



EN 2023



TRIGONOMETRIA I

AULA 05

Prof. Victor So





Sumário

INTRODUÇÃO	5
1. ÂNGULOS E SUAS MEDIDAS	5
1.1. DEFINIÇÃO	5
1.2. UNIDADES DE MEDIDAS	6
1.2.1. SISTEMA SEXAGESIMAL	6
1.2.2. SISTEMA CIRCULAR	7
1.2.3. CONVERSÃO DE UNIDADES DE MEDIDAS	10
1.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS	12
1.4. RELAÇÃO ENTRE OS ÂNGULOS	14
1.4.1. ÂNGULOS COMPLEMENTARES	14
1.4.2. ÂNGULOS SUPLEMENTARES	14
1.4.3. ÂNGULOS REPLEMENTARES	15
2. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	16
2.1. PRINCIPAIS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS	16
2.2. RAZÕES DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES	17
2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS	18
3. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	22
3.1. PLANO CARTESIANO	22
3.2. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA	24
3.2.1. FUNÇÃO DE EULER	25
3.2.2. ARCOS CONGRUENTES	30
3.2.3. RAZÃO SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	33
3.2.4. RAZÃO TANGENTE NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO	37
4. OUTRAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS	41
5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	44
5.1. DEFINIÇÕES E GRÁFICOS	44
5.1.1. FUNÇÃO SENO	44
5.1.2. FUNÇÃO COSSENO	45
5.1.3. FUNÇÃO TANGENTE	46
5.1.4. FUNÇÃO COTANGENTE	47
5.1.5. FUNÇÃO SECANTE	48
5.1.6. FUNÇÃO COSSECANTE	49
5.2. MONOTONICIDADE DAS FUNÇÕES NOS QUADRANTES	50
5.3. TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	51
5.3.1. TRANSLAÇÃO HORIZONTAL	51
5.3.2. TRANSLAÇÃO VERTICAL	51
5.3.3. MUDANÇA DE PERÍODO	52



5.3.4. MUDANÇA DA AMPLITUDE DA FUNÇÃO	53
5.3.5. APLICAÇÃO DO MÓDULO	54
6. FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS	54
6.1. DEFINIÇÕES	54
6.1.1. FUNÇÃO ARCO-SENO	54
6.1.2. FUNÇÃO ARCO-COSSENO	55
6.1.3. FUNÇÃO ARCO-TANGENTE	56
6.2. PROBLEMAS COM FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS	57
7. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	61
7.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS	61
7.2. ARCO DUPLO, ARCO TRIPLO E ARCO METADE	64
7.2.1. FÓRMULAS DE ARCO DUPLO	64
7.2.2. FÓRMULAS DE ARCO TRIPLO	65
7.2.3. FÓRMULAS DE ARCO METADE	66
7.3. FÓRMULAS DE WERNER	69
7.4. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE	70
8. RESUMO	76
8.1. MEDIDAS USUAIS	76
8.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS	76
8.3. RELAÇÃO FUNDAMENTAL	77
8.4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES	77
8.5. TRANSFORMAÇÕES	77
8.5.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS	77
8.5.2. ARCO DUPLO	78
8.5.3. ARCO TRIPLO	78
8.5.4. ARCO METADE	78
8.5.5. FÓRMULAS DE WERNER	79
8.5.6. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE	79
9. QUESTÕES NÍVEL 1	79
GABARITO	109
RESOLUÇÃO	111
10. QUESTÕES NÍVEL 2	171
GABARITO	179
RESOLUÇÃO	180
11. QUESTÕES NÍVEL 3	200



GABARITO	203
RESOLUÇÃO	203
12. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA	212
13. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	212
14. VERSÕES DAS AULAS	213



INTRODUÇÃO

Olá,

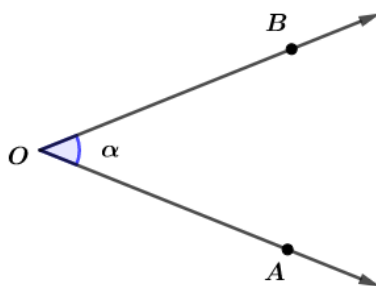
Vamos iniciar o estudo sobre trigonometria. A trigonometria é uma parte da Matemática que estuda a relação entre os ângulos e os lados de um triângulo. Esse tema é muito cobrado nos concursos militares. Veremos todos os conceitos fundamentais que precisamos para resolver as questões dos concursos e vamos aprender a resolver cada tipo de questão das provas anteriores!

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

1. ÂNGULOS E SUAS MEDIDAS

1.1. DEFINIÇÃO

Antes de iniciarmos o estudo da trigonometria, vamos entender alguns conceitos básicos de ângulo. Um **ângulo** é definido pela **união de duas semirretas com uma origem comum**, veja o exemplo abaixo:



Nesse caso, temos que o ponto O é a origem comum das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Podemos denotar o ângulo acima por $\widehat{AOB}$ ou $\angle AOB$. Usualmente, usamos letras minúsculas gregas para nomear os ângulos, as mais comuns são: α (alfa), β (beta), θ (teta) e γ (gama). A título de curiosidade veja a tabela abaixo com as letras gregas minúsculas e seus respectivos nomes:



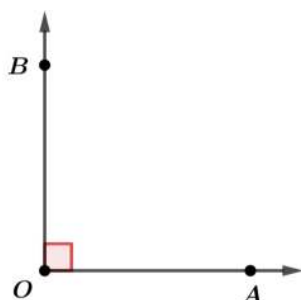
Letra grega minúscula	Nome	Letra grega minúscula	Nome	Letra grega minúscula	Nome
α	Alfa	θ	Teta	μ	Mi
β	Beta	λ	Lambda	ρ	Rô
γ	Gama	ϵ	Épsilon	ϕ	Fi
δ	Delta	η	Eta	ω	Ômega

Para cada ângulo associamos um número real, esse número é chamado de medida angular. Vamos estudar os dois principais sistemas de medidas angulares: o sistema sexagesimal e o sistema radial.

1.2. UNIDADES DE MEDIDAS

1.2.1. SISTEMA SEXAGESIMAL

Inicialmente, vamos definir o conceito de **ângulo reto**. Dizemos que um ângulo é reto quando as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são **perpendiculares**, geometricamente.



Perceba que o símbolo usado para o ângulo reto é um quadrado. Normalmente, esse quadrado vem acompanhado de um ponto no meio.

No sistema sexagesimal, um ângulo reto é dividido em 90 partes iguais e cada uma dessas partes é chamada de grau. **A unidade do grau é definida por 1° .**

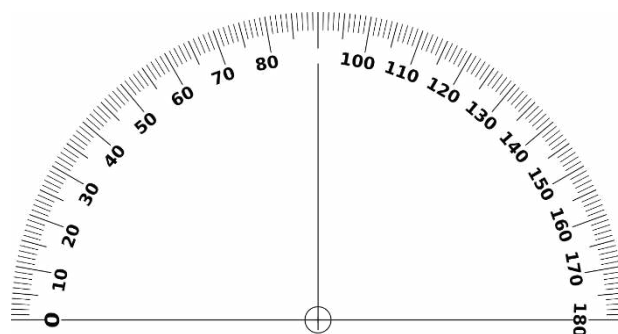
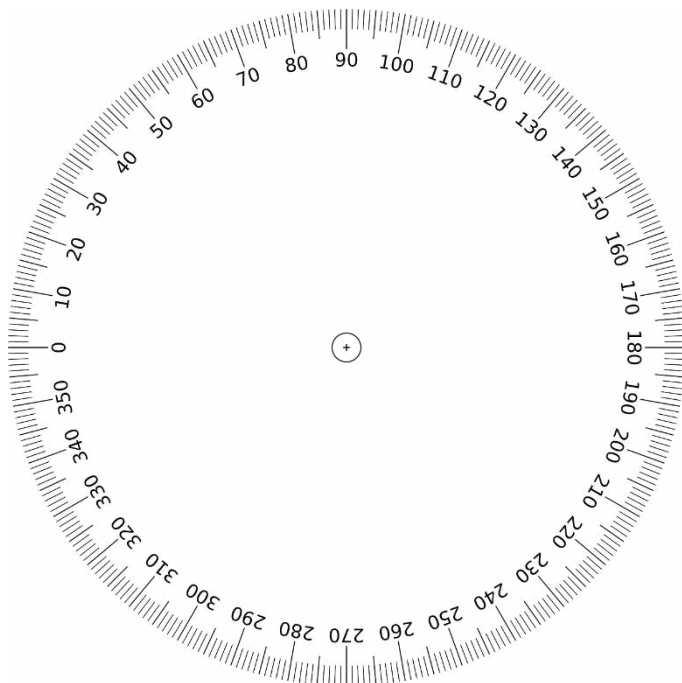
Como o sistema sexagesimal é um sistema de numeração de base 60, temos que as subdivisões do grau são baseadas nesse sistema. Um grau é equivalente a 60 minutos (representado por $60'$) e 1 minuto é equivalente a 60 segundos (representado por $60''$). Veja abaixo as correspondências:

$$\begin{aligned}\text{ângulo reto} &= 90^\circ \\ 1^\circ &= 60' \text{ (60 minutos)}\end{aligned}$$



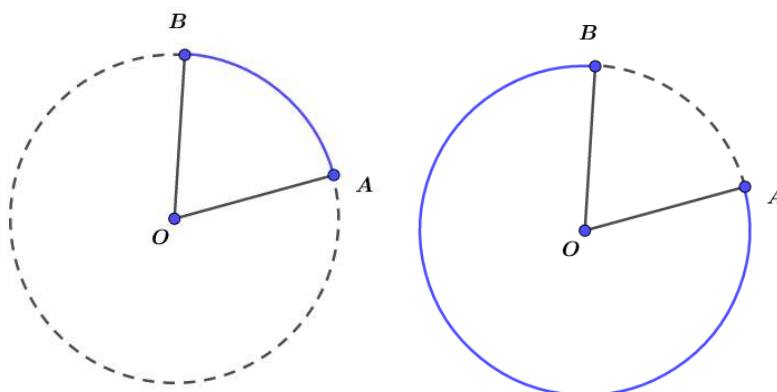
$$1' = 60'' \text{ (60 segundos)}$$

Assim, podemos ver que uma circunferência é composta por 4 ângulos retos, logo podemos afirmar que a medida angular total de uma circunferência é 360° e a medida angular de uma semicircunferência (metade de uma circunferência) é 180° . As figuras abaixo mostram uma circunferência e uma semicircunferência, ambas na unidade grau.



1.2.2. SISTEMA CIRCULAR

Antes de estudarmos o sistema circular, precisamos entender o que é um arco de circunferência. Um arco de circunferência é definido por dois pontos distintos na circunferência. Veja o exemplo abaixo:



Note que podemos ter dois arcos de circunferência, um maior e outro menor. Normalmente, usamos o menor.

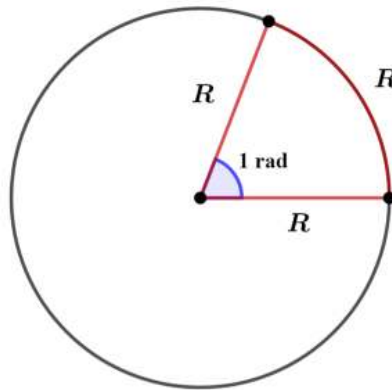
Um **arco de circunferência** possui **medida angular** e **medida linear**, este também é chamado de comprimento do arco. É muito comum confundir esses termos. A medida angular de um arco independe do tamanho do raio da circunferência, enquanto o comprimento do arco depende do



raio da circunferência. Podemos relacionar a medida angular de um arco com sua medida linear de acordo com a seguinte fórmula:

$$\widehat{AOB} = \frac{\text{comprimento do arco } AB}{\text{raio}} \text{ rad}$$

A fórmula acima resulta na medida angular no **sistema circular**, cuja **unidade de medida é o radiano** que pode ser denotada por **rad**. 1 **rad** corresponde a 1 raio da circunferência conforme a figura a seguir:



Por vezes, podemos simplesmente ocultar o termo **rad**. Se isso ocorrer, devemos considerar que ângulo está na unidade radiano.

O comprimento de uma circunferência é igual a $2\pi R$, em que **π é chamado de “pi” e equivale a aproximadamente 3,14** e R é o raio da circunferência. Assim, aplicando a fórmula para calcular a medida angular de uma circunferência, obtemos:

$$\alpha = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{raio}} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

Veja que a circunferência possui medida angular igual a $2\pi \text{ rad}$, logo uma semicircunferência possui $\pi \text{ rad}$.

Podemos calcular o comprimento de um arco AB de circunferência pela seguinte fórmula:

$$AB = \alpha R$$

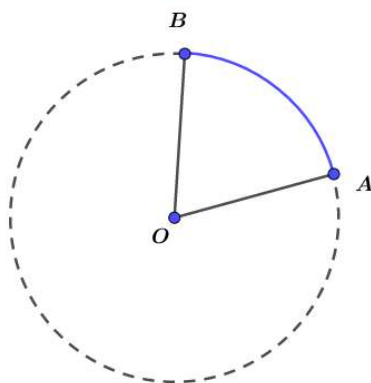
Em que α é o ângulo em radianos e R é o raio da circunferência.

ESCLARECENDO!



Observações:

- 1) A medida do arco menor AB , em **graus**, é igual à medida do ângulo central $\widehat{AOB}$, também em graus.

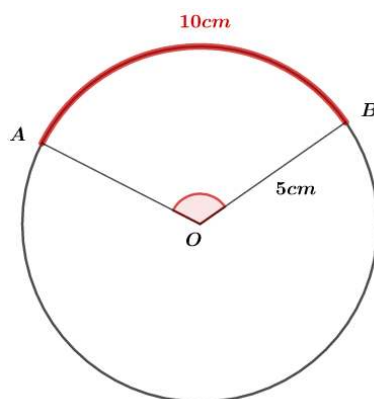


- 2) A medida angular do arco, em **radianos**, somente será igual ao seu comprimento quando $R = 1$.
3) Podemos aproximar o número π como $\pi \approx 22/7$.

Vamos ver alguns exemplos de aplicação.

1) Um arco de circunferência AB mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos.

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$A\hat{O}B = \frac{\text{comprimento } AB}{\text{comprimento raio}}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 2 \text{ rad}$$

2) O arco AB possui medida angular igual a 5 rad, determine o comprimento do arco sabendo que ele pertence a uma circunferência de raio 4 cm.

Vamos usar a fórmula da medida angular do arco:

$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco } AB}{\text{raio}}$$

Do enunciado:

$$5 = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 20 \text{ cm}$$



1.2.3. CONVERSÃO DE UNIDADES DE MEDIDAS

Vamos aprender nesse tópico como transformamos um ângulo em graus para radiano e vice-versa. Para isso, vamos tomar a medida angular de uma semicircunferência como referência. Sabemos que ela é igual a 180° e também a $\pi \text{ rad}$. Assim, podemos escrever a equivalência:

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \Leftrightarrow 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad}$$

Para converter um ângulo de radianos para graus, basta multiplicar o ângulo por $180/\pi$. E para converter de graus para radiano, basta multiplicar o ângulo por $\pi/180$. Veja os exemplos:

1) Converta o ângulo 30° para radianos.

Seja $\theta = 30^\circ$. Assim, temos:

$$\theta = 30^\circ = 30 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

2) Converta o ângulo $2\pi/3$ para graus.

Seja $\theta = 2\pi/3$, logo:

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 120^\circ$$

3) Um arco de circunferência AB possui 16 cm de comprimento e seu ângulo central é igual a 80° . Determine a medida do raio da circunferência.

Vamos usar a fórmula da medida angular do arco:

$$\alpha = \frac{\text{comprimento do arco } AB}{\text{raio}}$$

Para usar essa fórmula, o ângulo central precisa estar em radianos. Então, vamos converter o ângulo 80° para radianos:

$$\alpha = 80^\circ = 80 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{4\pi}{9} \text{ rad}$$

Sabemos que o comprimento do arco mede 16 cm, logo:

$$\frac{4\pi}{9} = \frac{16}{R} \Rightarrow 4\pi R = 16 \cdot 9 \Rightarrow R = \frac{16 \cdot 9}{4\pi} = \frac{4 \cdot 9}{\pi} = \frac{36}{\pi} \text{ cm}$$

4) Expresse o ângulo $45^\circ 20' 10''$ em radianos.

Sabemos que $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ e $1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$, logo:

$$10'' = 10 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = \left(\frac{1}{360}\right)^\circ$$

$$20' = 20 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{3}\right)^\circ$$



Assim, temos:

$$45^{\circ}20'10'' = \left(45 + \frac{1}{3} + \frac{1}{360}\right)^{\circ} = \left(\frac{16200 + 120 + 1}{360}\right)^{\circ} = \left(\frac{16321}{360}\right)^{\circ}$$

Convertendo o ângulo para radianos:

$$\left(\frac{16321}{360}\right)^{\circ} = \frac{16321}{360} \cdot \frac{\pi}{180}$$

Usando a aproximação $\pi \cong 3,14$, obtemos:

$$\left(\frac{16321}{360}\right)^{\circ} \cong \frac{16321}{360} \cdot \frac{3,14}{180} = 0,79 \text{ rad}$$



1. Transforme para radianos os seguintes ângulos dados em graus:

- a) 120°
- b) 135°
- c) 150°
- d) 210°
- e) 225°
- f) 240°
- g) 300°
- h) 315°
- i) 330°
- j) 360°

Resolução:

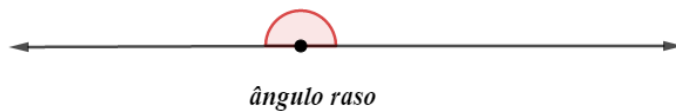
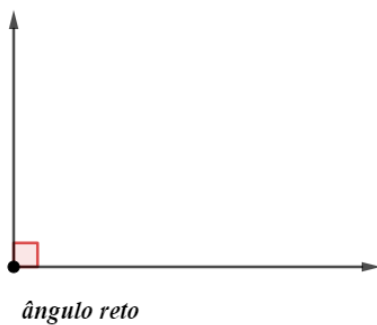
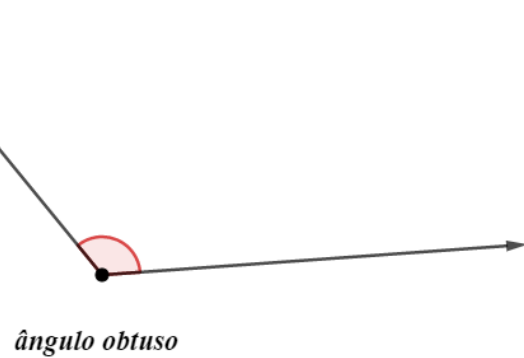
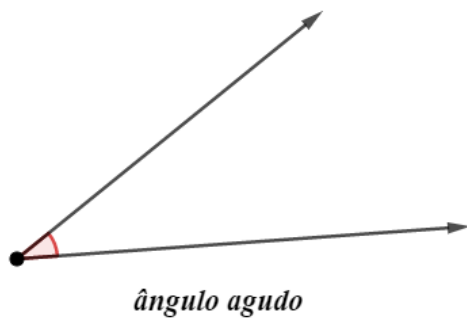


Arco em graus	Arco em radianos
120°	$120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^2_{120^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^3_{180^\circ}} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$
135°	$135^\circ = 135^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^3_{135^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^4_{180^\circ}} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
150°	$150^\circ = 150^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^5_{150^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^6_{180^\circ}} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$
210°	$210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^7_{210^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^6_{180^\circ}} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$
225°	$225^\circ = 225^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^5_{225^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^4_{180^\circ}} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$
240°	$240^\circ = 240^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^4_{240^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^3_{180^\circ}} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$
300°	$300^\circ = 300^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^5_{300^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^3_{180^\circ}} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$
315°	$315^\circ = 315^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^7_{315^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^4_{180^\circ}} = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$
330°	$330^\circ = 330^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^{11}_{330^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^6_{180^\circ}} = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$
360°	$360^\circ = 360^\circ \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = {}^2_{360^\circ} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{{}^1_{180^\circ}} = 2\pi \text{ rad}$

Gabarito: a) $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ b) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ c) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$ d) $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$ e) $\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$ f) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$ g) $\frac{5\pi}{3} \text{ rad}$ h) $\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$ i) $\frac{11\pi}{6} \text{ rad}$ j) $2\pi \text{ rad}$

1.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

Dizemos que um ângulo é agudo quando ele é menor que 90° e é obtuso quando ele é maior que 90° . Quando o ângulo é igual a 180° , dizemos que ele é raso. Veja as figuras abaixo:



2. Classifique os ângulos abaixo em agudo, obtuso, reto ou raso.

- a) 30°
- b) 120°
- c) 90°
- d) π
- e) $\pi/2$
- f) $2\pi/5$

Comentários

- a) 30° é menor que 90° , logo é agudo.
- b) 120° é maior que 90° , logo é obtuso.
- c) 90° é ângulo reto.
- d) π rad é igual a 180° , logo é raso.
- e) $\pi/2$ rad é igual a 90° , logo é reto.

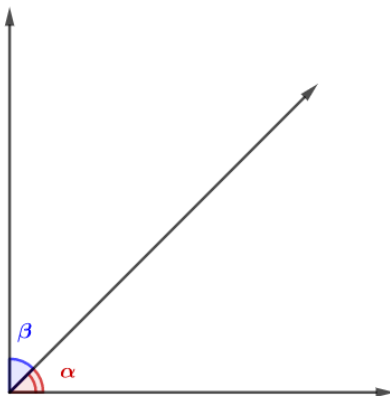


f) Esse ângulo é menor que um ângulo reto $\pi/2$, logo é agudo.

1.4. RELAÇÃO ENTRE OS ÂNGULOS

1.4.1. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Dois ângulos são complementares quando sua soma é 90° ou $\pi/2$ rad.



α e β são ângulos complementares:

$$\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

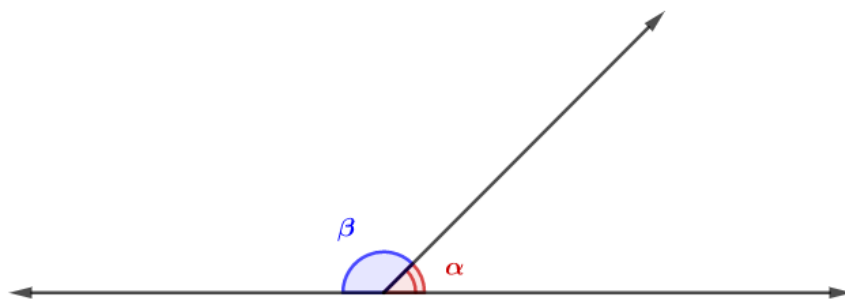
Note que para encontrar o complementar de um ângulo, basta resolver a equação:

$$\alpha = 90^\circ - \beta$$

Ou seja, basta verificar quanto falta para o ângulo completar 90° .

1.4.2. ÂNGULOS SUPLEMENTARES

Dois ângulos são suplementares quando sua soma é 180° ou π rad.



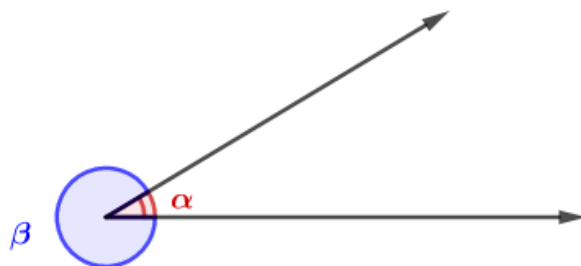
α e β são ângulos suplementares:

$$\alpha + \beta = 180^\circ = \pi$$



1.4.3. ÂNGULOS REPLEMENTARES

Dois ângulos são replementares quando sua soma é 360° ou $2\pi \text{ rad}$.



α e β são replementares:

$$\alpha + \beta = 360^\circ = 2\pi$$



3. Considere os ângulos do conjunto $\{30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 300^\circ\}$, verifique quais são complementares, suplementares e replementares.

Comentários

Ângulos complementares: 30° e 60°

Ângulos suplementares: 30° e 150° , 45° e 135°

Ângulos replementares: 60° e 300°

4. Encontre o que se pede, na mesma unidade de medida:

a) Complementar de 45° .

b) Complementar de 60° .

c) Complementar de $\pi/6$.

d) Suplementar de 30° .

e) Suplementar de $\pi/4$.

f) Replementar de $\pi/2$.

Comentários

a) $\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

b) $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$



$$c) \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - \pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \pi/3$$

$$d) \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

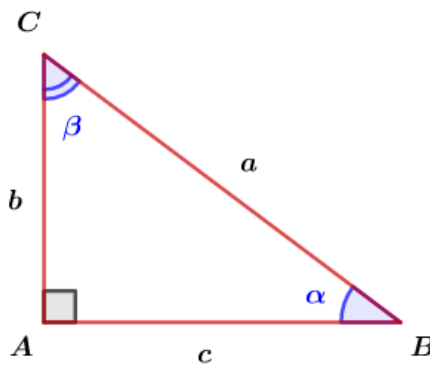
$$e) \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = 3\pi/4$$

$$f) \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi - \pi}{2} = 3\pi/2$$

2. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

2.1. PRINCIPAIS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos estudar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Dizemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos é igual a 90° . Observe o triângulo ABC abaixo:



No triângulo retângulo, chamamos de hipotenusa o lado BC e de catetos os lados AB e AC . **Lembre-se que a hipotenusa sempre será o maior lado!**

Na trigonometria temos as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Elas são dadas por:

$$\text{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

Note que o cateto oposto ao ângulo α é o lado em que ele “enxerga”, ou seja, o lado de medida b . E o cateto adjacente é o lado que é vizinho a ele, ou seja, o lado de medida c .

Uma forma de memorizar essas razões trigonométricas é lembrar do mnemônico:

SOH CAH TOA

SOH significa **S**eno igual ao **O**posto sobre a **H**ipotenusa.



CAH significa Cosseno igual ao Adjacente sobre a Hipotenusa.

TOA significa Tangente igual ao Oposto sobre o Adjacente.

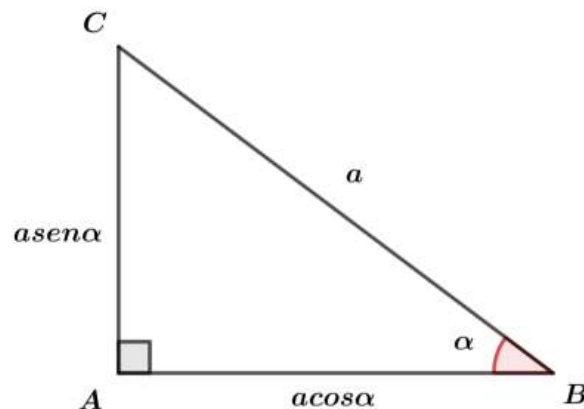
Perceba que também podemos escrever tangente como:

$$tg\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Usando as razões trigonométricas, podemos escrever os catetos em função da hipotenusa e do seno e cosseno:

$$b = a sen\alpha \text{ e } c = a cos\alpha$$



Ainda, das relações do triângulo retângulo, temos o **Teorema de Pitágoras**:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

O Teorema de Pitágoras afirma que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Usando o Teorema de Pitágoras, encontramos a **relação fundamental** da trigonometria:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

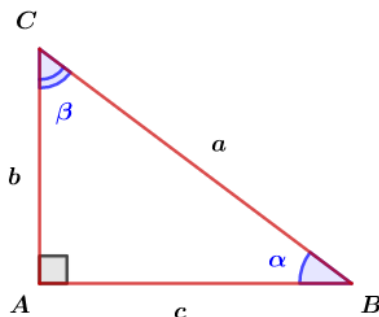
$$a^2 = (a sen\alpha)^2 + (a cos\alpha)^2$$

$$a^2 = a^2 sen^2\alpha + a^2 cos^2\alpha$$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

2.2. RAZÕES DE ÂNGULOS COMPLEMENTARES

Consideremos o seguinte triângulo retângulo:



Em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos sempre é igual a $\pi \text{ rad}$ ou 180° , logo no caso acima:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{2} + \alpha + \beta = \pi$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow \alpha$ e β são complementares

Dessa relação, temos as seguintes consequências:

$$\text{sen} \alpha = \frac{b}{a} \text{ e } \cos \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{b}{c} \text{ e } \text{tg} \beta = \frac{c}{b} \Rightarrow \text{tg} \alpha = \frac{1}{\text{tg} \beta}$$



ESQUEMATIZANDO

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen} \alpha = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta$$

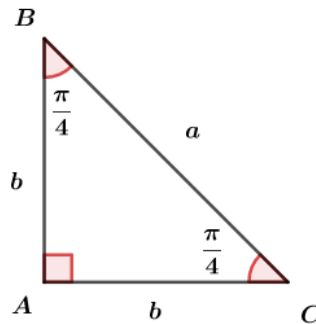
$$\text{tg} \alpha = \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{1}{\text{tg} \beta}$$

2.3. ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ são considerados ângulos notáveis. Vamos calcular o valor do seno, cosseno e tangente desses ângulos.

1) $\pi/4$:

Considere o seguinte triângulo isósceles:



Através do Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + b^2$$

$$a^2 = 2b^2$$

$$a = \sqrt{2}b$$

Usando a definição de seno, cosseno e tangente, obtemos:

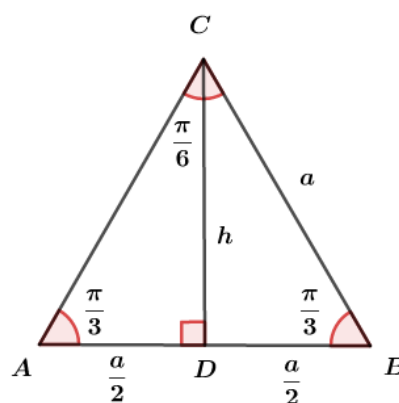
$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{b}{b} = 1$$

2) $\pi/6$ e $\pi/3$:

Agora, considere o triângulo equilátero:



Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4}$$



$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

Calculando o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Podemos construir a tabela das razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

ATENÇÃO
DECORE!



	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



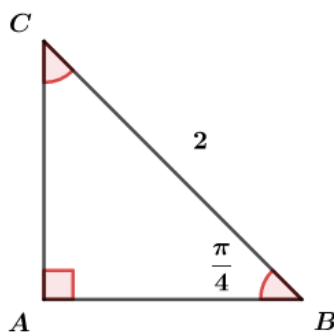
***Dica de memorização:**

Você pode lembrar apenas dos valores para o seno na seguinte ordem: $1/2$, $\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{3}/2$. O cosseno será a ordem inversa: $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{2}/2$ e $1/2$. Para a tangente, basta dividir o valor do seno pelo cosseno.

