

Con estos experimentos se pone en evidencia que cuando los globos cayeron más lentamente, como en los Experimentos segundo, cuarto, quinto, octavo, undécimo y duodécimo, la teoría representa correctamente los tiempos de caída; pero cuando los globos cayeron más velozmente, como en los Experimentos sexto, noveno y décimo, se da una resistencia algo mayor que en razón del cuadrado de la velocidad. Pues los globos, mientras caen, oscilan un tanto; y esta oscilación en los globos más ligeros y que caen más lentamente cesa muy pronto, por ser los movimientos más débiles; pero en los más graves y mayores dura más tiempo por ser los movimientos más fuertes, y solamente tras muchas oscilaciones puede ser detenido por el agua que los rodea. Además, cuanto más veloces son los globos tanto menos son presionados en su parte posterior por el fluido; y si la velocidad se aumentase continuamente, al final acabarían por dejar a sus espaldas un espacio vacío, salvo que la compresión del fluido se aumentase a la vez. Pues la compresión del fluido (por las Proposiciones XXXII y XXXIII) debe aumentarse en razón del cuadrado de la velocidad para que la resistencia siga en la misma razón cuadrada. Al no ocurrir esto, los globos más veloces son presionados por detrás un poco menos, y por la falta de esta presión, su resistencia se torna un poco mayor que en razón del cuadrado de la velocidad.

Por consiguiente, la teoría se ajusta a los fenómenos de caídas de cuerpos en el agua, y sólo falta examinar los fenómenos de las caídas en el aire.

EXPERIMENTO 13. En la ciudad de *Londres* en el mes de junio del año 1710 desde la cúpula de la iglesia de *San Pablo* se soltaron dos globos a la vez, uno lleno de mercurio y el otro lleno de aire; y al caer describían una altura de 220 pies *londinenses*. Una tabla de madera estaba suspendida por uno de sus extremos por unas bisagras de hierro y por el otro se apoyaba en un soporte de madera; y los dos globos colocados encima de la tabla se dejaban caer a la vez, tirando del soporte de madera mediante un cable de hierro lanzado hasta el suelo, de suerte que la tabla sostenida solamente por las bisagras de hierro girase sobre ellas, y en el mismo instante un péndulo que oscilaba al segundo con un tirón sobre el susodicho cable de hierro la hacía caer y empezaba a oscilar. Los diámetros y los pesos de los globos y los tiempos de caída se exponen en la tabla siguiente.

Por lo demás, los tiempos observados deben corregirse. Pues los globos de mercurio (por la teoría de *Galileo*) describirán en cuatro segundos 257 pies *londinenses*, y 220 pies en sólo 3″ 42‴. Efectivamente la tabla de madera, al quitar el soporte, giraba más lentamente que lo que se requería y con la lentitud de su giro impedía la caída de los globos en el inicio de la misma. Pues los globos reposaban casi en el centro de la tabla y hasta estaban un poco más cerca del eje de la misma que del soporte. Y por eso, los tiempos de caída se alargaron casi 18 minutos terceros, y ahora hay que corregir restando dichos minutos terceros, sobre todo en los globos mayores que por causa de su mayor diámetro reposaban un poco más sobre la tabla giratoria. Una vez hecho esto, los tiempos en que cayeron los seis globos mayores resultan ser 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴ y 7″ 42‴.

Globos llenos de mercurio			Globos llenos de aire		
Pesos	Diámetros	Tiempos de caída	Pesos	Diámetros	Tiempos de caída
granos	*pulgadas*	*segundos*	*granos*	*pulgadas*	*segundos*
908	0,8	4	510	5,1	8½
983	0,8	4-	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4+	641	5,2	8

Por tanto, el quinto de los globos llenos de aire, construido con un diámetro de cinco pulgadas y un peso de 483 granos, cayó en un tiempo de 8″ 12‴, describiendo una altura de 220 pies. El peso del agua igual a este globo es de 16 600 granos; y el peso del aire igual al dicho globo es de $\frac{16600}{860}$ granos o también de $19\frac{3}{6}$ granos y, por tanto, el peso del globo en el vacío es de $502\frac{3}{10}$ granos, y este peso es al peso del aire igual al globo como $502\frac{3}{10}$ a $19\frac{3}{10}$, y como 2F a las ocho terceras partes del diámetro del globo, es decir, a 13⅓ pulgadas. De donde 2F resulta ser de 28 pies y 11 pulgadas. El globo cayendo en el vacío con todo su peso de $502\frac{3}{10}$ granos en el tiempo de un segundo describirá 193⅓ pulgadas, como antes, y con el peso de 483 granos describirá 185,905 pulgadas, y con el mismo peso de 483 granos también describirá en el vacío el espacio F, o 14 pies y 5½ pulgadas en el tiempo de 57‴ 58⁗, y adquiere la máxima velocidad con que puede descender en el aire. Con esta velocidad el globo, en el tiempo de 8″ 12‴, describirá un espacio de 245 pies y 5⅓ pulgadas. Réstese 1,3863F, o 20 pies y ½ pulgada, y quedarán 225 pies y 5 pulgadas. Por lo tanto, el globo, en un tiempo de 8″ 12‴ debió describir en su caída, según la teoría, el susodicho espacio. Y describió, según el experimento, un espacio de 220 pies. La diferencia es inapreciable.

Aplicando cálculos análogos a los otros globos llenos de aire, construí la tabla siguiente.

Pesos de los globos	Diámetros	Tiempo de caída desde 220 pies		Espacios a describir según teoría		Excesos sobre cálculo	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*terceros*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
510	5,1	8	12	226	11	6	11
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

EXPERIMENTO 14. En el año 1719, en el mes de julio, el *Sr. Desaguliers* de nuevo inició experimentos de éstos construyendo esferas con vejigas de puercos mediante

una esfera cóncava de madera en la que se introducían humedecidas y luego tenían que llenar inflándolas con aire; una vez secas y extraídas se las dejó caer del punto más alto de la linterna de la cúpula del susodicho templo, o sea de una altura de 272 pies, y a la vez se soltaba un globo de plomo de casi dos libras *romanas*. Mientras tanto, algunas personas situadas en lo más alto del templo, donde los globos eran soltados, anotaban los tiempos totales de caída, a la vez que otras personas en el suelo anotaban la diferencia de tiempos entre la caída del globo de plomo y la caída de la vejiga. Los tiempos se medían mediante péndulos que oscilaban en medios segundos. De los que estaban en el suelo, uno tenía un reloj con muelle que vibraba cuatro veces por segundo; otro tenía otra máquina de péndulo hecha con precisión que también vibraba cuatro veces por segundo. Y una máquina similar tenía uno de los que estaban en lo alto del templo. Y estas máquinas estaban hechas de modo que sus movimientos se iniciaban o se paraban a voluntad. Pues bien, el globo de plomo caía en un tiempo de cuatro segundos y cuarto aproximadamente. Añadiendo este tiempo a la diferencia antedicha de tiempos, se obtenía el tiempo total de caída de la vejiga. Los tiempos en los cuales cayeron las cinco vejigas la primera vez después de la caída del globo de plomo eran, 14¾ segundos, 12¾ segundos, 14⅝ segundos, 17¾ segundos y 16⅞ segundos, mientras que en la segunda vez fueron de 14½ segundos, 14¼ segundos, 14 segundos, 19 segundos y 16¾ segundos. Añádase el tiempo de cuatro segundos y cuarto en el cual cayó el globo de plomo y los tiempos totales en los cuales las cinco vejigas vinieron a caer fueron, en la primera vez 19, 17, 18⅞, 22 y 21⅛ segundos respectivamente, y en la segunda vez 18¾, 18½, 18¼, 23¼ y 21 segundos. Los tiempos observados en lo alto del templo eran la primera vez de 19¾, 17¼, 18¾, 22⅛ y 21⅝ segundos, mientras que la segunda vez eran de 19, 18⅝, 18⅜, 24 y 21¼ segundos. Por lo demás, las vejigas no caían siempre en línea recta, sino que algunas veces revoloteaban y oscilaban de aquí para allá mientras caían. Y con estos movimientos los tiempos de caída se alargaron y aumentaron, a veces, en medio segundo y, a veces, en un segundo completo. Caían más directamente las vejigas segunda y cuarta la primera vez; y la primera y la tercera la segunda vez. La vejiga quinta era rugosa y por causa de las rugosidades se retardaba un tanto. Obtenía los diámetros de las vejigas de sus circunferencias medidas con un hilo muy fino que daba dos vueltas. Y comparé la teoría con los experimentos en la tabla siguiente, suponiendo que la densidad del aire es a la del agua de lluvia como 1 a 860 y calculando los espacios que los globos debían recorrer en su caída según la teoría.

Peso de las vejigas	Diámetro de las vejigas	Tiempo de caída desde 272 pies	Espacios a recorrer según teoría		Diferencias entre teoría y experimentos	
granos	*pulgadas*	*segundos*	*pies*	*pulgadas*	*pies*	*pulgadas*
128	5,28	19	271	11	-0	1
156	5,19	17	272	0½	+0	0½
137½	5,3	18½	272	7	+0	7
97½	5,26	22	277	4	+5	4
99⅛	5	21⅛	282	0	+10	0

Por tanto, la resistencia de los globos en movimiento, tanto en el aire como en el agua, es adecuada y correctamente representada por nuestra teoría y es proporcional a la densidad de los fluidos a iguales velocidades y magnitudes de los globos.

En el Escolio subsiguiente a la Sección sexta hemos mostrado mediante los experimentos con péndulos que las resistencias de globos iguales e igualmente veloces en el aire, en el agua, y en el mercurio son como las densidades de los fluidos. Aquí mostramos lo mismo de modo más preciso mediante experimentos con cuerpos que caen en el aire y en el agua. Pues los péndulos en cada oscilación suscitan un movimiento en el fluido siempre contrario al movimiento de regreso del péndulo, y con la resistencia debida a este movimiento así como con la resistencia del hilo del que se suspendía el péndulo, la resistencia total del mismo venía a ser mayor que la resultante de los experimentos de cuerpos cayendo. Pues por los experimentos de péndulos expuestos en dicho Escolio, un globo de la misma densidad que el agua, describiendo en el aire la longitud de su movimiento, sólo tendría que perder de su movimiento $\frac{1}{3342}$ parte. Pero según la teoría expuesta en esta Sección séptima confirmada con los experimentos de cuerpos que caen, el mismo globo describiendo la misma longitud sólo debería perder de su movimiento $\frac{1}{4586}$ parte, en el supuesto de que la densidad del agua fuese a la densidad del aire como 860 a 1. Por consiguiente, las resistencias resultaron mayores por los experimentos de los péndulos (por las causas ya dichas) que por los experimentos de los globos que caen, y esto casi en una razón de 4 a 3. Sin embargo, puesto que las resistencias de los péndulos oscilantes en aire, agua o mercurio se ven incrementadas igualmente por iguales causas, la proporción de las resistencias en tales medios se podrá representar con bastante exactitud tanto mediante experimentos con péndulos como con experimentos con cuerpos que caen. Y de ahí se puede concluir que la resistencia de los cuerpos en cualesquiera fluidos, incluso en los más fluidos, siendo iguales las demás circunstancias, son como las densidades de los fluidos.

Una vez establecido esto, se puede ahora tratar de qué parte de su movimiento perderá aproximadamente un globo en un tiempo dado, si se proyecta a través de un fluido cualquiera. Sea D el diámetro del globo, V su velocidad al inicio del movimiento, y T el tiempo en el cual el globo, con la velocidad V, describirá en el vacío un espacio que sea al espacio $\frac{8}{3}$D como la densidad del globo a la densidad del fluido: y el globo proyectado en dicho fluido, en otro tiempo cualquiera *t*, perderá la parte $\frac{tV}{T + t}$, manteniendo la parte $\frac{TV}{T + t}$, y describirá un espacio que será al descrito en el mismo tiempo con velocidad uniforme en el vacío como el logaritmo del número $\frac{T+t}{T}$, multiplicado por el número 2,302585093, es al número $\frac{t}{T}$, por el Corolario 7 de la Proposición XXXV. En los movimientos lentos la resistencia puede ser algo menor, por cuanto la figura del globo resulte algo más apta para el movimiento que la de un cilindro descrito con el mismo diámetro. En movimientos veloces, la resistencia puede ser algo mayor, toda vez que la elasticidad y la compresión del fluido no aumentan en razón del cuadrado de la velocidad. Pero no me detengo en estos detalles.

Y aunque el aire, el agua, el mercurio y otros fluidos semejantes, por división hasta el infinito de sus partes, se hiciesen más sutiles y viniesen a ser medios infinitamente fluidos, no por eso resistirían menos a los globos proyectados. Pues la resistencia de que se trata en las Proposiciones anteriores procede de la inercia de la materia; y la inercia de la materia es esencial a los cuerpos y proporcional siempre a la cantidad de materia. Ciertamente se puede disminuir la resistencia que procede de la tenacidad y fricción de las partes mediante la división de las partes de un fluido: pero la cantidad de materia no disminuye por la división de sus partes; y manteniéndose la cantidad de materia, se mantiene su fuerza de inercia a la cual es siempre proporcional la resistencia de la que aquí se trata. Para que dicha resistencia disminuya debe disminuir la cantidad de materia en los espacios a cuyo través se mueven los cuerpos. Y por eso, los espacios celestes, por los que los globos de los planetas y los cometas se mueven siempre libremente en todas direcciones y sin ninguna disminución sensible de movimiento, carecen de todo fluido corpóreo, salvo acaso algunos vapores sumamente tenues y los rayos de luz.

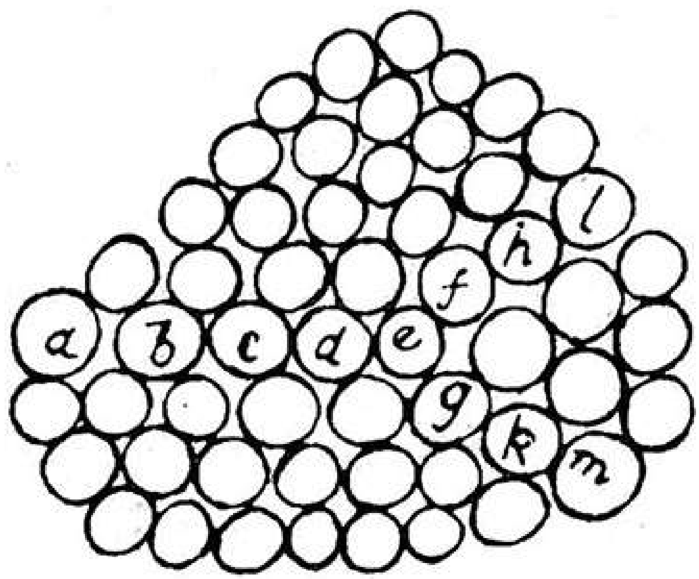
También los proyectiles al desplazarse suscitan movimiento en los fluidos, y este movimiento surge del exceso de presión del fluido en las partes anteriores del proyectil sobre la presión en sus partes posteriores y no puede ser menor en medios infinitamente fluidos que en el aire, en el agua, y en el mercurio según la densidad de la materia de cada uno. Ahora bien, este exceso de presión, en razón de su cantidad, no sólo suscita movimiento en el fluido, sino que también actúa sobre el proyectil retardando su movimiento: y por eso, la resistencia en todo fluido es como el movimiento suscitado en el fluido por el proyectil, y no puede ser menor en el éter más sutil en razón de la densidad del éter, que en el aire, en el agua, o en el mercurio, en razón de las densidades de dichos fluidos.

Sección VIII
SOBRE EL MOVIMIENTO QUE SE PROPAGA POR LOS FLUIDOS

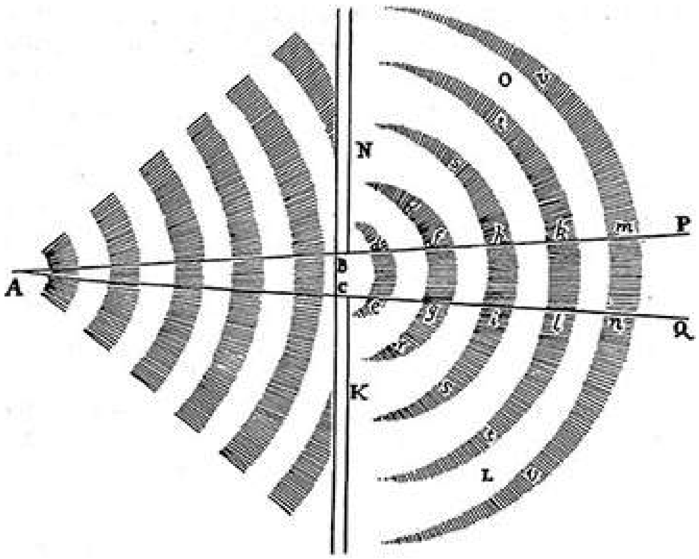
Proposición XLI. Teorema XXXII

La presión no se propaga a través de un fluido según líneas rectas salvo cuando las partículas del fluido están colocadas directamente en tal sentido.

Si las partículas *a, b, c, d, e,* se hallasen colocadas en línea recta, la presión puede, ciertamente, propagarse directamente desde *a* hasta *e*; pero la partícula *e* urgirá a las partículas colocadas oblicuamente *f* y *g* de modo oblicuo, y dichas partículas *f* y *g* no mantendrán la presión recibida, salvo que sean soportadas por las partículas *h* y *k*; pero en tanto en que son sostenidas, presionan sobre las que sostienen; y éstas, a su vez, no soportarán la presión a no ser que sean sostenidas por las siguientes *l* y *m* y las presionen también, y así sucesivamente hasta el infinito; y una vez que empieza a propagarse oblicuamente, si incidiere en partículas ulteriores que no se hallan colocadas en línea recta, de nuevo divergirá; y esto tantas veces cuantas incidiese sobre partículas no situadas exactamente en línea recta. Q. E. D.



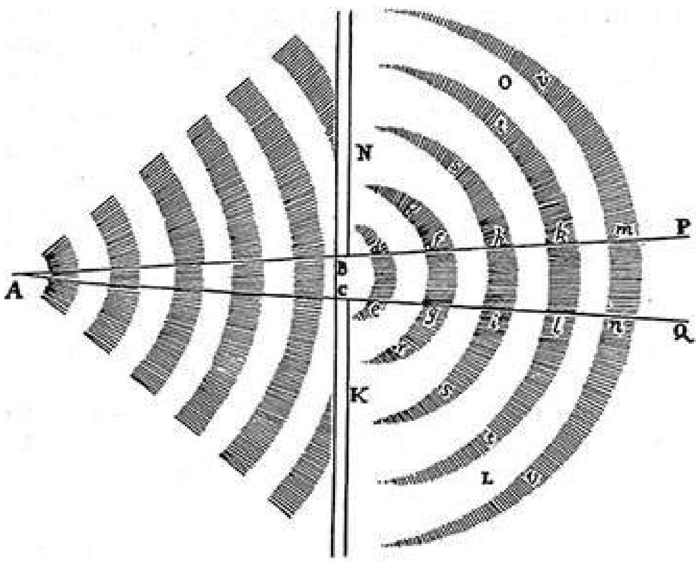
Corolario. Si una parte cualquiera de la presión que se propaga desde un punto dado fuese obstruida por un obstáculo, la parte restante que no es interceptada, divergirá por el espacio ulterior al obstáculo. Cosa que puede también demostrarse como sigue. Sea una presión que se propaga desde el punto A hacia cualquier parte y ello, si es posible, según líneas rectas, y con el obstáculo NBCK, perforado en BC, obstrúyase toda ella, salvo la parte coniforme APQ, que pasa por el orificio circular BC. Sepárese en troncos el cono APQ mediante los planos transversales *de*, *fg*, *hi*; en tal caso, mientras el cono ABC, propagando la presión, impulsa al tronco de cono ulterior *degf* sobre la superficie *de*, y el tronco anterior empuja al tronco siguiente *fghi* sobre la superficie *fg*, y dicho tronco empujará sobre el tercer tronco, y así sucesivamente hasta el infinito; está claro (por la Ley tercera del Movimiento) que el primer tronco *defg*, debido a la reacción del tronco segundo *fghi*, sufrirá una presión sobre la superficie *fg* igual a la presión que efectúa sobre el dicho tronco segundo. Luego el tronco *degf* es comprimido por ambos lados entre el cono A*de* y el tronco *fhig*, y por consiguiente (por el Corolario 6 de la Proposición XIX) no puede conservar su figura a no ser que sea comprimido por todas partes con la misma fuerza. Luego intentará ceder hacia los lados *df*, *eg* con un ímpetu igual a aquel con que es comprimido en las superficies *de*, *fg*; y en esos lugares (al no ser rígido, sino completamente fluido) se saldrá y se expandirá, salvo que el fluido de entorno sea tal que impida este intento. Por lo cual, con este intento de salir, presionará sobre el fluido de entorno tanto sobre los lados *df*, *eg* como sobre el tronco *fghi* con idéntico ímpetu; y por ello, la presión no se propagará menos hacia los lados *df*, *eg* por ambos espacios NO, KL que lo que se propague desde la superficie *fg* hacia PQ. Q. E. D.



Proposición XLII. Teorema XXXIII

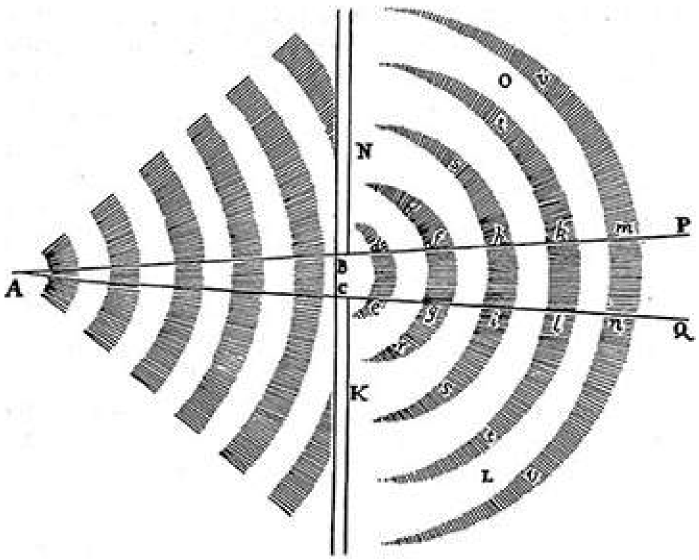
Todo movimiento propagado a través de un fluido diverge de la trayectoria recta en espacios inmóviles.

Caso 1. Propáguese el movimiento desde el punto A a través del orificio BC, y vaya, si es posible, hacia el espacio cónico BCQP según líneas rectas divergentes desde el punto A. Y supongamos en primer lugar que este movimiento fuese de ondas en la superficie de agua estancada. Y sean *de, fg, hi, kl*, etc., las crestas de cada una de las ondas, separadas entre sí por los valles correspondientes. En tal caso, puesto que el agua en las crestas de las ondas está más alta que en las partes en reposo LK, NO del fluido, descenderá desde las crestas *e, g, i, l*, etc., *d, f, h, k*, etc., por un lado y por otro hacia KL, NO; y también descenderá desde dichos lugares en reposo hacia los valles de las ondas. Con el primero de los descensos las crestas de las ondas, y con el segundo los valles se expanden hacia uno y otro lado y se propagan hacia KL y NO. Y puesto que el movimiento de las ondas desde A hacia PQ ocurre mediante el descenso continuo de las crestas hacia los valles siguientes, y por lo mismo, no ocurre con mayor velocidad que la velocidad de descenso; y también el descenso del agua por un lado y por otro hacia KL y NO debe ocurrir con esa misma velocidad; y así la dilatación de las ondas por uno y otro lado hacia KL y NO avanzará con la misma velocidad con que avanza la propia onda desde A hacia PQ en línea recta. Por tanto, todo el espacio de ambos lados hacia KL y NO será ocupado por las ondas dilatadas *rfgr, skis, tklt, vmnv*, etc. Q. E. D. Cualquiera puede experimentar en agua estancada que esto es así.



Caso 2. Ahora supongamos que *de, fg, hi, kl, mn*, representan impulsos propagados desde el punto A a través de un medio elástico sucesivamente. Imaginemos que los impulsos se propagan por medio de sucesivas condensaciones y rarefacciones del medio, como si la parte más densa del impulso ocupase la superficie esférica descrita en torno al centro A, y entre impulsos sucesivos mediasen intervalos iguales. Las líneas *de, fg, hi, kl*, etc., representan las partes más densas de los impulsos, propagadas a través del orificio BC. Y puesto que es allí el medio más denso que en los espacios laterales hacia KL y NO, se dilatará tanto hacia esos espacios KL y NO por ambos lados como hacia los intervalos más enrarecidos de las

pulsaciones; de este modo el medio que va resultando cada vez más raro tras los intervalos y más denso tras las pulsaciones, participará de sus movimientos. Y dado que el movimiento progresivo de los impulsos procede de la relajación continua de las partes más densas que anteceden a los valles más enrarecidos; y los impulsos deben relajarse hacia ambos lados de las partes del medio en reposo KL y NO casi con la misma velocidad; y dichos impulsos se dilatarán casi con la misma velocidad por todas partes en los espacios inmóviles KL y NO, con la que se propagan en directo desde el centro A; por tanto, ocuparán todo el espacio KLON. Q. E. D. Esto lo experimentamos en los sonidos, que se oyen tanto con un monte interpuesto como, si entran en una habitación por una ventana y se extienden por todas partes de la habitación, se oyen en todas las esquinas, y no por reflexión en las paredes opuestas, sino propagándose directamente desde la ventana; en tanto que es posible juzgar por los sentidos.



CASO 3. Finalmente, supongamos que un movimiento de cualquier clase se propaga desde A a través del orificio BC: y puesto que esta propagación no ocurre si no es en la medida en que las partes del medio más cercanas al centro A urgen y agitan a las partes siguientes, y las partes que son agitadas son fluidas y, por tanto, retroceden por doquier hacia las regiones en que son menos presionadas: tales partes retrocederán hacia las partes del medio que están todas en reposo, tanto las laterales KL y NO, como las frontales PQ, y de este modo todo el movimiento, tan pronto como haya pasado por el orificio BC, empezará a dilatarse y a propagarse desde allí directamente hacia todas partes, como si fuera desde un principio y centro. Q. E. D.

PROPOSICIÓN XLIII. TEOREMA XXXIV

Todo cuerpo vibrante en un medio elástico propagará el movimiento de sus pulsaciones en directo hacia todas partes; en cambio, en un medio no elástico, *excitará un movimiento circular.*

CASO 1. Por cuanto que las partes del cuerpo vibrante que van y vienen alternativamente, con su ida urgirán y empujarán a las partes del medio que están inmediatas a ellas, y al urgirías las presionarán y las condensarán; y después con su retorno dejarán a las partes presionadas retroceder y expandirse. Por tanto, las partes del medio próximas al cuerpo vibrante irán y regresarán alternativamente, a la par de las partes del dicho cuerpo vibrante: y por la misma razón que las partes de este cuerpo agitaban a estas partes del medio, éstas a su vez perturbadas por vibraciones semejantes agitarán a las partes inmediatas a ellas, y éstas agitadas igualmente agitarán a las siguientes y así, sucesivamente, hasta el infinito. Y al igual que las primeras partes del medio, al ir se condensan y al regresar se relajan, de igual modo las restantes partes se condensan cuando van y se expanden cuando vuelven. Y, por tanto, no todas irán y volverán a la vez (pues así conservarían distancias fijas entre ellas y no podrían enrarecerse y condensarse alternativamente) sino que acercándose entre ellas cuando se condensan y separándose cuando se enrarecen, unas de ellas irán cuando las otras vuelvan: y esto alternativamente hasta el infinito. Pero las partes que van y al ir se condensan, por su movimiento progresivo, con el cual coinciden en los obstáculos, son los impulsos; y por ello, los impulso sucesivos se propagan desde todo cuerpo vibrante en directo; y esto casi con iguales intervalos entre ellos, por ser iguales los intervalos de tiempo en los cuales el cuerpo con sus vibraciones excita cada impulso. Y aunque las partes del cuerpo vibrante vayan y vengan según una dirección cierta y fija, no obstante los impulsa propagados desde allí a través del medio se extenderán hacia lo: lados por la Proposición anterior; y desde dicho cuerpo vibrante como desde un centro común y bajo la forma de superficies cai esféricas y concéntricas se irán propagando en todas direcciones. Cosa de la que tenemos un ejemplo en las ondas, que al ser excitadas por un dedo vibrando, no sólo parten de allí hacia uno y oto lado según la dirección del movimiento del dedo, sino que, en forma de círculos concéntricos, ciñen inmediatamente al dedo y se propagan en todas direcciones. Pues la gravedad de las ondas suple en lugar de la fuerza elástica.

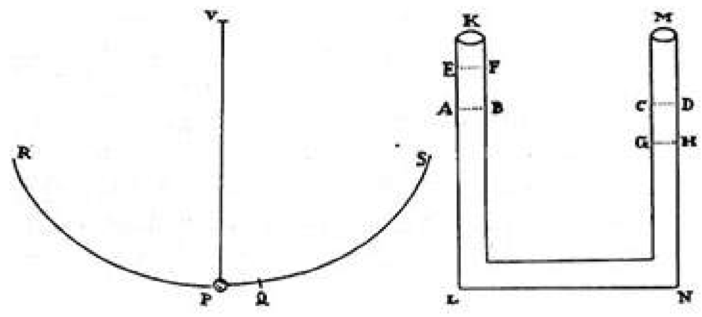
CASO 2. Que el medio no sea elástico: puesto que sus partes presionadas por las partes vibrantes del cuerpo vibrante no pueden condensarse, el movimiento se propagará instantáneamente hacia las partes donde el medio cede con facilidad, es decir, a las partes que el cuerpo vibrante dejase vacías tras él por el otro lado. Es el mismo case que el del cuerpo proyectado en un medio cualquiera. El medio, al ceder a los proyectiles, no retrocede hasta el infinito; sino que lloviéndose en círculo, se dirige hacia los espacios que el cuerpo abandona a sus espaldas. Por tanto, cuantas veces el cuerpo vibrante va hacia un lado cualquiera, el medio cede y se mueve en círculo hacia las partes que abandona el cuerpo; y cuantas veces el cuerpo regresa ál lugar inicial, el medio es expulsado dí allí para que retorne a su primer lugar. Y aunque el cuerpo vibrante no sea duro, sino flexible en todas direcciones, mientras conserve una magnitud dada, y puesto que tampoco puede urgir on sus vibraciones al medio en un sentido sin que a la vez ceda ante él en otro, resultará que el medio, cediendo por los lugares por donde es presionado, se dirigirá continuamente en círculo hacia las partes que ceden ante él. Q. E. D.

COROLARIO. Desvarían, pues, quienes creen que la agitación de la llama conduce a una propagación de la presión según líneas rectas a través del medio ambiente. Semejante presión se deberá derivar no sólo de la agitación de las partes de la llama, sino también de la dilatación de todo.

PROPOSICIÓN XLIV. TEOREMA XXXV

Si el agua alternativamente asciende y desciende por tubos de brazos elevados KL, MN, y se construyese un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la mitad de la longitud del agua qui hay en el tubo: digo que el agua ascenderá y descenderá en los mismos tiempos en los que oscile el péndulo.

Mido la longitud del agua según los ejes del tubo y de los brazos, igualándola a la suma de dichos ejes, y no tengo aquí en cuenta la resistencia del agua debida al rozamiento del tubo. Representen entonces AB y CD la altura media del agua en cada uno de los brazos, y cuando el agua en el brazo KL sube hasta la altura BF, en el brazo MN el agua descenderá hasta la altura GH. Sea P un cuerpo pendular, VP el hilo, V el punto de suspensión, RPQS la cicloide que describa el péndulo, P su punto inferior, PQ un arco igual a la altura AE. La fuerza, con la cual el movimiento del agua se acelera y se retarda alternativamente, es el exceso del peso del agua en uno de los dos brazos sobre el peso en el otro, y por ello, cuando el agua asciende en el brazo KL hasta BF, y en el otro desciende hasta GH, dicha fuerza es el doble del peso del agua EABF, y por tanto, es al peso de toda el agua como AE o PQ a VP o PR. También la fuerza con la que el peso P, en un punto cualquiera Q, es acelerado y retardado en la cicloide (por el Corolario de la Proposición LI) es a su peso total como su distancia PQ desde el lugar ínfimo P a la longitud de la cicloide PR. Por lo cual, las fuerzas motrices del agua y del péndulo que describen los espacios iguales AE, PQ, son como los pesos a mover; y por consiguiente, si el agua y el péndulo inicialmente están en reposo, dichas fuerzas los moverán igualmente en tiempos iguales y harán que vayan y vuelvan a la vez con un movimiento recíproco. Q. E. D.



COROLARIO 1. Por consiguiente, todas las subidas y bajadas del agua son isócronas, tanto si el movimiento es más intenso como si es más suave.

COROLARIO 2. Si la longitud total del agua en el tubo es de $6\frac{1}{9}$ pies *parisinos*, el agua descenderá en un segundo de tiempo y ascenderá en otro segundo; y así sucesivamente en veces alternas hasta el infinito. Pues un péndulo de $3\frac{1}{18}$ pies de longitud oscila en el tiempo de un segundo.

COROLARIO 3. Y si la longitud del agua aumentase o disminuyese, aumentará o disminuirá el tiempo de reciprocación en razón de la raíz cuadrada de la longitud.

PROPOSICIÓN XLV. TEOREMA XXXVI

La velocidad de las ondas es como la raíz cuadrada de las anchuras.

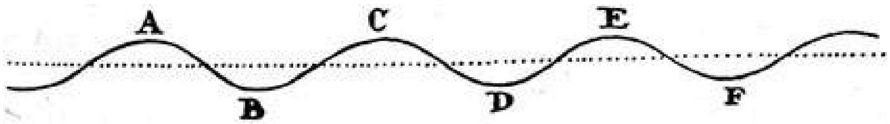
Se sigue de la construcción de la Proposición siguiente.

PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA X

Hallar la velocidad de las ondas.

Constrúyase un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea igual a la anchura de las ondas: y en el tiempo en el cual dicho péndulo completa cada una de sus oscilaciones, en ese mismo tiempo las ondas recorrerán casi su anchura al desplazarse.

Denomino anchura de las ondas a la medida transversal comprendida, bien entre los puntos más bajos de los valles, o bien entre los puntos más altos de las crestas. Sea ABCDEF la superficie de agua estancada, que asciende y desciende en ondas sucesivas; y sean A, C, E, etc. las cimas de las ondas y B, D, F, etc., los valles intermedios. Y puesto que el movimiento de las ondas ocurre por el sucesivo ascenso y descenso del agua, del mismo modo sus partes A, C, E, etc., que ahora están en lo más alto después estarán en lo más bajo; y la fuerza motriz por la cual las partes de arriba descienden y las de abajo ascienden, es el peso del agua elevada; dicho ascenso y descenso alternativo será análogo al movimiento recíproco del agua en el tubo y se atendrá a las mismas leyes de tiempo: y por ello (por la Proposición XLIV) si las distancias entre los puntos más altos de las ondas A, C, E, y los puntos más bajos B, D, F, son iguales al doble de la longitud del péndulo, las partes más altas A, C, E, vendrán a ser las ínfimas en el tiempo de una oscilación, y de nuevo ascenderán en el tiempo de la oscilación siguiente. Por consiguiente, el tiempo que transcurre mientras pasa cada una de las ondas será el de dos oscilaciones; es decir, la onda describe su anchura en el tiempo en que el susodicho péndulo oscila dos veces; pero en ese tiempo un péndulo cuya longitud sea cuatro veces mayor y, por tanto, sea igual a la anchura de las ondas, oscilará una sola vez. Q. E. I.



COROLARIO 1. Por lo tanto, las ondas que tengan una anchura de $3\frac{1}{18}$ pies *parisinos* recorrerán al desplazarse la distancia de su anchura en él tiempo de un segundo; y por ello, en un tiempo de un minuto recorrerán $183\frac{1}{3}$ pies, y en una hora recorrerán un espacio aproximado de 11 000 pies.

COROLARIO 2. Y la velocidad de ondas mayores o menores aumentará o disminuirá como la raíz cuadrada de su anchura.

Todo lo cual es así bajo la hipótesis de que las partes del agua ascienden y descienden en línea recta; pero es más verosímil que el ascenso y el descenso tengan lugar circularmente y, por tanto, mantengo que el tiempo hallado mediante esta Proposición es sólo aproximado.

PROPOSICIÓN XLVII. TEOREMA XXXVII

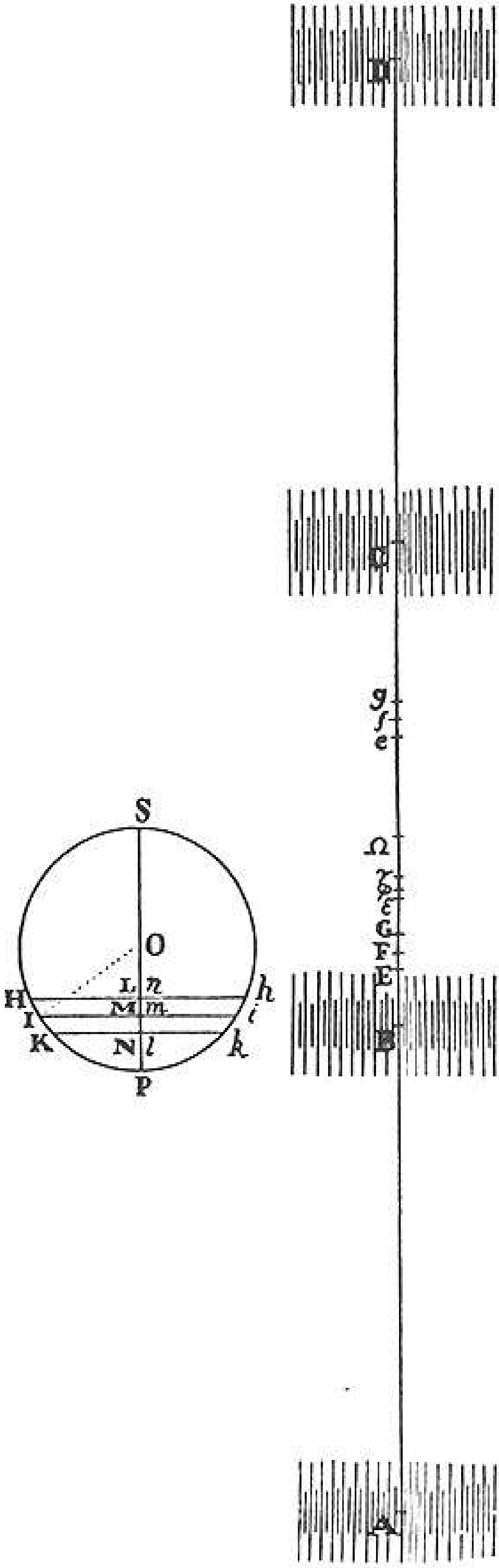
Al propagarse los impulsos a través de un fluido, cada una de las partículas del fluido que van y vienen con un movimiento recíproco muy breve, se aceleran y se retardan siempre de acuerdo con la ley de oscilación del péndulo.

Representen AB, BC, CD, etc. distancias iguales de impulsos sucesivos; ABC la dirección del movimiento de los impulsos propagados desde A hacia B; E, F, G, representen tres puntos físicos del medio en reposo situados a distancias iguales sobre la recta AC; sean E*e*, F*f*, G*g*, espacios iguales muy breves por los cuales los susodichos puntos van y vienen en cada vibración con un movimiento recíproco; $\mathcal{E}$, φ, γ, sean unos lugares intermedios entre dichos puntos; y EF, FG unas breves líneas físicas o partes lineales del medio situadas entre dichos puntos y trasladadas sucesivamente a los lugares $\mathcal{E}\varphi$, $\varphi\gamma$ y ef, fg. Trácese la recta PS igual a la recta E*e*. Biséquese dicha recta en O y con centro en O e intervalo OP trácese el círculo SIPi. Represéntese con esta circunferencia y sus partes el tiempo total de una vibración y sus partes proporcionales; de suerte que para un tiempo completo cualquiera PH o PHS*h*, si se traza sobre PS la perpendicular HL o *hl* y se toma EƐ igual a PL o P*l*, el punto físico E se hallará en Ɛ. Un punto cualquiera E, bajo esta condición, que vaya desde E por Ɛ hasta *e* y desde aquí regrese por Ɛ hasta E completará cada vibración con los mismos grados de aceleración y retardación que un péndulo oscilante. Hay que probar que cada punto físico del medio deberá agitarse con semejante movimiento. Supongamos, pues, que el medio es excitado con tal movimiento por una causa cualquiera y veamos qué se sigue de ello.

En la circunferencia PHS*h* tómense los arcos iguales Hl, IK, o *hi*, *ik* que estén en la misma razón respecto a la circunferencia entera que la que tienen las rectas iguales EF, FK respecto al intervalo completo BC de los impulsos. Trácense las perpendiculares IM, KN, o *im*, *kn*; y, puesto que los puntos E, F, G, son agitados sucesivamente por movimientos semejantes y completan sus vibraciones enteras de ida y vuelta en el tiempo en que el impulso pasa de B a C, si PH o PHS*h* fuera el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto E, entonces PI o PHS*i* será el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto F, y PK o PHS*k* el tiempo desde el comienzo del movimiento del punto G; y por ello, EƐ, F*φ*, G*γ*, serán respectivamente iguales a PL, PM, PN en la ida de los puntos y en el retorno de los mismos, a P*l*, P*m*, P*n*. Por consiguiente, cuando los puntos van, Ɛ*γ* o EG + G*γ* - EƐ será igual a EG - LN y, cuando los puntos retornan, será igual a EG + *ln*. Pero Ɛ*γ* es la anchura o expansión de la parte EG del medio en el lugar Ɛ*γ*; y por tanto, la expansión de dicha parte en la ida es a su expansión media como EG - LN a EG; en cambio en el retorno es como EG + *ln* o EG + LN a EG. Por tanto, al ser LN a KH como IM al radio OP y KH a EG como la circunferencia PHS*h*P a BC, es decir, si V representase el radio de un círculo que tuviese por circunferencia un intervalo igual al del impulso BC, como OP a V; y «*ex aequo*» LN a EG como IM a V: la expansión de la parte EG o del punto físico F en el lugar Ɛ*γ* será a la expansión media que dicha parte tiene en su primer lugar EG como V - IM a V a la ida y como V + *im* a V a la vuelta. De donde la fuerza elástica del punto F en el lugar Ɛ*γ* es a su fuerza elástica media en el lugar EG como $\frac{1}{\mathrm{V - IM}}$ a $\frac{1}{\mathrm{V}}$ en la ida, y como $\frac{1}{\mathrm{V} + im}$ a $\frac{1}{\mathrm{V}}$ en la vuelta. Y por la misma razón las fuerzas elásticas de los puntos físicos E y G en la ida son como $\frac{1}{\mathrm{V - HL}}$ y $\frac{1}{\mathrm{V - KN}}$ a $\frac{1}{\mathrm{V}}$; y la diferencia de las fuerzas es a la fuerza elástica media del medio como

$$\frac{\mathrm{HL - KN}}{\mathrm{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}} \text{ a } \frac{1}{\mathrm{V1}}$$

O sea, como $\frac{HL - KN}{VV}$ a $\frac{1}{V}$, o también como HL - KN a V, siempre que (por los estrechos límites de las vibraciones) supongamos que HL y KN sean un tanto menores que la cantidad V. Por lo cual, como la cantidad V está dada, la diferencia de fuerzas es como HL - KN, esto es (por ser proporcionales HL - KN a HK y OM a OI o OP, y estar dadas HK y OP) como OM; es decir, si se bisecase F*f* en Ω, como Ω*φ*. Y por la misma razón la diferencia de las fuerzas elásticas de los puntos físicos *ε* y *γ* en el retorno de la pequeña línea física *εγ* es como Ω*φ*. Pero dicha diferencia (es decir, el exceso de fuerza elástica del punto *ε* sobre la fuerza elástica del punto *γ*) es la fuerza con la que la pequeña línea física intermedia del medio *εγ* se acelera en la ida y se retarda en el regreso; y por tanto, la fuerza aceleratriz de la pequeña línea física *εγ* es como su distancia al lugar medio Ω de la vibración. Por consiguiente, el tiempo se representa correctamente (por la Proposición XXXVIII del Libro I) mediante el arco PI; y la parte lineal del medio *εγ* se mueve conforme a la ley enunciada antes, es decir, conforme a la ley del péndulo oscilante: e igual razón hay para todas las partes lineales de las que se compone el medio entero. Q. E. D.


S
O
L n
H h
M m
I i
K N l k
P
g
f
e
Ω
G
F
E

COROLARIO. De aquí se sigue que el número de impulsos propagados es el mismo que el de vibraciones del cuerpo vibrante, y que no se multiplica con su desplazamiento. Pues la línea pequeña física $\mathcal{E}\gamma$ tan pronto regresa a su lugar inicial, reposa; y después tampoco se moverá, a no ser que nuevamente sea empujada, o por el ímpetu del cuerpo vibrante, o por el ímpetu de pulsaciones procedentes del cuerpo vibrante. Por tanto, reposará tan pronto cesen los impulsos propagados desde el cuerpo vibrante.

PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA XXXVIII

Las velocidades de los impulsos propagados en un fluido elástico están en razón compuesta directamente de la raíz cuadrada de la fuerza elástica e inversamente de la raíz cuadrada de la densidad; siempre que la fuerza elástica se suponga proporcional a la condensación del fluido.

CASO 1. Si los medios son homogéneos y las distancias de los impulsos en estos medios son iguales entre ellas, pero el movimiento es más intenso en un medio, las contracciones y dilataciones de partes análogas serán como sus movimientos. Pero esto no es una proporción exacta. No obstante, salvo que las contracciones y dilataciones sean muy intensas, el error no será apreciable y, por tanto, puede tenerse por físicamente exacta. Pues las fuerzas elásticas motrices son como las contracciones y las dilataciones; y las velocidades generadas a la vez de partes iguales son como las fuerzas. Por consiguiente, las partes iguales y correspondientes de impulsos correspondientes completarán su ida y su vuelta a la vez por espacios proporcionales a las contracciones y dilataciones y con velocidades que son como los espacios: por lo cual los impulsos que en el tiempo de una ida y una vuelta completan desplazándose su propia longitud y alcanzan continuamente los lugares de los impulsos inmediatamente anteriores, por la igualdad de las distancias, avanzan con velocidad igual en uno y otro medio.

CASO 2. Pero si las distancias o las longitudes de los impulsos son mayores en un medio que en otro, supongamos que las partes correspondientes describen, en su ida y vuelta, espacios siempre proporcionales a las amplitudes de los impulsos cada una de las veces: entonces sus contracciones y dilataciones serán iguales. Y por tanto, si los medios son homogéneos también las fuerzas motrices elásticas por las que son agitadas con un movimiento recíproco, serán iguales. Pero la materia, que ha de ser movida por estas fuerzas, es como la amplitud de los impulsos, y en la misma razón se halla el espacio a cuyo través deben moverse cada vez en la ida y en la vuelta. Y el tiempo de una ida y vuelta está en razón compuesta de la raíz cuadrada de la materia y de la raíz cuadrada del espacio, y por ende es como el espacio. Pero los impulsos recorren el espacio de sus amplitudes en los tiempos de una ida y una vuelta, es decir, recorren espacios proporcionales a los tiempos; y por tanto, son igualmente veloces.

CASO 3. Por consiguiente, en medios de iguales densidad y fuerza elástica, todos los impulsos son igualmente veloces. Pero si la densidad del medio o la fuerza elástica aumentasen, toda vez que la fuerza motriz aumentará en razón de la fuerza elástica y la materia a mover en razón de la densidad, el tiempo, en el cual se completen los mismos movimientos que antes, aumentará como la raíz cuadrada de la densidad, y disminuirá como la raíz cuadrada de la fuerza elástica. Y por ello la velocidad de los impulsos estará en razón compuesta de, inversamente, la raíz cuadrada de la densidad del medio y, directamente, de la raíz cuadrada de la fuerza elástica. Q. E. D.

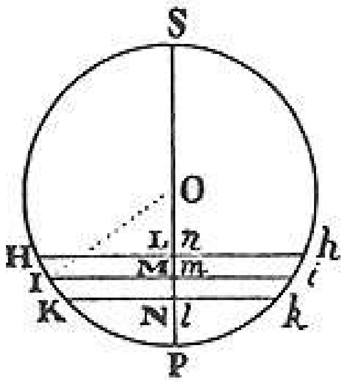
Esta Proposición estará aún más clara por la construcción de la siguiente.

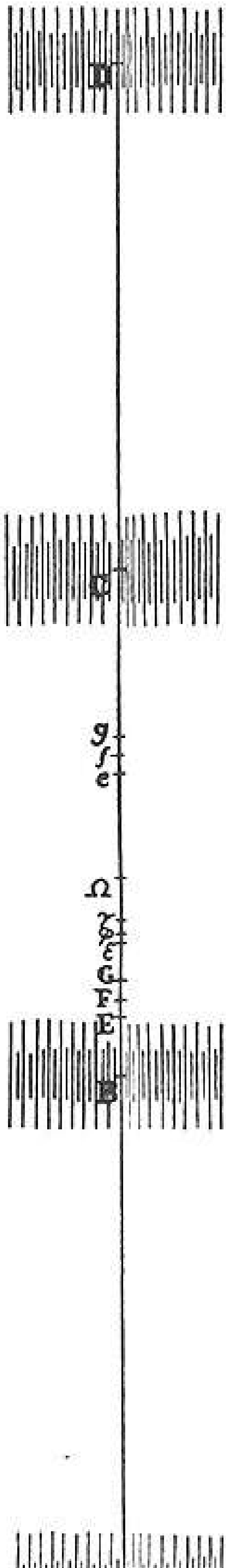
PROPOSICIÓN XLIX. PROBLEMA XI

Dadas la densidad del medio y su fuerza elástica, hallar la velocidad de los impulsos.

Imaginemos que un medio se halla comprimido por un peso superpuesto al modo del de nuestro aire; y sea A la altura de un medio homogéneo y cuyo peso sea igual al peso superpuesto y cuya densidad sea igual a la del medio comprimido en el cual se propagan los impulsos. Supongamos que se construye un péndulo cuya longitud entre el punto de suspensión y el centro de oscilación sea A: y en el tiempo en que dicho péndulo completa una oscilación entera compuesta de ida y vuelta, en ese mismo tiempo el impulso, desplazándose, completará un espacio igual a la circunferencia del círculo descrito con radio A.

Pues, manteniendo las construcciones de la Proposición XLVII, si una línea física cualquiera EF describiendo en cada vibración el espacio PS es urgida en los extremos P y S de cada ida y vuelta por una fuerza elástica igual a su peso, completará dicha línea cada una de sus vibraciones en el tiempo en que oscilaría en una cicloide cuyo perímetro fuese igual a la longitud PS: esto, además, porque fuerzas iguales, en tiempos iguales, empujan a cuerpos iguales a través de espacios iguales. Por lo cual, ya que los tiempos de las oscilaciones son como la raíz cuadrada de la longitud de los péndulos, y la longitud del péndulo es igual a la mitad del arco de la cicloide entera, el tiempo de una vibración será al tiempo de oscilación del péndulo de longitud A como la raíz cuadrada de la longitud ½PS o PO a la longitud A.


S
O
L
n
H
h
M
m
I
i
K
N
l
k
P


g
f
e
Ω
G
F
E

Pero la fuerza elástica por la que la pequeña línea física EG es urgida cuando está en los puntos extremos P, S, era (en la demostración de la Proposición XLVII) a toda su fuerza elástica como HL - KN a V, es decir (por caer ahora el punto K en P) como HK a V: y toda aquella fuerza, o sea, el peso superpuesto con el cual es comprimida la pequeña línea EG, es al peso de la pequeña línea como la altura A del peso superpuesto a la longitud de la pequeña línea EG; y por tanto «*ex aequo*», la fuerza que urge a la pequeña línea EG en los lugares P y S es al peso de dicha línea como HK x A a V x EG, o como PO x A a VV, pues HK era a EG como PO a V. Por tanto, toda vez que los tiempos en los cuales cuerpos iguales son impulsados a través de espacios iguales son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de las fuerzas, el tiempo de una vibración generada por dicha fuerza elástica será al tiempo de vibración generada por la fuerza del peso como la raíz cuadrada de VV a PO x A y, por consiguiente, al tiempo de oscilación de un péndulo de longitud A, como la raíz cuadrada de VV a PO x A y como la raíz cuadrada de PO a A conjuntamente; es decir, como la razón entera de V a A. Pero en el tiempo de una vibración compuesta de ida y vuelta, el impulso desplazándose completa su anchura BC. Luego el tiempo en el cual el impulso recorre el espacio BC es al tiempo de una oscilación compuesta de ida y vuelta como V a A, es decir, como BC a la circunferencia del círculo cuyo radio es A. Pero el tiempo en que el impulso recorre el espacio BC está en la misma razón con respecto al tiempo en que recorre una longitud igual a dicha circunferencia; y por lo mismo, en el tiempo de dicha oscilación el impulso recorre una longitud igual a dicha circunferencia. Q. E. D.

COROLARIO 1. La velocidad de los impulsos es aquella que adquieren los graves cayendo con movimiento igualmente acelerado y describiendo en su caída la mitad de la altura A. Pues en el tiempo de esta caída, cayendo con la velocidad adquirida, el impulso recorre un espacio que será igual a toda la altura A; y por lo tanto, en el tiempo de una oscilación compuesta de ida y vuelta recorrerá un espacio igual a la circunferencia del círculo trazado con radio A: porque el tiempo de caída es al tiempo de oscilación como el radio del círculo a su circunferencia.

COROLARIO 2. De donde, al ser dicha altura A directamente como la fuerza elástica del fluido e inversamente como su densidad, la velocidad de los impulsos estará en razón compuesta de la raíz cuadrada de la densidad, inversamente, y de la raíz cuadrada de la fuerza elástica, directamente.

PROPOSICIÓN L. PROBLEMA XII

Hallar las distancias de los impulsos.

Hállese el número de vibraciones del cuerpo cuya oscilación produce los impulsos en un tiempo dado. Divídase por ese número el espacio que puede recorrer el impulso en ese mismo tiempo y el resultado será la amplitud de un impulso. Q. E. I.

ESCOLIO[14]

Las últimas Proposiciones tienen relación con el movimiento de la luz y de los sonidos. Puesto que la luz se propaga en línea recta no puede consistir en mera acción (por las Proposiciones XLI y XLII). Y los sonidos, en tanto que se producen por cuerpos vibrantes, no son otra cosa que impulsos de aire propagados, por la Proposición XLIII. Se confirma esto por las vibraciones que, si son fuertes y graves, suscitan en los cuerpos inmediatos, como los sonidos de los tambores. Pues las vibraciones rápidas y breves no se excitan con facilidad. Y es bien sabido que cualesquiera sonidos lanzados contra las cuerdas de cuerpos sonoros genera vibraciones. Y también se confirma por la velocidad de los sonidos. Puesto que los pesos específicos del agua de lluvia y del mercurio son entre sí aproximadamente como 1 a $13\frac{2}{3}$, y cuando el mercurio alcanza en el *barómetro* una altura de 30 pulgadas *inglesas*, el peso específico del aire y del agua de lluvia se halla en la relación de 1 a 870 aproximadamente, entonces el peso específico del aire y del mercurio será aproximadamente como 1 a 11 890. Y, por tanto, cuando la altura del mercurio es de 30 pulgadas, la altura de aire uniforme cuyo peso pudiera oprimir a nuestro aire subyacente sería de 356 700 pulgadas, o de 29 725 pies *ingleses*. Y ésta es la altura misma que denominábamos A en la construcción precedente. La circunferencia del círculo descrito con radio de 29 725 pies es de 186 768 pies. Y puesto que un péndulo de $39\frac{1}{5}$ pulgadas de largo completa como es sabido, su oscilación entera de ida y vuelta en el tiempo de dos segundos, un péndulo de $39\frac{1}{5}$ pulgadas de largo completa, como es sabido, su completar una oscilación semejante en un tiempo de $190\frac{3}{4}$ segundos. Por tanto, en ese mismo tiempo el sonido desplazándose completará 186 768 pies, y en el tiempo de un segundo 979 pies.