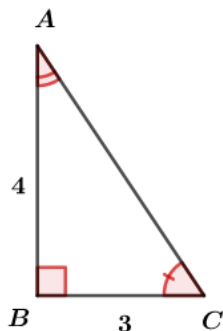


5. Dados os triângulos abaixo, calcule o valor dos lados que faltam:

a)



b)



Resolução:

a) Conhecemos o valor do $\sin(\pi/4)$, podemos calcular o valor dos catetos usando a seguinte razão:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$AB = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

b) Basta aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AC = \sqrt{25} = 5$$



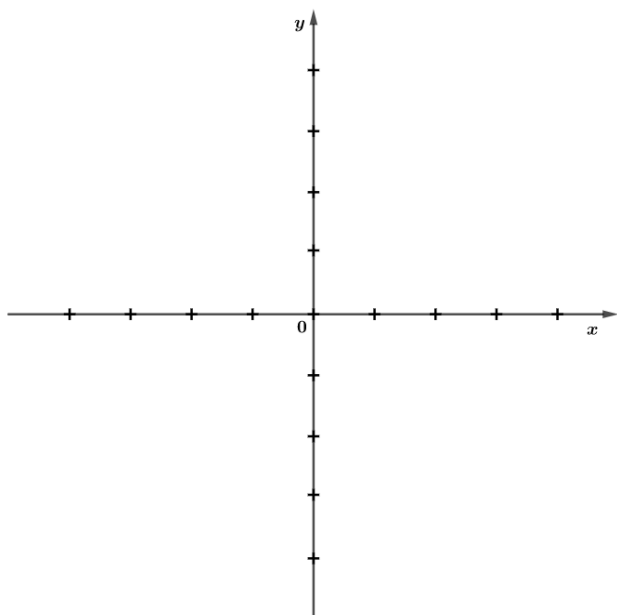
Gabarito: a) $AB = \sqrt{2}$ b) $AC = 5$

3. CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Antes de estudar o círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico, vamos entender o que é um sistema de coordenadas cartesianas.

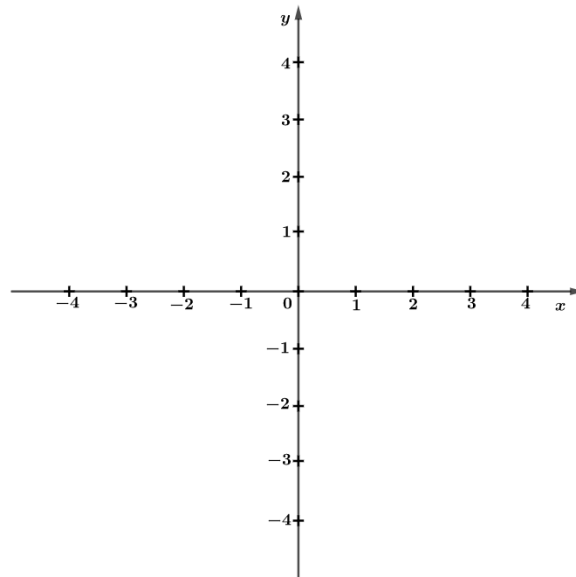
3.1. PLANO CARTESIANO

Um plano cartesiano é definido por dois eixos reais e, por isso, dizemos que ele é o plano $\mathbb{R}^2$. Denominamos o eixo horizontal como o eixo das abscissas (eixo Ox ou, simplesmente, eixo x) e o eixo vertical como o eixo das ordenadas (eixo Oy ou eixo y), eles são perpendiculares entre si. Esses eixos se interceptam em um único ponto chamado de origem. A figura abaixo representa o plano cartesiano:

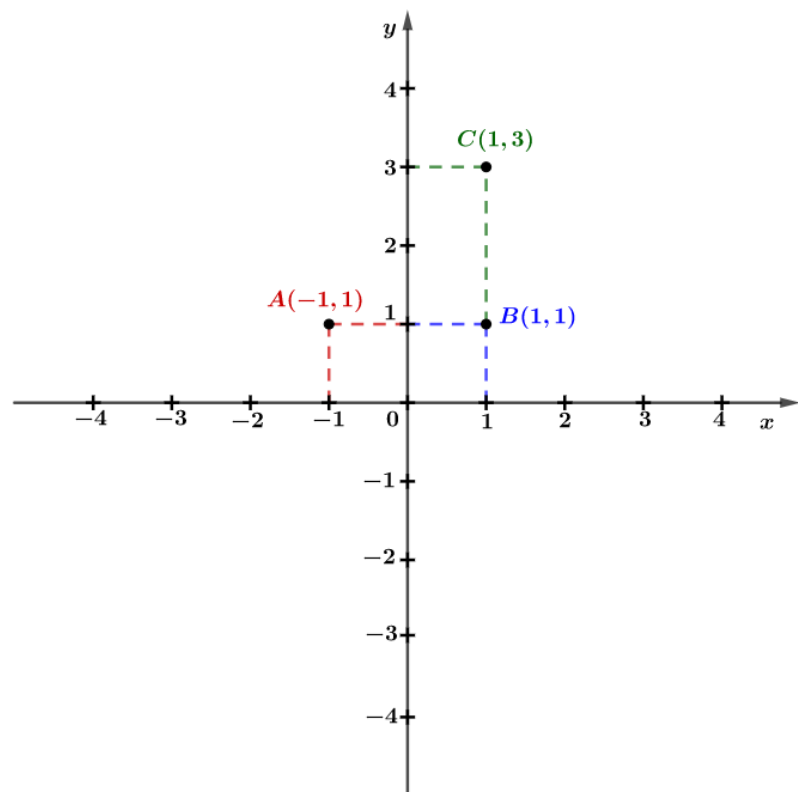


Note que o eixo x possui uma seta à extremidade direita e o eixo y possui uma seta para cima. Essas setas representam a ordenação dos números no eixo. Tomando a origem como referência, todos os pontos acima da origem possuem ordenada positiva (eixo y) e todos os pontos à direita da origem possuem abscissa positiva (eixo x). Desse modo, o sentido contrário àqueles serão os pontos que possuem ordenada e abscissa negativas.

Veja a ordenação dos números no diagrama abaixo:



Vamos representar alguns pontos no plano. Preliminarmente, devemos entender que pontos são pares ordenados no plano $\mathbb{R}^2$, também podemos entender esses pares ordenados como coordenadas. Sejam os pontos A, B, C tais que $A = (-1, 1)$, $B = (1, 1)$ e $C = (1, 3)$. Para representar esses pontos no gráfico, devemos lembrar que o primeiro número do par ordenado é a abscissa do ponto e o segundo número é a sua ordenada. Então, para o ponto $A(-1, 1)$, temos $x_a = -1$ e $y_a = 1$. Como x_a é negativo, ele está à esquerda da origem e como y_a é positivo, ele está acima da origem. Assim, A, B, C estão localizados do seguinte modo:





O plano pode ser dividido em quadrantes. Veja o diagrama ao lado:

Os quadrantes são definidos de acordo com o sinal das coordenadas.

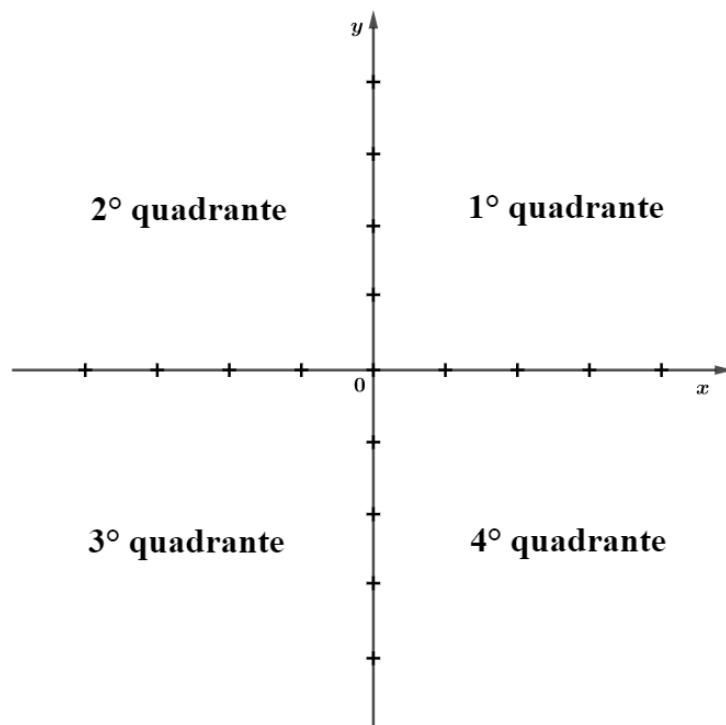
1º quadrante $\rightarrow x > 0$ e $y > 0$

2º quadrante $\rightarrow x < 0$ e $y > 0$

3º quadrante $\rightarrow x < 0$ e $y < 0$

4º quadrante $\rightarrow x > 0$ e $y < 0$

Perceba que os pontos que estão localizados nos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante. Por esse fato, dizemos que o plano cartesiano é formado pelos quatro quadrantes e pelos eixos coordenados.



3.2. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Aprenderemos o método formal do círculo trigonométrico e vamos simplificar seu entendimento com diversos exemplos. Iniciaremos pela definição de circunferência.

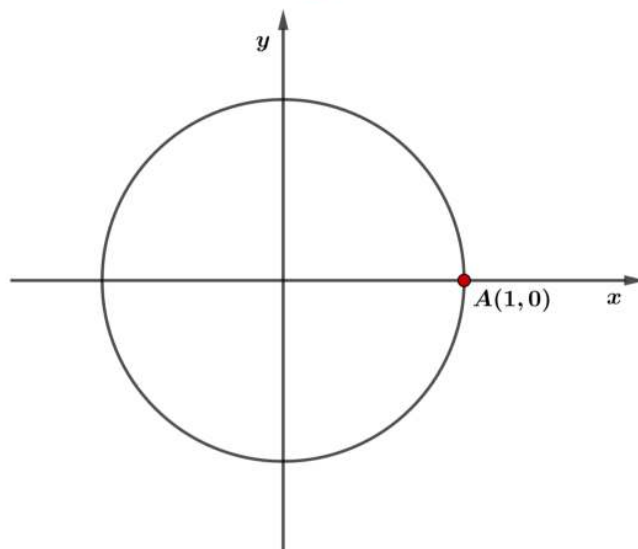
Uma circunferência pode ser definida pela seguinte equação no plano cartesiano:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Em que (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e R é seu raio.

Na trigonometria, usamos uma circunferência de raio unitário e centro na origem $(0,0)$ para definir o **ciclo trigonométrico** ou **círculo trigonométrico**:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



O **ponto $A(1, 0)$** é considerado como a **origem do círculo**. Usamos uma circunferência de raio unitário para que a medida do arco seja igual à medida do ângulo em radianos. Por isso, normalmente, usamos a medida angular em radianos para denotar os ângulos na circunferência.

Vamos entender seu funcionamento usando a função de Euler.

3.2.1. FUNÇÃO DE EULER

Seja E uma função que associa um número real t a um ponto $P(x, y)$ do círculo trigonométrico C .

$$E: \mathbb{R} \rightarrow C$$

E é chamado de função de Euler. Para cada número real t , temos associado um ponto $E(t) = (x, y)$ na circunferência. Ela funciona da seguinte forma:

Se $t = 0$, temos $E(0) = (1, 0)$. Esse ponto será a **origem** do círculo.

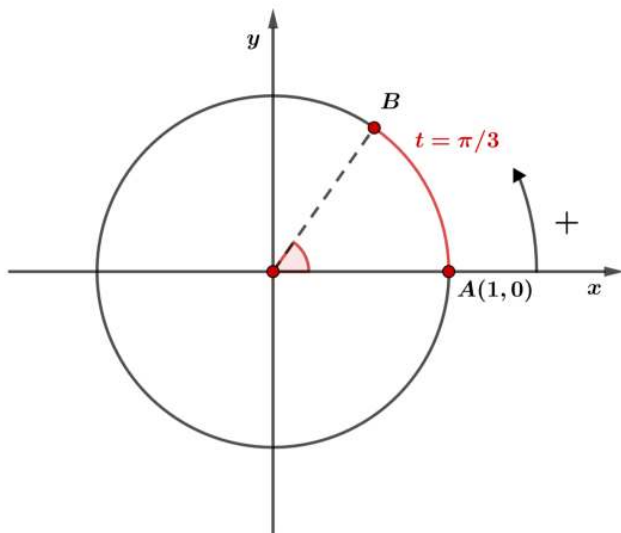
Se $t > 0$, temos que $E(t)$ será obtido desenhando-se um arco de medida t no **sentido anti-horário** na circunferência, a partir da origem $(1, 0)$. O ponto será a extremidade do arco.

Se $t < 0$, temos que $E(t)$ será obtido desenhando-se um arco de medida t no **sentido horário** na circunferência, a partir da origem $(1, 0)$. O ponto será a extremidade do arco.

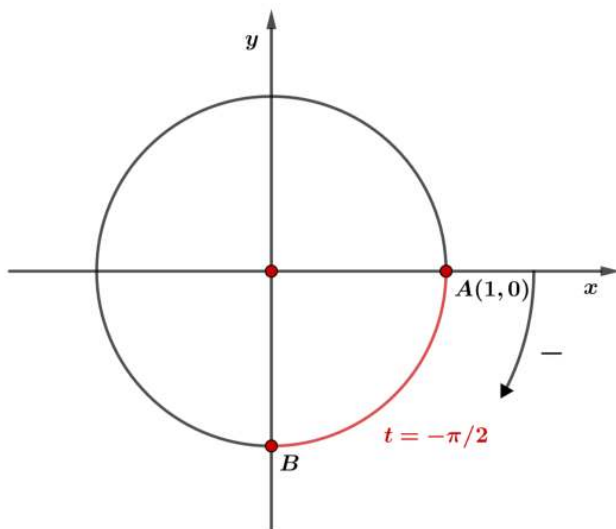
Pode parecer um pouco confuso no começo, mas após alguns exemplos você verá que é mais simples do que parece.

Exemplos:

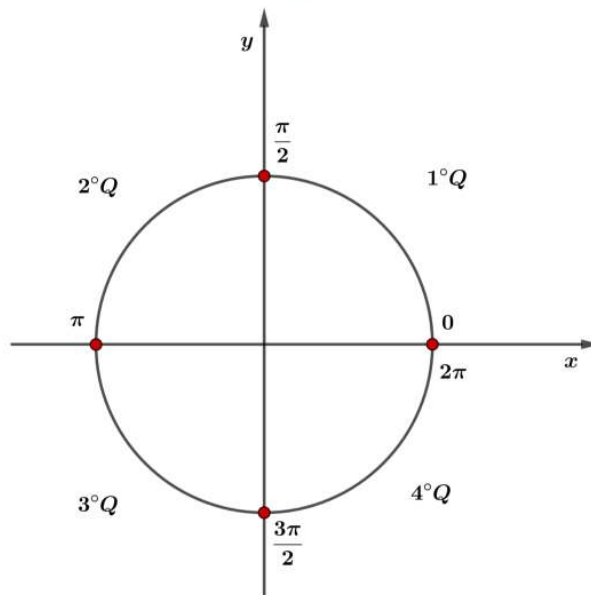
1) Vamos tomar $t = \pi/3$. Como esse valor é positivo, vamos desenhar um arco de medida $\pi/3$ no sentido anti-horário na circunferência trigonométrica:



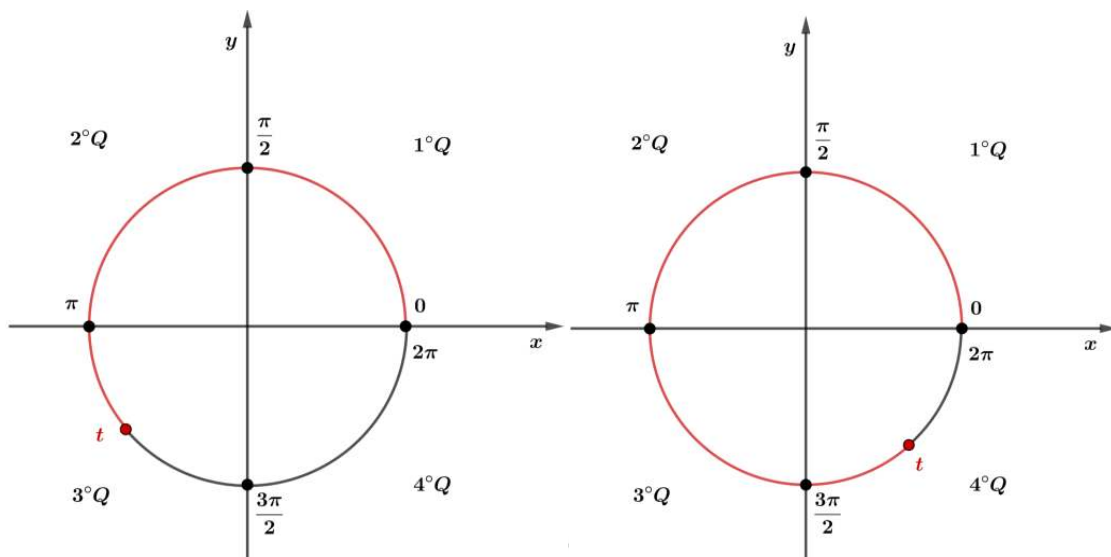
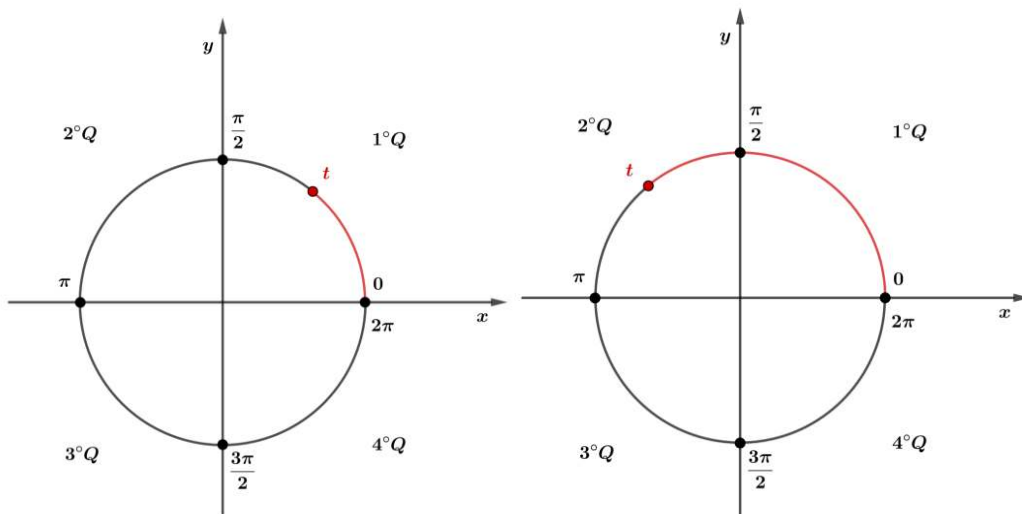
2) Vamos tomar $t = -\pi/2$. Note que o valor de t é negativo, logo devemos percorrer a circunferência no sentido horário:



Perceba que na prática seria como se estivéssemos enrolando um fio inextensível de comprimento t ao longo de um carretel, que é a circunferência. Então, podemos ver que a circunferência adota o sentido anti-horário para os valores positivos! Logo, podemos inserir os arcos de acordo com a seguinte figura:



Do sistema cartesiano, sabemos quais regiões representam os quadrantes e elas foram identificadas na figura. Preste atenção! Pois é importante entender quais regiões do plano representam os quadrantes! Vejamos alguns exemplos de arcos e suas localizações nos quadrantes.





Note que

$$t \in]0, \pi/2[\Rightarrow t \text{ pertence ao } 1^{\circ} \text{quadrante}$$

$$t \in]\pi/2, \pi[\Rightarrow t \text{ pertence ao } 2^{\circ} \text{quadrante}$$

$$t \in]\pi, 3\pi/2[\Rightarrow t \text{ pertence ao } 3^{\circ} \text{quadrante}$$

$$t \in]3\pi/2, 2\pi[\Rightarrow t \text{ pertence ao } 4^{\circ} \text{quadrante}$$

Para localizar os arcos nos quadrantes, também podemos usar a medida angular dos arcos em graus:

$$\alpha \in]0, 90^{\circ}[\Rightarrow \text{arco do } 1^{\circ}Q$$

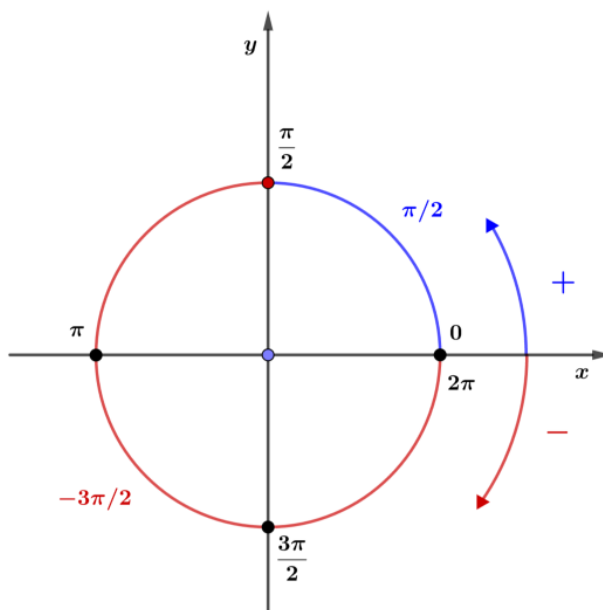
$$\alpha \in]90^{\circ}, 180^{\circ}[\Rightarrow \text{arco do } 2^{\circ}Q$$

$$\alpha \in]180^{\circ}, 270^{\circ}[\Rightarrow \text{arco do } 3^{\circ}Q$$

$$\alpha \in]270^{\circ}, 360^{\circ}[\Rightarrow \text{arco do } 4^{\circ}Q$$

Vamos ver mais alguns exemplos de aplicação da função de Euler.

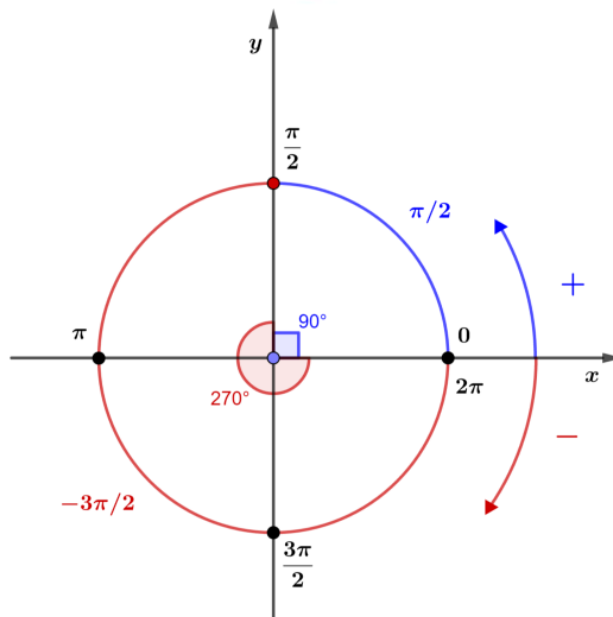
3) Agora, vamos tomar $t = \pi/2$ e $t = -3\pi/2$.



Note que podemos chegar no mesmo ponto percorrendo a circunferência no sentido horário ou anti-horário. Além disso, perceba que no sentido horário, devemos iniciar pela posição 2π e fazer $-3\pi/2$:

$$2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{4\pi - 3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Atenção! Você também pode usar as medidas angulares em graus, mas ela será a medida do ângulo central do arco e jamais poderá associá-lo como a medida do comprimento do arco (lembre-se que ela somente é igual ao ângulo quando estamos trabalhando com radianos!).

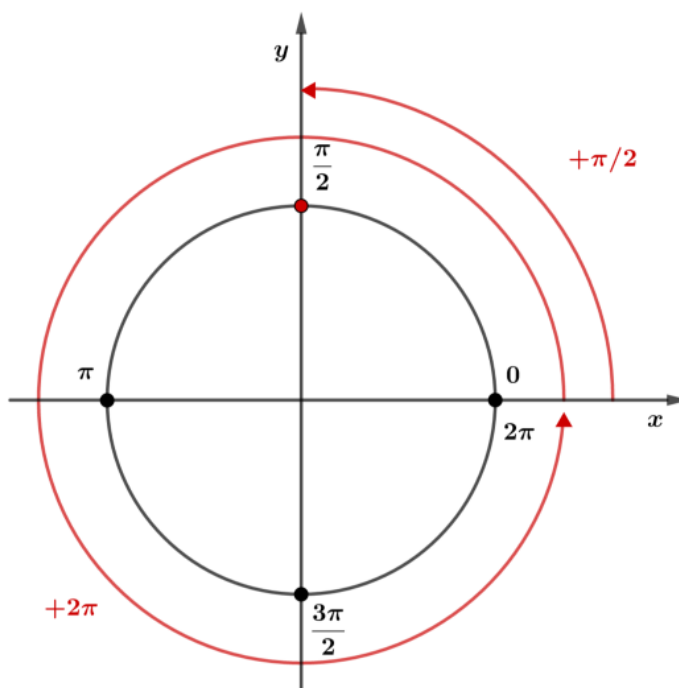


Perceba que o comprimento do arco azul é $\pi/2$ rad e o seu ângulo central é 90° . Assim como o arco vermelho tem comprimento $3\pi/2$ e ângulo central 270° . Nesse momento, você já deve estar acostumado a converter ângulos em radianos para graus.

4) Vamos tomar $t = 5\pi/2$. Note que devemos enrolar um fio de tamanho maior que o arco de circunferência 2π ! Nesse caso, basta dar voltas completas na circunferência até que o fio de comprimento $5\pi/2$ esteja completamente enrolado! Assim, temos:

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{4\pi + \pi}{2} = \frac{4\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

Então, $5\pi/2$ dá uma volta completa na circunferência e percorre mais $\pi/2$ no sentido anti-horário.



Perceba que a extremidade do fio coincide com o caso em que tomamos $t = \pi/2$, ou seja,
 $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{5\pi}{2}\right)$.



Assim, percebemos que a **função de Euler é periódica**! Podemos dar diversas voltas completas na circunferência e chegar no mesmo ponto! Logo, podemos entender que a cada $2\pi \text{ rad}$, damos 1 volta completa na circunferência. Então, $4\pi \text{ rad} = 2 \cdot 2\pi$ que significa que damos 2 voltas completas. De forma geral, $k \cdot 2\pi$ representa k voltas completas na circunferência. Logo:

$$E(t) = E(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Atenção! O valor de k é inteiro, pois pode ser **negativo**. Nesse caso, basta dar **voltas na circunferência no sentido horário**!

Nesse momento, vamos introduzir a ideia de arcos congruentes.

ESCLARECENDO!



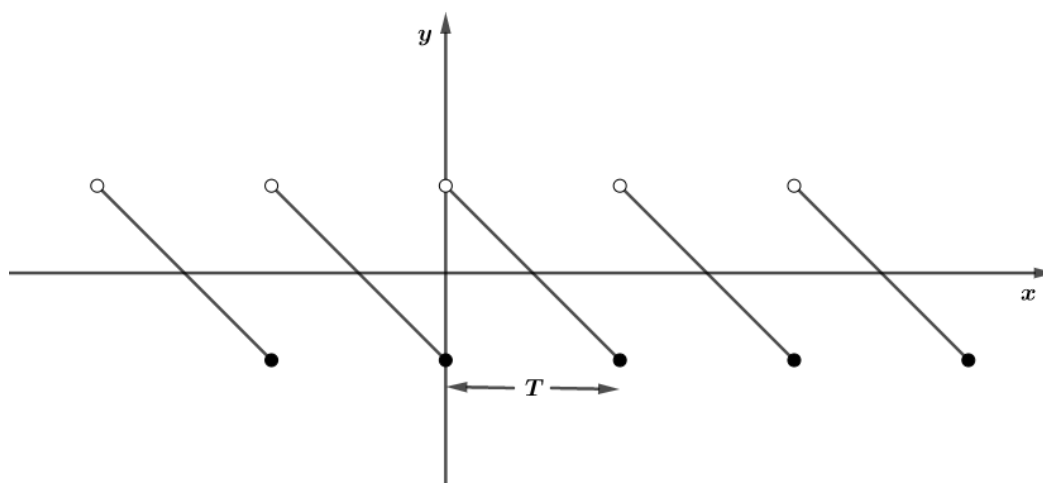
Definição:

Uma função $f: A \rightarrow B$ é **periódica** se vale a relação:

$$f(x + T) = f(x), \forall x \in A$$

Onde $T > 0$, o menor valor de T que satisfaz essa relação é chamado de **período fundamental da função f** .

Exemplo gráfico:



Note que a função se repete a cada período T .

3.2.2. ARCOS CONGRUENTES

Dizemos que os arcos α e β são congruentes quando:

$$\alpha \equiv \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos que α será congruente a β quando ela resultar no mesmo ponto no círculo trigonométrico! Na prática, basta verificar quantas voltas completas um arco percorre no círculo trigonométrico.



*Perceba que o símbolo $\equiv$ significa congruente a.

Veja os exemplos:

1) $25\pi/3$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi + \pi}{3} = \frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = \underbrace{4 \cdot 2\pi}_{4 \text{ voltas completas}} + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{25\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{3}$$

$25\pi/3$ dá 4 voltas completas na circunferência e é congruente a $\pi/3$.

2) $31\pi/6$

$$\frac{31\pi}{6} = \frac{24\pi + 7\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = 4\pi + \frac{7\pi}{6} = \underbrace{2 \cdot 2\pi}_{2 \text{ voltas completas}} + \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{31\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{6}$$

$31\pi/6$ dá 2 voltas completas na circunferência e é congruente a $7\pi/6$.

Na prática, basta reescrever o numerador da seguinte forma: multiplicamos o denominador por 2π e depois procuramos o maior número inteiro que multiplicado pelo valor encontrado é menor que o numerador. Após isso, somamos o valor que falta para completar o valor do numerador.

No exemplo 1, multiplicamos $2\pi \cdot 3 = 6\pi$. Vemos que o maior inteiro que deve ser multiplicado por 6π é 4, pois $6\pi \cdot 4 = 24\pi < 25\pi$. Para completar 25π , somamos π .

Vimos exemplos com medidas em radianos, mas também podemos considerar a medida angular dos arcos em graus. Para isso, basta usar:

$$\boxed{\alpha \equiv \beta + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{R}}$$

A ideia é a mesma: verificar se após k voltas completas chegamos no mesmo ponto.

Exemplos:

3) 1270°

Para os graus, o método é dividir o ângulo por 360° e o resto encontrado será justamente o ângulo equivalente do arco. Dividindo 1270° por 360° :

$$1270^\circ = \underbrace{360^\circ \cdot 3}_{3 \text{ voltas completas}} + \underbrace{190^\circ}_{\text{resto}}$$

Portanto, podemos afirmar que o arco com ângulo central de 1270° é congruente ao arco com ângulo central 190° .

*Observação: faça a divisão euclidiana para encontrar os resultados no começo dos estudos!

4) 735°

Dividindo 735° por 360° :



$$735^\circ = \underbrace{360^\circ \cdot 2}_{2 \text{ voltas completas}} + \underbrace{15^\circ}_{\text{resto}}$$

O arco de medida angular 735° é congruente ao arco de medida angular 15° .

*Atenção! Quando usamos os graus para denotar os arcos, entenda que se trata da medida angular e não do comprimento do arco. Então, podemos simplesmente dizer que o arco de 735° é congruente ao arco de 15° .



6. Encontre os arcos côngruos.

a) $81\pi/4$

b) $41\pi/3$

c) 2100°

d) 3020°

Comentários

a)

$$\frac{81\pi}{4} = \frac{80\pi + \pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$$

b)

$$\frac{41\pi}{3} = \frac{36\pi + 5\pi}{3} = 12\pi + \frac{5\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$$

c) $2100^\circ = 360^\circ \cdot 5 + 300^\circ \equiv 300^\circ$

d) $3020^\circ = 360^\circ \cdot 8 + 140^\circ \equiv 140^\circ$

Gabarito: a) $\pi/4$ b) $5\pi/3$ c) 300° d) 140°

7. Localize o quadrante dos arcos abaixo.

a) $81\pi/4$

b) $41\pi/3$

c) 2100°

d) 3020°

Comentários



Da questão anterior, temos:

a)

$$\frac{81\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$$
$$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$
$$\therefore \frac{\pi}{4} \in 1^\circ Q$$

b)

$$\frac{41\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}$$
$$\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$$
$$\therefore \frac{5\pi}{3} \in 4^\circ Q$$

c) $2100^\circ \equiv 300^\circ$

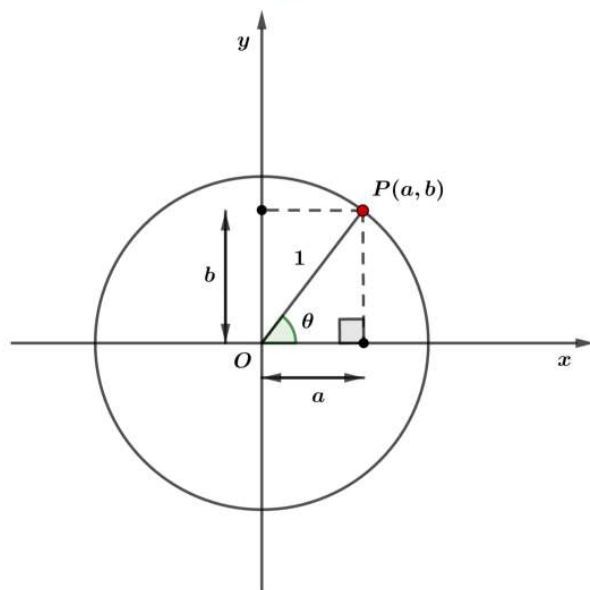
$$270^\circ < 300^\circ < 360^\circ$$
$$\therefore 300^\circ \in 4^\circ Q$$

d) $3020^\circ \equiv 140^\circ$

$$90^\circ < 140^\circ < 180^\circ$$
$$\therefore 140^\circ \in 2^\circ Q$$

3.2.3. RAZÃO SENO E COSSENO NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Vamos tomar um ponto $P(a, b)$ pertencente ao círculo trigonométrico de raio unitário. Observe a figura abaixo:

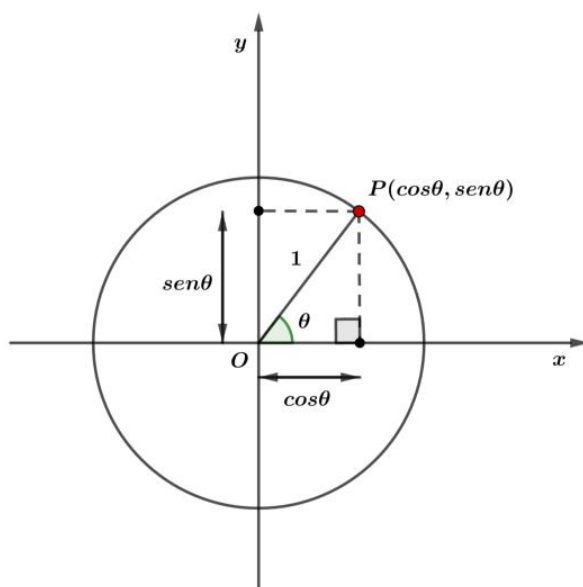


Note que as coordenadas (a, b) do ponto P podem ser representadas pela razão seno e cosseno, pois analisando o triângulo retângulo presente na figura, obtemos:

$$\text{sen} \theta = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \text{sen} \theta$$

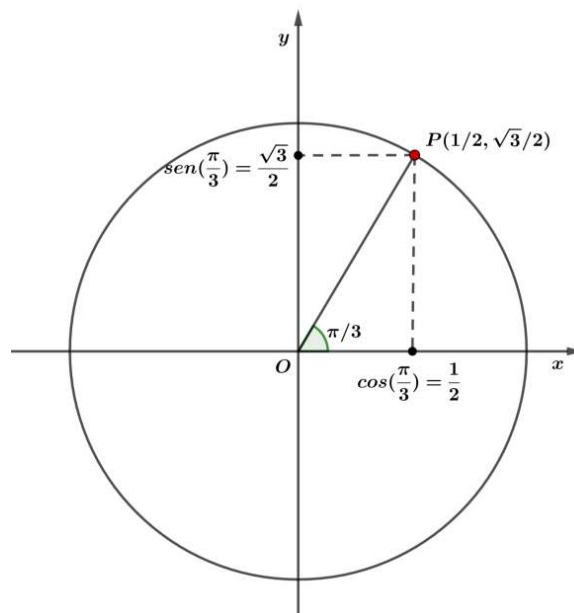
$$\text{cos} \theta = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \text{cos} \theta$$

Assim, veja que a coordenada x do ponto P é igual ao cosseno do ângulo θ e a coordenada y é igual ao seno do ângulo θ .



Por esse motivo, quando usamos o círculo trigonométrico, dizemos que o **eixo x representa o eixo dos cossenos** e o **eixo y é o eixo dos senos**. Vamos inserir o arco de $\pi/3$ no círculo. Sabemos que

$$\text{cos} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \text{ e } \text{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



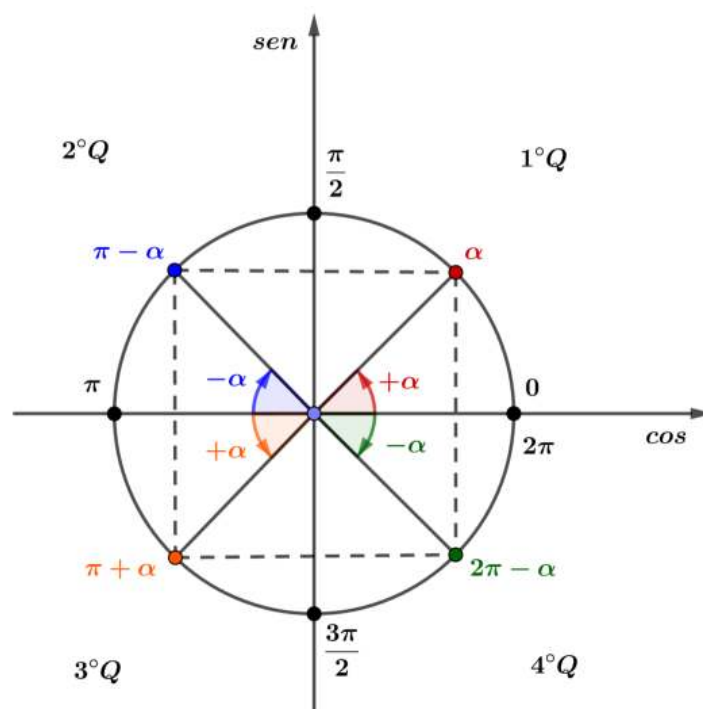
Observando-se o círculo e suas coordenadas no sistema cartesiano, podemos ver que

$$\cos 0 = 1, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \cos \pi = -1$$

$$\sin 0 = \sin \pi = 0, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

Esses valores são obtidos pelas coordenadas do ponto P para cada um desses arcos.

Para obtermos o valor do seno e cosseno dos arcos que não estão no 1º quadrante, usaremos o fato de que no círculo há diversas simetrias. Para o círculo trigonométrico, chamaremos o eixo x de cosseno e o eixo y de seno. Vamos supor que temos um arco α que está no primeiro quadrante, assim para os outros quadrantes devemos usar o seguinte esquema:



Da figura, podemos ver que



$$\text{sen } \alpha = \text{sen}(\pi - \alpha) > 0 \text{ (região positiva do eixo } y)$$

$$\text{sen}(\pi + \alpha) = \text{sen}(2\pi - \alpha) < 0 \text{ (região negativa do eixo } y)$$

$$\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha) > 0 \text{ (região positiva do eixo } x)$$

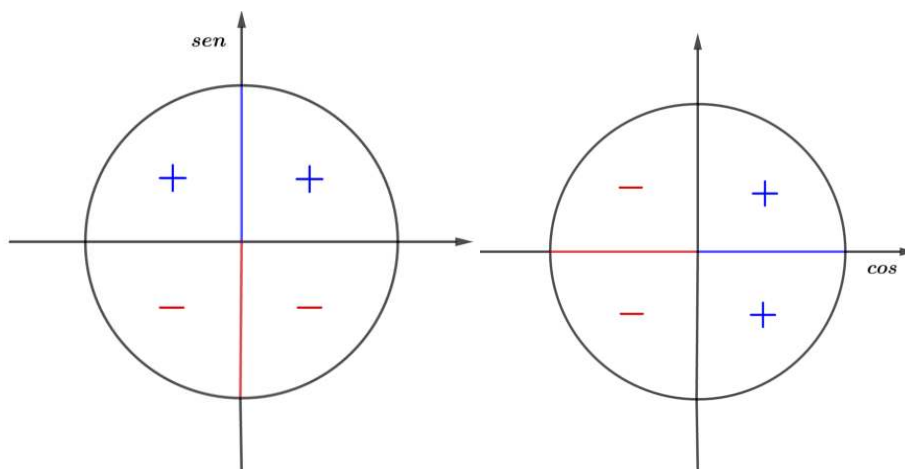
$$\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha) < 0 \text{ (região negativa do eixo } x)$$

Além disso, em módulo (valor absoluto), podemos escrever que

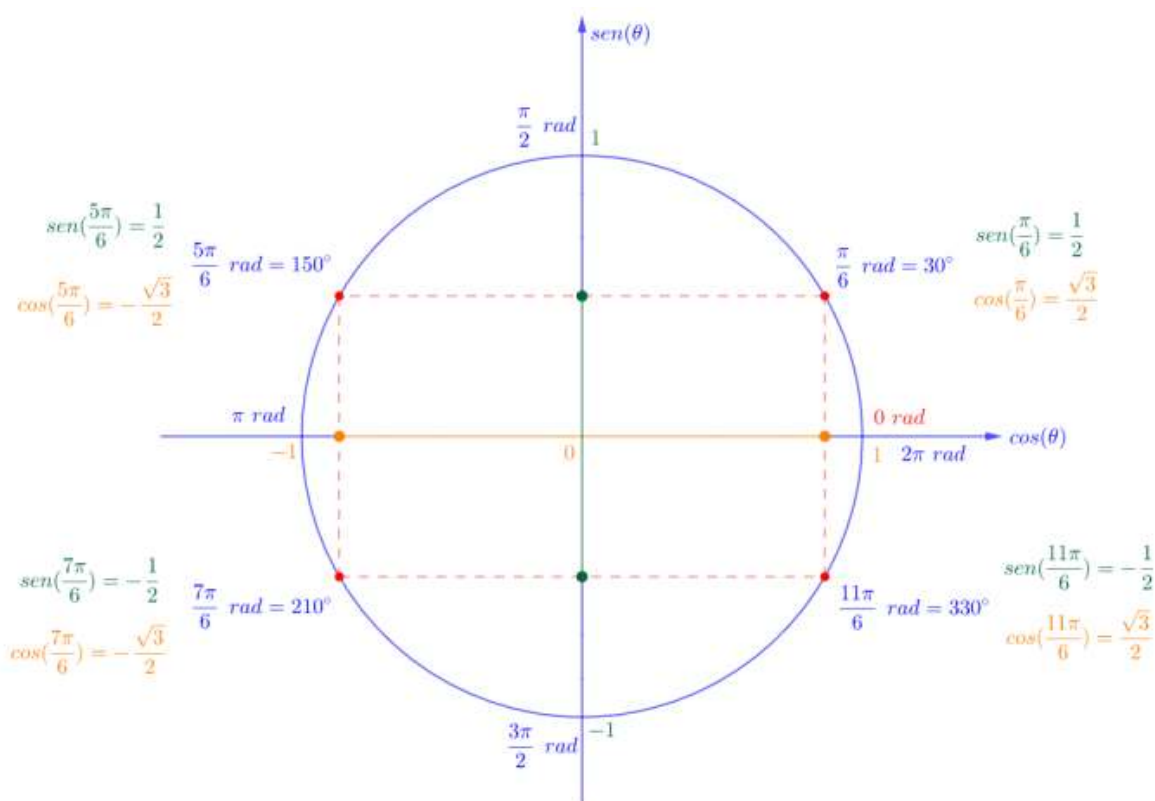
$$|\text{sen } \alpha| = |\text{sen}(\pi - \alpha)| = |\text{sen}(\pi + \alpha)| = |\text{sen}(2\pi - \alpha)|$$

$$|\cos \alpha| = |\cos(\pi - \alpha)| = |\cos(\pi + \alpha)| = |\cos(2\pi - \alpha)|$$

Assim, podemos ver que o seno é positivo no 1° e 2° quadrantes e é negativo no 3° e 4° quadrantes. O cosseno é positivo no 1° e 4° quadrantes e é negativo no 2° e 3° quadrantes.

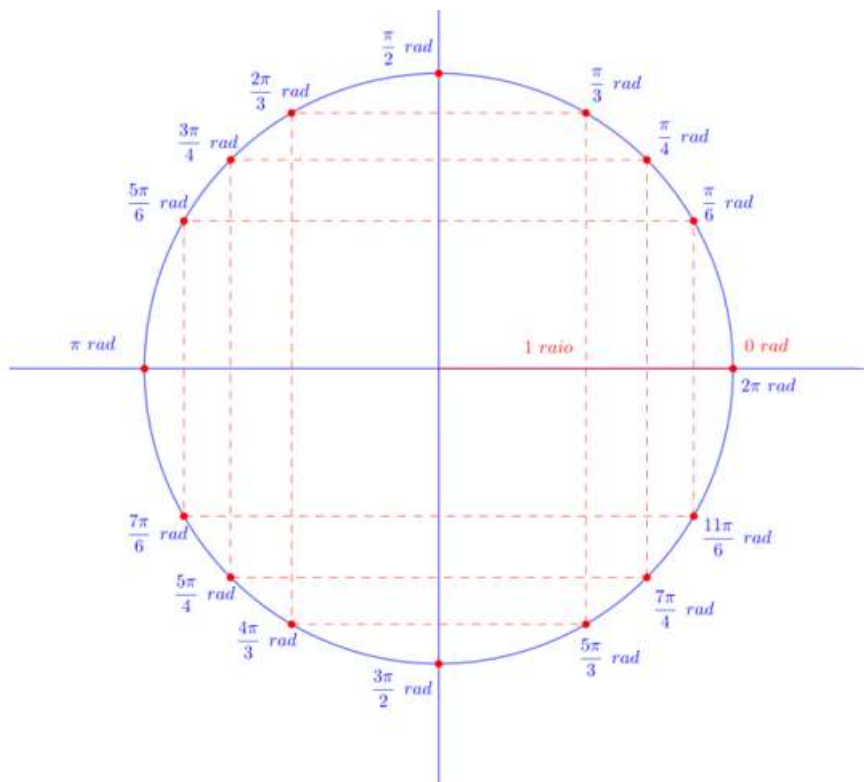


Usando o esquema, vamos desenhar o círculo para o arco de $\pi/6$ e encontrar o valor do seno e cosseno dos outros arcos:



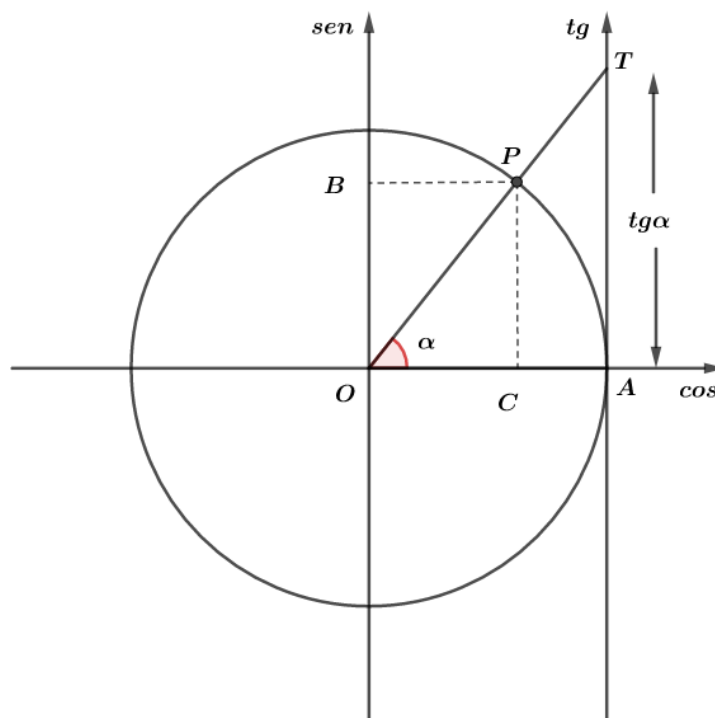


Usando o esquema para todos os arcos notáveis, obtemos a seguinte figura:



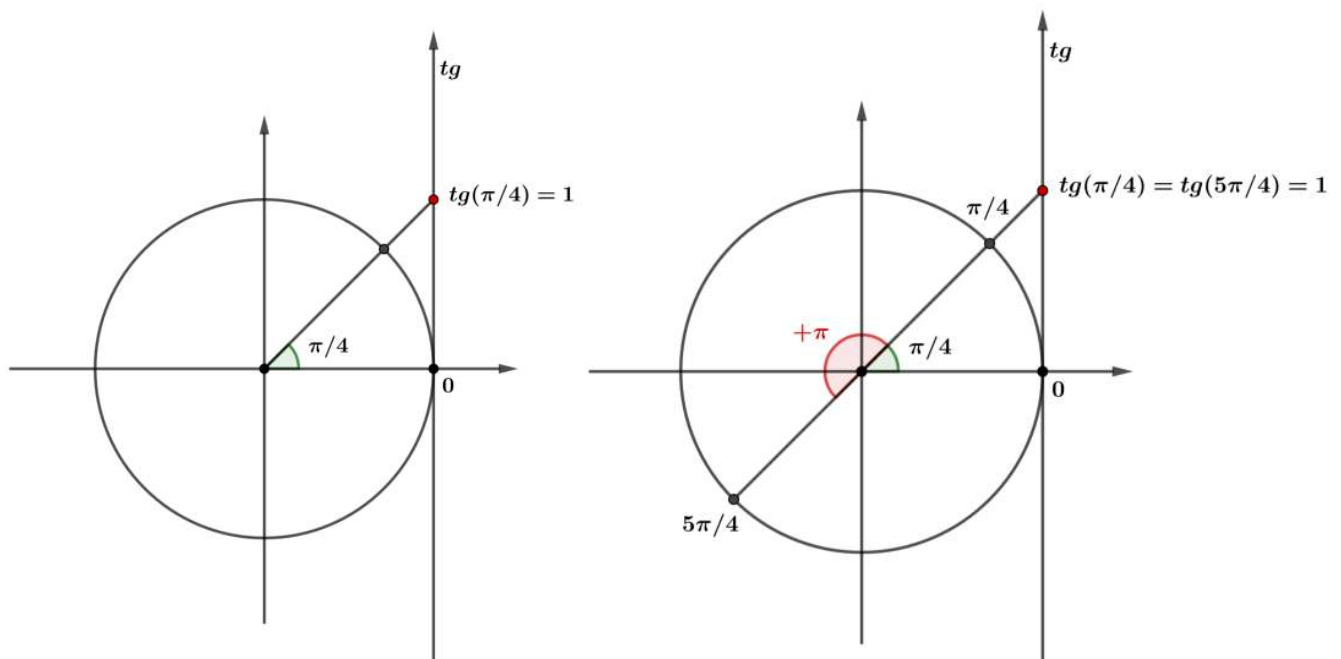
3.2.4. RAZÃO TANGENTE NO CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

Sabemos que o cosseno e o seno são representados pelos eixos x e y , respectivamente, no círculo trigonométrico. A razão tangente é representada por uma reta que passa pela origem do círculo e tangencia este mesmo ponto:





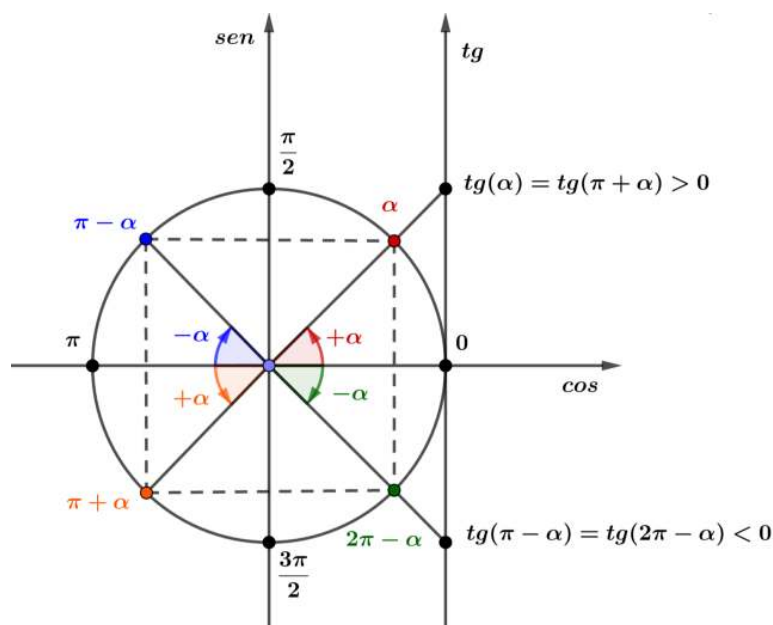
Para obter o valor da tangente, basta prolongar o segmento OP até que ele atinja a reta da tangente. O ponto de coincidência indicará o valor da tangente. Vejamos o caso do arco de $\pi/4$:



Note que para obter o valor da tangente no 3º quadrante, somamos π , pois os valores da tangente são determinados pelo segmento de reta que passa pela origem do círculo e pelos arcos. Assim, podemos ver que

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

Então, podemos criar o seguinte esquema:



Perceba que

$$tg \alpha = tg(\pi + \alpha) = -tg(\pi - \alpha) = -tg(2\pi - \alpha)$$

Assim, podemos afirmar que



$$\operatorname{tg} \theta > 0, \text{ se } \theta \in 1^{\circ}Q \text{ ou } 3^{\circ}Q$$

$$\operatorname{tg} \theta < 0, \text{ se } \theta \in 2^{\circ}Q \text{ ou } 4^{\circ}Q$$

*Observação: no esquema usamos apenas arcos positivos, mas nada impede de usarmos arcos negativos. Poderíamos muito bem escrever $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha)$. Lembre-se que o sinal apenas indica qual o sentido que o arco percorre!



8. Determine o valor das razões trigonométricas abaixo.

a) $\operatorname{sen} 225^{\circ}$

b) $\cos 330^{\circ}$

c) $\operatorname{tg}(-60^{\circ})$

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

f) $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

g) $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

*Sugestão: caso esteja no começo da preparação e não tenha familiaridade com o círculo, desenhe o esquema em um papel e use-o como guia para localizar os arcos.

Comentários

a) Temos:

$$\operatorname{sen}(225^{\circ}) = \operatorname{sen}(180^{\circ} + 45^{\circ})$$

Esse arco pertence ao terceiro quadrante, logo o seno deve ser negativo.

$$\operatorname{sen}(225^{\circ}) = -\operatorname{sen}(45^{\circ}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Temos:

$$\cos(330^{\circ}) = \cos(360^{\circ} - 30^{\circ}) = \cos(30^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Note que -60° indica que o arco está no quarto quadrante, pois caminha 60° no sentido horário, logo:

$$\operatorname{tg}(-60^{\circ}) = -\operatorname{tg}(60^{\circ}) = -\sqrt{3}$$

d) Temos:



$$\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Caminho alternativo:

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{5}{3} \cdot 180^\circ = 300^\circ$$

$$\operatorname{sen}(300^\circ) = \operatorname{sen}(360^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{sen}(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

*Observação: alguns alunos preferem trabalhar com o arco em graus, mas tente se acostumar com a notação em radianos porque será muito cobrado em prova.

e) Temos:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

f) Temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

g) Um modo de achar o arco positivo é somar 2π :

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{-4\pi + 6\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Gabarito: a) $-\sqrt{2}/2$ b) $\sqrt{3}/2$ c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}/2$ e) $-\sqrt{3}/2$ f) $-\sqrt{3}$ g) $-\sqrt{3}$

9. (EEAR/2018)

O valor de $\operatorname{sen} 1270^\circ$ é igual a

a) $-\cos 10^\circ$

b) $-\operatorname{sen} 30^\circ$

c) $-\operatorname{sen} 10^\circ$

d) $-\cos 30^\circ$

Comentários

$$\operatorname{sen} 1270^\circ = \operatorname{sen}(3 \cdot 360^\circ + 190^\circ) = \operatorname{sen} 190^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 10^\circ) = -\operatorname{sen} 10^\circ$$

Gabarito: "c".

10. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\operatorname{tg} 10^\circ = \operatorname{tg}(-10^\circ)$

II- $\operatorname{tg} 770^\circ = -\operatorname{tg}(50^\circ)$

III- $\operatorname{sen} 250^\circ = \operatorname{sen} 20^\circ$

IV- $\operatorname{sen} 460^\circ = \operatorname{sen} 100^\circ$



O número de igualdades verdadeiras é

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.

Comentários

I- Falsa. A tangente é uma função ímpar:

$$\operatorname{tg}(-10^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(-10^\circ)}{\operatorname{cos}(-10^\circ)} = \frac{-\operatorname{sen}(10^\circ)}{\operatorname{cos}(10^\circ)} = -\operatorname{tg} 10^\circ$$

II- Falsa.

$$\operatorname{tg} 770^\circ = \operatorname{tg}(4 \cdot 180^\circ + 50^\circ) = \operatorname{tg} 50^\circ \neq \operatorname{tg}(-50^\circ)$$

III-Falsa.

$$\operatorname{sen} 250^\circ = \operatorname{sen}(270^\circ - 20^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos 20^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ \cos 270^\circ = -\cos 20^\circ \neq \operatorname{sen} 20^\circ.$$

IV-Verdadeira.

$$\operatorname{sen} 460^\circ = \operatorname{sen}(360^\circ + 100^\circ) = \operatorname{sen} 100^\circ$$

Gabarito: “a”.

4. OUTRAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Além das razões seno, cosseno e tangente, temos as razões secante, cossecante e cotangente. Elas são definidas por:

$$\begin{aligned}\sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha} \\ \operatorname{cossec} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\end{aligned}$$

Note que **secante é o inverso do cosseno, cossecante é o inverso do seno e a cotangente é o inverso da tangente**. Logo, podemos afirmar que eles **terão os mesmos sinais das suas inversas nos quatro quadrantes**.

Assim, usando a relação fundamental, temos as seguintes relações:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Se dividirmos a equação fundamental por $\cos^2 \alpha$, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



$$\boxed{tg^2 \alpha + 1 = sec^2 \alpha}$$

Se dividirmos a equação fundamental por $sen^2 \alpha$, obtemos:

$$\frac{sen^2 \alpha}{sen^2 \alpha} + \frac{cos^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = \frac{1}{sen^2 \alpha}$$

$$\boxed{1 + cotg^2 \alpha = cossec^2 \alpha}$$

Além dessas apresentadas, temos mais duas que podem ajudar a resolver algumas questões:

$$\boxed{cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha}}$$

$$\boxed{sen^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}}$$

Demonstração:

Sabemos que $seca = 1/cos \alpha$, assim, temos:

$$cos \alpha = \frac{1}{seca} \Rightarrow cos^2 \alpha = \frac{1}{sec^2 \alpha}$$

Usando a relação fundamental $sec^2 \alpha = 1 + tg^2 \alpha$, obtemos:

$$cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha}$$

Para a relação do seno:

$$sen \alpha = \frac{cos \alpha}{cos \alpha} sen \alpha \Rightarrow sen^2 \alpha = cos^2 \alpha \cdot \frac{sen^2 \alpha}{cos^2 \alpha} \Rightarrow sen^2 \alpha = cos^2 \alpha \cdot tg^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{sec^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow sen^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}$$



11. Determine o valor das seguintes razões trigonométricas.

a) $cossec\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $sec(45^\circ)$

c) $cotg(60^\circ)$

Comentários

a) Temos:



$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Temos:

$$\sec(45^\circ) = \frac{1}{\cos(45^\circ)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

c) Temos:

$$\cotg(60^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg}(60^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: a) $2\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}/3$

12. Sabendo que $\operatorname{tg}(\alpha) = 2$, calcule:

a) $\cotg(\alpha)$

b) $\sec \alpha$

c) $\operatorname{cosec} \alpha$

Comentários

a) Sabemos que cotangente é o inverso da tangente, logo:

$$\cotg(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{1}{2}$$

b) Usando a relação fundamental:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + 2^2 = \sec^2 \alpha \Rightarrow \sec \alpha = \pm \sqrt{5}$$

*Dado que o valor da tangente é positivo, não sabemos se o ângulo está no primeiro ou no terceiro quadrante, por isso assumimos que o secante (inverso do cosseno) pode ser positivo ou negativo.

c) Usando a relação fundamental:

$$1 + \cotg^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \Rightarrow \frac{5}{4} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Gabarito: a) $1/2$ b) $\pm\sqrt{5}$ c) $\pm\sqrt{5}/2$

13. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\cotg x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\sin x$



b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{cosec} x$

Comentários

$$M = \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\cotg x + 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + 1} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{(\cos x + \operatorname{sen} x) \cdot \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: C

5. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

5.1. DEFINIÇÕES E GRÁFICOS

5.1.1. FUNÇÃO SENO

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, a função seno é dada por:

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

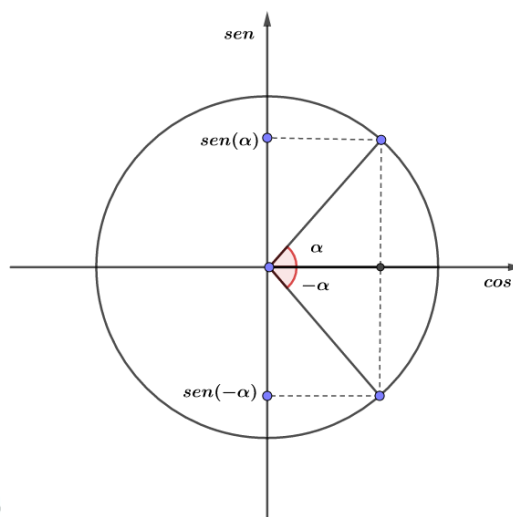
Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $[-1, 1]$

Período: 2π

Paridade: ímpar

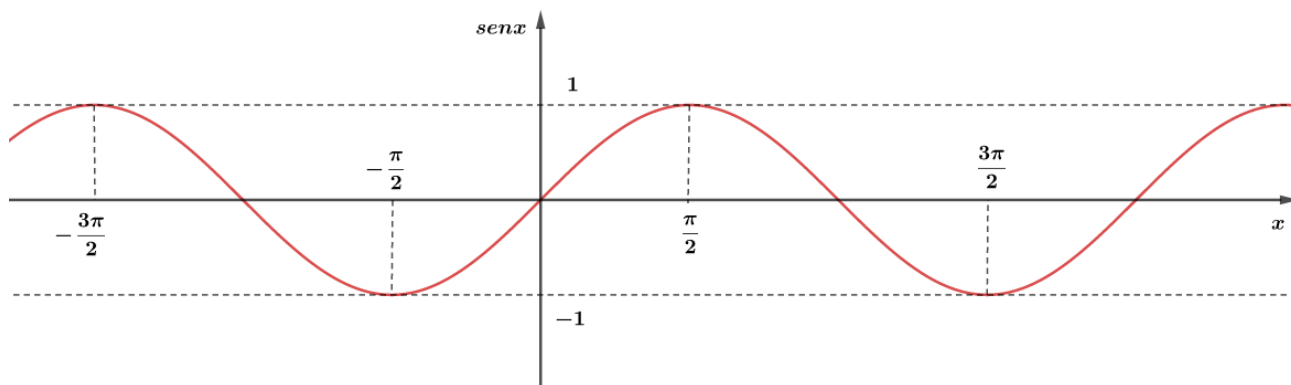
A função seno possui paridade ímpar, veja:





Pela figura, podemos ver que $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$. Isso caracteriza uma função ímpar.