Por lo demás en este cálculo no se ha tomado en cuenta el grosor de las partículas sólidas de aire a cuyo través el sonido se propaga instantáneamente. Como el peso del aire es al peso del agua como 1 a 870, y las sales son casi dos veces más densas que el agua, si suponemos que las partículas de aire son casi de la misma densidad que las partículas de agua o de sal y la rareza del aire obedece a los intervalos de las partículas, entonces el diámetro de las partículas de aire será al intervalo entre los centros de las partículas como 1 a 9 ó 10 aproximadamente, y al intervalo entre partículas como 1 a 8 ó 9. Por ello, a los 979 pies que el sonido recorrerá en un segundo según el cálculo anterior habrá que añadir $\frac{979}{9}$ pies, o aproximadamente 109 pies, por el grosor de las partículas de aire: y de este modo el sonido, en el tiempo de un segundo, recorrerá aproximadamente 1088 pies.

Añádase a esto que los vapores presentes en el aire, al ser de diferente elasticidad y tono, poco o nada participarán en el movimiento del verdadero aire con el que se propagan los sonidos. Permaneciendo, pues, éstos en reposo, dicho movimiento se propagará por el solo verdadero aire, y esto en razón de la raíz cuadrada de la disminución de materia. De suerte que si la atmósfera constase de diez partes de verdadero aire y una de vapores, el movimiento de los sonidos sería más rápido en razón de la raíz cuadrada de 11 a 10, o casi en la razón entera de 21 a 20, que si se propagase por once partes de aire verdadero: y por ello el movimiento de los sonidos hallado antes ha de aumentarse en esta proporción. Con lo cual el sonido, en el tiempo de un segundo, recorrerá 1142 pies.

Así serán estas cosas en primavera y otoño, cuando al aire templado por el calor se enrarece y su fuerza elástica aumenta un tanto. Pero en invierno, cuando el aire se condensa por el frío y disminuye su fuerza elástica, el movimiento de los sonidos debe ser más lento en razón de la raíz cuadrada de la densidad; y viceversa, en verano debe ser más veloz.

Por otra parte, experimentalmente consta que los sonidos en un segundo recorren más o menos 1142 pies *londinenses* ó 1070 *parisinos*.

Una vez conocida la velocidad de los sonidos se obtienen también los intervalos de los impulsos. El Sr. *Sauveur* halló mediante experimentos hechos por él, que una flauta abierta de más o menos cinco pies *parisinos* de largo producía un sonido del mismo tono que el sonido de una cuerda que vibra cien veces por segundo. Por tanto, en el espacio de 1070 pies *parisinos* que recorre un sonido en un segundo hay más o menos cien impulsos; por lo cual una pulsación ocupa un espacio de casi $10\frac{7}{10}$ pies *parisinos*, es decir, casi el doble de la longitud de la flauta. Por lo que es verosímil que las amplitudes de los impulsos, en los sonidos de todas las flautas abiertas, sea igual a dos veces la longitud de las flautas.

Y por lo demás, está claro por el Corolario de la Proposición XLVII de este libro por qué cesan los sonidos cuando cesa el movimiento del cuerpo sonoro, y no se oyen por más tiempo cuando estamos muy lejos de los cuerpos sonoros que cuando estamos muy cerca. Y por qué los sonidos aumentan tanto en los tubos amplificadores está claro por los principios expuestos. Pues todo movimiento recíproco en cada regreso suele aumentar gracias a la causa generadora. Y el movimiento en los tubos que impiden la dilatación de los sonidos se pierde más tarde y se repite con más fuerza y, por tanto, es incrementado por el nuevo movimiento impreso en cada retorno. Y éstos son los principales fenómenos relativos a los sonidos.

Sección IX
SOBRE EL MOVIMIENTO CIRCULAR DE LOS FLUIDOS

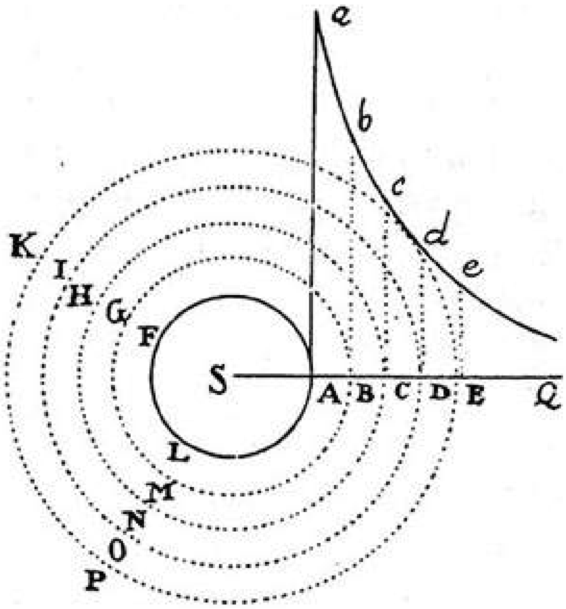
Hipótesis

La resistencia que procede de la falta de lubricidad de las partes de un fluido, en igualdad de condiciones, es proporcional a la velocidad con que las partes del fluido se separan entre sí.

Proposición LI. Teorema XXXIX

Si un cilindro sólido infinitamente largo gira con un movimiento uniforme en torno a su eje de oposición dada en un fluido uniforme e infinito, y por su solo impulsor del fluido es obligado a girar en círculo y cada parte del fluido persevera uniformemente en su movimiento; digo que los tiempos periódicos de las partes del fluido son como sus distancias del eje del cilindro.

Sea AFL un cilindro que era uniformemente en torno de su eje S y mediante los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etcétera, divídase el fluido en innumerables orbes cilíndricos, concéntricos, sólidos y del mismo grosor. Y, puesto que el fluido es homogéneo, las impresiones de unos orbes contiguos en otros (por hipótesis) serán como sus traslaciones respectivas y la superficie sobre la cual recae la impresión. Si una impresión sobre un orbe cualquiera es mayor o menor por la parte cóncava o la parte convexa, prevalecerá la impresión más fuerte, y acelerará o retardará el movimiento del orbe si se dirige hacia el mismo lado o hacia el contrario que el movimiento del mismo orbe. Por tanto, para que cada orbe persevere en su movimiento uniformemente, las impresiones en una y otra parte deben ser iguales entre sí y producirse en direcciones opuestas. Por consiguiente, como las impresiones son como las superficies contiguas y como sus traslaciones respectivas, las traslaciones serán inversamente como las superficies, es decir, inversamente como las distancias de las superficies desde el eje. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como dichas traslaciones aplicadas a las distancias, o como las traslaciones directamente y las distancias inversamente; es decir, conjuntas ambas razones, como el inverso del cuadrado de las distancias. Por lo cual, si sobre cada parte de la recta infinita SABCDEQ se eleva una perpendicular A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., inversamente proporcional a los cuadrados de las propias SA, SB, SC, SD, SE, etc., y por los extremos de esas perpendiculares se imagina trazada una línea curva hiperbólica, las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos angulares totales serán como las sumas correspondientes de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, es decir, si se aumenta el número de orbes y se disminuye su anchura hasta el infinito para que el fluido resulte un medio uniforme, como las áreas hiperbólicas A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a las susodichas sumas. Y los tiempos inversamente proporcionales a los movimientos angulares serán también inversamente proporcionales a estas áreas. Por tanto, el tiempo periódico de una partícula cualquiera D es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir (por las conocidas cuadraturas de curvas) directamente como la distancia SD. Q. E. D.



COROLARIO 1. De aquí que los movimientos angulares de las partículas del fluido sean inversamente como sus distancias al eje del cilindro, y sus velocidades absolutas iguales.

COROLARIO 2. Si un fluido está contenido en un vaso cilíndrico de longitud infinita que contiene en su interior a otro cilindro, y ambos giran en torno al eje común, y los tiempos de revolución son como sus semidiámetros, y cada parte del fluido permanece con su movimiento: los tiempos periódicos de cada parte serán como sus distancias al eje de los cilindros.

COROLARIO 3. Si a un cilindro y a un fluido movidos de este modo se les añade o quita algún movimiento angular común, puesto que con este nuevo movimiento no se altera el rozamiento mutuo de las partes del fluido, los movimientos de las partes entre ellas no sufrirán alteración. Porque las traslaciones de las partes entre ellas dependen del rozamiento. Una parte cualquiera perseverará en aquel movimiento que, al aplicar el rozamiento por ambas partes y en sentidos contrarios, no se acelere más que se retarde.

COROLARIO 4: De donde, si a todo el sistema de cilindros y fluido se le suprime todo el movimiento angular del cilindro exterior, se tendrá el movimiento del fluido en el cilindro en reposo.

COROLARIO 5. Si permanecen en reposo el cilindro y el fluido exteriores mientras el cilindro interior gira uniformemente, se comunicará el movimiento circular al fluido y poco a poco se propagará a todo el fluido; y no dejará de aumentar hasta que cada parte del fluido adquiera el movimiento definido en el Corolario cuarto.

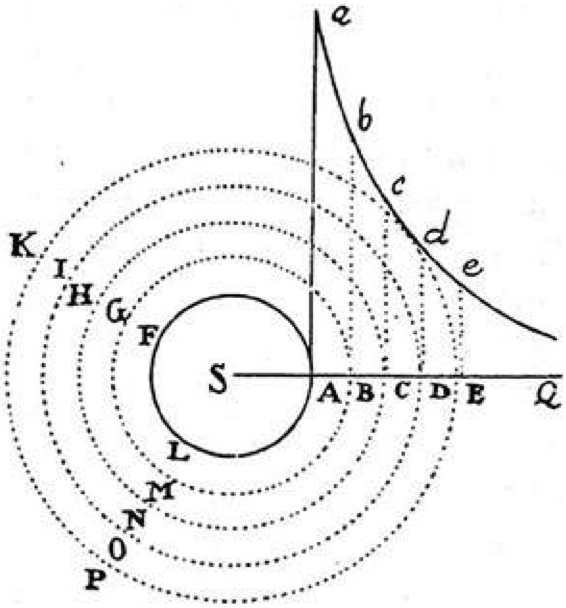
COROLARIO 6. Y puesto que el fluido intenta propagar su movimiento hasta más allá, el cilindro exterior se pondrá a girar por causa de aquel empuje, salvo que se le detenga por la fuerza; y su movimiento se irá acelerando hasta que los tiempos periódicos de ambos cilindros sean iguales entre ellos. Pero si el cilindro exterior se frenase violentamente, este tratará de retardar el movimiento del fluido; y salvo que el cilindro interior conserve su movimiento mediante alguna fuerza impresa desde fuera, acabará por hacerlo cesar poco a poco.

Todo esto se puede experimentar en agua profunda estancada.

PROPOSICIÓN LII. TEOREMA XL[15]

Si una esfera sólida gira con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada en un fluido uniforme e infinito y el fluido es obligado a girar por el solo impulso de la esfera, y cada parte del fluido persevera en su movimiento uniforme: digo que los tiempos periódicos de las partes del fluido serán como los cuadrados de las distancias al centro de la esfera.

CASO 1. Sea AFL una esfera girando uniformemente en torno al eje S y con los círculos concéntricos BGM, CHN, DIO, EKP, etc., divídase el fluido en innumerables orbes concéntricos de igual grosor. Supongamos que dichos orbes fuesen sólidos; y, al ser el fluido homogéneo, las impresiones mutuas de los orbes contiguos serán (por hipótesis) como sus traslaciones respectivas y las superficies contiguas sobre las que ocurren las impresiones. Si la impresión sobre un orbe cualquiera fuese mayor o menor por la parte cóncava o por la convexa, prevalecerá la impresión mayor, y la velocidad del orbe se acelerará o se retardará, según se dirija hacia la dirección del movimiento o hacia la dirección contraria. Por consiguiente, para que cada orbe persevere en su movimiento uniformemente, las impresiones de una y otra parte deberán igualarse entre sí y producirse en direcciones contrarias. De donde, puesto que las impresiones son como las superficies contiguas y sus traslaciones respectivas, las traslaciones serán inversamente como las superficies, es decir, como el inverso del cuadrado de la distancia de las superficies al centro. Pero las diferencias de los movimientos angulares en torno al eje son como estas traslaciones aplicadas a las distancias, o directamente como las traslaciones e inversamente como las distancias; es decir, juntas ambas razones, como el inverso del cubo de las distancias. Por lo cual, si sobre cada parte de la recta infinita SABCDEQ se elevan las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., inversamente proporcionales a los cubos de las propias SA, SB, SC, SD, SE, etc., las sumas de las diferencias, es decir, los movimientos angulares totales serán como las correspondientes sumas de las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, etc., es decir (si para obtener un medio uniformemente fluido se aumenta el número de órbitas y se disminuye su grosor hasta el infinito) como las áreas hiperbólicas. A*a*Q, B*b*Q, C*c*Q, D*d*Q, E*e*Q, etc., análogas a dichas sumas. Y los tiempos periódicos inversamente proporcionales a los movimientos angulares serán también inversamente proporcionales a esas arcas. Por consiguiente, el tiempo periódico de un orbe cualquiera DIO es inversamente proporcional al área D*d*Q, es decir, por las va conocidas cuadraturas de las curvas, directamente proporcional al cuadrado de la distancia SD. Que es lo primero que quería demostrar.



CASO 2. Desde el centro de la esfera trácense muchas rectas indefinidas que formen con el eje ángulos dados y que se superen unos a otros con diferencias iguales; e imagínese que con los giros de estas rectas en torno al eje los orbes son cortados en innumerables anillos; y cada anillo tendrá cuatro anillos contiguos, uno por dentro, otro por fuera y dos a los lados. Con el rozamiento de los anillos interior y exterior un anillo cualquiera no puede ser urgido igualmente hacia direcciones contrarias, salvo que el movimiento se atenga a la ley del caso primero. Esto se sigue de la demostración del primer caso. Y por tanto, una serie cualquiera de anillos que se aleje en línea recta del globo hasta el infinito, se moverá de acuerdo con la ley del caso primero, salvo que se lo impida el rozamiento de los anillos laterales. Pero en un movimiento realizado según la susodicha ley el rozamiento de los anillos laterales es nulo y por lo mismo en nada impedirá al movimiento realizado de acuerdo con la

dicha ley. Si los anillos equidistantes del centro girasen más velozmente o más lentamente en los polos que en la eclíptica, los más lentos se acelerarán y los más veloces se retardarán gracias al mutuo rozamiento y así los tiempos periódicos siempre llegarán a ser iguales, de acuerdo con la ley del primer caso. Por consiguiente, este rozamiento no impedirá que el movimiento se realice de acuerdo con la ley del caso primero y, por tanto, dicha ley se cumplirá: es decir, los tiempos periódicos de cada anillo serán como los cuadrados de sus distancias al centro del globo. Que es lo que quería demostrar en segundo lugar.

CASO 3. Divídase ahora cada anillo, mediante secciones transversales, en innumerables partículas que constituyan una sustancia total y uniformemente fluida, y como estas secciones no afectan a la ley del movimiento circular sino que sirven solamente para la constitución del fluido, el movimiento circular perseverará como antes. Con estas secciones los minúsculos anillos no cambiarán su aspereza y su rozamiento mutuo, o lo cambiarán todos por igual. Y permaneciendo la proporción de las causas permanecerá la proporción de los efectos, es decir, la proporción de los movimientos y de los tiempos periódicos. Q. E. D. Por lo demás, como el movimiento circular, y la fuerza centrífuga nacida del mismo, es mayor en la eclíptica que en los polos, tendrá que haber una causa por la cual cada partícula se mantenga siempre en su círculo, para que la materia que se halla en la eclíptica no se aparte continuamente del centro y por la parte exterior del vórtice se vaya hasta los polos y desde allí a través del eje regrese a la eclíptica en una suerte de circulación continua.

COROLARIO 1. Por lo tanto, los movimientos angulares de las partes del fluido en torno al eje del globo son inversamente proporcionales al cuadrado de las distancias al centro del globo y las velocidades absolutas son inversamente proporcionales a esos cuadrados aplicados a las distancias al eje.

COROLARIO 2. Si un globo gira en un fluido en reposo, uniforme e infinito, con movimiento uniforme en torno a un eje de posición dada, comunicará el movimiento al fluido en forma de vórtice, y dicho movimiento se propagará poco a poco hasta el infinito; y no dejarán de acelerarse las distintas partes del fluido hasta que los tiempos periódicos de cada una no sean como los cuadrados de sus distancias al centro del globo.

COROLARIO 3. Puesto que las partes interiores del vórtice rozan y urgen a las partes exteriores y les comunican continuamente el movimiento con dicha acción, a la vez que esas exteriores transfieren esa misma cantidad de movimiento a otras todavía más exteriores y con esa acción conservan invariante su propia cantidad de movimiento; es evidente que el movimiento es transferido continuamente desde el centro hacia la circunferencia del vórtice y es absorbido por la infinitud de la circunferencia. La materia contenida entre dos superficies esféricas cualesquiera concéntricas al vórtice jamás se acelerará, por cuanto que transfiere siempre todo el movimiento recibido de la materia interior hacia la exterior.

COROLARIO 4. Por lo tanto, para que un vórtice conserve continuamente el mismo estado de movimiento, es necesario algún principio activo del cual reciba el globo continuamente la misma cantidad de movimiento que transfiere hacia la materia. En ausencia de tal principio es necesario que el globo y las partes interiores del vórtice, al estar propagando siempre su movimiento hacia el exterior sin recibir ningún otro movimiento nuevo, acaben por retardarse poco a poco y dejen de girar.

COROLARIO 5. Si otro globo se situase en este vórtice a una cierta distancia del centro girando con una fuerza continuamente en torno a un eje de inclinación dada, su movimiento arrastraría al fluido en forma de vórtice: y primeramente este nuevo y pequeño vórtice girará a la vez que el globo en torno al centro del otro y mientras tanto su movimiento se irá alejando propagándose poco a poco hasta el infinito, al igual que el del vórtice primero. Y por la misma razón por la que el movimiento de este globo era arrastrado por el movimiento del otro, el movimiento del otro será ahora arrastrado por el movimiento de éste, de suerte que ambos globos girarán en torno a un cierto punto intermedio, alejándose uno de otro a causa de dicho movimiento circular, salvo que alguna fuerza se lo impida. Después, si cesasen las fuerzas constantes impresas, gracias a las cuales los globos perseveran en sus movimientos, y todo se remitiese a las leyes mecánicas, el movimiento de los globos iría languideciendo poco a poco (por las razones dadas en los Corolarios 3 y 4) hasta que junto con los vórtices queden finalmente en reposo.

COROLARIO 6. Si varios globos girasen continuamente en lugares dados en torno a ejes de posición dada y con unas velocidades determinadas, surgirían otros tantos vórtices expandiéndose hasta el infinito. Pues por la misma razón que un globo cualquiera propaga su movimiento hasta el infinito, cualquier otro globo propagará también su movimiento hasta el infinito, hasta que cada parte del fluido infinito se halle agitada por el movimiento resultante de las acciones de todos los globos. Por lo cual, no se podrán definir los vórtices con límites ciertos, sino que poco a poco se desplazarán entre ellos; y los globos por las mutuas interacciones de los vórtices cambiarán continuamente de lugar, como se ha explicado en el Corolario anterior; y tampoco conservarán entre ellos una posición determinada, salvo que alguna fuerza los retenga. Y al cesar las fuerzas impresas constantes sobre los globos gracias a las cuales conservaban sus movimientos, la materia, por las razones dadas en los Corolarios 3 y 4, entrará en reposo poco a poco y dejará de girar en vórtice.

COROLARIO 7. Si un fluido semejante estuviese contenido en un vaso esférico y, por la rotación uniforme de un globo situado en el centro, se le hiciese girar en un vórtice, mientras el globo y el vaso giran hacia el mismo lado sobre un mismo eje y sus tiempos periódicos son como los cuadrados de los semidiámetros: las partes del fluido no perseverarán en sus movimientos sin aceleración o retardación más que hasta que sus tiempos periódicos sean como los cuadrados de las distancias al centro del vórtice. Y ninguna otra constitución del vórtice puede ser permanente.

COROLARIO 8. Si el vaso, el fluido contenido y el globo conservan este movimiento y además girasen con un movimiento angular común en torno a un eje dado, puesto que con este nuevo movimiento no se cambia el rozamiento de las partes del fluido entre ellas, tampoco se cambiarán los movimientos de las partes entre ellas. Pues las traslaciones de las partes entre ellas dependen del rozamiento. Cada parte perseverará en aquel movimiento que resulta de no estar más retardada por el rozamiento de un lado que acelerada por el rozamiento del otro lado.

COROLARIO 9. Por consiguiente, si el vaso está en reposo y el movimiento del globo está dado, estará dado el movimiento del fluido. Pues, imaginemos un plano que pase por el eje del globo y que gire en sentido contrario, y supongamos que la suma del tiempo de revolución de este plano y del tiempo de revolución del globo fuese al tiempo de revolución del globo como el cuadrado del semidiámetro del vaso al cuadrado del semidiámetro del globo: entonces los tiempos periódicos de las partes del fluido con respecto a dicho plano serán como los cuadrados de sus distancias al centro del globo.

COROLARIO 10. Por consiguiente, si el vaso gira en torno al mismo eje que el globo o alrededor de otro distinto con una velocidad dada, estará dado el movimiento del fluido. Porque si al sistema completo se le resta el movimiento angular del vaso, todos los movimientos permanecerán entre ellos los mismos que antes, por el Corolario 8. Y estos movimientos, por el Corolario 9, estarán dados.

COROLARIO 11. Si el vaso y el fluido están en reposo mientras que el globo gira con movimiento uniforme, el movimiento se propagará poco a poco por todo el fluido hacia el vaso, y pondrá en giro al vaso salvo que se le detenga por la fuerza, y no dejarán ni vaso ni fluido de acelerarse hasta que sus tiempos periódicos lleguen a ser iguales a los tiempos periódicos del globo. Pero si el vaso es detenido por una fuerza o gira con un movimiento constante y uniforme, el medio paulatinamente llegará al estado de movimiento establecido en los Corolarios 8, 9 y 10, y nunca permanecerá en otro estado cualquiera. Pero si después cesasen aquellas fuerzas con las cuales el vaso y el globo giran con movimientos determinados, y el sistema entero queda remitido a las leyes mecánicas, el vaso y el globo actuarán uno sobre otro por medio del fluido y no dejarán de propagar sus movimientos uno hacia otro a través del fluido hasta que sus tiempos periódicos sean iguales entre sí y el sistema entero gire a la vez al modo de un único cuerpo sólido.

ESCOLIO

En todo esto doy por supuesto que el fluido consta de una materia uniforme en cuanto a densidad y fluidez. Es así aquel en que el mismo globo, con el mismo movimiento, en el mismo espacio de tiempo, podría propagar movimientos semejantes e iguales, siempre a distancias iguales, donde quiera que el globo se halle situado. Ciertamente la materia, con su movimiento circular, trata siempre de apartarse del eje del vórtice y, por lo mismo, presiona siempre a la materia siguiente.

De esta presión nace un mayor rozamiento de las partes y mayor dificultad para su mutua separación y, por consiguiente, disminuye la fluidez de la materia. Además, si partes del fluido son más gruesas en algún sitio o mayores, la fluidez será allí menor, por ser menores en número las superficies en las cuales las partes se separarían entre ellas. En tales casos supongo que la deficiencia de fluidez se compensa con la lubricación de las partes o la lisura u otra condición cualquiera. De no ser así, la materia cuando es menos fluida se cohesionará más, será más lenta y recibirá por ello con mayor lentitud el movimiento y lo propagará más que en la razón establecida más arriba. Si la figura del vaso no fuese esférica, las partículas se moverán en líneas no circulares sino adaptadas a la figura del vaso y los tiempos periódicos serán como los cuadrados de las distancias medias al centro muy aproximadamente. En los lugares más amplios entre el centro y la circunferencia los movimientos serán más lentos y más rápidos donde son más angostos, y las partículas más rápidas tampoco tenderán hacia la circunferencia. Pues describen arcos menos curvos y el intento de separarse del centro no disminuye menos por el decremento de esta curvatura de lo que aumenta por el incremento de la velocidad. Al salir de los espacios más angostos a los más amplios se alejan un poco del centro pero con este retroceso se retardan, y pasando después de los más amplios a los más angostos se acelerarán, y así cada partícula se retardará y se acelerará alternativamente de modo continuo. Esto es así en un vaso rígido. Pues en un fluido infinito la constitución de vórtices se atiene al Corolario sexto de esta Proposición.

He tratado de investigar en esta Proposición las propiedades de los vórtices con el fin de ensayar la posibilidad de explicar de semejante modo los fenómenos celestes. Pues un fenómeno es que los tiempos periódicos de los planetas que giran en torno a Júpiter son como la potencia $^3/_2$ de su distancia al centro de Júpiter; y la misma regla vale para los planetas que giran en torno al Sol. Se cumplen estas reglas en unos y otros planetas con la mayor exactitud, hasta donde las observaciones astronómicas han podido llegar. Y por lo mismo, si dichos planetas fuesen arrastrados por vórtices que girasen en torno a Júpiter y al Sol, también deberían estos vórtices atenerse a esta ley. Pero los tiempos periódicos de las partes del vórtice han resultado estar en razón del cuadrado de las distancias al centro del movimiento y dicha razón no puede disminuirse ni reducirse a la razón de la potencia $^3/_2$ a no ser que la materia del vórtice sea más fluida cuanto más alejada del centro, o que la resistencia debida a la falta de lubrificación de las partes del fluido, por el aumento de la velocidad con la cual las partes del fluido se separan entre ellas, aumente en mayor proporción que aquella con que aumenta la velocidad. Nada de lo cual parece razonable. Las partes más gruesas y menos fluidas tenderán hacia la circunferencia, salvo que graviten hacia el centro; y, aunque propuse al principio de esta Sección para facilidad de las demostraciones la hipótesis de que la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es verosímil, sin embargo, que dicha resistencia se halle en una proporción respecto a la velocidad menor que ésa. Supuesto esto, los tiempos periódicos de las partes del vórtice estarán en una razón mayor que la del cuadrado de las distancias al centro del mismo. Y si los vórtices (como algunos creen) se mueven más rápidamente cerca del centro, después más lentamente hasta un límite, y de nuevo más rápidamente cerca de la circunferencia, en verdad que ni la razón de la potencia $^3/_2$ ni otra alguna cierta y determinada puede hallarse. Que vean pues los filósofos de qué manera podría explicarse mediante vórtices el susodicho fenómeno de la razón de la potencia $^3/_2$.

PROPOSICIÓN LIII. TEOREMA XLI

Los cuerpos que arrastrados por un vórtice giran en órbita, tienen la misma densidad que el vórtice y se mueven bajo la misma ley que sus partes en cuanto a velocidad y dirección del recorrido.

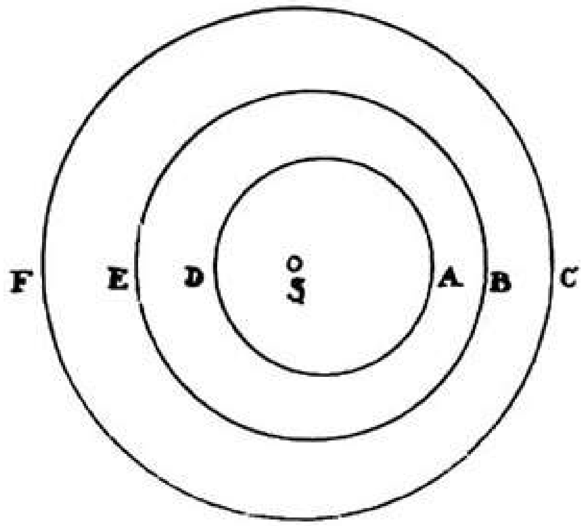
Pues si suponemos que una pequeña parte del vórtice, cuyas partículas o puntos físicos conservan entre ellos una situación dada, se congelase, dicha parte, por cuanto que ni en su densidad, ni en su fuerza ínsita, ni en su figura sufre cambio alguno, se moverá con la misma ley que antes; y al contrario, si una parte congelada y sólida del vórtice es de la misma densidad que el resto del mismo, y se convierte en fluido, se moverá con la misma ley que antes, salvo en la medida en que sus partículas ahora hechas fluidas se muevan entre ellas. Pero despreciando el movimiento de las partículas entre ellas, como si no afectase al movimiento total de progresión en nada, el movimiento total será el mismo que antes. Y el movimiento será el mismo que el de las otras partes del vórtice equidistantes del centro por cuanto que el sólido resuelto en fluido se convierte en parte del vórtice semejante a las demás partes del mismo. Luego el sólido, si es de la misma densidad que la materia del vórtice, se moverá con el mismo movimiento que las partes de éste, permaneciendo en reposo relativo respecto a la materia que lo rodea. Si fuese más denso, entonces ya tratará de alejarse más que antes del centro del vórtice, y por ello superando ahora a la fuerza del vórtice la cual lo retenía antes en su órbita como si estuviese en equilibrio, se alejará del centro y girando describirá una espiral, sin volver ya más a su órbita. Y por la misma razón, si fuese más raro se acercará al centro. Por tanto, no regresará a la misma órbita salvo que sea de la misma densidad que el fluido. Y en ese caso ya se ha mostrado que girará con la misma ley que las partes del fluido equidistantes del centro del vórtice. Q. E. D.

COROLARIO 1. Luego un sólido que gira en un vórtice y vuelve siempre a la misma órbita reposa relativamente en el fluido en el que flota.

COROLARIO 2. Y si el vórtice es de densidad uniforme el mismo cuerpo puede girar a cualquier distancia del centro del vórtice.

Escolio

Por esto, es evidente que los planetas no son arrastrados por vórtices corpóreos. Pues los planetas, de acuerdo con la hipótesis de Copérnico, arrastrados en torno al Sol giran en elipses que tienen su foco en el Sol, y con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos. Pero las partes de los vórtices no pueden girar con un movimiento semejante. Representen AD, BE, CF, tres órbitas descritas en torno al Sol S, de las cuales, la exterior CF sea un círculo concéntrico con el Sol, y los afelios de las dos interiores sean A, B y los perihelios D, E. Luego un cuerpo que gire en la órbita CF al describir con un radio trazado al Sol áreas proporcionales a los tiempos, se moverá con un movimiento uniforme. Mientras que el cuerpo que gire en la órbita BE se moverá más lentamente en el afelio B y más velozmente en el perihelio E, según las leyes astronómicas; mientras que, según las leyes mecánicas, la materia del vórtice en el espacio más angosto entre A y C habrá de moverse más velozmente que en el espacio más ancho entre D y F; es decir, en el afelio más velozmente que en el perihelio. Cosas estas dos que se contradicen. Así, al comienzo del signo Virgo, donde ahora se halla el afelio de Marte, la distancia entre las órbitas de Marte y Venus es a la distancia entre las mismas órbitas al principio del signo Piscis casi como tres a dos, y por tanto la materia del vórtice entre dichas órbitas al principio de Piscis debe ser más veloz que al principio de Virgo en razón de tres a dos. Pues cuanto más estrecho es el espacio por el cual pasa la misma cantidad de materia en el mismo tiempo de una revolución, con tanta mayor velocidad debe pasar. Por consiguiente, si la Tierra reposando relativamente en esta materia celeste es arrastrada por ella y girase en torno al Sol junto con ella, su velocidad al principio de Piscis sería a su velocidad al principio de Virgo en razón de tres a dos. De donde, el movimiento diurno aparente del Sol al principio de Virgo sería superior a setenta minutos; y al principio de Piscis inferior a los cuarenta y ocho. Pero, puesto que (testigo la experiencia) dicho movimiento aparente del Sol es mayor al principio de Piscis que al principio de Virgo, por eso la Tierra es más veloz al principio de Virgo que al principio de Piscis. De suerte que la hipótesis de los vórtices está en total desacuerdo con los fenómenos y no lleva tanto a explicar cuanto a perturbar los movimientos celestes. Pero, sobre el modo de entender cómo se efectúan estos movimientos sin vórtices en espacios libres puede verse el Libro primero, y de manera más completa se mostrará ahora en el Sistema del Mundo.


F
E
D
S
A
B
C

Libro tercero

SOBRE EL SISTEMA DEL MUNDO

He ofrecido en los Libros anteriores principios de filosofía, aunque no tanto filosóficos cuanto meramente matemáticos, a partir de los cuales tal vez se pueda disputar sobre asuntos filosóficos. Tales son las leyes y condiciones de los movimientos y las fuerzas, que en gran medida atañen a la filosofía. Sin embargo, para que no parezcan estériles, los he ilustrado con algunos Escolios filosóficos en los que he tratado sobre aquellas cosas que son más generales y en las cuales la filosofía parece hallar mayor fundamento, tales como la densidad y resistencia de los cuerpos, los espacios vacíos de cuerpos y el movimiento de la luz y de los sonidos. Nos falta mostrar, a partir de estos mismos principios, la constitución del sistema del mundo. Sobre esto había compuesto un tercer libro según un método popular para que fuese leído por muchos. Pero quienes no hubiesen comprendido suficientemente los principios propuestos, escasamente comprenderían la fuerza de los argumentos y tampoco abandonarían los prejuicios en los cuales andaban instalados desde muchos años atrás: por lo cual, para que el tema no entrase en controversias, trasladé la suma de aquel libro a proposiciones, al estilo matemático, de suerte que sean leídas por sólo aquellos que antes hubiesen manejado los principios. Pero, dado que allí aparecen muchas proposiciones que hasta para un lector matemáticamente documentado podrían significar una gran demora, no pido a nadie que las estudie todas; será suficiente para cualquiera leer las definiciones, las leyes de los movimientos y las tres primeras secciones del Libro primero con atención, y pasar después a este Libro sobre el sistema del mundo, y consultar según le parezca las restantes proposiciones de los libros anteriores citadas en éste.

REGLAS PARA FILOSOFAR[1]

Regla Primera

No deben admitirse más causas de las cosas naturales que aquellas que sean verdaderas y suficientes para explicar sus fenómenos.

Ya dicen los filósofos: la naturaleza nada hace en vano, y vano sería hacer mediante mucho lo que se puede hacer mediante poco. Pues la Naturaleza es simple y no derrocha en superfluas causas de las cosas.

Regla II

Por ello, en tanto que sea posible, hay que asignar las mismas causas a los efectos naturales del mismo género.

Como en el caso de la respiración en el hombre y en el animal; de la caída de las piedras en *Europa* y en *América*; de la luz en el fuego de la cocina y en el Sol; de la reflexión de la luz en la Tierra y en los planetas.

Regla III

Han de considerarse cualidades de todos los cuerpos aquellas que no pueden aumentar ni disminuir y que afectan a todos los cuerpos sobre los cuales es posible hacer experimentos.

Pues las cualidades de los cuerpos sólo mediante experimentos se esclarecen, y por lo mismo se han de establecer como generales cuantas cuadran generalmente con los experimentos; y aquellas que no pueden disminuir, tampoco pueden ser suprimidas. Ciertamente no hay que fantasear temerariamente sueños en contra de la seguridad de los experimentos, ni alejarse de la analogía de la naturaleza, toda vez que ella suele ser simple y congruente consigo misma. La extensión de los cuerpos no se nos revela si no es por los sentidos, y no se siente por todos, pero como concierne a todos los sensibles, se atribuye universalmente. Experimentamos que muchos cuerpos son duros. Pero la dureza del todo se origina de la dureza de las partes, y de aquí concluimos con razón que son duras las partículas indivisas no sólo de los cuerpos que sentimos sino también las de todos los demás. Que todos los cuerpos son impenetrables lo inferimos no de la razón sino de la sensación. Los cuerpos que manejamos resultan ser impenetrables, y de aquí concluimos que la impenetrabilidad es una propiedad de todos los cuerpos. Inferimos que todos los cuerpos son móviles y perseveran en reposo o en movimiento gracias a ciertas fuerzas (que llamamos fuerzas de inercia) a partir de estas propiedades de los cuerpos observados. La extensión, la dureza, la impenetrabilidad, la movilidad y la fuerza de inercia del todo surgen de la extensión, dureza, impenetrabilidad, movilidad y fuerza de inercia de las partes: y de ahí concluimos que todas las partes mínimas de todos los cuerpos son extensas, duras, impenetrables, móviles y dotadas de fuerza de inercia. Y este es el fundamento de toda la filosofía. Además, hemos visto por los fenómenos, que las partes divididas de los cuerpos y contiguas entre sí pueden separarse unas de otras y que las partes indivisas pueden dividirse con la razón en partes menores es cierto por la matemática. En cambio, si esas partes distinguidas matemáticamente, pero no divididas todavía, pudieran dividirse y separarse unas de otras mediante fuerzas naturales, es cosa incierta. Pero, aunque solamente constase por un solo experimento que una partícula indivisa sufriese una división al romper un cuerpo duro y sólido, concluiremos, en virtud de esta regla, que no sólo serían separables las partes divididas, sino también que las indivisas podrían ser divididas hasta el infinito.

Finalmente, si mediante experimentos y observaciones astronómicas consta universalmente que todos los cuerpos alrededor de la Tierra gravitan hacia ella, y esto según la cantidad de materia contenida en cada uno, que la Luna gravita hacia la Tierra según su cantidad de materia, y viceversa que nuestro mar gravita hacia la Luna, que todos los planetas gravitan mutuamente entre sí y que la gravedad de los cometas hacia el Sol es similar, habrá que decir, en virtud de esta regla, que todos los cuerpos gravitan entre sí. E incluso será más fuerte el argumento sobre la gravedad universal a partir de los fenómenos, que sobre la impenetrabilidad de los cuerpos: ya que de ésta no tenemos ninguna experiencia en los cuerpos celestes y tampoco observación alguna. Sin embargo no afirmo en absoluto que la gravedad sea esencial a los cuerpos. Por fuerza ínsita entiendo solamente la fuerza de inercia. Esta es inmutable. La gravedad disminuye al alejarse de la Tierra.

Regla IV

Las proposiciones obtenidas por inducción a partir de los fenómenos, pese a las hipótesis contrarias, han de ser tenidas, en filosofía experimental, por verdaderas *exacta o muy aproximadamente, hasta que aparezcan otros fenómenos que las hagan o más exactas o expuestas a excepciones.*

Debe hacerse esto para evitar que el argumento de inducción sea suprimido por las hipótesis.

FENÓMENO PRIMERO[2]

Los planetas circunjoviales con radios trazados al centro de Júpiter describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus tiempos periódicos, estando en reposo las restrellas fijas, están en razón de las distancias a los centros elevadas a la potencia $^{3}/_{2}$.

Consta por las observaciones astronómicas. Las órbitas de estos planetas no se diferencian sensiblemente de círculos concéntricos con Júpiter, y sus movimientos se perciben uniformes en dichos círculos. Y los astrónomos coinciden en que los tiempos periódicos se hallan en razón de la potencia $^{3}/_{2}$ de los semidiámetros de las órbitas; lo cual también se hace patente por la tabla siguiente.

Tiempos periódicos de los satélites de Júpiter

$1^{d}18^{h}27' \, 34''$; $3^{d}13^{h}13' \, 42''$; $7^{d}3^{h}42' \, 36''$; $16^{d}16^{h}32' \, 9''$

Distancias de los satélites al centro de Júpiter.

***Según observaciones de*:**	1	2	3	4	
Borelli	$5^{2}/_{3}$	$8^{2}/_{3}$	14	$24^{2}/_{3}$	***Semidiámetros de Júpiter***
Townly, *con micrómetro*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini, *con telescopio*	5	8	13	23	
Cassini, *por el eclipse de los satélites*	$5^{2}/_{3}$	9	$14^{23}/_{60}$	$25^{3}/_{10}$	
Según los tiempos periódicos…	5,667	9,017	14,384	25.299	

Con excelentes micrómetros el Sr. *Pound* ha logrado determinar la elongación de los satélites de Júpiter y el diámetro de éste del modo siguiente. La máxima elongación heliocéntrica del cuarto satélite desde el centro de Júpiter se tomó con micrómetro en un telescopio de quince pies de largo, y resultó ser a la distancia media entre la Tierra y Júpiter de aproximadamente 8′, 16″. La del tercer satélite se tomó con micrómetro en un telescopio de 123 pies de largo y resultó a la misma distancia entre la Tierra y Júpiter de 4′ . 42″. Las elongaciones máximas de los otros satélites a esa misma distancia entre la Tierra y Júpiter resultan ser por los tiempos periódicos de 2′ 56″ 47‴ y de 1′ . 51″ . 6‴.

El diámetro de Júpiter que se ha tomado muchas veces con micrómetro en un telescopio de 123 pies de largo y reducido a la distancia media entre la Tierra y Júpiter o éste y el Sol nunca ha sido mayor de 40″ ni menor que 38″ y lo más frecuente de 39″. En telescopios más pequeños este diámetro es de 40″ o de 41″. Pues la luz de Júpiter, debido a la refrangibilidad desigual, se dilata un poco, y esta dilatación está en una razón menor respecto al diámetro de Júpiter en los telescopios más largos y perfectos que en los más cortos e imperfectos. Los tiempos en los cuales los dos satélites primero y tercero discurrían por el cuerpo de Júpiter, desde el comienzo de la entrada hasta comienzo de la salida y desde la entrada completa hasta la salida completa fueron observados gracias al mismo telescopio más largo. Y el diámetro de Júpiter a su distancia media de lai Tierra resultó por el paso del primer satélite de 37⅛″ y por el tránsito del tercero de 37⅜″. También se observó el tiempo de tránsito de la sombra del primer satélite por el cuerpo de Júpiter y de ello resulta un diámetro de Júpiter a su distancia media de la Tierra de casi 37″. Supongamos que su diámetro sea muy aproximadamente de 37¼″, y las elongaciones máximas de los satélites primero, segundo, tercero y cuarto serán respectivamente iguales a 5,965; 9,494; 15,141 y 26,63 semidiámetros de Júpiter.

Fenómeno II

Los planetas circunsaturnales con radios trazados al centro de Saturno describen áreas proporcionales a los tiempos, y sus tiempos periódicos, estando en reposo las estrellas fijas, están en razón de la potencia $^3/_2$ de las distancias; al centro del mismo.

Efectivamente, *Cassini* estableció en sus observaciones las distancias de aquéllos al centro de Saturno y los tiempos periódicos del modo siguiente:

Tiempos periódicos de los satélites de Saturno.

$1^d. 21^h. 18' . 27''$; $2^d. 17^h. 41'' . 22''$; $4^d. 12^h. 25' . 12''$; $15^d. 22^h. 41' . 14''$; $79^d. 7^h. 48' . 00''$.

Distancias de los satélites al centro de Saturno en semidiámetros del anillo

Por observaciones …………………………………	$1^{19}/_{20}$	2½	3½	8	24
Por los tiempos periódicos ………………………………	1,93	2,47	3,45	8	23,35

La máxima elongación del cuarto satélite desde el centro de Saturno he inferido de las observaciones que suele ser de aproximadamente ocho semidiámetros. Pero la máxima elongación de este satélite desde el centro de Saturno tomada con el mejor micrómetro en el telescopio de *Huygens* de 123 pies de largo resultó de 8,7 semidiámetros. Y de esta observación y de los tiempos periódicos, las distancias resultantes de los satélites hasta el centro de Saturno en semidiámetros de anillo son 2,1. 2,69. 3,75. 8,7 y 25,35. En el mismo telescopio el diámetro de Saturno era al diámetro del anillo como 3 a 7, y el diámetro del anillo los días 28 y 29 de mayo de 1719 resultaba de 43″. Y por lo mismo, el diámetro del anillo a la distancia media de la Tierra y Saturno es de 42″ y el diámetro de Saturno de 18″. Esto es así en los telescopios más largos y mejores, por cuanto que las magnitudes aparentes de los cuerpos celestes en los telescopios más largos tienen mayor proporción respecto a la dilatación de la luz en los extremos de dichos cuerpos que en los más cortos. Si se eliminase toda la luz difusa, el diámetro de Saturno no será mayor de 16″.

Fenómeno III

Los cinco planetas primarios, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, ciñen con sus órbitas al Sol.

Que Mercurio y Venus giran en torno al Sol se demuestra por sus fases lunares. Cuando brillan con la faz llena se hallan situados al otro lado del Sol; cuando muestran media faz se hallan a la altura del Sol, y cuando su faz es anular se hallan más acá del Sol, pasando a veces por su disco en forma de manchas. También de la faz plena de Marte junto a la conjunción con el Sol y curvada en las cuadraturas se sigue con certeza que gira en torno al Sol. Lo mismo se infiere también respecto a Júpiter y a Saturno a partir de sus fases siempre llenas: pues, que éstos brillan con luz participada del Sol está claro gracias a las sombras de los satélites proyectadas sobre ellos.

Fenómeno IV

Supuestas en reposo las estrellas fijas, los tiempos periódicos de los cinco planetas primarios y el del Sol en torno a la Tierra o de la Tierra en torno al Sol están en razón de la potencia $^3/_2$ *de las distancias medias al Sol.*

Esta razón hallada por *Kepler* está reconocida por todos. Enes, los tiempos periódicos son los mismos y las magnitudes de las órbitas las mismas tanto si el Sol gira en torno a la Tierra como si la Tierra gira en torno al Sol. Y sobre la medida de los tiempos periódicos hay acuerdo entre todos los astrónomos. *Kepler* y *Boulliau* determinaron mediante observaciones las magnitudes de todas las órbitas con la mayor precisión: y las distancias medias correspondientes a los tiempos periódicos no difieren sensiblemente de las distancias que ellos hallaron, y a lo sumo son intermedias entre ellas, como se puede ver en la tabla siguiente.

Tiempos periódicos de los planetas y de la Tierra en torno al Sol en relación con las estrellas fijas, en días y décimas de día.

♄	♃	♂	♁	♀	☿
10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,96

Distancias medias de los planetas y la Tierra al Sol.

	♄	♃	♂
Según *Kepler* …………………………………	951000	519650	152350
Según *Boulliau* ………………………………	954198	522250	152350
Según los tiempos periódicos ………………	954006	520096	152369

	♁	♀	☿
Según *Kepler* …………………………………	100000	72400	38806
Según *Boulliau* ………………………………	100000	72398	38585
Según los tiempos periódicos ………………	100000	72333	38710

No ha lugar disputa alguna sobre las distancias de Mercurio y Venus al Sol, puesto que éstas se determinan mediante sus elongaciones del Sol. Así mismo desaparece toda disputa sobre la distancia al Sol de los planetas superiores gracias a los eclipses de los satélites de Júpiter. Efectivamente, por dichos eclipses se determina la posición de la sombra proyectada por Júpiter, y con ello se tiene la longitud heliocéntrica de Júpiter. Y comparando las longitudes heliocéntrica y geocéntrica entre sí, se determina la distancia de Júpiter.

Fenómeno V

Los planetas primarios con radios trazados a la Tierra describen áreas en nada proporcionales a los tiempos; pero con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos.

Pues respecto a la Tierra, ya avanzan, ya son estacionarios o bien hasta son retrógrados: pero respecto al Sol son siempre progresivos, y ello con movimiento casi uniforme, aunque un poco más rápido en el perihelio y un poco más lento en el afelio, de suerte que la descripción de las áreas resulta igual. La Proposición es archiconocida para los astrónomos, y se demuestra en Júpiter muy bien mediante los eclipses de los satélites, mediante los cuales acabamos de decir que se calculan las distancias y longitudes heliocéntricas de ese planeta al Sol.

Fenómeno VI

La Luna con un radio trazado al centro de la Tierra describe un área, proporcional al tiempo.

Es evidente al comparar el movimiento aparente de la Luna con su diámetro aparente. Pero el movimiento lunar se perturba un tanto por causa de la fuerza solar, mas en estos fenómenos dejo a un lado estas insensibles minucias de errores.

PROPOSICIONES

PROPOSICIÓN I. TEOREMA I

Las fuerzas por las cuales los planetas circunjoviales son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en sus órbitas se dirigen hacia el centro de Júpiter y son inversamente como los cuadrados de las distancias de los lugares a dicho centro.

La primera parte de la Proposición es evidente por el fenómeno primero y por la Proposición segunda o tercera del Libro primero; y la otra parte por el fenómeno primero y el Corolario sexto de la Proposición cuarta del mismo libro.

Lo mismo se entiende respecto a los planetas que acompañan a Saturno, por el fenómeno segundo.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA II

Las fuerzas por las cuales los planetas primarios son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en sus órbitas se dirigen hacia el Sol y son inversamente como los cuadrados de las distancias al centro del mismo.

La primera parte de la Proposición es evidente por el fenómeno quinto y la Proposición segunda del Libro primero: la otra parte por el fenómeno cuarto y el Corolario sexto de la Proposición cuarta del mismo Libro. Pero esta parte de la Proposición se demuestra con la mayor precisión por la inmovilidad de los afelios. Pues una mínima aberración de la razón del cuadrado debería hacer (por el Corolario 1 de la Proposición XLV del Libro I) que el movimiento de los ápsides fuese perceptible en cada revolución, y muy grande en muchas revoluciones.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA III

La fuerza con la cual la Luna es retenida en su órbita se dirige hacia la Tierra y es *inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro de la Tierra.*

La primera parte de la afirmación es evidente por el fenómeno sexto y la Proposición segunda o tercera del Libro primero: y la segunda parte por la gran lentitud del apogeo lunar. Pues este movimiento, que es en cada revolución de tan sólo tres grados y tres minutos hacia adelante, puede despreciarse. Pues está claro (por el Corolario 1 de la Proposición XLX del Libro I) que si la distancia de la Luna al centro de la Tierra es al semidiámetro de la Tierra como D a 1, la fuerza de la que tal movimiento se originaría será inversamente proporcional a $D^{2\frac{4}{243}}$, es decir, inversamente como aquella misma potencia de D cuyo índice es $D^{2\frac{4}{243}}$, o sea, en razón inversa de un poco más que el cuadrado de la distancia, pero que es 59¾ más próxima a la razón cuadrada que a la cúbica. Y puesto que se origina de la acción del Sol (como se dirá más tarde) puede, por ello, ser ignorada ahora. La acción del Sol, en tanto que separa a la Luna de la Tierra, es muy aproximadamente como la distancia de la Luna a la Tierra; y por lo mismo (por lo expuesto en el Corolario 2 de la Proposición XLV del Libro I) es a la fuerza centrípeta de la Luna casi como 2 a 357,45, o como 1 a $178\frac{29}{40}$. Y despreciando esta minúscula fuerza del Sol, la fuerza restante con la cual la Luna es retenida en órbita será inversamente como D^2. Cosa que quedará más clara al comparar esta fuerza con la de la gravedad, como se hace en la Proposición siguiente.

COROLARIO. Si la fuerza centrípeta media por la que la Luna es retenida en órbita aumentase primero en la razón de $177\frac{29}{40}$ a $178\frac{29}{40}$ y después también en la razón del cuadrado del semidiámetro de la Tierra a la distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna, se tendrá la fuerza centrípeta lunar sobre la superficie de la Tierra, supuesto que dicha fuerza descendiendo hacia la superficie de la Tierra aumente continuamente en razón inversa al cuadrado de la altura.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA IV[3]

La Luna gravita hacia la Tierra y es continuamente desviada del movimiento rectilíneo y retenida en su órbita por la fuerza de la gravedad.

La distancia media de la Luna a la Tierra es en las sicigias según *Ptolomeo* y los más de los astrónomos de 59 semidiámetros terrestres, según *Vendelin* y *Huygens* 60, según *Copérnico* 60⅓, según *Street* 60⅖, y según *Tycho* 56½. Pero *Tycho*, y cuantos siguen sus tablas de refracciones, al establecer las refracciones del Sol y de la Luna (totalmente contra la naturaleza de la luz) mayores que las de las estrellas fijas, y esto en unos cuatro o cinco minutos, aumentaron en otros tantos la paralaje de la Luna, es decir, casi en la duodécima o decimoquinta parte de la paralaje total. Corríjase este error y resultará una distancia de unos 60½ semidiámetros terrestres, casi la misma asignada por los otros. Supongamos que la distancia media en las sicigias es de 60 semidiámetros; y el período lunar completo respecto a las estrellas fijas es de 27 días, 7 horas, 43 minutos, como establecen los astrónomos, y también que la circunferencia de la Tierra es de 123249600 pies *parisinos*, como han establecido los medidores *franceses*: y si se imagina que la Luna es desposeída de todo movimiento y abandonada a sí misma, de modo que, bajo la acción de toda aquella fuerza por la cual (por el Corolario de la Proposición III) es retenida en su órbita, desciende hacia la Tierra, describirá al caer en el tiempo de un minuto un espacio de $15\frac{1}{12}$ pies *parisinos*. Esto se infiere del cálculo realizado a partir de la Proposición XXXVI del Libro I o (lo que es lo mismo) del Corolario noveno de la Proposición cuarta del mismo libro. Pues el seno verso del arco que la Luna con su movimiento medio a la distancia de sesenta semidiámetros terrestres describiría en el tiempo de un minuto es aproximadamente de $15\frac{1}{12}$ pies *parisinos*, o más exactamente de 15 pies, 1 pulgada, y $1\frac{4}{9}$ líneas. Por lo cual, toda vez que dicha fuerza aumenta al acercarse a la Tierra en razón inversa del cuadrado de la distancia, y por lo mismo en la superficie terrestre será 60 x 60 veces mayor que en la Luna, dicho cuerpo cayendo con la mencionada fuerza en nuestras inmediaciones deberá describir en el tiempo de un minuto un espacio de 60 x 60 x $15\frac{1}{12}$, y en un tiempo de un segundo $15\frac{1}{12}$ pies, o más exactamente, 15 pies, 1 pulgada $1\frac{4}{9}$ líneas. Y con esa fuerza descienden de hecho los graves en la Tierra. Pues la longitud de un péndulo oscilante al ritmo de una oscilación por segundo en la latitud de *París* es de tres pies *parisinos* y $8\frac{1}{2}$ líneas, como observó *Huygens*. Y la altura que recorre un grave cayendo en el tiempo de un segundo es a la mitad de la longitud del péndulo mencionado como el cuadrado de la razón de la circunferencia del círculo a su diámetro (como también indicó *Huygens*) y, por tanto, de 15 pies *parisinos*, 1 pulgada y $1\frac{7}{9}$ líneas. Y, por lo tanto, la fuerza con la cual la Luna es retenida en su órbita, si descendiera hasta la superficie terrestre, resulta igual a la fuerza de la gravedad entre nosotros, y por lo mismo (por las Reglas I y II) es esa misma fuerza, a la cual solemos llamar gravedad. Pues si la gravedad fuera distinta de ella, los cuerpos descenderían en dirección a la Tierra con doble velocidad bajo la acción de ambas fuerzas juntas, y en el tiempo de un segundo recorrerían al caer un espacio de $30\frac{1}{6}$ pies *parisinos*, contra toda la experiencia.

Se basa este cálculo en la hipótesis de que la Tierra está en reposo. Porque si la Tierra y la Luna se mueven en torno al Sol y mientras tanto además giran en torno a su centro común de gravedad, manteniéndose la ley de la gravedad, la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra será de aproximadamente $60\frac{1}{2}$ semidiámetros terrestres, como hallará quien haga el cálculo. El cálculo se puede hacer mediante la Proposición LX del Libro I.

Escolio

La demostración de la Proposición puede explicarse más ampliamente como sigue. Si girasen muchas lunas en torno a la Tierra al igual que ocurre con el sistema de Saturno o de Júpiter, sus tiempos periódicos (por un argumento de inducción) observarían la ley de los planetas hallada por Kepler, y por lo mismo sus fuerzas centrípetas serían inversamente como los cuadrados de las distancias al centro de la Tierra, según la Prop. I de este Libro. Y si la más baja de todas esas lunas fuese muy pequeña, y casi llegase a tocar las cimas de los montes más altos, la fuerza centrípeta en cuya virtud se mantiene en su órbita vendría a ser casi igual a la gravedad de los cuerpos en las cimas de dichos montes (por el cálculo precedente) y haría que esa pequeña luna, si perdiera todo el movimiento con el que se desplaza en su órbita, al faltarle la fuerza centrífuga con la que había permanecido en su órbita, caería hacia la Tierra y esto con la velocidad con la que caen los graves en esas crestas montañosas, dada la igualdad de fuerzas con que descienden. Y si la fuerza con la que desciende dicha pequeña luna más baja fuese distinta de la gravedad, y dicha luna fuera grave también hacia la Tierra como los cuerpos en lo alto de los montes, dicha luna con ambas fuerzas juntas descendería doblemente más veloz. Por lo cual, como ambas fuerzas, éstas de los cuerpos graves y aquéllas de las lunas, tiendan al centro de la Tierra y sean semejantes entre ellas e iguales, las tales fuerzas (por las Reglas I y II) tendrán la misma causa. Y por consiguiente, la fuerza por la que la Luna es retenida en su órbita será aquella misma a la cual solemos llamar gravedad: sobre todo porque si no, la pequeña luna en la cima de la montaña o carecería de gravedad o caería dos veces más rápida que lo que suelen hacer los cuerpos graves.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA V

Los planetas circunjoviales gravitan hacia Júpiter, los circunsaturnales hacia Saturno, y los circunsolares hacia el Sol, y por la fuerza de su gravedad son continuamente desviados de movimientos rectilíneos y retenidos en órbitas curvilíneas.

Pues las revoluciones de los planetas circunjoviales en torno a Júpiter, de los circunsaturnales en torno a Saturno, y de Mercurio, Venus y el resto de los circunsolares en torno al Sol son fenómenos del mismo género que la revolución de la Luna en torno a la Tierra; y por ello (por la Regla II) dependen de causas del mismo género: sobre todo si se ha demostrado que las fuerzas, de las cuales dependen dichas revoluciones, se dirigen hacia los centros de Júpiter, Saturno y el Sol, y al apartarse de Júpiter, Saturno y el Sol decrecen con la misma ley y proporción con la que la fuerza de la gravedad decrece al alejarse de la Tierra.

COROLARIO 1. Luego la gravedad se da en todos los planetas. Pues nadie duda de que Venus, Mercurio y los demás planetas sean cuerpos del mismo género que Júpiter y Saturno. Y puesto que por la Tercera Ley del movimiento toda atracción es mutua, Júpiter gravitará hacia todos sus satélites, Saturno hacia los suyos, la Tierra hacia la Luna, y el Sol hacia todos los planetas primarios.

COROLARIO 2. La gravedad que se dirige hacia cada planeta es inversamente proporcional al cuadrado de las distancias de los lugares al centro del planeta.

COROLARIO 3. Todos los planetas gravitan entre sí, por los Corolarios 1 y 2. Y de aquí que Júpiter y Saturno en la proximidad de su conjunción, atrayéndose mutuamente, perturben sus movimientos sensiblemente, el Sol perturbe los movimientos lunares, el Sol y la Luna perturben nuestros mares, como se explicará más adelante.

ESCOLIO

Hemos llamado hasta aquí centrípeta a la fuerza por la que los cuerpos celestes son retenidos en sus órbitas. Ahora ya consta que es la gravedad, y por ello la llamaremos en lo sucesivo gravedad. Pues la causa de aquella fuerza centrípeta por la que la Luna es retenida en órbita debe ser extendida a todos los planetas por las Reglas I, II y IV.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA VI[4]

Todos los cuerpos gravitan hacia cada planeta y sus pesos hacia un mismo planeta, a iguales distancias del centro del planeta, son proporcionales a la cantidad de materia existente en cada uno.

Hace ya tiempo que otros observaron que el descenso de todos los graves hacia la Tierra (al menos si se elimina la retardación desigual que se debe a la mínima resistencia del aire) ocurre en tiempos iguales; y se puede registrar esa igualdad de los tiempos de la manera más exacta mediante los péndulos. He tratado de examinar esto con oro, plata, plomo, vidrio, arena, sal común, madera, agua, trigo. Me servía de dos vasijas de madera, redondas e iguales. Llenaba una de madera y colgaba el mismo peso de oro (tan exacto como podía) en el centro de oscilación del otro. Las vasijas colgando de hilos iguales de once pies constituían péndulos completamente iguales en cuanto al peso, la figura y la resistencia del aire: situados juntos, iban y venían a la vez con oscilaciones iguales durante largo tiempo. Por tanto, la cantidad de materia en el oro era (por los Corolarios 1 y 6 de la Proposición XXIV del Libro II) a la cantidad de materia en la madera como la acción de la fuerza motriz sobre todo el oro a la acción de la fuerza motriz sobre toda la madera; es decir, como un peso a otro peso. Y lo mismo en los demás. En cuerpos del mismo peso la diferencia de materia podía detectarse con estos experimentos aunque fuese de una milésima de la materia total. Y por otra parte no hay duda de que la naturaleza de la gravedad es la misma en los planetas que en la Tierra. Imagínese, pues, que estos cuerpos terrestres se elevasen hasta la órbita de la Luna y se los dejase caer junto con la Luna privada de todo movimiento, de modo que caigan a la vez hacia la Tierra; y, por lo ya expuesto antes, es cierto que en tiempos iguales describirán espacios iguales junto con la Luna y por lo mismo que son respecto a la cantidad de materia en la Luna como sus pesos al peso de la misma. Además, toda vez que los satélites de Júpiter giran en tiempos que son como la potencia $^3/_2$ de las distancias al centro de Júpiter, por lo mismo, a iguales distancias de Júpiter sus gravedades aceleratrices resultarán iguales. Por tanto, cayendo de alturas iguales en tiempos iguales describirán espacios iguales; lo mismo que ocurre con los graves en nuestra Tierra. Y por la misma razón los planetas circunsolares, lanzados desde iguales distancias del Sol, en su descenso hacia el Sol describirán espacios iguales en tiempos iguales. En cambio, las fuerzas por las que cuerpos desiguales son acelerados igualmente, son como los cuerpos, es decir, los pesos son como las cantidades de materia en los planetas. Además, que los pesos de Júpiter y de sus satélites hacia el Sol son proporcionales a la cantidad de materia existente en ellos es evidente por el movimiento sumamente regular de los satélites, por el Corolario 3 de la Proposición LXV del Libro I. Pues si alguno de ellos fuera atraído hacia el Sol en grado mayor que el debido a su cantidad de materia de lo que lo son los otros, el movimiento de los satélites (por el Corolario 2 de la Proposición LXV del Libro I) resultaría perturbado por la desigualdad de la atracción. Si, a iguales distancias del Sol, un satélite resultase más grave hacia el Sol en razón de su cantidad de materia que Júpiter en razón de la suya en una razón cualquiera dada, tal como *d* a *e* por ejemplo, la distancia entre el centro del Sol y el centro de la órbita del satélite siempre sería mayor que la distancia entre el centro del Sol y el centro de Júpiter aproximadamente como la raíz cuadrada de esa razón como hallé con un cálculo que hice. Y si el satélite fuese menos grave hacia el Sol en la proporción dicha de *d* a *e*, la distancia del centro de la órbita del satélite al Sol sería menor que la distancia del centro de Júpiter al Sol en razón de dicha raíz cuadrada. Por tanto, si a iguales distancias del Sol, la gravedad aceleratriz de un satélite cualquiera hacia el Sol fuese mayor o menor que la gravedad aceleratriz de Júpiter hacia el Sol tan sólo en una milésima parte de la gravedad total, la distancia del centro de la órbita del satélite hasta el Sol sería mayor o menor que la distancia de Júpiter hasta el Sol en 1/2000 de la distancia total, es decir, una quinta parte de la distancia del satélite exterior al centro de Júpiter: excentricidad de la órbita que sería bien sensible. Pero las órbitas de los satélites son concéntricas a Júpiter, y por lo mismo las gravedades aceleratrices de Júpiter y de los satélites hacia el Sol son iguales entre ellas. Y por la misma razón los pesos hacia el Sol de Saturno y sus compañeros, a iguales distancias del Sol, son como las cantidades de materia que hay en ellos; y los pesos hacia el Sol de la Luna y la Tierra o bien son nulos o son muy exactamente proporcionales a sus masas. Pero alguno es el peso, por los Corolarios 1 y 3 de la Proposición V.

Y también los pesos de cada una de las partes de un planeta cualquiera hacia otro son entre sí como la materia que hay en cada parte. Porque, si unas partes gravitasen más y otras menos que en razón de su cantidad de materia, el planeta entero, según el género de partes en que abunde más, gravitará más o menos que en razón de su cantidad de materia total. Y no importa si dichas partes son internas o externas. Pues si, por ejemplo, los cuerpos terrestres que están a nuestro alrededor los elevamos imaginariamente hasta la órbita de la Luna y se comparan con el cuerpo de la misma, si sus pesos fuesen a los pesos de las partes externas de la Luna como las cantidades de materia en unos y otra, pero respecto a los pesos de las partes interiores en razón mayor o menor, tales cuerpos estarían respecto al peso total de la Luna en una proporción mayor o menor: contra lo mostrado más arriba.

COROLARIO 1. De aquí que los pesos de los cuerpos no dependan de sus formas y texturas. Pues si pudieran variar con las formas, serían mayores o menores según la variedad de las formas, a igualdad de materia, en contra totalmente de la experiencia.

COROLARIO 2. Todos los cuerpos que están alrededor de la Tierra son graves hacia ella; y los pesos de todos los que distan igual del centro de la Tierra son como las cantidades de materia en cada uno de ellos. Esta es una cualidad de todos aquellos en los que es posible hacer experimentos, y en consecuencia, por la Regla III, ha de afirmarse de todos. Si el éter u otro cuerpo cualquiera estuviese desprovisto por completo de gravedad o gravitase menos que en razón de su cantidad de materia: puesto que éste (en opinión de *Aristóteles, Descartes* y otros) no se diferencia de los demás cuerpos sino sólo en la forma de la materia, tal cuerpo podría mediante el cambio gradual de forma transformarse en un cuerpo de la misma condición que aquellos que gravitan lo más posible según su cantidad de materia, y viceversa, los cuerpos sumamente graves, adquiriendo gradualmente la forma de aquél, podrían perder su gravedad gradualmente. Y de esta suerte los pesos dependerían de las formas de los cuerpos y podrían variar con las formas, contra lo que se ha probado en el Corolario anterior.

COROLARIO 3. Todos los espacios no están igualmente llenos. Pues si todos los espacios estuviesen igualmente llenos, la gravedad específica del fluido con el cual se llena la región del aire, por la gran densidad de su materia, en nada cedería a la gravedad específica del mercurio, del oro o de otro cuerpo cualquiera muy denso; y por ello ni el oro, ni otro cuerpo cualquiera podría descender en el aire. Pues los cuerpos en los fluidos, salvo que sean específicamente más graves, no descienden en absoluto. Pero si la cantidad de materia en un espacio dado puede disminuir por alguna rarefacción cualquiera ¿por qué no podría disminuir infinitamente?

COROLARIO 4. Si todas las partículas sólidas de todos los cuerpos son de la misma densidad, y sin poros no son susceptibles de rarefacción, se da de hecho el vacío. Digo que son de la misma densidad aquellas cuyas fuerzas inerciales son como las magnitudes.

COROLARIO 5. La fuerza de la gravedad es de distinta naturaleza que la fuerza magnética. Pues la atracción magnética no es como la materia atraída. Unos cuerpos son más atraídos, otros menos, muchos no lo son. Y la fuerza magnética en uno y el mismo cuerpo puede aumentar y disminuir y es bastante mayor a veces respecto a la cantidad de materia que la fuerza de la gravedad, y al alejarse del imán decrece en una razón de la distancia no cuadrada sino casi cúbica, en cuanto he podido comprobar con algunos experimentos un tanto rudimentarios.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA VII[5]

La gravedad ocurre en todos los cuerpos y es proporcional a la cantidad de materia existente en cada uno.

Hemos probado ya que todos los planetas gravitan entre sí, y también que la gravedad hacia cada uno de ellos considerado individualmente es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde cada lugar al centro del planeta. De lo cual se sigue que (por la Proposición LXIX del Libro I y sus Corolarios) la gravedad hacia todos es proporcional a la materia existente en ellos.

Por lo demás, dado que todas las partes de un planeta A gravitan hacia otro planeta B, y la gravedad de una parte cualquiera es a la gravedad del todo como la materia de la parte a la materia del todo, y para toda acción haya igual reacción (por la tercera Ley del movimiento), el planeta B gravitará a la inversa hacia todas las partes del planeta A, y su gravedad hacia cada parte será a su gravedad hacia el todo como la materia de la parte a la materia del todo. Q. E. D.

COROLARIO 1. Por consiguiente, la gravedad hacia todo el planeta surge y se compone de la gravedad hacia cada parte. De lo cual tenemos ejemplos en las atracciones magnéticas y eléctricas. Pues la atracción entera hacia el todo surge de las atracciones hacia cada parte. Para la gravedad esto se entenderá imaginando que muchos planetas menores se reúnen en un globo y constituyen uno mayor. Pues la fuerza del todo deberá originarse de las fuerzas de las partes componentes. Si alguien objeta que todos los cuerpos que nos rodean deberían gravitar entre sí según esta ley, mientras que no percibimos en absoluto una gravedad de este estilo, debo responder que la gravedad en estos cuerpos al ser respecto a la gravedad de toda la Tierra como son estos cuerpos al cuerpo de la Tierra entera, es bastante menor que la que es observable.

COROLARIO 2. La gravitación hacia cada partícula igual de un cuerpo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de los lugares a las partículas. Es evidente por el Corolario 3 de la Proposición LXXIV del Libro I.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA VIII[6]

Si la materia de dos globos que gravitan entre sí es homogénea en todos los lugares que equidistan de los centros por todos los lados, el peso de cada uno de ellos hacia el otro será inversamente como el cuadrado de la distancia entre los centros.

Después de que hube hallado que la gravedad hacia el planeta entero surge y se compone de las gravedades hacia las partes, y que es hacia cada parte inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias a las partes, dudaba de si la dicha proporción inversa del cuadrado se cumpliría exactamente en la fuerza entera compuesta de muchas fuerzas o si sólo de modo aproximado. Pues podría ocurrir que la proporción, que en las distancias más grandes se cumplía con bastante exactitud, en las inmediaciones de la superficie del planeta, debido a las distancias desiguales de las partículas y a las desemejanzas de los lugares, variase notablemente. Mas al fin, por las Proposiciones LXXV y LXXVI del Libro I y sus Corolarios, comprendí la verdad de la Proposición de que aquí se trata.

COROLARIO 1. De aquí se pueden hallar y comparar entre sí los pesos de los cuerpos en los distintos planetas. Pues los pesos de cuerpos iguales que giran en círculos en torno a los planetas son (por el Corolario 2 de la Proposición IV del Libro I) directamente como los diámetros de los círculos e inversamente como los cuadrados de los tiempos periódicos, y los pesos sobre las superficies de los planetas o a otras distancias cualesquiera del centro son mayores o menores (por esta Proposición) en razón inversa del cuadrado de las distancias. De este modo, a partir de los tiempos periódicos de Venus en torno al Sol de 224 días y 16¾ horas, del satélite exterior de Júpiter alrededor de Júpiter de 16 días y $16\frac{8}{15}$ horas, del satélite de Huygens en torno a Saturno de 15 días y $22\frac{2}{3}$ horas y de la Luna en torno a la Tierra de 27 días 7 horas y 43 minutos, comparados con la distancia media de Venus al Sol y con las elongaciones heliocéntricas máximas del satélite exterior de Júpiter respecto al centro de éste de 8′, 16″, del satélite Huygens del centro de Saturno de 3′, 4″, y de la Luna del centro de la Tierra de 10′, 33″, haciendo un cálculo hallé que los pesos de cuerpos iguales a iguales distancias del centro del Sol, de Júpiter, de Saturno y de la Tierra eran hacia el Sol, hacia Júpiter, hacia Saturno y la Tierra como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ y $\frac{1}{169282}$, respectivamente, y aumentando o disminuyendo las distancias, los pesos aumentaban o disminuían en razón del cuadrado: los pesos de cuerpos iguales hacia el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra a las distancias de 10 000, 997, 791, y 109 de sus centros, y por ende en sus superficies, serán como 10 000, 943,529, y 435 respectivamente. Cuánto pesan los cuerpos en la superficie de la Luna se verá después.

COROLARIO 2. También se sigue la cantidad de materia en cada planeta. Pues las cantidades de materia en los planetas son como sus fuerzas a iguales distancias de sus centros, esto es, en el Sol, Júpiter, Saturno y la Tierra como 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ y $\frac{1}{169282}$, respectivamente. Si la paralaje solar se estableciera mayor o menor que 10″ 30‴, la cantidad de materia en la Tierra deberá aumentarse o disminuirse en razón cúbica.

COROLARIO 3. También aparecen así las densidades de los planetas. Pues los pesos de cuerpos iguales y homogéneos hacia esferas homogéneas son en las superficies de éstas como los diámetros de las mismas, por la Proposición LXXII del Libro I, y por lo mismo las densidades de esferas heterogéneas son como aquellos pesos divididos por los diámetros de las esferas. Los diámetros verdaderos del Sol, de Júpiter, de Saturno y de la Tierra eran entre si como 10 000, 997, 791, y 109, y los pesos hacia ellos como 10 000, 943, 529, y 435 respectivamente, y por tanto las densidades son como 100, 94½, 67 y 400. La densidad de la Tierra resultante de este cálculo no depende de la paralaje solar, sino que se obtiene de la paralaje lunar, con lo cual aquí se establece con exactitud. Por consiguiente el Sol es algo más denso que Júpiter y éste que Saturno, mientras la Tierra es cuatro veces más densa que el Sol. Ya que éste, por su enorme calor, se enrarece. La Luna en cambio, es más densa que la Tierra, como se mostrará más tarde.

COROLARIO 4. Son, por tanto, más densos los planetas que son más pequeños, a igualdad de condiciones restantes. De este modo la fuerza de la gravedad se acerca más a la igualdad en sus superficies. Pero, a igualdad de condiciones, son más densos los planetas más próximos al Sol; Júpiter más que Saturno y la Tierra más que Júpiter. Efectivamente, había que situar a distintas distancias del Sol a los planetas para que cada uno según su densidad disfrutase de un mayor o menor grado de calor solar. Nuestra agua, si la Tierra estuviese situada en la órbita de Saturno se solidificaría y en la órbita de Mercurio se evaporaría al instante. Pues la luz del Sol, a la cual es proporcional el calor, es siete veces más densa en la órbita de Mercurio que aquí entre nosotros: y con el termómetro he hallado que con siete veces el calor estival del Sol al agua hierve. Y no hay duda de que la materia de Mercurio está acomodada al calor, y por lo mismo, sea más densa que la nuestra, toda vez que la materia más densa, exija mayor calor para realizar las operaciones naturales.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA IX

La gravedad, a partir de la superficie de los planetas hacia abajo, decrece en razón muy aproximada de la distancia al centro.

Si la materia del planeta es uniforme en cuanto a la densidad, esta Proposición se cumple exactamente, por la Proposición LXXIII del Libro I. Por lo tanto no habrá más error que el que se siga de la desigualdad de la densidad.

Proposición x. Teorema x

El movimiento de los planetas en los cielos puede conservarse durante mucho tiempo.

Se ha mostrado en el Escolio de la Proposición XL del Libro II que un globo de agua congelada, moviéndose libremente en nuestra atmósfera y describiendo la longitud de su semidiámetro, perdería por la resistencia del aire $\frac{1}{4586}$ parte de su movimiento. Pero la misma proporción resulta para cualquier globo muy aproximadamente de cualquier tamaño y a cualquier velocidad. Ahora bien, que el globo de nuestra Tierra es más denso que si fuera de agua lo infiero como sigue. Si este globo fuera todo de agua, las cosas todas que fuesen menos densas que el agua, por su menor gravedad específica, emergerían y flotarían. Por esa razón, un globo terroso cubierto de agua por todas partes, si fuese de mayor rareza que el agua, emergería por un lado, y toda el agua discurriendo desde allí se concentraría en la región opuesta. E igual es el caso de nuestra Tierra rodeada de mares por la mayor parte. Si ella no fuere más densa, emergería de los mares y con una parte de la misma de acuerdo con su grado de levedad sobresaldría del agua, concentrándose todos los mares hacia la región opuesta. Por la misma razón las manchas solares son más leves que la materia luminosa solar a la que se sobreponen. Y al formarse cualquiera de los planetas, cuando la masa era fluida, toda materia más grave tendía desde la masa líquida hacia el centro. Por lo cual, al ser la Tierra común periférica casi dos veces más grave que el agua, y un poco más abajo en las minas tres, cuatro y hasta cinco veces más densa, es probable que toda la materia de la Tierra junta sea cinco o seis veces más pesada que si fuera de agua; sobre todo porque, como se ha mostrado, la Tierra es casi cuatro veces más densa que Júpiter. Por ello si Júpiter fuera algo más denso que el agua, en el tiempo de treinta días en el que recorre la longitud de 459 semidiámetros suyos, perdería en un medio de la densidad de nuestro aire casi una décima parte de su movimiento. Pero como la resistencia de los medios disminuye en razón del peso y de la densidad, como en el caso del agua que al ser $13\frac{3}{5}$ más leve que el mercurio es menos resistente en esa proporción; y el aire que es 860 veces más leve que el agua es también menos resistente en esa misma proporción, y si se considera en los cielos donde el peso del medio en el que se mueven los planetas disminuye enormemente, la resistencia casi vendrá a desaparecer. Hemos mostrado, en efecto, en el Escolio de la Proposición XXII del Libro II, que si ascendemos hasta una altura de doscientas millas sobre la Tierra el aire sería allí más raro que sobre la superficie terrestre en una proporción de 30 a 0,000000000000 3998 y también como 75000000000000 a 1 aproximadamente. Por consiguiente, el planeta Júpiter girando en un medio de la densidad de ese aire más alto en el tiempo de 1 000 000 de años no perdería de su movimiento por la resistencia del medio ni una millonésima parte. En los espacios próximos a la Tierra nada hay que produzca resistencia salvo los vapores y exhalaciones del aire. Si éstos son extraídos con todo cuidado de un vaso de cristal cilíndrico cerrado, los graves caen dentro del vaso con toda libertad y sin resistencia sensible alguna; el mismo oro y una pluma muy leve soltados a la vez caen con igual velocidad, y describiendo en su caída una altura de cuatro, seis u ocho pies tocan el suelo a la vez, como se ha visto experimentalmente. Y por tanto, si nos trasladamos a los cielos, vacíos de aire y de exhalaciones, los planetas y los cometas sin resistencia sensible alguna se moverán por esos espacios durante larguísimo tiempo.

Hipótesis I

El centro del sistema del mundo está en reposo.

Esto lo conceden todos, si bien unos sostienen que la Tierra y otros que el Sol reposan en el centro del sistema. Veamos qué se sigue de aquí.

Proposición XI. Teorema XI

El centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y todos los planetas está en reposo.

Pues (por el Corolario IV de las Leyes) dicho centro o está en reposo o se desplaza uniformemente en línea recta. Pero si tal centro se desplaza continuamente, el centro del mundo también se moverá, contra la Hipótesis.

Proposición XII. Teorema XII

El Sol es agitado por un movimiento permanente, pero jamás se aleja mucho del centro común de gravedad de todos los planetas.

Pues toda vez que (por el Corolario 2 de la Proposición VIII) la materia en el Sol es a la materia en Júpiter como 1067 a 1, y la distancia de Júpiter al Sol es al semidiámetro solar en razón ligeramente mayor, el centro común de gravedad de ambos cae en un punto muy poco distante fuera de la superficie del Sol. Por la misma razón, puesto que la materia del Sol es a la de Saturno como 3021 a 1, y la distancia de Saturno al Sol es ligeramente menor respecto al semidiámetro solar, el punto común de gravedad de ambos caerá en un punto ligeramente interior a la superficie solar. Y repitiendo los elementos de este cálculo, si los planetas todos y la Tierra se situaran a un lado del Sol, el centro común de gravedad de todos ellos apenas se alejaría del centro del Sol el valor de un diámetro solar. En los demás casos la distancia entre esos centros siempre sería menor. Por consiguiente, dado que dicho centro de gravedad siempre está en reposo, el Sol a tenor de las diferentes ubicaciones de los planetas, se moverá hacia todas partes, pero jamás se apartará mucho de dicho centro.

COROLARIO. De aquí que el centro común de gravedad de la Tierra, el Sol y el resto de los planetas, haya de ser considerado como el centro del mundo. Puesto que la Tierra, el Sol y todos los demás planetas gravitan mutuamente entre sí y, por tanto, se mueven siempre según las leyes del movimiento en razón de sus fuerzas de gravedad, es evidente que sus centros móviles no se pueden tomar por el centro inmóvil del mundo. Si hubiera que situar en dicho centro al cuerpo hacia el que todos los otros gravitan en grado máximo (cual es la opinión corriente) tal privilegio habría que concedérselo al Sol. Mas como el Sol se mueve, hay que elegir un punto en reposo, respecto al cual el centro del Sol se separa muy poco, y del cual se alejaría aún menos si el Sol fuera más denso y más grande de suerte que se moviera menos.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA XIII

Los planetas se mueven en elipses que tienen un foco en el centro del Sol, y con radios trazados a dicho centro describen áreas proporcionales a los tiempos.

Ya hemos considerado estos movimientos más arriba partiendo de los fenómenos. Ahora que se conocen los principios del movimiento, de ellos deducimos «*a priori*» los movimientos celestes. Puesto que los pesos de los planetas hacia el Sol son inversamente como los cuadrados de las distancias al centro del Sol, si el Sol reposase y los demás planetas no actuasen mutuamente entre ellos, sus órbitas serían elípticas, teniendo al Sol en el foco común, y describirían áreas proporcionales a los tiempos (por las Proposiciones I y XI y el Corolario 1 de la Proposición XIII del Libro I), pero las acciones de los planetas entre ellos son mínimas (de suerte que pueden despreciarse) y perturban menos los movimientos en elipses de los planetas en torno al Sol (por la Proposición LXVI del Libro I) que si tales movimientos se realizasen en torno a un Sol en reposo.

No se puede despreciar enteramente la acción de Júpiter sobre Saturno. Pues la gravedad hacia Júpiter es a la gravedad hacia el Sol (a iguales distancias) como 1 a 1067; por ello, en la conjunción de Júpiter y Saturno, al ser la distancia de Saturno a Júpiter respecto a la distancia de Saturno al Sol casi como 4 a 9, la gravedad de Saturno hacia Júpiter será a la gravedad de Saturno hacia el Sol como 81 a 16 x 1067, o como 1 a 211 aproximadamente. Y a esto se debe la perturbación de la órbita de Saturno en cada conjunción de este planeta con Júpiter, lo suficientemente sensible como para extrañar a los astrónomos. Según la diferente situación del planeta en estas conjunciones su excentricidad aumenta o disminuye y su afelio se adelanta o se retrasa notablemente, y el movimiento medio se acelera o se retarda alternativamente. Sin embargo el error total en su movimiento en torno al Sol debido a tamaña fuerza (además del movimiento medio) puede casi evitarse situando el foco inferior de su órbita en el centro común de gravedad de Júpiter y el Sol (por la Proposición LXVII del Libro I) y por tanto cuando resulta mayor no sobrepasa los dos minutos. Y el error máximo en el movimiento medio apenas supera los dos minutos por año. Por otra parte, en la conjunción de Júpiter y Saturno las gravedades aceleratrices del Sol hacia Saturno, de Júpiter hacia Saturno y de Júpiter hacia el Sol vienen a ser casi como 16, 81, y $\left(\frac{16 \text{ x } 81 \text{ x } 3021}{25}\right)$, o sea, 156 609, por lo cual la diferencia de las fuerzas de gravedad del Sol hacia Saturno y de Júpiter hacia Saturno es a la fuerza de gravedad de Júpiter hacia el Sol como 65 a 156 609 y también como 1 a 2409. Pero el poder máximo de Saturno para perturbar el movimiento de Júpiter es proporcional a esta diferencia, de suerte que la perturbación de la órbita de Júpiter es mucho menor que la de Saturno. Las perturbaciones de las demás órbitas son aún más pequeñas, salvo la de la Tierra sensiblemente perturbada por la Luna. El centro común de gravedad de la Tierra y la Luna discurre por una elipse en torno al Sol situado en el foco de la misma y, con un radio trazado al Sol, describe en ella áreas proporcionales a los tiempos, pero la Tierra gira con un movimiento mensual en torno a dicho centro común.

Proposición XIV. Teorema XIV

Los afelios y nodos de las órbitas están en reposo.

Los afelios están en reposo, por la Proposición XI del Libro I, al igual que los planos de las órbitas, por la Proposición I del mismo Libro, y al reposar los planos también reposan los nodos. No obstante, debido a las acciones mutuas de los planetas y cometas en revolución se originan algunas desigualdades, pero tan insignificantes que aquí pueden despreciarse.

Corolario 1. También están en reposo las estrellas fijas, toda vez que conservan las posiciones dadas respecto a los afelios y a los nodos.

Corolario 2. Y por tanto, al no percibirse paralaje alguna de las mismas como consecuencia del movimiento anual de la Tierra, sus fuerzas no producen efecto alguno sensible en nuestro sistema por la enorme distancia a que se hallan. Además de que las estrellas fijas, esparcidas igualmente por todas las partes del cielo, destruyen sus fuerzas mutuas con atracciones opuestas, por la Proposición LXX del Libro I.

Escolio[7]

Puesto que los planetas más próximos al Sol (es decir, Mercurio, Venus, Tierra y Marte) debido a la pequeñez de sus cuerpos influyen muy poco unos sobre otros, sus afelios y nodos están en reposo, salvo en la medida en que sean perturbados por las fuerzas de Júpiter, Saturno y los cuerpos superiores. Y de aquí se sigue, por la teoría de la gravedad, que sus afelios se mueven un poco hacia adelante respecto a las fijas y esto en una proporción de la potencia $3/2$ de sus distancias al Sol. De suerte que si el afelio de Marte en cien años se adelanta respecto a las fijas 33′ 20″, los afelios de la Tierra, de Venus y de Mercurio en cien años se adelantarán 17′ 40″; 10′ 53″ y 4′ 16″ respectivamente. Estos movimientos, por su insignificancia, se deprecian en esta Proposición.

Proposición XV. Problema I

Hallar los diámetros principales de las órbitas.

Han de tomarse en razón de la potencia $2/3$ de los tiempos periódicos, por la Proposición XV del Libro I, y después hay que aumentar cada uno en razón de la suma de las masas del Sol y cada planeta a la primera de las dos medias proporcionales entre dicha suma y el Sol, por la Proposición LX del Libro I.

Proposición XVI. Problema II

Hallar las excentricidades y los afelios de las órbitas.

El problema se resuelve por la Proposición XVIII del Libro I.

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA XV

Los movimientos diarios de los planetas son uniformes y la libración lunar se debe a su movimiento diario.

Es evidente por la Ley I del movimiento y por el Corolario 22 de la Proposición LXVI del Libro I. Ciertamente Júpiter gira respecto a las estrellas fijas en 9 h. 56′, Marte en 24 h. 39′, Venus en casi 23 h., la Tierra en 23 h. 56′, el Sol en 25½ días y la Luna en 27 d. 7 h. 43′. Está claro por los fenómenos que esto es así. Las manchas en el cuerpo solar vuelven al mismo sitio en el disco tras 27½ días aproximadamente respecto a la Tierra; y por tanto, respecto a las fijas el Sol gira aproximadamente en 25½ días. Y dado que el día lunar girando uniformemente sobre su eje es de un mes, la misma cara de ella mirará siempre hacia el otro foco de su órbita muy aproximadamente, y por consiguiente se desviará hacia acá o hacia allá de la Tierra según se halle el sitio de dicho foco. Esta es la libración longitudinal de la Luna; pues la latitudinal se debe a la latitud de la Luna y a la inclinación de su eje hacia el plano de la eclíptica. Esta teoría de la libración lunar fue expuesta por *N. Mercator* en su astronomía editada al principio de 1676 con detalle y gracias a las cartas que le envié. Con un movimiento semejante parece que gira alrededor de su eje el satélite exterior de Saturno, mirando siempre hacia éste con la misma cara. Pues al girar en torno a Saturno, cada vez que llega a la parte oriental de su órbita se ve escasamente y muchas veces deja de verse, cosa que puede deberse, como ha hecho notar *Cassini*, a algunas manchas en esa parte del cuerpo que entonces se orienta hacia la Tierra. Y también el satélite exterior de Júpiter parece girar en torno a su eje con un movimiento semejante, toda vez que en la parte del cuerpo opuesta a Júpiter tiene una mancha que aparece como si estuviera en Júpiter cada vez que pasa entre Júpiter y nuestros ojos.

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA XVI

Los ejes de los planetas son menores que los diámetros trazados perpendicularmente a dichos ejes.

Los planetas, si se suprime todo movimiento circular diario, deberían adoptar figura esférica debido a la igual gravedad de las partes por todos lados. Gracias a ese movimiento circular ocurre que las partes que se apartan del eje intentan ascender junto al ecuador. Por lo cual, si la materia fuese fluida aumentaría con su ascenso los diámetros ecuatoriales, mientras haría disminuir el eje con su descenso hacia los polos. Y así el diámetro de Júpiter (coincidiendo las observaciones de los astrónomos) se ve más corto entre los polos que de oriente a occidente. Y por la misma razón, a no ser que nuestra Tierra fuera algo más alta en el ecuador que en los polos, los mares se hundirían hacia los polos, y elevándose junto al ecuador lo inundarían allí todo.

Proposición xix. Problema iii[8]

Hallar la proporción del eje de un planeta respecto a los diámetros perpendiculares al mismo.

Nuestro *Norwood*, midiendo hacia 1635 la distancia de 905 751 pies *londinenses* entre *Londres y York*, y observando una diferencia de latitud de 2.º 28′ dedujo que el valor de un grado era de 367 196 pies londinenses, es decir, de 57 300 toesas parisinas.

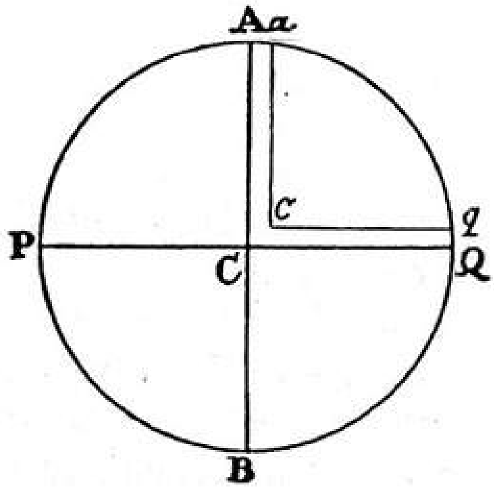
Picard, midiendo un arco de un grado y 22′ 55″ sobre el meridiano entre *Amiens* y *Malvoisine*, halló que el grado de arco equivalía a 57 060 toesas parisinas. *Cassini*, padre, midió la distancia sobre el meridiano desde *Collioure*, en el *Rosellón*, hasta el observatorio de París, y su hijo añadió la distancia desde el observatorio hasta la torre de la ciudad de *Dunquerque*. La distancia entera resultó ser de 486 156½ toesas, y la diferencia de latitudes entre *Collioure* y *Dunquerque* de 8 grados, 31′ 11⅚″. Por consiguiente, el arco de un grado resulta ser de 57 061 toesas parisinas. De esas medidas se sigue que el perímetro de la Tierra viene a ser de 123 249 600 pies parisinos y su semidiámetro de 19 615 800 pies parisinos, en la hipótesis de que la Tierra sea esférica.

En la latitud de *París* un grave en el tiempo de un segundo recorre al caer 15 pies, 1 pulgada y $1\frac{7}{9}$ líneas, como se dijo antes, es decir, $2173\frac{7}{9}$ líneas. El peso del cuerpo disminuye por el peso del aire ambiente. Y supongamos que esta disminución es del orden de 0,0011 del peso total, de suerte que dicho grave, cayendo en el vacío, recorrerá 2174 líneas en el tiempo de un segundo.

En cada día sideral de 23 h. 56′ 4″, un cuerpo que gire uniformemente en un círculo a la distancia de 19 615 800 pies del centro describirá en el tiempo de un segundo un arco de 1433, 46 pies, cuyo seno verso es de 0,0523656 pies, o de 7,54064 líneas. Por lo tanto, la fuerza con que los cuerpos descienden en la latitud de París es a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador debida al movimiento diurno de la Tierra como 2174 a 7,54064.

La fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador es a la fuerza centrífuga con que los cuerpos tienden a despegarse de la Tierra en la latitud de *París* de 48 grados, 50′, 10″, como el cuadrado del radio al seno del complemento de la susodicha latitud, esto es, como 7,54064 a 3, 267. Añádase esta fuerza a la fuerza con la que caen los graves a dicha latitud de *París* y el cuerpo en esa latitud cayendo con toda la fuerza de la gravedad en el tiempo de un segundo recorrerá 2177,267 líneas, o 15 pies parisinos, 1 pulgada y 5,267 líneas. Y toda la fuerza de la gravedad en dicha latitud será a la fuerza centrífuga de los cuerpos en el ecuador de la Tierra como 2177,267 a 7,54064 o como 289 a 1.

Por ello, si se representa la figura de la Tierra por APBQ, ahora ya no esférica, sino engendrada por la rotación de una elipse en torno al eje menor PQ, y ACQ*qca* es un canal lleno de agua que va desde el polo Q*q* al centro C*c* y después hasta el ecuador A*a*, el peso del agua en el brazo del canal AC*ca* tendrá que ser al peso del agua en el otro brazo del canal QC*cq* como 289 a 288, debido a que la fuerza centrífuga generada por el movimiento circular soportará una parte de las 289 del peso y la suprime mientras que el peso de las 288 partes del otro brazo sostiene a las restantes. Además, haciendo un cálculo (a partir del Corolario 2 de la Proposición XCI del Libro I) hallo que si la Tierra constase de materia uniforme y quedase desprovista de todo movimiento, y su eje PQ fuese al diámetro AB como 100 a 101, la gravedad en el punto Q de la Tierra sería a la gravedad en el mismo punto Q de una esfera descrita con centro en C y radio PC o QC como 126 a 125. Y por la misma razón, la gravedad en el punto A hacia un esferoide descrito en torno al eje AB por rotación de la elipse APBQ es la gravedad en el mismo punto A de una esfera descrita con centro en C y radio AC, como 125 a 126. Pues la gravedad hacia la Tierra en el punto A es la media proporcional entre las gravedades hacia la esfera y hacia el susodicho esferoide; por cuanto que la esfera, disminuyendo el diámetro PQ en la razón de 101 a 100, tiende a la figura de la Tierra, al igual que esta figura, al disminuir en la misma razón un tercer diámetro que fuese perpendicular a los dos anteriores AB y PQ, se convierte en el susodicho esferoide; y la gravedad en el punto A, en uno y otro caso, disminuye en la misma proporción muy aproximadamente. Por consiguiente, la gravedad en el punto A hacia una esfera descrita con centro en C y radio AC es a la gravedad en el punto A hacia la Tierra como 126 a 125½, y la gravedad en el punto Q hacia una esfera descrita con centro en C y radio QC es a la gravedad en el punto A hacia la esfera descrita con centro en C y radio AC, en razón de los diámetros (por la Proposición LXXII del Libro I), es decir, como 100 a 101. Únanse ahora estas tres razones, 126 a 125, 126 a 125½, y 100 a 101; resultará que la gravedad en Q hacia la Tierra es a la gravedad en A hacia la Tierra como 126 x 126 x 100 a 125 x 125½ x 101, o como 501 a 500.



Ahora, dado que (por el Corolario 3 de la Proposición XCI del Libro I) la gravedad en cada brazo de uno y otro canal AC*ca* y QC*cq* es como la distancia de cada lugar al centro de la Tierra, si dichos brazos se separan mediante superficies transversales y equidistantes en partes proporcionales a los todos, los pesos de cada parte en el brazo AC*ca* serán a los pesos de cada otra parte en el otro brazo como las magnitudes y las gravedades aceleratrices conjuntamente; es decir, como 101 a 100 y 500 a 501, o sea, como 505 a 501. Y por consiguiente, si la fuerza centrífuga de una parte cualquiera en el brazo AC*ca* generada por el movimiento diurno fuese a su propio peso como 4 a 505, de suerte que restase cuatro partes del peso total de cada una dividida en 505, los pesos en uno y otro brazo permanecerían iguales y por tanto el fluido permanecería en equilibrio. Sin embargo la fuerza centrífuga de cada una de las partes es a su peso como 1 a 289, es decir, la fuerza centrífuga que debería ser $\frac{4}{505}$ partes del peso es solamente $\frac{1}{289}$ parte del mismo. Y por lo mismo digo, por la regla áurea, que si la fuerza centrífuga $\frac{4}{505}$ hace que la altura del agua en el brazo AC*ca* supere a la altura del agua en el brazo QC*cq* en $\frac{1}{100}$ parte de la altura total, la fuerza centrífuga $\frac{1}{289}$ hará que el exceso de altura en el brazo AC*ca* sea solamente $\frac{1}{289}$ parte de la altura del otro brazo QC*cq*. Por lo tanto, el diámetro de la Tierra en el ecuador es al diámetro de la misma en los polos como 230 a 229. De suerte que, siendo el semidiámetro medio terrestre, según la medición de *Picard*, de 19 615 800 pies parisinos, o de 3923,16 millas (suponiendo para la milla 5000 pies), la Tierra será más alta en el ecuador que en los polos en un exceso de 85 472 pies, o de $17\frac{1}{10}$ millas. Y su altura en el ecuador será casi de 19 658 600 pies, mientras en los polos será de 19 573 000 pies.

Si un planeta fuera mayor o menor que la Tierra, manteniendo su misma densidad y su mismo tiempo periódico de revolución diaria, se mantendrá la proporción de la fuerza centrífuga a la gravedad y, por ello, se mantendrá también la proporción del diámetro entre polos respecto al diámetro en el ecuador. Pero si el movimiento diario se acelerase o retardase en una proporción cualquiera, la fuerza centrífuga aumentará o disminuirá en razón cuadrada de aquella proporción y, por lo mismo, la diferencia entre diámetros aumentará o disminuirá muy aproximadamente en razón del cuadrado de la susodicha proporción. Y si la densidad del planeta aumentase o disminuyese en una razón cualquiera, también la gravedad tendente hacia el mismo aumentará o disminuirá en la misma razón, y la diferencia entre diámetros, a la inversa, disminuirá en la razón del aumento de la gravedad o aumentará en la razón de la disminución de la gravedad. De donde, al girar la Tierra respecto a las fijas en 23 h. 56′, mientras Júpiter lo hace en 9 h. 56′ y ser los cuadrados de los tiempos como 29 a 5, mientras las densidades de los cuerpos en giro son como 400 a 94½, la diferencia de diámetros de Júpiter será a su diámetro menor como $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ a 1, o sea, como 1 a 9⅓, aproximadamente. De donde, al ser su diámetro mayor de 37″, su diámetro menor entre polos será de 33″ 25‴. Auméntese casi 3″ por la luz difusa, y los diámetros aparentes de este planeta resultan ser 40″ y 36″ 25‴; que resultan ser entre sí como 11⅙ a 10⅙, aproximadamente. Esto resulta así en la hipótesis de que el cuerpo de Júpiter sea uniformemente denso. Pero si su cuerpo fuese más denso hacia el plano ecuatorial que hacia los polos, sus diámetros podrían hallarse entre ellos en la relación de 12 a 11, o de 13 a 12, o quizá de 14 a 13. *Cassini* el año 1691 observó que el diámetro de Júpiter de este a oeste superaba en casi una decimoquinta parte de su longitud al otro diámetro. Y nuestro *Pound*, con un telescopio de 123 pies de largo y un buen micrómetro, midió los diámetros de Júpiter en 1719 con los resultados siguientes:

		Tiempo	**Diámetro máximo**	**Diámetro mínimo**	**Relación mutua**
	Día	***Hora***	***Partes***	***Partes***	
Enero	28	6	13,40	12,28	Como 12 a 11
Febrero	6	7	13,12	12,20	Como 13¾ a 12¾
Marzo	9	7	13,12	12,08	Como $12\frac{2}{3}$ a $11\frac{2}{3}$
Abril	9	9	12,32	11,48	Como 14½ a 13½

La teoría cuadra bastante bien con los fenómenos. Pues los planetas se calientan algo más por la luz del Sol hacia el ecuador, por lo que allí se endurecen algo más que hacia los polos.

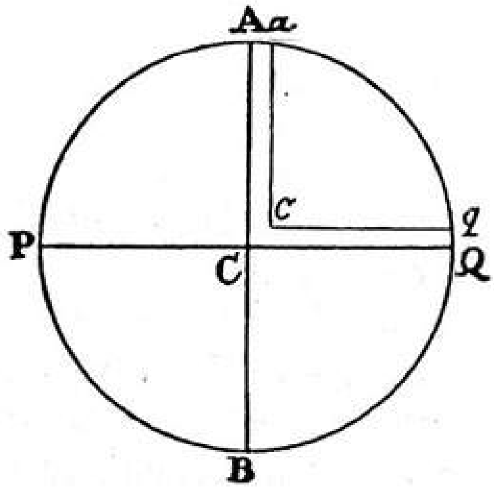
Por otra parte, que la gravedad disminuye en el ecuador debido a la rotación diaria de nuestra Tierra, y por tanto que la Tierra asciende allí más que en los polos (siempre que sea uniformemente densa) se verá por los experimentos con péndulos de los que se da cuenta en la Proposición siguiente.

Proposición xx. Problema iv[9]

Hallar y comparar entre ellos los pesos de los cuerpos en las distintas regiones de esta Tierra.

Puesto que los pesos de los brazos desiguales del canal de agua ACQ*qca* son iguales, y los pesos de las partes, proporcionales a los brazos enteros y colocadas semejantemente en ellos, son entre sí como los pesos de los todos, y por lo mismo son iguales entre sí, los pesos de las partes iguales y situadas semejantemente en los brazos serán inversamente como los brazos, es decir, inversamente como 230 a 229. E igual es la razón entre cuerpos homogéneos e iguales cualesquiera situados semejantemente en los brazos del canal. Sus pesos son inversamente como los brazos, es decir, inversamente como la distancia de los cuerpos al centro de la Tierra. Por lo tanto, si los cuerpos se hallan en las partes superiores del canal, esto es, en la superficie de la Tierra, sus pesos serán entre sí como los inversos de sus distancias al centro de la Tierra. Y por la misma razón los pesos en otras regiones cualesquiera por toda la superficie de la Tierra son entre sí como los inversos de las distancias de esos lugares al centro, y por tanto, bajo la hipótesis de que la Tierra es un esferoide, están dados en proporción.

De donde se viene a concluir en el Teorema de que el incremento del peso, caminando desde el ecuador hacia los polos, es aproximadamente como el seno verso del doble de la latitud, o, lo que es lo mismo, como el cuadrado del seno recto de la latitud. Y casi en esa misma razón se halla el incremento del arco de los grados de latitud sobre el meridiano. Y por lo mismo, puesto que la latitud de *París* es de 48.º 50′, la de los lugares del ecuador de 00.º 00′ y la de los polos de 90.º y los duplos de los senos versos son 11 134, 00 000, y 20 000, siendo el radio 10 000, y la gravedad en los polos es a la gravedad en el ecuador como 230 a 229, mientras el exceso de la gravedad en el polo es a la gravedad en el ecuador como 1 a 229, el exceso de la gravedad en la latitud de *París* será a la gravedad en el ecuador como 1 x (11 334/20 000) a 229, o también como 667 a 2 290 000. Por consiguiente, las fuerzas totales de la gravedad en esos lugares serán entre ellas como 2 295 667 a 2 290 000. Por lo tanto, dado que la longitud de los péndulos que oscilan en tiempos iguales es como las gravedades, y en la latitud de *París* la longitud de un péndulo que oscile cada segundo es de 3 pies parisinos y 8½ líneas, o mejor, debido al peso del aire, de $8\frac{5}{9}$ líneas, la longitud del péndulo en el ecuador se verá superada por la longitud del péndulo sincrónico de *París* con un exceso de 1,087 líneas. Y con cálculos similares se construye la tabla siguiente.



Latitud del lugar	Longitud del péndulo	Medida de un grado en el meridiano	Latitud del lugar	Longitud del péndulo	Medida de un grado en el meridiano
grados	*pies líneas*	*toesas*	*grados*	*pies líneas*	*toesas*
0	3 · 7,468	56637	46	3 · 8,461	57022
5	3 · 7,482	56642	7	3 · 8,494	57035
10	3 · 7,526	56659	8	3 · 8,528	57048
15	3 · 7,596	56687	9	3 · 8,561	57061
20	3 · 7,692	56724	50	3 · 8,594	57074
25	3 · 7,812	56769	55	3 · 8,756	57137
30	3 · 7,948	56823	60	3 · 8,907	57196
35	3 · 8,099	56882	65	3 · ?,044	57250
40	3 · 8,261	56945	70	3 · 9,162	57295
1	3 · 8,294	56958	75	3 · 9,258	57332
2	3 · 8,327	56971	80	3 · 9,329	57360
3	3 · 8,361	56984	85	3 · 9,372	57377
4	3 · 8,394	56997	90	3 · 9,387	57382
45	3 · 8,428	57010			

Por esta tabla se ve con claridad que la desigualdad de los grados es tan pequeña que en asuntos geográficos la figura de la Tierra puede considerarse esférica: sobre todo si la Tierra es algo más densa hacia el plano ecuatorial que hacia los polos.

Ahora bien, algunos astrónomos enviados a lejanas tierras para hacer observaciones astronómicas, han observado que los relojes de péndulo oscilaban más lentamente cerca del ecuador que en nuestras regiones. El primero fue el señor *Richer* que lo observó el año de 1672 en la isla de *Cayena*. Pues, mientras observaba el paso de las fijas por el meridiano en el mes de agosto, se dio cuenta de que su reloj se movía más lentamente que el movimiento medio del Sol con una diferencia de 2′ 28″ por día. Después preparó un péndulo simple que oscilaba al segundo, medido mediante un buen reloj y anotó la longitud del péndulo simple una vez por semana durante diez meses. Después, vuelto a *Francia*, comparó esa longitud del péndulo con la longitud del péndulo en *París* (que era de 3 pies parisinos y 8⅗ líneas) y halló que resultaba más corta en 1¼ líneas.

Más tarde nuestro *Halley* hacia 1677, navegando hacia la isla de *Sta. Elena*, observó que su reloj de péndulo se movía allí más lentamente que en Londres, pero no anotó la diferencia. Pero acortó la longitud del péndulo en más de una octava parte de pulgada, o sea, en una línea y media. Para hacer esto, como no alcanzaba el tornillo de la parte inferior del péndulo, interpuso un anillo de madera entre la tuerca del tornillo y el peso del péndulo.

Después, en el año 1682 los señores *Varin* y *Des Hayes* hallaron que la longitud del péndulo oscilante al segundo en el Real Observatorio de París era de 3 pies y $8\frac{5}{9}$ líneas. Con el mismo método hallaron que en la isla de *Gore* la longitud del péndulo isócrono era de 3 pies y $6\frac{5}{9}$ líneas, con una diferencia de 2 líneas respecto al anterior. Y ese mismo año navegando a las islas de *Guadalupe y Martinica* hallaron que la longitud del péndulo isócrono en esas islas era de 3 pies y 6½ líneas.

Posteriormente el señor *Couplet*, hijo, en junio de 1697, ajustó su reloj de péndulo al movimiento medio del Sol en el Real Observatorio de París de manera que concordase durante un tiempo largo con el movimiento del Sol. Después, navegando hasta *Lisboa* halló que en el mes de noviembre siguiente el reloj marchaba más lentamente que antes siendo la diferencia de 2′ 13″ cada 24 horas. Y al siguiente mes de marzo navegando hasta *Paraiba* observó que allí su reloj marchaba más despacio que en *París* siendo la diferencia de 4′ 12″ cada 24 horas. Afirma que el péndulo oscilando al segundo era en *Lisboa* 2½ líneas más corto y en *Paraiba* $3\frac{2}{3}$ más corto que en *París*. Más correctas hubieran sido las diferencias si las hubiera establecido en 1⅓ y $2\frac{5}{9}$. Ya que estas diferencias corresponden a las diferencias de tiempos de 2′ 13″ y 4′ 12″. No hay que fiarse de sus toscas observaciones.

En los años siguientes (1699 y 1700) *Des Hayes* viaja de nuevo a América y determinó que en las islas de *Cayena* y *Granada* la longitud del péndulo oscilando al segundo era algo menor de 3 pies y 6½ líneas, y que en la isla de *San Cristóbal* dicha longitud era de 3 pies y 6¾ líneas mientras que en la isla de *Sto. Domingo* era de 3 pies y 7 líneas.

Y en el año 1704, *Fueille* determinó en *Porto Bello* en América que la longitud del péndulo oscilante al segundo era de tres pies parisinos y sólo $5\frac{7}{12}$ líneas, es decir, casi tres líneas más corta que en *París*, pero la observación es errónea. Pues, pasando de allí a la isla *Martinica*, halla que la longitud del péndulo isócrono era solamente de tres pies parisinos y 5 10/12 líneas.

Ahora bien, la latitud de *Paraiba* es de 6.º 38′ sur, la de *Porto Bello*, 9.º 33″ norte y las latitudes de las islas de *Cayena*, *Gore*, *Guadalupe*, *Martinica*, *Granada*, *San Cristóbal* y *Santo Domingo*, son respectivamente, 4.º 55′, 14.º 40′, 14.º 00′, 14.º 44′, 12.º 6′, 17.º 19′ y 19.º 48′. Y el exceso de la longitud del péndulo en París sobre las longitudes de los péndulos isócronos observadas en esas latitudes es un poco mayor que el correspondiente a tenor de la tabla de longitudes del péndulo calculada poco más arriba. Y por tanto la Tierra es algo más alta en el ecuador que lo previsto en el cálculo anterior y algo más densa hacia el centro que en los pozos próximos a la superficie, salvo que los calores de la zona tórrida aumentasen un tanto la longitud del péndulo.

Picard ha observado, efectivamente, que una varilla de hierro que en invierno medía un pie de larga con el frío de los hielos, calentada al fuego resultaba de un pie y un cuarto de línea. Después, *De la Hire* observó que una varilla de hierro que en tiempo igualmente invernal era de seis pies de longitud, cuando se exponía al Sol del verano resultaba de seis pies y dos tercios de línea. En el primer caso el calor era mayor que en el segundo pero en éste el calor fue mayor que el de las partes externas del cuerpo humano, pues lo metales con el calor del sol estival se calientan en gran medida. Pero la varilla del péndulo en el reloj oscilatorio nunca se expone al calor del sol estival, nunca recibe un calor igual al calor de la superficie externa del cuerpo humano. Por lo mismo la varilla del péndulo del reloj de tres pies de larga, será un poco más larga en verano que en invierno, pero el exceso escasamente superará ¼ de línea. Por consiguiente, la diferencia total de longitud de péndulos que sean isócronos en las diferentes latitudes, no puede atribuirse a las diferencias de calor. Tampoco a los errores de los astrónomos enviados por *Francia*. Pues, aunque sus observaciones no concuerdan exactamente entre ellas, sin embargo los errores son tan pequeños que se pueden despreciar. Y todos convienen en algo, en que los péndulos isócronos son más cortos en el ecuador que en el Real Observatorio de París, siendo la diferencia no menor de una línea y cuarto y no mayor de $2\frac{2}{3}$ líneas. Por las observaciones de *Richer* en *Cayena* la diferencia resultaba de una línea y cuarto. Por las observaciones de *Des Hayes* dicha diferencia corregida resultaba de una línea y media o de una línea y tres cuartos de línea. Por las observaciones menos exactas de otros dicha diferencia resultaba de casi dos líneas. Esta diferencia pudo deberse en parte a errores de observación, en parte a la desemejanza de las partes interiores de la Tierra y de la altura de los montes y en parte a los distintos calores del aire.

En mi opinión, una varilla de hierro de tres pies de larga es en Inglaterra en invierno un sexto de línea más corta que en verano. Por los calores ecuatoriales, réstese esta cantidad de la diferencia de una línea y cuarto observada por *Richer* y quedará $1\frac{1}{12}$ líneas; cosa que concuerda bastante bien con $1\frac{87}{1000}$ líneas establecidas antes por la teoría. *Richer* repitió cada semana durante diez meses las observaciones hechas en *Cayena* y comparó las longitudes de la varilla de hierro del péndulo anotadas allí con las anotadas de igual modo en *Francia*. Diligencia y cautela que parecen faltar en otros observadores. Si sus observaciones son de fiar, la Tierra será más alta en el ecuador que en los polos con un exceso de casi 17 millas, como la teoría había determinado más arriba.

Proposición xxi. Teorema xvii

Los puntos equinocciales retroceden y el eje de la Tierra en cada revolución anual se balancea inclinándose dos veces hacia la eclíptica y retornando dos veces a la posición inicial.

Se sigue del Corolario 20 de la Proposición LXXI del Libro I. Pero este movimiento de nutación debe ser muy pequeño, y apenas o, ni apenas, sensible.

PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA XVIII[10]

Todos los movimientos lunares, y todas las desigualdades de los movimientos se siguen de los principios expuestos.