A função seno possui o seguinte gráfico:



5.1.2. FUNÇÃO COSSENO

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, a função cosseno é dada por:

$$f(x) = \cos x$$

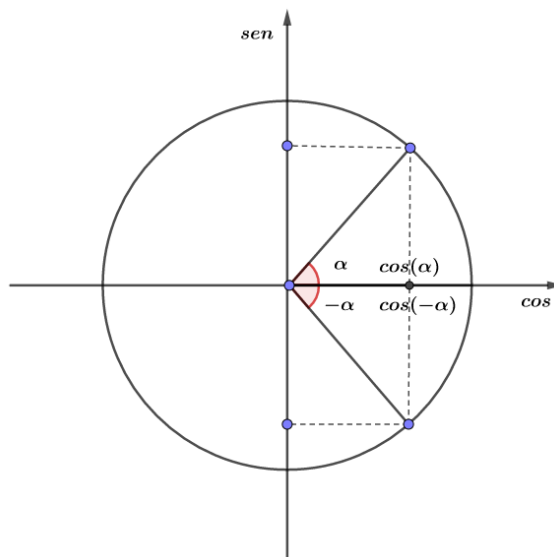
Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $[-1, 1]$

Período: 2π

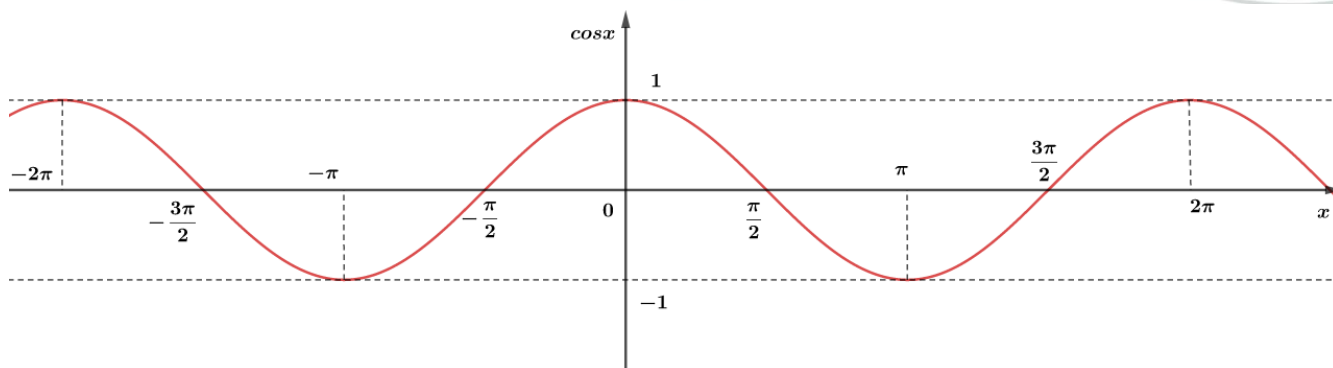
Paridade: par

A função cosseno possui paridade par, veja:



Podemos ver que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. Isso caracteriza uma função par.

A função cosseno possui o seguinte gráfico:



5.1.3. FUNÇÃO TANGENTE

$$f(x) = tg(x)$$

Domínio: $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

Período: π

Paridade: ímpar

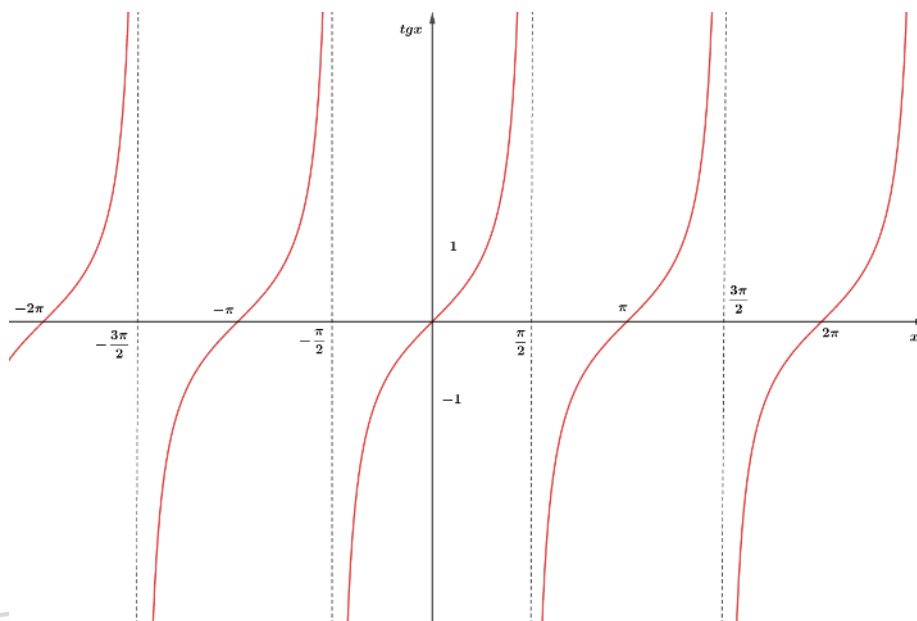
Como a tangente é a razão entre seno e cosseno, sabemos que o denominador não pode ser nulo, caso contrário, o valor da tangente ficaria indefinido. Assim, todos os ângulos que resultam em cosseno nulo não pertencem ao domínio da tangente:

$$tg\alpha \in]-\infty, +\infty[, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A paridade da função tangente é ímpar, pois:

$$tg(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\text{cos}(-\alpha)} = -\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = -tg(\alpha)$$

A função tangente possui o seguinte gráfico:





5.1.4. FUNÇÃO COTANGENTE

$$f(x) = \cot g(x)$$

Domínio: $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem: $\mathbb{R}$

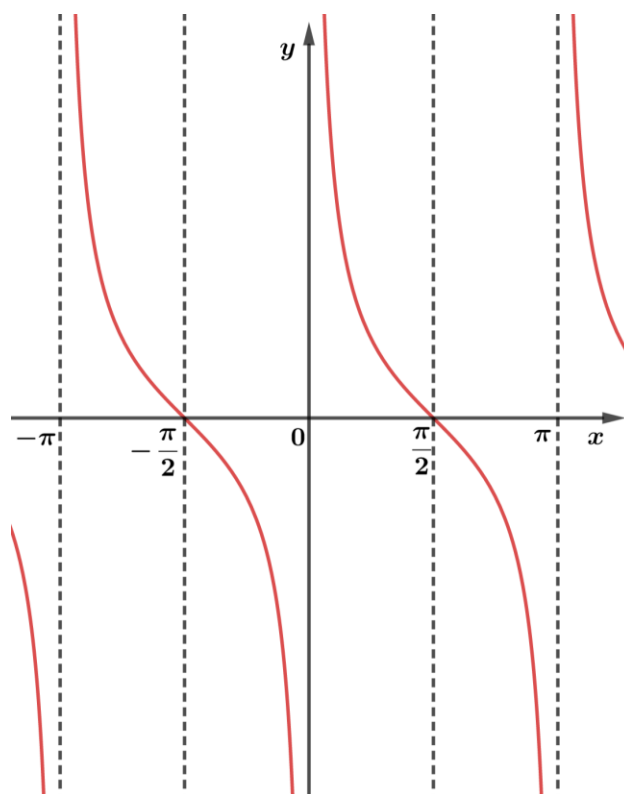
Período: π

Paridade: ímpar

Como a função cotangente é a razão inversa da tangente, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que a tangente.

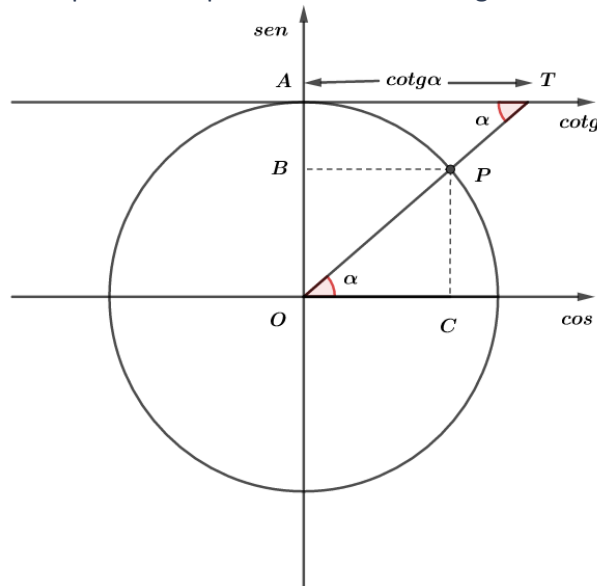
Note que o domínio deve possuir $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, pois esse valor anula o seno que é o denominador da cotangente.

O seu gráfico é dado por:





O eixo da cotangente também pode ser representado no ciclo trigonométrico. Veja a figura:



Os triângulos POC e OTA são semelhantes, assim, podemos escrever as seguintes razões:

$$\begin{aligned} \frac{AT}{AO} &= \frac{OC}{BC} \\ \frac{1}{\cot g \alpha} &= \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow \cot g \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

O que nos mostra que a relação fundamental é satisfeita.

5.1.5. FUNÇÃO SECANTE

$$f(x) = \sec(x)$$

$$\text{Domínio: } \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Imagem: }] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{Período: } 2\pi$$

$$\text{Paridade: par}$$

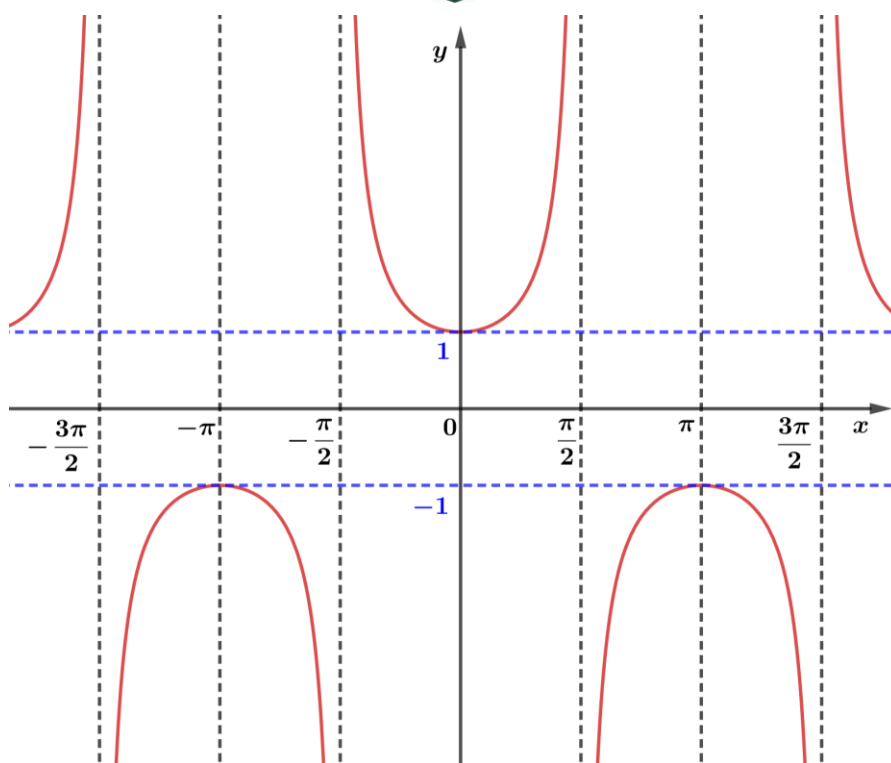
Como a função secante é a razão inversa do cosseno, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que essa função. Além disso, dado que cosseno é limitado entre -1 e 1, temos:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos \alpha} \geq 1 \text{ ou } \frac{1}{\cos \alpha} \leq -1$$

$$\therefore \sec \alpha \geq 1 \text{ ou } \sec \alpha \leq -1$$

$$\sec \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

O seu gráfico é dado por:



5.1.6. FUNÇÃO COSSECANTE

$$f(x) = \text{cossec}(x)$$

Domínio: $\{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Imagem: $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Período: 2π

Paridade: ímpar

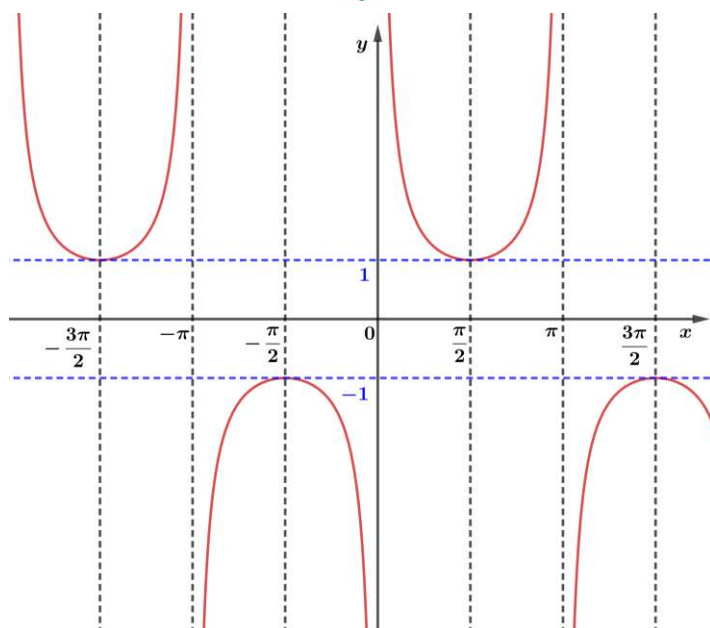
Como a função cossecante é a razão inversa do seno, temos que ela possui a mesma paridade e periodicidade que essa função. Além disso, dado que seno é limitado entre -1 e 1, temos:

$$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } \alpha} \geq 1 \text{ ou } \frac{1}{\text{sen } \alpha} \leq -1$$

$$\therefore \text{cossec } \alpha \geq 1 \text{ ou } \text{cossec } \alpha \leq -1$$

$$\text{cossec } \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

O seu gráfico é dado por:



5.2. MONOTONICIDADE DAS FUNÇÕES NOS QUADRANTES

Analisando os valores das funções trigonométricas nos quatro quadrantes, podemos criar a seguinte tabela:

Função	1° quadrante	2° quadrante	3° quadrante	4° quadrante
$\text{sen } \theta$	Crescente (varia de 0 a 1)	Decrescente (varia de 1 a 0)	Decrescente (varia de 0 a -1)	Crescente (varia de -1 a 0)
$\text{cos } \theta$	Decrescente (varia de 1 a 0)	Decrescente (varia de 0 a -1)	Crescente (varia de -1 a 0)	Crescente (varia de 0 a 1)
$\text{tg } \theta$	Crescente (varia de 0 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a 0)	Crescente (varia de 0 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a 0)
$\text{cotg } \theta$	Decrescente (varia de ∞ a 0)	Decrescente (varia de 0 a $-\infty$)	Decrescente (varia de ∞ a 0)	Decrescente (varia de 0 a $-\infty$)
$\text{sec } \theta$	Crescente (varia 1 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a -1)	Decrescente (varia de -1 a $-\infty$)	Decrescente (varia de ∞ a 1)
$\text{cossec } \theta$	Decrescente (varia de ∞ a 1)	Crescente (varia 1 a ∞)	Crescente (varia de $-\infty$ a -1)	Decrescente (varia de -1 a $-\infty$)

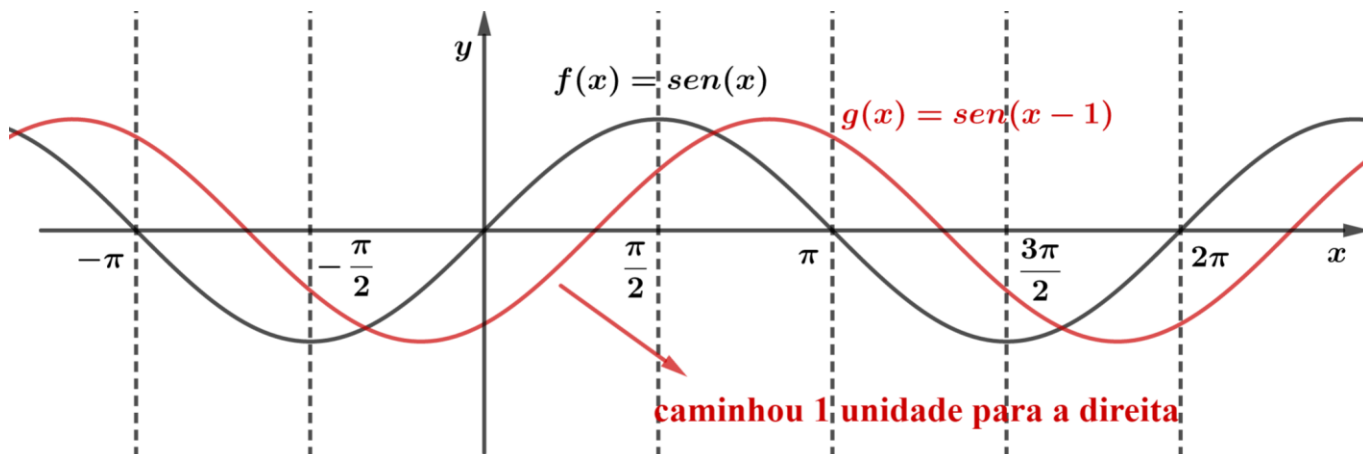


5.3. TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

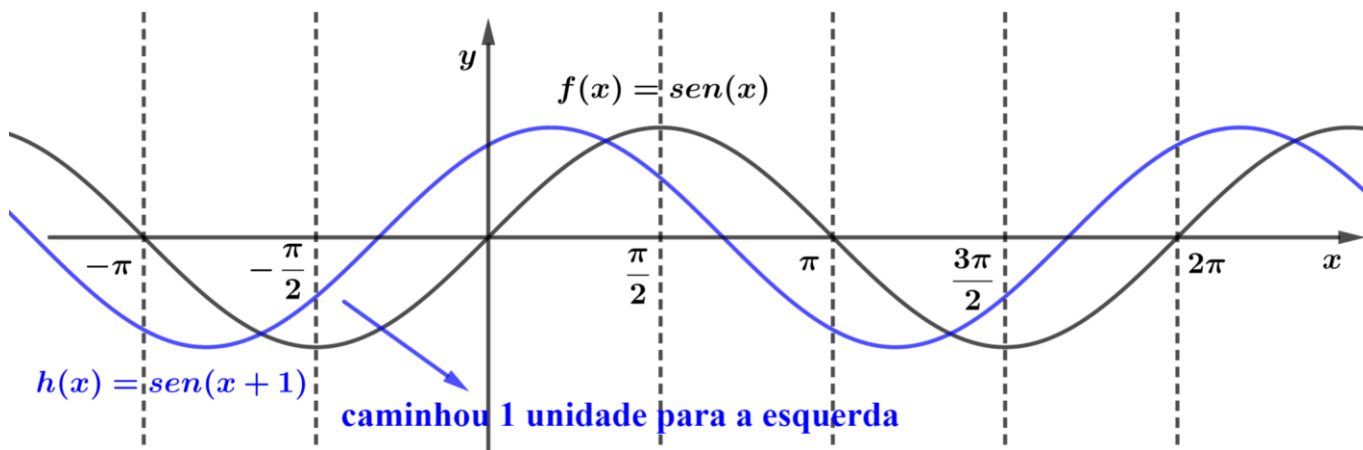
5.3.1. TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

Podemos fazer uma translação horizontal na função $y = f(x)$, basta fazer $y = f(x - a)$. Se $a > 0$, o gráfico de f caminhará a unidades para a direita na direção do eixo x .

Vamos tomar como exemplo a função $f(x) = \text{sen}(x)$. Observe o gráfico de $g(x) = \text{sen}(x - 1)$:

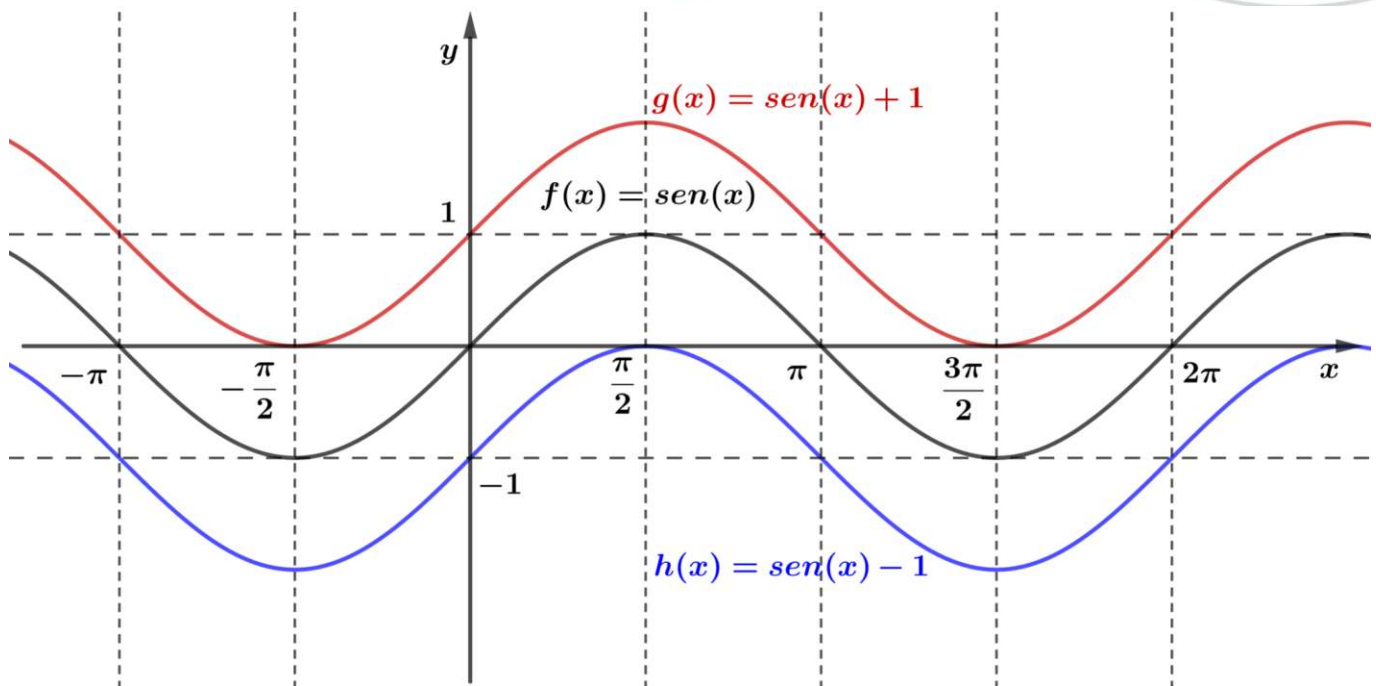


Se quiséssemos fazer uma translação para a esquerda, bastaria fazer $h(x) = \text{sen}(x + a)$, com $a > 0$, como no exemplo a seguir:



5.3.2. TRANSLAÇÃO VERTICAL

Para fazer uma translação vertical para cima em uma função $y = f(x)$, basta fazer a soma $y = f(x) + a$, com $a > 0$. Para transladar para baixo, basta fazer $y = f(x) - a$, com $a > 0$. Veja os gráficos para $f(x) = \text{sen}(x)$, $g(x) = \text{sen}(x) + 1$ e $h(x) = \text{sen}(x) - 1$:

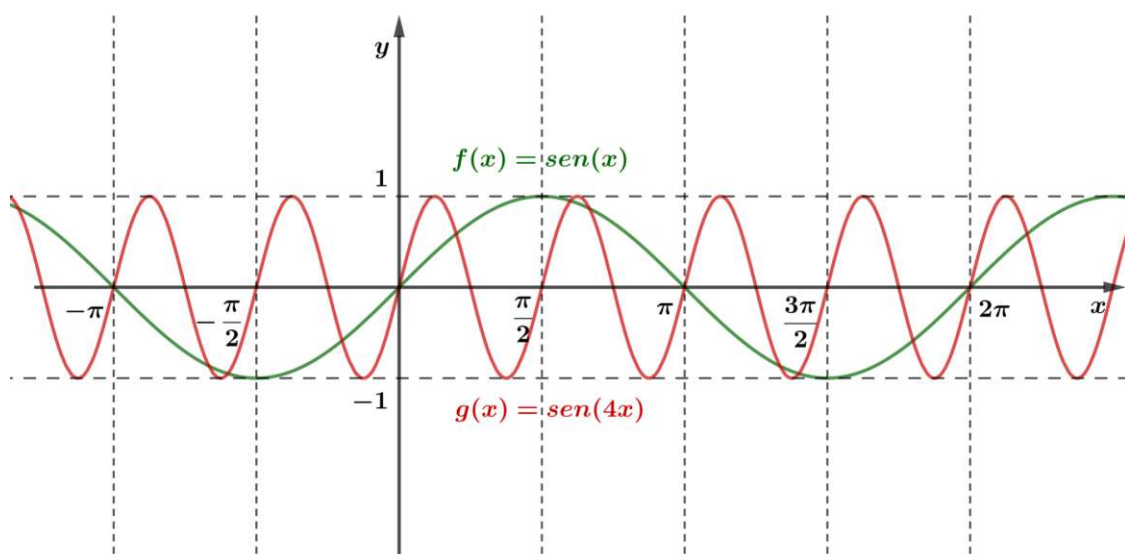


5.3.3. MUDANÇA DE PERÍODO

Se temos uma função $y = f(x)$ com período T e multiplicamos o x dentro de f por $a \in \mathbb{R}$, então $y = f(ax)$ terá período igual a $\frac{T}{|a|}$.