De la Proposición LXV del Libro I se sigue que los planetas mayores, mientras giran en torno al Sol, pueden arrastrar a otros planetas menores girando en torno a ellos mismos, y estos menores deben girar en elipses que tienen sus focos en los centros de los mayores. Pero por la acción del Sol sus movimientos resultarán perturbados de diversas formas, y sufrirán de las desigualdades que se observan en nuestra Luna. Esta, en efecto (por los Corolarios 2, 3, 4 y 5 de la Proposición LXVI del Libro I) se mueve rápidamente y con un radio trazado a la Tierra describe un área mayor que la correspondiente al tiempo y tiene una órbita menos curva y por ello se acerca más a la Tierra en las sicigias que en las cuadraturas, salvo en la medida en que la excentricidad lo impide. Ahora bien, la excentricidad es máxima (por el Corolario 9 de la Proposición LXVI) cuando el apogeo de la Luna ocurre en las sicigias, mientras que es mínima cuando acontece en las cuadraturas; y de aquí que la Luna es más veloz y más próxima a nosotros en el perigeo y más lenta y remota en el apogeo, en las sicigias que en las cuadraturas. Además, el apogeo avanza mientras que los nodos retroceden, pero con movimiento desigual. Pues el apogeo (por los Corolarios 7 y 8 de la Proposición LXVI) avanza más velozmente en las sicigias y regresa más lentamente en las cuadraturas, y el exceso del progreso sobre el regreso tiene una resultante anual hacia adelante. Los nodos, en cambio (por el Corolario 2 de la Proposición LXVI) reposan en las sicigias y retroceden muy rápidamente en las cuadraturas. Pero la latitud máxima de la Luna es mayor en sus cuadraturas (por el Corolario 10 de la Proposición LXVI) que en las sicigias, y el movimiento medio es más lento en el perihelio terrestre que en su afelio. Y éstas son las desigualdades más notables registradas por los astrónomos.

Pero hay también otras desigualdades no observadas por los anteriores astrónomos por medio de las cuales los movimientos lunares sufren perturbaciones tales que hasta la fecha no han podido ser reducidas a regla cierta alguna. Las velocidades o los movimientos horarios de los apogeos y nodos lunares y sus ecuaciones así como las excentricidades máximas en las sicigias y mínimas en las cuadraturas, o la desigualdad llamada variación, aumentan y disminuyen anualmente (por el Corolario 14 de la Proposición LXVI) en razón del cubo del diámetro aparente del Sol. Y la variación, además, aumenta o disminuye en razón del cuadrado del tiempo entre cuadraturas muy aproximadamente (por los Corolarios 1 y 2 del Lema X y el Corolario 16 de la Proposición LXVI del Libro I), pero esta desigualdad, en los cálculos astronómicos, suele incluirse en la prostaféresis lunar y confundirse con ella.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA V

Derivar los movimientos desiguales de los satélites de Júpiter y de Saturno a partir de los movimientos lunares.

Partiendo de los movimientos de nuestra Luna se derivan los movimientos análogos de las lunas o satélites de Júpiter del modo siguiente. El movimiento medio de los nodos del satélite exterior de Júpiter es al movimiento medio de los nodos de nuestra Luna en una razón compuesta de la razón cuadrada entre el tiempo periódico de la Tierra en torno al Sol y el tiempo periódico de Júpiter en torno al Sol, y de la razón simple entre el tiempo periódico del satélite en torno a Júpiter y el tiempo periódico de la Luna en torno a la Tierra (por el Corolario 16 de la Proposición LXVI del Libro I) y por tanto en cien años dicho nodo avanza 8.º 24′ hacia adelante. Los movimientos medios de los nodos de los satélites interiores son al movimiento del anterior como sus tiempos periódicos al tiempo periódico del exterior (por el mismo Corolario) y por tanto están dados. En cambio el movimiento del ápside de un satélite cualquiera hacia adelante es al movimiento regresivo de sus nodos como el movimiento del apogeo de nuestra Luna a su movimiento de los nodos (por el mismo corolario) y por tanto están dados. Pero este movimiento de los ápsides así hallado debe disminuirse en razón de 5 a 9 o de 1 a 2 aproximadamente, por razones que no hay espacio aquí de exponer. Las ecuaciones máximas de los nodos y del ápside de un satélite cualquiera casi son a las ecuaciones máximas de los nodos y el ápside de la Luna respectivamente como el movimiento de los nodos y del ápside de los satélites en el tiempo de una revolución de las ecuaciones primeras al tiempo de los nodos y del apogeo de la Luna en el tiempo de una revolución de las ecuaciones segundas. La variación de un satélite visto desde Júpiter es a la variación de la Luna como son entre sí todos los movimientos de los nodos en los tiempos en los que el satélite y la Luna regresan hacia el Sol, por el mismo Corolario; y por tanto, para el satélite exterior, no pasa de 5″ 12‴.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA XIX

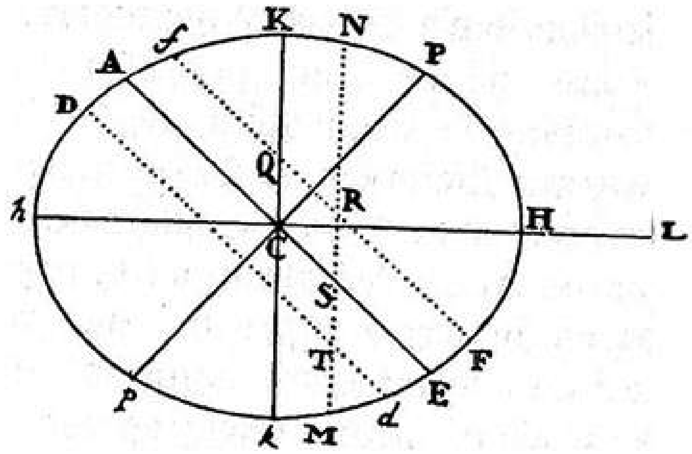
El flujo y reflujo del mar proceden de las acciones del Sol y de la Luna.

Cada día, tanto lunar como solar, debe crecer y decrecer el mar dos veces como se desprende de los Corolarios 19 y 20 de la Proposición LXVI del Libro I, lo mismo que se desprende que la máxima altura del agua en los mares profundos y abiertos sigue en un espacio menor de seis horas al paso de los astros por el meridiano del lugar, como ocurre en todo el recorrido del mar *Atlántico* y *Etiópico* desde *Francia* al *Cabo de Buena Esperanza* al igual que en el mar *Pacífico* en la costa *chilena* y *peruana*; en todos los cuales litorales la marea ocurre a las dos, tres o cuatro horas, salvo cuando el movimiento se propaga desde el océano profundo a través de fondos de poco calado y se retarda hasta la hora quinta, sexta, séptima o más. Cuento las horas desde la llegada de ambos astros al meridiano del lugar, tanto bajo como sobre el horizonte, y entiendo por horas del día lunar las vigesimocuartas partes del tiempo en el cual la Luna con el movimiento aparente diurno regresa al meridiano del lugar. La fuerza del Sol o de la Luna para elevar el mar es máxima en el mismo paso del astro por el meridiano del lugar. Pero la fuerza impresa en el mar en ese momento permanece durante algún tiempo y aumenta por causa de la nueva fuerza impresa después, hasta que el mar alcanza la altura máxima, cosa que ocurre al cabo de una o dos horas aunque más frecuentemente sea al cabo de tres cuando alcance las costas, o incluso más, si el mar es poco profundo. Pero los dos movimientos que los dos astros provocan, no se ven separadamente, sino que constituyen un cierto movimiento mixto. En la conjunción de los astros o en la oposición también se juntan sus efectos, y se componen el flujo o reflujo máximos. En las cuadraturas el Sol aporta agua cuando la Luna la retrae, y la retrae cuando la Luna la aporta; y de la diferencia de los efectos surgirá la marea más pequeña de todas. Y puesto que, bajo el testimonio de la experiencia, es mayor el efecto de la Luna que el del Sol la altura máxima del agua ocurre aproximadamente en la tercera hora lunar. Fuera de las sicigias y de las cuadraturas, la marea máxima que por la sola fuerza lunar debería siempre ocurrir en la tercera hora lunar y con la sola fuerza solar en la tercera hora solar, con la composición de ambas fuerzas ocurre en un tiempo intermedio más próximo a la tercera hora lunar; por ello al pasar la Luna de las sicigias hacia las cuadraturas, cuando la tercera hora solar precede a la tercera lunar, la altitud máxima de las aguas precede también a la tercera hora lunar, y esto con intervalo máximo poco después de los octantes lunares; y con intervalos parecidos la marea máxima seguirá a la tercera hora lunar al pasar la Luna de las cuadraturas hacia las sicigias. Esto es así en mar abierto. Pues en las desembocaduras de los ríos las mareas máximas, en iguales circunstancias, alcanzan más tarde su «*ἀκμία*» (acmé).

Pero los efectos de los astros dependen de sus distancias a la Tierra. Pues a menores distancias son mayores sus efectos, y menores a mayores distancias, y esto en razón del cubo de sus diámetros aparentes. Por tanto, el Sol, en invierno, hallándose en el perigeo, produce efectos mayores, y hace que las mareas en las sicigias sean algo mayores y en las cuadraturas algo menores (en circunstancias iguales) que en verano; y la Luna en el perigeo de cada mes genera mareas más grandes que quince días antes o después, cuando se halla en el apogeo. De donde se sigue que dos mareas absolutamente máximas no se sigan una a otra en sicigias inmediatamente sucesivas.

También dependen los efectos de ambos astros de su declinación o distancia al ecuador. Pues si el astro se situase en el polo, atraería hacia allí a cada parte de agua de modo constante, sin aumento y disminución de la acción, con lo que no provocaría ninguna reciprocación de movimientos. Por consiguiente, los astros al apartarse del ecuador hacia los polos, pierden gradualmente sus efectos, y por ello generarán menores mareas en las sicigias solsticiales que en las equinocciales. En cambio, en las cuadraturas solsticiales provocarán mayores mareas que en las cuadraturas equinocciales, debido a que la Luna situada ahora en el ecuador supera en su efecto al del Sol más que nunca. Por tanto ocurren las mareas máximas en las sicigias y las mínimas en las cuadraturas de los astros, en torno a las fechas de uno y otro equinoccio. Y a una marea máxima en las sicigias acompaña siempre, como muestra la experiencia, una marea mínima en las cuadraturas. Mas, por la menor distancia del Sol a la Tierra en invierno que en verano, ocurre que las mareas máximas y mínimas precedan más frecuentemente que sigan al equinoccio de primavera y más frecuentemente le sigan que le precedan en el otoño.

También dependen los efectos de los astros de la latitud de los lugares. Represente A*p*EP a la Tierra cubierta de agua profunda por todas partes; C su centro; P, *p* los polos; AE el ecuador; F un punto cualquiera fuera del ecuador; F*f* el paralelo del punto; D*d* el paralelo correspondiente al anterior al otro lado del ecuador; L el lugar ocupado por la Luna tres horas antes; H el lugar de la Tierra perpendicularmente debajo; *h* el lugar opuesto al anterior; K, *k* los lugares distantes de los anteriores 90.º, CH, C*h* las alturas máximas del mar medidas desde el centro de la Tierra; y CK, C*k* las alturas mínimas: y si con los ejes H*h*, K*k*, se describe una elipse y con la revolución de dicha elipse se obtiene el esferoide HPK*hpk*, esta figura representará muy aproximadamente a la del mar, y CF, C*f*, CD, C*d*, serán las alturas del mar en los lugares F, *f*, D, *d*. Además, en la susodicha revolución de la elipse un punto cualquiera N, describirá un círculo NM secante de los paralelos F*f*, D*d* en unos lugares cualesquiera R, T, y del ecuador AE en S; CN será entonces la altura del mar en todos los lugares R, S, T, situados en este círculo. De aquí que, en la revolución diaria de cualquier punto F, el aflujo será máximo en F, en la tercera hora después del paso de la Luna por el meridiano sobre el horizonte; después, el reflujo máximo en Q tres horas después del ocaso de la Luna; después el aflujo máximo en *f* a la tercera hora siguiente al paso de la Luna por el meridiano bajo el horizonte; por fin el reflujo máximo en Q en la tercera hora después del orto lunar; y el aflujo posterior en *f* será menor que el aflujo anterior en F. Pues el mar entero se divide en dos flujos completamente hemisféricos, uno en el hemisferio KH*k* vertido hacia el lado boreal y el otro en el hemisferio K*hk*, a los cuales se puede llamar flujo boreal y flujo austral. Estos flujos oponiéndose entre ellos y alternativamente acuden siempre a los meridianos de cada lugar, mediando entre ellos un tiempo de doce horas lunares. Y puesto que las regiones boreales participan en mayor grado del flujo boreal y las australes del austral, de ello se sigue que surjan mareas alternativamente mayores y menores en cada uno de los lugares, fuera del ecuador, por los que nacen o se ponen los astros. Pero la marea mayor, cuando la Luna declina hacia el vértice del lugar, ocurre casi en la hora tercera del paso de la Luna por el meridiano sobre el horizonte, y al cambiar la declinación de la Luna empieza a disminuir. Y la máxima diferencia de flujos ocurre en la época de los solsticios; sobre todo si el nodo ascendente de la Luna viene a ocurrir al principio de Aries. Así atestigua la experiencia que las mareas matutinas en invierno superan a las vespertinas y las vespertinas superan en verano a las matutinas, diferencia que en *Plymouth* alcanza un pie de altura, mientras que en *Bristol* llega a quince pulgadas, según las observaciones de *Colepress* y de *Sturmy*.



Pero los movimientos descritos hasta aquí cambian un tanto debido a aquella fuerza de reciprocación de las aguas, por la que la marea del mar, incluso habiendo cesado las acciones de los astros, podría continuar durante algún tiempo. Esta conservación del movimiento impreso disminuye la diferencia de mareas alternas; y hace mayores las mareas inmediatamente posteriores a las sicigias, mientras hace disminuir a las inmediatamente posteriores a las cuadraturas. De lo que resulta que las mareas alternas en *Plymouth* y *Bristol* no difieren entre sí más de un pie o quince pulgadas de altura; y que las mareas mayores de todas en esos mismos puertos no sean las primeras desde las sicigias, sino las terceras. También se retrasan todos los movimientos por su tránsito por los vados, hasta el punto de que las mareas mayores de todas en determinados estrechos y desembocaduras de ríos, sean las cuartas o incluso las quintas después de las sicigias.

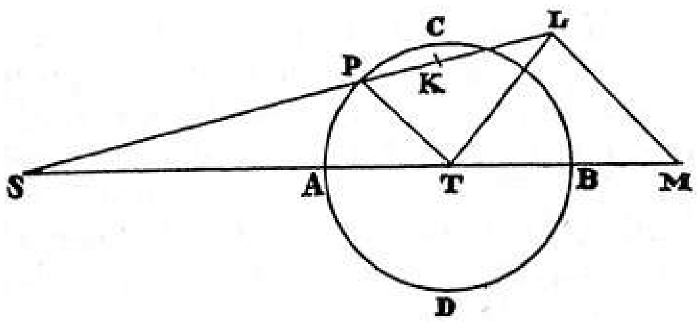
Además puede ocurrir que la marea se propague desde el océano hacia un mismo puerto por estrechos diferentes, y llegue primero por un estrecho que por otro; en cuyo caso la misma marea, dividida en dos arribadas o más, podría componer movimientos nuevos de distintas clases. Imaginemos que dos mareas iguales llegan al mismo puerto desde lugares distintos, de las cuales la primera precede a la segunda en seis horas, y acontezca en la tercera hora después del paso de la Luna por el meridiano del puerto. Si la Luna en este paso por el meridiano se hallare en el ecuador, vendrán cada seis horas aflujos iguales, los cuales incidiendo sobre los reflujos mutuos los igualarán a los aflujos, haciendo de este modo que en el espacio de ese día el agua repose tranquila. Si en ese momento la Luna declinase del ecuador, las mareas ocurrirán en el océano alternativamente mayores y menores, como se ha dicho; y de aquí se propagarán hacia el dicho puerto dos aflujos mayores y dos menores, en veces alternas. Pero los dos aflujos mayores compondrán una muy grande elevación de agua en el medio entre ambos, el aflujo mayor y menor harán que el agua ascienda a una altura media en el medio entre ambos, y entre los dos aflujos menores el agua ascenderá a la altura mínima. De este modo, en el espacio de veinticuatro horas, el agua alcanzará la máxima altura no dos veces como suele ocurrir, sino solamente una vez y una sola vez la mínima; y la altura máxima, si la Luna declina hacia el polo sobre el horizonte del lugar, ocurrirá en la hora sexta o en la treinta después del paso de la Luna por el meridiano, y al cambiar la declinación de la Luna se tornará en reflujo. Un ejemplo de todo lo cual ha ofrecido *Halley* a partir de las observaciones de los navegantes en el puerto de *Batshae* en el reino de *Tonquin* con una latitud boreal de 20.º 50′. Allí el agua al día siguiente del paso de la Luna por el ecuador se estanca, después, al declinar la Luna hacia el Norte empieza a fluir y refluir, no dos veces como en otros puertos, sino una sola vez cada día; y la marea ocurre al ocaso de la Luna mientras la bajamar máxima ocurre al orto lunar. Con la declinación de la Luna aumenta esta marea hasta el día séptimo u octavo, y después durante otros siete días decrece gradualmente como antes había crecido; y cesa con el cambio de declinación de la Luna, y al fin se torna en reflujo. A partir de ese momento el reflujo coincide con el ocaso de la Luna y el aflujo con el nacimiento, hasta que de nuevo cambie la declinación. Doble es la entrada a este puerto y a los estrechos próximos, una desde el océano chino entre el continente y la isla de *Leucoma* y la otra desde el mar Indico entre el continente y la isla de *Borneo*. Dejo para observaciones de las costas vecinas el determinar si la marea procedente del mar Indico en doce horas y la procedente del mar de China en seis a través de dichos estrechos, incidiendo así en las horas lunares tercera y novena, llegan a componer movimientos de este género, o si más bien es otra la condición de aquellos mares.

Hasta ahora he expuesto las causas de los movimientos de la Luna y de los mares. Ahora será conveniente añadir algo sobre la cantidad de los movimientos.

Proposición xxv. Problema vi

Hallar las fuerzas del Sol para perturbar los movimientos de la luna.

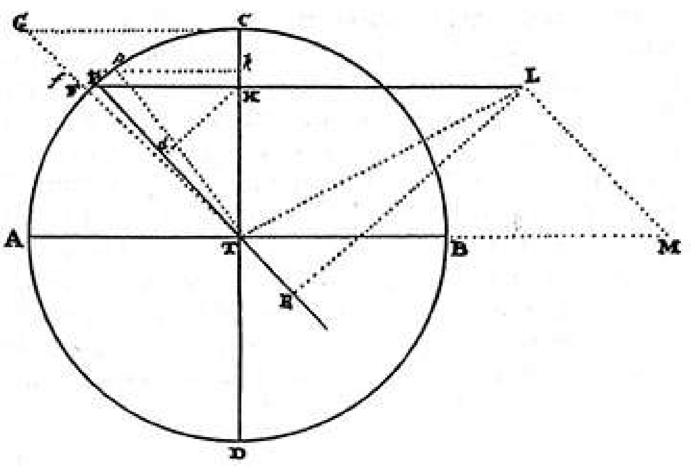
Representе S el Sol, T la Tierra, P la Luna, CABD la órbita de la Luna. Sobre SP tómese SK igual a ST; y sea SL a SK en razón cuadrada de SK a SP, y trácese LM paralela a PT; y si la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia el Sol se representa por la distancia ST o SK, será SL la gravedad aceleratriz de la Luna hacia el Sol. Esta fuerza se compone de las partes SM y LM, de las cuales LM y la parte TM de SM perturban el movimiento de la Luna, como se expuso en la Proposición LXVI y sus Corolarios del Libro I. En tanto que la Tierra y la Luna giran en torno a un centro común de gravedad, también será perturbado el movimiento de la Tierra en torno a dicho centro por fuerzas similares; pero las sumas, tanto de las fuerzas como de los movimientos son susceptibles de ser referidos a la Luna, y representar las sumas de las fuerzas por medio de las líneas TM y ML análogas a ellas. La fuerza ML en su valor medio es a la fuerza centrípeta, con la que la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia PT, como la razón cuadrada de los tiempos de la Luna en torno a Ja Tierra y de la Tierra en torno al Sol (por el Corolario 17 de la Proposición LXVI del Libro I), es decir, como la razón cuadrada de 27d. 7h. 43′ a 365 d. 6h. 9′, o sea, como 1000 a 178 725 o también como 1 a $178^{29}/_{40}$. Pero hemos hallado en la Proposición Cuarta que si la Tierra y la Luna giran; en torno a su centro común de gravedad, su distancia mutua media será de 60½ semidiámetros medios terrestres muy aproximadamente. Y la fuerza con la que la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia PT de 60½ semidiámetros terrestres es a la fuerza con la que puede girar, en el mismo tiempo a la distancia de 60 semidiámetros, como 60½ a 60; y esta fuerza es a la fuerza de la gravedad entre nosotros como 1 a 60 x 60, muy aproximadamente. Por consiguiente, la fuerza media ML es a la fuerza de la gravedad en la superficie de la Tierra como 1 x 60½ a 60 x 60 x 60 x $178^{29}/_{40}$, o también como 1 a 638092,6. De suerte que por la proporción de las líneas TM, ML está dada también la fuerza TM; y éstas son las fuerzas del Sol por las que resultan perturbados los movimientos de la Luna. Q. E. I.



PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA VII

Hallar el incremento horario del área que, con un radio trazado a la Tierra, describe la Luna en una órbita circular.

Hemos dicho que el área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra es proporcional al tiempo, salvo en la medida en que el movimiento lunar es perturbado por la acción del Sol. Nos proponemos investigar aquí la desigualdad del momento, o del incremento horario. Para que el cálculo resulte más sencillo, supongamos que la órbita de la Luna es circular, despreciemos todas las desigualdades, con la sola excepción de la que tratamos aquí. Pero por la enorme distancia del Sol, supongamos también que las líneas SP, ST son paralelas entre sí. De este modo la fuerza LM se reduce siempre a su valor medio TP, al igual que la fuerza TM se reduce a su valor medio 3PK. Estas fuerzas (por el Corolario II de las Leyes) componen la fuerza TL; y esta fuerza, si se hace descender la perpendicular LE sobre el radio TP, se descompone en las fuerzas TE, EL, de las cuales TE, actuando siempre según el radio TP ni acelera ni retrasa la descripción del área TPC realizada por el susodicho radio TP; mientras que EL actuando según la perpendicular, la acelera o retarda, en la medida en que acelera o retarda a la Luna. Esta aceleración de la Luna, a su paso de la cuadratura C a la conjunción A, realizada en cada momento de tiempo, es como la misma fuerza aceleratriz, es decir, como $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Representese el tiempo por el movimiento medio lunar o (lo que casi es lo mismo) por el ángulo CTP, o también por el arco CP. Sobre CT elévese la normal CG igual a la propia CT. Y dividiendo el arco cuadrantal AC en innumerables partículas iguales P*p*, etc., por las que se representasen otras tantas partículas iguales de tiempo, y trazada *pk* perpendicular a CT, únanse TG con las prolongaciones de KP, *kp* cortándose en F y *f*; y FK será igual a TK, y K*k* será a PK como P*p* a T*p*, es decir, en una razón dada, y por consiguiente FK x K*k* o el área FK*kf* sera como $\frac{3PK \times TK}{TP}$, esto es, como EL; y, componiendo, el área total de GCKF como la suma de todas las fuerzas EL impresas en la Luna en el tiempo total CP, y por tanto también como la velocidad generada con esa suma, o sea, como la aceleración de la descripción del área CTP, o incremento del momento. La fuerza con la que la Luna podría girar en torno a la Tierra en reposo a la distancia TP, en su tiempo periódico CADB de 27d. 7h. 43′, haría que un cuerpo, cayendo en el tiempo CT, describiese la longitud ½CT, y adquiriría mientras tanto una velocidad igual a aquella con la que la Luna se mueve en su órbita. Esto es evidente por el Corolario 9 de la Proposición IV del Libro I. Pero, puesto que la perpendicular K*d* abatida sobre TP es la tercera parte de la propia EL, y la mitad de TP o de ML en los octantes, la fuerza EL en los octantes, cuando mayor resulta, superará a la fuerza ML en razón de 3 a 2, y por lo mismo, será a la fuerza con la cual la Luna puede girar en torno a la Tierra en reposo en su tiempo periódico, como 100 a $^{2}/_{3}$ x 17 872½, o sea, 11 915, y en el tiempo CT deberá generar una velocidad que fuese la $^{100}/_{11915}$ parte de la velocidad lunar, mientras que en el tiempo CPA generaría una velocidad mayor en la proporción de CA a CT o TP. Represéntese la fuerza máxima en los octantes EL por medio del área FK x K*k*, igual al rectángulo ½TP x P*p*. Y la velocidad que la fuerza máxima puede generar en un tiempo cualquiera CP, será a la velocidad que toda fuerza menor EL genera en el mismo tiempo, como el rectángulo ½TP x CP al área KCGF: en cambio, en el tiempo entero CPA, las velocidades generadas serán entre sí como el rectángulo ½TP x CA y el triángulo TCG, o como el arco cuadrantal CA y el radio TP. Por lo tanto (por la Proposición IX del Libro V de los Elementos) la última velocidad, generada en todo el tiempo será $^{100}/_{11915}$ partes de la velocidad de la Luna. A esta velocidad de la Luna, que es análoga al momento medio del área, añádase o réstese la mitad de la otra velocidad; y si se representa el momento medio por el número 11 915, la suma 11 915 + 50, o sea, 11 965 representará el momento máximo del área en la sicigia A, mientras que la diferencia 11 915 - 50, o sea, 11 865 el momento mínimo de la misma en las cuadraturas. Por consiguiente, las áreas descritas en tiempos iguales en las sicigias y en las cuadraturas son entre sí como 11 965 a 11 865. Añádase al momento mínimo 11 865 un momento que sea a la diferencia 100 de los momentos como el trapecio FKCG al triángulo TCG (o lo que es lo mismo, como el seno cuadrado de PK al cuadrado del radio TP, esto es, como P*d* a TP) y la suma representará el momento del área cuando la Luna se halla en un lugar P intermedio.



Todo esto es así, en la hipótesis de que el Sol y la Tierra están en reposo, y la Luna gira en el tiempo sinódico de 27d. 7h. 43′. Pero como el período sinódico lunar sea en realidad de 29d. 12h. 44′, deben aumentarse los incrementos de los momentos en razón del tiempo, esto es, en razón de 1 080 853 a 1 000 000. De este modo el incremento total, que era $^{100}/_{11915}$ partes del momento medio será ahora de $^{100}/_{11023}$ partes del mismo. Por ello el momento del área en la cuadratura de la Luna será a su momento en la sicigia como 11 023 - 50 a 11 023 + 50, o sea, como 10 973 a 11 073; y a su momento, cuando la Luna se halla en otro lugar intermedio cualquiera P, como 10 973 a 10 973 + P*d*, siendo TP igual a 100.

Por lo tanto, el área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra en cada una de las partículas iguales de tiempo, es muy aproximadamente como la suma del número 219,46 y el seno verso del doble de la distancia de la Luna a la cuadratura próxima, en un círculo cuyo radio es la unidad. Todo esto es así cuando la variación en los octantes es de valor medio. Pero si la variación es allí mayor o menor, dicho seno verso debe aumentarse o disminuirse en la misma razón.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA VIII

Hallar la distancia de la Luna a la Tierra a partir del movimiento horario de la Luna.

El área que la Luna, con un radio trazado a la Tierra, describe en cada uno de los momentos de tiempo, es como el movimiento horario de la Luna y el cuadrado de la distancia de la Luna a la Tierra conjuntamente; y por tanto, la distancia de la Luna a la Tierra está en razón compuesta de la raíz cuadrada del área directamente y de la raíz cuadrada del movimiento horario inversamente. Q. E. I.

COROLARIO 1. De aquí que venga dado el diámetro aparente de la Luna, toda vez que es inversamente como su distancia a la Tierra. Intenten los astrónomos comprobar la medida en que esta regla concuerda con los fenómenos.

COROLARIO 2. De aquí también que la órbita lunar pueda definirse a partir de los fenómenos más exactamente que antes.

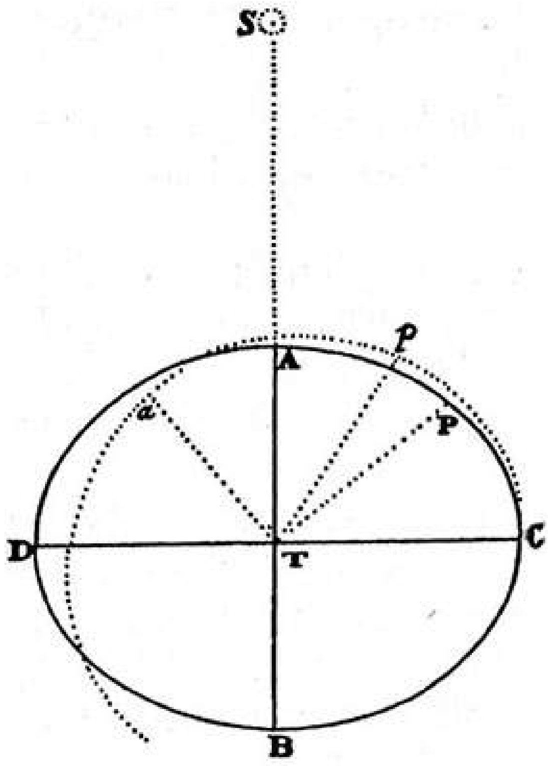
PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA IX

Hallar los diámetros de la órbita en que debe moverse la Luna sin excentricidad.

La curvatura de la trayectoria que describe un móvil, si es atraído según la perpendicular a dicha trayectoria, es directamente como la atracción e inversamente como el cuadrado de la velocidad. Supongo que las curvaturas de las líneas son entre sí como las razones últimas de los senos o de las tangentes de los ángulos de contacto pertenecientes a radios iguales, cuando tales radios disminuyen infinitamente. Pero la atracción de la Luna hacia la Tierra en las sicigias es el exceso de su gravedad hacia la Tierra sobre la fuerza del Sol 2PK (véase figura, Proposición XXV) por la que la gravedad aceleratriz de la Luna hacia el Sol supera a la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia el Sol o es superada por ella. Pero en las cuadraturas dicha atracción es la suma de la gravedad de la Luna hacia la Tierra y de la fuerza solar KT, con la que la Luna es atraída hacia la Tierra. Si llamamos N a $\frac{AT + CT}{2}$ estas atracciones son como

$$\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N} \text{ y } \frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$$

muy aproximadamente; o también como 178 725N x CT^2 - 2000AT^2 x CT y 178 725N x AT^2 + 1000CT^2 x AT. Pues, si la gravedad aceleratriz de la Luna hacia la Tierra se representa por el número 178 725, la fuerza media ML, que en las cuadraturas es PT o TK y atrae a la Luna hacia la Tierra, será 1000, mientras que la fuerza media TM en las sicigias será 3000; de la cual, si se resta la fuerza media ML, quedará 2000, fuerza con la que en las sicigias es atraída la Luna por la Tierra, y a la cual ya he denominado antes 2PK. Pero la velocidad de la Luna en las sicigias A y B es a su velocidad en las cuadraturas C y D, como CT a AT y el momento del área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra en las sicigias al momento de la misma área en las cuadraturas conjuntamente, esto es, como 11 073CT a 10 973AT.



Tómese inversamente el cuadrado de esta razón y directamente la primera razón y resultará la curvatura de la órbita lunar en las sicigias a la curvatura de la misma en las cuadraturas como 120 406 729 x 178 725AT^2 x CT^2 x N - 120 406 729 x 2000AT^4 x CT a 122 611 329 x 178 725AT^2 x CT^2 x N + 122 611 329 x 1000CT^4 x AT, esto es, como 2 151 969AT x CT x N - 24 081AT^3 a 2 191 371AT x CT x N + 12 261CT^3.

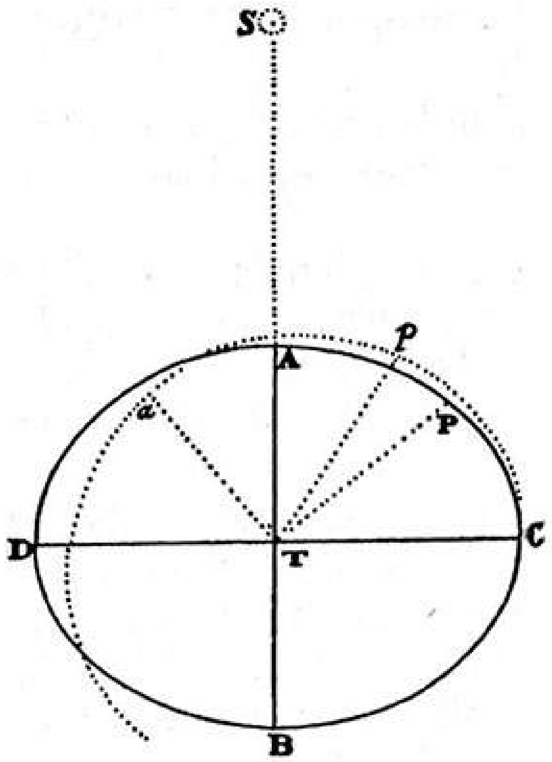
Puesto que la figura de la órbita lunar se desconoce, supongamos en su lugar la elipse DBCA, en cuyo centro T se halle la Tierra, y cuyo eje mayor DC yace entre las cuadraturas, mientras el menor AB yace entre las sicigias. Pero puesto que el plano de esta elipse se mueve con un movimiento angular en torno a la Tierra, y la trayectoria cuya curvatura consideramos debe ser descrita en un plano carente por completo de movimiento angular, debemos considerar la figura que describe la Luna al girar en elipse sobre este plano, esto es, la figura C*pa*, cada uno de cuyos puntos *p* se halla tomando un punto cualquiera P en la elipse que represente el lugar de la Luna, y trazando T*p* igual a TP con la condición de que el ángulo PT*p* sea igual al movimiento aparente del Sol efectuado desde el momento de la cuadratura C; o (lo que viene a ser lo mismo) de modo que el ángulo CT*p* sea al ángulo CTP como el tiempo de la revolución sinódica al tiempo de la revolución periódica, o sea, como 29d. 12h. 44′ a 27d. 7h. 43′. Tómese, pues, el ángulo CT*a* en la misma razón al ángulo CTA, y sea la longitud T*a* igual a la longitud TA, y *a* será el ápside inferior y C el superior de esta órbita C*pa*. Estableciendo proporciones encuentro que la diferencia entre la curvatura de la órbita C*pa* en el vértice *a* y la curvatura del círculo con centro en T y radio TA es a la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice A y la curvatura de ese mismo círculo como la razón cuadrada del ángulo CTP al ángulo CT*p*; y también que la curvatura de la elipse en A es a la curvatura del antedicho círculo como la razón cuadrada de TA a TC; y también que la curvatura del círculo antedicho es a la curvatura del círculo trazado con centro en T y radio TC como TC a TA; mientras que la curvatura de este último es a la curvatura de la elipse en C como la razón cuadrada de TA a TC; y también que la diferencia entre la curvatura de la elipse en el vértice C y la curvatura del segundo círculo mencionado es a la diferencia entre la curvatura de la figura T*pa* en el vértice C y la curvatura del mismo recién mencionado círculo como la razón cuadrada del ángulo CT*p* al ángulo CTP. Razones que, por lo demás, son fáciles de obtener a partir de los senos de los ángulos de contacto y de las diferencias de ángulos. Y comparándolas entre sí, resulta que la curvatura de la figura C*pa* en *a* es a su misma curvatura en C como AT^3 + 16 824/100 000 CT^2 x AT a CT^3 + 16 824/100 000 AT^2 x CT. Donde el número 16 824/100 000 representa la diferencia de los cuadrados de los ángulos CTP y CT*p* dividida por el cuadrado del ángulo menor CTP, o (lo que es lo mismo), la diferencia de los cuadrados de los tiempos 27d. 7h. 43′ y 29d. 12h. 44′ dividida por el cuadrado del tiempo 27d. 7h. 43′.

Por consiguiente, dado que *a* representa la sicigia de la Luna y C su cuadratura, la proporción hallada debe ser la misma que la proporción de la curvatura de la órbita de la Luna en las sicigias a su curvatura en las cuadraturas, proporción hallada más arriba. Por tanto, para hallar la proporción de CT a AT, multiplico entre sí medios y extremos. Y los términos resultantes divididos por AT x CT producen 2062,79CT^4 - 2 151 969N x CT^3 + 368 676N x AT x CT^2 + 36 342AT^2 x CT^2 - 362 047N x AT^2 x CT + 2 191 371N x AT^3 + 4051,4AT^4 = 0. Aquí, por la semisuma N de los términos AT y CT escribo 1, y por su semidiferencia escribo *x*, resulta CT = 1 + *x*, y AT = 1 - *x*; trasladando éstos a la ecuación y resolviendo la ecuación resultante se obtiene *x* igual a 0,00719, y por tanto el semidiámetro CT resulta 1,00719, y el semidiámetro AT 0,99281, números que son como $70\frac{1}{14}$ y $69\frac{1}{14}$ muy aproximadamente. Luego la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas (dejando de lado la consideración de la excentricidad) como $69\frac{1}{14}$ a $70\frac{1}{14}$, o en números redondos como 69 a 70.

Proposición xxix. Problema x

Hallar la variación de la Luna.

Procede esta desigualdad en parte de la forma elíptica de la órbita lunar, y en parte de la desigualdad de los momentos del área que describe la Luna con un radio trazado a la Tierra. Si la Luna P se moviera en la elipse DBCA en torno a la Tierra en reposo en el centro de la elipse, y con el radio TP trazado a la Tierra describiera el área CTP proporcional al tiempo, y el semidiámetro mayor CT fuese al semidiámetro menor TA como 70 a 69, la tangente del ángulo CTP sería a la tangente del ángulo del movimiento medio calculado desde la cuadratura C como el semidiámetro TA de la elipse a su semidiámetro TC, o como 69 a 70. Pues la descripción del área CTP, al pasar la Luna de la cuadratura a la sicigia, debe acelerarse en una razón tal que el momento en la sicigia de la Luna sea a su momento en la cuadratura como 11 073 a 10 973, y de modo que el exceso del momento en un lugar intermedio cualquiera P sobre el momento cu la cuadratura sea como el cuadrado del seno del ángulo CTP. Cosa que ocurre con bastante exactitud si la tangente del ángulo CTP disminuye como la raíz cuadrada de la razón del número 10 973 al número 11 073, es decir, en la razón del número 68,6877 al número 69. De este modo, la tangente del ángulo CTP será ahora a la tangente del movimiento medio como 68,6877 a 70 y el ángulo CTP en los octantes, donde el movimiento medio es de 45.º, resultará de 44.º 27′ 28″, que restado del ángulo del movimiento medio de 45.º deja un resto de variación máxima de 32′ 32″. Esto sería así si la Luna, al pasar de la cuadratura a la sicigia, recorriera un ángulo de sólo 90.º. Pero por el movimiento de la Tierra, por el cual el Sol aparentemente se adelanta, la Luna, hasta que alcanza al Sol, describe un ángulo CT*a* mayor que un ángulo recto en la proporción del tiempo de la revolución sinódica lunar al tiempo de la revolución periódica, es decir, en la razón de 29d. 12h. 44′ a 27d. 7h. 43′. Y de esta manera todos los ángulos en torno al centro de T se dilatan en esa proporción, con lo que la variación máxima, que en otro caso sería de 32′ 32″, aumentada ahora en esa razón, se torna de 35′ 10″.



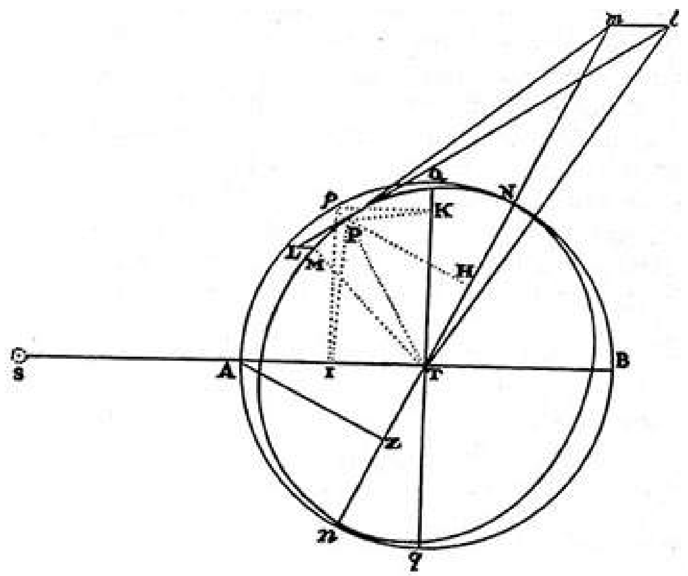
Este es su valor a la distancia media del Sol a la Tierra, ignorando las diferencias que puedan surgir de la curvatura del Orbe Máximo o de la mayor acción del Sol sobre la Luna menguante y nueva que creciente y llena. A otras distancias del Sol a la Tierra, la variación máxima está en razón compuesta de la razón cuadrada del tiempo de revolución sinódica lunar directamente (dado el tiempo del año) e inversamente de la razón cúbica de la distancia del Sol a la Tierra. Por consiguiente, en el apogeo del Sol, la variación máxima es de 33′ 14″, mientras que en su perigeo es de 37′ 11″, siempre que la excentricidad del Sol sea al semidiámetro transversal del Orbe Máximo como $16\frac{15}{16}$ a 1000.

Hemos investigado hasta ahora la variación en una órbita no excéntrica, en la cual, por cierto, la Luna está siempre en sus octantes a la distancia media de la Tierra. Si la Luna, debido a su excentricidad, dista más o menos de la Tierra que si se hallase situada en dicha órbita, la variación puede ser entonces algo mayor o menor que lo establecido con la regla aquí dada; pero dejo para los astrónomos la tarea de determinar mediante los fenómenos el exceso o el defecto.

Proposición xxx. Problema xi

Hallar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita circular.

Representen S al Sol, T a la Tierra, P a la Luna, NP*n* la órbita de la Luna, N*pn* la proyección de la órbita sobre el plano de la eclíptica; N*n*, los nodos, *n*TN*m* la línea de los nodos prolongada infinitamente; PI, PK, perpendiculares trazadas sobre el plano de la eclíptica; A, B, las sicigias de la Luna en el plano de la eclíptica; AZ, una perpendicular sobre la línea de los nodos N*n*; Q*q*, las cuadraturas de la Luna en el plano de la eclíptica, y *p*K una perpendicular sobre la línea Q*q* situada entre las curvaturas. La fuerza del Sol para perturbar el movimiento de la Luna (por la Prop. XXV) es doble, una proporcional a la línea LM del esquema de dicha Proposición, y la otra proporcional a la línea MT. Y la Luna es atraída hacia la Tierra con la primera de las fuerzas y hacia el Sol con la segunda según una línea recta paralela a la recta ST trazada de la Tierra al Sol. La primera fuerza LM actúa según el plano de la órbita lunar, y por ello en nada cambia la situación del plano. Por tanto, ésta debe ignorarse. La segunda fuerza MT, con la que se perturba el plano de la órbita lunar, es la misma que 3PK o que 3IT. Y esta fuerza (por la Propos. XXV) es a la fuerza con la cual la Luna podría girar uniformemente en su tiempo periódico y en un círculo en torno a la Tierra en reposo como 3IT al radio del círculo multiplicado por 178,725, o como IT al radio multiplicado por 59,575. Por lo demás, en este cálculo y en todo lo que sigue, considero a todas las líneas trazadas desde la Luna al Sol como paralelas a la línea que une la Tierra y el Sol, debido a que la inclinación disminuye los efectos en unos casos casi lo mismo que los aumenta en otros; y tratamos de hallar los movimientos medios de los nodos, ignorando estas menudencias, que harían al cálculo demasiado pesado.

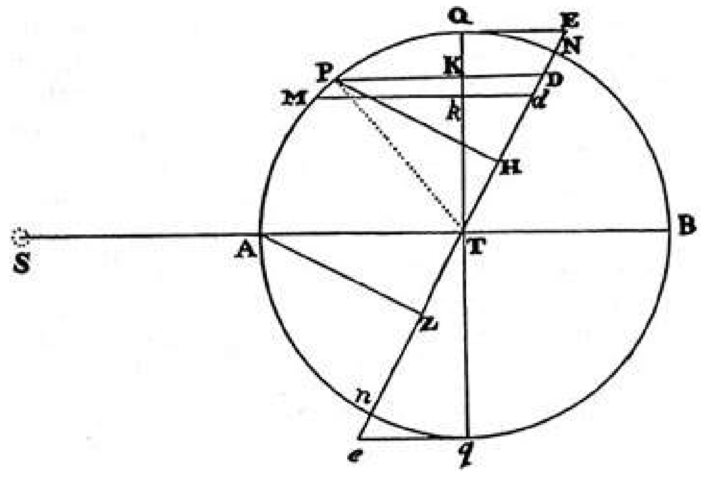


Represente ahora PM al arco descrito por la Luna en un tiempo dado mínimo y ML un pequeño segmento cuya mitad podría recorrer la Luna en ese tiempo bajo la acción de la fuerza 3IT. Únanse PL, MP, y prolónguense hasta *m* y Z, donde cortan ál plano de la eclíptica; y sobre T*m* hágase descender la perpendicular PH. Y puesto que la recta ML es paralela al plano de la eclíptica, y por tanto no puede encontrarse con la recta *ml* que se halla en dicho plano, y sin embargo ambas rectas están en el plano común LMP*ml*, estas rectas serán paralelas, y por lo mismo los triángulos LMP y *lm*P serán semejantes. Pero como MP*m* está en el plano de la órbita por la cual se movía la Luna cuando estaba en P, el punto *m* caerá sobre la línea N*n* trazada por los nodos N*n*, de dicha órbita. Y puesto que la fuerza por la que se genera la mitad del pequeño segmento LM, si se imprimiese toda y a la vez en el punto P, generaría toda la dicha línea, y haría que la Luna se moviese en un arco cuya cuerda fuese LP, y, por tanto, trasladaría a la Luna del plano MP*m*T al plano LP*l*T, el movimiento angular de los nodos generado por dicha fuerza será igual al ángulo *m*T*l*. Pero *mi* es a *m*P como ML a MP, y, por tanto, como MP está dada por estar dado el tiempo, *ml* es como el rectángulo ML x *m*P, es decir, como el rectángulo IT x *m*P. Y el ángulo *m*T*l*, siempre que el ángulo T*ml* sea recto, es como $\frac{ml}{\mathrm{T}m}$ y, por tanto, como $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{P}m}{\mathrm{T}m}$, es decir (por ser proporcionales *tm* y *m*P, TP y PH) como $\frac{\mathrm{IT} \times \mathrm{PH}}{\mathrm{TP}}$, y por tanto, por estar dado TP, como IT x HP. Pero si el ángulo T*ml*, o STN, fuera oblicuo el ángulo *m*T*l* será aún menor, en razón del seno del ángulo STN al radio, o también en razón de AZ a AT. Por consiguiente, la velocidad de los nodos es como IT x PH x AZ o también como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN, y STN.

Si estos ángulos fuesen rectos, estando los nodos en las cuadraturas y la Luna en las sicigias, la pequeña línea *mi* se irá al infinito, y el ángulo *m*T*l* resultará igual al ángulo *m*P*l*. En este caso, el ángulo *m*P*l* es al ángulo PTM, el cual describe la Luna en lomo a la Tierra en el mismo tiempo con su movimiento aparente, como 1 a 59,575. Pues el ángulo *m*P*l* es igual al ángulo LPM, es decir, al ángulo de deflexión de la Luna de la trayectoria recta, ángulo que la antedicha fuerza solar de 3IT podría generar en dicho tiempo dado, si entonces cesase la gravedad de la Luna; y el ángulo PTM es igual al ángulo de deflexión de la Luna de la trayectoria recta, ángulo que podría generar en el mismo tiempo la fuerza, con la que la Luna es retenida en su órbita, si cesare entonces la fuerza solar 3IT. Y estas fuerzas son entre ellas, como hemos dicho antes, como 1 a 59,575. Luego, como el movimiento medio horario de la Luna respecto a las fijas sea de 32′ 56″ 27‴ 12½⁗, el movimiento horario de los nodos en este caso será 33″ 10‴ 33⁗ 12′′′′′. Pero en otros casos este movimiento horario será a 33″ 10‴ 33⁗ 12′′′′′ como el producto de los senos de los tres ángulos TPI, PTN y STN (o de las distancias de la Luna a la cuadratura, al nodo y al Sol) al cubo del radio. Y cuantas veces el signo de un ángulo cualquiera pase de positivo a negativo, y de negativo a positivo, deberá pasar el movimiento regresivo a progresivo y el progresivo a regresivo. De donde se seguirá que los nodos progresarán siempre que la Luna se halle entre una de las cuadraturas y el nodo próximo a la cuadratura. En los demás casos regresan, y por el exceso del regreso sobre el progreso en cada mes van resultando retrógrados.

COROLARIO 1. De aquí que, si desde los extremos P y M de un arco muy pequeño dado y sobre la línea Q*q* que une las cuadraturas se hacen descender sendas perpendiculares PK, M*k* y se las prolonga hasta que corten la línea de los nodos N*n* en D y *d*, el movimiento horario de los nodos será como el área MPD*d* y el cuadrado de la línea AZ conjuntamente. Pues sean PK, PH y AZ los tres senos antedichos. A saber, PK el seno de la distancia de la Luna a la cuadratura, PH el seno de la distancia de la Luna al nodo, y AZ el seno de la distancia del nodo al Sol; y la velocidad del nodo será como el producto PK x PH x AZ. Pues PT es a PK como PM a K*k*, y por tanto, por estar dadas PT y PM, K*k* es proporcional a PK. Y AT es a PD como AZ a PH, y por tanto PH, proporcional al rectángulo PD x AZ, y multiplicando las razones, PK x PH es como el producto K*k* x PD x AZ, y PK x PH x AZ como K*k* x PD x AZ^2, esto es, como el área PD*d*M y AZ^2 conjuntamente. Q. E. D.

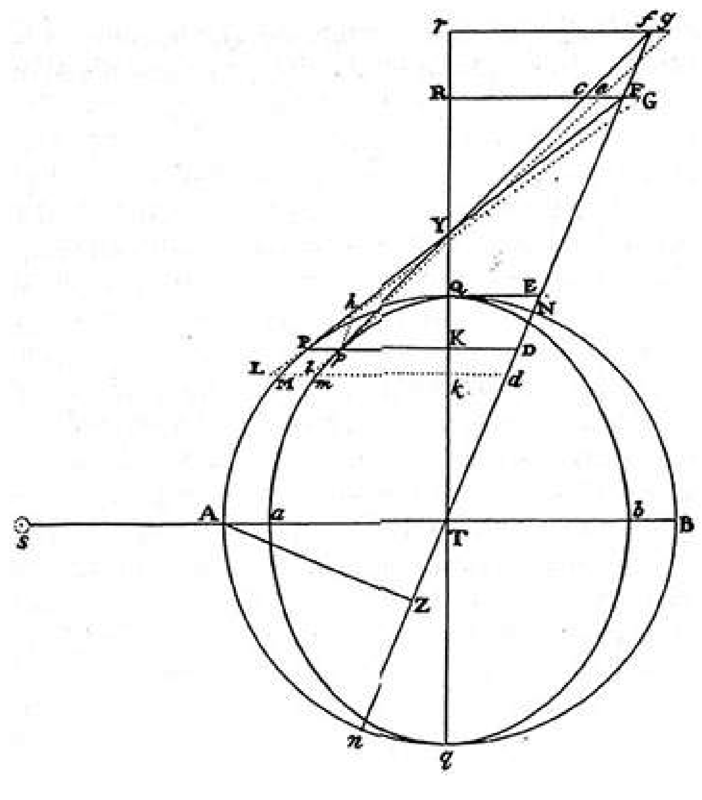
COROLARIO 2. En una posición dada cualquiera de los nodos, el movimiento horario medio es la mitad del movimiento horario en las sicigias de la Luna, y por tanto es a 16″ 35‴ 16″″ 36‴″ como el cuadrado del seno de la distancia de los nodos a las sicigias al cuadrado del radio, o también como AZ^2 a AT^2. Pues si la Luna, con movimiento uniforme, circulase por el semicírculo QA*q*, la suma de todas las áreas PD*d*M, en el tiempo en que la Luna pasa de Q a M, será el área QM*d*E, que termina en QE tangente del círculo; y en el tiempo en que la Luna alcanza el punto *n*, dicha suma será el área completa EQA*n* que describe la línea PD, después al pasar la Luna de *n* a *q*, la línea PD caerá fuera del círculo y describirá el área *nqe* limitada por *qe* tangente al círculo; la cual, puesto que antes los nodos regresaban, mientras ahora progresan, debe restarse del área primera, y puesto que es igual al área QEN dejará el semicírculo NQA*n*. Por tanto, la suma de todas las áreas PD*d*M, en el tiempo en que la Luna describe un semicírculo, es el área del semicírculo; y la suma de todas en el tiempo en que la Luna describe el círculo es el área de todo el círculo. Pero el área PD*d*M, cuando la Luna anda por las sicigias, es el rectángulo comprendido bajo el arco PM y el radio PT; y la suma de todas las áreas iguales a ésta, en el tiempo en que la Luna describe el círculo, es el rectángulo comprendido bajo toda la circunferencia y el radio del círculo; y este rectángulo, al ser igual a dos círculos, es el doble mayor que el rectángulo anterior. Por tanto, los nodos, con la misma velocidad continua que tienen en las sicigias lunares, describirían un espacio doblemente mayor del que de hecho describen; y por tanto, el movimiento medio, con el cual podrían describir, si se continuase uniformemente, un espacio desigual de por sí del realmente descrito, es la mitad del movimiento que tienen en las sicigias de la Luna. De donde, puesto que el movimiento horario máximo, si los nodos se hallan en las cuadraturas, es de 33″ 10‴ 33″″ 12‴″, el movimiento horario medio, en este caso, será 16″, 35‴, 16″″, 36‴″. Y, puesto que el movimiento horario de los nodos es siempre como AZ^2 y el área PD*d*M conjuntamente, y por lo mismo, el movimiento horario de los nodos en las sicigias de la Luna es como AZ^2 y el área PD*d*M conjuntamente, es decir (por estar dada PD*d*M descrita en las sicigias) como AZ^2, el movimiento medio será también como AZ^2, y por consiguiente este movimiento, cuando los nodos se encuentran fuera de las cuadraturas, será a 16″, 35‴, 16″″, 36‴″ como AZ^2 a AT^2. Q. E. D.



PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA XII

Hallar el movimiento horario de los nodos de la Luna en una órbita elíptica.

Represente Q*pmaq* una elipse trazada con el eje mayor Q*q* y el menor *ab*, QA*q*B un círculo circunscrito, T la Tierra en el centro común de ambos, S el Sol, *p* la Luna moviéndose en la elipse, y *pm* el arco que describe en una mínima partícula de tiempo dada, N y *n* los nodos unidos por la línea N*n*, *p*K y *mk* perpendiculares trazadas sobre el eje Q*q* y desde él prolongadas a ambos lados hasta que corten el círculo en P y M, y a la línea de los nodos en D y *d*. Y si la Luna, con radio trazado a la Tierra, describe un área proporcional al tiempo, el movimiento horario de un nodo en la elipse será como el área *p*D*dm* y AZ^2 conjuntamente.



Pues, si PF es tangente al círculo en P, y prolongada corta a TN en F, y pf es tangente a la elipse en p y prolongada corta a la misma TN en f, y si ambas tangentes concurren sobre el eje TQ en Y; y si ML representa el espado que la Luna, girando en el círculo y en el tiempo en que describe el arco PM, puede describir con movimiento transversal bajo la acción de la antedicha fuerza 3IT o 3PK, y *mi* representa el espacio que la Luna, girando en el mismo tiempo en la elipse, bajo la acción de la misma fuerza 3IT o 3PK, pudiera también describir y se prolongan LP y *lp* hasta que encuentren al plano de la eclíptica en G y g, y se unen FG y fg, de las cuales la prolongación de FG corta a pf, pg y TQ en c, e y R, respectivamente, y la prolongación de fg corta a TQ en r. Entonces, puesto que la fuerza 3IT o 3PK en el círculo es a la fuerza 3IT o 3PK en la elipse como PK a pK, o como AT a aT, el espacio ML generado por la primera fuerza será al espacio *ml* generado por la segunda como PK a pK, es decir, por la semejanza de figuras PYKp y FYRc, como FR a cR. Pero ML es a FG (por la semejanza de los triángulos PLM, PGF) como PL a PG, es decir (por ser paralelas Lk, PK, GR) como *pl* a *pe*, es decir (por la semejanza de los triángulos *plm*, *cpe*) como *lm* a *ce*; e inversamente, como LM es a *lm*, o FR a cR, así es FG a *ce*. Y por lo mismo, si fg fuese a *ce* como fY a cY, es decir, como fr a cR (esto es, como fr a FR y FR a cR conjuntamente, es decir, como fT a FT y FG a *ce* conjuntamente) como al suprimir la razón de FG a ce en uno y otro quedan las razones de fg a FG y fT a FT, será fg a FG como fT a FT; y por consiguiente, los ángulos que subtenderían FG y fg a la Tierra T serían iguales entre ellos. Pero esos ángulos (por lo expuesto en la proporción anterior) son los movimientos de los nodos en el tiempo en que la Luna recorre en el círculo el arco PM y en la elipse el arco *pm*: y por tanto los movimientos de los nodos en el círculo y en la elipse serán iguales entre ellos. Todo esto será así siempre que fg sea a *ce* como fY a cY, esto es, si fg fuese igual a $\frac{ce \text{ x } f\text{Y}}{c\text{Y}}$. Pero por la semejanza de los triángulos fgp, *cep*, fg es a *ce* como fp es *cp*; y por tanto, fg es igual $\frac{ce \text{ x } fp}{cp}$; y por lo tanto, el ángulo que en realidad subtiende fg es al ángulo anterior que subtiende FG, esto es, el movimiento de los nodos en la elipse al movimiento de los nodos en el círculo como este fg, o $\frac{ce \text{ x } fp}{cp}$ al anterior fg o $\frac{ce \text{ x } f\text{Y}}{c\text{Y}}$, esto es, como fp x cY a fY x *cp*, o fp a fY y cY a *cp*, es decir, si *ph* paralela a TN corta a FP en h, como Fh a FY y FY a FP; esto es, como Fh a FP o Dp a DP, y por tanto, como el área D*pmd* al área DPMD. Y por consiguiente, puesto que (por el Corolario 1 de la Proposición XXX) el área segunda y AZ^2 conjuntamente son proporcionales al movimiento horario de los nodos en el círculo, el área primera y AZ^2 conjuntamente serán proporcionales al movimiento horario de los nodos en la elipse. Q. E. D.

COROLARIO. Por lo cual, como para una posición dada de los nodos, la suma de todas las áreas *p*D*dm*, en el tiempo en que la Luna va desde una cuadratura hasta un lugar cualquiera m, viene a ser *mp*QE*d*, que está delimitada por la tangente a la elipse QE; y la suma de todas esas áreas en la revolución completa, venga a ser el área de la elipse entera, el movimiento medio de los nodos en la elipse será al movimiento medio de los nodos en el círculo, como la elipse al círculo; esto es, como Ta a TA, o como 69 a 70. Y por tanto, puesto que (por el Corolario 2 de la Proposición XXX) el movimiento horario medio de los nodos en el círculo es a 16″, 35‴, 16⁗, 36‴″ como AZ^2 a AT^2, si se toma un ángulo de 16″, 21‴, 3⁗, 30‴″ al ángulo de 16″, 35‴, 16⁗, 36‴″ como 69 a 70, el movimiento horario medio de los nodos en la elipse será a 16″, 21‴, 3⁗, 30‴″ como AZ^2 a AT^2; esto es, como el cuadrado del seno de la distancia del nodo al Sol al cuadrado del radio.

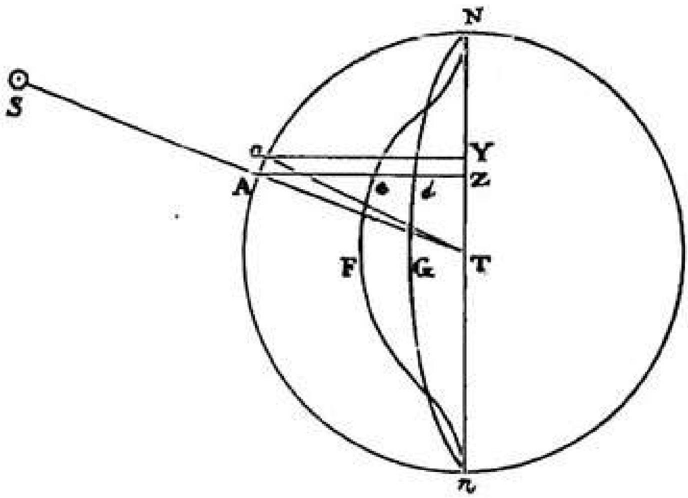
Pero por otra parte, la Luna con un radio trazado a la Tierra describe el área con mayor velocidad en las sicigias que en las cuadraturas, y por eso el tiempo en las sicigias se acorta mientras en las cuadraturas se alarga, y junto con el tiempo el movimiento de los nodos aumenta y disminuye. Pero el momento del área en las cuadraturas de la Luna era al momento del área en las sicigias como 10 973 a 11 073, y por ello, el momento medio en los octantes es al exceso en las sicigias y al defecto en las cuadraturas como la semisuma de ambas cantidades 11 023 a su semidiferencia 50. De donde, puesto que el tiempo de la Luna en cada una de las partículas iguales de la órbita es inversamente como su velocidad, el tiempo medio en los octantes será al exceso de tiempo en las cuadraturas y al defecto de tiempo en las sicigias, debidos a estas causas, como 11 023 a 50 muy aproximadamente. Pero marchando desde las cuadraturas hacia las sicigias, encuentro que el exceso de los momentos del área en cada lugar por encima del momento mínimo en las cuadraturas es como el cuadrado del seno de la distancia de la Luna hasta las cuadraturas muy aproximadamente; y por ello, la diferencia entre el momento en un lugar cualquiera y el momento medio en los octantes es como la diferencia entre el cuadrado del seno de la distancia de la Luna hasta las cuadraturas y el cuadrado del seno de 45 grados, o la mitad del cuadrado del radio; y el incremento del tiempo en cada lugar entre los octantes y las cuadraturas y su decremento entre los octantes y las sicigias se halla en la misma razón. Pero el movimiento de los nodos, en el tiempo en que la Luna recorre cada una de las partículas iguales de su órbita, se acelera o retarda en razón del cuadrado del tiempo. Pues este movimiento, mientras («caeteris paribus») la Luna recorre PM, es como ML, y ML está en razón del cuadrado del tiempo. Por lo cual, el movimiento de los nodos en las sicigias, realizado en el tiempo en que la Luna recorre partículas dadas de la órbita, disminuye como el cuadrado de la razón de 11 073 a 11 023; y el decremento es al resto del movimiento como 100 a 10 973, mientras que respecto al movimiento entero es como 100 a 11 073 muy aproximadamente. Pero el decremento en los lugares entre los octantes y las sicigias, y el incremento entre los lugares de los octantes y las cuadraturas es aproximadamente a este decremento como el movimiento total en dichos lugares al movimiento total en las sicigias y la diferencia entre el cuadrado del seno de la distancia de la Luna hasta la cuadratura y la mitad del cuadrado del radio, a la mitad del cuadrado del radio conjuntamente. De donde, si los nodos se hallan en las cuadraturas y se toman dos lugares equidistantes a un lado y otro del octante, y otros dos a esa misma distancia uno de la sicigia y otro de la cuadratura, y de los decrementos de movimientos en los dos lugares entre la sicigia y el octante se restan los incrementos de movimientos en los otros dos lugares situados entre el octante y la cuadratura, el decremento restante será igual al decremento en la sicigia, como verá fácilmente quien haga el cálculo. Por consiguiente, el decremento medio, que debe restarse del movimiento medio de los nodos, es la cuarta parte del decremento en la sicigia. El movimiento horario total de los nodos en las sicigias, cuando la Luna con un radio trazado a la Tierra se suponía que describía un área proporcional al tiempo, era de 32″ 42‴ 7⁗. Y el decremento del movimiento de los nodos, en el tiempo en que la Luna, más veloz ahora, describe el mismo espacio, hemos dicho que era a este movimiento como 100 a 11 073; y por consiguiente, dicho decremento es de 17″ 43⁗ 11⁗′, cuya cuarta parte 4‴ 25⁗ 48⁗′ restada al movimiento horario medio hallado más arriba deja un resto de 16″ 16‴ 37⁗ 42⁗′ como movimiento horario medio corregido.

Si los nodos están fuera de las cuadraturas y se contemplan dos lugares equidistantes de las sicigias, uno a cada lado, la suma de los movimientos de los nodos, cuando la Luna se halla en dichos lugares, será a la suma de los movimientos cuando la Luna se halla en esos lugares y los nodos se hallan en las cuadraturas como AZ^2 a AT^2. Y los decrementos de los movimientos, debidos a las causas expuestas más arriba, serán entre sí como los movimientos mismos, y por tanto, los movimientos restantes serán entre sí como AZ^2 a AT^2, y los movimientos medios serán como los movimientos restantes. Por consiguiente, el movimiento horario medio corregido en cualquier situación dada de los nodos es a 16″ 16‴ 37⁗ 42⁗′ como AZ^2 a AT^2; es decir, como el cuadrado del seno de la distancia de los nodos a las sicigias al cuadrado del radio.

Proposición xxxii. Problema xiii

Hallar el movimiento medio de los nodos de la Luna.

El movimiento medio anual es la suma de todos los movimientos horarios medios del año. Imagínese que el nodo se halla en N y en cada una de las horas regresa a su lugar inicial, de suerte que, no obstante su movimiento propio, conserve siempre su lugar respecto a las estrellas fijas. Pero, mientras tanto, el Sol S, por el movimiento de la Tierra, se desplaza desde el nodo y completa uniformemente su curso anual aparente. Y sea A*a* arco mínimo dado que la recta TS trazada continuamente al Sol describe con su intersección con el círculo NA*n* en un tiempo mínimo dado: y el movimiento horario medio (por lo que ya se ha mostrado) será como AZ^2, esto es (por ser proporcionales AZ, ZY), como el rectángulo AZ y ZY, es decir, como el área AZY*a*. Y la suma de todos los movimientos horarios medios desde el principio será como la suma de todas las áreas *a*YZA, es decir, como el área NAZ. Pero la máxima AZY*a* es igual al rectángulo bajo el arco A*a* y el radio del círculo, y por tanto, la suma de todos los rectángulos en el círculo entero es a la suma de otros tantos rectángulos máximos, como el área de todo el círculo al rectángulo bajo la circunferencia y el radio, es decir, como 1 a 2. Pero el movimiento correspondiente al rectángulo máximo era de 16″ 16‴ 37'''' 42'''''. Y este movimiento, en un año sidéreo completo de 365d. 6h. 9′ resulta de 39.º 38′ 7″ 50‴. Y por consiguiente, su mitad 19.º 49′ 3″ 55‴ es el movimiento medio de los nodos que corresponde al círculo entero. Y el movimiento de los nodos en el tiempo en que el Sol pasa de N hasta A es a 19.º 49′ 3″ 55‴ como el área NAZ al círculo entero.

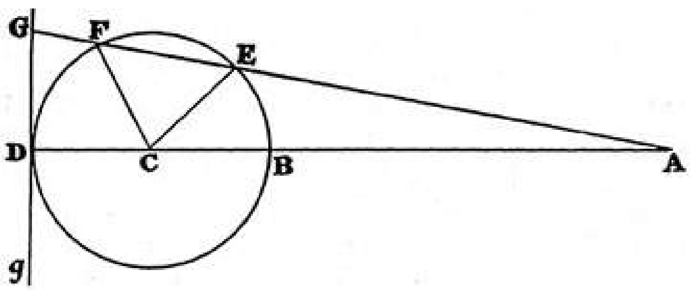


Esto es así en la hipótesis de que el nodo tras cada hora regresase al lugar inicial y de que el Sol tras el recorrido anual completo regresase al mismo nodo del que había partido. Pero por causa del movimiento del nodo ocurre que el Sol regresa antes al nodo, y ahora hay que calcular la abreviación del tiempo. Puesto que el Sol en el año entero completa 360 grados y el nodo con movimiento máximo completa en ese mismo tiempo 39.º 38′ 7″ 50‴, o 39,6355 grados, y el movimiento medio del nodo en un lugar cualquiera N es a su movimiento medio en sus cuadraturas como AZ^2 a AT^2; el movimiento del Sol al movimiento del nodo en N será como $360AT^2$ a $39{,}6355AZ^2$; es decir, como $9{,}0827646AT^2$ a AZ^2. De donde, si la circunferencia NA*n* del círculo entero se divide en partículas iguales A*a*, el tiempo en el que el Sol recorre una partícula A*a* si el círculo está en reposo, será al tiempo en que recorre esa misma partícula, si el círculo junto con los nodos gira en torno al centro T, inversamente como $9{,}0827646AT^2$ a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$. Pues el tiempo es inversamente como la velocidad con la que se recorre la partícula, y esta velocidad es la suma de las velocidades del Sol y del nodo. Por tanto, si el tiempo, en el que el Sol sin el movimiento del nodo recorrería el arco NA, se representa por el sector NTA, y la partícula de tiempo en que recorrería el arco mínimo A*a*, se representa por la partícula AT*a* del sector; y (trazada la perpendicular *n*Y sobre N*n*) si sobre AZ se toma *d*Z de una longitud tal que el rectángulo *d*Z por ZY sea a la partícula AT*a* del sector como AT^2 a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, es decir, de modo que *d*Z sea a ½AZ como AT^2 a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$, el rectángulo *d*Z por ZY representará el decremento de tiempo debido al movimiento de los nodos, durante todo el tiempo en que se recorre el arco A*a*. Y si el punto *d* es tangente a la curva N*d*G*n*, el área curvilínea N*d*Z será el decremento total en el tiempo en que se recorre el arco entero NA; y por ello el exceso del sector NAT sobre el área N*d*Z será dicho tiempo total. Y, puesto que el movimiento del nodo en menor tiempo es menor en razón del tiempo, también el área A*a*YZ deberá disminuir en esa proporción. Cosa que ocurrirá si sobre AZ se toma la longitud *e*Z tal que sea a la longitud AZ como AZ^2 a $9{,}0827646AT^2 + AZ^2$. Pues de este modo el rectángulo *e*Z por ZY será al área AZY*a* como el decremento del tiempo en que se recorre el arco A*a*, al tiempo total en que se recorrería si el nodo estuviese en reposo: y por lo tanto, dicho rectángulo corresponderá al decremento del movimiento del nodo. Y si el punto *e* fuera tangente a la curva N*e*F*n*, el área entera N*e*Z, que es la suma de todos los decrementos, corresponderá al decremento total en el tiempo en que es recorrido el arco AN; y el área restante NA*e* corresponderá al movimiento restante, que es el verdadero movimiento del nodo, en el tiempo en que el arco entero NA es recorrido por los movimientos conjuntos del Sol y del nodo. Ahora bien, el área del semicírculo es al área de la figura N*e*F*n*, hallada por el método de las series infinitas, como 793 a 60 muy aproximadamente. Pero el movimiento que correspondía al círculo entero era de 19.º 49′ 3″ 55‴ y por lo mismo, el movimiento correspondiente al doble de la figura N*e*F*n* es 1.º 29′ 58″ 2‴. El cual restado del movimiento anterior deja un resto de 18.º 19′ 5″ 53‴ movimiento total del nodo respecto a las fijas entre sus propias conjunciones con el Sol; y restado este movimiento de los 360 grados del movimiento anual del Sol, deja un resto de 341.º 40′ 54″ 7‴ movimiento del Sol entre esas mismas conjunciones. Pero este movimiento es al movimiento anual de 360 grados como el movimiento del nodo ya hallado de 18.º 19′ 5″ 53‴ a su movimiento anual, que será por tanto de 19.º 18′ 1″ 23‴. Este es el movimiento medio de los nodos en el año sidéreo. El mismo, por las tablas astronómicas es es de 19.º 21′ 21″ 50‴. La diferencia es menor que $\frac{1}{300}$ del movimiento total, y parece deberse a la excentricidad de la órbita lunar y a la inclinación hacia el plano de la eclíptica. Por causa de la excentricidad de la órbita el movimiento de los nodos se acelera demasiado, mientras que, por contra, debido a su inclinación se retarda un poco, reduciéndose así a su justa velocidad.

PROPOSICIÓN XXXIII. PROBLEMA XIV

Hallar el movimiento verdadero de los nodos de la Luna.

En un tiempo que sea como el área NTA - N*d*Z (de la figura precedente) este movimiento es como el área NA*e*, y por tanto está dado. Pero por la excesiva dificultad del cálculo es conveniente presentar la construcción del problema del modo siguiente. Con centro en C y una distancia cualquiera CD trácese el círculo BEFD. Prolónguese DC hasta A de modo que AB sea a AC como el movimiento medio a la mitad del movimiento medio verdadero, cuando los nodos están en las cuadraturas, es decir, como 19.º 18′ 1″ 23‴ a 19″ 49′ 3″ 55‴ y por tanto BC será a AC como la diferencia de movimiento 0.º 31′ 2″ 32‴ es al movimiento posterior 19″ 49′ 3″ 55‴, es decir, como 1 a 38$\frac{3}{10}$; trácese después por el punto D la recta infinita G*g*, tangente al círculo en D; y si se toma el ángulo BCE o BCF igual al doble de la distancia entre el lugar del Sol y el nodo, hallado por medió del movimiento medio, y se traza AE o AF secante de la perpendicular DG en G, y se toma un ángulo que sea al movimiento total del nodo entré éste y las sicigias (es decir, a 9.º 11′ 3″) como la tangente DG a la circunferencia entera del círculo BED, y este ángulo (en cuyo lugar puede tomarse el ángulo DAG) se añade al movimiento medio de los nodos cuando éstos pasan de las cuadraturas a las sicigias o se sustrae del dicho movimiento medio cuando pasan de las sicigias a las cuadraturas, se tendrá su movimiento medio verdadero. Pues el movimiento verdadero así obtenido concuerda muy aproximadamente con el movimiento verdadero que resulta representando el tiempo por el área NTA - N*d*Z, y el movimiento del nodo por el área NA*e*; como comprobará quien se interese y haga los cálculos. Esta es la ecuación semestral del movimiento de los nodos. También hay una ecuación mensual, pero no es necesaria en absoluto para hallar la latitud de la Luna. Pues, dado que la variación de la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica está sometida a una doble desigualdad, una semestral y otra mensual, su desigual mensual y la ecuación mensual de los nodos se compensan y corrigen entre ellas de tal modo que ambas pueden ser ignoradas a la hora de determinar la latitud de la Luna.



COROLARIO. De ésta y de la proposición precedente se desprende que los nodos en sus sicigias reposan, mientras en las cuadraturas retroceden con un movimiento horario de 16″ 19‴ 26″″ y que la ecuación del movimiento de los nodos en los octantes es de 1.º 30′. Todo lo cual concuerda adecuadamente con los fenómenos celestes.

Escolio[11]

J. Machín, profesor de Astronomía en *Cresham y Henry Pemberton*, D. M. cada uno por su parte hallaron otra forma de determinar los movimientos de los nodos. Se ha hecho alguna mención de este método en otra parte. Y las cartas que he visto de ambos contenían dos proposiciones que concordaban entre ellas. Añadiré aquí la carta del *Sr. Machín*, primera que llegó a mis manos.

«SOBRE EL MOVIMIENTO DE LOS NODOS DE LA LUNA

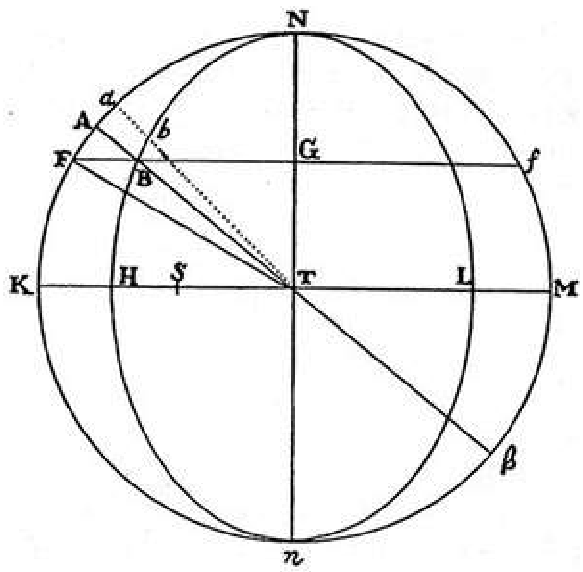
»Proposición I

»El movimiento medio del Sol desde el nodo se define por una media geométrica proporcional entre el movimiento medio del mismo Sol y aquel movimiento medio con el cual el Sol se separa velozmente del nodo en las cuadraturas.

»Sea T el lugar de la Tierra, N*n* la línea de los nodos de la Luna para un tiempo dado cualquiera, KTM una perpendicular a ella, TA una recta que gira alrededor del centro con la misma velocidad angular con que el Sol y el nodo se alejan uno de otro, de modo que el ángulo comprendido entre la recta en reposo N*n* y la recta en giro TA, siempre resulte igual a la distancia entre los lugares del Sol y del nodo. Ahora, si se divide una recta cualquiera TK en partes TS y SK que sean como el movimiento horario medio del Sol al movimiento horario medio del nodo en las cuadraturas, y se toma a la línea TH como media proporcional entre la parte TS y la línea entera TK, esta recta será, entre las demás, proporcional al movimiento medio del Sol desde el nodo.

»Pues, descríbase el círculo NK*n*M con centro en T y radio TK, y con el mismo centro y con las ejes TH y TN trácese la elipse NH*n*L, y en el tiempo en que el Sol se separa del nodo por el arco N*a*, si se traza la recta N*ba*, el área del sector NT*a* representará la suma de los movimientos del nodo y del Sol en ese mismo tiempo. Sea, pues, el arco mínimo A*a* un arco que describe la recta T*ba* girando uniformemente según la antedicha ley en una partícula dada de tiempo, y el sector mínimo TA*a* será como la suma de las velocidades con que el Sol y el nodo se desplazan en ese tiempo. Pero la velocidad del Sol es casi uniforme, por cuanto su pequeña desigualdad apenas produce variación en el movimiento medio de los nodos. La otra parte de esta suma, o sea, la velocidad del nodo en su valor medio, aumenta al apartarse de las sicigias como el cuadrado del seno de su distancia al Sol; por el Corolario de la Proposición XXXI del Libro III de los PRINCIPIA, y cuando es máxima en las cuadraturas con el Sol en K, alcanza la misma razón respecto a la velocidad del Sol que SK a TS, esto es, como (diferencia de los cuadrados de TK y TH o) el rectángulo KHM a TH al cuadrado. Pero la elipse NBH divide al sector

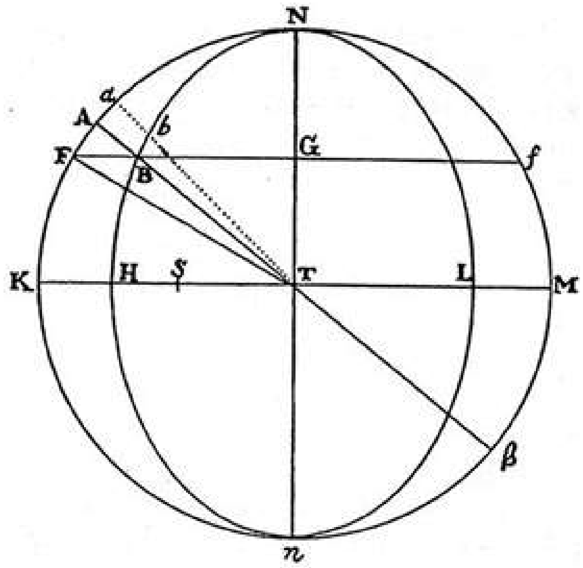
AT*a*, representación de la suma de estas dos velocidades, en dos partes AB*ba* y BT*b* proporcionales a las propias velocidades. Prolónguese, pues, BT hasta el círculo β y desde el punto B hágase descender sobre el eje mayor la perpendicular BG, que prolongada a ambos lados toque al círculo en los puntos F y *f* y puesto que el espacio AB*ba* es al sector TB*b* como el rectángulo ABβ a BT cuadrado (pues dicho rectángulo es igual a la diferencia de cuadrados de TA y TB por estar la recta Aβ cortada igualmente en T y desigualmente en B). Por tanto esta razón, cuando el espacio AB*ba* es máximo en K, será la misma razón que la del rectángulo KHM a HT al cuadrado, pero la velocidad media máxima del nodo estaba a la velocidad del Sol en esta misma razón. Por consiguiente, en las cuadraturas, el sector AT*a* se divide en partes proporcionales a la velocidad. Y, puesto que el rectángulo KHM es a HT cuadrado como FB*f* a BG cuadrado, y el rectángulo ABβ es igual al rectángulo FB*f*, el área pequeña AB*ba*, cuando es máxima, será al resto del sector TB *b* como el rectángulo AB*b* a BG cuadrado. Pero la razón de estas pequeñas áreas era siempre como el rectángulo ABβ a BT cuadrado; y por lo tanto la pequeña área AB*ba* en el lugar A es menor que el área semejante en las cuadraturas, en razón cuadrada de BG a BT, esto es, en razón cuadrada del seno de la distancia del Sol al nodo. Y por tanto, la suma de todas las áreas pequeñas AB*ba*, o sea, el espacio ABN será como el movimiento del nodo en el tiempo en que el Sol se separa del nodo por el arco NA. Y el espacio restante, o sea, el sector elíptico NTB será como el movimiento medio del Sol en ese tiempo. Y por lo mismo, como el movimiento medio anual del nodo es aquel que ocurre en el tiempo en el que el sol completa su período, el movimiento medio del nodo desde el Sol será al movimiento medio del propio Sol como el área del círculo al área de la elipse, es decir, como la recta TK a la recta TH que es la media proporcional entre TK y TS; o lo que da lo mismo, como la media proporcional TH a la recta TS.



»Proposición II

»Dado el movimiento medio de los nodos de la Luna, hallar el movimiento verdadero.

»Sea el ángulo A la distancia del Sol al lugar medio del nodo, o el movimiento medio del Sol desde el nodo. Si se toma entonces un ángulo B cuya tangente sea a la tangente del ángulo A como TH a TK, esto es, como la raíz cuadrada de la razón del movimiento horario medio del Sol al movimiento medio horario del Sol desde el nodo cuando éste se halla en las cuadraturas, este ángulo B será la distancia del Sol al verdadero lugar del nodo. Pues únase FT y, por la demostración de la Proposición anterior, el ángulo FTN será la distancia del Sol del lugar medio del nodo, mientras que el ángulo ATN será la distancia del lugar verdadero, y las tangentes de estos dos ángulos son entre ellas como TK a TH.



»Corolario. De aquí que el ángulo FTA es la ecuación de los nodos de la Luna, y el seno de este ángulo cuando es máximo en los octantes, es al radio como KH a TK + TH. En cambio el seno de esta ecuación en otro lugar cualquiera A es al seno máximo como el seno de la suma de los ángulos FTN + ATN al radio: esto es, casi como el seno del doble de la distancia del Sol al lugar medio del nodo (o sea 2FTN) al radio.

»Escolio

»Si el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas es de 16″ 16‴ 37′′′′ 42′′′′′, es decir, en el año sidéreo completo 39.º 38′ 7″ 50‴, TH será a TK como la raíz cuadrada de la razón del número 9,0827646 al número 10,0827646, esto es, como 18,6524761 a 19,6524761. Y por lo tanto, TH a HK como 18, 6524761 a 1, es decir, como el movimiento del Sol en el año sidéreo al movimiento medio del nodo de 19.º 18′ 1″ 23⅔‴.

»Pero si el movimiento medio de los nodos de la Luna en 20 años Julianos es de 386.º 50′ 15″ como se deduce de las observaciones aportadas por la teoría de la Luna, el movimiento medio de los nodos en el año sidéreo será de 19.º 20′ 31″ 58‴. Y TH será a HK como 360.º es a 19.º 20′ 31″ 58‴, esto es, como 18,61214 a 1, de donde el movimiento horario medio de los nodos en las cuadraturas resulta de 16″ 18‴ 48′′′′. Y la ecuación máxima de los nodos en los octantes, de 1.º 29′ 57″».

Proposición xxxiv. Problema xv

Hallar la variación horaria de la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica.

Representen A y a las sicigias; Q y *q* las cuadraturas; N y *n* los nodos; P el lugar de la Luna en su órbita; *p* la proyección de dicho lugar sobre el plano de la eclíptica, y *m*T*l* el movimiento momentáneo de los nodos como más arriba. Y si sobre la línea T*m* se hace descender la perpendicular PG, únase *p*G, y prolónguese hasta que corte a T*l* en *g* y únanse también P*g*; el ángulo PG*p* será la inclinación de la órbita lunar hacia el plano de la eclíptica cuando la Luna se halle en P; y el ángulo P*gp* será su inclinación al completar un momento de tiempo; y por lo tanto, el ángulo GP*g* será la variación momentánea de la inclinación. Pero este ángulo GP*g* es al ángulo GT*g* como TG a PG y PG y P*p* a PG conjuntamente. Y por consiguiente, si por un momento de tiempo se toma una hora, puesto que el ángulo GT*g* (por la Proposición xxx) es al ángulo de 33″ 10‴ 33′′′′ como IT x AZ a AT al cubo, el ángulo GP*g* (o la variación horaria de la inclinación) será al ángulo de 33″ 10‴ 33′′′′ como

$$\mathrm{IT} \times \mathrm{AZ} \times \mathrm{TG} \times \frac{\mathrm{P}p}{\mathrm{PG}} \text{ a } \mathrm{AT}^3. \text{ Q. E. I.}$$

Esto es así bajo la hipótesis de que la Luna girase en una órbita circular uniformemente. Pero si dicha órbita fuese elíptica, el movimiento medio de los nodos disminuye en la razón del eje menor al eje mayor; como se ha expuesto más arriba. Y en esa misma razón disminuye también la variación de la inclinación.

Corolario 1. Si sobre N*n* se eleva la perpendicular TF, y *p*M es el movimiento horario de la Luna en el plano de la eclíptica; y las perpendiculares *p*K, M*k* trazadas sobre QT y prolongadas ambas encuentran a TF en H y *h*: será IT a AT como K*k* a M*p*, y TG a H*p* como TZ a AT y por lo mismo IT x TG será igual a $\frac{\mathrm{K}k \times \mathrm{H}p \times \mathrm{TZ}}{\mathrm{M}p}$, esto es, igual al área HpMh multiplicada por la razón $\frac{TZ}{Mp}$: y en consecuencia, la variación horaria de la inclinación es a 33″ 10‴ 33′′′′ como HpMh multiplicada por AZ x $\frac{TZ}{Mp}$ x $\frac{Pp}{PG}$ es a AT^3.

COROLARIO 2. Y por tanto, si la Tierra y los nodos en cada hora completada se retirasen de sus nuevos lugares y regresaren en un instante siempre a sus lugares iniciales, de modo que su posición durante un mes periódico entero permaneciese dada; toda la variación de la inclinación durante dicho mes sería a 33″ 10‴ 33′′′′ como la reunión de todas las áreas HpMh generadas con la revolución del punto P unidas por los signos correspondientes + y -, multiplicada dicha reunión por AZ x TZ x $\frac{Pp}{PG}$ a Mp x AT^3, es decir, como el círculo entero QAqa multiplicado por AZ x TZ x $\frac{Pp}{PG}$ a Mp x AT^3, o sea, como la circunferencia DAqa multiplicada por AZ x TZ x $\frac{Pp}{PG}$ a 2Mp x AT^2.

COROLARIO 3. Por consiguiente, en una posición dada de los nodos, la variación horaria media que, continuada uniformemente durante un mes, podría generar aquella variación mensual, es a 33″ 10‴ 33′′′′ como AZ x TZ x $\frac{Pp}{PG}$ a $2AT^2$, o como Pp x $\frac{AZ \text{ x } TZ}{½AT}$ a PG x 4AT, es decir (puesto que Pp es a PG como el seno de la inclinación susodicha al radio, y $\frac{AZ \text{ x } TZ}{½AT}$ AT sea a 4AT como el seno del doble del ángulo ATn al cuádruplo del radio) como el seno de la misma inclinación multiplicado por el seno de la doble distancia entre los nodos y el Sol al cuádruplo del cuadrado del radio.

COROLARIO 4. Puesto que la variación horaria de la inclinación, cuando los nodos se hallan en las cuadraturas, es (por esta Proposición) al ángulo de 33″ 10‴ 33′′′′ como IT x AZ x TG $\frac{Pp}{PG}$ a AT^3, es decir, como $\frac{IT \text{ x } TG}{½AT}$ x $\frac{Pp}{PG}$ a 2AT; esto es, como el seno de la doble distancia de la Luna a las cuadraturas multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ al doble del radio: la suma de todas las variaciones horarias en el tiempo en que la Luna en esta situación de los nodos, pasa de la cuadratura a la sicigia (esto es, en el espacio de 1776⅙ horas) será a la suma de otros tantos ángulos de 33″ 10‴ 33″″ o sea, 5878″, como la suma de todos los senos de la doble distancia de la Luna a las cuadraturas multiplicada por $\frac{Pp}{PG}$ a la suma de otros tantos diámetros; esto es, como el diámetro multiplicado por $\frac{Pp}{PG}$ a la circunferencia; es decir, si la inclinación fuese de 5.º 1′, como 7 x $^{874}/_{10000}$ a 22, o 278 a 10 000. Y por lo mismo, la variación total procedente de la suma de todas las variaciones horarias es de 163″, o de 2′ 43″.

Proposición xxxv. Problema xvi

Hallar la inclinación de la órbita de la Luna hacia el plano de la eclíptica en un tiempo dado.

Sea AD el seno de la inclinación máxima, y sea AB el seno de la inclinación mínima. Bisecando a BD en C, y por centro en C y distancia BC trácese el círculo BGD. Sobre AC tómese CE en la misma razón respecto a EB en que está EB respecto a 2BA: y si para el tiempo dado se forma el ángulo AEG igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, y sobre AD se hace descender la perpendicular GH: será AH el seno de la inclinación buscada.

Pues, GE^2 es igual a $GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Por consiguiente, al estar dado 2EC, GE^2 es como AH. Represente ahora *AEg* al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas después de completado un momento de tiempo dado, y el arco G*g*, por estar dado el ángulo GE*g*, será como la distancia GE. Pero H*h* es a G*g* como GH a GC, y por tanto H*h* es como el producto GH x G*g*, o GH x GE; es decir, como

$$\frac{GH}{GE} \times GE^2 \text{ o } \frac{GH}{GE} \times AH,$$

es decir, como AH y el seno del ángulo AEG conjuntamente. Por consiguiente, si AH en algún caso fuese el seno de la inclinación, ésta aumentará con incrementos iguales a los del seno de la inclinación, por el Corolario 3 de la Proposición anterior, y por lo mismo siempre permanecerá igual a dicho seno. Pero AH, cuando el punto G cae en uno de los puntos B o D, es igual a dicho seno, y por consiguiente siempre permanece igual a él. Q. E. D.

En esta demostración he supuesto que el ángulo BEG, que es el doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas, aumenta uniformemente. Pues no hay tiempo de examinar todas las minucias de las desigualdades. Imaginemos ahora que el ángulo BEG es recto, y en este caso G*g* sería el aumento horario de la doble distancia entre los nodos y el Sol; y la variación horaria de la inclinación en dicho caso (por el Corolario 3 de la anterior proposición) será a 33″ 10‴ 33″″ como el producto del seno de la inclinación AH por el seno del ángulo recto BEG, que es el doble de la distancia de los nodos al Sol, al cuádruplo del cuadrado del radio; es decir, como el seno de la inclinación media AH al cuádruplo del radio; esto es (puesto que dicha inclinación media viene a ser de casi 5.º y 8½′) como su seno 896 al radio cuadruplicado 40 000, o como 224 a 10 000. Es por tanto la variación entera, correspondiente a la diferencia BD de los senos respecto a la susodicha variación horaria como el diámetro BD al arco G*g*; es decir, conjuntamente como el diámetro BD a la semicircunferencia BGD y el tiempo de 2079⁷⁄₁₀ horas en que el nodo pasa de las cuadraturas a las sicigias a una hora; o también, como 7 a 11 y 2079⁷⁄₁₀ a 1. Por lo cual, si se combinan todas estas razones, la variación total BD resultará ser respecto a 33″ 10‴ 33″″ como 224 x 7 x 2079⁷⁄₁₀ a 110 000, es decir, como 29 645 a 1000, y de aquí que la susodicha variación BD resultará de 16′ 23½″.

Esta es la variación máxima de la inclinación en tanto no se considera el lugar de la Luna en su órbita. Pues la inclinación, si los nodos se hallan en las sicigias, no cambia en nada por los cambios de lugar de la Luna. Pero si los nodos se encuentran en las cuadraturas, la inclinación es menor cuando la Luna se halla en las sicigias que cuando se halla en las cuadraturas, con diferencia de 2′ 43″, como ya he indicado en el Corolario cuarto de la Proposición anterior. Y restando 1′ 21½, mitad de esta diferencia, de la variación media total B*d* en las cuadraturas lunares se tiene 15′ 2″, y sumada en las sicigias se tiene 17′ 45″. Así pues, si la Luna se hallase en las sicigias, la variación entera en el paso de los nodos desde las cuadraturas a las sicigias será de 17′ 45″: y por lo tanto, si la inclinación, cuando los nodos se hallan en las sicigias, fuese de 5.º 17′ 20″, la misma, cuando los nodos están en las cuadraturas y la Luna en las sicigias, será de 4.º 59′ 35″. Y que esto es así, se confirma por las observaciones.

Pero si ahora se deseare la inclinación de la órbita, cuando la Luna se halla en las sicigias y los nodos en un lugar cualquiera, sea AB a AD como el seno del ángulo de 4.º 59′ 35″ al seno del ángulo de 5.º 17′ 20″, y tómese el ángulo AEG igual al doble de la distancia de los nodos a las cuadraturas; y AH será el seno de la inclinación buscada. A la inclinación de esta órbita viene a ser igual su inclinación cuando la Luna dista 90.º de los nodos. Para otros lugares de la Luna, la desigualdad mensual que admite la variación de la inclinación se compensa en el cálculo de la latitud de la Luna, y hasta en cierto modo se anula, por la desigualdad mensual del movimiento de los nodos (como dije más arriba) y por tanto puede despreciarse al calcular dicha latitud.

Escolio[12]

Con estos cálculos de los movimientos lunares he querido mostrar que dichos movimientos pueden calcularse mediante la teoría de la gravedad a partir de sus causas. Mediante la misma teoría he hallado, además, que la ecuación anual del movimiento medio de la Luna se debía a la diferente dilatación de la órbita lunar por la fuerza del Sol, según el Corolario 6 de la Proposición LXVI del Libro I. Esta fuerza en el perigeo del Sol es mayor y dilata la órbita de la Luna; en su apogeo es menor y permite a dicha órbita contraerse. La Luna gira más lentamente en la órbita dilatada, y más rápidamente en la contraída; y la ecuación anual, por la que se compensa esta desigualdad, es nula en el apogeo y perigeo solares, mientras que en la distancia media de la Tierra y el Sol asciende casi a 11′ 50″, y en otros lugares es proporcional a la ecuación del centro del Sol; y se suma al movimiento medio de la Luna cuando la Tierra pasa de su afelio a su perihelio, mientras se resta en la parte opuesta de la órbita. Suponiendo el radio del Orbe Magno de 1000 y la excentricidad de la tierra $16\frac{7}{8}$, esta ecuación, cuando es máxima, resulta de 11′ 49″ por la teoría de la gravedad. Pero la excentricidad de la Tierra parece ser algo mayor, y al aumentar la excentricidad esta ecuación debe aumentarse en la misma proporción. Sea la excentricidad de $16\frac{11}{12}$, y la ecuación máxima será de 11′ 51″.

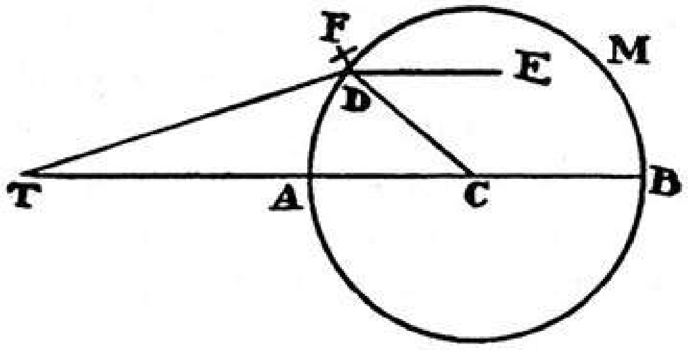
También descubrí que en el perihelio de la Tierra, debido a la mayor fuerza del Sol, el apogeo y los nodos de la Luna se mueven más rápidamente que en su afelio, y ello en razón inversa del cubo de la distancia de la Tierra al Sol. Y de aquí surgen las ecuaciones anuales de estos movimientos proporcionales a la ecuación del centro solar. Pero el movimiento del Sol es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la Tierra al Sol, y la máxima ecuación del centro generada por esta desigualdad es de 1.º 56′ 20″, que se corresponde con la excentricidad del Sol de $16\frac{11}{12}$ mencionada más arriba. Pero si el movimiento del Sol se hallase en razón inversa del cubo de la distancia, esta desigualdad generaría una ecuación máxima de 2.º 54′ 30″. Y por lo tanto, las ecuaciones máximas generadas por las desigualdades del apogeo y de los nodos de la Luna, son a 2.º 54′ 30″ como el movimiento medio diario del apogeo y el movimiento medio diario de los nodos de la Luna son al movimiento diario medio del Sol. De donde resulta la ecuación máxima del movimiento medio del apogeo de 19′ 43″ y la ecuación máxima del movimiento medio de los nodos de 9′ 24″. La primera ecuación se suma y la última se resta cuando la Tierra pasa del perihelio al afelio; y al contrario ocurre en la parte opuesta de la órbita.

También se ha establecido mediante la teoría de la gravedad que la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando el diámetro transversal de la órbita lunar pasa por el Sol que cuando se halla en ángulo recto con la línea que une a la Tierra y el Sol: y por ello la órbita lunar es algo mayor en el primer caso que en el segundo. Y de aquí surge otra ecuación del movimiento medio lunar, que depende del lugar del apogeo de la Luna respecto al Sol, la cual resulta máxima cuando coincide en el octante con el Sol; y es nula cuando el apogeo llega a las cuadraturas o a las sicigias: y se añade al movimiento medio al pasar el apogeo de la Luna desde la cuadratura del Sol a las sicigias mientras que se resta cuando el apogeo pasa de la sicigia a las cuadraturas. Esta ecuación, que llamaré semestral, en los octantes del apogeo, cuando es máxima, asciende a casi 3′ 45″, en la medida en que pude inferirlo de los fenómenos. Este es su valor a la distancia media del Sol a la Tierra. Pero aumenta o disminuye en razón inversa del cubo de la distancia del Sol, y por ende a la máxima distancia del Sol es de 3′ 34″ y a la mínima de 3′ 56″ aproximadamente: pero cuando el apogeo de la Luna se halla situado fuera de los octantes, resulta menor; y es a la ecuación máxima como el seno de la doble distancia del apogeo de la Luna hasta las inmediatas sicigias o la cuadratura al radio.

Por la misma teoría de la gravedad la acción del Sol sobre la Luna es algo mayor cuando la línea recta que pasa por los nodos de la Luna pasa también por el Sol que cuando dicha línea forma ángulo recto con la línea que une a la Tierra y el Sol. Y de aquí surge otra ecuación del movimiento medio lunar, que llamaré segunda semestral, y que es máxima cuando los nodos se encuentran en los octantes del Sol y que se desvanece cuando se hallan en las sicigias o en las cuadraturas, mientras en las demás posiciones de los nodos es proporcional al seno de la doble distancia de uno cualquiera de los nodos a la sicigia o cuadratura próxima; y se añade al movimiento medio de la Luna si el Sol está antes del nodo inmediato a la Luna y se resta si está delante, y en los octantes, cuando es máxima, asciende a 47″ a la distancia media del Sol y la Tierra, como infiero de la teoría de la gravedad. A otras distancias del Sol esta ecuación máxima en los octantes es inversamente proporcional al cubo de la distancia del Sol a la Tierra, y por ende en el perigeo del Sol asciende casi a 49″ y en su apogeo a casi 45″.

Por la misma teoría de la gravedad el apogeo de la Luna progresa máximamente cuando, o bien se halla en conjunción con el Sol, o bien en oposición a él, y retrocede cuando forma cuadratura con el Sol. Y la excentricidad se torna máxima en el primer caso y mínima en el segundo, por los Corolarios 7, 8 y 9 de la Proposición LXVI del Libro I. Y estas desigualdades, por los mismos Corolarios, son muy grandes y generan la ecuación principal del apogeo, a la que llamaré semestral. Y la ecuación máxima del semestre es de 12.º 18′ aproximadamente, en la medida en que pude inferirlo de las observaciones. Nuestro *Horrox* fue el primero en establecer que la Luna gira en una elipse en torno a la Tierra que está situada en su foco inferior. *Halley* situó el centro de la elipse en un epiciclo cuyo centro gira uniformemente en torno a la Tierra. Y del movimiento en el epiciclo surgen las desigualdades ya mencionadas en el progreso y regreso del apogeo y en el valor de la excentricidad. Imaginemos que la distancia media de la Luna a la Tierra se divide en 100 000 partes, y T represente a la Tierra, TC la excentricidad media de la Luna de 5505 partes. Prolónguese Te hasta B, de modo que CB sea el seno de la ecuación máxima semestral de 12.º 18′ para el radio TC, y el círculo BDA trazado con centro en C y radio CB será el susodicho epiciclo en el que se halla situado el centro de la órbita lunar y gira según el orden de las letras BDA. Tómese el ángulo BCD igual al doble del argumento anual, o a la doble distancia del verdadero lugar del Sol al apogeo de la Luna igualado una vez, y CTD será la ecuación semestral del apogeo lunar y TD la excentricidad de la órbita de la Luna que se dirige hacia el apogeo igualado por segunda vez. Pues bien, una vez conocidos el movimiento medio de la Luna y el apogeo y la excentricidad, así como el eje mayor de la órbita de la Luna de 200 000 partes; a partir de esto se obtiene el verdadero lugar de la Luna en la órbita y su distancia a la Tierra, y esto por métodos muy conocidos.

En el perihelio de la Tierra, debido a la mayor fuerza del Sol, el centro de la órbita lunar se mueve más velozmente en torno al centro C que en el afelio, y esto en razón inversa del cubo de la distancia del Sol a la Tierra. Por estar la ecuación del centro del Sol comprendida en el argumento anual, el centro de la órbita de la Luna se mueve más velozmente en el epiciclo BDA en razón inversa del cuadrado de la distancia de la Tierra al Sol. Para que pueda moverse aún más deprisa en razón simple inversa de la distancia, trácese desde el centro D de la órbita hacia el apogeo de la Luna la recta DE, paralela a TC, y tómese el ángulo EDF igual al exceso del argumento anual antedicho sobre la distancia hacia adelante del apogeo de la Luna hasta el perigeo del Sol; o lo que es lo mismo, tómese el ángulo CDF igual al complemento de la verdadera anomalía del Sol respecto a 360 grados. Y sea DF a DC como el doble de la excentricidad del Orbe Magno respecto a la distancia media del Sol a la Tierra y el movimiento diario medio del Sol desde el apogeo de la Luna al movimiento diario medio del Sol desde su propio apogeo conjuntamente, es decir, como 33⅞ a 1000 y 52′ 27″ 16‴ a 59′ 8″ 10‴ conjuntamente, o como 3 a 100. E imaginemos que el centro de la órbita de la Luna se sitúa en el punto F y, mientras gira en el epiciclo de centro D y radio DF, el punto D progresa por la circunferencia del círculo DABD. Pues con esta proporción, la velocidad con la que el centro de la órbita lunar se moverá por una cierta línea curva descrita en torno al centro C, será inversamente como el cubo de la distancia del Sol a la Tierra muy aproximadamente, como es preciso.



Es difícil el cálculo de este movimiento, pero se torna más fácil mediante la aproximación siguiente. Si la distancia media de la Luna a la Tierra es de 100 000 partes y la excentricidad es de 5505 partes, como antes, la recta CB o CD resultará de 1172¾ partes y DF de 35⅕ partes. Y esta recta, a la distancia TC, subtiende a la Tierra el ángulo generado por la traslación del centro de la órbita desde el punto D al punto F debido al movimiento de dicho centro: y el doble de esa línea en posición paralela y a la distancia del foco superior de la órbita de la Luna a la Tierra subtiende el mismo ángulo también generado en el movimiento del foco por dicha traslación y que por ello puede ser llamado segunda ecuación del centro. Y esta ecuación, a la distancia media de la Luna a la Tierra, es como el seno del ángulo comprendido entre la susodicha recta DF y la trazada desde el punto F hasta la Luna muy aproximadamente, y cuando es máxima resulta de 2′ 25″. Pues el ángulo comprendido entre la recta DF y la recta trazada desde F hasta la Luna se obtiene tanto restando el ángulo EDF de la anomalía media de la Luna, como añadiendo la distancia de la Luna al Sol a la distancia del apogeo de la Luna hasta el apogeo del Sol. Y como el radio es el seno del ángulo así hallado, así son también 2′ 25″ a la segunda ecuación, que ha de sumarse si aquella suma fuese menor que el semicírculo y restarse si fuese mayor. Así se obtendrá su longitud en las sicigias mismas de los astros.

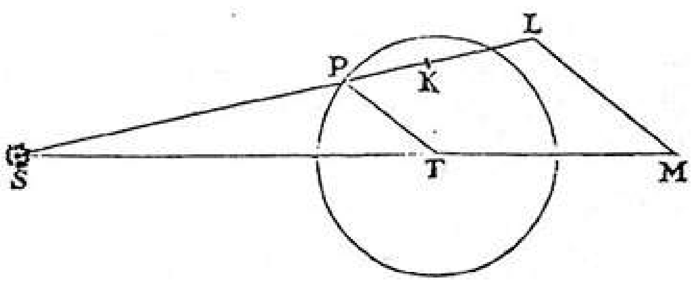
Puesto que la atmósfera de la Tierra hasta una altura de 35 o de 40 millas refracta la luz del Sol, y al refractarla la dispersa por la sombra de la Tierra, y al dispersarla en los límites de la sombra dilata a la sombra, al diámetro de la sombra resultante de la paralaje, añado un minuto en los eclipses de la Luna, o acaso un minuto y un tercio.

Pero la teoría de la Luna debe examinarse y establecerse mediante los fenómenos, primero en las sicigias, después en las cuadraturas y por último en los octantes. Y quien aborde esta tarea no sufrirá inconvenientes al utilizar los movimientos medios del Sol y de la Luna para el tiempo del Real Observatorio de *Greenwich* el último día de diciembre del año 1700, calendario antiguo, a saber: el movimiento medio del Sol ♑ 20.º 43′ 40″ y su apogeo ♋ 7.º 44′ 30″ y el movimiento medio de la Luna ♒ 15.º 21′ 00″, y su apogeo ♓ 8.º 20′ 00″, y del nodo ascendente ♌ 27.º 24′ 20″, y la diferencia de meridianos entre este observatorio y el Real de *París* es de 0h. 9m. 20sg., pero el movimiento medio de la Luna y de su apogeo no se tienen todavía con suficiente exactitud.

Proposición xxxvi. Problema xvii

Hallar la fuerza del Sol para mover el mar

La fuerza ML del Sol, o PT, en las cuadraturas lunares, a la hora de perturbar los movimientos lunares, era respecto a la Fuerza de la gravedad entre nosotros (por la Proposición xxv de este Libro) como 1 a 638092,6. Y la fuerza TM - LM, o 2PK en las sicigias lunares era el doble mayor. Pero estas fuerzas, si descendiéramos a la superficie de la Tierra, disminuirán en razón de las distancias al centro de la Tierra, es decir, en razón de 60½ a 1; y por consiguiente, la fuerza anterior en la superficie de la Tierra es a la fuerza de la gravedad como 1 a 38 604 600. Con esta fuerza el mar se deprime en los lugares que distan 90 grados del Sol. Con la otra fuerza, que es el doble mayor, se eleva el mar tanto bajo el Sol como en la parte opuesta. La suma de las fuerzas es a la fuerza de la gravedad como 1 a 12 868 200. Y puesto que la misma fuerza induce el mismo movimiento, tanto si con ella deprime al agua en las regiones que distan 90 grados del Sol, como si la eleva en las regiones bajo el Sol u opuestas a él, esta suma será la fuerza total del Sol para agitar el mar; y tendrá el mismo efecto que si toda ella elevase el mar en las regiones bajo el Sol y opuestas al Sol, y en cambio no actuase en absoluto en las regiones que distan 90 grados del Sol.



Esta es la fuerza del Sol para mover el mar en un lugar dado cualquiera, cuando el Sol se halla, tanto en el vértice del lugar, como a su distancia media de la Tierra. En otras posiciones del Sol su fuerza para mover el mar es como el seno verso del doble de la altura del Sol sobre el horizonte del lugar, directamente, e inversamente como el cubo de la distancia del Sol a la Tierra.

COROLARIO. Puesto que la fuerza centrífuga de las partes de la Tierra originada por el movimiento terrestre diario, que es a la fuerza de la gravedad como 1 a 289, haga que la altura del agua en el ecuador supere la altitud de la misma sobre los polos en 85 472 pies *parisinos*, como se vio más arriba en la Proposición XIX, la fuerza solar de que hemos tratado, al ser a la fuerza de la gravedad como 1 a 12 868 200 y por tanto a la susodicha fuerza centrífuga como 289 a 12 868 200, o sea, como 1 a 44 527, hará que la altura del agua en las regiones bajo el Sol y sus opuestas supere a la altura de la misma en los lugares que distan 90 grados del Sol en solamente un pie *parisino* y once pulgadas con de pulgada. Pues ésta es la cantidad que, respecto a 85 472 pies, es como 1 a 44 527.

PROPOSICIÓN XXXVII. PROBLEMA XVIII[13]

Hallar la fuerza de la Luna para mover el mar.

La fuerza de la Luna para mover el mar hay que inferirla de su proporción respecto a la fuerza del Sol, y esta proporción hay que inferirla de la proporción de los movimientos del mar generados por estas fuerzas. Antes de la desembocadura del río AVON, en la tercera milla más abajo de *Bristol*, en primavera y otoño el ascenso total del agua en la conjunción y en la oposición de los astros, según la observación de *Samuel Sturmy*, es de unos 45 pies, mientras que en las cuadraturas están sólo de 25. La altura primera es debida a la suma de las fuerzas, y la segunda a su diferencia. Por consiguiente, sean S y L las fuerzas del Sol y de la Luna situados sobre el ecuador y a distancias medias de la Tierra, y L + S será a L - S como 45 a 25, o como 9 a 5.

La subida del mar en el puerto ce *Plymouth* según observación de *Samuel Colepress* alcanza unos dieciséis pies de altura media, y en primavera y otoño la altura de la marea en las sicigias puede superar a su altura en las cuadraturas en siete u ocho pies más. Si la diferencia máxima de estas alturas fuese de nueve pies, L + S será a L - S como 20½ a 11½, o como 41 a 23. Proporción que coincide bastante bien con la anterior. Por la magnitud de las mareas en el puerto de *Bristol*, parecen más fiables las observaciones de *Sturmy*, y por ello nos atendremos a la proporción de 9 a 5 hasta que haya constancia de algo más seguro.

Por lo demás, debido a los movimientos de reciprocación de las aguas, las máximas mareas no coinciden con las sicigias de los astros sino que son las terceras *post*-sicigias, como se ha dicho, o son inmediatas al tercer paso de la Luna por el meridiano del lugar después de las sicigias, o mejor (como observa *Sturmy*), son las terceras después del día de novilunio o plenilunio, o también más o menos doce horas después del novilunio o plenilunio, y por ello vienen a incidir más o menos en la hora cuarenta y tres desde el novilunio o plenilunio. En el puerto susodicho vienen a ocurrir unas siete horas después del paso de la Luna por el meridiano del lugar; y por tanto siguen inmediatamente al paso de la Luna por el meridiano, cuando la Luna dista del Sol, o de la oposición del Sol, más o menos dieciocho o diecinueve grados hacia adelante. Verano e invierno son de gran importancia, no en los mismos solsticios, sino cuando el Sol dista de los solsticios una décima parte del curso entero, es decir, unos 36 ó 37 grados. E igualmente, la máxima subida del mar se origina por el paso de la Luna por el meridiano del lugar, cuando la Luna dista del Sol casi una décima parte del movimiento total de marea a marea. Sea esa distancia más o menos de 18½ grados. Y la fuerza del Sol a esta distancia de la Luna de las sicigias y de las cuadraturas será menor para aumentar o disminuir el movimiento del mar debido a la fuerza lunar que en las propias sicigias y cuadraturas en la razón del radio al seno del complemento del doble de esa distancia o sea del ángulo de 37 grados, es decir, en razón de 10 000 000 a 7 986 355. Y por lo mismo, en la proporción de más arriba hay que escribir 0,7986355S en lugar de S.