Veja o exemplo para $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \sin(4x)$. Sabemos que o período de $\sin x$ é 2π , logo o período de g será:

$$T_g = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

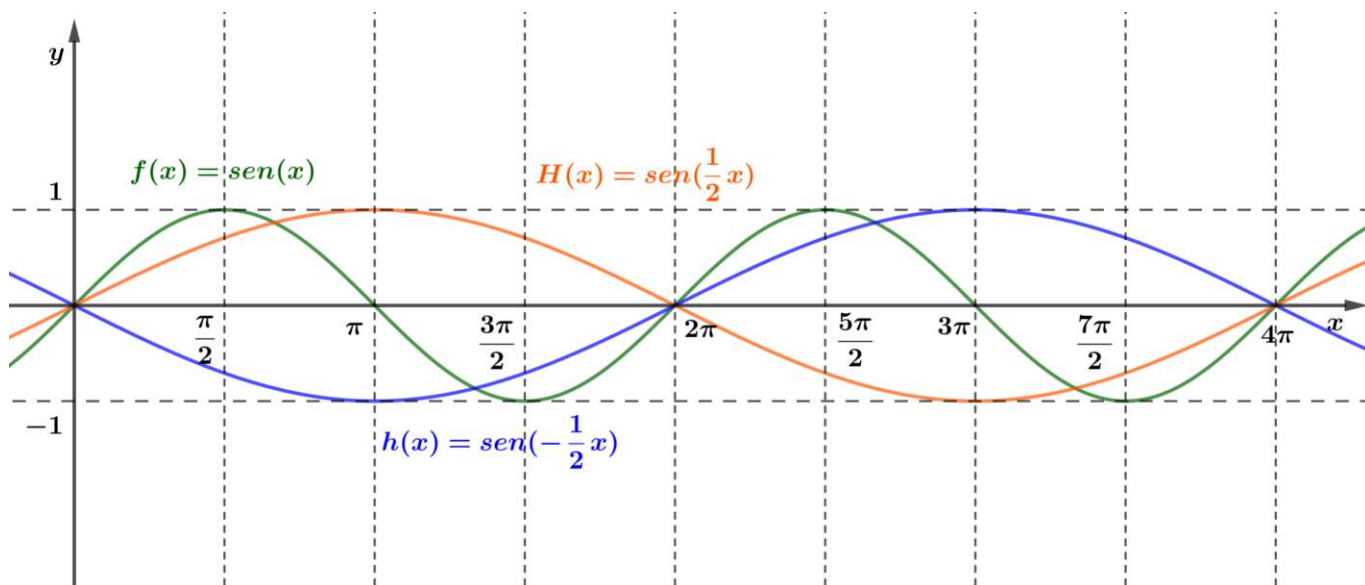


Note que dividimos pelo módulo do número que multiplica x , então se $h(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$, teríamos como período:



$$T_h = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

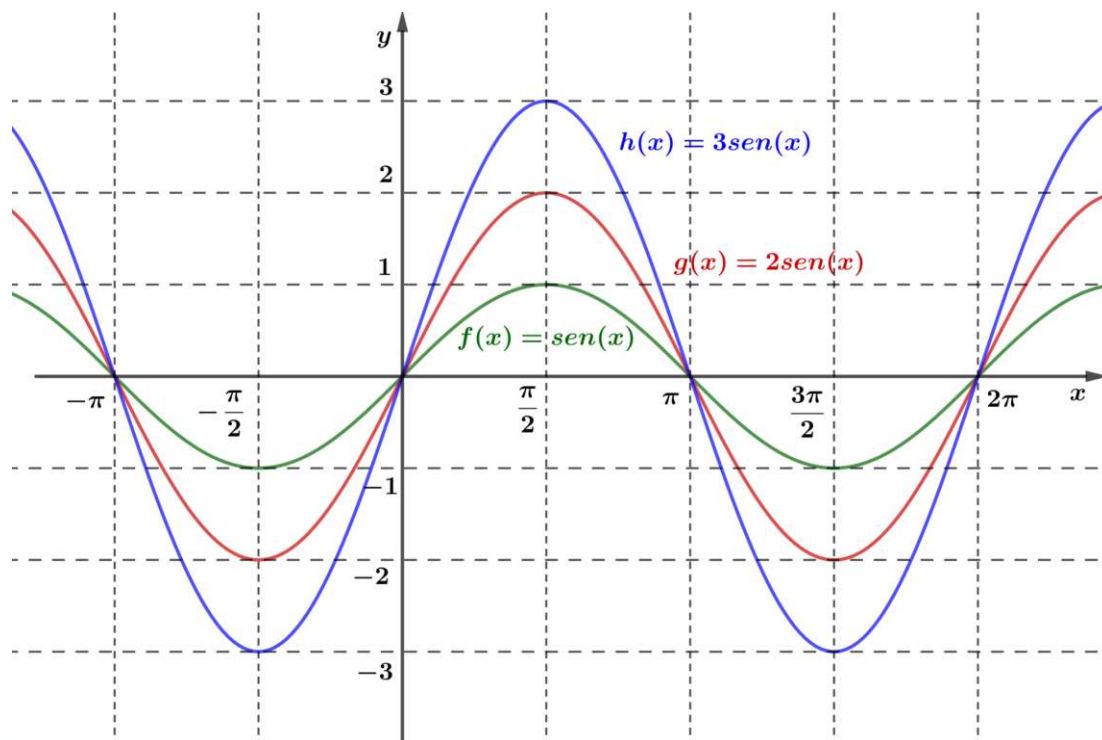
O sinal negativo não altera o período, mas pode mudar os valores da função para os diferentes valores de x . Vamos esboçar o gráfico de $h(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$ e $H(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$:



Note que os valores de $h(x)$ são os valores de $H(x)$ espelhados em relação ao eixo x .

5.3.4. MUDANÇA DA AMPLITUDE DA FUNÇÃO

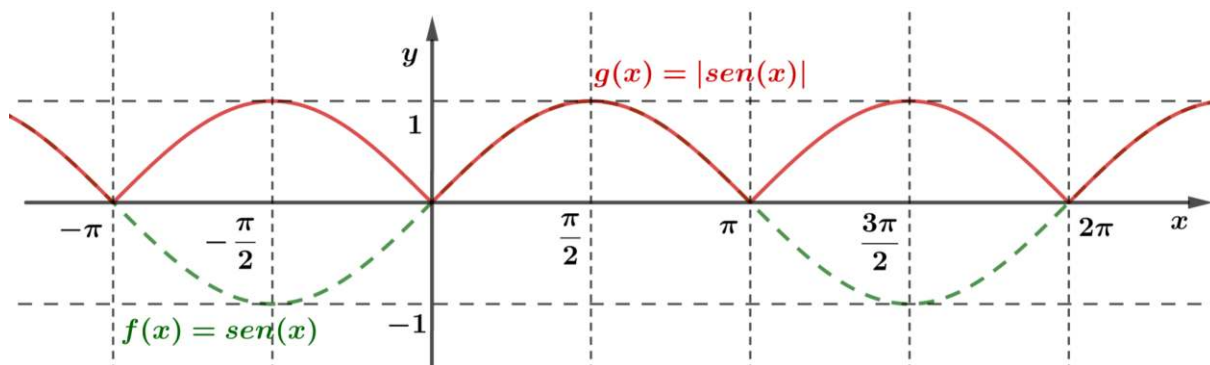
Para mudar a amplitude da função $y = f(x)$, basta fazer a multiplicação $y = af(x)$. Veja os exemplos:





5.3.5. APLICAÇÃO DO MÓDULO

Quando aplicamos o módulo, apenas rebatemos a parte negativa da função para cima. Veja o exemplo com $f(x) = \text{sen}(x)$ e $g(x) = |\text{sen}(x)|$:



6. FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

Iniciemos o estudo das funções inversas. Devemos lembrar que uma função possui inversa se, e somente se, for bijetora. Assim, temos que restringir o domínio das funções circulares de modo que elas sejam bijetoras.

6.1. DEFINIÇÕES

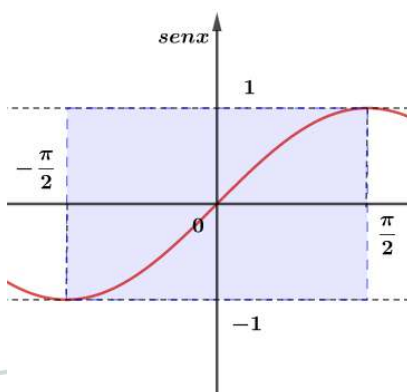
6.1.1. FUNÇÃO ARCO-SENO

Seja $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, se $f(x) = \text{sen}x$ a função arco-seno é dada por:

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

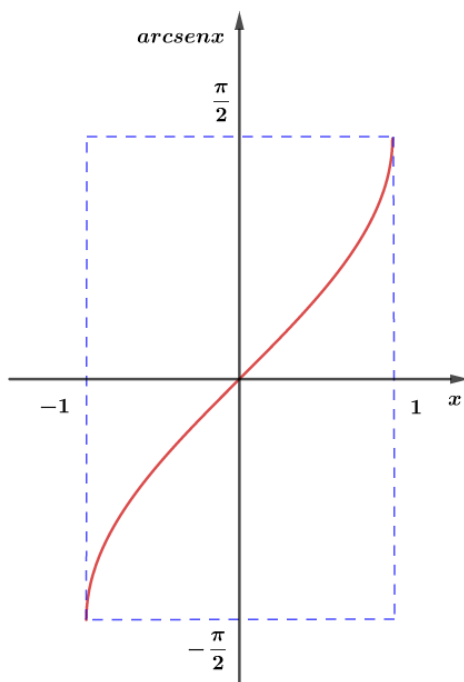
$$f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$$

Note que no domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a função seno é bijetora:





O gráfico da função arco-seno é dado por:



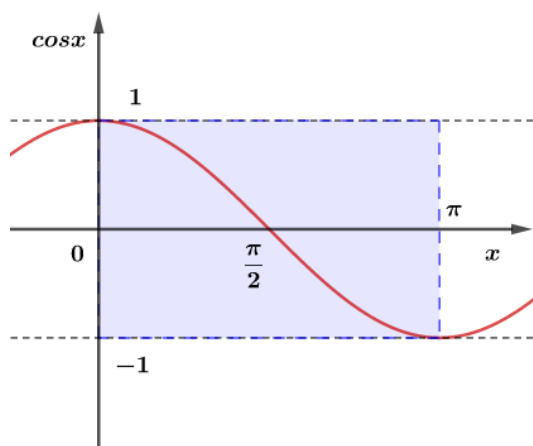
6.1.2. FUNÇÃO ARCO-COSSENO

Seja $f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, se $f(x) = \cos x$ a função arco-cosseno é dada por:

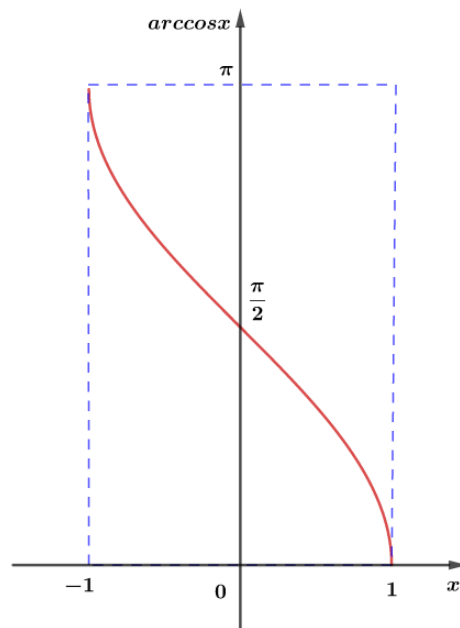
$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$f^{-1}(x) = \arccos x$$

Note que no domínio $[0, \pi]$, a função cosseno é bijetora:



O gráfico da função arco-cosseno é dado por:



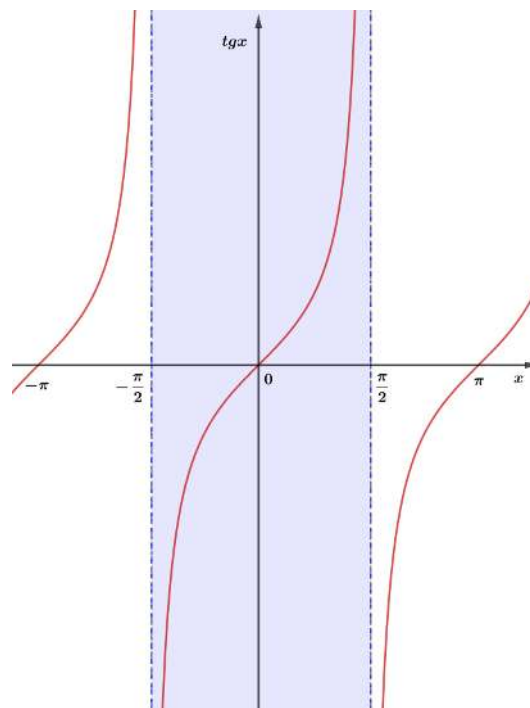
6.1.3. FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

Seja $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, se $f(x) = \operatorname{tg} x$ a função arco-tangente é dada por:

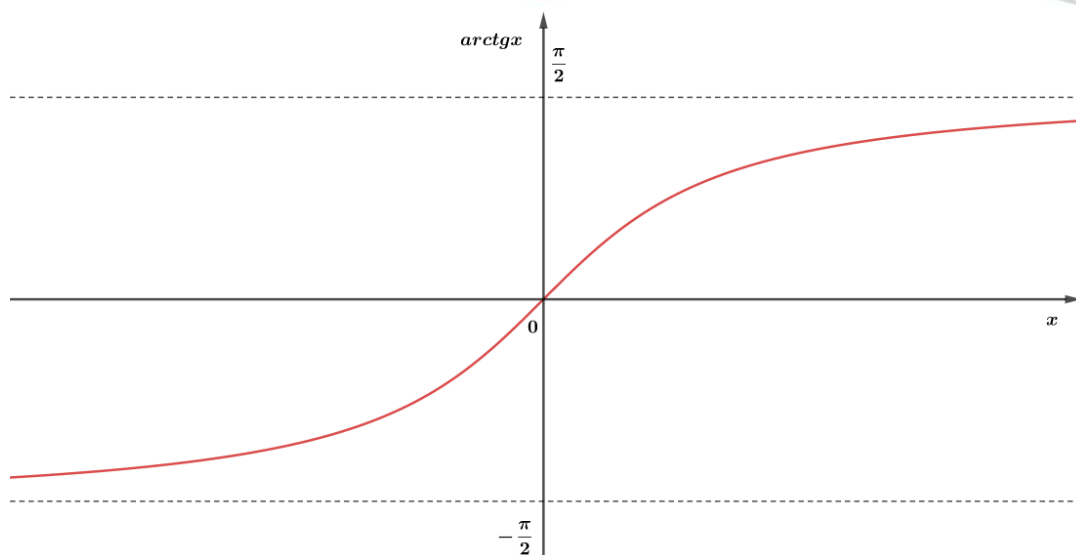
$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$

A função tangente é bijetora no domínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.



O gráfico da sua inversa é dado por:



6.2. PROBLEMAS COM FUNÇÕES INVERSAS TRIGONOMÉTRICAS

As questões que envolvem funções inversas trigonométricas seguem um padrão. Vamos aprender a resolver esse tipo de problema com um exemplo.

- 1) Calcule o valor de $\text{sen}(x)$, sabendo que $x = \text{arctg}(1)$ e $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Quando vemos o termo $\text{arctg}(1)$, devemos entender que se trata de um arco. Então, podemos chamá-lo de um arco α :

$$\alpha = \text{arctg}(1)$$

Temos a função arco tangente que é a função inversa da tangente. Dependendo do caso, é possível encontrar o valor do arco. Para isso, basta pensar: qual arco cuja tangente resulta no número dentro do arco tangente? No exemplo acima, dado que $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, temos que $x = \pi/4$, pois $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Assim, a questão pede:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 2) Determine o valor de $\text{tg}\left(\text{arctg}(2) + \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

Nesse caso, não conseguimos determinar os valores dos arcos que resultam em $\text{arctg}(2)$ e $\text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$. Mas não será necessário encontrá-los, pois queremos apenas o valor da tangente da soma desses arcos. Vamos fazer

$$\alpha = \text{arctg}(2)$$

$$\beta = \text{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$$

O bizu nessa questão é aplicar a inversa da função nos arcos acima. Nesse caso, ambos os arcos são funções arco tangente, logo devemos aplicar a tangente nos arcos acima:



$$\alpha = \arctg(2) \Rightarrow tg(\alpha) = tg(\arctg(2)) = 2$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow tg(\beta) = tg\left(\arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

Note que acabamos de obter os valores da $tg\alpha$ e $tg\beta$, assim, queremos calcular:

$$tg\left(\arctg(2) + \arctg\left(\frac{1}{3}\right)\right) = tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} = \frac{2 + \frac{1}{3}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{3}} = 7$$



14. Calcule:

a) $sen\left(\arctg(\sqrt{2})\right)$

b) $tg\left(2\arctg\left(\frac{1}{5}\right)\right)$

c) $tg\left(\arcsen\left(\frac{3}{5}\right) - \arctg\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

Resolução:

a) Vamos fazer $\alpha = \arctg(\sqrt{2})$, assim, temos:

$$tg\alpha = \sqrt{2}$$

Queremos calcular $sen\alpha$, podemos a seguinte identidade:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$sen\alpha = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{1 + \sqrt{2}^2}}$$

$$sen\alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow sen\alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) Fazendo $\alpha = 2\arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, temos $\frac{\alpha}{2} = \arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, logo:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{5}$$

Queremos calcular $tg\alpha$, vamos usar a seguinte identidade:



$$tg\alpha = \frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\alpha = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{12}$$

c) Fazendo $\alpha = \arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $\beta = \arctg\left(\frac{5}{12}\right)$, temos:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}$$

$$tg\beta = \frac{5}{12}$$

Queremos calcular $tg(\alpha - \beta)$. Podemos usar a diferença de arcos da tangente:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$$

Conhecemos o valor de $tg\beta$, vamos encontrar $tg\alpha$:

$$sen^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$9 + 9tg^2\alpha = 25tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = \frac{9}{16}$$

$$tg\alpha = \pm \frac{3}{4}$$

Para $tg\alpha = 3/4$, temos:

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

Para $tg\alpha = -3/4$, temos:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\left(-\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{12}} \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\left(-\frac{14}{12}\right)}{\frac{33}{48}} = -\frac{56}{33} \end{aligned}$$

Gabarito: a) $\operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{12}$ c) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{16}{63}$ ou $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\frac{56}{33}$

15. Calcule a soma das soluções da equação $\arctg\left(\frac{x}{2}\right) + \arctg\left(\frac{x}{3}\right) = \arctg\left(\frac{1}{5}\right)$.

Resolução:

Fazendo $\alpha = \arctg\left(\frac{x}{2}\right)$, $\beta = \arctg\left(\frac{x}{3}\right)$ e $\gamma = \arctg\left(\frac{1}{5}\right)$, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{3}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{5}$$

Aplicando a tangente na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \operatorname{tg} \gamma \\ \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} &= \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$

Substituindo os valores das tangentes:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right)}{1 - \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}} &= \frac{1}{5} \\ \frac{5x}{6 - x^2} &= \frac{1}{5} \\ 25x &= 6 - x^2 \\ x^2 + 25x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 24}}{2} = \frac{-25 \pm \sqrt{649}}{2} \end{aligned}$$

A soma das soluções é dada por:

$$x_1 + x_2 = -25$$

Gabarito: $x_1 + x_2 = -25$



7. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos estudar as principais transformações que podem ser cobradas na prova. Tente decorar pelo menos as fórmulas de soma e diferença de arcos. Assim, se você esquecer as outras, você saberá deduzi-las na hora da prova.

7.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

ATENÇÃO
DECORE!



Esse assunto é muito cobrado nas questões de trigonometria das provas! Então, tente decorar todas elas!

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \text{sen}(A)\text{sen}(B)$$

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen}(A) \cos(B) + \text{sen}(B) \cos(A)$$

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen}(A) \cos(B) - \text{sen}(B) \cos(A)$$

$$\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}(A) + \text{tg}(B)}{1 - \text{tg}(A)\text{tg}(B)}$$

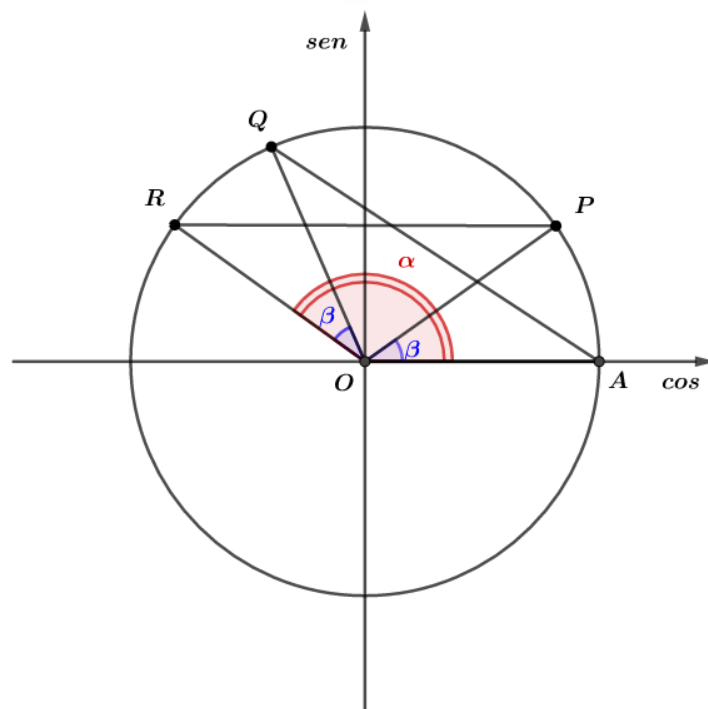
$$\text{tg}(A - B) = \frac{\text{tg}(A) - \text{tg}(B)}{1 + \text{tg}(A)\text{tg}(B)}$$

Demonstração:

1) $\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \text{sen}(A)\text{sen}(B)$

Vamos usar o ciclo trigonométrico para demonstrar essa propriedade e a fórmula da distância da geometria analítica.

Sejam dados os pontos A, P, Q, R conforme ilustra a figura abaixo:



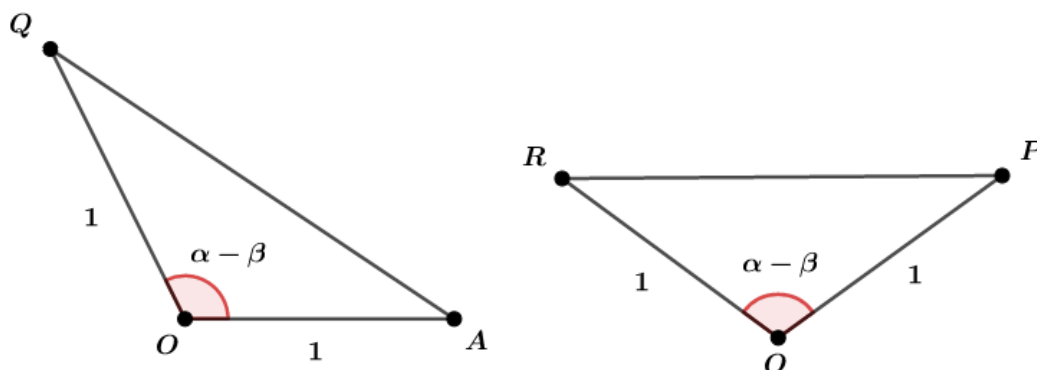
Os pontos P, Q, R possuem as seguintes coordenadas no plano:

$$P(\cos\beta, \text{sen}\beta)$$

$$Q(\cos(\alpha - \beta), \text{sen}(\alpha - \beta))$$

$$R(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$$

Note que os triângulos OAQ e OPR são semelhantes:



Como os arcos $\hat{O}$ são iguais, podemos afirmar que $AQ = PR$. Usando a fórmula da distância da geometria analítica ($d_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$), temos:

(Estudaremos com mais detalhes na aula de Geometria Analítica)

$$AQ^2 = (x_A - x_Q)^2 + (y_A - y_Q)^2$$

$$AQ^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + (0 - \text{sen}(\alpha - \beta))^2$$

$$AQ^2 = (1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta)) + \text{sen}^2(\alpha - \beta)$$

$$AQ^2 = 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + 1$$

$$\Rightarrow AQ^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta)$$



$$PR^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2$$

$$PR^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2$$

$$PR^2 = \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha$$

$$PR^2 = \underbrace{\cos^2\beta + \sin^2\beta}_1 + \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_1 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow PR^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

Igualando $AQ = PR$, temos:

$$AQ^2 = PR^2$$

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

2) $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Para demonstrar essa propriedade, podemos usar a fórmula acima e inserir $\beta = -\beta'$:

$$\cos(\alpha - (-\beta')) = \cos\alpha \cos(-\beta') + \sin\alpha \sin(-\beta')$$

A função cosseno é par: $\cos(-\beta') = \cos(\beta')$.

A função seno é ímpar: $\sin(-\beta') = -\sin(\beta')$.

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta') = \cos\alpha\cos\beta' - \sin\alpha\sin\beta'$$

3) $\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A)$

Vamos usar a relação de ângulos complementares:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$$

Usando a fórmula da diferença de arcos do cosseno, temos:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

4) $\sin(A - B) = \sin(A) \cos(B) - \sin(B) \cos(A)$

Podemos obter o seno da diferença usando o seno da soma:

$$\sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

5) $tg(A + B) = \frac{tg(A) + tg(B)}{1 - tg(A)tg(B)}$

Vamos usar o seno e o cosseno da soma:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$



$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\text{sen}\alpha \text{cos}\beta + \text{cos}\alpha \text{sen}\beta}{\text{cos}\alpha \text{cos}\beta}}{\frac{\text{cos}\alpha \text{cos}\beta - \text{sen}\alpha \text{sen}\beta}{\text{cos}\alpha \text{cos}\beta}}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

$$6) tg(A - B) = \frac{tg(A) - tg(B)}{1 + tg(A)tg(B)}$$

Podemos usar a fórmula da demonstração 5:

$$tg(\alpha + (-\beta)) = \frac{tg\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\alpha tg(-\beta)}$$

Como a função tangente é ímpar, temos:

$$\Rightarrow tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$$

7.2. ARCO DUPLO, ARCO TRIPLO E ARCO METADE

Agora que conhecemos as fórmulas da soma e diferença de arcos, podemos expandir o conhecimento para arco duplo, arco triplo e arco metade.

7.2.1. FÓRMULAS DE ARCO DUPLO

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

$$\text{sen}(2A) = 2\text{sen}A \cos A$$

$$tg(2A) = \frac{2tgA}{1 - tg^2 A}$$

Demonstrações:

$$1) \cos(2A) = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

Usando a fórmula da soma do cosseno, temos:

$$\cos(A + A) = \cos A \cos A - \text{sen} A \text{sen} A$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = \cos^2 A - \text{sen}^2 A$$

Também podemos representar essa identidade de outras formas. Usando a relação fundamental $\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$:

$$\cos(2A) = (1 - \text{sen}^2 A) - \text{sen}^2 A$$

$$\Rightarrow \cos(2A) = 1 - 2\text{sen}^2 A$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$



$$\Rightarrow \cos(2A) = 2 \cos^2 A - 1$$

$$2) \operatorname{sen}(2A) = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

Usando a fórmula da soma do seno, temos:

$$\operatorname{sen}(A + A) = \operatorname{sen} A \cos A + \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(2A) = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$

$$3) \operatorname{tg}(2A) = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

Usando a fórmula da soma da tangente, temos:

$$\operatorname{tg}(A + A) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(2A) = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

7.2.2. FÓRMULAS DE ARCO TRIPLO

$$\boxed{\cos(3A) = 4 \cos^3 A - 3 \cos A}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(3A) = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(3A) = \frac{3 \operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 A}}$$

Demonstrações:

$$1) \cos(3A) = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

Podemos usar as fórmulas de arco duplo e soma:

$$\cos(2A + A) = \cos(2A) \cos A - \operatorname{sen}(2A) \operatorname{sen} A$$

$$\cos(3A) = (2 \cos^2 A - 1) \cos A - (2 \operatorname{sen} A \cos A) \operatorname{sen} A$$

$$\cos(3A) = 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \operatorname{sen}^2 A \cos A$$

$$\cos(3A) = 2 \cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A) \cos A$$

$$\Rightarrow \cos(3A) = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

$$2) \operatorname{sen}(3A) = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$$

Usando as fórmulas de arco duplo e soma, temos:

$$\operatorname{sen}(2A + A) = \operatorname{sen}(2A) \cos A + \operatorname{sen} A \cos(2A)$$

$$\operatorname{sen}(3A) = (2 \operatorname{sen} A \cos A) \cos A + \operatorname{sen} A (1 - 2 \operatorname{sen}^2 A)$$

$$\operatorname{sen}(3A) = 2 \operatorname{sen} A \cos^2 A + \operatorname{sen} A - 2 \operatorname{sen}^3 A$$

$$\operatorname{sen}(3A) = 2 \operatorname{sen} A (1 - \operatorname{sen}^2 A) + \operatorname{sen} A - 2 \operatorname{sen}^3 A$$



$$\Rightarrow \operatorname{sen}(3A) = 3\operatorname{sen}A - 4\operatorname{sen}^3A$$

$$3) \operatorname{tg}(3A) = \frac{3\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}^3A}{1 - 3\operatorname{tg}^2A}$$

$$\operatorname{tg}(2A + A) = \frac{\operatorname{tg}(2A) + \operatorname{tg}A}{1 - \operatorname{tg}(2A)\operatorname{tg}A}$$

$$\operatorname{tg}(3A) = \frac{\frac{2\operatorname{tg}A}{1 - \operatorname{tg}^2A} + \operatorname{tg}A}{1 - \left(\frac{2\operatorname{tg}A}{1 - \operatorname{tg}^2A}\right)\operatorname{tg}A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(3A) = \frac{3\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}^3A}{1 - 3\operatorname{tg}^2A}$$

Observações:

Vale a pena decorar as fórmulas de arco triplo do seno e cosseno, pois eles já foram cobrados em provas anteriores.

7.2.3. FÓRMULAS DE ARCO METADE

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}A}{1 + \cos A}$$

$$\operatorname{sen}A = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$\cos(A) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$



$$\boxed{tg A = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

Demonstrações:

$$1) \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

Podemos usar a fórmula do arco duplo do cosseno:

$$\cos(2A) = 2 \cos^2 A - 1$$

Fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$\cos\left(2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(1 + \cos \alpha)}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$2) \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

Sabemos que $\cos(2A) = 1 - 2\sin^2 A$, assim, temos:

$$\cos\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$3) tg\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$4) \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A}$$

Usando as fórmulas de arco duplo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} &= \frac{1 - \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right)\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{A}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \\ \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} &= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + 2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \\ \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) &= \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A} \end{aligned}$$

$$5) \operatorname{sen} A = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Para deduzir essa fórmula, podemos usar o seno do arco duplo e usar $A = \frac{\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{2}\right) &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= 2\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) \\ \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$6) \operatorname{tg} A = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Usando o arco duplo da tangente e fazendo $A = \alpha/2$, temos:

$$\operatorname{tg}(2A) = \frac{2\operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$



$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$7) \cos(A) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha}$$

$$\operatorname{cos}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Substituindo $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ na relação do cosseno, encontramos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}\alpha &= \frac{\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}{\frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \\ \Rightarrow \operatorname{cos}\alpha &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned}$$

7.3. FÓRMULAS DE WERNER

As fórmulas de Werner são a **transformação de produto em soma ou diferença**. Elas estão listadas abaixo:

$$2\operatorname{cos}A\operatorname{cos}B = \operatorname{cos}(A + B) + \operatorname{cos}(A - B)$$

$$-2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \operatorname{cos}(A + B) - \operatorname{cos}(A - B)$$

$$2\operatorname{sen}A\operatorname{cos}B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2\operatorname{sen}B\operatorname{cos}A = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)$$

Demonstrações:

$$1) 2\operatorname{cos}A\operatorname{cos}B = \operatorname{cos}(A + B) + \operatorname{cos}(A - B)$$

$$\operatorname{cos}(A + B) = \operatorname{cos}A\operatorname{cos}B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$$

$$\operatorname{cos}(A - B) = \operatorname{cos}A\operatorname{cos}B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$$

Podemos somar as duas identidades:

$$\operatorname{cos}(A + B) + \operatorname{cos}(A - B) = 2\operatorname{cos}A\operatorname{cos}B$$



$$2) -2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$$

Podemos subtrair as duas identidades:

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2\operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$$

$$3) 2\operatorname{sen}A \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A \cos B - \operatorname{sen}B \cos A$$

Somando as duas identidades:

$$\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B) = 2\operatorname{sen}A \cos B$$

$$4) 2\operatorname{sen}B \cos A = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A \cos B - \operatorname{sen}B \cos A$$

Subtraindo as duas identidades:

$$\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B) = 2\operatorname{sen}B \cos A$$

7.4. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE



Ao nos depararmos com equações trigonométricas, algumas questões podem exigir que você saiba como aplicar uma transformação trigonométrica para conseguir resolvê-las. Vamos estudar cada uma delas.