Pero también hay que disminuir la fuerza de la Luna en las cuadraturas, debido a la declinación lunar del ecuador. Pues en las cuadraturas, o más bien en el grado 18½ después de las cuadraturas, tiene una declinación aproximada de 23.º 13′. Y la fuerza para mover el mar del astro en declinación ecuatorial disminuye en razón cuadrada del seno del complemento de la declinación muy aproximadamente. Y por tanto, la fuerza de la Lima en estas cuadraturas es tan solo de 0,8570327L. Por lo tanto, L + 0,7986355S es a 0,8570327L - 0,7986355S como 9 a 5.

Además los diámetros de la órbita en que debería moverse la Luna sin excentricidad son entre sí como 69 a 70; y por ello la distancia de la Luna a la Tierra en las sicigias es a su distancia en las cuadraturas como 69 a 70, en iguales restantes condiciones. Y sus distancias en el grado 18½ desde las sicigias cuando se genera la marea máxima, y en el grado 18½ desde las cuadraturas, cuando se genera la marea mínima, son a su distancia media como 69,098747 y 69,897345 a 69½. Pero las fuerzas de la Luna para mover el mar están en razón inversa del cubo de las distancias, y por ello las susodichas fuerzas en la máxima y mínima de estas distancias son a la fuerza en la distancia media como 0,9830427 y 1,017522 a 1. De donde resulta que 1,017522L + 0,7986355S es a 0,9830427 x 0,8570327L - 0,7986355S como 9 a 5. Y S a L como 1 a 4,4815. De suerte que siendo la fuerza del Sol a la de la gravedad como 1 a 12 868 200, la fuerza de la Luna será a dicha fuerza de la gravedad como 1 a 2 871 400.

COROLARIO 1. Dado que el agua bajo la acción de la fuerza del Sol sube a una altura de un pie, once pulgadas y $^{1}/_{30}$ de pulgada, la Luna con la propia fuerza hará que ascienda hasta una altura de ocho pies y $7^{5}/_{22}$ pulgadas, y con ambas fuerzas juntas hasta una altura de 10½ pies, y cuando la Luna está en el perigeo hasta 12½ pies y más, sobre todo cuando el viento colabora con su empuje. Semejante fuerza es bastante para provocar todos los movimientos del mar, y responde adecuadamente a la cantidad de movimiento. Pues en los mares que se extienden ampliamente de oriente a occidente, como en el *Pacífico* y en las zonas extratropicales de los mares *Atlántico* y *Etiópico*, el agua suele alcanzar alturas de seis, nueve, doce o quince pies. Pero en el mar *Pacífico*, más profundo y más extenso, se asegura que las mareas son mayores que en el *Atlántico* y en el *Etiópico*. Y es que para que la marea sea más alta, la anchura del mar de este a oeste no debe ser menor de noventa grados. En el mar *Etiópico* la subida del agua entre los trópicos es menor que en las zonas templadas debido a la estrechez del mar entre *África* y la *América* austral. En el medio del mar el agua no puede ascender, salvo que descienda a la vez en las dos orillas oriental y occidental, pese a que en nuestros estrechos mares haya de descender por veces alternas en dichas costas. Por esta razón el flujo y reflujo, en las islas muy distantes de las costas, suele ser muy pequeño. En los puertos en los que el agua se ve obligada a llenar y vaciar alternativamente las cuencas pasando con gran ímpetu por estrechos y poco profundos canales, los flujos y reflujos han de ser por fuerza mayores, como en *Plymouth* y en el puente de *Chepstow*, en *Inglaterra*; en el *Mont S. Michele* o en la ciudad de *Avranches* en *Normandía*, en *Cambaya y Pegu* en la *India* oriental. En dichos lugares el mar, entrando y saliendo con gran velocidad, tanto inunda los litorales como deja millas enteras de arenales. Y el ímpetu de las entradas y de las salidas de agua no cesa hasta que el agua sube o desciende 30, 40, y hasta 50 pies, o más. Y lo mismo ocurre con los estrechos largos y poco profundos, como el de *Magallanes* o los que rodean *Inglaterra*. Las mareas, en semejantes puertos y estrechos por la fuerza de los accesos y recesos aumentan en gran medida. Mientras que en las costas con descenso rápido hacia un mar profundo y abierto, en las cuales el agua sin fuerza en la llegada y en el retroceso puede subir y bajar libremente, la magnitud de la marea responde a las fuerzas del Sol y de la Luna.

COROLARIO 2. Dado que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la fuerza de la gravedad como 1 a 2 871 400, es evidente que dicha fuerza es mucho menor que la que es perceptible mediante experimentos con péndulos o cualesquiera otros estáticos o hidrostáticos. Únicamente dicha fuerza muestra un efecto sensible en las mareas.

COROLARIO 3. Toda vez que la fuerza de la Luna para mover el mar es a la correspondiente fuerza del Sol como 4,4815 a 1, y dichas fuerzas (por el Corolario 14 de la Proposición LXVI del Libro I) son como las densidades de los cuerpos de la Luna y del Sol y el cubo de los diámetros aparentes conjuntamente; la densidad de la Luna será a la densidad del Sol directamente como 4,4815 ale inversamente como el cubo del diámetro de la Luna al cubo del diámetro del Sol: esto es (siendo los diámetros medios aparentes de la Luna y del Sol de 31′, 16½ y de 32′, 12″), como 4891 a 1000. Pero la densidad del Sol era a la densidad de la Tierra como 1000 a 4000; y por tanto, la densidad de la Luna es a la densidad de la Tierra como 4891 a 4000, o como 11 a 9. Luego el cuerpo de la Luna es más denso y terroso que nuestra Tierra.

COROLARIO 4. Y puesto que el verdadero diámetro de la Luna obtenido de las observaciones astronómicas es al verdadero diámetro de la Tierra como 100 a 365, la masa de la Luna será a la masa de la Tierra como 1 a 39,788.

COROLARIO 5. Y la gravedad aceleratriz en la superficie de la Luna será casi un triplo menor que la gravedad aceleratriz en la superficie de la Tierra.

COROLARIO 6. Y la distancia del centro de la Luna al centro de la Tierra será a la distancia del centro de la Luna al centro común de gravedad de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788.

COROLARIO 7. Y la distancia media del centro de la Luna al centro de la Tierra en los octantes de la Luna será aproximadamente de 60⅖ semidiámetros máximos de la Tierra. Porque el semidiámetro máximo de la Tierra era de 19 658 600 pies parisinos, y la distancia media entre centros de Luna y Tierra consta de 60⅖ de estos mismos semidiámetros y es igual a 1 187 379 440 pies. Esta distancia (por el Corolario anterior) es a la distancia del centro de la Luna al centro común de gravedad de la Tierra y la Luna como 40,788 a 39,788: por lo tanto, la distancia última es de 1 158 268 534 pies. Y, puesto que la Luna gira respecto a las fijas en 27 días, 7 horas y 43$\frac{4}{9}$ minutos, el seno verso del ángulo descrito por la Luna en un minuto es de 12 752 341 para un radio de 1 000 000 000 000 000. Y el radio es a este seno verso como 1 158 268 534 pies son a 14,7706353 pies. Por consiguiente, la Luna, cayendo hacia la

Tierra con la fuerza con la que es retenida en órbita describirá en el tiempo de un minuto 14,7706353 pies. Y aumentando dicha fuerza en una razón como $178\frac{29}{40}$ a $177\frac{27}{40}$ se tendrá la fuerza total de gravedad en la órbita de la Luna, por el Corolario de la Proposición III. Y cayendo la Luna con esta fuerza describirá en el tiempo de un minuto 14,8538067 pies. Y a $\frac{1}{60}$ de esa distancia de la Luna al centro de la Tierra, esto es, a la distancia de 197 896 573 pies del centro de la Tierra, un grave cayendo en el tiempo de un segundo describe también 14,8538067 pies. Por lo cual a la distancia de 19 615 800 pies, que son el semidiámetro medio de la Tierra, un grave cayendo describirá 15,11175 pies, o sea, 15 pies, 1 pulgada y $4\frac{1}{11}$ líneas. Este será el descenso de los cuerpos a la latitud de 45 grados. Y según la tabla precedente expuesta en la Proposición XX, el descenso será algo mayor en la latitud de *París*, con un exceso de casi $\frac{2}{3}$ de línea. Pues según este cálculo los graves en la latitud de *París* cayendo en el vacío describirán en un segundo casi 15 pies parisinos, 1 pulgada y $4\frac{4}{25}$ líneas. Y si la gravedad disminuyese, suprimiendo la fuerza centrífuga debida en esa latitud a la rotación diaria de la Tierra, los graves cayendo allí en el tiempo de un segundo describirán 15 pies, 1 pulgada y 1½ líneas. Y ya más arriba, en las Proposiciones IV y XIX, se ha mostrado que en la latitud de *París* los graves caen con esta velocidad.

COROLARIO 8. La distancia media entre los centros de la Tierra y la Luna en las sicigias de la Luna es de 60 semidiámetros máximos terrestres, restada una treintava parte del semidiámetro aproximadamente. Pero en las cuadraturas de la Luna las distancias medias entre los dichos centros es de $60\frac{5}{6}$ semidiámetros terrestres. Pues estas dos distancias son a las distancias medias de la Luna en los octantes como 69 y 70 a 69½, por la Proposición XXVIII.

COROLARIO 9. La distancia media del centro de la Tierra al de la Luna en las sicigias de la Luna es de 60,1 semidiámetros medios terrestres. Y en las cuadraturas de la Luna la distancia media entre esos mismos centros es de 61 semidiámetros terrestres menos un treintavo de semidiámetro.

COROLARIO 10. En las sicigias de la Luna su paralaje horizontal media a latitudes de 0, 30, 38, 45, 52, 60, 90 grados es de 57′ 20″; 57′ 16″; 57′ 14″; 57′ 12″; 57′ 10″; 57′ 8″; 57′ 4″, respectivamente.

No he tenido en cuenta en estos cálculos la atracción magnética de la Tierra, cuya cantidad es ciertamente muy pequeña y se desconoce. Pero si alguna vez se llegase a conocer esta atracción, y las medidas en grados sobre los meridianos, las longitudes de los péndulos isócronos en los distintos paralelos, las leyes del movimiento del mar, la paralaje lunar junto con los diámetros aparentes del Sol y de la Luna pudieran ser determinados con mayor exactitud sobre la base de los fenómenos, se podrían repetir estos cálculos con mayor precisión.

Proposición xxxviii. Problema xix

Hallar la figura del cuerpo lunar.

Si el cuerpo lunar fuese fluido como lo es nuestro mar, la fuerza de la Tierra para elevar dicho fluido tanto en las partes más cercanas como en las más lejanas sería a la fuerza de la Luna, por la cual nuestro mar es elevado en las partes que están bajo ella y en las opuestas, como la gravedad aceleratriz de la Luna hacia la Tierra es a la gravedad aceleratriz de la Tierra hacia la Luna, y el diámetro de la Luna al diámetro de la Tierra conjuntamente; es decir, como 39,788 a 1 y 100 a 365 conjuntamente, o como 1081 a 100. Por lo cual, dado que la fuerza lunar eleva nuestro mar hasta $8\frac{3}{2}$ pies, la fuerza terrestre elevaría el fluido lunar hasta 93 pies. En consecuencia, la figura lunar sería un esferoide, cuyo diámetro mayor prolongado pasaría por el centro de la Tierra, y superaría a los diámetros perpendiculares con un exceso de 186 pies. Por tanto, esa es la figura que posee la Luna, y debió adoptarla desde el principio. Q. E. I.

Corolario. Y esto hace que la misma cara de la Luna esté siempre vuelta hacia la Tierra. Y el cuerpo lunar no podría permanecer en otra posición, sino que oscilando retornaría siempre a esta posición. Sin embargo, las oscilaciones, debido a la pequeñez de las fuerzas que las provocan, serían muy lentas, hasta el punto de que la cara de la Luna que debería mirar siempre hacia la Tierra podría mirar hacia el otro foco de la órbita lunar (por lo dicho en la Proposición xvii), sin que se apartase al instante de dicha posición y se volviese hacia la Tierra.

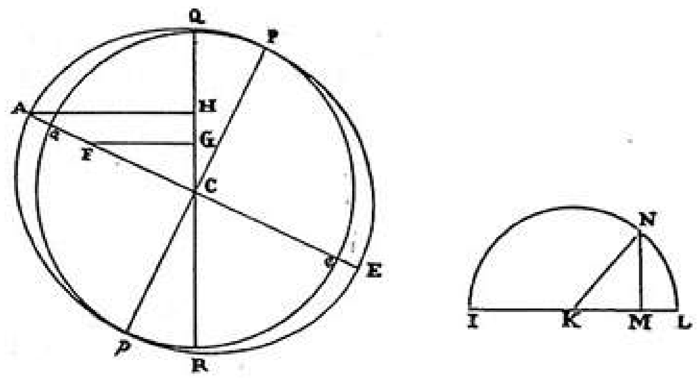
Lema i[14]

Si APEp representa a la Tierra uniformemente densa, trazada con centro en C y polos P, p, y ecuador AE, y si con centro en C se imagina que trazamos una esfera Pape de radio CP; y sea QR un plano sobre el cual incide normalmente una recta trazada desde el centro del Sol al centro de la Tierra, mientras que cada partícula de toda la Tierra exterior PapAPepE que sobresale de la esfera descrita del modo dicho trata de alejarse hacia un lado y otro del plano QR, y los impulsos de cada una de las partículas es como su distancia al plano, digo, primero que la fuerza y eficacia totales de todas las partículas situadas en el círculo AE del ecuador y uniformemente dispuestas en anillo alrededor del globo en orden a hacer rotar a la Tierra en torno a su centro es a toda la fuerza y eficacia de otras tantas partículas situadas en el punto A sobre el ecuador, punto máximamente distante del plano QR, y en orden a producir un movimiento circular de la Tierra similar y en torno a su centro, como uno a dos. Y el susodicho movimiento circular tendrá lugar en torno a un eje situado en la sección común del ecuador y el plano QR.

Pues, con centro en K y semidiámetro IL trácese el semicírculo INLK. Imagínese que la semicircunferencia INL se divide en innumerables partes iguales, y desciendan sobre el diámetro IL desde cada parte N los senos NM. En tal caso la suma de los cuadrados de todos los senos NM será igual a la suma de los cuadrados de los senos KM, y una y otra suma juntas será igual a la suma de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN; y por consiguiente, la suma de todos los cuadrados NM será la mitad de la suma de los cuadrados de otros tantos semidiámetros KN.

Ahora divídase el perímetro del círculo AE en otras tantas partículas iguales y desde cada una de ellas F se hace descender sobre el plano QR la perpendicular FG, y lo mismo desde el punto A la perpendicular AH. Y la fuerza con que la partícula F se aleja del plano QR será como la susodicha perpendicular FG, por hipótesis, y dicha fuerza multiplicada por la distancia CG será la eficacia de la partícula F en orden a hacer girar a la Tierra en torno a su eje. Y por lo mismo, la eficacia de la partícula en el punto F será a la eficacia de la partícula en el punto A como FG x GC a AH x HC, es decir, como FC^2 a AC^2; y por tanto, la eficacia entera de todas las partículas en sus lugares F será a la eficacia de otras tantas partículas en el lugar A como la suma de todos los FC^2 a la suma de otros tantos AC^2, es decir (por lo ya demostrado) como uno a dos. Q. E. D.

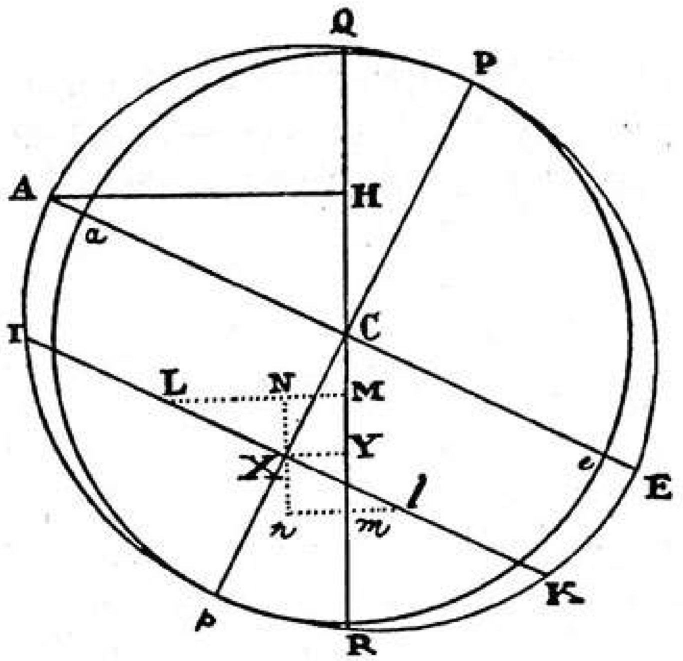
Y toda vez que las partículas actúan apartándose perpendicularmente del plano QR, y esto igualmente a uno y otro lado del plano, harán girar a la circunferencia del círculo ecuatorial y a la Tierra anexa a él en torno a un eje situado tanto sobre dicho plano QR como sobre el plano del ecuador.



Lema II

Con los mismos supuestos, digo, en segundo lugar, que la fuerza y eficacia totales de todas las partículas situadas por todas partes fuera de la esfera, en orden a hacer girar a la Tierra en torno al mismo eje es a la fuerza total de las mismas partículas, uniformemente dispuestas alrededor del círculo ecuatorial en forma de anillo y en orden a mover a la Tierra con un movimiento circular semejante, como dos a cinco.

Pues sea IK un círculo menor cualquiera paralelo al ecuador AE, y sean L, *l* dos partículas cualesquiera iguales situadas en dicho círculo fuera del globo P*ape*. Y si sobre el plano QR, que es perpendicular a un radio trazado al Sol, se trazan las perpendiculares LM, *lm*, las fuerzas totales con que tales partículas huyen del plano QR serán proporcionales a dichas perpendiculares LM, *lm*. Trácese entonces la línea L*l* paralela al plano P*ape* y biséquese en X, y por el punto X trácese N*n* paralela al plano QR y que encuentre a las perpendiculares LM, *lm* en N y *n*, y sobre el plano QR hágase caer la perpendicular XY. Y las fuerzas opuestas de las partículas L y *l* en orden a hacer girar a la Tierra en direcciones opuestas son como LM x MC y *lm* x *m*C, es decir, como LN x MC + NM x MC y I*n* x *m*C - *nm* x *m*C, o sea, LN x MC + NM x MC y LN x *m*C - NM x *m*C, y la diferencia entre ambas, LN x M*m* - NM x (MC + *m*C), es la fuerza de ambas partículas juntas para mover la Tierra en giro. La parte positiva de esta diferencia LN x M*m*, o sea, 2LN x NX es a la fuerza de dos partículas de igual magnitud, 2AH x HC, situadas en A, como LX^2 a AC^2. Y la parte negativa, NM x (MC + *m*C), o sea, 2XY x CY es a la fuerza de las mismas partículas situadas en A, 2AH x HC, como CX^2 a AC^2. Y por ello, la diferencia de las partes, es decir, la fuerza de las dos partículas L y *l* tomadas conjuntamente para hacer girar a la Tierra es a la fuerza de dos partículas iguales a ellas y situadas en el punto A en orden a hacer girar igualmente a la Tierra como LX^2 - CX^2 a AC^2. Pero si la circunferencia IK del círculo IK se divide en innumerables partículas iguales L, todos los LX^2 serán a otros tantos IX^2 como 1 a 2 (por el Lema I) y a otras tantas AC^2 como IX^2 a $2AC^2$; y todas las CX^2 a otras tantas AC^2 como $2CX^2$ a $2AC^2$. Por lo tanto, las fuerzas reunidas de todas las partículas alrededor del círculo IK son a las fuerzas reunidas de otras tantas partículas en el punto A como IX^2 - $2CX^2$ a $2AC^2$, y por lo mismo (por el Lema I) son respecto a las fuerzas reunidas de otras tantas partículas en torno al círculo AE como IX^2 - $2CX^2$ a AC^2.



Pero si ahora se divide el diámetro P*p* de la esfera en innumerables partes iguales sobre las que se sitúan otros tantos círculos IK, la materia en el perímetro de un círculo cualquiera IK será como IX^2: y por lo mismo, la fuerza de dicha materia para mover la Tierra en giro será como IX^2 por $IX^2 - CX^2$. Y la fuerza de esa misma materia si se hallase en el perímetro del círculo AE sería como $IX^2 \times AC^2$. Y por tanto, la fuerza de todas las partículas de toda la materia, situada fuera del globo en los perímetros de todos los círculos, es a la fuerza de otras tantas partículas situadas en el perímetro del círculo máximo AE, como todos los $IX^2 \times (IX^2 - 2CX^2)$ a otros tantos $IX^2 \times AC^2$, es decir, como todas las $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ a otras tantas AC^2, es decir, como todas las $AC^2 - CX^2$ por $AC^2 - 3CX^2$ a otras tantas $AC^2 - CX^2$ por AC^2, esto es, como todas las $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ a otras tantas $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, es decir, como toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$, a toda la cantidad fluyente cuya fluxión es $AC^4 - AC^2 \times CX^2$; y en consecuencia, por el método de las fluxiones, como $AC^4 \times CX - \frac{4}{3}C^2 \times CX^3 + \frac{3}{5}X^5$ es a $AC^4 \times CX - \frac{1}{3}AC^2 \times CX^3$, o sea, si en lugar de CX se escribe todo C*p* o AC, como $\frac{4}{15}AC^5$ a $\frac{2}{3}AC^5$, lo que es como dos a cinco. Q. E. D.

Lema III

Con los mismos supuestos, digo, en tercer lugar, que el movimiento de toda la Tierra en torno al eje antedicho, resultante de los movimientos de todas las partículas, será al movimiento del anillo susodicho en torno al mismo eje en una razón compuesta de la razón de la materia en la Tierra a la materia en el anillo y de la razón de tres cuadrados del cuadrante de cualquier círculo a dos cuadrados de su diámetro; es decir, en razón de la materia a la materia y del número 925 275 al número 1 000 000.

Pues el movimiento de un cilindro que gira en torno a su eje inmóvil es al movimiento de la esfera inscrita que gira a la vez, como cuatro cuadrados iguales cualesquiera son a tres de los círculos inscritos en ellos: y el movimiento del cilindro es al movimiento de un anillo muy delgado que rodease el lugar común de contacto, como el doble de la materia en el cilindro al triple de la materia en el anillo; y este movimiento del anillo, continuado uniformemente en torno al eje del cilindro, es al movimiento uniforme de éste en torno a su propio diámetro, realizado en el mismo tiempo periódico, como la circunferencia del círculo al doble del diámetro.

Hipótesis II

Si, suprimiendo todo el resto de la Tierra, el anillo predicho, sólo en derredor de la

Tierra, girase en torno al Sol con movimiento anual, mientras que en torno a su propio eje, inclinado éste sobre el plano de la eclíptica con un ángulo de 23½ grados, girase también con movimiento diario: el movimiento de los puntos equinocciales sería el mismo, tanto si el susodicho anillo fuera fluido, como si estuviese constituido de materia firme y rígida.

Proposición xxxix. Problema xx[15]

Hallar la precesión de los equinoccios

El movimiento medio horario de los nodos de la Luna en una órbita circular, cuando los nodos están en cuadraturas, era de 16″ 35‴ 16′′′′ 36′′′′′, y su mitad 8″ 17″ 38′′′′ 18′′′′′, es (por las razones dadas antes) el movimiento medio horario de los nodos en dicha órbita. Y el año sidéreo entero sea de 20.º 11′ 46″. Puesto que en semejante órbita los nodos de la Luna completarían cada año los 20.º 11′ 46″ hacia adelante, y si hubiese varias lunas, los movimientos de los nodos de cada una (por el Corolario 16 de la Proposición LXVI del Libro I) serían como los tiempos periódicos, si la Luna en el tiempo de un día sidéreo girase junto a la superficie de la Tierra, el movimiento anual de los nodos sería a 20.º 11′ 46″ como el día sidéreo de 23h. 56′ al tiempo periódico de la Luna de 27d. 7h. 43′; es decir, como 1436 a 39 343. E igual es la razón de los nodos de un anillo de lunas rodeando a la Tierra, tanto si dichas lunas no se tocan, como si fueran líquidas y formasen un anillo continuo, o si ese anillo fuese rígido y se hiciese inflexible.

Supongamos, pues, que dicho anillo es igual, en cantidad de materia, a toda la Tierra P*ap*AP*ep*E que sobresale de la esfera P*ape*, (vde. fig. del Lema II); y puesto que dicha esfera es a la dicha Tierra que sobresale como aC^2 a $AC^2 - aC^2$, esto es (al ser PC semidiámetro menor de la Tierra o también aC al semidiámetro mayor AC como 229 a 230) como 52 441 a 459; si este anillo ciñese a la Tierra por el ecuador y ambos girasen a la vez en torno al diámetro del anillo, el movimiento del anillo sería al movimiento de la esfera interior (por el Lema III de éste) como 459 a 52 441 y 1 000 000 a 925 275 conjuntamente, es decir, como 4590 a 485 223; y por tanto el movimiento del anillo sería a la suma del movimiento del anillo y del movimiento del globo como 4590 a 489 813. De donde, si el anillo se adhiriese al globo y comunicase a éste el movimiento con el cual regresan sus nodos o puntos equinocciales, el movimiento restante en el anillo será a su movimiento anterior como 4590 a 489 813; y por lo mismo, el movimiento de los puntos equinocciales disminuirá en la misma razón. Por consiguiente, el movimiento anual de los puntos equinocciales del cuerpo compuesto del anillo y del globo será al movimiento de 20.º 11′ 46″ como 1436 a 39 343 y 4590 a 489 813 conjuntamente, es decir, como 100 a 292 369. Pero las fuerzas por las cuales retroceden los nodos de las lunas (como expuse antes) y por tanto también retroceden los puntos equinocciales (esto es, las fuerzas 3IT, en la figura de la Proposición XXX) son en cada partícula como las distancias de cada una de esas partículas al plano QR, y con esas fuerzas huyen las partículas del plano; y por ello (por el Lema II), si la materia del anillo se distribuyera por toda la superficie del globo al modo de la figura P*ap*AP*ep*E para dar lugar a la parte sobresaliente de la Tierra, toda la fuerza y eficacia de todas las partículas para hacer girar a la Tierra en torno de un diámetro ecuatorial, y por tanto para mover los puntos equinocciales, resultará menor que antes, y ello en razón de 2 a 5. Y por eso el regreso anual de los equinoccios sería ahora respecto a 20.º 11′ 46″, como 10 a 73 092; y por tanto resultaría de 9″ 56‴ 50‴.

Además, este movimiento, debido a la inclinación del plano ecuatorial hacia el plano de la eclíptica, debe ser disminuido, y esto en la razón del seno de 91 706 (que es el seno del complemento de 23½ grados) al radio 100 000. Con lo cual el movimiento resultará ahora de 9″ 7‴ 20′′″. Esta es la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza del Sol.

Pero la fuerza de la Luna para mover el mar era a la del Sol como 4,4815 a 1 aproximadamente. Y la fuerza de la Luna para mover los equinoccios es a la del Sol en la misma proporción. Y de aquí resulta que la precesión anual de los equinoccios debida a la fuerza de la Luna sea de 40″ 52‴ 52′′″, y la precesión de los equinoccios total anual debida a ambas fuerzas es de 50″ 00‴ 12′′″. Este movimiento concuerda con los fenómenos. Pues la precesión de los equinoccios según las observaciones astronómicas es de cincuenta segundos al año más o menos.

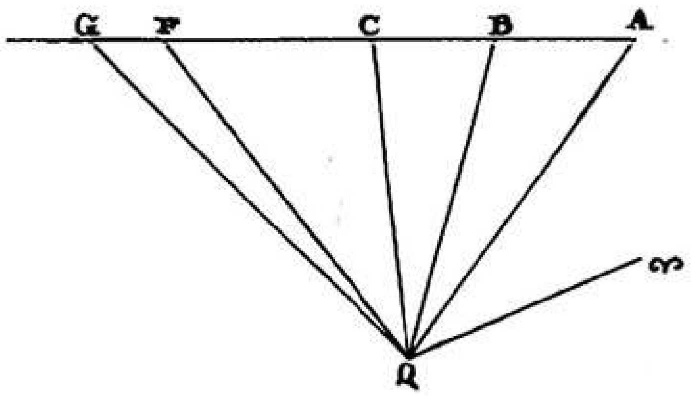
Si la altura de la Tierra en el ecuador superase a la altura en los polos en más de 17⅙ millas, la materia terrestre sería más rara en la circunferencia que en el centro, y la precesión de los equinoccios debería aumentar debido a dicha altura, mientras debería disminuir debido a la rareza.

Ya hemos descrito el sistema del Sol, la Tierra, la Luna y los planetas; resta sólo añadir algunas cosas sobre los cometas.

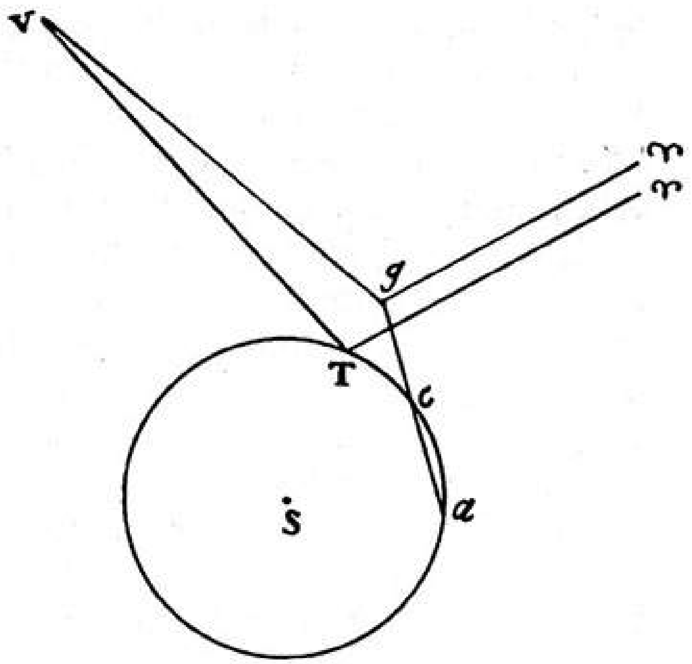
LEMA IV

Los cometas están más arriba de la Luna y circulan por las regiones planetarias.

Al igual que la falta de paralaje diurna alejó a los cometas fuera y más allá de las regiones sublunares, de igual modo por la paralaje anual se llega a la convicción de su descenso a las regiones planetarias. Pues los cometas, que avanzan según el orden de los signos zodiacales, son todos al final de su aparición o muy lentos o retrógrados cuando la Tierra se halla entre ellos y el Sol; y mucho más veloces si la Tierra se halla en oposición. Y por el contrario, los que caminan contra el orden de los signos son más veloces al final de su aparición si la Tierra se halla entre ellos y El Sol; pero son mucho más lentos y hasta retrógrados si la Tierra se halla en las partes opuestas. Esto sucede sobre todo por el diferente movimiento de la Tierra según su sitio, como ocurre con los planetas, que según el movimiento de la Tierra vaya en la misma o contraria dirección, ahora parecen retrógrados, después muy lentos y otras veces muy rápidos. Si la Tierra marcha en la misma dirección del cometa y es transportado por un movimiento angular en torno al Sol tan veloz que hace que una recta que pase por la Tierra y por el cometa siempre converja en las regiones ulteriores al cometa, éste, visto desde la Tierra, aparecerá siempre retrógrado por su movimiento más lento; pero si la Tierra es transportada con movimiento más lento el movimiento del cometa (descontado el movimiento de la Tierra) resulta por lo menos más lento. Pero cuando la Tierra camina en dirección contraria, el cometa parece por ello más veloz. La distancia del cometa, en cambio, se obtiene a partir de la aceleración, de la retardación o del movimiento retrógrado del modo siguiente.



Sean ♈ QA, ♈ QB, ♈ QC, tres longitudes del cometa observadas al principio del movimiento y sea ♈ QF la última longitud observada, cuando el cometa deja de verse. Trácese la recta ABC, cuyas partes AB, BC están situadas entre las rectas QA y QB, QB y QC, y son además entre sí como los tiempos comprendidos entre las tres primeras observaciones. Prolónguese AC hasta G, de modo que AG sea a AB como el tiempo comprendido entre la primera y la última observación e$ al tiempo entre la primera y la segunda, y únanse QG. Y si el cometa se moviese en línea recta y la Tierra o estuviese en reposo o avanzase con movimiento uniforme también en línea recta, el ángulo ♈ QC sería la longitud del cometa en el momento de la última observación. Pues el ángulo FQG, que es la diferencia de longitudes, se debe a la desigualdad de los movimientos del cometa y de la Tierra. Pero este ángulo, si la Tierra y el cometa se mueven en sentidos contrarios, se suma al ángulo ♈ QG, y de este modo convierte al movimiento aparente del cometa en más rápido; pero si el cometa marcha hacia la misma dirección que la Tierra, se resta de dicho ángulo y convierte con ello al movimiento del cometa o en más lento o, incluso, en retrógrado, como ya he explicado. Surge, pues, este ángulo principalmente del movimiento de la Tierra, y por ello ha de considerarse con toda razón como la paralaje del cometa, dejando de lado tal vez algún incremento o decremento del mismo que pueda deberse a algún movimiento desigual del cometa en su propia órbita. Mas la distancia del cometa se infiere de dicha paralaje como sigue. Represente S al Sol, *ac*T a la eclíptica, *a* el lugar de la Tierra en la primera observación, *c* el lugar de la Tierra en la observación tercera, T el lugar de la Tierra en la observación última, y T♈ una línea recta trazada al principio de Aries. Tómese al ángulo ♈ TV igual al ángulo ♈ QF, es decir, igual a la longitud del cometa cuando la Tierra se halla en T. Únanse *ac* y prolónguese hasta *g* de modo que *ag* sea a *ac* como AG a AC, y *g* será el lugar que ocuparía la Tierra en el momento de la última observación con un movimiento uniformemente continuo por la recta *ac*. Por ello, si se traza *g*♈ paralela a T♈ y se toma al ángulo ♈*g*V igual al ángulo ♈ QG, dicho ángulo ♈ *g*V será igual a la longitud del cometa visto desde el punto *g*; y el ángulo TV*g* será la paralaje debida a la traslación de la Tierra desde el punto *g* hasta el punto T: y por consiguiente, V será el lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Pero este punto V suele hallarse más bajo que la órbita de *Júpiter*.



Y lo mismo se infiere de la curvatura de la trayectoria de los cometas. Estos cuerpos se desplazan por círculos máximos prácticamente, cuando su movimiento es más rápido; pero al final de su curso, cuando la parte de movimiento aparente debida a la paralaje está en mayor proporción al movimiento aparente, se separan de dichos círculos, y siempre que la Tierra se mueve hacia una dirección, ellos se desvían hacia otra. Semejante deflexión se debe sobre todo a la paralaje, en cuanto que responde al movimiento de la Tierra; y su notable magnitud, según mis cálculos, sitúa a los cometas en el momento de desaparecer bastante por debajo de Júpiter. De donde se sigue que en los perigeos y perihelios, cuando están más cerca, descienden muchas veces más abajo de la órbita de Marte y de los planetas inferiores.

También se confirma la proximidad de los cometas por la luz de sus cabezas. Pues el brillo de un cuerpo celeste iluminado por el Sol y que se va alejando hacia lo remoto del cielo disminuye en razón de la cuarta potencia de la distancia: a saber, en razón cuadrada por el aumento de la distancia del cuerpo al Sol y en otra razón cuadrada por la disminución del diámetro aparente. De donde, si se da la cantidad de la luz y el diámetro aparente de un cometa se tendrá dada también la distancia, diciendo que su distancia será a la distancia de un planeta, directamente como la razón de un diámetro a otro e inversamente como la razón de la raíz cuadrada de la luz de uno a la raíz cuadrada de la luz del otro. Así, el diámetro mínimo de la cabellera del cometa de 1682, observado por *Flamsteed* con un telescopio de 16 pies y medido con micrómetro era de 2′ 0″; pero el núcleo o estrella central de la cabeza apenas ocupaba una décima parte de esa latitud, de suerte que su diámetro sólo era de 11″ ó 12″. Pero en luz y claridad de su cabeza superaba a la cabeza del cometa de 1680, y competía con las estrellas de primera y segunda magnitud. Supongamos que Saturno, con su anillo, fuese cuatro veces más brillante: y puesto que la luz del anillo casi iguala a la luz del globo interior y el diámetro aparente del globo viene a ser de 21″ aproximadamente, la luz, por tanto, del globo y del anillo juntas igualarán a la luz de un globo que fuese de 30″ de diámetro: la distancia del cometa será a la distancia de Saturno como 1 a √4 inversamente y como 12″ a 30″ directamente, es decir, como 24 a 30 o como 4 a 5. Además, el cometa del año 1665, como lo atestigua *Hewelcke*, superaba en brillo a casi todas las estrellas fijas, incluso al mismo Saturno, quizás porque su color era mucho más vivo. Resultaba este cometa mucho más luminoso que el aparecido a finales del año anterior y que era comparado con las estrellas de primera magnitud. La anchura de la cabeza era casi de 6′, pero el núcleo, comparado con los planetas mediante el telescopio era claramente menor que Júpiter y ora se juzgaba menor que el cuerpo interior de Saturno, ora igual a dicho cuerpo. Por consiguiente, al ser el diámetro de la cabeza de los cometas muy raramente superior a 8′ ó 12′ y el diámetro del núcleo o estrella central ser sólo una décima o decimoquinta parte del diámetro de la cabeza, es evidente que estas estrellas son a lo sumo de la misma magnitud aparente que los planetas. Por lo cual, dado que su luz se pueda comparar a veces con la de Saturno, y hasta alguna vez superarla, está claro que todos los cometas en los perihelios se han de situar más abajo de Saturno o no muy por encima. Y se equivocan por completo quienes los alejan hasta las regiones de las fijas: pues con semejante solución no deberían ser iluminados por nuestro Sol más de lo que nuestros planetas lo son por las estrellas fijas.

Hemos tratado de estas cosas sin tener en cuenta el oscurecimiento de los cometas debido a ese humo abundante y espeso que rodea a la cabeza, apareciendo ésta siempre como velada por una nube. Pues cuanto más oscuro se torna el cuerpo debido a dicha nube, tanto más necesario es que esté más cerca del Sol para que la cantidad de luz que refleja emule a los planetas. Por ello es muy verosímil que los cometas desciendan bastante por debajo de la órbita de Saturno, como hemos observado por la paralaje. Y esto mismo se confirma magníficamente por las colas. Estas, o se originan por la reflexión producida por el humo esparcido por el éter, o se originan de la luz de la cabeza. En el primer caso hay que disminuir la distancia de los cometas, para que el humo que sale continuamente de la cabeza no se halle propagado por espacios demasiado amplios y con una velocidad increíble. En el segundo caso hay que atribuir toda la luz, tanto de la cola como de la cabellera, al núcleo de la cabeza. Ahora bien, si imaginamos toda esa luz reunida y encerrada dentro del disco del núcleo con certeza, siempre que emita una cola máxima y luminosa, superará con mucho al brillo de Júpiter. Pues, con un diámetro aparente menor emite más luz, y por ende será mucho más iluminado por el Sol, con lo que estará también mucho más cerca del mismo Sol. E incluso, por este argumento, deben situarse bajo la órbita de Venus las cabezas que se ocultan bajo el Sol y que, a veces, emiten colas enormes y muy brillantes a modo de tizones encendidos. Pues toda esa luz, si se supone reunida en la estrella, superaría a la propia Venus, por no decir a muchas Venus.

Y lo mismo, finalmente, se sigue de la luz de las cabezas que crece al alejarse los cometas desde la Tierra hacia el Sol y decrece al apartarse del Sol hacia la Tierra. De modo que el último cometa del año 1665 (según las observaciones de *Hewelcke*) desde el momento de su aparición perdía continuamente movimiento aparente y por ello ya había pasado de su perigeo; pero el brillo de su cabeza crecía no menos de día en día, hasta que el cometa dejó de verse cubierto por los rayos solares. El cometa de 1683 (observado por el mismo *Hewelcke*) a fines del mes de julio, al aparecer por primera vez, se movía muy lentamente, recorriendo en su órbita unos 40 ó 45 minutos al día. Desde esas fechas su movimiento diario aumentó continuamente hasta el 4 de septiembre, en que alcanzó casi 5 grados. Luego durante todo este tiempo el cometa se acercaba a la Tierra. Cosa que también se infiere del diámetro de la cabeza medido con micrómetro: toda vez que *Hewelcke* lo fijó el 6 de agosto en tan sólo 6′ 5″, incluida la cabellera, mientras que en 2 de septiembre era de 9′ 7″. Por consiguiente, la cabeza al principio aparecía mucho menor que al final del movimiento, mientras que sin embargo al principio, en las proximidades del Sol, era mucho más luminosa que hacia el final, como dice el mismo *Hewelcke*. Por lo tanto, durante todo este tiempo, debido a su alejamiento del Sol, iba decreciendo en luminosidad, pese a su acercamiento hacia la Tierra. El cometa de 1618, hacia el mes de diciembre, y éste de 1680, hacia finales del mismo mes, se movían muy rápidamente, y por lo mismo estaban entonces en los perigeos. Pero el máximo resplandor de sus cabezas aconteció casi dos semanas antes, cuando acababan de salir de los rayos solares; mientras que el máximo resplandor de las colas un poco antes, en la mayor proximidad al Sol. La cabeza del cometa primero, según las observaciones de *Cysat* de 1 de diciembre (ahora ya en el perigeo) con poca menos magnitud, había decrecido mucho en brillo o nitidez luminosa. El 7 de enero, *Kepler*, inseguro ya de la cabeza del cometa, puso fin a la observación. El 12 de diciembre vio y observó *Flamsteed* la cabeza del segundo cometa a una distancia de nueve grados del Sol; cosa apenas concebible para una estrella de tercera magnitud. El 15 y 17 se presentó como una estrella de tercera magnitud, aunque disminuido su brillo por las nubes que brillaban junto al Sol poniente. El 26 de diciembre, moviéndose muy rápidamente, y casi hallándose en el perigeo, brillaba menos que la estrella de la boca de Pegaso, de tercera magnitud. El 3 de enero parecía una estrella de cuarta magnitud, el 9 de enero, de quinta magnitud, el 13 de enero desapareció por el resplandor de la Luna creciente. El 25 de enero apenas igualaba a las estrellas de séptima magnitud. Si a un lado y otro del perigeo se toman tiempos iguales, las cabezas, que en dichos tiempos se hallan en regiones distantes, deberían brillar igual por sus distancias iguales de la Tierra, y brillaban sin embargo máximamente hacia el lado del Sol mientras que hacia la otra parte del perigeo se desvanecían. Por tanto, por la gran diferencia de luz en uno y otro lugar, se infiere la gran proximidad del Sol y del cometa en el primer lugar. Pues la luz de los cometas suele ser regular, y parece máxima cuando las cabezas se mueven muy velozmente y se hallan, por tanto, en los perigeos; salvo en la medida en que es mayor en las cercanías del Sol.

COROLARIO 1. Por consiguiente, los cometas brillan con la luz que reflejan del Sol.

COROLARIO 2. También de lo dicho se sigue el motivo por el que los cometas son tan frecuentes en la región del Sol. Si se viesen en las regiones de más allá de Saturno, deberían aparecer frecuentemente en las regiones opuestas al Sol. Pues los que anduviesen por estos lugares serían más próximas a la Tierra y, en cambio, el Sol ocultaría a los demás interponiéndose ante ellos. Pero al repasar la historia de los cometas encuentro que se han visto cuatro o cinco veces más hacia el lado del hemisferio solar que hacia el opuesto, además de otros, sin duda no pocos, obscurecidos por la luz del Sol. Pero además, al descender hacia nuestras regiones ni emiten colas, ni son iluminados por el Sol lo bastante para que puedan ser observados a simple vista antes de que se hallen más cerca que el mismo Júpiter. Pero la mayor parte del espacio descrito con tan corto radio en torno al Sol cae del lado de la Tierra que mira hacia el Sol, y los cometas, en dicha mayor parte y como mucho más próximos al Sol, suelen ser iluminados en mayor grado.

COROLARIO 3. Con ello también es evidente que los cielos se hallan desprovistos de resistencia. Pues los cometas, que siguen trayectorias oblicuas y a veces contrarias al curso de los planetas, se mueven libremente en todas direcciones, y conservan sus movimientos por tiempo muy largo, incluso contra el curso de los planetas. Si no me engaño, son una especie de planetas y retornan en órbita con un movimiento perpetuo. Pues la afirmación de algunos autores de que se trata de meteoros, basando su argumento en los cambios continuos de las cabezas, parece carecer de fundamento. Las cabezas de los cometas están rodeadas de enormes atmósferas, y las atmósferas más bajas deben ser más densas. De donde, las nubes no son los mismos cuerpos de los cometas en los que se observan dichos cambios. Así también la Tierra, vista desde los planetas, brillará sin duda con la luz de sus nubes, mientras que el cuerpo sólido apenas será visible bajo las nubes. También los cinturones de Júpiter se forman en las nubes de aquel planeta y cambian entre sí de lugar, dejando apenas verse el cuerpo sólido de Júpiter a través de ellas. Mucho más los cuerpos de los cometas habrán de esconderse bajo sus atmósferas más grandes y más densas.

PROPOSICIÓN XL. TEOREMA XX[16]

Los cometas se mueven en secciones cónicas que tienen los focos en el centro del Sol, y con radios trazados al Sol describen áreas proporcionales a los tiempos.

Es evidente por el Corolario 1 de la Proposición XIII del Libro I comparado con las Proposiciones VIII, XII y XIII del Libro III.

COROLARIO 1. De aquí que, si los cometas giran en órbita, las órbitas serán elipses, y los tiempos periódicos serán a los tiempos periódicos de los planetas en razón de la potencia $^3/_2$ de los ejes principales. Y por ello los cometas que hacen la mayor parte de su recorrido en regiones ultraplanetarias y describen por ello órbitas con ejes mayores giran con mayor lentitud. De suerte que si el eje de la órbita de un cometa es cuatro veces mayor que el eje de la órbita de Saturno, el tiempo de revolución del cometa será al tiempo de revolución de Saturno, es decir, a 30 años, como $4\sqrt{4}$ (o sea, 8) a 1, y por tanto será de 240 años.

COROLARIO 2. Pero las órbitas serán tan próximas a parábolas que en su lugar pueden utilizarse parábolas sin errores sensibles.

COROLARIO 3. Y, por lo mismo (por el Corolario 7 de la Proposición XVI del Libro I), la velocidad de todo cometa será a la velocidad de un planeta cualquiera que gire en círculo en torno al Sol como la raíz cuadrada de la doble distancia del planeta al centro del Sol a la distancia del cometa al centro del Sol muy aproximadamente. Supongamos que el radio del Orbe Máximo, o sea, que el semidiámetro máximo de la elipse en que gira la Tierra tiene 100 000 000 partes: la Tierra con su movimiento diario medio describirá 1 720 212 de estas partes, y con su movimiento horario 71 675½ partes. Por tanto, un cometa a la misma distancia que la Tierra del Sol, con una velocidad que fuese a la velocidad de la Tierra como $\sqrt{2}$ a 1, describirá con su movimiento diario 2 432 747 partes, y con su movimiento horario 101 364¼ partes. Pero a distancias mayores o menores, tanto el movimiento diario como el horario será respecto a este movimiento diario y horario inversamente como la raíz cuadrada de las distancias, y por tanto está dado.

COROLARIO 4. Por consiguiente, si el «latus rectum» de la parábola es cuatro veces mayor que el radio del Orbe Máximo, y el cuadrado de dicho radio se supone que es de 100 000 000 partes, el área que el cometa describe cada día con un radio trazado al Sol será de 1 216 373½ partes, y en cada hora dicha área será de 5068½ partes. Pero si el «latus rectum» fuera mayor o menor en una razón cualquiera, el área diaria y horaria será mayor o menor en razón de la raíz cuadrada de esa razón.

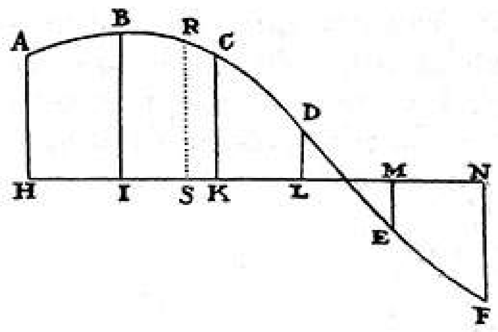
Lema V

Hallar una línea curva de especie parabólica que pase por cuantos puntos dados se quiera.

Sean tales puntos A, B, C, D, E, F, etc., y desde ellos hasta una recta cualquiera de posición dada HN háganse descender otras tantas perpendiculares, AH, BI, CK, DL, EM, FN.

Caso 1. Si los intervalos HI, IK, KL, etc., entre los puntos H, I, K, L, M, N, son iguales, tomemos las primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., como *b*, 2*ƒe*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, etc., las segundas como *c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, etc., las terceras como *d*, 2*d*, 3*d*, etc., esto es, de modo que AH - BI = b, BI - CK = 2*b*, CK - DL = 3*b*, DL + EM = 4*b*, -EM + FN = 5*b*, etc., entonces, *b* - 2*b* = *c*, etc., hasta llegar así a la última diferencia que aquí es *ƒ*. Elevando después una perpendicular cualquiera RS que sería una ordenada aplicada a la curva que se busca: con el fin de hallar su longitud supongamos que los intervalos HI, IK, KL, LM, etc., son unidades, y escribe AH = a, - HS = *p*, ½*p* x - IS = *q*, ⅓*q* x +SK = *r*, ¼*r* x +SL = *s*, ⅕*s* x + SM = *t*, siguiendo así hasta la penúltima perpendicular que es ME y anteponiendo los signos negativos a los términos HS, IS, etc., situados hacia el lado A del punto S, y los signos positivos a los términos SK, SL, etc., que están situados hacia el otro lado del punto S. Y si los signos están bien respetados, será RS = *a* + *bp* + *cq* + *dr* + *es* + *ƒt*, etcétera.

b   2*b*   3*b*   4*b*   5*b*
c   2*c*   3*c*   4*c*
d   2*d*   3*d*
e   2*e*
ƒ



Caso 2. Pero si los intervalos HI, IK, etc., entre los puntos H, I, K, L, etc., fuesen desiguales, toma *a b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, 5*b*, como primeras diferencias de las perpendiculares AH, BI, CK, etc., separadas por los intervalos entre perpendiculares; y *a c*, 2*c*, 3*c*, 4*c*, etc., como segundas diferencias separadas por cada dos intervalos, y *a d*, 2*d*, 3*d*, etc., como terceras diferencias separadas por intervalos de tres en tres, *a e*, 2*e*, etc., como cuartas diferencias divididas por los intervalos de cuatro en cuatro, y así sucesivamente; es decir, de modo que $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$ $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, etc., después $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$ 3c = $c = \frac{3b - 4b}{KM}$, etc., y luego $d = \frac{c - 2c}{HL}$, 2*d*=

$\frac{2c - 3c}{\mathrm{IM}}$ etc. Halladas las diferencias, escribe AH = a, -HS - p, p x -IS - q, q x +SK = r, r x +SL = s, s x +SM = t; siguiendo así hasta la penúltima perpendicular ME, la ordenada RS será igual a la suma $a + bp + cq + dr + es + ft$, etc.

COROLARIO. De aquí que las áreas de todas las curvas puedan calcularse muy aproximadamente. Pues si se hallan unos puntos de la curva a cuadrar, y se imagina que por esos puntos pasa una parábola, el área de esa parábola será la misma que la de la curva a cuadrar muy aproximadamente. Y una parábola se puede cuadrar siempre geométricamente por métodos bien conocidos.

LEMA VI

A partir de algunos lugares observados de un cometa, hallar su lugar en un momento cualquiera intermedio dado.

Sean HI, IK, KL, LM los tiempos entre observaciones (en la figura anterior), sean HA, IB, KC, LD, ME cinco longitudes observadas del cometa, HS el tiempo dado entre la observación primera y la longitud buscada. Y si por los puntos A, B, C, D, E, se supone trazada la curva regular ABCDE, y por el Lema anterior se halla su ordenada RS, será RS la longitud buscada.

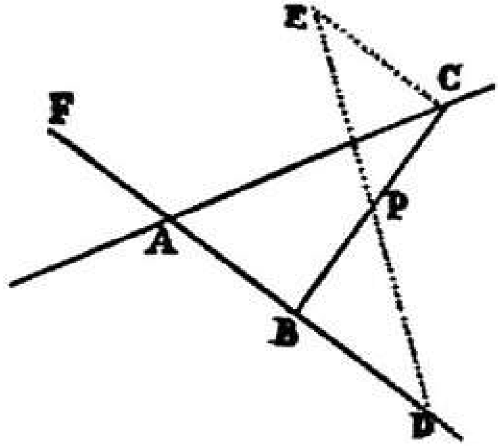
Con el mismo método sobre la base de cinco latitudes, observadas se halla la latitud en un momento dado.

Si las diferencias de longitudes observadas son pequeñas, tales como 4 ó 5 grados solamente, bastarán tres o cuatro observaciones para hallar las nuevas longitudes o latitudes. Pero si las diferencias son mayores, por ejemplo de 10 ó 20 grados, habrá que disponer de cinco observaciones.

LEMA VII

Por un punto dado P trazar una recta BC cuyas partes PB, PC, cortadas por dos rectas AB, AC de posición dada, se hallen entre sí en una razón dada.

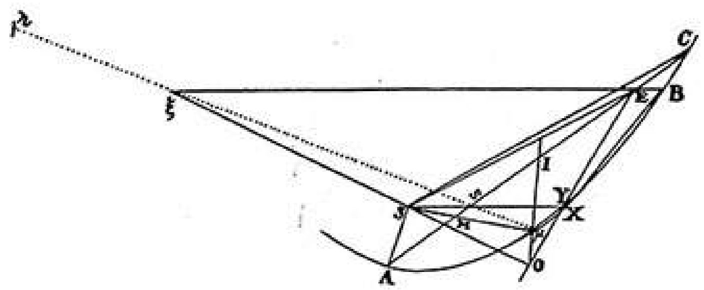
Desde dicho punto P hasta AB una cualquiera de las dos rectas trácese otra recta cualquiera PD, y prolónguese ésta hacia la otra recta AC hasta E, de modo que PE sea a PD en la dicha razón dada. Sea EC paralela a la recta AD; y si se traza CPB, entonces PC será a PB como PE a PD. Q. E. F.



LEMA VIII[17]

Sea ABC una parábola con foco en S. Con la cuerda AC bisecada en I sepárese el segmento ABCI, cuyo diámetro es Iμ y cuyo vértice es μ. Sobre la prolongación de Iμ tómese μO igual a la mitad de la propia Iμ. Únase OS y prolónguese ésta hasta ξ de modo que Sξ sea igual a 2SO. Y si el cometa B se mueve por el arco CBA, y se traza ξB secante de AC en E: digo que el punto E separará de la cuerda AC el segmento AE muy aproximadamente proporcional al tiempo.

Pues únase EO cortando al arco parabólico ABC en Y, y trácese μX tangente a dicho arco en el vértice μ y que se encuentre con la línea EO en X; y el área curvilínea AEXμA será al área curvilínea ACYμA como AE a AC. Por lo tanto, dado que el triángulo ASE es al triángulo ASC en esa misma razón, el área total ASEXμA será al área total ASCYμA como AE a AC. Pero como ξO es a SO como 3 a 1, y EO a XO en la misma razón, SX será paralela a EB, y por tanto, si se une BX, el triángulo SEB será igual al triángulo XEB. Por lo cual, si al área ASEXμA se le añade el triángulo EXB, y de la suma se resta el triángulo SEB, el área ASBXμA permanecerá igual al área ASEXμA, y por lo mismo seguirá siendo al área ASCYμA como AE a AC. Pero el área ASBYμA es muy aproximadamente igual al área ASBXμA, y el área ASBYμA es al área ASCYμA como el tiempo del arco descrito AB al tiempo del arco total descrito AC. Y por tanto, AE es a AC en la razón de los tiempos muy aproximadamente. Q. E. D.



COROLARIO. Cuando el punto B cae en el vértice *p* de la parábola, AE está a AC exactamente en la razón de los tiempos.

ESCOLIO

Si unimos $\mu\xi$ cortando a AC en δ, y sobre ella se toma ξn de tal modo que sea a μB como 27MI a 16Mμ, trazando B*n*, ésta cortará a la cuerda AC en razón de los tiempos más exactamente que antes. Pero el punto *n* debe estar más allá del punto ξ, si el punto B dista más del vértice principal de la parábola que el punto μ; y debe estar más acá si dista menos de dicho vértice.

LEMA IX

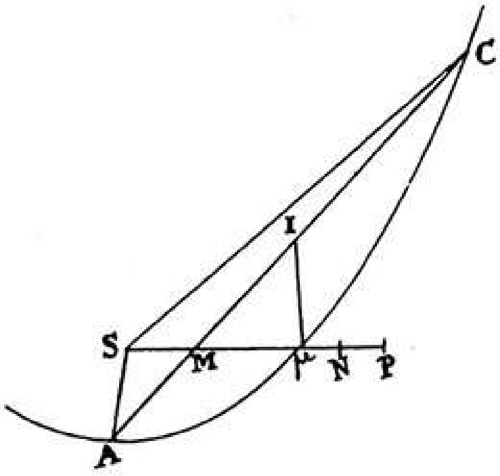
Las rectas Iμ y μM y la longitud $\dfrac{AIC}{4S\mu}$ *son iguales entre sí.*

Pues 4Sμ es el «latus rectum» de la parábola correspondiente al vértice μ.

LEMA X

Si Sμ se prolonga hasta N y P de modo que μN sea la tercera parte de μI, y SP sea a SN como SN a Sμ, un cometa, en el tiempo en que describe el arco AμC y desplazándose con una velocidad que sea siempre igual a la que posee a la altura SP, describirá una longitud igual a la cuerda AC.

Pues si un cometa, en el mencionado tiempo y con la velocidad que tiene en μ, avanza uniformemente sobre una recta tangente a la parábola en μ, el área que describiría con un radio trazado al punto S sería igual al área parabólica ASCμ. Por consiguiente, el contenido bajo la longitud descrita en la tangente y bajo la longitud Sμ sería al contenido bajo las longitudes AC y SM, como el área ASCμ al triángulo ASC, es decir, como SN a SM. Por lo cual, AC es a la longitud descrita en la tangente como Sμ a SN. Pero al ser la velocidad del cometa a la altura SP (por el Corolario 6 de la Proposición XVI del Libro I) respecto a su velocidad a la altura Sμ inversamente como la raíz cuadrada de SP a Sμ, esto es, como la razón de Sμ a SN, la longitud descrita con esa velocidad y en los mismos tiempos será a la longitud descrita en la tangente como Sμ a SN. Por consiguiente, dado que AC y la longitud descrita con esta nueva velocidad se hallan en la misma razón respecto a la longitud descrita en la tangente, son iguales entre sí. Q. E. D.

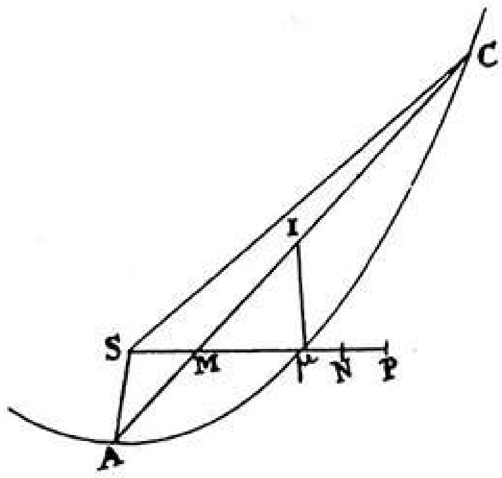


Corolario. Luego un cometa con la velocidad que tiene a la altura Sμ + $\frac{2}{3}$Iμ recorrerá en el mismo tiempo la cuerda AC, muy aproximadamente.

Lema xi

Si un cometa privado de todo movimiento se dejare caer hacia el Sol desde la altura SN, o Sμ + $\frac{1}{3}$Iμ, y fuese urgido hacia el Sol siempre uniformemente por la misma fuerza que le urgía al principio; el tal cometa, en la mitad de tiempo en el que describía en su órbita el arco AC, describirá ahora en su descenso un espacio igual a la longitud Iμ.

Pues el cometa, en el tiempo en que describa el arco parabólico AC, en ese mismo tiempo y con la misma velocidad que tiene a la altura SP (por el Lema anterior) describirá la cuerda AC, y por tanto (por el Corolario 7 de la Proposición xvi del Libro i) en el mismo tiempo, girando con la fuerza de su gravedad en un círculo, cuyo diámetro fuese SP, describiría un arco cuya longitud sería a la cuerda AC del arco parabólico, como la raíz cuadrada de uno a la de dos. Y por consiguiente, con el peso que tiene hacia el Sol a la altura SO y cayendo hacia el Sol desde esa altura, describirá en la mitad de dicho tiempo (por el Corolario 9 de la Proposición iv del Libro i) un espacio igual al cuadrado de la semicuerda dividido por el cuádruplo de la altura SP, es decir, el espacio $\frac{AI^2}{4SP}$. Ahora bien, como el peso del cometa hacia el Sol a la altura SN es al peso del mismo hacia el Sol a la altura SP como SP a Sμ, el cometa con el peso que tiene a la altura SN, en el mismo tiempo, cayendo hacia el Sol, describirá el espacio $\frac{AI^2}{4S\mu}$, es decir, un espacio igual a la longitud Iμ o Mμ. Q. E. D.



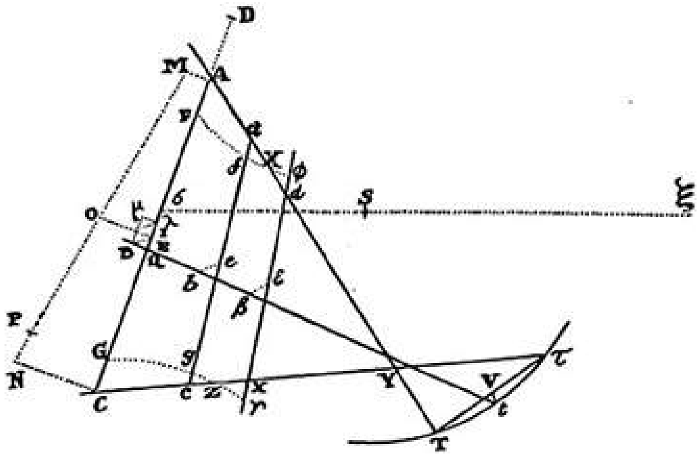
Proposición XLI. Problema XXI

Determinar la trayectoria de un cometa que se mueve en una parábola a partir de tres observaciones dadas.

He abordado este problema verdaderamente difícil de muchas formas y propuse en el Libro Primero algunos problemas relativos a su resolución. Más tarde se me ocurrió la siguiente solución un poco más sencilla.

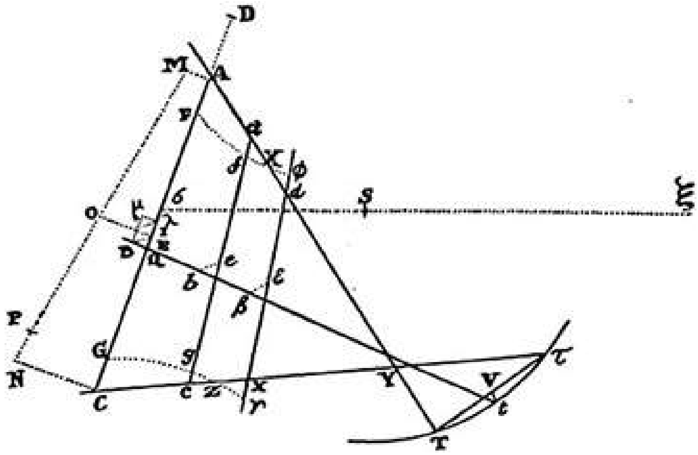
Elíjanse tres observaciones separadas entre sí por espacios de tiempo aproximadamente iguales. Pero de modo que el intervalo de tiempo en que el cometa se mueve más lentamente sea algo mayor que el otro, quizá de modo que la diferencia entre los tiempos sea a la suma de los mismos como la suma de los dichos tiempos a seiscientos días más o menos; o también como si el punto E (en la Figura del Lema VIII) cayese sobre el punto M, y desde allí se desplazase hacia I más bien que hacia A. Si tales observaciones no están disponibles, hay que hallar un nuevo lugar del cometa por medio del Lema VI.

Representen S al Sol, T, t, τ tres lugares de la Tierra sobre el orbe máximo, TA, tB, τC, tres longitudes observadas del cometa, V el tiempo entre la primera y la segunda observación, W el tiempo entre la segunda y la tercera observación, X la longitud que el cometa puede alcanzar a describir en todo el tiempo dicho con la velocidad que tiene a la distancia media de la Tierra al Sol, y que tendrá que hallarse (por el Corolario 3 de la Proposición XL del Libro III), y tV una perpendicular sobre la cuerda Tτ. Sobre la longitud media observada tB tómese un lugar cualquiera B como lugar del cometa en el plano de la eclíptica y desde él trácese hasta el Sol S la línea BE que sea a la sagita tV como el producto de SB por St^2 es al cubo de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados son SB y la tangente de la latitud del cometa en la segunda observación a un radio tB. Trácese por el punto E (por el Lema VII) la recta AEC, cuyas partes AE y EC terminan en las rectas TA y τC y deben ser entre sí como los tiempos V y W: y entonces A y C serán los lugares del cometa en la primera y tercera observación sobre el plano de la eclíptica muy aproximadamente, siempre que B sea su lugar de la segunda observación asumido correctamente.



Sobre AC, bisecada en I, elévese la perpendicular I*i*. Trácese por el punto B la línea invisible Bz paralela a la propia AC. Únase la línea invisible Sz secante de AC en λ y complétese el paralelogramo $i\mathrm{I}\lambda\mu$. Tómese Iσ igual a 3Iλ, y por el Sol S trácese la línea también oculta $\sigma\xi$ igual a 3Sσ + 3$i\lambda$ Y ahora, borrando las letras A, E, C, I, tracemos desde el punto B hacia el punto ξ una nueva línea invisible BE, que sea a la primera BE en razón cuadrada de la distancia BS a la cantidad Sμ + $\frac{1}{3}i\lambda$. De nuevo trácese por el punto E la recta AEC en la misma proporción que antes, o sea, de modo que sus partes AE y EC estén entre sí como los tiempos V y W entre observaciones. Y A y C serán los lugares del cometa más exactamente.

Sobre AC, bisecada en I, elévense las perpendiculares AM, CN, IO; de las cuales AM y CN sean tangentes de las latitudes en las observaciones primera y tercera con radios TA y τC. Únase MN cortando a IO en O. Constrúyase el rectángulo $i\mathrm{I}\lambda\mu$, como antes. Sobre la prolongación de IA tómese ID igual a Sμ + $\frac{2}{3}$ $i\lambda$. Después, sobre MN hacia N tómese MP, que sea respecto a la longitud X hallada antes, como la raíz cuadrada de la distancia media de la Tierra al Sol (o semidiámetro del Orbe Magno) a la distancia OD. Si el punto P cae en el punto N, serán A, B, C, los tres lugares del cometa por los que debe circular su órbita en el plano de la eclíptica. Pero si el punto P no cae en el punto N, sobre la recta AC tómese CG igual a NP de modo que los puntos G y P caigan hacia el mismo lado de la recta NC.



Con el mismo método con el que se hallaron los puntos E, A, C, G, partiendo de un punto B supuesto, hállense, partiendo de otros puntos supuestos cualesquiera *b* y *β*, unos nuevos puntos *e, a, c, g* y *ε, α, χ, γ*. Después, si por G, *g, γ*, se traza la circunferencia del círculo C*gγ*, secante de la recta *τ*C en Z, será Z el lugar del cometa en el plano de la eclíptica. Y si sobre AC, *ac, αχ* se toman AF, *af*, *αϕ*, respectivamente iguales a CG, *cg, χγ* y por los puntos F, *f*, *ϕ*, se traza la circunferencia del círculo F*fϕ* secante en X de la recta AT, será el punto X otro lugar del cometa en el plano de la eclíptica. En los puntos X y Z elévense tangentes de las latitudes del cometa con radios TX y *τ*Z; y se tendrán dos lugares del cometa en su propia órbita. Finalmente (por la Proposición XIX del Libro I), con foco en S trácese por dichos dos lugares una parábola y ésta será la trayectoria del cometa. Q. E. I.

La demostración de esta construcción se sigue de los Lemas: toda vez que la recta AC es cortada en E en razón de los tiempos, por el Lema VII, como se exige por el Lema VIII: y BE, por el Lema XI, sea la parte de la recta BS o B*ξ* que yace en el plano de la eclíptica entre el arco ABC y la cuerda AEC; y MP (por el Corolario del Lema X) es la longitud de la cuerda del arco que debe describir el cometa en su órbita propia entre la primera y la tercera observación, y que debería ser igual a MN, siempre que B fuere el verdadero lugar del cometa en el plano de la eclíptica.

Por lo demás, no conviene elegir para B, *b, β*, unos puntos cualesquiera, sino más bien unos puntos cercanos al verdadero. Si el ángulo AQ*t*, en el cual corta a la recta *t*B la proyección de la órbita sobre el plano de la eclíptica, se conociese aproximadamente, en dicho ángulo hay que trazar la recta invisible AC, la cual ha de ser a $\frac{4}{3}T\tau$ como la raíz cuadrada de SQ a la de ST. Y trazando la recta SEB, cuya parte EB sea igual a la longitud V*t*, se hallará el punto B que habríamos de manejar la primera vez. Después, borrando la recta AC y trazándola de nuevo según la precedente construcción y además hallada la longitud MP, tómese sobre *t*B el punto *b*, de modo tal que, si TA y *τ*C son secantes entre sí en Y, la distancia Y*b* sea a la distancia YB en una razón compuesta de la razón de MP a MN y de la razón de la raíz cuadrada de SB a la de S*b*. Y con el mismo método habrá de hallarse el tercer punto *β*, y, si es preciso, repetir por tercera vez la operación. Pero con este método, bastarán dos operaciones como mucho. Pues si la distancia B*b* resultase muy pequeña, una vez hallados los puntos F, *f*, y G, *g*, trazando las rectas F*f* y G*g* cortarán a TA y τC en los puntos buscados X y Z.

EJEMPLO[18]

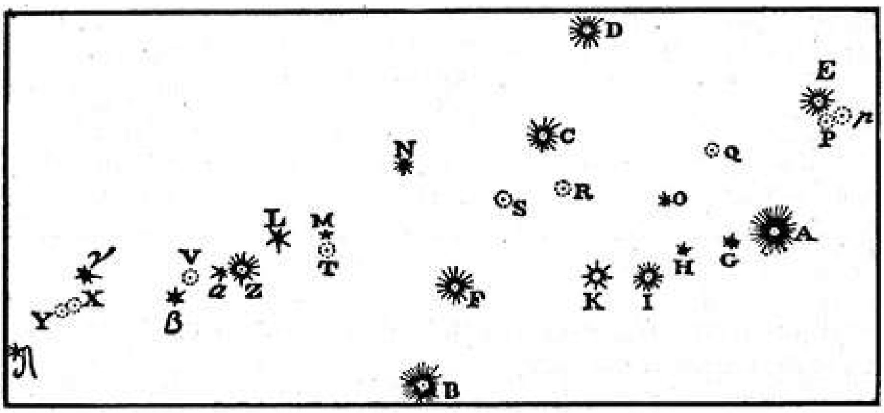
Propóngase el cometa del año 1680. Su movimiento, observado por *Flamsteed* y calculado a partir de las observaciones y corregido por *Halley* a partir de las mismas observaciones, ofrece la siguiente tabla.

	Tiempo		*Longitud del Sol*	*El cometa*	
	Aparente	*Verdadero*		*Longitud*	*Latitud norte*
	h m	h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
1680, *dic*. 12	4,46	4,46,00	♑ 1,51,23	♑ 6,32,30	8,28,00
21	6,32½	6,36,59	11,06,44	♒ 5,08,12	21,42,13
24	6,12	6,17,52	14,09,26	18,49,23	25,23, 5
26	5,14	5,20,44	16,09,22	28,24,13	27,00,52
29	7,55	8,03,02	19,19,43	♓ 13,10,41	28,09,58
30	8,02	8,10,26	20,21,09	17,38,20	28,11,53
1681, *ene*. 5	5,51	6,01,38	26,22,18	♈ 8,48,53	26,15, 7
9	6,49	7,00,53	♒ 0,29,02	18,44,04	24,11,56
10	5,54	6,06,10	1,27,43	20,40,50	23,43,52
13	6,56	7,08,55	4,33,20	25,59,48	22,17,28
25	7,44	7,58,42	16,45,36	♉ 9,35,00	17,56,30
30	8,07	8,21,53	21,49,58	13,19,51	16,42,18
feb. 2	6,20	6,34,51	24,46,59	15,13,53	16,04, 1
5	6,50	7,04,41	27,49,51	16,59,51	15,27, 3

A estas observaciones añádanse algunas nuestras.

	Tiempo aparente	*El cometa*	
		Longitud	*Latitud norte*
	h m	° ′ ″	° ′ ″
1681, *feb*. 25	8,30	♉ 26,18,35	12,46,46
27	8,15	27,04,30	12,36,12
mar. 1	11,0	27,52,42	12,23,40
2	8,0	28,12,48	12,19,38
5	11,30	29,18, 0	12,03,16
7	9,30	♊ 0,04,	11,57, 0
9	8,30	0,43, 4	11,45,52

Estas observaciones fueron hechas con un telescopio de siete pies y con micrómetro e hilos colocados en el foco del telescopio; mediante dichos instrumentos determinamos tanto las posiciones de las fijas entre ellas como las posiciones del cometa respecto a las fijas. Represente A la estrella de cuarta magnitud del talón izquierdo de Perseo (*Bayer*, *o*), B la estrella de tercera magnitud siguiente en el pie izquierdo (*Bayer*, *ζ*), y C la estrella de sexta magnitud (*Bayer*, *η*) en el talón del mismo pie, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, Z, *α*, *β*, *γ*, *δ*, las otras estrellas menores del mismo pie. Y sean *p*, P, Q, R, S, T, V, X, los lugares del cometa en las observaciones descritas más arriba; y siendo la distancia AB de $80\frac{7}{12}$ partes, AC era de $52\frac{1}{4}$, BC de $58\frac{5}{6}$, AD de $57\frac{5}{12}$, BD de $82\frac{6}{11}$, CD de $23\frac{2}{3}$ AE de $29\frac{4}{7}$, CE de $57\frac{1}{2}$ DE de $49\frac{11}{12}$, AI de $27\frac{7}{12}$, BI de $52\frac{1}{6}$, CI de $36\frac{7}{12}$, DI de $53\frac{5}{11}$, AK de $38\frac{2}{3}$ BK de 43, CK de $31\frac{5}{9}$ FK de 29, FB de 23, FC de $36\frac{1}{4}$, AH de $18\frac{6}{7}$, DH de $50\frac{7}{8}$, BN de $46\frac{5}{12}$, CN de $31\frac{1}{3}$, BL de $45\frac{5}{12}$, NL de $31\frac{5}{7}$. HO era a HI como 7 a 6 y prolongada pasaba por entre las estrellas D y E, de suerte que la distancia de la estrella D desde esa recta resultará de $\frac{1}{6}$CD. LM era a LN como 2 a 9 y, prolongada, pasaba por la estrella H. Con éstas se determinaban las posiciones de las fijas entre ellas.



Más tarde *Pound*, de entre los nuestros, ha observado de nuevo las posiciones de estas fijas entre ellas y consignó en la siguiente tabla sus longitudes y latitudes.

Estrellas fijas	*Longitudes*	*Latitud norte*
	° ′ ″	° ′ ″
A	26,41,50	12, 8,36
B	28,40,23	12,17,54
C	27,58,30	12,40,25
E	26,27,17	12,52, 7
F	28,28,37	11,52,22
G	26,56,08	12, 4,58
H	27,11,45	12, 2, 1
I	27,25, 2	11,53,26
K	27,42, 7	11,53,26
L	29,33,34	12, 7,48
M	29,18,54	12, 7,20
N	28,48,29	12,31, 9
Z	29,44,48	11,57,13
α	29,52, 3	11,55,48
β	0, 8,23	11,48,56
γ	0,40,10	11,55,18
δ	1, 3,20	11,30,42

Pues bien, las posiciones que observé del cometa respecto a estas fijas eran como sigue.

El viernes 25 de febrero, calendario antiguo, a las 8½ p. m., el cometa hallándose en p distaba de la estrella E menos de $\frac{3}{13}$AE y más de ⅕AE, por lo cual, aproximadamente distaba $\frac{3}{14}$AE; y el ángulo ApE era un poco obtuso, pero casi recto. Pues si se abatía una perpendicular sobre pE desde A, la distancia del cometa de dicha perpendicular era de ⅕pE.

Esa misma noche, a las 9½ h. la distancia del cometa situado en P a la estrella E era mayor que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$AE, y menor que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$AE y por tanto igual a $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$AE, ó $\frac{8}{39}$AE aproximadamente. Pues la distancia del cometa desde la perpendicular trazada desde la estrella A sobre la recta PE era de ⅘PE.

El domingo 27 de febrero a las 8¼ p. m. estando el cometa en Q distaba de la estrella O una distancia igual a la de las estrellas O y H, y la recta QO, prolongada, pasaba entre las estrellas K y B. No pude, debido a las nubes, determinar más exactamente la posición de dicha recta.

El martes 1 de marzo a las 11 p. m., con el cometa en R, se hallaba situado exactamente entre las estrellas K y C, y la parte CR de la recta CRK era algo mayor que ⅓CK, y un poco menor que ⅓CK + $\frac{1}{16}$CR, y por tanto igual a ⅓CK + $\frac{1}{16}$CR, o también $\frac{16}{45}$CK.

El miércoles 2 de marzo, a las 8 p. m., con el cometa en S la distancia a la estrella C era de $\frac{4}{9}$FC aproximadamente. La distancia de la estrella F a la prolongación de la recta CS era de ½4FC; y la distancia de la estrella B de dicha recta era cinco veces mayor que la distancia de la estrella F. Asimismo, la prolongación de la recta NS pasaba entre las estrellas H y I, pasando cinco o seis veces más cerca de H que de I.

El sábado 5 de marzo, a las 11½ p. m., con el cometa en T, la recta MT era igual a ½ML, y la prolongación de la recta LT pasaba entre B y F, cuatro o cinco veces más cerca de F que de B, separando de BF una quinta o sexta parte de la misma hacia F. Y la prolongación de MT pasaba por fuera del espacio BF hacia el lado de la estrella B, cuatro veces más cerca de B que de F. M era una estrella muy pequeña que apenas se divisaba por el telescopio, y L era una estrella mayor, como de octava magnitud.

El lunes 7 de marzo, a las 9½ p. m., con el cometa en V, la prolongación de la recta Vα pasaba entre B y F, segregando hacia F½ de BF, y era respecto a la recta Vβ como 5 a 4. Y la distancia del cometa de la recta $\alpha\beta$ era ½Vβ.

El miércoles 9 de marzo, a las 8½ p. m., con el cometa en X, la recta γX era igual a ¼$\gamma\delta$, y la perpendicular trazada desde la estrella δ a la recta γX era ⅖$\gamma\delta$.

Esa misma noche, a las 12, con el cometa en Y, la recta γY era igual a ⅓$\gamma\delta$, o un poco menor, quizá $\frac{5}{16}\gamma\delta$, y la perpendicular trazada desde la estrella δ hasta la recta γY era igual a ⅙$\gamma\delta$ ó $\frac{1}{7}\gamma\delta$ muy aproximadamente. Pero por la cercanía al horizonte apenas se podía ver el cometa, ni tampoco su lugar se podía determinar con tanta precisión como en las observaciones anteriores.

Con base en estas observaciones mediante la construcción de figuras y mediante cálculos obtuve las longitudes y latitudes del cometa, y nuestro *Pound* corrigió los lugares del cometa a partir de las correcciones de los lugares de las fijas, y más arriba hemos dado los lugares corregidos. Me serví de un micrómetro construido con no mucha delicadeza, pero los errores de longitud y latitud (en la medida en que se deban a nuestras observaciones) escasamente superan un minuto. Por otra parte, el cometa (según nuestras observaciones) al final de su movimiento empezó a desviarse notablemente hacia el norte desde el paralelo en que había estado desde finales del mes de febrero.

Pero ahora vayamos a la determinación de la órbita del cometa; de las observaciones descritas hasta aquí seleccioné tres, realizadas por *Flamsteed* en diciembre 21, enero 5, y enero 25. A partir de ellas hallé que Sí era 9842,1 partes y V*t* 455 partes de 10 000 en que estuviera dividido el semidiámetro del Orbe Magno. Entonces, suponiendo para la primera operación a *t*B de 5657 partes, hallé para SB 9747, para BE la primera vez 412, para S*μ* 9503, para *iλ* 413: para BE la segunda vez 421, para OD 10 186, para X 8528,4, MP 8450, MN 8475, NP 25. De donde, obtuve para la segunda operación *tb* 5640. Y mediante esta operación hallé por fin las distancias TX 4775 y *τ*Z 11 322. Definiendo la órbita con estos datos, hallé sus nodos, el descendiente en ♋ y el ascendente en ♑ 1.º 53′; la inclinación de su plano respecto al de la eclíptica de 61.º 20⅓; su vértice (o perihelio del cometa) distaba del nodo 8.º 38′, y se hallaba en ♐ 27.º 43′ latitud sur; mientras su «latus rectum» era de 236,8 y el área descrita cada día con un radio trazado al Sol era de 93 585, suponiendo el cuadrado del semidiámetro del Orbe Magno de 100 000 000; y el cometa caminó por esta órbita siguiendo el orden de los signos y se halló en el vértice de la órbita o perihelio el 8 de diciembre a las Oh. 4′ p. m. Todo esto lo determiné mediante escala de partes iguales y cuerdas de ángulos obtenidas de la tabla de senos naturales gráficamente, construyendo un dibujo lo bastante grande como para que el semidiámetro del Orbe máximo (de 10 000 partes) fuese casi igual a 16⅓ pulgadas de pie inglés.

Finalmente, para cerciorarme de si el cometa se movía por una órbita así hallada, deduje mediante operaciones, en parte aritméticas y en parte gráficas, los lugares del cometa en dicha órbita en los momentos de algunas observaciones, como se pueden ver en la tabla siguiente.

El cometa								
		Dist. al Sol	***Long. calc.***	***Latit. calc.***	***Long. observ.***	***Latit. observ.***	***Difer. de long.***	***Difer. de latit.***
Dic.	12	2792	6.º 32′	8.º 18½	6.º 31½	8.º 26	+1	-7½
	29	8403	13,13⅔	28,00	13,11¾	28,10$\frac{1}{12}$	+2	-10$\frac{1}{12}$
Feb.	5	16 669	17,00	15,29⅔	16,59⅞	15,27⅖	+0	+2¼
Mar.	5	21 737	29,19¾	12,4	29,20$\frac{6}{7}$	12,03½	-1	+½

Pero, más tarde, nuestro *Halley* determinó mediante cálculo aritmético la órbita con mayor exactitud que la permitida por las descripciones de líneas; y en verdad vino a mantener el lugar de los nodos en ♋ y ♑ 1.º 53′, la inclinación del plano de la órbita respecto a la eclíptica de 61.º 20⅓ y el momento del perihelio del cometa en *diciembre*, 8d. 0h. 4′: por otra parte, la distancia del perihelio al nodo ascendente al medirla halló que era de 9.º 20′, y el «latus rectum» de la parábola de 2430 partes, siendo la distancia media de la Tierra al Sol de 100 000 partes. A partir de estos datos, haciendo un cálculo aritmético muy exacto, calculó los lugares del cometa en los momentos de la observación como sigue.

Tiempo verdadero	***El cometa***				
	Distancia al Sol	***Longitud calculada***	***Latitud calculada***	***Errores de Longitud · Latitud***	
d, h, m		º ′ ″	º ′ ″	º ′ ″	′ ″
Dic. 12,04,46	28 028	♑ 6,29,25	8,26,00	-3,05	-2,00
21,06,37	61 076	♒ 5,06,30	21,43,20	-1,42	+1,07
24,06,18	70 008	18,48,20	25,22,40	-1,03	-0,25
26,05,20	75 576	28,22,45	27,01,36	-1,28	+0,44
29,08,03	84 021	♓ 13,12,40	28,10,10	+1,59	+0,12
30,08,10	86 661	17,40,05	28,11,20	+1,45	-0,33
Ene. 5,06,1½	101 440	♈ 8,49,49	26,15,15	+0,56	+0,08
9,07,00	110 959	18,44,36	24,12,54	+0,32	+0,58
20,06,06	113 162	20,41,00	23,44,10	+0,10	+0,18
13,07,09	120 000	26,00,21	22,17,30	+0,33	+0,02
25,07,59	145 370	♉ 9,33,40	17,57,55	-1,20	+1,25
30,08,22	155 303	13,17,41	16,42,07	-2,10	-0,11
Feb. 2,06,35	160 951	15,11,11	16,04,15	-2,42	+0,14
5,07,4½	166 686	16,58,55	15,29,13	-0,41	+2,00
25,08,41	202 570	26,15,46	12,48,00	-2,49	+1,10
Mar. 5,11,39	216 205	29,18,35	12,05,40	+0,35	+2,14

También apareció este cometa en el mes de *noviembre* precedente y fue observado en *Coburgo* de *Sajonia* por *Gottfried Kirch* los días cuatro, seis, y once de dicho mes, calendario antiguo; y de las posiciones del mismo respecto a las estrellas fijas cercanas, posiciones observadas con bastante exactitud gracias a un telescopio a veces de dos pies y a veces de diez, junto con la diferencia de diez grados entre *Coburgo* y *Londres* y los lugares de las fijas observados por nuestro *Pound*, determinó nuestro *Halley* los lugares del cometa como sigue.

Nov. 3d. 17h. 2′, en el tiempo aparente de *Londres*, el cometa estaba en ♌ 29.º 5T con latitud boreal 1.º 17′ 45″.

Nov. 5d. 15h. 58′, el cometa estaba en ♍ 3.º 23′ con lat. boreal 1.º 6′.

Nov. 10d. 16h. 3T, el cometa distaba igual de las estrellas de Leo *σ* y *τ* de *Bayer*, pero aún no alcanzaba la línea que une a ambas estrellas, aunque distaba poco de ella. En el catálogo de estrellas de *Flamsteed σ* estaba entonces ♍ 14.º 15′, con latitud boreal de 1.º 41′, casi, mientras *τ* estaba ♍ 17.º 3½, con una latitud austral de 0.º 34′.

El punto medio entre estas estrellas ♍ 15.º 39¼ con latitud boreal de 0.º 33½. Sea la distancia del cometa a la susodicha línea de 10′ ó 12′ aproximadamente, y la diferencia de las longitudes del cometa y de dicho punto medio será de 7′, y las diferencias de latitudes de casi 7½. Y por ende el cometa estaba en ♍ 15.º 32′, con una latitud boreal de casi 26′.

La observación primera de la situación del cometa hasta algunas fijas menores fue más que suficientemente exacta. También la segunda fue suficientemente exacta. En la tercera, que fue menos exacta, pudo ser el error de menos de seis o siete minutos, y escasamente mayor. La longitud, en la primera observación, que fue la más exacta de todas, estaba calculada en la susodicha órbita parabólica en ♌ 29.º 30′ 22″, y latitud boreal de 1.º 25′ 7″, y su distancia al Sol de 115 546.

Mas he aquí que *Halley*, dándose cuenta de que un gran cometa había aparecido cuatro veces con intervalo de 575 años, a saber, el mes de septiembre posterior a la muerte de *Julio César*, el año de *Jesucristo*, 531, siendo *Cónsules Lampadio* y *Oreste*, el año de *Cristo* 1106 en el mes *de febrero y a fines del año* 1680, *y ello con una cola larga y brillante* (salvo el de la muerte de *César* en el que por la mala posición de la Tierra la cola brilló menos), se propuso hallar una órbita elíptica cuyo eje mayor fuera de 1 382 957 partes, siendo la distancia media de la Tierra al Sol de 10 000 partes, órbita en la cual hubiera podido girar de hecho el cometa en 575 años. Y situando el nodo ascendente en ♋ 2.º 2′, la inclinación del plano de la órbita respecto al de la eclíptica en 61.º 6′ 48″, el perihelio del cometa en dicho plano en ♐ 22.º 44′ 25″, el momento exacto del perihelio en diciembre 7d. 23h. 9′, la distancia del perihelio al nodo ascendente en el plano de la eclíptica en 9.º 17′ 35″, y el eje conjugado en 1848,2, calculó el movimiento del cometa en esta órbita elíptica. Sus lugares, tanto los derivados de las observaciones como los resultantes de los cálculos aparecen en la tabla siguiente.

Las observaciones de este cometa desde el principio al final concuerdan con el movimiento del cometa en la órbita recién descrita no menos que suelen concordar los movimientos de los planetas con sus respectivas teorías, y al concordar vienen a probar que se trata de uno y el mismo cometa que apareció en todo ese tiempo y cuya órbita fue correctamente establecida aquí.

En la tabla precedente omitimos las observaciones de los días 16, 18, 20 y 23 de noviembre por ser menos precisas. Pero también en esos días el cometa fue observado. Efectivamente, *Ponthio* y sus compañeros, el 17 de nov. (calendario antiguo) en *Roma* a las 6h. de la mañana, es decir, a las 5h. 10′ de *Londres*, con hilos tirados a las estrellas fijas, observaron el cometa en ♎ 8.º 30′ con latitud sur de 0.º 40′. Aparecen sus observaciones en un tratado que publicó *Ponthio* sobre este cometa. *Celtio*, que estaba presente y comunicó a *Cassini* por carta sus observaciones, vio el cometa a esa hora en ♎ 8.º 30′ con latitud austral de 0.º 30′. A la misma hora *Gallet* en *Avignon* (es decir, a las 5h. 42′ de la mañana de *Londres*) vio el cometa en ♎ 8 grados sin latitud. Aunque el cometa, por la teoría, estaba ahora en

♎ 8.º 16′ 45″ con latitud austral de 0.º 53′ 7″.

El 18 de noviembre a las 6h. 30′ de la mañana en *Roma* (es decir, a las 5h. 40′ de *Londres) Ponthio* vio el cometa en ♎ 13.º 30′ con latitud austral de 1.º 20′. *Cellio* en ♎ 13.º 30′, con latitud austral de 1.º 00′. *Gallet*, por su parte, en *Avignon* a las 5,30′ vio al cometa en ♎ 13.º 00′ con latitud austral de 1.º 00′. Y el R. P. *Ango*, en el Colegio de *La Fleche*, en *Francia*, a las 5 de la mañana (es decir, a las 5,9′ en Londres) vio el cometa en medio de dos pequeñas estrellas, una de las cuales es la central de tres en línea recta de la mano austral de Virgo, *Bayer* ♆, y la otra es la última del ala, *Bayer* θ. Por lo cual el cometa estaba entonces en ♎ 12.º 46′ con latitud austral de 50′. El mismo día, en *Boston* en *Nueva Inglaterra*, a 42½ grados de latitud a las cinco de la mañana (es decir, a las 9h. 44′ de la mañana de Londres) fue visto el cometa cerca de ♎ 14 grados con latitud austral de 1.º 30′, como me ha hecho saber el Ilustre *Halley*.

El 19 de nov., a las 4½ de la mañana en *Cambridge*, el cometa (observado por cierto joven) distaba de Spica ♍ casi 2 grados hacia el noroeste. Pero Spica se encontraba en ♎ 19.º 23′ 47″ con latitud austral de 2.º 1′ 59″. El mismo día en *Boston*, *Nueva Inglaterra*, a las 5h. a. m. el cometa distaba de Spica ♍ 1 grado, siendo la diferencia de latitudes 40′. El mismo día en *Jamaica*, el cometa distaba de Spica casi 1 grado. El mismo día el señor *Arthur Storer* en el río *Patuxent*, junto a *Hunting-Creek*, en Maryland en los confines de *Virginia*, a 38½ grados de latitud y a las cinco de la mañana (esto es, a las lOh. de *Londres*) vio el cometa sobre Spica ♏ y casi junto con ella, siendo la distancia entre ellos de casi ¾ de grado. Y comparando estas observaciones entre sí infiero que a las 9h. 44′ de *Londres* el cometa estaba en ♎ 18.º 50′ con latitud austral de casi 1.º 25′. Y el cometa según la teoría estaba ahora en ♎ 18.º 52′ 15″, con latitud austral de 1.º 26′ 54″.

El 20 de nov., *Montenari*, profesor de astronomía en *Padua*, a las seis de la mañana en *Venecia* (es decir, a las 5h. 10′ en *Londres*) vio al cometa en ♎ 23 grados con latitud austral de 1.º 30′. El mismo día en *Boston*, el cometa distaba de Spica ♍ 4 grados de longitud a oriente y por tanto estaba en ♎ 23.º 24′ aproximadamente.

El 21 de nov., *Ponthio* y sus colegas a las 7¼ de la mañana observaron el cometa en ♎ 27.º 50′ con latitud austral 1.º 16′. *Cellio* en ♎ 28 grados. *Ango* a las cinco de la mañana en ♎ 27.º 45′. *Montenari* en ♎ 27.º 51′. El mismo día en la isla de *Jamaica* se vio cerca del principio de Escorpio, y tuvo casi la misma latitud que Spica de Virgo, es decir, 2.º 2′. El mismo día a las cinco de la mañana en *Ballasore* en la *India Oriental* (es decir, a las 11h. 20′ de la noche precedente en *Londres*) se tomó una distancia del cometa de Spica ♍ de 7.º 33′ hacia oriente. Se hallaba en línea recta entre Spica y Libra, y por ende se hallaba en ♎ 26.º 58′, con latitud austral de casi 1.º 11′; y después de las 5h. 40′ (hacia las cinco de la mañana de *Londres*) estaba en ♎ 28.º 12′ con latitud sur de 1.º 16′. Según la teoría el cometa se hallaba en ese momento en ♎ 28.º 10′ 36″, con latitud austral de 1.º 53′ 35″.

El 22 de noviembre el cometa fue visto por *Montenari* en ♍ 2.º 33′. En *Boston*, en *Nueva Inglaterra*, apareció en ♏ 3 grados casi y con la misma latitud prácticamente que antes, esto es, 1.º 30′. El mismo día a las cinco de la mañana en *Ballasore* se observaba el cometa en ♏ 1.º 50′; y por tanto, a las cinco de la mañana en *Londres* el cometa estaba en ♏ 3.º 5′ aproximadamente. El mismo día en *Londres*, a las 6½ de la mañana, nuestro *Hooke* vio el cometa en ♏ 3.º 30′ aproximadamente, y esto en una línea recta que pasa por Spica de Virgo y Corazón de Leo, si bien no exactamente, sino separándose un poquito hacia el norte. *Montenari* también observó que la línea trazada desde el cometa a Spica ese día y los siguientes pasaba por el lado sur de Corazón de Leo, mediando un muy pequeño espacio entre Corazón de Leo y esa línea. La línea recta que pasa por Corazón de Leo y Spica de Virgo cortó a la eclíptica en ♏ 3.º 46′, con un ángulo de 2.º 51′. Y si el cometa hubiese estado en esa línea en ♏ 3 grados, su latitud hubiera sido de 2.º 26′. Pero como el cometa, de acuerdo con *Hooke* y *Montenari*, distaba un poco de esa línea hacia el norte, su latitud fue un poco menor. El día 20, por la observación de *Montenari*, su latitud era sensiblemente igual a la de Spica ♍ y era de casi 1.º 30′, y de acuerdo con *Hooke*, *Montenari* y *Ango*, aumentaba continuamente, y por tanto ahora era sensiblemente mayor que 1.º 30′. Entre los límites establecidos de 2.º 26′ y 1.º 30′, la latitud con un valor medio estaría aproximadamente en 1.º 58′. La cola del cometa, de acuerdo con *Hooke y Montenari* se dirigía hacia Spica ♍, declinando un tanto de dicha estrella, según *Hooke* hacia el sur, según *Montenari* hacia el norte; por ello la declinación apenas fue sensible, y siendo la cola casi paralela al ecuador, se apartaba un tanto de la oposición del Sol hacia el norte.

El 23 de nov., calendario antiguo, a las cinco de la mañana en *Nuremberg* (es decir, a las 4½ en *Londres*) el señor *Zimmerman* vio el cometa en ♏ 8.º 8′, con latitud austral 2.º 31′, tomando sus distancias de las estrellas fijas.

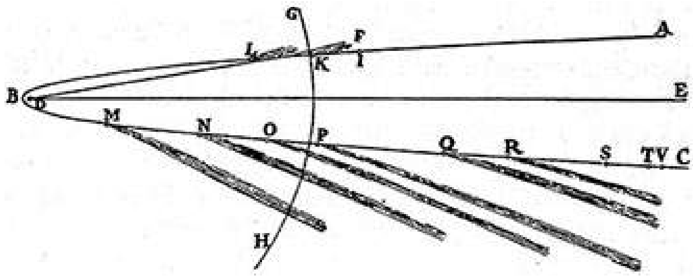
El 24 de nov., antes de la salida del Sol *Montenari* vio el cometa en ♏ 12.º 52′ al lado norte de la recta que pasa por Corazón de Leo y Spica de Virgo, y por tanto, la latitud era algo menor que 2.º 38′. Como hemos dicho esta latitud, de acuerdo con las observaciones de *Montenari*, *Ango* y *Hooke*, aumentaba continuamente; por tanto ahora era algo mayor que 1.º 58′; y por tanto puede establecerse sin mayor error en un valor medio de 2.º 18′. *Ponthio* y *Gallet*, pretenden que a estas alturas ya había decrecido la latitud, mientras *Cellio* y el observador de *Nueva Inglaterra* retienen casi el mismo valor, a saber un grado o un grado y medio. Más inexactas son las observaciones de *Ponthio y Gallet*, sobre todo las que realizaban tomando acimuts y alturas, como las de *Gallet*; mejores resultan las realizadas por las posiciones del cometa respecto a las fijas por *Montenari*, *Hooke*, *Ango* y el observador de *Nueva Inglaterra* y a veces por *Ponthio y Cellio*. El mismo día a las cinco de la mañana en *Ballasore* el cometa se veía en ♏ 11.º 45′; y por tanto a las cinco de la mañana en *Londres* estaba casi en ♏ 13 grados. Pero por la teoría el cometa estaba ahora en ♏ 13.º 22′ 42″.

El 25 de nov., antes de la salida del Sol, *Montenari* vio al cometa casi en ♏ 17¾º.

Y *Cellio* observó en ese momento que el cometa estaba en línea recta entre la estrella brillante del fémur derecho de Virgo y el plato austral de Libra, y esta recta corta la trayectoria del cometa en ♏ 18.º 36′. En cambio, por la teoría el cometa ahora estaba en casi ♏ 183⅓.º.

Por consiguiente, estas observaciones concuerdan con la teoría, en la medida en que concuerdan entre ellas, y, al concordar, prueban que fue uno y el mismo el cometa que se vio durante todo el tiempo desde el día cuatro de noviembre hasta el día nueve de marzo. La trayectoria de este cometa cortó dos veces el plano de la eclíptica, y por lo tanto no fue rectilínea. Cortó a la eclíptica no en partes opuestas del cielo, sino al final de Virgo y al principio de Capricornio, con un intervalo de casi 98 grados; y por lo mismo el curso del cometa se desviaba mucho del Círculo Máximo. Pues en el mes de noviembre su curso declinaba de la eclíptica al menos tres grados al sur y, después, en el mes de diciembre se apartaba de la eclíptica hacia el norte en 29 grados, declinando, como observó *Montenari*, las dos partes de la órbita con las cuales el cometa tendía hacia el Sol y se apartaba del mismo, con un ángulo aparente de más de treinta grados. Este cometa caminaba a lo largo de nueve signos, a saber, desde el último grado de Leo al Principio de Géminis, a partir del signo de Leo por el que pasaba antes de empezar a ser visto; y no existe ninguna otra teoría por la cual un cometa recorra tan gran porción del cielo con un movimiento regular. Su movimiento fue muy desigual. Pues en torno al día 20 de noviembre recorrió casi 5 grados cada día; después, con un movimiento retardado, entre el 26 de nov. y el 12 de diciembre, en un tiempo de 15½, sólo recorrió 40 grados: después con movimiento de nuevo acelerado, recorrió casi 15 grados cada día, antes de que el movimiento empezase de nuevo a retardarse. Y la teoría que mejor responde a un movimiento tan desigual a través de la mayor parte del cielo y que obedece las mismas leyes que la teoría de los planetas y concuerda exactamente con las observaciones astronómicas más exactas, no puede no ser verdadera.

Por lo demás, me ha parecido oportuno representar en el dibujo anexo, dibujadas sobre el plano de la trayectoria, tanto la trayectoria descrita por el cometa como la cola verdadera que proyectó en cada uno de los lugares: en él, ABC representa la trayectoria del cometa, D el Sol, DE el eje de la trayectoria, DF la línea de los nodos, GH la intersección de la trayectoria y de la esfera del Orbe Máximo, I el lugar del cometa el 4 de nov. de 1680, K su lugar el 11 de nov., L el lugar del 19 de nov., M el lugar del 12 de dic., N el lugar del 21 de dic., O el lugar del 29 de dic., P el lugar del 5 de enero siguiente, Q el lugar del 25 de enero. R el lugar del 5 de febrero, S el lugar del 25 de febrero, T el lugar del 5 de marzo, y V el lugar del 9 de marzo. Para definir la cola hice las observaciones siguientes.



El 4 y 6 de nov. la cola aún no apareció. El 11 de nov. empezándose a ver ya la cola, no parecía mayor de medio grado de larga con un telescopio de diez pies. El 17 de nov. *Ponthio* observó una cola de más de 15 grados de largo. El 18 de nov. se veía en *Nueva Inglaterra* una cola de más de 30 grados de largo, directamente opuesta al Sol y se alargaba hasta la estrella ♂, que se hallaba entonces en ♍ 9.º 54′. El 19 de nov. en *Maryland* se vio una cola de 15 ó 20 grados de largo. El 10 de diciembre (observador, *Flamsteed*) la cola pasaba por medio de la distancia entre la cola de la serpiente de Ofíuco y la estrella δ del ala sur de Águila, y terminaba cerca de las estrellas A, *ω, b*, de las tablas de *Bayer*. Por consiguiente, el final estaba ♑ 19½º con una latitud boreal de casi 34¼º. El 11 de diciembre la cola subía hasta casi la cabeza de Sagitario (*Bayer α, β*) acabando en ♑ 26.º 43′, con una latitud boreal de 38.º 34′. El 12 de diciembre la cola pasaba por medio de Sagitario, no sobrepasando mucho, acabando en ♒ 4 grados con una latitud boreal de casi 42½º. Entiéndase esto de la longitud de la cola más brillante. Pues con luz más oscura, quizá en un cielo más transparente, la cola fue observada en *Roma* el 12 de diciembre a las 5h. 40′ (observador *Ponthio*) extendiéndose hasta 10 grados por encima de la cola del *Cisne*; y partiendo desde esta estrella hacia el Noroeste su borde sobresalía 45′. En estos días, por tanto, la cola era de ancha 3 grados, en el lado de arriba, y por consiguiente, su centro distaba de dicha estrella 2.º 15′ hacia el sur, y el extremo superior se hallaba en ♓ 22 grados con una latitud boreal de 61 grados. Y de aquí que la cola era de casi 70 grados de largo, el 21 de diciembre. Subía casi hasta la silla de *Casiopea*, distando igualmente de β y de *Schedir*, manteniendo una distancia igual de una y otra a la distancia mutua entre ellas, acabando, por tanto, en ♈ 24 grados con una latitud de 47½º. El 29 de diciembre la cola tocaba a *Scheat* situada a la izquierda, y el intervalo de las dos estrellas del pie boreal de *Andrómeda* lo cubría exactamente, y era de 54 grados de larga; por lo tanto acababa en ♉ 19 grados, con una latitud de 35 grados. El 5 de enero, la cola tocó la estrella π del pecho de Andrómeda en el lado derecho, y a la estrella μ del cinturón en el lado izquierdo; y (según mis observaciones) era de 40 grados de larga; estaba curvada y su lado convexo miraba al sur. Formaba con un círculo que pasase por el Sol y la cabeza del cometa un ángulo de 4 grados junto a la cabeza del cometa; pero hacia el otro extremo se inclinaba hacia dicho círculo en un ángulo de 10 u 11 grados y la cuerda de la cola con dicho círculo contenían un ángulo de 8 grados. El 13 de enero, la cola, con una luz bastante perceptible, terminaba entre *Alamech* y *Algol* y con luz muy débil se acababa en la zona de la estrella κ del costado de Perseo. La distancia del final de la cola hasta el círculo que pasaba por el

Sol y el cometa era de 3.º 50′, y la inclinación de la cuerda de la cola hacia dicho círculo era de 8½º. En 25 y 26 de enero, la cola con luz muy tenue se alargaba hasta una longitud de 6 ó 7 grados; y las dos noches siguientes con un cielo muy sereno, con luz muy tenue y apenas perceptible alcanzaba una longitud de 12 grados y poco más. Su eje se dirigía a la estrella brillante del hombro oriental del Auriga, con toda exactitud, y por ello declinaba de la oposición al Sol hacia el norte en un ángulo de 10 grados. Finalmente, el 10 de febrero, con instrumentos oculares observé una cola de 2 grados de longitud. Pues la antedicha luz tenue con gafas no se veía. Pero *Ponthio*, el 7 de febrero, escribe que vio la cola de 12 grados de longitud. El 25 de febrero y siguientes el cometa se vio sin cola.

A quien considere la órbita recién descrita y medite en los fenómenos restantes de este cometa no le costará mucho concluir que los cuerpos de los cometas son sólidos, compactos, fijos y duraderos, al modo de los cuerpos de los planetas. Pues si nada más fuesen que vapores o exhalaciones de la Tierra, del Sol o los planetas, este cometa, a su paso por las inmediaciones del Sol, debió disiparse al instante. Pues el calor del Sol es como la densidad de los rayos, es decir, como el inverso del cuadrado de la distancia del lugar hasta el Sol. Y por lo mismo, como la distancia del cometa hasta el centro del Sol el día 8 de diciembre, cuando se encontraba en el perihelio, era a la distancia de la Tierra al centro del Sol casi como 6 a 1000, el calor del Sol junto al cometa en ese momento era al calor del Sol estival entre nosotros como 1 000 000 a 36, o como 28 000 a 1. Pero el calor del agua en ebullición es casi tres veces mayor que el calor que alcanza la tierra seca al calor del verano, como he comprobado: y el calor del hierro candente (si no es mala mi conjetura) es tres veces mayor o cuatro que el del agua en ebullición; y por eso el calor que la arena seca en la superficie del cometa al pasar éste por el perihelio recibió de los rayos solares sería unas 2000 veces mayor que el calor del hierro candente. Con semejante calor los vapores y las exhalaciones, así como toda materia volátil, deberían consumirse y disiparse al instante.

Por consiguiente, el cometa en su perihelio recibió del Sol un enorme calor, y puede conservar dicho calor por mucho tiempo. Pues un globo de hierro candente de una pulgada de diámetro apenas pierde todo su calor en el espacio de una hora expuesto al aire. Pero un globo mayor conservará el calor más tiempo en razón del diámetro, toda vez que la superficie (en cuya proporción se refrigera por contacto con el aire ambiente) es menor en dicha razón respecto a la cantidad de materia caliente contenida. Por lo cual, un globo de hierro candente igual a esta Tierra, es decir, de 40 000 000 de pies de ancho, más o menos, tardaría en enfriarse otros tantos días, o unos 50 000 años. Pero sospecho que la duración del calor, por causas desconocidas, aumenta en razón menor que la del diámetro: y quisiera que se investigase la verdadera razón mediante experimentos.

Por lo demás, hay que notar que el cometa en el mes de diciembre, cuando se había calentado al Sol hasta ese punto, emitía una cola mucho mayor y más brillante que antes, en noviembre, cuando aún no había alcanzado el perihelio. Y generalmente todas las colas máximas y resplandecientes salen de los cometas inmediatamente después de su paso por la región solar. El calentamiento del cometa comporta, por tanto, el crecimiento de la cola. Y de ello me parece inferir que la cola no es otra cosa que un vapor sumamente tenue que emite la cabeza o núcleo del cometa debido a su calor.

Por otra parte, sobre las colas de los cometas tres son las opiniones; o bien que son resplandor del Sol que se propaga a través de la cabeza transparente de los cometas, o bien que se originan de la refracción de la luz en su camino desde la cabeza del cometa hasta la Tierra, o bien, finalmente, que son una nube o vapor que surge constantemente de la cabeza del cometa y se aleja hacia las partes opuestas al Sol. La primera opinión es propia de quienes aún no se han adentrado en la ciencia de la óptica. Pues el resplandor del Sol en una habitación oscura no se ve más que en la medida en que la luz es reflejada por partículas de polvo y de humo suspendidas siempre en el aire: y por lo mismo es más brillante en un aire más lleno de humos gruesos, y hiere con más fuerza a la vista; en un aire más enrarecido es mucho más tenue y se percibe con mayor dificultad: de suerte que en los cielos sin materia reflectante ninguna reflexión es posible. La luz no se ve en tanto en que está en el resplandor, sino en tanto en que de allí es reflejada hacia nuestros ojos. Pues la visión no ocurre más que por los rayos que inciden sobre los ojos. Por lo tanto se requiere alguna materia en la región de la cola, a no ser que el cielo entero brille uniformemente iluminado por la luz del Sol. La segunda opinión se ve acosada por múltiples dificultades. Las colas jamás tienen varios colores: cosa que suele acompañar inseparablemente a las refracciones. La luz de las fijas y de los planetas transmitida hasta nosotros con perfecta distinción demuestra que el medio celeste no goza de ningún poder de refracción. Pues, que los *Egipcios* vieran algunas veces, como se dice, estrellas fijas con cola, esto, además de ser muy raro, debe achacarse a una refracción fortuita de las nubes. Pues la radiación y los destellos de las fijas deben achacarse a refracciones bien de los ojos, bien del aire en movimiento, toda vez que desaparecen tan pronto como se arriman los ojos al telescopio. El temblor del aire y de los vapores que ascienden hace que los rayos se descoloquen de vez en cuando del estrecho espacio de la pupila, mientras no ocurre en el espacio más ancho del objetivo del telescopio. De aquí, que el centelleo tenga lugar en el primer caso y no en el segundo, y que cese en este segundo caso muestra la regular trasmisión de la luz por los cielos sin ninguna refracción sensible. Si alguien sostiene que las colas de los cometas no suelen verse cuando su luz no es suficientemente fuerte porque entonces los rayos secundarios no tienen fuerzas bastantes para herir a los ojos, y por esa razón no se ven las colas de las fijas, se ha de tener presente que la luz de las fijas puede aumentarse con los telescopios más de cien veces, y ni entonces se ven colas. Y la luz de los planetas es más abundante, pero colas ninguna; mientras los cometas frecuentemente tienen larguísimas colas, cuando las cabezas tienen luz muy tenue y velada. Y así, el cometa de 1680, en diciembre, cuando la luz de su cabeza apenas igualaba a la de las estrellas de segunda magnitud, emitía una cola de notable resplandor y una longitud de 40, 50, 60 ó 70 y más grados. Más tarde, en enero 27 y 28, la cabeza parecía una estrella de séptima magnitud, mientras la cola, con una luz bastante tenue, aunque suficientemente sensible, alcanzaba una longitud de 6 ó 7 grados, y con una luz muy difusa que apenas sí se podía ver, alcanzaba hasta 12 grados o más: como se ha dicho antes. Pero el 9 y 10 de febrero, cuando la cabeza había dejado de verse a simple vista, he visto la cola de dos grados de largo con el telescopio. Además, si la cola se originase de la refracción de materia celeste y se inclinase de la oposición al Sol de acuerdo con la figura de los cielos, tal inclinación, en las mismas regiones del cielo, debería ocurrir siempre hacia la misma dirección. Pero el cometa de 1680, el 28 de diciembre a las 8½ p. m. en *Londres*, se hallaba en ♓ 8.º 41′ con una latitud boreal de 28.º 6′, estando el Sol en ♑ 18.º 26′. Y el cometa de 1577 el 29 de diciembre se hallaba en ♓ 8.º 41′ con una latitud boreal de 28.º 40′, estando también el Sol en ♑ 18.º 26′ aproximadamente. En ambos casos la Tierra se hallaba en el mismo lugar y el cometa aparecía en el mismo sitio del cielo, pero en el primer caso la cola del cometa (según observaciones mías y de otros) declinaba de la oposición del Sol con un ángulo de 4½ grados hacia el norte; en el segundo caso, en cambio (según las observaciones de *Tychó*) la declinación era de 21 grados hacia el sur. Descartada, por tanto, la refracción de los cielos, sólo queda derivar los fenómenos de las colas de alguna materia que refleja la luz.