As fórmulas abaixo são conhecidas como a transformação de soma ou diferença em produto:

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$



$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Demonstrações:

$$1) \operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Vamos usar as fórmulas da soma e diferença de arcos do seno:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A \cos B - \operatorname{sen}B \cos A$$

Somando essas duas identidades, temos:

$$\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B) = 2 \operatorname{sen}A \cos B$$

Agora, vamos fazer as seguintes substituições:

$$A + B = p$$

$$A - B = q$$

Assim, podemos escrever:

$$A = \frac{p+q}{2}$$

$$B = \frac{p-q}{2}$$

Substituindo na identidade $\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B) = 2 \operatorname{sen}A \cos B$, encontramos:

$$\operatorname{sen}(p) + \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$2) \operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A \cos B + \operatorname{sen}B \cos A$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A \cos B - \operatorname{sen}B \cos A$$

Vamos subtrair essas identidades:

$$\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B) = 2 \operatorname{sen}B \cos A$$

Substituindo A e B em função de p e q , temos:

$$\operatorname{sen}(p) - \operatorname{sen}(q) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$3) \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen}A \operatorname{sen}B$$



$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Somando as duas identidades, temos:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$$

Substituindo A e B :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$4) \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Subtraindo as duas identidades e escrevendo A e B em função de p e q :

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2\sin A \sin B$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$



16. (EEAR/2018)

O valor de $\sin(a + b) - \sin(a - b)$ é igual a

- a) $\sin 2a$
- b) $\cos 2a$
- c) $2 \sin b \cdot \cos a$
- d) $2 \sin a \cdot \cos b$

Comentários

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Logo,

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin b \cdot \cos a$$

Gabarito: "c".

17. (EEAR/2015)

Se $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{13}$ e $\sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{36}{65}$, então $\sin(\alpha + \beta)$ é igual a:



- a) $\frac{56}{65}$
- b) $\frac{40}{65}$
- c) $\frac{13}{36}$
- d) $\frac{13}{56}$

Comentários

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{4}{13} + \frac{36}{65} = \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65}$$

Gabarito: "a".

18. (EEAR/2013)

Sejam $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\sin 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

Comentários

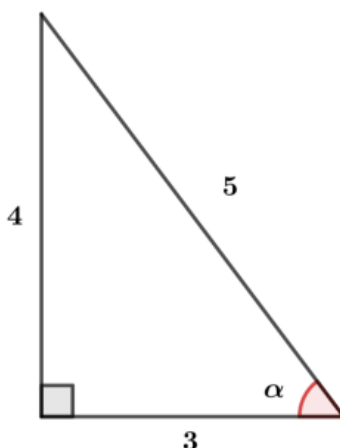
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow b - a = 25 - 24 = 1$$

Gabarito: "a".

19. Sejam α e β dois arcos do primeiro e segundo quadrantes, respectivamente. Se $\cos \alpha = 3/5$ e $\sin \beta = 12/13$, determine o valor de $\cos(\alpha + \beta)$.

Comentários

Para resolver esse problema, podemos usar o artifício do triângulo retângulo. A única coisa que devemos nos atentar é sobre o sinal das funções para os arcos. Sabendo que $\cos \alpha = 3/5$, temos:



Note que o outro cateto foi obtido pelo teorema de Pitágoras:

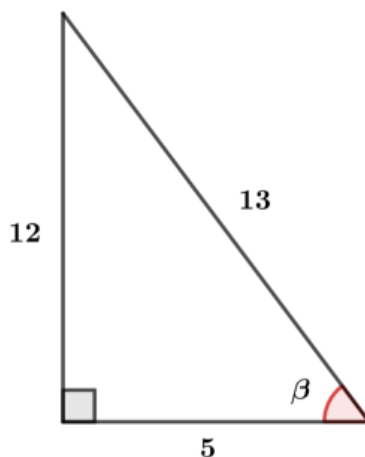


$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 = 16 \therefore x = 4$$

Assim, como α é do primeiro quadrante, temos que $\sin \alpha > 0$, logo:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

Para $\sin \beta = 12/13$, temos:



Como β é do segundo quadrante, temos que $\cos \beta < 0$, logo:

$$\cos \beta = -\frac{5}{13}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{3}{13} - \frac{48}{65} = \frac{-15 - 48}{65} \\ \therefore \cos(\alpha + \beta) &= -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

Gabarito: $-\frac{63}{65}$

20. Determine o valor de $\text{tg}(75^\circ)$.

Comentários

Podemos escrever que $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$. Lembrando que

$$\text{tg}(A + B) = \frac{\text{tg}(A) + \text{tg}(B)}{1 - \text{tg}(A)\text{tg}(B)}$$

Temos:

$$\text{tg}(75^\circ) = \text{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\text{tg}(30^\circ) + \text{tg}(45^\circ)}{1 - \text{tg}(30^\circ)\text{tg}(45^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$\text{tg}(75^\circ) = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}$$



Gabarito: $2 + \sqrt{3}$

21. Se $\cos(2x) = \frac{1}{3}$, onde $x \in (0, \pi)$, calcule o valor de $y = (\sin(3x) - \sin(x))/\cos(2x)$.

Resolução:

Vamos transformar a subtração em produto usando a fórmula de Prostaferese:

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$y = \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{\cos(2x)}$$

$$y = \frac{2 \sin\left(\frac{3x-x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)}{\cos(2x)}$$

$$y = \frac{2 \sin x \cos(2x)}{\cos(2x)}$$

$$y = 2 \sin x$$

Usando a informação $\cos(2x) = 1/3$, temos:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 2 \sin^2 x$$

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in (0, \pi)$, $\sin x > 0$, então:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: $y = 2\sqrt{3}/3$

22. Transformando-se $\sin 40^\circ + \cos 10^\circ$ em produto, obtemos:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ$

b) $\sqrt{3} \sin 20^\circ$

c) $\sqrt{3} \cos 20^\circ$

d) $\sqrt{2} \sin 20^\circ$

Resolução:

Podemos usar o ângulo complementar e escrever:

$$\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$$



Assim, podemos usar a fórmula de Prostaferese:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 80^\circ &= 2 \operatorname{sen} \left(\frac{40^\circ + 80^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{80^\circ - 40^\circ}{2} \right) \\ \operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 80^\circ &= 2 \operatorname{sen} 60^\circ \cos 20^\circ \\ \Rightarrow \operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 80^\circ &= \sqrt{3} \cos 20^\circ\end{aligned}$$

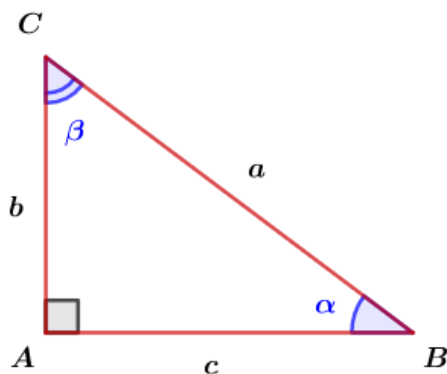
Gabarito: "c".

8. RESUMO

8.1. MEDIDAS USUAIS

Grau	Radiano
180°	$\pi \text{ rad}$

8.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS



Principais Razões	
$\operatorname{sen} \alpha$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$
$\cos \alpha$	$\frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{b}{c}$
$\operatorname{sec} \alpha$	$\frac{1}{\cos \alpha}$
$\operatorname{csc} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$
$\operatorname{cotg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$



8.3. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

8.4. ÂNGULOS COMPLEMENTARES

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

8.5. TRANSFORMAÇÕES

8.5.1. SOMA E DIFERENÇA DE ARCOS

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B)$$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) + \operatorname{sen}(B) \cos(A)$$

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) - \operatorname{sen}(B) \cos(A)$$

$$\operatorname{tg}(A + B) = \frac{\operatorname{tg}(A) + \operatorname{tg}(B)}{1 - \operatorname{tg}(A) \operatorname{tg}(B)}$$



$$\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg}(A) - \operatorname{tg}(B)}{1 + \operatorname{tg}(A)\operatorname{tg}(B)}$$

8.5.2. ARCO DUPLO

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$

$$\operatorname{sen}(2A) = 2\operatorname{sen}A\cos A$$

$$\operatorname{tg}(2A) = \frac{2\operatorname{tg}A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

8.5.3. ARCO TRIPLO

$$\cos(3A) = 4\cos^3 A - 3\cos A$$

$$\operatorname{sen}(3A) = 3\operatorname{sen}A - 4\operatorname{sen}^3 A$$

$$\operatorname{tg}(3A) = \frac{3\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}$$

8.5.4. ARCO METADE

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen}A} = \frac{\operatorname{sen}A}{1 + \cos A}$$

$$\operatorname{sen}A = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$



$$\cos(A) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{A}{2}\right)}$$

8.5.5. FÓRMULAS DE WERNER

$$2\cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$-2\sin A \sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$$

$$2\sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$$

$$2\sin B \cos A = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

8.5.6. FÓRMULAS DE PROSTAFÉRESE

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

9. QUESTÕES NÍVEL 1



1. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\sin(2\pi - x) + \sin(3\pi + x)$, obtém-se



- a) $\sin x$
- b) $-\sin x$
- c) $2 \sin x$
- d) $-2 \sin x$

2. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

- a) 48°
- b) 54°
- c) 66°
- d) 72°

3. (EEAR/2018)

O valor de $\sin 1270^\circ$ é igual a

- a) $-\cos 10^\circ$
- b) $-\sin 30^\circ$
- c) $-\sin 10^\circ$
- d) $-\cos 30^\circ$

4. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

- a) decrescente e decrescente
- b) decrescente e crescente
- c) crescente e decrescente
- d) crescente e crescente

5. (EEAR/2018)

O valor de $\sin(a + b) - \sin(a - b)$ é igual a

- a) $\sin 2a$
- b) $\cos 2a$
- c) $2 \sin b \cdot \cos a$



d) $2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

6. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\operatorname{cossec} x + \sec x}{\cotg x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\operatorname{sen} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{cossec} x$

7. (EEAR/2017)

Ao somar as medidas angulares 120° e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao ____ quadrante.

a) 1°

b) 2°

c) 3°

d) 4°

8. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735^\circ$ é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}$

9. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15^\circ$ é

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$



c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

10. (EEAR/2015)

Se $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{13}$ e $\sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{36}{65}$, então $\sin (\alpha + \beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

11. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\sin^2 x$

c) $\cos^2 x$

d) $2 + \cos^2 x$

12. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\sin x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x}$, com $\operatorname{tg} x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

13. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

a) 36

b) 38

c) 42



d) 46

14. (EEAR/2014)

Dados $\sin a = x$, $\cos a = y$, $\sin b = z$ e $\cos b = w$, então $\sin(a + b)$ é igual a

a) $xw + yz$ b) $xz + yw$ c) $xy - wz$ d) $xw - yz$ **15. (EEAR/2013)**

Se x é um arco do 1° quadrante, com $\sin x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

a) a b) b c) $-a$ d) $-b$ **16. (EEAR/2013)**

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

a) 170° b) 220° c) 280° d) 320° **17. (EEAR/2013)**

Sejam $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\sin 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

**18. (EEAR/2013)**

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\operatorname{sen} x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

- a) t
- b) $\frac{u}{t}$
- c) $u \cdot t$
- d) $u + t$

19. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1, 1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

- a) I.
- b) III.
- c) I e II.
- d) II e III.

20. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em _____ arcos de 30°

- a) 6
- b) 5
- c) 4
- d) 3

21. (EEAR/2011)

Se $\operatorname{sen} y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cosec} y}$ é

- a) m .
- b) n^2 .
- c) mn .



d) $\frac{m}{n}$.

22. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120^\circ$ e $B = \operatorname{tg} 240^\circ$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

23. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\sin x > 0$, então $\sin 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

24. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cossec} x}$

a) $\operatorname{cossec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

25. (EEAR/2010)

Se $\sin x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\sin x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**26. (EEAR/2010)**

Seja $x = 150^\circ$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\sin 2x < 0$

III) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

27. (EEAR/2010)

O valor de $\cos 15^\circ$ é

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

28. (EEAR/2010)

Para $x \cdot y \neq 0$, a expressão $\frac{y^2 \cos 180^\circ - xy \sin 270^\circ + y^2 \sin 90^\circ}{x^2 \cos 0^\circ}$ equivale a:

a) $\frac{y}{x}$

b) $\frac{1}{x}$

c) $\frac{y}{x^2}$

d) $\frac{y^2}{x^2}$

29. (EEAR/2009)

São negativas, no 4º quadrante, as funções

a) seno, cosseno e tangente.



- b) seno, cosseno e cotangente.
- c) cosseno, tangente e secante.
- d) seno, tangente e cossecante.

30. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\operatorname{tg} 10^\circ = \operatorname{tg}(-10^\circ)$

II- $\operatorname{tg} 770^\circ = -\operatorname{tg}(50^\circ)$

III- $\operatorname{sen} 250^\circ = \operatorname{sen} 20^\circ$

IV- $\operatorname{sen} 460^\circ = \operatorname{sen} 100^\circ$

O número de igualdades verdadeiras é

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.

31. (EEAR/2009)

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b = 90^\circ$, então $\cos(a - b)$, em função de b , é igual a

- a) $\operatorname{sen} 2b$
- b) $\cos 2b$
- c) $\frac{\operatorname{sen} 2b}{2}$
- d) $\frac{\cos 2b}{2}$

32. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do 1° quadrante, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x + y)$ é igual a

- a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$
- b) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{4}$
- c) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$



d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

33. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, então $\sin 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

34. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\sin x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo

a) $[-1, 0[$.

b) $[0, 1[$.

c) $[1, 3[$.

d) $[0, 2[$.

35. (EEAR/2008)

Comparando-se $\operatorname{tg} 20^\circ$, $\operatorname{tg} 110^\circ$ e $\operatorname{tg} 200^\circ$, obtém-se

a) $\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg} 200^\circ > \operatorname{tg} 110^\circ$.

b) $\operatorname{tg} 20^\circ = \operatorname{tg} 200^\circ < \operatorname{tg} 110^\circ$.

c) $\operatorname{tg} 20^\circ < \operatorname{tg} 200^\circ < \operatorname{tg} 110^\circ$.

d) $\operatorname{tg} 20^\circ < \operatorname{tg} 200^\circ < \operatorname{tg} 110^\circ$.

36. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3}}$ é

a) $1 - \sqrt{2}$

b) $1 + \sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

37. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x - 1}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

38. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$, então $\operatorname{sen} 2x$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{2}{5}$

39. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e $y = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, então y é igual a

a) $\operatorname{tg} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{sen} x$

40. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

a) 30.

b) 40.

c) 50.



d) 60.

41. (EEAR/2007)O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5 \operatorname{sen} x$ é

a) $[-2, 8]$.

b) $[3, 7]$.

c) $[-1, 5]$.

d) $[0, 4]$.

42. (EEAR/2007)Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

43. (EEAR/2006)Se $2 \cdot \operatorname{sen} x + 5 \cdot \cos x = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x =$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

44. (EEAR/2006)O domínio da função $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ é:

a) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$



d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) 1° .

b) 2° .

c) 3° .

d) 4° .

46. (EEAR/2006)

Sejam as medidas de arcos trigonométricos:

I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;

II- 1490° e -1030°

É correto afirmar que as medidas

a) em I são de arcos côngruos.

b) em I são de arcos suplementares.

c) em II são de arcos côngruos.

d) em II são de arcos complementares.

47. (EEAR/2006)

Se $x \in 1^\circ Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos \frac{x}{2} =$

a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

48. (EEAR/2005)

Se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} 2\alpha$ é

a) $\frac{1}{3}$



b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{4}$

49. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\sin x = 2k - 5$ se, e somente se,

a) $1 < k \leq 3$.

b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

50. (EEAR/2005)

Seja $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}$, obtém-se

a) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$

b) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$

c) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$

d) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$

51. (EEAR/2005)

Sendo $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ é

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

52. (EEAR/2004)

Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

a) $\frac{4}{25}$.

b) $\frac{33}{25}$.



c) $\frac{21}{25}$.

d) $\frac{17}{25}$.

53. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico:

I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao 2° quadrante.

II. o arco 1510° pertence ao 3° quadrante.

III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao 4° quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

a) II.

b) I e II.

c) I e III.

d) I, II e III.

54. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ é equivalente a:

a) $2 \operatorname{sen} x$

b) $2 \operatorname{sec} x$

c) $2 \cos x$

d) $2 \operatorname{cossec} x$

55. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1+\operatorname{cotg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

a) $\operatorname{tg}^2 x$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $\operatorname{cotg}^2 x$

d) $\cos^2 x$

56. (EEAR/2003)

Sendo $a - b = 30^\circ$, calculando $y = (\operatorname{sen} a + \cos b)^2 + (\operatorname{sen} b - \cos a)^2$, obtemos



- a) 1
- b) $\frac{2}{3}$
- c) 3
- d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

57. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x - \sin^2 x$ é igual a

- a) 1 para todo número real x .
- b) -1 para todo número real x .
- c) $2 \cos^2 x - 1$, para todo número real x .
- d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x .

58. (EEAR/2003)

O produto $(\operatorname{tg} x) \cdot (\sin 2x)$ é igual a

- a) $\sin^2 x$
- b) $\cos^2 x$
- c) $2 \sin^2 x$
- d) $2 \cos^2 x$

59. (EEAR/2002)

Das afirmações:

- I. $\cos x = \sqrt{1 - \sin x}$
- II. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- III. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π , conclui-se que:

- a) a única falsa é I
- b) a única falsa é II
- c) a única falsa é III
- d) as três são verdadeiras

**60. (EEAR/2002)**

Se a $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$ é igual a:

- a) $\frac{7}{5}$
- b) $-\frac{7}{5}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) $-\frac{1}{5}$

61. (EEAR/2002)

O $\operatorname{sen} \frac{122\pi}{9}$ é igual ao

- a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{9}$
- b) $\operatorname{sen} \frac{4\pi}{9}$
- c) $-\operatorname{sen} \frac{5\pi}{9}$
- d) $-\operatorname{sen} \frac{4\pi}{9}$

62. (EEAR/2002)

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) $\frac{2}{3}$

63. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

- | | | |
|---|-----|---------------------------------|
| (1) $\operatorname{sen}^2 2x$ | () | $2 \cos^2 x$ |
| (2) $1 + \cos 2x$ | () | $2 \operatorname{sen} x \cos x$ |
| (3) $\operatorname{sen} 2x$ | () | $1 - \cos^2 2x$ |
| (4) $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ | () | $-\operatorname{sen} x$ |
| (5) $\operatorname{sen}(-x)$ | () | $\cos x$ |



Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

- a) 1, 3, 4, 5, 2
- b) 2, 3, 1, 5, 4
- c) 3, 1, 2, 4, 5
- d) 2, 3, 5, 1, 4

64. (EEAR/2001) [Adaptada]

Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão $y = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

- a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- b) $y < 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- c) $y > 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

65. (EEAR/2001)

Se $\operatorname{tg} x = -3$, então $\operatorname{tg} 4x$ é igual a:

- a) $-\frac{3}{4}$
- b) $-\frac{24}{7}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{24}{7}$

66. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1 + \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$ é identicamente igual a:

- a) $\operatorname{cotg} x$
- b) $\sec x$
- c) $\operatorname{sen} x$
- d) $\operatorname{tg} x$

67. (EEAR/2000)

O valor de $(\operatorname{sen} 112^\circ 30' + \cos 112^\circ 30')^2$ é:



a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

68. (EsPCEEx/2018)

Considere o triângulo com ângulos internos x , 45° e 120° . O valor de $\text{tg}^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $2 - 4\sqrt{3}$

69. (EsPCEEx/2018)

Sendo $M = \arctg(x)$, $N = \arctg\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P = \text{tg}(M - N)$, o valor de $30P$ para $x = 15$ é:

a) $\frac{224}{30}$

b) $\frac{45}{6}$

c) 45

d) 224

e) 225

70. (EsPCEEx/2014)

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left(\cos \left(\left(\frac{t-2}{6} \right) \pi \right) + 5 \right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

d) a população média anual é de 6000 animais.

e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.



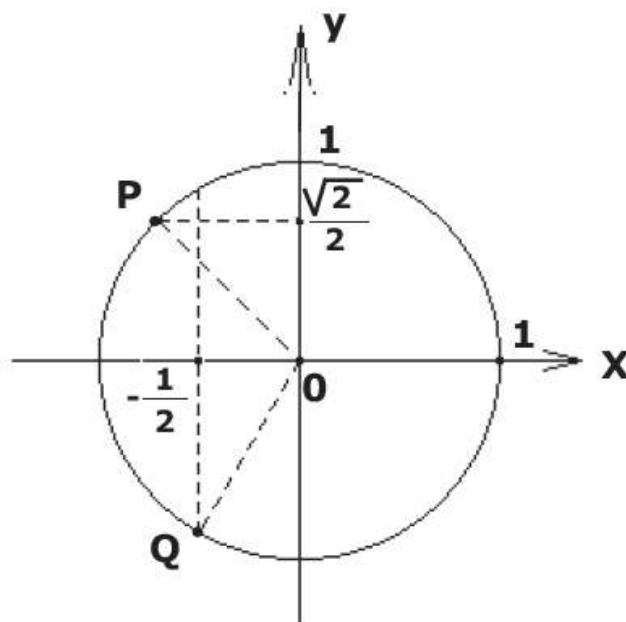
71. (EsPCEx/2014)

O valor de $(\cos 165^\circ + \sin 155^\circ + \cos 145^\circ - \sin 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$ é

- a) $\sqrt{2}$
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) $\frac{1}{2}$

72. (EsPCEx/2012)

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β , medidos no sentido positivo.



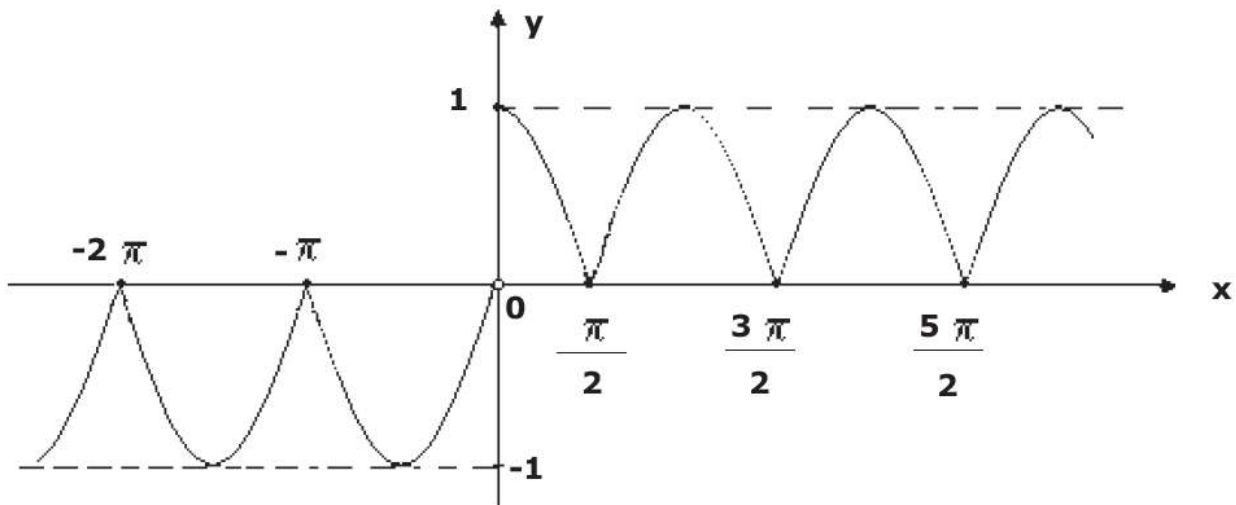
O valor de $\text{tg}(\alpha + \beta)$ é

- a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
- c) $2 + \sqrt{3}$
- d) $2 - \sqrt{3}$
- e) $-1 + \sqrt{3}$



73. (EsPCEx/2011)

A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



- a) $\begin{cases} -|\sen x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} |\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\sen x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} -|\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\sen x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} |\sen x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \sen x, & \text{se } x < 0 \\ \cos x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

74. (EsPCEx/2011)

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\tg 2220^\circ)^2$ é:

- a) -1
- b) 0
- c) $\frac{1}{2}$
- d) 1
- e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

75. (EsPCEx/2011)

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

- a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$
- b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$



c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

76. (EsPCEX/2010)

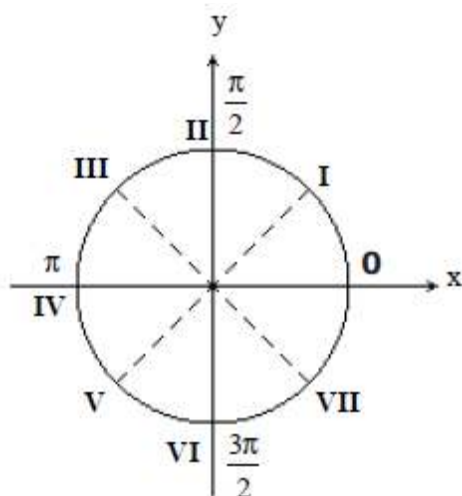
Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \dots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

- a) pentágono (5 lados).
- b) hexágono (6 lados).
- c) octógono (8 lados).
- d) decágono (10 lados).
- e) dodecágono (12 lados).

77. (EsPCEX/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \dots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao 13º termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

- a) I e II



b) II e III

c) IV e V

d) V e VI

e) VII e 0

78. (EsPCEx/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ}$ é igual a:

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

79. (EsPCEx/2005)

A função $f(x) = \left[\sin 2x \cdot \left(\frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2 \sin x} \right) \right]^2 - \sin 2x$ é definida para todo x real e $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

a) $f(2006) = f(2004) + f(2005)$.

b) $f(2005) = f(2006) - 2f(2003)$.

c) $f(2006) = f(2005) + f(2004) + f(2003)$.

d) $f(2005) = f(2006) - f(2004)$.

e) $f(2006) = f(2003) + f(2004) - f(2005)$.

80. (EsPCEx/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\tan 210^\circ}$

II- $\frac{\cotg 50^\circ \cdot \sin 93^\circ}{\tan 181^\circ}$

III- $\frac{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x}{\sec x \cdot \cotg x}, x \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$

IV- $\frac{\sin x \cdot \tg x}{\operatorname{cosec} x}, x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.



- b) I e IV.
- c) II e III.
- d) I e III.
- e) III e IV.

81. (EsPCEEx/2002)

Se $z = \frac{2-3 \operatorname{sen} x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

- a) $-2 \leq x \leq -1$
- b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$
- c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$
- d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

82. (EsPCEEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w , ambos pertencentes ao 1° quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

- a) $[0^\circ, 15^\circ]$
- b) $[15^\circ, 30^\circ]$
- c) $[30^\circ, 45^\circ]$
- d) $[45^\circ, 60^\circ]$
- e) $[60^\circ, 90^\circ]$

83. (EsPCEEx/2002)

O valor numérico da expressão $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ é:

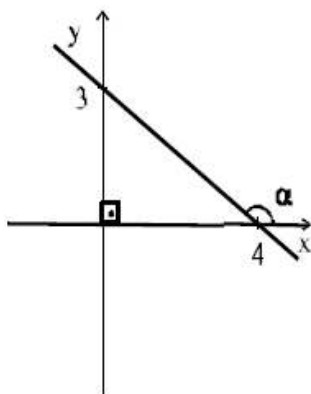
- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{6}$



e) $\frac{1}{8}$

84. (EsPCEX/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



a) $\frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5}$

c) $-\frac{3}{5}$

d) $\frac{5}{3}$

e) $-\frac{5}{4}$

85. (EsPCEX/2001)

São arcos côngruos:

a) -730° e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) 1640° e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) 350° e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) 1235° e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) 2000° e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

86. (EsPCEX/2001)

Se $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$, então o valor de $\operatorname{tg} \alpha$ é igual a:

a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$



- c) $\frac{12}{13}$
- d) $\frac{12}{5}$
- e) $-\frac{12}{13}$

87. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) 1
- c) $3/2$
- d) 2
- e) 0

88. (EsPCEx/2000)

Sendo $\left\{ k \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq \frac{k\pi}{4} \right\}$, então $2 - \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

- a) $\cos^2 x$
- b) $\sin^2 x$
- c) $\sec^2 x$
- d) $\operatorname{cosec}^2 x$
- e) 1

89. (EsPCEx/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0^\circ < y < 30^\circ$, o maior dentre os números $\sin y$, $\cos y$, $\sin^2 y$, $\cos^2 y$ e $\sin y \cdot \cos y$ é

- a) $\sin y$
- b) $\cos y$
- c) $\sin^2 y$
- d) $\cos^2 y$
- e) $\sin y \cdot \cos y$

**90. (EsPCEx/2000)**

O valor de $3\text{sen } 10^\circ \cdot (\text{tg } 5^\circ + \text{cotg } 5^\circ)$ é igual a

- a) $\frac{3}{2}$
- b) 2
- c) 3
- d) 5
- e) 6

91. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre 0° e 1560° cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

- a) 6
- b) 7
- c) 8
- d) 9
- e) 10

92. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5 - \text{sen } x}$ são, respectivamente,

- a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$
- b) $\mathbb{R}$ e $\left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$
- c) $\mathbb{R}$ e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right]$
- d) $\mathbb{R}^*$ e $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$
- e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $\left]-1, \frac{1}{3}\right]$

93. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo retângulo ABC , a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \widehat{B} = 0,6$. Calcular a soma dos catetos.

94. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)



Num triângulo ABC tem-se $BC = 6$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$ e $\widehat{BCA} = 45^\circ$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC .

95. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Obter M tal que $\cos x = \frac{1}{M}$ e $\sin x = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

96. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular $\sec x$ sabendo que $\sin x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $a > b > 0$.

97. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y = (\operatorname{tg} x - \sin x)^2 + (1 - \cos x)^2 - (\sec x - 1)^2$$

98. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y = \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 - \operatorname{tg}^4 x} + \frac{\operatorname{cosec} x - \sin x}{\sec x - \cos x}$$

99. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as seguintes identidades:

a) $\operatorname{tg}(-2734^\circ) = -\operatorname{tg} 34^\circ$

b) $\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

100. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

101. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $y = 2 - 3\sin x$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

a) 5

b) 1



- c) 3
- d) -1
- e) 6

102. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sendo dado que $\operatorname{sen} x + \cos x = a$, calcule:

- a) $\operatorname{sen} x \cos x$
- b) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$
- c) $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

103. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x - \cos y} = 2$ e $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} y$ é igual a:

- a) 3
- b) $1/6$
- c) 0
- d) $-4/3$
- e) -3

104. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

- a) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
- b) $\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}$

105. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $\operatorname{tg} x + \sec x = 3/2$, calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

106. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

107. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)



Para $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{\sec x}{\tan x + \cot x} = \sec x$

b) $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 2\sec^2 x - 1$

108. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} \sec x - \cos x = a \\ \cos 2x = b \end{cases}$$

109. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Verifique a seguinte identidade:

$$2\arctg\left(\frac{1}{3}\right) + \arctg\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

110. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $\tan x = -\tan \alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sec x = \operatorname{cosec} \alpha$

c) Sendo $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

111. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sobre a função f definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.

b) f é constante.

c) f é injetora.

d) f é ímpar.

e) $f(x) = \cos^2 x$, para todo x real.

112. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

O valor numérico da expressão



$$\operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É

a) $1/2$ b) $1/3$ c) $1/4$ d) $1/6$ e) $1/8$

GABARITO

1. d
2. b
3. c
4. a
5. c
6. c
7. a
8. c
9. a
10. a
11. b
12. d
13. c
14. a
15. d
16. d
17. a
18. c
19. a
20. b
21. d
22. b
23. a
24. c
25. b
26. c
27. b
28. a
29. d
30. a



- 31. a
- 32. c
- 33. c
- 34. d
- 35. a
- 36. a
- 37. d
- 38. c
- 39. c
- 40. b
- 41. a
- 42. a
- 43. b
- 44. b
- 45. d
- 46. c
- 47. c
- 48. d
- 49. d
- 50. c
- 51. b
- 52. d
- 53. c
- 54. d
- 55. c
- 56. c
- 57. c
- 58. c
- 59. a
- 60. d
- 61. c ou d
- 62. b
- 63. b
- 64. c
- 65. d
- 66. a
- 67. c
- 68. c
- 69. d
- 70. a
- 71. c
- 72. d
- 73. a
- 74. d
- 75. d



76. c

77. d

78. d

79. e

80. b

81. c

82. e

83. c

84. d

85. c

86. a

87. d

88. c

89. b

90. e

91. d

92. c

93. $S = 14$

94. $h = 3\sqrt{3} - 3$

95. $M = -1$ ou $M = 2$ b

96. $\sec x = \pm \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

97. $y = 0$

98. $y = \cos^4 x + \cot^3 x$ c

99. Demonstração

100. Demonstração

101. $y = 5$

102. a) $\sin x \cos x = \frac{a^2-1}{2}$ b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}$ c) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}$

103. e

104. Demonstração

105. $\sin x = 5/13$ e $\cos x = 12/13$

106. Demonstração

107. Demonstração

108. $b^2 = a^2(2 - a^2)$

109. Demonstração

110. a) V b) V c) F d) V

111. b

112. c

RESOLUÇÃO

1. (EEAR/2019)

Simplificando a expressão $\sin(2\pi - x) + \sin(3\pi + x)$, obtém-se



- a) $\sin x$
- b) $-\sin x$
- c) $2 \sin x$
- d) $-2 \sin x$

Comentários

$$\sin(2\pi - x) + \sin(3\pi + x) = \sin(-x) + \sin(\pi + x) = -\sin x - \sin x = -2 \sin x.$$

Gabarito: “d”.

2. (EEAR/2019)

Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

- a) 48°
- b) 54°
- c) 66°
- d) 72°

Comentários

Como π rad vale 180° , temos:

$$\frac{3\pi}{10} \text{ rad} = \frac{3}{10} \cdot 180^\circ = 54^\circ$$

Gabarito: “b”.

3. (EEAR/2018)

O valor de $\sin 1270^\circ$ é igual a

- a) $-\cos 10^\circ$
- b) $-\sin 30^\circ$
- c) $-\sin 10^\circ$
- d) $-\cos 30^\circ$

Comentários

$$\sin 1270^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ + 190^\circ) = \sin 190^\circ = \sin(180^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

Gabarito: “c”.

4. (EEAR/2018)

As funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, no segundo quadrante, são, respectivamente,

- a) decrescente e decrescente
- b) decrescente e crescente



c) crescente e decrescente

d) crescente e crescente

Comentários

A função seno atinge seu máximo em $x = \frac{\pi}{2}$, no início do segundo quadrante. Portanto, ela é decrescente no segundo quadrante. A função cosseno também é decrescente, atingindo seu mínimo ao final do segundo quadrante, em $x = \pi$.

Gabarito: "a".

5. (EEAR/2018)

O valor de $\sin(a + b) - \sin(a - b)$ é igual a

a) $\sin 2a$

b) $\cos 2a$

c) $2 \sin b \cdot \cos a$

d) $2 \sin a \cdot \cos b$

Comentários

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Logo,

$$\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin b \cdot \cos a$$

Gabarito: "c".

6. (EEAR/2017)

Seja $M = \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\cotg x + 1}$, com $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a

a) $\sin x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{cosec} x$

Comentários

$$\begin{aligned} M &= \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\cotg x + 1} = \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + 1} = \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}}{\frac{\cos x + \sin x}{\sin x}} = \frac{\sin x + \cos x}{(\cos x + \sin x) \cdot \cos x} \\ &= \frac{1}{\cos x} = \sec x \end{aligned}$$

Gabarito: "c".

**7. (EEAR/2017)**

Ao somar as medidas angulares 120° e $\frac{3\pi}{2}$ rad, obtém-se a medida de um arco pertencente ao ____quadrante.

- a) 1°
- b) 2°
- c) 3°
- d) 4°

Comentários

Vamos transformar tudo para graus.

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

Logo:

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = \frac{3}{2} \cdot 180^\circ = 270^\circ$$

Efetuando a soma: $\gamma = \alpha + \beta = 120^\circ + 270^\circ = 390^\circ = 360^\circ + 30^\circ \in]0, 90^\circ[$

Isto é, a soma γ pertence ao primeiro quadrante.

Gabarito: “a”.

8. (EEAR/2016)

O valor de $\cos 735^\circ$ é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{8}$

Comentários

$$\begin{aligned}\cos 735^\circ &= \cos(2 \cdot 360^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Gabarito: “c”.

9. (EEAR/2016)

O valor correspondente ao $\cos 15^\circ$ é

- a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
- b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$



c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) 1

Comentários

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “a”.

10. (EEAR/2015)

Se $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{4}{13}$ e $\sin \beta \cdot \cos \alpha = \frac{36}{65}$, então $\sin(\alpha + \beta)$ é igual a:

a) $\frac{56}{65}$

b) $\frac{40}{65}$

c) $\frac{13}{36}$

d) $\frac{13}{56}$

Comentários

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{4}{13} + \frac{36}{65} = \frac{20 + 36}{65} = \frac{56}{65}$$

Gabarito: “a”.

11. (EEAR/2015) [Adaptada]

Ao simplificar a expressão $(1 + \cos x)(1 - \cos x)$, tem-se

a) 2

b) $\sin^2 x$

c) $\cos^2 x$

d) $2 + \cos^2 x$

Comentários

$$(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

Gabarito: “b”.

12. (EEAR/2015)

Seja $A = \frac{\sin x \cdot \sec x}{\tan x}$, com $\tan x \neq 0$. Nessas condições, o valor de A é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 1

**Comentários**

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \sec x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

Gabarito: “d”.

13. (EEAR/2015)

O valor de $\frac{7\pi}{30}$ rad em graus é:

- a) 36
- b) 38
- c) 42
- d) 46

Comentários

Como π rad vale 180° , temos:

$$\frac{7\pi}{30} \text{ rad} = \frac{7}{30} \cdot 180^\circ = 42^\circ$$

Gabarito: “c”.

14. (EEAR/2014)

Dados $\operatorname{sen} a = x$, $\cos a = y$, $\operatorname{sen} b = z$ e $\cos b = w$, então $\operatorname{sen}(a + b)$ é igual a

- a) $xw + yz$
- b) $xz + yw$
- c) $xy - wz$
- d) $xw - yz$

Comentários

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b = xw + yz$$

Gabarito: “a”.

15. (EEAR/2013)

Se x é um arco do 1° quadrante, com $\operatorname{sen} x = a$ e $\cos x = b$, então $y = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)}$ é:

- a) a
- b) b
- c) $-a$
- d) $-b$

Comentários



$$y = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos(\pi + x)} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot (-\cos x)} = \frac{a \cdot b}{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = -b$$

Gabarito: “d”.

16. (EEAR/2013)

Ao expressar $\frac{16\pi}{9}$ rad em graus, obtém-se

- a) 170°
- b) 220°
- c) 280°
- d) 320°

Comentários

Como $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, temos:

$$\frac{16\pi}{9} \text{ rad} = \frac{16}{9} \cdot 180^\circ = 320^\circ$$

Gabarito: “d”.

17. (EEAR/2013)

Sejam $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$ e $\sin 2x = \frac{a}{b}$. Se $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível, então $b - a$ é igual a

- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4

Comentários

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \Rightarrow b - a = 25 - 24 = 1$$

Gabarito: “a”.

18. (EEAR/2013)

Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{1}{t}$ e $\sin x = u$, uma maneira de expressar o valor de $\cos x$ é

- a) t
- b) $\frac{u}{t}$
- c) $u \cdot t$
- d) $u + t$

Comentários



$$\cos x = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{u}{\frac{1}{t}} = u \cdot t$$

Gabarito: “c”.

19. (EEAR/2012)

Sejam as sentenças:

I- período $p = \pi$;

II- domínio $D = \mathbb{R}$;

III- conjunto imagem $Im = [-1, 1]$.

Em relação à função tangente, é (são) verdadeira(s) a(s) sentença(s)

a) I.

b) III.

c) I e II.

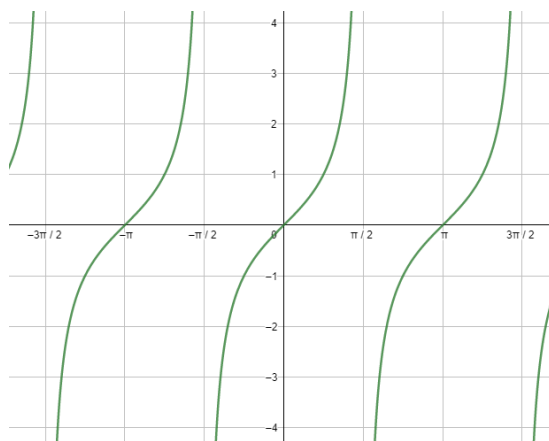
d) II e III.

Comentários

I-Verdadeiro.

II-Falso. Domínio $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

III-Falso. $Im = \mathbb{R}$. De fato, dado $y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \mid y = \tan x$. Tome $x = \arctan y$, por exemplo.



Gabarito: “a”.

20. (EEAR/2011)

Um arco de circunferência de $\frac{5\pi}{6}$ rad pode ser dividido em _____ arcos de 30°

a) 6

b) 5

c) 4



d) 3

Comentários

Como $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, temos:

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5}{6} \cdot 180^\circ = 150^\circ$$

que pode ser dividido em $(150^\circ/30^\circ) = 5$ arcos de 30° .

Gabarito: “b”.

21. (EEAR/2011)

Se $\sin y = m$ e $\cos y = n$, o valor de $\frac{\sec y}{\operatorname{cosec} y}$ é

a) m .

b) n^2 .

c) mn .

d) $\frac{m}{n}$.

Comentários

$$\frac{\sec y}{\operatorname{cosec} y} = \frac{\frac{1}{\cos y}}{\frac{1}{\sin y}} = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{m}{n}$$

Gabarito: “d”.

22. (EEAR/2011)

Se $A = \operatorname{tg} 120^\circ$ e $B = \operatorname{tg} 240^\circ$, então

a) $B = A$

b) $B = -A$

c) $B = 2A$

d) $B = -2A$

Comentários

$$B = \operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}(360^\circ - 120^\circ) = \operatorname{tg}(-120^\circ) = -\operatorname{tg} 120^\circ = -A$$

Gabarito: “b”.

23. (EEAR/2011)

Se $\cos x = \frac{2}{3}$ e $\sin x > 0$, então $\sin 2x$ é

a) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$



c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Comentários

$$\sin x > 0 \Rightarrow \sin x = +\sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: “a”.

24. (EEAR/2010)

Simplificando-se a expressão $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

a) $\operatorname{cosec} x$

b) $\cos x$

c) $\sec x$

d) $\operatorname{tg} x$

Comentários

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Gabarito: “c”.

25. (EEAR/2010)

Se $\sin x + \cos 2x = 1$, então um dos valores de $\sin x$ é

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Usando a fórmula de cosseno do arco duplo, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$, ficamos com um polinômio do segundo grau em $\sin x$.

$$\sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin x + (1 - 2 \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ ou } \sin x = \frac{1}{2}$$

**Gabarito: “b”.****26. (EEAR/2010)**

Seja $x = 150^\circ$. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças, a seguir assinale a alternativa que apresenta o número de sentenças verdadeiras

I) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

II) $\sin 2x < 0$

III) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2 + \sqrt{3}$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

Comentários

I) Falsa.

$$\cos x = \cos(180^\circ - 30^\circ) = \cos 180^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 180^\circ \cdot \sin 30^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

II) Verdadeira.

$$\sin 2x = \sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

III) Verdadeira.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin 150^\circ}{1 + \cos 150^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Gabarito: “c”.**27. (EEAR/2010)****O valor de $\cos 15^\circ$ é**

a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $2 - \sqrt{2}$

d) $2 + \sqrt{3}$

Comentários

O estudante poderia tentar ir pelo seguinte caminho (talvez já tenha até decorado o resultado), sem sucesso:



$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Provavelmente o que a banca esperava era:

$$\cos 30^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = 2 \cos^2 15^\circ - 1 \Rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Gabarito: “b”.

28. (EEAR/2010)

Para $x \cdot y \neq 0$, a expressão $\frac{y^2 \cos 180^\circ - xy \sin 270^\circ + y^2 \sin 90^\circ}{x^2 \cos 0^\circ}$ equivale a:

- a) $\frac{y}{x}$
- b) $\frac{1}{x}$
- c) $\frac{y}{x^2}$
- d) $\frac{y^2}{x^2}$

Comentários

$$\begin{aligned} \frac{y^2 \cos 180^\circ - xy \sin 270^\circ + y^2 \sin 90^\circ}{x^2 \cos 0^\circ} &= \frac{y^2 \cdot (-1) - xy \cdot (-1) + y^2 \cdot 1}{x^2 \cdot 1} \\ &= \frac{-y^2 + xy + y^2}{x^2} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Gabarito: “a”.

29. (EEAR/2009)

São negativas, no 4º quadrante, as funções

- a) seno, cosseno e tangente.
- b) seno, cosseno e cotangente.
- c) cosseno, tangente e secante.
- d) seno, tangente e cossecante.

Comentários

No 4º quadrante, o seno e a cossecante são negativos, o cosseno e a secante são positivos e a tangente e a cotangente são negativas.

Gabarito: “d”.

30. (EEAR/2009)

Considere as igualdades:

I- $\text{tg } 10^\circ = \text{tg}(-10^\circ)$



II- $\text{tg } 770^\circ = -\text{tg}(50^\circ)$

III- $\text{sen } 250^\circ = \text{sen } 20^\circ$

IV- $\text{sen } 460^\circ = \text{sen } 100^\circ$

O número de igualdades verdadeiras é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

Comentários

I- Falsa. A tangente é uma função ímpar:

$$\text{tg}(-10^\circ) = \frac{\text{sen}(-10^\circ)}{\text{cos}(-10^\circ)} = \frac{-\text{sen}(10^\circ)}{\text{cos}(10^\circ)} = -\text{tg } 10^\circ$$

II- Falsa.

$$\text{tg } 770^\circ = \text{tg}(4 \cdot 180^\circ + 50^\circ) = \text{tg } 50^\circ \neq \text{tg}(-50^\circ)$$

III-Falsa.

$$\text{sen } 250^\circ = \text{sen}(270^\circ - 20^\circ) = \text{sen } 270^\circ \cos 20^\circ - \text{sen } 20^\circ \cos 270^\circ = -\cos 20^\circ \neq \text{sen } 20^\circ.$$

IV-Verdadeira.

$$\text{sen } 460^\circ = \text{sen}(360^\circ + 100^\circ) = \text{sen } 100^\circ$$

Gabarito: “a”.

31. (EEAR/2009)

Sejam a e b arcos do primeiro quadrante. Se $a + b = 90^\circ$, então $\cos(a - b)$, em função de b , é igual a

a) $\text{sen } 2b$

b) $\cos 2b$

c) $\frac{\text{sen } 2b}{2}$

d) $\frac{\cos 2b}{2}$

Comentários

$$\cos(a - b) = \cos(90^\circ - b - b) = \cos(90^\circ - 2b) = \text{sen } 2b$$

Gabarito: “a”.

32. (EEAR/2009)

Se x e y são arcos do 1º quadrante, $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então o valor de $\cos(x + y)$ é igual a



a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

Comentários

x e y do primeiro quadrante $\Rightarrow \cos x > 0$ e $\sin y > 0$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Gabarito: “c”.

33. (EEAR/2008)

Se $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, então $\sin 2\alpha$ é igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

d) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Gabarito: “c”.

34. (EEAR/2008)

Os valores de m que verificam simultaneamente as igualdades $\sin x = m$ e $\cos x = 1 - m$ pertencem ao intervalo



a) $[-1, 0[$.

b) $[0, 1[$.

c) $[1, 3[$.

d) $[0, 2[$.

Comentários

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x = m^2 + (1 - m)^2 = 2m^2 - 2m + 1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 1$$

Perceba que $\{0, 1\} \subseteq [0, 2[$ apenas.

Gabarito: “d”.

35. (EEAR/2008)

Comparando-se $\text{tg } 20^\circ$, $\text{tg } 110^\circ$ e $\text{tg } 200^\circ$, obtém-se

a) $\text{tg } 20^\circ = \text{tg } 200^\circ > \text{tg } 110^\circ$.

b) $\text{tg } 20^\circ = \text{tg } 200^\circ < \text{tg } 110^\circ$.

c) $\text{tg } 20^\circ < \text{tg } 200^\circ < \text{tg } 110^\circ$.

d) $\text{tg } 20^\circ < \text{tg } 200^\circ < \text{tg } 110^\circ$.

Comentários

$$\text{tg } 110^\circ = \text{tg}(180^\circ - 70^\circ) = -\text{tg } 70^\circ < 0$$

$$\text{tg } 200^\circ = \text{tg}(180^\circ + 20^\circ) = \text{tg } 20^\circ > 0$$

Temos então:

$$\text{tg } 110^\circ < 0 < \text{tg } 200^\circ = \text{tg } 20^\circ$$

Gabarito: “a”.

36. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3}}$ é

a) $1 - \sqrt{2}$

b) $1 + \sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Comentários



$$\frac{(\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{3}}{\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{3}}{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

Gabarito: “a”.

37. (EEAR/2008)

O valor da expressão $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x - 1}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\sin x = \frac{1}{3}$, é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Comentários

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{8}$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x - 1} = \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{\sin x} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{3 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Gabarito: “d”.

38. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$, então $\sin 2x$ é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) $\frac{2}{5}$

Comentários

$$3 = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$



$$3 = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x}$$

Logo,

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2}{3}$$

Gabarito: “c”.

39. (EEAR/2007)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, e $y = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)}$, então y é igual a

- a) $\operatorname{tg} x$
- b) $\cos x$
- c) $\sec x$
- d) $\operatorname{sen} x$

Comentários

Para facilitar as contas, seja $\alpha = \frac{\pi}{2} - x$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha}{\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}}{\cos \alpha \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)} \\ &= \frac{1}{\cos(x)} = \sec x \end{aligned}$$

Gabarito: “c”.

40. (EEAR/2007)

Dois ângulos medem $\frac{2\pi}{9}$ rad e $\frac{5\pi}{18}$ rad. O menor deles, em graus, mede

- a) 30.
- b) 40.
- c) 50.
- d) 60.

Comentários

$$\frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{9} < \frac{5\pi}{9}$$

Como $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, temos que

$$\frac{2}{9} \pi \text{ rad} = \frac{2}{9} \cdot 180^\circ = 40^\circ$$

Gabarito: “b”.



41. (EEAR/2007)

O conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 5 \operatorname{sen} x$ é

- a) $[-2, 8]$.
- b) $[3, 7]$.
- c) $[-1, 5]$.
- d) $[0, 4]$.

Comentários

O conjunto imagem da função $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ é $Im(f_1) = [-1, 1]$.

Multiplicando-se por 5, obtemos $f_2(x) = 5 \operatorname{sen} x \Rightarrow Im(f_2) = [-5, 5]$.

Somando 3, obtemos $f(x) = 3 + 5 \operatorname{sen} x \Rightarrow Im(f) = [-2, 8]$.

Gabarito: “a”.

42. (EEAR/2007)

Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\cos x = \frac{1}{8}$, então $\operatorname{tg} \frac{x}{2} =$

- a) $\frac{\sqrt{7}}{3}$
- b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

Comentários

Existe uma fórmula muito boa para se decorar de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 2 \cdot \frac{x}{2}}{1 + \cos 2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$$

Sabendo que o arco é do primeiro quadrante, o seu seno é positivo:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

Gabarito: “a”.

43. (EEAR/2006)



Se $2 \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x = 0$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\cos x =$

a) $-\frac{2\sqrt{29}}{29}$

b) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$

c) $-\frac{5\sqrt{29}}{29}$

d) $\frac{5\sqrt{29}}{29}$

Comentários

Essa é uma questão que possui erro no enunciado, pois como $x \in]0, \pi/2[$, temos que $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$, ou seja, é impossível que a soma dê zero. Logo, deve-se considerar que $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Fazendo isso:

$$2 \cdot \sin x + 5 \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin x = -5 \cdot \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{25}{4} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{4}{29} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$, temos obrigatoriamente $\cos x = \frac{2\sqrt{29}}{29}$.

Gabarito: "b".

44. (EEAR/2006)

O domínio da função $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentários

O argumento da função tangente nunca pode ser $\frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: "b".

45. (EEAR/2006)

O quadrante em que as funções seno, cosseno e tangente são, simultaneamente, crescentes é o

a) 1°.

b) 2°.

c) 3°.



d) 4°.

Comentários

1° quadrante:

 $\sin x > 0$, crescente. $\cos x > 0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x = 0$). $\tan x > 0$, crescente.

2° quadrante:

 $\sin x > 0$, decrescente (já atingiu o máximo em $x = \frac{\pi}{2}$). $\cos x < 0$, decrescente. $\tan x < 0$, crescente (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

3° quadrante:

 $\sin x < 0$, decrescente. $\cos x < 0$, crescente (já atingiu o máximo em $x = \pi$). $\tan x > 0$, crescente.

4° quadrante:

 $\sin x < 0$, crescente (já atingiu o máximo em $x = \frac{3\pi}{2}$). $\cos x > 0$, crescente. $\tan x < 0$, crescente. (após passar de $+\infty$ para $-\infty$).

Pode-se perceber que todas as três funções são crescentes simultaneamente no 4° quadrante.

Gabarito: “d”.**46. (EEAR/2006)****Sejam as medidas de arcos trigonométricos:**I- $\frac{17\pi}{8}$ rad e $\frac{41\pi}{8}$ rad;II- 1490° e -1030° **É correto afirmar que as medidas****a) em I são de arcos côngruos.****b) em I são de arcos suplementares.****c) em II são de arcos côngruos.****d) em II são de arcos complementares.****Comentários**



I- $\frac{17\pi}{8} = 2\pi + \frac{\pi}{8}$ e $\frac{41\pi}{8} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{8} + \pi \Rightarrow$ As marcações no círculo trigonométrico estarão defasadas de π , sendo diametralmente opostas! Não são arcos côngruos nem suplementares.

II- $1490^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 50^\circ$ e $-1030^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 50^\circ \Rightarrow$ Marcações no mesmo local! Arcos côngruos, não complementares.

Gabarito: “c”.

47. (EEAR/2006)

Se $x \in 1^\circ Q$ e $\cos x = \frac{3}{8}$, então $\cos \frac{x}{2} =$

- a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$
- b) $\frac{\sqrt{5}}{8}$
- c) $\frac{\sqrt{11}}{4}$
- d) $\frac{\sqrt{11}}{8}$

Comentários

$$\cos x = 2 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - 1 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{8}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{11}}{4}$$

Como $x \in 1^\circ Q \Rightarrow \frac{x}{2} \in 1^\circ Q$, temos $\cos \left(\frac{x}{2} \right) > 0 \Rightarrow \cos \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

Gabarito: “c”.

48. (EEAR/2005)

Se $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, então $\operatorname{tg} 2\alpha$ é

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{2}{3}$
- c) $\frac{3}{8}$
- d) $\frac{3}{4}$

Comentários

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: “d”.

49. (EEAR/2005)

Existirá $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade $\operatorname{sen} x = 2k - 5$ se, e somente se,

- a) $1 < k \leq 3$.



b) $1 < k < 4$.

c) $2 \leq k < 4$.

d) $2 \leq k \leq 3$.

Comentários

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x \in [-1, 1]$. Logo, devemos ter $-1 \leq 2k - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 3$.

Gabarito: “d”.

50. (EEAR/2005)

Seja $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$. Simplificando-se a expressão $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha}$, obtém-se

a) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$

b) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$

c) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$

d) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$

Comentários

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{2}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha} \end{aligned}$$

Gabarito: “c”.

51. (EEAR/2005)

Sendo $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, o valor de $\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ é

a) 1

b) 7

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{7}{16}$

Comentários

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Assim,

$$\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4 + 3}{4 - 3} = 7$$

**Gabarito: “b”.****52. (EEAR/2004)**

Seja x um arco do 1º quadrante. Se $\operatorname{cosec} x = \frac{5}{2}$, então $\cos 2x$ é

- a) $\frac{4}{25}$.
- b) $\frac{33}{25}$.
- c) $\frac{21}{25}$.
- d) $\frac{17}{25}$.

Comentários

$$\operatorname{cosec} x = \frac{5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{2}{5}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$$

Gabarito: “d”.**53. (EEAR/2003)**

No círculo trigonométrico:

- I. o arco $\frac{11\pi}{4}$ rad pertence ao 2º quadrante.
- II. o arco 1510° pertence ao 3º quadrante.
- III. o arco $-\frac{13\pi}{3}$ rad pertence ao 4º quadrante.

A(s) assertiva(s) correta(s) é(são):

- a) II.
- b) I e II.
- c) I e III.
- d) I, II e III.

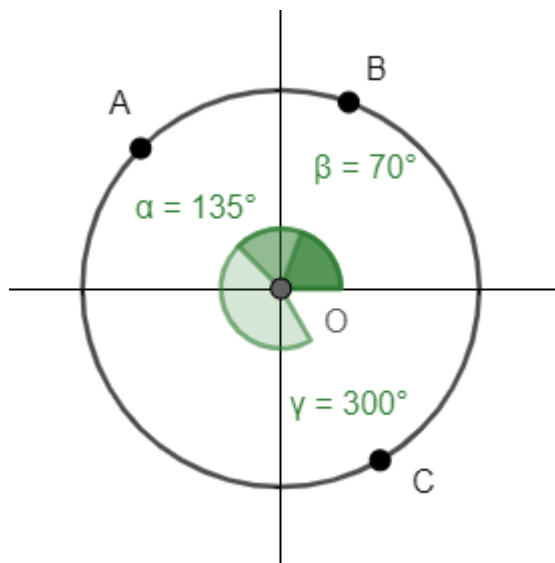
Comentários

$\frac{11\pi}{4} = 2\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$ Esse ângulo representa uma volta completa no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ rad. Como $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} < \pi$, esse ângulo pertence ao 2º quadrante (Ponto A).

$1510^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 70^\circ \Rightarrow$ Esse ângulo representa quatro voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido horário, mais um ângulo de 70° . Como $0 < 70^\circ < 90^\circ$, esse ângulo pertence ao 1º quadrante (Ponto B).



$-\frac{13\pi}{3} = -6\pi + \frac{5\pi}{3} \Rightarrow$ Esse ângulo representa três voltas completa no círculo trigonométrico, no sentido anti-horário, mais um ângulo de $\frac{5\pi}{3}$ rad no sentido horário. Como $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, esse ângulo pertence ao 4º quadrante (Ponto C).



Gabarito: “c”.

54. (EEAR/2003)

Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então a expressão $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$ é equivalente a:

- a) $2 \operatorname{sen} x$
- b) $2 \sec x$
- c) $2 \cos x$
- d) $2 \operatorname{cosec} x$

Comentários

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{2}{\operatorname{sen} \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right)} = 2 \operatorname{cosec} x$$

Gabarito: “d”.

55. (EEAR/2003)

A expressão $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ é idêntica à (ao)

- a) $\operatorname{tg}^2 x$
- b) $\operatorname{sen}^2 x$
- c) $\operatorname{cotg}^2 x$
- d) $\cos^2 x$

Comentários



$$\frac{1 + \cotg^2 x}{1 + \tg^2 x} = \frac{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cotg^2 x$$

Gabarito: “c”.

56. (EEAR/2003)

Sendo $a - b = 30^\circ$, calculando $y = (\sin a + \cos b)^2 + (\sin b - \cos a)^2$, obtemos

a) 1

b) $\frac{2}{3}$

c) 3

d) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

$$\begin{aligned} y &= (\sin a + \cos b)^2 + (\sin b - \cos a)^2 \\ &= (\sin^2 a + 2 \sin a \cos b + \cos^2 b) + (\sin^2 b - 2 \sin b \cos a + \cos^2 a) \\ &= (\sin^2 a + \cos^2 a) + (\sin^2 b + \cos^2 b) + 2 \cdot (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= 1 + 1 + 2 \cdot \sin(a - b) = 2 + 2 \cdot \sin 30^\circ = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

Gabarito: “c”.

57. (EEAR/2003)

A expressão trigonométrica $\cos^2 x - \sin^2 x$ é igual a

a) 1 para todo número real x .

b) -1 para todo número real x .

c) $2 \cos^2 x - 1$, para todo número real x .

d) $\frac{4}{3}$ para alguns números reais de x .

Comentários

Usando que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Gabarito: “c”.

58. (EEAR/2003)

O produto $(\tg x) \cdot (\sin 2x)$ é igual a

a) $\sin^2 x$

b) $\cos^2 x$

c) $2 \sin^2 x$



d) $2 \cos^2 x$

Comentários

$$(\operatorname{tg} x) \cdot (\operatorname{sen} 2x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Gabarito: “c”.

59. (EEAR/2002)

Das afirmações:

I. $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$

II. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

III. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Sendo x um arco no círculo trigonométrico compreendido entre $\frac{\pi}{2}$ e π , conclui-se que:

a) a única falsa é I

b) a única falsa é II

c) a única falsa é III

d) as três são verdadeiras

Comentários

A raiz de qualquer número real positivo é positiva. Assim, se $\cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$, conclui-se que $\cos x \geq 0$. Entretanto, o enunciado afirma que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o que implica que $\cos x < 0$. Dessa forma, conclui-se por absurdo que a afirmativa I é falsa.

As afirmativas II e III são simplesmente as fórmulas de arco duplo, que podem ser deduzidas das fórmulas de adição de arcos da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x + x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos 2x = \cos(x + x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Gabarito: “a”.