Que las colas se originan de las cabezas y ascienden hacia las regiones opuestas al Sol se confirma por las leyes que observan. Como, p. e., que situadas en los planos de las órbitas de los cometas que pasan por el Sol, se desvían de la oposición del Sol siempre hacia aquellas partes que, al avanzar, van dejando atrás las cabezas en dichas órbitas. Que para un espectador situado en esos planos aparecen en las partes directamente opuestas al Sol; pero al separarse de esos planos el espectador nota enseguida la desviación, y poco a poco aparece mayor. Que la desviación, con las demás condiciones iguales, es menor cuando la cola es más oblicua respecto a la órbita del cometa, lo mismo que cuando la cabeza del cometa se acerca más al Sol; sobre todo si el ángulo de la desviación se toma junto a la cabeza del cometa. Además de que las colas que no se desvían aparecen rectas, mientras que las que se desvían aparecen curvadas. Que la curvatura es mayor cuando la desviación es mayor, y más sensible, en igualdad de circunstancias, cuando la cola es más larga: pues, en las muy cortas, la curvatura difícilmente se distingue. Que el ángulo de desvío es menor junto a la cabeza del cometa, y mayor junto al extremo opuesto de la cola, y por tanto que la cola con su lado convexo mira a las partes de las que se desvía, las cuales están en la recta infinita, trazada desde la cabeza del cometa al Sol. Y que las colas que son más largas y extensas y brillan con luz más viva, son algo más resplandecientes por el lado convexo y perfiladas algo menos imprecisamente que por el lado cóncavo. Por consiguiente, los fenómenos de las eolias dependen del movimiento de la cabeza y no de la región del cielo en que se ve la cabeza; y por lo mismo, no ocurren por la refracción de los cielos, sino que se originan de la cabeza que proporciona materia. Pues, al igual que en nuestro aire el humo de un cuerpo cualquiera ardiendo se dirige hacia arriba, y esto perpendicularmente si el cuerpo está en reposo o bien oblicuamente si el cuerpo se mueve hacia un lado: del mismo modo en los cielos, donde los cuerpos gravitan hacia el Sol, los humos y vapores deben ascender desde el Sol (como ya se ha dicho) y dirigirse hacia arriba o en dirección recta si los cuerpos humeantes están en reposo; o bien oblicuamente, si el cuerpo avanzando continuamente va dejando siempre atrás los lugares hacia los cuales habían ascendido las partes superiores del vapor. Y la oblicuidad esa siempre será menor cuando más veloz sea el ascenso del vapor: o sea, en las proximidades del Sol y junto al cuerpo fumante. Pero por la diversidad de oblicuidad se curvará la columna de vapor: y debido a que en el lado anterior de la columna el vapor es algo más reciente, por eso mismo es allí también algo más denso y por ello refleja una luz más abundante a la vez que se perfila con un límite menos impreciso. Sobre los movimientos súbitos e inciertos de las colas o sobre sus figuras irregulares, descritos a veces por algunos, nada añado aquí, por cuanto que pudieran deberse a movimientos y cambios de nuestro aire o a movimientos de las nubes que oscurecen en parte las colas, o quizá a partes de la vía láctea que pudieran confundirse con las colas en tránsito por ella y contemplarse como partes de las mismas.

A partir de la rareza de nuestro aire se comprende que de las atmósferas de los cometas puedan surgir vapores suficientes para llenar tan enormes espacios. Pues el aire junto a la superficie de la Tierra ocupa un espacio casi 850 veces mayor que el mismo peso de agua, y por tanto, una columna cilíndrica de aire de 850 pies de alto pesa igual que una columna de agua de un pie y de la misma anchura. Y una columna de aire que llegue hasta la cima de la atmósfera iguala con su peso a una columna de agua que tenga 33 pies de alto aproximadamente; y por ello, si se quitase de toda la columna aérea la parte inferior de 850 pies de alto, la parte restante superior igualaría con su peso a una columna de agua de 32 pies de alto. Y a partir de ello (por una regla confirmada mediante muchos experimentos, de que la compresión del aire es como el peso del aire sobrepuesto, y de que la gravedad es inversamente como el cuadrado de la distancia de los lugares al centro de la Tierra), calculando de acuerdo con el Corolario de la Proposición XXII del Libro II, he hallado que el aire, si se sube hasta una altura desde la superficie terrestre de un semidiámetro de la Tierra, tendrá una rareza mayor con mucho que entre nosotros, en una razón mayor que la que existe entre todo el espacio bajo la órbita de Saturno y un globo descrito con un diámetro de una pulgada. Y por lo mismo, un globo de nuestro aire de una pulgada de ancho, con la rareza que tendría a la altura de un semidiámetro terrestre, llenaría todas las regiones de los planetas hasta la esfera de Saturno y más allá. Por consiguiente, puesto que el aire a más altura todavía se enrarece mucho más, y la cabellera o atmósfera de un cometa surgiendo desde su centro, sea casi diez veces más alta que la superficie del núcleo, y después la cola todavía ascienda mucho más arriba, la cola deberá ser sumamente enrarecida. Y aunque, por ser mucho más gruesa la atmósfera de los cometas y por la enorme gravitación de los cuerpos hacia el Sol y de las partículas de aire y vapor entre ellas, pudiera ocurrir que el aire en los espacios celestes y en las colas de los cometas no se enrarezca tanto, no obstante, una muy pequeña cantidad de aire y de vapor basta y sobra para todos estos fenómenos de las colas, como se ve por los dichos cálculos. Pues, hasta por los astros que se traslucen a través de ellas se puede colegir la gran rarefacción de las colas. La atmósfera terrestre, con un grosor de unas pocas millas, iluminada por la luz del Sol oscurece a todos los astros y hasta casi extingue a la propia Luna; mientras tanto, a través del inmenso grosor de las colas iluminadas igualmente por la luz del Sol se perciben hasta los menores astros sin detrimento de la claridad. Y no suele ser mayor el brillo de muchas colas que el de nuestro aire reflejando la luz del Sol en un rayo, de una o dos pulgadas de ancho dentro de un cuarto oscuro.

En cuánto tiempo asciende el vapor desde la cabeza hasta el extremo de la cola casi puede conocerse trazando una recta desde el extremo de la cola hasta el Sol y anotando el punto en que dicha recta corta a la trayectoria. Pues el vapor al final de la cola, si sube en línea recta desde el Sol, comenzó a ascender en el momento en que la cabeza se hallaba en el punto de la intersección. Pero el vapor no asciende en línea recta desde el Sol, sino que, reteniendo el movimiento que tenía el cometa antes de su ascenso, y componiéndolo con el movimiento de su propio ascenso, asciende oblicuamente. Por lo cual sería mejor solución del problema que dicha recta secante de la trayectoria fuera paralela a la longitud de la cola, o mejor (por el movimiento curvilíneo del cometa) que sea divergente de la línea de la cola. De este modo hallé que el vapor que se hallaba en el extremo de la cola el 25 de enero había comenzado a ascender de la cabeza el día 11 de diciembre anterior, y por lo mismo había consumido en su ascenso completo más de 45 días. Pero la cola entera que apareció el día 10 de diciembre, había ascendido en los dos días que habían sido consumidos por el perihelio del cometa. Por lo tanto, en las proximidades del Sol, el vapor al principio ascendía muy rápidamente, y después con un movimiento continuamente retardado por su gravedad continuaba ascendiendo, y al ascender aumentaba la longitud de la cola, mientras la cola, cuando apareció, constaba casi de todo el vapor que había ascendido durante el perihelio; y el primer vapor que ascendió y dio lugar al extremo de la cola no se disipó hasta que, por su exagerada distancia tanto del Sol iluminante como de nuestros ojos, dejó de verse. Por eso también, las colas de otros cometas, que son más cortas, no ascienden con un movimiento rápido y continuo desde las cabezas y desaparecen enseguida, sino que son columnas permanentes de vapores y exhalaciones propagadas desde la cabeza con un movimiento muy lento de muchos días, las cuales, al participar de aquellos movimientos de la cabeza que recibieron en el inicio continúan moviéndose por los cielos a la vez que las cabezas. Y esto de nuevo permite inferir que los espacios están desprovistos de fuerza de resistencia, por cuanto que en ellos no sólo los cuerpos sólidos de los planetas y de los cometas, sino también los vapores sumamente enrarecidos de las colas llevan a cabo con toda libertad sus rapidísimos movimientos y los conservan durante largo tiempo.

Atribuye *Kepler* el ascenso de las colas desde las atmósferas de las cabezas así como su dirección hacia las partes opuestas al Sol a la acción de los rayos de luz que arrastran con ellos a la materia de las colas. Y no parece lejos de la razón el que un aura tan sumamente tenue y en unos espacios completamente libres cediera a la acción de los rayos, pese a que en nuestras regiones sumamente entorpecidas las materias gruesas no puedan ser desplazadas por los rayos del Sol. Piensa otro que pueden darse partículas tanto leves como graves, y que la materia de las colas levita y por su levitación asciende desde el Sol. Pero, puesto que la gravedad de los cuerpos terrestres es como la cantidad de materia en ellos, y por tanto, manteniendo la cantidad de materia, no pueda aumentar ni disminuir, sospecho que el ascenso sea debido más bien a la rarefacción de la materia de las colas. El humo asciende por la chimenea gracias al impulso del aire en el que flota. Dicho aire, enrarecido por el calor asciende al disminuir su gravedad específica y arrastra consigo al humo contenido en él. ¿Por qué no podrían ascender de igual modo desde el Sol las colas de los cometas? Pues los rayos del Sol no agitan los medios que atraviesan a no ser en la reflexión y la refracción. Las partículas reflectantes calentadas por esa acción calientan el aura etérea en que se hallan inmersas. Esta se enrarece por el calor que le ha sido comunicado, y por la disminución, debida al enrarecimiento, de su gravedad específica con la cual tendía primero hacia el Sol, ascenderá y arrastrará consigo a las partículas reflectantes de las que se compone la cola; también conduce al ascenso de los vapores el hecho de que éstos giran en torno al Sol y con esta acción tratan de apartarse del Sol, mientras la atmósfera del Sol o reposa, al igual que la materia celeste, de modo total o bien gira más lentamente con el solo movimiento que hubiese recibido de la rotación solar. Estas son las causas del ascenso de las colas en las proximidades del Sol, cuando las órbitas son más curvas y los cometas se hallan dentro de la atmósfera más densa, y por ello más grave, del Sol, y cuando emiten colas de mayor longitud. Pues las colas que nacen entonces, conservando su movimiento y gravitando entre tanto hacia el Sol, se moverán en elipses en torno al Sol al igual que las cabezas, y con ese movimiento siempre acompañarán a las cabezas adhiriéndose a ellas con toda libertad. Pues la gravedad de los vapores hacia el Sol no tendrá mayor eficacia para que las colas se aparten después de las cabezas hacia el Sol, que la gravedad de las cabezas para hacer que éstas se separen de las colas. Con la gravedad común o bien caen a la vez hacia el Sol, o bien son retardadas a la vez en su ascenso; por lo cual dicha gravedad no impide que colas y cabezas alcancen una posición mutua cualquiera, debida a las causas expuestas o a otras cualesquiera y, después, la conserven con toda libertad.

Pero las colas que nacen en los perihelios de los cometas se alejarán a muy distantes regiones junto con sus cabezas, y allí o regresan tras una larga serie de años hasta nosotros junto con ellas o, más bien, enrarecidas se desvanecen allí poco a poco. Pues, luego, cuando las cabezas descienden de nuevo al Sol, unas colas nuevas y minúsculas habrán de propagarse desde las cabezas, y más tarde, en los perihelios de dichos cometas, que llegan a descender hasta la atmósfera del Sol, aumentan enormemente. Pues el vapor, en aquellos espacios completamente libres, se enrarece y dilata continuamente. Por esa razón la cola entera en el extremo superior es mucho más ancha que junto a la cabeza del cometa. Y es razonable pensar que el vapor continuamente dilatado por esa rarificación, acaba por difundirse y dispersarse por todos los cielos, para desde allí poco a poco ser atraído por su gravedad hacia los planetas y mezclarse con las atmósferas de ellos. Pues de igual modo que necesariamente se requieren los mares para la constitución de esta Tierra, y esto de suerte que de ellos pueda excitar el calor del Sol abundantes y suficientes vapores que, o acumulados en nubes caigan como lluvia y rieguen y nutran a toda la tierra para la germinación de los vegetales, o bien condensados en las frías cumbres de los montes (como algunos razonablemente sostienen) discurran en fuentes y ríos: así también, para la conservación de los mares y de los humores en los planetas parecen requerirse los cometas, merced a cuyas exhalaciones y a cuyos vapores pueda suplirse y restaurarse cuanto licor se consume por la vegetación y la putrefacción y se convierte en tierra árida. Pues, todo lo vegetal crece absolutamente de licores, y después, en su mayor parte, se convierte por putrefacción en tierra árida, y el limo resulta siempre de los licores putrefactos. De aquí que la materia árida terrosa aumente cada día, mientras que los licores, salvo que aumenten por aportes exteriores, deberán decrecer continuamente, hasta que por fin desaparezcan. Por lo demás, sospecho que esa parte de nuestro aire, mínima pero sutilísima y óptima además de necesaria para la vida de todas las cosas, proviene principalmente de los cometas.

Las atmósfera de los cometas, en el descenso de éstos hacia el Sol, desparramándose hacia las colas disminuyen, y (ciertamente hacia el lado que mira al Sol) se hacen más estrechas; y viceversa, en su regreso desde el Sol, cuando ya se desparraman menos hacia las colas, se ensanchan; si es que *Hewelcke* hizo bien la anotación de sus apariencias. Pues aparecen mínimas cuando las cabezas calentadas por el Sol en tal modo han dado lugar a colas máximas y muy brillantes, y los núcleos están rodeados de humo quizá más denso y negro en las partes inferiores de las atmósferas. Pues todo humo suscitado por un calor muy grande suele ser más grueso y negro. Así la cabeza del cometa al que nos hemos referido, a iguales distancias del Sol y de la Tierra aparecía más oscuro después del perihelio que antes. Pues en el mes de diciembre, solía compararse con estrellas de tercera magnitud, mientras en noviembre lo era con estrellas de primera y segunda. Y quienes vieron ambos, describen como más grande al primero. Pues para un cierto joven de *Cambridge*, el 19 de noviembre, este cometa con su luz un tanto plomiza y opaca igualaba a Spica de Virgo, y brillaba más claramente que después. Y el 20 de noviembre del calendario antiguo, el cometa parecía a *Montenari* mayor que las estrellas de primera magnitud, siendo la cola de dos grados de longitud. Y el señor *Storer*, en carta que se halla en mis manos, escribe que la cabeza del cometa en el mes de diciembre cuando emitía la cola máxima y más brillante, era pequeño y en su magnitud visible mucho menor que el cometa que había aparecido en el mes de noviembre antes de la salida del Sol. Conjeturaba que la razón de ello era que la materia de la cabeza al principio era más abundante y que poco a poco se habría consumido.

De igual modo parece que hay que contemplar el hecho de que las cabezas de otros cometas que emitieron colas muy grandes y luminosas, aparecieran muy oscuras y pequeñas. Pues el año 1668, el 5 de marzo, calendario nuevo, a las siete de la tarde el R. P. *Valentín Estancel*, estando en *Brasil*, vio un cometa próximo al horizonte hacia el suroeste, con una cabeza mínima y apenas distinguible, pero con una cola sumamente brillante, hasta el punto de que los que se hallaban en el litoral veían con toda facilidad su imagen reflejada en el mar. Ya que era la imagen de una estela brillante de 23 grados de longitud, inclinada desde occidente hacia el sur y casi paralela al horizonte. Pero semejante resplandor solamente duró tres días, decreciendo después notablemente; y mientras decrecía el resplandor aumentó la magnitud de la cola. Y en *Portugal* también se dice que llegó a ocupar casi la cuarta parte del cielo (es decir, 45 grados) extendiéndose de occidente a oriente con un gran resplandor; y ni siquiera apareció entera, al hallarse siempre la cabeza circulando bajo el horizonte de estas regiones. Es evidente por el incremento de la cola y la merma del resplandor que la cabeza regresaba desde el Sol, y que estuvo próxima a él al principio, al igual que el cometa de 1680. Y en la *Crónica Sajona* se lee también sobre un cometa semejante del año 1106 «cuya estrella era pequeña y oscura» (como el del año 1680) «pero el resplandor que salió de ella era muy luminoso y como una estela ardiente que se dirigía hacia oriente y norte», como refiere también *Hewelcke* citando al monje *Simeón* de *Durham*. Apareció a principios del mes de febrero, al atardecer hacia el suroeste. De aquí y de la posición de la cola se infiere que la cabeza estaba próxima al Sol. Dice *Mateo de París* que «*distaba del Sol casi un codo, emitiendo de sí un gran rayo desde la hora tercia*» (más exacto sería la sexta) «*hasta la hora nona*». Así era también aquel ardiente cometa descrito por *Aristóteles* en *Meteoros*, Libro I, 6, «*cuya cabeza no se vio el primer día debido a que se hallaba ante el Sol o al menos bajo los rayos solares, pero al día siguiente se vio cuanto fue posible. Pues se apartó una mínima distancia del Sol, y enseguida se ocultó. Por causa del excesivo brillo*» (de la cola) «*todavía no aparecía el fuego difuso de la cabeza, pero pasado un tiempo*» (dice Aristóteles), «*como* (la cola) *brillase ya menos, se le restituyó su cara* (a la cabeza del) *al cometa. Extendió su resplandor hasta la tercera parte del cielo* (esto es, a 60 grados). *Y apareció en invierno* (el año 4 de la Olimpíada 101) y *ascendiendo hasta el cinturón de Orión allí desapareció*». El cometa del año 1618, que emergió de entre los rayos solares con una enorme cola, parecía igualar y hasta superar a las estrellas de primera magnitud, pero han aparecido no pocos cometas mayores que tenían colas más breves. De ellos algunos dicen que igualaron a Júpiter, otros a Venus o incluso a la Luna.

Hemos dicho que los cometas son una clase de planetas que giran en órbitas muy excéntricas en torno al Sol. Y, al igual que de los planetas sin cola suelen ser menores los que giran en órbitas menores y más cercanas al Sol, así también los cometas, que en sus perihelios se acercan más al Sol, parece razonable que sean mucho menores, para que no lleguen a perturbar demasiado con su atracción al Sol. Omito, pues, la determinación de los diámetros transversales de las órbitas y los tiempos periódicos a partir de la comparación de los cometas que regresan por las mismas órbitas tras largos intervalos de tiempo. Pero mientras tanto, la siguiente proposición puede dar alguna luz en este asunto.

Proposición xlii. Problema xxii[19]

Corregir la trayectoria hallada de un cometa.

Operación 1. Tómese la posición del plano de la trayectoria tal como fue hallada por medio de la Proposición anterior; y selecciónense tres lugares del cometa determinados por observaciones cuanto más exactas sea posible, y lo más distantes entre sí; y sea A el tiempo entre la primera y la segunda observación, y B el tiempo entre la segunda y la tercera. Pero conviene que el cometa se halle en alguno de ellos en el perigeo, o por lo menos que no ande muy lejos del perigeo. Hállese mediante operaciones trigonométricas, a partir de esos lugares aparentes, los tres lugares verdaderos del cometa en el plano aquel de la trayectoria que se ha tomado. Después, por los lugares hallados, en torno al Sol o foco, mediante operaciones aritméticas realizadas con ayuda de la Proposición xxi del Libro i, trácese una sección cónica, y sean D y E sus áreas, delimitadas por los radios trazados al Sol desde los lugares hallados; a saber D el área entre la observación primera y segunda, y E el área entre la segunda y la tercera. Y sea T el tiempo total en el que el área entera D + E debe ser descrita con la velocidad del cometa hallada por la Proposición xvi del Libro i.

Operación 2. Auméntese la longitud de los nodos del plano de la trayectoria, añadiendo a aquella longitud 20′ ó 30′, que llamaremos P, pero conservando la anterior inclinación hacia el plano de la eclíptica. Después, a partir de los tres antedichos lugares observados del cometa, encuéntrense en este nuevo plano tres lugares verdaderos, como antes: después, trácese también una órbita que pase por esos tres lugares, y las áreas de la misma descritas entre observaciones, que sean ahora d y e, al igual que el tiempo entero t, en el que debiera describirse el área entera $d + e$.

Operación 3. Manténgase la longitud de los nodos de la primera operación y auméntese la inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, añadiendo a su inclinación inicial 20′ ó 30′, que denominaremos Q. Después, a partir de los antedichos tres lugares aparentes observados del cometa, encuéntrense tres lugares verdaderos en este plano, y trácense la órbita que pase por esos lugares y las dos áreas comprendidas entre las observaciones y que sean éstas δ y ε, y el tiempo total τ en el cual debiera describirse el área entera $\delta + \varepsilon$.

Ahora sea, C a 1 como A a B, y G a 1 como D a E, y g a 1 como d a e, y γ a 1 como δ a ε; y sea S el tiempo verdadero entre la primera y tercera observación; y observando con cuidado las reglas de los signos + y - hállense los números m y n, de modo que ocurra $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, y $2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau$. Y si en la primera operación I representa la inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, y K representa la longitud de uno cualquiera de los nodos, $I + nQ$ será la verdadera inclinación del plano de la trayectoria hacia el plano de la eclíptica, mientras $K + mP$ será la verdadera longitud del nodo. Y finalmente, si en la primera operación, en la segunda y en la tercera, las cantidades R, r, y p, representan los «latera recta» de la trayectoria, mientras las cantidades $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$, representan sus lados transversales, respectivamente: el verdadero «latus rectum» será $R + mr - mR + np - nR$, mientras que el verdadero lado transverso de la trayectoria que describe el cometa será $\dfrac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$. Pero una vez dado el lado transverso también está dado el tiempo periódico del cometa. Q. E. F.

Por lo demás, los tiempos periódicos de los cometas que giran y los lados transversos de las órbitas no se podrán determinar con bastante exactitud, a no ser por la mutua comparación de los cometas que aparecen en tiempos distintos. Si muchos cometas, después de iguales intervalos de tiempo, se encuentra que han descrito la misma órbita habrá que concluir que todos éstos eran uno y el mismo cometa girando en la misma órbita. Y entonces, por los tiempos de las revoluciones se tendrán dados los lados transversales de las órbitas y a partir de estos lados se determinarán las órbitas elípticas.

A este fin habrá, pues, que calcular las trayectorias de muchos cometas, bajo la hipótesis de que son parabólicas. Pues esta clase de trayectorias concuerdan muy aproximadamente siempre con los fenómenos. Esto se ve claramente, no sólo por la trayectoria parabólica del cometa del año 1680, que antes he comparado con las observaciones, sino también por la de aquel célebre cometa que apareció los años 1664 y 1665 y fue observado por *Hewelcke*. Este calculó, aunque con poca exactitud, sus longitudes y latitudes sobre la base de sus observaciones. Con esas mismas observaciones, nuestro *Halley* calculó de nuevo los lugares de ese cometa, y así al fin, por los lugares hallados de ese modo, determinó la trayectoria del cometa. Y halló que su nodo ascendente estuvo en ♊ 21.º 13′ 55″, la inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica de 21.º 18′ 40″, la distancia del perihelio al nodo en la órbita 49.º 27′ 30″. El perihelio en ♌ 8.º 40′ 30″, con latitud heliocéntrica austral de 16.º 1′ 45″ en tiempo igualado de *Londres* o a las 13h. 8′ p. m. de *Dantzig*, calendario antiguo, y el «latus rectum» de la parábola fue de 410 286, para una distancia media de la Tierra al Sol de 100 000. La medida en que los lugares del cometa calculados en esta órbita concuerdan con las observaciones se verá claramente por la siguiente tabla calculada por *Halley*.

En el mes de febrero de principios del año 1665, la primera estrella de Aries, a la que llamaré en lo sucesivo *γ* se hallaba en ♈ 28.º 30′ 15″, con una latitud boreal de 7.º 8′ 58″. La segunda de Aries estaba en ♈ 29.º 17′ 18″, con una latitud boreal de 8.º 28′ 16″. Y una estrella de séptima magnitud, que llamaré A, estaba en ♈ 28.º 24′ 45″, con latitud boreal de 8.º 28′ 33″. Y el cometa, el 7 de febrero a las 0h. 7′ 30″ de *París* (es decir, el día 7 de febrero a las 0h. 8′ 37″ de *Dantzig*) calendario antiguo, formaba con dichas estrellas *γ* y A un triángulo rectángulo en *γ*. Y la distancia del cometa a la estrella *γ* era igual a la distancia entre las estrellas *γ* y A, esto es, de 1.º 20′ 26″ en el paralelo de la latitud de la estrella *γ*. Por lo cual, si de la longitud de la estrella *γ* se resta 1.º 20′ 26″, quedará la longitud del cometa ♈ 27.º 9′ 49″. *Auzout*, basándose en esta observación suya, situó al cometa en ♈ 27.º 0′ aproximadamente. Y según el dibujo, con el que *Hooke* representó su movimiento, el cometa estaba ahora en ♈ 26.º 59′ 24″. Considerando la media entre ambos lo he puesto en ♈ 27.º 4′ 46″. *Auzout* por la misma observación situó la latitud del cometa en 7.º y 4′ ó 5′ norte. Más exacto hubiera sido en 7.º 3′ 29″, puesto que la diferencia de latitudes del cometa y de la estrella *γ* era igual a la diferencia de longitudes de las estrellas *γ* y A.

Tiempo aparente en Dantzig (s.a.)	Distancias del cometa observadas desde		Lugares observados		Lugares calculados en la órbita
Diciembre *d h m*		° ′ ″		° ′ ″	° ′ ″
3. 18. 29½	El corazón de León	46,24,20	Long.	♎ 7,01,00	♎ 7. 1,29
	La punta de Virgo	22,52,10	Lat. S.	21,39. 0	21,38,50
4. 18. 1½	El corazón de León	46, 2,45	Long.	♎ 6,15, 0	♎ 6,16, 5
	La punta de Virgo	23,52,40	Lat. S.	22,24, 0	22,24, 0
7. 17. 48	El corazón de León	44,48, 0	Long.	♎ 3, 6, 0	♎ 3, 7,33
	La punta de Virgo	27,56,40	Lat. S.	25,22, 0	25,21,40
17. 14. 13	El corazón de León	53,15,15	Long.	♌ 2,56, 0	♌ 2,56, 0
	El hombro derecho de Orión	45,43,30	Lat. S.	49,25, 0	49,25, 0
19. 9. 25	Proción	35,13,50	Long.	♊ 28,40,30	♊ 28,43, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	52,56, 0	Lat. S.	45,48, 0	45,46, 0
20. 9. 53½	Proción	40,49, 0	Long.	♊ 13,03, 0	♊ 13, 5, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	40,04, 0	Lat. S	39,54, 0	39,53, 0
21. 9. 9½	El hombro derecho de Orión	26,21,25	Long.	♊ 2,16, 0	♊ 2,18,30
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	29,28, 0	Lat. S.	33,41, 0	33,39,40
22. 9. 0	El hombro derecho de Orión	29,47, 0	Long.	♉ 24,24, 0	♉ 24,27, 0
	La estrella brillante de la mandíbula de Ballena	20,29,30	Lat. S.	27,45, 0	27,46, 0
26. 7. 58	La estrella brillante de Aries	23,20, 0	Long.	♉ 9, 0, 0	♉ 9, 2,28
	Aldebarán	26,44, 0	Lat. S.	12,36, 0	12,34,13
27. 6. 45	La estrella brillante de Aries	20,45, 0	Long.	♉ 7, 5,40	♉ 7, 8,45
	Aldebarán	28,10, 0	Lat. S.	10,23, 0	10,23,13
28. 7. 39	La estrella brillante de Aries	18,29, 0	Long.	♉ 5,24,45	♉ 5,27,52
	Palilicium	29,37, 0	Lat. S.	8,22,50	8,23,37
31. 6. 45	El cinturón de Andrómeda	30,48,10	Long.	♉ 2, 7,40	♉ 2, 8,20
	Palilicium	32,53,30	Lat. S.	4,13, 0	4,16,25
Enero 1665 7. 7. 37½	El cinturón de Andrómeda	25,11, 0	Long.	♈ 28,24,47	♈ 28,24, 0
	Palilicium	37,12,25	Lat. N.	0,54, 0	0,53, 0
13. 7. 0	La cabeza de Andrómeda	28, 7,10	Long.	♈ 27, 6,54	♈ 27, 6,39
	Palilicium	38,55,20	Lat. N.	3, 6,50	3, 7,40
24. 7. 29	El cinturón de Andrómeda	20,32,15	Long.	♈ 26,29,15	♈ 26,28,50
	Palilicium	40, 5, 0	Lat. N.	5,25,50	5,26, 0
Febrero 7. 8. 37			Long.	♈ 27, 4,46	♈ 27,24,55
			Lat. N.	7, 3,29	7, 3,15
22. 8. 46			Long.	♈ 28,29,46	♈ 28,29,58
			Lat. N.	8,12,36	8,10,25
Marzo 1. 8. 16			Long.	♈ 29,18,15	♈ 29,18,20
			Lat. N.	8,36,26	8,36,12
7. 8. 37			Long.	♉ 0, 2,48	♉ 0, 2,42
			Lat. N.	8,56,30	8,56,56

(Tabla de Halley)

El 22 de febrero a las 7h. 30′ de *Londres*, es decir, el 22 de febrero a las 8h. 46′ en *Dantzig*, la distancia del cometa a la estrella A, según las observaciones de *Hooke* representadas por él mismo en un dibujo, y también según observaciones de *Auzout* representadas por *Petit* en otro dibujo, era una quinta parte de la distancia entre la estrella A y la primera de Aries, es decir, 15′ 57″. Y la distancia del cometa hasta la línea que unía la estrella A con la primera de Aries era una cuarta parte de esa quinta parte, es decir, 4′. Por tanto, el cometa se hallaba en ♈ 28.º 29′ 46″, con latitud norte de 8.º 12′ 36″.

En marzo 1d. 7h. 0′, de *Londres*, esto es, marzo Id. 8h. 16′ de *Dantzig*, el cometa fue observado cerca de la segunda estrella de Aries, a una distancia entre ellos que era a la distancia entre la primera y la segunda de Aries, esto es, a 1.º 33′ como 4 a 45 según *Hooke*, y como 2 a 23 según *Gottignies*. Por lo que la distancia del cometa a la segunda de Aries era de 8′ 16″ según *Hooke*, o de 8′ 5″ según *Gottignies*, o la media de 8′ 10″. Pero el cometa, según *Gottignies*, ya había rebasado la segunda de Aries en un espacio de casi la cuarta o quinta parte del recorrido de un día, es decir, 1′ 35″ aproximadamente (con lo que concuerda bien *Auzout*) o algo menos según *Hooke*, quizá 1′. Por lo cual si a la longitud de la primera de Aries se añade 1′ y a su latitud 8′ 10″, se tendrá la longitud del cometa en ♈ 29.º 18′ y la latitud en 8.º 36′ 26″ norte.

En marzo 7d. 7h. 30′ de *París* (es decir, marzo, 7d. 8h. 37′ de *Dantzig*) según las observaciones de *Auzout* la distancia del cometa de la segunda de Aries era igual a la distancia de la segunda de Aries a la estrella A, esto es, 52′ 29″. Y la diferencia de longitudes del cometa y de la segunda de Aries era de 45′ ó 46′ o quizá la media de 45′ 30″. Por lo cual el cometa se hallaba en ♉ 0.º 2′ 48″. Del dibujo de las observaciones de *Azout*, construido por *Petit*, *Hewelcke* dedujo la latitud del cometa en 8.º 54′. Pero el dibujante curvó irregularmente el camino del cometa hacia el final de su movimiento, y en el dibujo de las observaciones de *Azout* construido por *Hewelcke*, éste corrigió la curvatura irregular, y así hizo que la latitud del cometa fuera de 8.º 55′ 30″. Y corrigiendo la irregularidad un poco más, la latitud vendría a: resultar de 8.º 56′ o quizá 8.º 57.

Este cometa fue visto también el 9 de marzo, y entonces debió situarse en ♉ 0.º 18′, con latitud boreal de 9.º 3½ aproximadamente.

Este cometa fue visible durante tres meses y recorrió casi seis signos, y en un día se desplazó casi veinte grados. Su curso se desvió del Círculo Máximo, curvándose notablemente hacia el norte; y su movimiento al final, de retrógrado pasó a directo. Y no obstante un curso tan insólito, la teoría de principio a fin no vino a concordar menos con las observaciones de lo que suelen concordar las teorías de los planetas con las observaciones, como verá quien examine la tabla. Sin embargo hay que restar casi dos minutos primeros, cuando el cometa fue más veloz; cosa que se puede hacer restando doce minutos segundos del ángulo entre el nodo ascendente y el perihelio, o estableciendo dicho ángulo en 49.º 27′ 18″. La paralaje anual de uno y otro cometa (éste y el anteriormente mencionado) fue grande, y por ello se demuestra el movimiento anual de la Tierra en el Orbe Magno.

Se confirma también la teoría por el movimiento del cometa que apareció el año

1683. Este fue retrógrado, en una órbita cuyo plano casi formaba ángulo recto con el plano de la eclíptica. Su nodo ascendente (por cálculos de *Halley*) estaba en ♍ 23.º 23′; la inclinación de la órbita hacia la eclíptica era de 83.º 11′; el perihelio en ♊ 25.º 29′ 30″; la distancia del perihelio al Sol de 56 020, para un radio del Orbe Magno de 100 000, y el momento del perihelio el día 2 de julio a las 3h. 50′. Los lugares del cometa en esta órbita calculados por *Halley* y comparados con los observados por *Flamsteed*, se muestran en la tabla siguiente.

	1683 Tiempo ecuatorial	Lugar del Sol	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Jul.	13,12,55	♌ 1, 2,30	♋ 13, 5,42	29,28,13	♋ 13, 6,42	29,28,20	+1, 0	+0, 7
	15,11,15	2,53,12	11,37,48	29,34, 0	11,39,43	29,34,50	+1,55	+0,50
	17,10,20	4,45,45	10, 7, 6	29,33,30	10, 8,40	29,34, 0	+1,34	+0,30
	23,13,40	10,38,21	5,10,27	28,51,42	5,11,30	28,50,28	+1, 3	−1,14
	25,14, 5	12,35,28	3,27,53	24,24,47	3,27, 0	28,23,40	−0,53	−1, 7
	31, 9,42	18, 9,22	♊ 27,55, 3	26,22,52	♊ 27,54,24	26,22,25	−0,39	−0,27
	31,14,55	18,21,53	27,41, 7	26,16,57	27,41, 8	26,14,50	+0, 1	−2, 7
Ag.	2,14,56	20,17,16	25,29,32	25,16,19	25,28,46	25,17,28	−0,46	+1, 9
	4,10,49	22, 2,50	23,18,20	24,10,49	23,16,55	24,12,19	−1,25	+1,30
	6,10, 9	23,56,45	20,42,23	22,47, 5	20,40,32	22,49,05	−1,51	+2, 0
	9,10,26	26,50,52	16, 7,57	20, 6,36	16, 5,55	20, 6,10	+2, 2	−0,27
	15,14, 1	♍ 2,47,13	3,30,48	11,37,33	3,26,18	11,32, 1	−4,30	−5,32
	16,15,10	3,48, 2	0,43, 7	9,34,16	0,41,55	9,34,13	−1,12	−0, 3
	18,15,44	5,45,33	♉ 24,52,53	5,11,15	♉ 24,49, 5	5, 9,11	−3,48	−2, 4
				Sur		Sur		
	22,14,44	9,35,49	11, 7,14	5,16,58	11, 7,12	5,16,58	−0, 2	−0, 3
	23,15,52	10,36,48	7, 2,18	8,17,09	7, 1,17	8,16,41	−1, 1	−0,28
	26,16, 2	13,31,10	♈ 24,45,31	16,38, 0	♈ 24,44, 0	16,38,20	−1,31	+0,20

También se confirma la teoría por el movimiento del cometa retrógrado que apareció el año 1682. Su nodo ascendente (calculado por *Halley*) se hallaba en ♉ 21.º 16′ 30″. La inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17.º 56′ 0″. El perihelio en ♒ 2.º 52′ 50″. La distancia del perihelio al Sol de 58 328 para un radio del Orbe Magno de 100 000. Y el tiempo igualado del perihelio el 4 de septiembre a las 7h. 39′. Pero los lugares calculados, a partir de las observaciones de *Flamsteed,* comparados con los calculados mediante la teoría se muestran en la tabla siguiente. (*Vid. página* 776).

Y también se confirma la teoría por el movimiento retrógrado del cometa que apareció el año 1723. Su nodo ascendente (calculado por *Bradley*, profesor *Saviliano* de astronomía en *Oxford*) estaba en ♈ 14.º 16′. La inclinación de la órbita hacia el plano de la eclíptica de 49.º 59′. El perihelio en ♉ 12.º 15′ 20″. La distancia del perihelio al Sol de 998 651, para un radio del Orbe Magno de 1 000 000, y el tiempo igualado del perihelio el 16 de septiembre a las 16h. 10′. Y los lugares del cometa en esta órbita calculados por *Bradley*, comparados con los observados por él mismo, por su tío *Pound* y por *Halley* se muestran en la tabla siguiente. (*Vid. página* 777).

Con estos ejemplos queda harto claro que los movimientos de los cometas se ponen de manifiesto mediante la teoría recién expuesta con no menor exactitud que la conseguida por las teorías de los movimientos de los planetas. Y por lo tanto, las órbitas de los cometas pueden ser calculadas mediante esta teoría, igual que conocer, por fin, el tiempo periódico de un cometa que gira en una órbita cualquiera, y se conocerán entonces los lados transversales de las órbitas elípticas al igual que las alturas de los afelios.

El cometa retrógrado que apareció el año 1607 describió una órbita cuyo nodo ascendente (calculado por *Halley*) estaba en ♉ 20.º 21′; la inclinación del plano de la órbita hacia el plano de la eclíptica era de 17.º 2′; el perihelio en ♒ 2.º 16′; y la distancia del perihelio al Sol era de 58 680 para un radio del Orbe Magno de 100 000. Y el cometa estaba en el perihelio el 16 de octubre a las 3h. 50′. Concuerda muy aproximadamente esta órbita con la órbita del cometa que apareció en 1682. Si estos dos cometas fueran uno y el mismo, este cometa giraría en un período de 75 años, y el eje mayor de dicha órbita será al eje mayor del Orbe Magno como la raíz cúbica de 75 x 75 a 1, o como 1778 a 100 aproximadamente. Y la distancia del afelio de este cometa al Sol será a la distancia media de la Tierra al Sol como 35 a 1 aproximadamente. Conociendo estas cosas no será muy difícil determinar la órbita elíptica de este cometa. Y esto será así si resulta que después de un espacio de 75 años el cometa regresara de nuevo por la misma órbita. Los demás cometas parece que giran en períodos más largos y ascienden más arriba.

1682 Tiempo ap.		Lugar del Sol	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	′ ″
Ag.	19,16,38	♍ 7, 0, 7	♌ 18,14,28	25,50, 7	♌ 18,14,40	25,49,55	−0,12	+0,12
	20,15,38	7,55,52	24,46,23	26,14,42	24,46,22	26,12,52	+0, 1	+1,50
	21, 8,21	8,36,14	29,37,15	26,20, 3	29,38, 2	26,17,37	−0,47	+2,26
	22, 8, 8	9,33,55	♍ 6,29,53	26, 8,42	♍ 6,30, 3	26, 7,12	−0,10	+1,30
	29, 8,20	16,22,40	♎ 12,37,54	18,37,47	♎ 12,37,49	18,34, 5	+0, 5	+3,42
	30, 7,45	17,19,41	15,36, 1	17,26,43	15,35,18	17,27,17	+0,43	−0,34
Sept.	1, 7,33	19,16, 9	20,30,53	15,13, 0	20,27, 4	15, 9,49	+3,49	+3,11
	4, 7,22	22,11,28	25,42, 0	12,23,48	25,40,58	12,22, 0	+1, 2	+1,48
	5, 7,32	23,10,29	27, 0,46	11,33,08	26,59,24	11,33,51	+1,22	−0,43
	8, 7,16	26, 5,58	29,58,44	9,26,46	29,58,45	9,26,43	−0, 1	+0, 3
	9, 7,26	27, 5, 9	♏ 0,44,10	8,49,10	♏ 0,44, 4	8,48,25	+0, 6	+0,45

1723 Tiempo ecuatorial		Longitud observada del cometa	Latitud norte observada	Longitud calculada del cometa	Latitud norte calculada	Diferencia longitud	Diferencia latitud
	d h m	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Oct.	9,8, 5	♒ 7,22,15	5, 2, 0	♒ 7,21,26	5, 2,47	+49	−47
	10,6,21	6,41,12	7,44,13	6,41,42	7,43,18	−50	+55
	12,7,22	5,39,58	11,55, 0	5,40,19	11,54,55	−21	+05
	14,8,57	4,59,49	14,43,50	5, 0,37	14,44, 1	−48	−11
	15,6,35	4,47,41	15,40,51	4,47,45	15,40,55	− 4	− 4
	21,6,22	4, 2,32	19,41,49	4, 2,21	19,42, 3	+11	−14
	22,6,24	3,59, 2	20, 8,12	3,59,10	20, 8,17	− 8	− 5
	25,8, 2	3,55,29	20,55,18	3,55,11	20,55, 9	+18	+ 9
	29,8,56	3,56,17	22,20,27	3,56,42	22,20,10	−25	+17
	30,6,20	3,58, 9	22,32,28	3,58,17	22,32,12	− 8	+16
Nov.	5,5,53	4,16,30	23,38,33	4,16,23	23,38, 7	+ 7	+26
	8,7, 6	4,29,36	24, 4,30	4,29,54	24, 4,40	−18	−10
	14,6,20	5, 2,16	24,48,46	5, 2,51	24,48,16	−35	+30
	20,7,45	5,42,20	25,24,45	5,43,13	25,25,17	−53	−32
Dic.	7,6,45	8, 4,13	26,54,18	8, 3,55	26,53,42	+18	+36

Por lo demás, los cometas, debido a su gran número, y a la gran distancia de los afelios hasta el Sol así como a su gran permanencia en los afelios, deben sufrir perturbaciones no pequeñas entre ellos por causa de las gravedades y aumentar unas veces o disminuir otras, tanto sus excentricidades como sus tiempos periódicos. Por consiguiente, no hay que esperar que el mismo cometa regrese por la misma órbita y en los mismos tiempos periódicos de modo exacto. Basta con que no sobrevengan mutaciones mayores que las que puedan deberse a las causas susodichas.

Y con esto se da cuenta de por qué los cometas no estén comprendidos en el zodíaco como los planetas, sino que salgan de él y con movimientos variados se dirijan hacia todas las regiones del cielo. Y ello con objeto de que en sus afelios, cuando se mueven muy lentamente, disten entre ellos lo más posible y se atraigan entre ellos cuanto menos. Por esta causa, los cometas que más descienden y por lo mismo se mueven en los afelios más lentamente, deberán ascender más.

El cometa que apareció el año 1680 distaba en su perihelio del Sol menos de la sexta parte del diámetro del Sol; y debido a la gran velocidad en esas proximidades y a alguna densidad de la atmósfera solar, debió sufrir alguna resistencia y retardarse un tanto y acercarse más al Sol: y en cada una de las revoluciones acercándose un poco, al fin acabará cayendo en el cuerpo solar. Pero en el afelio, cuando se mueve muy lentamente, puede a veces ser retardado por la atracción de otros cometas y después caer hacia el Sol. También de este modo las estrellas fijas, que poco a poco se extinguen en luz y vapores pueden realimentarse con cometas que caen en ellas, y repuestas con ese nuevo alimento ser tenidas por estrellas nuevas. De esta clase son las estrellas fijas que aparecen de repente y, al principio, brillan enormemente y después poco a poco se desvanecen. Tal fue la estrella de la silla de Casiopea que no vio *Cornelio Gemma* el 8 de noviembre de 1572 observando esa parte del cielo en una noche diáfana; pero a la noche siguiente (9 de noviembre) la vio más brillante que todas las fijas y apenas de menos luz que Venus. *Tycho Brahe* la vio el día 11 del mismo mes cuando más brillaba; y a partir de ese momento decreciendo poco a poco la vio desaparecer en el espacio de 16 meses. En el mes de noviembre, recién aparecida, igualaba en brillo a Venus. En diciembre, un tanto disminuida, parecía igualar a Júpiter. El año 1573, en enero era menor que Júpiter y mayor que Sirio, a la cual ya resultaba igual en febrero y primeros de marzo. En los meses de abril y mayo parecía igual a las estrellas de segunda magnitud, en junio, julio y agosto a las estrellas de tercera magnitud, en septiembre, octubre y noviembre a las de cuarta, en diciembre y en enero de 1574 a las de quinta, en febrero a las de sexta, y en marzo desapareció de vista. Al principio su color era claro, blanquecino y brillante y después amarillo, y el año 1573 en marzo rojiza como la de Marte o Aldebarán; en mayo adquirió una palidez blanquecina, como la que vemos en Saturno, color que conservó hasta el fin, pero haciéndose cada vez más oscura. Así fue también la estrella del pie derecho de Serpentario, observada por los discípulos de *Kepler* el año 1604 el día 30 de septiembre, calendario antiguo, cuando comenzó a aparecer, y observaron que superaba a Júpiter con su luz, siendo así que la noche precedente no se veía. Desde ese momento empezó a decrecer y en el espacio de 15 ó 16 meses desapareció de la vista. Por una estrella nueva semejante y extremadamente brillante se dice que se vio impulsado *Hiparco* para observar las fijas y confeccionar un catálogo. Pero las fijas que aparecen y desaparecen alternativamente y que crecen poco a poco y apenas superan nunca a las de tercera magnitud, parecen ser de otra clase, y al girar muestran alternativamente sus partes oscuras y sus partes luminosas. Pero los vapores que surgen del Sol, de las estrellas fijas y de las colas de los cometas, pueden caer por su gravedad sobre las atmósferas de los planetas y condensarse allí y convertirse en agua y espíritus húmedos y después por calentamiento lento pasar poco a poco a sales, sulfuros, tinturas, limo, barro, arcilla, arena, piedras, corales y otras sustancias terrestres.

ESCOLIO GENERAL[20]

La hipótesis de los vórtices se ve acosada por muchas dificultades. Para que cada planeta, con un radio trazado hasta el Sol, describa áreas proporcionales a los tiempos, los tiempos periódicos de las partes del vórtice deberían estar en razón cuadrada de las distancias al Sol. Para que los tiempos periódicos de los planetas estén en razón de la potencia $^2\!/_3$ de las distancias al Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice deberían estar en razón de la potencia $^2\!/_3$ de las distancias. Para que los vórtices menores en giro en torno a Saturno, Júpiter y otros planetas se conserven y floten tranquilamente en el vórtice del Sol, los tiempos periódicos de las partes del vórtice solar deben ser iguales. Las revoluciones del Sol y de los planetas en torno a sus ejes, que deberían concordar con los movimientos de los vórtices, discrepan de todas estas proporciones. Los movimientos de los cometas son sumamente regulares y observan las mismas leyes que los movimientos de los planetas, y no pueden explicarse por los vórtices. Los cometas se desplazan con movimientos muy excéntricos hacia todas las partes de los cielos, cosa que no podría ocurrir si no se suprimen los vórtices.

Los proyectiles, en nuestra atmósfera, sufren únicamente la resistencia del aire. Suprimiendo el aire, como ocurre en el vacío de *Boyle*, cesa la resistencia, de suerte que una leve pluma y el denso oro caen en este vacío con la misma velocidad. E igual es la cosa en los espacios celestes que están más allá de la atmósfera terrestre. Todos los cuerpos en estos espacios deben moverse con entera libertad; y por lo mismo los planetas y los cometas deberán girar perpetuamente según las leyes expuestas más arriba en órbitas de especie y posición dadas. Ciertamente perseverarán en sus órbitas por las leyes de la gravedad, pero de ningún modo pudieron por estas leyes adquirir inicialmente la situación regular de las órbitas.

Los seis planetas principales giran en torno al Sol en círculos concéntricos al Sol, con la misma dirección de movimiento y aproximadamente en el mismo plano. Diez lunas giran en torno a la Tierra, Júpiter y Saturno en círculos concéntricos, con la misma dirección de movimiento, en los planos de las órbitas de los planetas muy aproximadamente. Y todos estos movimientos regulares no tienen un origen debido a causas mecánicas; toda vez que los cometas circulan en órbitas muy excéntricas libremente y en todas direcciones del firmamento. Con este tipo de movimiento los cometas pasan rápida y fácilmente por las órbitas de los planetas, y en sus afelios, cuando sus movimientos son más lentos y se detienen por más tiempo, distan entre ellos inmensamente, para que sea mínima la atracción mutua. Tan elegante combinación de Sol, planetas y cometas sólo pudo tener origen en la inteligencia y poder de un ente inteligente y poderoso. Y si las estrellas fijas fueren centros de sistemas semejantes, todos ellos construidos con un esquema similar, estarán sometidos al dominio de *Uno*: sobre todo si la luz de las fijas es de la misma naturaleza que la luz del Sol y todos los sistemas emiten luz hacia todos mutuamente. Y para que los sistemas de las fijas no caigan por la gravedad uno sobre otro, él los habría colocado a inmensas distancias uno de otro.

El lo rige todo, no como alma del mundo, sino como dueño de todos. Y por su dominio, suele ser llamado señor dios «*παντοκράτωρ*[a]». Pues dios es una palabra relativa y está en relación con los siervos: y deidad es la dominación de dios, no sobre su propio cuerpo, como creen aquellos para quienes dios es el alma del mundo, sino sobre los siervos. Dios sumo es un ente eterno, infinito, absolutamente perfecto: pero un ente cualquiera perfecto sin dominio no es dios señor. Pues decimos, dios mío, dios vuestro, dios de *Israel*, dios de dioses, y señor de señores; pero no decimos eterno mío, eterno vuestro, eterno de *Israel*, eterno de dioses; no decimos infinito mío, o perfecto mío. Estas denominaciones no tienen relación con los siervos. La voz dios[b] significa con frecuencia dueño: pero todo dueño no es dios. La dominación de un ente espiritual constituye un dios, la verdadera al verdadero, la suma al sumo, la ficticia al ficticio. Y de la verdadera dominación se sigue que un dios verdadero es vivo, inteligente y poderoso; de las demás perfecciones que es sumo o sumamente perfecto. Es eterno e infinito, omnipotente y omnisciente, es decir, dura desde la eternidad hasta la eternidad y está presente desde el principio hasta el infinito: lo rige todo; lo conoce todo, lo que sucede y lo que puede suceder. No es la eternidad y la infinitud, sino eterno e infinito; no es la duración y el espacio, sino que dura y está presente. Dura siempre y está presente en todo lugar, y existiendo siempre y en todo lugar, constituye a la duración y al espacio. Puesto que cada partícula de espacio existe *siempre*, y cada momento indivisible de duración está en *algún lugar*, ciertamente el constructor y señor de todas las cosas no será *nunca*, *ningún lugar*. Toda alma siente en distintos tiempos y en diversos órganos de los sentidos y de los movimientos y es la misma persona indivisible. Las partes se dan sucesivamente en la duración, coexistentes en el espacio, pero ni unas ni otras en la persona humana o en su principio pensante; y mucho menos en la sustancia pensante de dios. Todo hombre, en tanto que cosa sentiente, es uno y el mismo hombre durante su vida en todos y cada uno de los órganos de sus sentidos. Dios es uno y el mismo dios siempre y en todo lugar. Es omnipotente no sólo *virtualmente* sino *sustancialmente*: pues lo virtual no puede subsistir sin la sustancia. En él[c] se hallan contenidas y se mueven todas las cosas, pero sin mutua interferencia. Dios nada sufre por el movimiento de los cuerpos: éstos no experimentan resistencia alguna por la omnipresencia de dios. Está reconocido que un dios sumo existe necesariamente: y con la misma necesidad existe *siempre* y en *todo lugar*. De donde también es todo él semejante a sí mismo, todo ojo, todo oído, todo cerebro, todo brazo, todo fuerza de sentir, de entender, de actuar, pero en modo alguno a la manera humana, o a la manera corporal, sino de una manera totalmente desconocida para nosotros. Como el ciego no tiene idea de los colores, de igual modo nosotros no tenemos idea de los modos con los que dios sapientísimo siente y entiende todas las cosas. Absolutamente desprovisto de todo cuerpo y figura corporal, no puede por ello ser visto ni oído, ni tocado, ni debe ser venerado bajo forma de cosa corpórea alguna. Tenemos ideas de sus atributos, pero que sea la sustancia de alguna cosa lo ignoramos por completo. Solamente vemos las formas y colores de los cuerpos, sólo oímos los sonidos, sólo tocamos las superficies externas, olemos los meros olores y gustamos los sabores: pero las sustancias interiores no las conocemos con ningún sentido, ni con ninguna acción refleja; mucho menos tenemos una idea de la sustancia de dios. A éste le conocemos tan sólo por sus propiedades y atributos y por las sapientísimas y óptimas estructuras y causas finales de las cosas y le admiramos por las perfecciones, pero le veneramos y damos culto por el dominio. Pero le damos culto como siervos, y un dios sin dominio, providencia y causas finales no es nada más que hado y naturaleza. De la ciega necesidad metafísica, que es también la misma siempre y en todo lugar, no surge ninguna variación de las cosas. Toda la variedad de cosas, establecidas según los lugares y los tiempos, solamente pudo originarse de las ideas y voluntad de un ente necesariamente existente. Sé dice alegóricamente que dios ve, oye, habla, ríe, ama, tiene odio, desea, da, recibe, se alegra, está airado, lucha, fabrica, funda, construye. Pues todo discurso sobre dios se produce mediante alguna semejanza a partir de las cosas humanas, ciertamente no perfecta, pero algo semejante. Esto respecto a dios de quien, efectivamente, corresponde hablar en filosofía natural a partir de los fenómenos.

Hasta aquí he expuesto los fenómenos de los cielos y de nuestro mar por la fuerza de la gravedad, pero todavía no he asignado causa a la gravedad. Efectivamente esta fuerza surge de alguna causa que penetra hasta los centros del Sol y de los planetas sin disminución de la fuerza; y la cual actúa, no según la cantidad de las *superficies* de las partículas hacia las cuales actúa (como suelen hacer las causas mecánicas) sino según la cantidad de materia *sólida*; y cuya acción se extiende por todas partes hasta distancias inmensas, decreciendo siempre como el cuadrado de las distancias. La gravedad hacia el Sol se compone de las gravedades hacia cada una de las partículas del Sol, y separándose del Sol decrece exactamente en razón del cuadrado de las distancias hasta más allá de la órbita de Saturno, como se evidencia por el reposo de los afelios de los planetas, y hasta los últimos afelios de los cometas, si semejantes afelios están en reposo. Pero no he podido todavía deducir a partir de los fenómenos la razón de estas propiedades de la gravedad y yo no imagino hipótesis. Pues, lo que no se deduce de los fenómenos, ha de ser llamado *Hipotesis*; y las hipótesis, bien metafísicas, bien físicas, o de cualidades ocultas, o mecánicas, no tienen lugar dentro de la *Filosofía experimental*. En esta filosofía las proposiciones se deducen de los fenómenos, y se convierten en generales por inducción. Así, la impenetrabilidad, la movilidad, el ímpetu de los cuerpos y las leyes de los movimientos y de la gravedad, llegaron a ser esclarecidas. Y bastante es que la gravedad exista de hecho y actúe según las leyes expuestas por nosotros y sea suficiente para todos los movimientos de los cuerpos celestes y de nuestro mar.

Bien podríamos ahora añadir algo de cierto espíritu sutilísimo que atraviesa todos los cuerpos gruesos y permanece latente en ellos; por cuya fuerza y acciones las partículas de los cuerpos se atraen entre ellas a las mínimas distancias y una vez que están contiguas permanecen unidas; y los cuerpos eléctricos actúan a distancias mayores, tanto repeliendo como atrayendo a los corpúsculos vecinos; y la luz se emite, se refleja, se refracta e inflexiona y calienta a los cuerpos; y toda sensación es excitada, y los miembros de los animales se mueven a voluntad, a saber mediante las vibraciones de ese espíritu propagadas por los filamentos sólidos de los nervios desde los órganos externos de los sentidos hasta el cerebro y desde el cerebro hacia los músculos. Pero esto no puede exponerse en pocas palabras; y tampoco está disponible un número suficiente de experimentos mediante los cuales deben determinarse y mostrarse exactamente las leyes de las acciones de este espíritu.