60. (EEAR/2002)

Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$

b) $-\frac{7}{5}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $-\frac{1}{5}$

Comentários



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16 - 16\cos^2 x = 9\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 x \\ = 1 - \cos^2 x = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos que $\cos x < 0$ e $\sin x < 0$. Logo, $\cos x = -\frac{4}{5}$ e $\sin x = -\frac{3}{5}$.
Portanto,

$$\cos x - \sin x = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

Gabarito: “d”.

61. (EEAR/2002)

O $\sin \frac{122\pi}{9}$ é igual ao

- a) $\sin \frac{5\pi}{9}$
- b) $\sin \frac{4\pi}{9}$
- c) $-\sin \frac{5\pi}{9}$
- d) $-\sin \frac{4\pi}{9}$

Comentários

$$\frac{122\pi}{9} = 12\pi + \frac{14\pi}{9} = 12\pi + 2\pi - \frac{4\pi}{9}$$

Logo,

$$\sin \frac{122\pi}{9} = \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) = -\sin \left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

Como $\frac{4\pi}{9} + \frac{5\pi}{9} = \pi$, temos $\sin \frac{4\pi}{9} = \sin \frac{5\pi}{9}$. Portanto, existem duas alternativas corretas!

Gabarito: “c” ou “d”.

62. (EEAR/2002)

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e o dobro do seu seno é igual ao triplo do quadrado de sua tangente, então o valor do seu cosseno é

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- d) $\frac{2}{3}$

Comentários

No intervalo aberto dado, $\cos \theta \neq 0 \neq \sin \theta$. Logo:



$$2\sin \theta = 3 \operatorname{tg}^2 \theta \Leftrightarrow 2\sin \theta = 3 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta = 3\sin \theta \Leftrightarrow 2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 = 0$$

Resolvendo por Bhaskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25$$

$$\sin \theta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \sin \theta = \frac{-3 - 5}{4} \text{ ou } \sin \theta = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Como devemos ter $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, ficamos apenas com a segunda opção. Dessa forma, como θ está no primeiro quadrante, temos que $\theta = \arcsen \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: “b”.

63. (EEAR/2001)

Numere a segunda coluna de acordo com a primeira, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

- | | | |
|--|-----|-------------------|
| (1) $\sin^2 2x$ | () | $2 \cos^2 x$ |
| (2) $1 + \cos 2x$ | () | $2 \sin x \cos x$ |
| (3) $\sin 2x$ | () | $1 - \cos^2 2x$ |
| (4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | () | $-\sin x$ |
| (5) $\sin(-x)$ | () | $\cos x$ |

Lendo-se a segunda coluna de cima para baixo, a sequência correta é:

- a) 1, 3, 4, 5, 2
- b) 2, 3, 1, 5, 4
- c) 3, 1, 2, 4, 5
- d) 2, 3, 5, 1, 4

Comentários

(1) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x$ (terceiro vazio).

(2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ (primeiro vazio).

(3) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \forall a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \sin 2x = \sin(x + x) = 2 \sin x \cos x$ (segundo vazio).

(4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (-x)\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos(-x) + \sin(-x) \cos \frac{\pi}{2} = \cos(-x) = \cos(x)$ (pois a função cosseno é par; quinto vazio).

(5) A função seno é ímpar (quarto vazio).

Sequência: 2, 3, 1, 5, 4

Gabarito: “b”.

64. (EEAR/2001) [Adaptada]



Em $0 \leq x \leq 2\pi$, a expressão $y = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x}$ é tal que:

- a) $y > 0$ somente se $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
- b) $y < 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- c) $y > 0$ se $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- d) $y < 0$ somente se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Comentários

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\frac{\sin^2 x \cos x + \sin^2 x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x \sin x + \cos^2 x}{\sin x}} = \frac{\sin^2 x (1 + \cos x)}{\cos^2 x (1 + \sin x)} \\ &= \operatorname{tg}^2 x \cdot \left(\frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} \right) \end{aligned}$$

Como $\sin x, \cos x < 1$ (pois $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$), temos que $(1 + \cos x), (1 + \sin x) > 0$. Além disso, $\operatorname{tg}^2 x > 0$. Portanto, y é sempre positivo.

Gabarito: “c”.

65. (EEAR/2001)

Se $\operatorname{tg} x = -3$, então $\operatorname{tg} 4x$ é igual a:

- a) $-\frac{3}{4}$
- b) $-\frac{24}{7}$
- c) $\frac{3}{4}$
- d) $\frac{24}{7}$

Comentários

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot (-3)}{1 - (-3)^2} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} 4x &= \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2(2x)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7} \end{aligned}$$

Gabarito: “d”.

66. (EEAR/2001)

A expressão $\frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$ é identicamente igual a:

- a) $\operatorname{cotg} x$
- b) $\sec x$



c) $\sin x$

d) $\tan x$

Comentários

Parta de $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$, além de $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Temos:

$$E = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotg x$$

Gabarito: "a".

67. (EEAR/2000)

O valor de $(\sin 112^\circ 30' + \cos 112^\circ 30')^2$ é:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Seja $\alpha = 112^\circ 30'$. Queremos $E = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha$.

Mas $\sin 2\alpha = \sin(2 \cdot 112^\circ 30') = \sin(225^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $E = 1 + \sin 2\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Gabarito: "c".

68. (EsPCEx/2018)

Considere o triângulo com ângulos internos x , 45° e 120° . O valor de $\tan^2(x)$ é igual a

a) $\sqrt{3} - 2$

b) $4\sqrt{3} - 7$

c) $7 - 4\sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $2 - 4\sqrt{3}$

Comentários

Todo triângulo tem a soma de seus ângulos internos resultando em 180° :

$$180^\circ = x + 45^\circ + 120^\circ \Leftrightarrow x = 15^\circ.$$



$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(15^\circ) &= \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right) \\ &= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{Dessa forma, } \operatorname{tg}^2 x = (2 - \sqrt{3})^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Gabarito: “c”.

69. (EsPCEX/2018)

Sendo $M = \operatorname{arctg}(x)$, $N = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ e $P = \operatorname{tg}(M - N)$, o valor de $30P$ para $x = 15$ é:

- a) $\frac{224}{30}$
- b) $\frac{45}{6}$
- c) 45
- d) 224
- e) 225

Comentários

$$M = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} M$$

$$N = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \operatorname{tg} N$$

$$P = \operatorname{tg}(M - N) = \frac{\operatorname{tg} M - \operatorname{tg} N}{1 + \operatorname{tg} M \cdot \operatorname{tg} N} = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + x \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Para } x = 15, P = \frac{1}{2} \cdot \left(15 - \frac{1}{15} \right) = \frac{224}{30}. \text{ Logo, } 30P = 224.$$

Gabarito: “d”.

70. (EsPCEX/2014)

A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3 \left(\cos \left(\left(\frac{t-2}{6} \right) \pi \right) + 5 \right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

- a) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
- b) a população atinge seu máximo em $t = 6$.
- c) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
- d) a população média anual é de 6000 animais.



e) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6000 animais.

Comentários

Sempre que temos uma expressão do tipo $y(t) = a + b \cdot \text{ftrig}(c \cdot t + d)$, onde a função trigonométrica $\text{ftrig} = \text{sen}$ ou cos , o período da função $y(t)$ é calculado por $T = \frac{2\pi}{c}$.

Sabendo disso, a função $P(t)$, com $c = \frac{\pi}{6}$, tem período $T = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ meses (anual).

Como a função base é uma função do tipo cosseno, ela cresce em metade desse período e decresce na outra metade. Dessa forma, a resposta correta é o item a), já que a metade de 12 meses são 6 meses = dois trimestres.

As outras alternativas estão erradas:

A população atinge seu máximo em $t = 2 + 12k, k \in \mathbb{Z}$, isto é, todo mês de fevereiro.

O período de seca (estiagem) também corresponde a 6 meses do ano.

A população média anual é de 5000 animais.

A população atinge seu mínimo em $t = 5 + 12k$ com -1000 animais.

Gabarito: "a".

71. (EsPCEX/2014)

O valor de $(\cos 165^\circ + \sin 155^\circ + \cos 145^\circ - \sin 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$ é

- a) $\sqrt{2}$
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) $\frac{1}{2}$

Comentários

Seja E a expressão pedida. Podemos reescrevê-la da seguinte forma, agrupando termos suplementares:

$$E = (\cos 165^\circ + \cos 15^\circ) + (\sin 155^\circ - \sin 25^\circ) + (\cos 145^\circ + \cos 35^\circ)$$

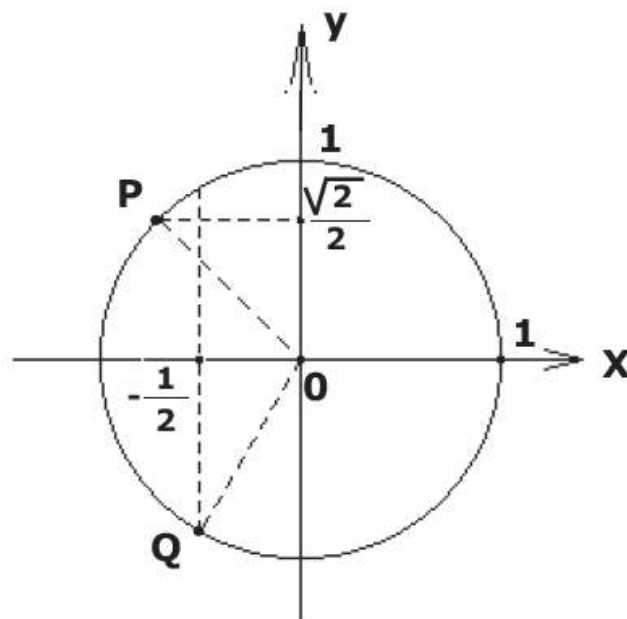
Usando que $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ e que $\sin(180^\circ - x) = \sin x$, temos:

$$E = (-\cos 15^\circ + \cos 15^\circ) + (\sin 25^\circ - \sin 25^\circ) + (-\cos 35^\circ + \cos 35^\circ) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Gabarito: "c".

72. (EsPCEX/2012)

Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β , medidos no sentido positivo.



O valor de $\text{tg}(\alpha + \beta)$ é

a) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

c) $2 + \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $-1 + \sqrt{3}$

Comentários

Seja A o ponto $(1,0)$. Então $\alpha = \widehat{AOP}$ e $\beta = \widehat{AOPQ}$. Das propriedades do círculo trigonométrico, temos:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos \beta = -\frac{1}{2}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \beta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Portanto, } \text{tg}(\alpha + \beta) = \text{tg}\left(\frac{25\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{25\pi}{12} - 2\pi\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}(15^\circ)$$

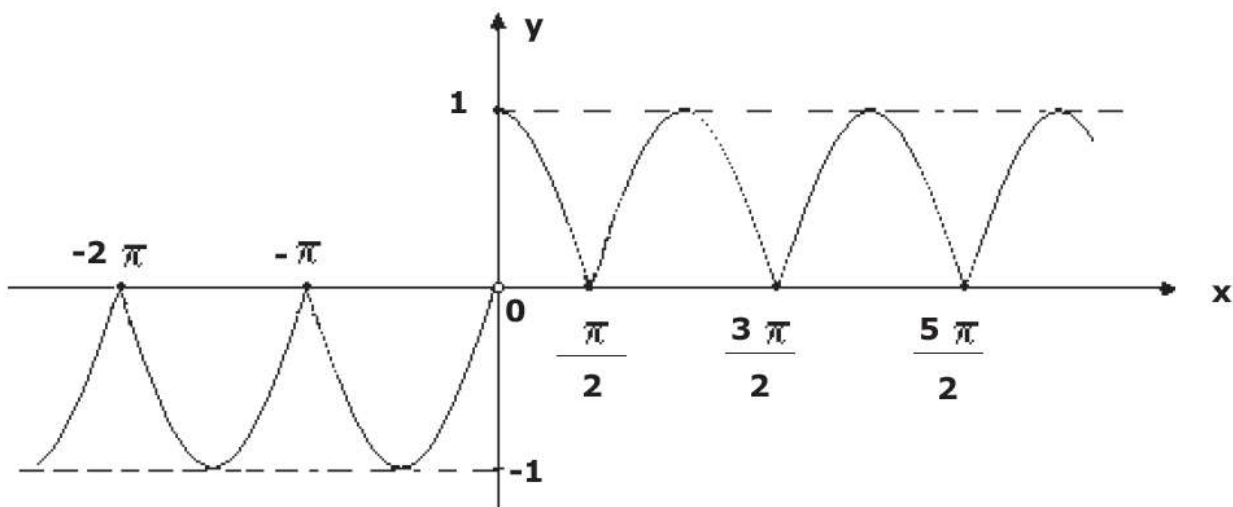
$$\begin{aligned} \text{tg}(15^\circ) &= \text{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45^\circ \cdot \text{tg } 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\right) \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right) \\ &= \frac{3^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3}}{3^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Gabarito: "d".

73. (EsPCEX/2011)



A função real $f(x)$ está representada no gráfico abaixo. A expressão algébrica de $f(x)$ é:



- a) $\begin{cases} -|\sin x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} |\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\sin x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} -|\cos x|, & \text{se } x < 0 \\ |\sin x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} |\sin x|, & \text{se } x < 0 \\ |\cos x|, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \sin x, & \text{se } x < 0 \\ \cos x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

Comentários

O gráfico se assemelha ao de funções trigonométricas do tipo seno ou cosseno, ligeiramente modificadas com modularização. Observe que para $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ e para $x < 0$, $f(x) \leq 0$. Logo, excluimos as alternativas b), d) e e) de nossa análise. Olhando para $x = \frac{\pi}{2}$ temos, pelo gráfico, que $f(x) = 1$, o que está de acordo com a alternativa a) e em desacordo com c).

Gabarito: "a".

74. (EsPCEx/2011)

O valor numérico da expressão $\frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220^\circ)^2$ é:

- a) -1
- b) 0
- c) $\frac{1}{2}$
- d) 1
- e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Vamos primeiro fazer a equivalência dos ângulos para o intervalo $(0^\circ, 360^\circ]$



$$1320^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 240^\circ$$

$$\frac{53\pi}{3} = 8 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3} = 8 \cdot 360^\circ + 300^\circ$$

$$2220^\circ = 6 \cdot 360^\circ + 60^\circ$$

Logo,

$$\sec 1320^\circ = \sec 240^\circ = \frac{1}{\cos 240^\circ} = \frac{1}{-\cos 60^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) = \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2200^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{Portanto, } \frac{\sec 1320^\circ}{2} - 2 \cdot \cos\left(\frac{53\pi}{3}\right) + (\operatorname{tg} 2220^\circ)^2 = -1 - 1 + 3 = 1.$$

Gabarito: “d”.

75. (EsPCEx/2011)

O cosseno do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 14 horas e 30 minutos vale

a) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$

b) $-\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

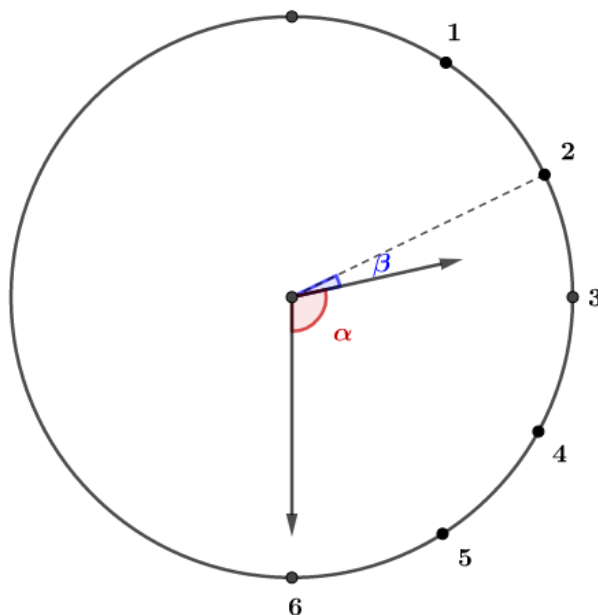
c) $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$

d) $-\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

e) $\frac{(2+\sqrt{3})}{4}$

Comentários

Desenhando o relógio do problema, temos:



No relógio, temos 12 horas. Cada hora possui um ângulo de 30° :

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

No momento em que o ponteiro dos minutos percorre 30 minutos, o ponteiro das horas percorrerá metade do ângulo de cada hora:

$$\beta = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$$

Então, o ângulo α é dado por:

$$\alpha = 3 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$

Queremos calcular o cosseno desse ângulo:

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Gabarito: “d”.

76. (EsPCEX/2010)

Considere a progressão aritmética representada pela sequência $\left(\frac{7\pi}{12}, \frac{47\pi}{60}, \frac{59\pi}{60}, \dots\right)$.

Se todos os termos dessa PA forem representados num círculo trigonométrico, eles determinarão nesse círculo os vértices de um

- a) pentágono (5 lados).
- b) hexágono (6 lados).
- c) octógono (8 lados).
- d) decágono (10 lados).



e) dodecágono (12 lados).

Comentários

$$\text{A razão da PA é } r = \frac{59\pi}{60} - \frac{47\pi}{60} = \frac{12\pi}{60} = \frac{2\pi}{10}.$$

Assim, basta analisar quantas razões conseguimos inserir até que se complete uma volta completa na circunferência. Isso pode ser feito dividindo-se a razão por 2π :

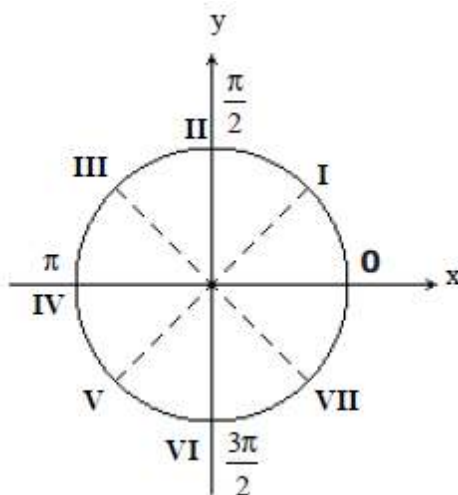
$$n = \left(\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{10}} \right) = 10$$

Portanto, temos um decágono.

Gabarito: D

77. (EsPCEx/2007)

Os termos da sequência de números em progressão aritmética $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, \dots$ correspondem às medidas em radianos de arcos, que podem ser representados na circunferência trigonométrica abaixo. Os pontos identificados por 0 a VII representam as medidas de arcos que dividem a circunferência trigonométrica em 8 partes iguais, medidas no sentido anti-horário, a partir de 0.



Nessas condições, o arco correspondente ao 13º termo da sequência, igualmente medido no sentido anti-horário e a partir de 0, terá sua extremidade situada entre os pontos

- a) I e II
- b) II e III
- c) IV e V
- d) V e VI
- e) VII e 0

Comentários

A sequência tem termo inicial $a_1 = \frac{\pi}{3}$ e razão $r = \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$. Assim,



$$a_{13} = a_1 + (13 - 1) \cdot r$$

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{\pi}{3} + 12 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$$

Assim, a_{13} terá sua extremidade no mesmo ponto em que estaria a de $\frac{4\pi}{3}$. Como $\frac{5\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} < \frac{6\pi}{4}$ (verifique!), a_{13} está entre V e VI .

Gabarito: "d".

78. (EsPCEX/2006)

O valor da expressão $\frac{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ}$ é igual a:

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

Comentários

$$\begin{aligned} \frac{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin 15^\circ + \sin 75^\circ}{\cos 15^\circ} &= \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ} + \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ} \\ &= (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) \cdot \left(\frac{1}{\sin 15^\circ} + \frac{1}{\cos 15^\circ} \right) = (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ) \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{2 \cdot \sin 15^\circ \cos 15^\circ} \right) \\ &= (\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 \cdot \frac{2}{\sin(2 \cdot 15^\circ)} = (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2 \cdot \sin 15^\circ \cos 15^\circ) \cdot \frac{2}{\sin 30^\circ} \\ &= (1 + \sin 30^\circ) \cdot \frac{2}{\sin 30^\circ} = \left(1 + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{\frac{1}{2}} = 6 \end{aligned}$$

Gabarito: "d".

79. (EsPCEX/2005)

A função $f(x) = \left[\sin 2x \cdot \left(\frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2 \sin x} \right) \right]^2 - \sin 2x$ é definida para todo x real e $x \neq \frac{k\pi}{2}$, com k inteiro. Nessas condições, pode-se afirmar que

- a) $f(2006) = f(2004) + f(2005)$.
- b) $f(2005) = f(2006) - 2f(2003)$.
- c) $f(2006) = f(2005) + f(2004) + f(2003)$.
- d) $f(2005) = f(2006) - f(2004)$.
- e) $f(2006) = f(2003) + f(2004) - f(2005)$.

Comentários



Desenvolvendo-se a expressão:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\sin 2x \cdot \left(\frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2 \sin x} \right) \right]^2 - \sin 2x = \left[\sin 2x \cdot \left(\frac{\sin x + \cos x}{2 \sin x \cos x} \right) \right]^2 - \sin 2x \\ &= \left[\sin 2x \cdot \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} \right) \right]^2 - \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) - \sin 2x = 1 + \sin 2x - \sin 2x = 1 \\ \text{Assim, } f(2006) &= 1 = 1 + 1 - 1 = f(2003) + f(2004) - f(2005). \end{aligned}$$

Gabarito: “e”.

80. (EsPCEX/2003)

Considere as expressões:

I- $\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 150^\circ}{\operatorname{tg} 210^\circ}$

II- $\frac{\cotg 50^\circ \cdot \sin 93^\circ}{\operatorname{tg} 181^\circ}$

III- $\frac{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x}{\sec x \cdot \cotg x}, x \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[$

IV- $\frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x}, x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

Têm sempre valor negativo:

a) I e II.

b) I e IV.

c) II e III.

d) I e III.

e) III e IV.

Comentários

I- $30^\circ \in 1^\circ Q \Rightarrow \sin 30^\circ > 0, 150^\circ \in 2^\circ Q \Rightarrow \cos 150^\circ < 0, 210^\circ \in 3^\circ Q \Rightarrow \operatorname{tg} 210^\circ > 0$.
Assim, a expressão E_I resulta num valor negativo, pois $E_I = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$.

II- $50^\circ \in 1^\circ Q \Rightarrow \cotg 50^\circ > 0, 93^\circ \in 2^\circ Q \Rightarrow \sin 93^\circ > 0, 181^\circ \in 3^\circ Q \Rightarrow \operatorname{tg} 210^\circ > 0$.
Assim, a expressão E_{II} resulta num valor positivo, pois $E_{II} = \frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$.

III- No intervalo $x \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[= 4^\circ Q, E_{III} = \frac{\cos x \cdot \operatorname{cosec} x}{\sec x \cdot \cotg x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)\cdot(-)} = (+)$, isto é, E_{III} é positivo.

IV- No intervalo $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[= 2^\circ Q, E_{IV} = \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cosec} x} = \frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$, isto é, E_{IV} é negativo.

Assim, são negativos E_I e E_{IV} .

Gabarito: “b”.

81. (EsPCEX/2002)



Se $z = \frac{2-3 \operatorname{sen} x}{4}$, pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em

a) $-2 \leq x \leq -1$

b) $-1 \leq x \leq -\frac{1}{4}$

c) $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$

d) $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

Comentários

Isolando-se a função trigonométrica, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2-4z}{3}$$

Assim, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2-4z}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 2-4z \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -4z \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \geq z \geq \frac{-1}{4}$$

Gabarito: "c".

82. (EsPCEx/2002)

Se o cosseno de um ângulo de medida k é o dobro do cosseno de um outro ângulo de medida w , ambos pertencentes ao 1° quadrante, pode-se afirmar que todos os valores de w que satisfazem essa condição pertencem ao intervalo

a) $[0^\circ, 15^\circ]$

b) $[15^\circ, 30^\circ]$

c) $[30^\circ, 45^\circ]$

d) $[45^\circ, 60^\circ]$

e) $[60^\circ, 90^\circ]$

Comentários:

$$\cos k = 2 \cdot \cos w$$

Como $k \in 1^\circ$ quadrante, temos $0 \leq \cos k \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \cdot \cos k \leq \frac{1}{2}$. Assim,

$$0 \leq \cos w \leq \frac{1}{2}$$

Como $w \in 1^\circ$ quadrante, devemos ter $w \in [60^\circ, 90^\circ]$, visto que $\arccos 0 = 90^\circ$ e $\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$.



Gabarito: “e”.

83. (EsPCEx/2002)

O valor numérico da expressão $\sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$ é:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{6}$
- e) $\frac{1}{8}$

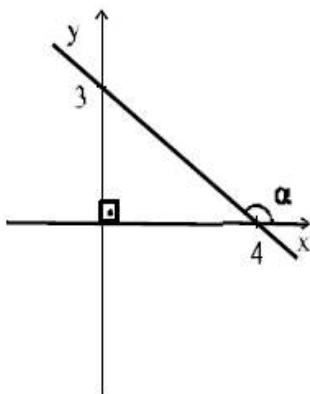
Comentários

$$\begin{aligned} \sin \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12} &= \left(-\sin \frac{\pi}{12} \right) \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Gabarito: “c”.

84. (EsPCEx/2001)

A cossecante do ângulo da figura abaixo é:



- a) $\frac{4}{3}$
- b) $\frac{4}{5}$
- c) $-\frac{3}{5}$
- d) $\frac{5}{3}$
- e) $-\frac{5}{4}$

Comentários

Seja $\beta = 180^\circ - \alpha$ o ângulo complementar. Da figura, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3} \Rightarrow \operatorname{cossec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{25}{9}$.



Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\sin \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{cosec} \alpha > 0$. Logo, $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$.

Gabarito: “d”.

85. (EsPCEx/2001)

São arcos congruos:

a) -730° e $-\frac{\pi}{12}$ rad

b) 1640° e $-\frac{7\pi}{6}$ rad

c) 350° e $-\frac{\pi}{18}$ rad

d) 1235° e $\frac{5\pi}{6}$ rad

e) 2000° e $-\frac{4\pi}{3}$ rad

Comentários

1) Usando que π rad = 180° , temos:	2) Fazendo a equivalência do valor na primeira coluna para o primeiro quadrante	2) Equivalência do outro valor
$-\frac{\pi}{12}$ rad = $-\frac{180^\circ}{12} = -15^\circ$	$-15^\circ \rightarrow -15^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 345^\circ$	$-730^\circ \rightarrow -730^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 350^\circ$
$-\frac{7\pi}{6}$ rad = $-\frac{7 \cdot 180^\circ}{6} = -210^\circ$	$-210^\circ \rightarrow -210^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 150^\circ$	$1640^\circ \rightarrow 1640^\circ - 4 \cdot 360^\circ = 200^\circ$
$-\frac{\pi}{18}$ rad = $-\frac{180^\circ}{18} = -10^\circ$	$-10^\circ \rightarrow -10^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 350^\circ$	$350^\circ \rightarrow 350^\circ + 0 \cdot 360^\circ = 350^\circ$
$\frac{5\pi}{6}$ rad = $\frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$	$150^\circ \rightarrow 150^\circ + 0 \cdot 360^\circ = 150^\circ$	$1235^\circ \rightarrow 1235^\circ - 3 \cdot 360^\circ = 155^\circ$
$-\frac{4\pi}{3}$ rad = $-\frac{4 \cdot 180^\circ}{3} = -240^\circ$	$-240^\circ \rightarrow -240^\circ + 1 \cdot 360^\circ = 120^\circ$	$2000^\circ \rightarrow 2000^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 200^\circ$

Pode-se perceber que apenas no item “c” os ângulos são trigonometricamente equivalentes.

Gabarito: “c”.

86. (EsPCEx/2001)

Se $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ e $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, então o valor de $\operatorname{tg} \alpha$ é igual a:

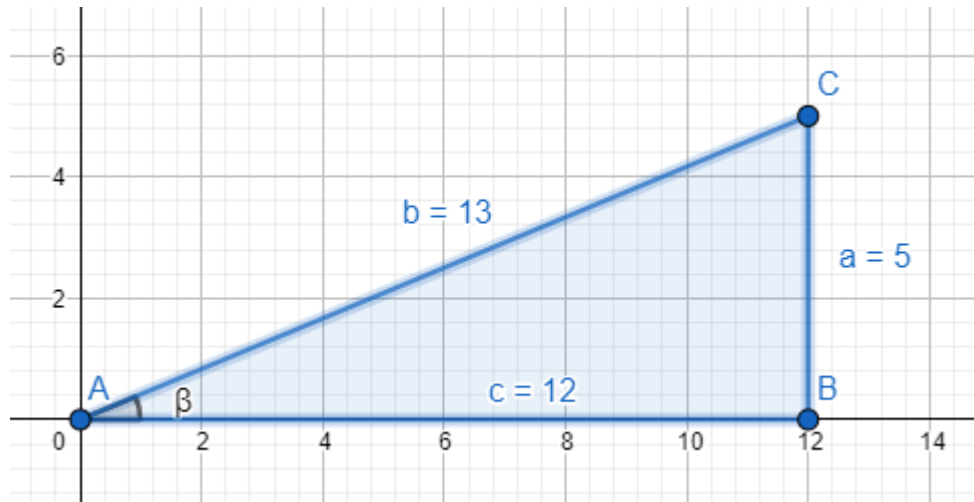
a) $-\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{12}$



- c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{12}{5}$
e) $-\frac{12}{13}$

Comentários



Como $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{5}{13}$, temos que α e β são suplementares, isto é, $\alpha + \beta = \pi$. Temos que $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{5}{12}$.

Gabarito: "a".

87. (EsPCEx/2001) [Adaptada]

Para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, simplificando a expressão $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x}$, obtém-se o valor:

- a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $3/2$
d) 2
e) 0

Comentários

Dica de prova: como a expressão deve valer para todo x naquele conjunto, então tente entrar com um x qualquer do conjunto e calcule o valor da expressão! Exemplo com $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sec^2 x} \\ &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} + \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{\frac{7}{4}} + \frac{1}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{7} + \frac{3}{7} \end{aligned}$$



$$= 1 + 1 = 2$$

Caso prefira uma solução genérica:

$$\frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} = 1.$$

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} = \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} = 1.$$

Logo, temos

$$\left(\frac{1}{1 + \sin^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 x} \right) + \left(\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sec^2 x} \right) = 1 + 1 = 2.$$

Gabarito: “d”.

88. (EsPCEX/2000)

Sendo $\left\{ k \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq \frac{k\pi}{4} \right\}$, então $2 - \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}$ é equivalente a:

- a) $\cos^2 x$
- b) $\sin^2 x$
- c) $\sec^2 x$
- d) $\operatorname{cosec}^2 x$
- e) 1

Comentários

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \Leftrightarrow \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 1 - \operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow 2 - \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

Pois,

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Gabarito: “c”.

89. (EsPCEX/2000)

Se y é a medida de um ângulo $0^\circ < y < 30^\circ$, o maior dentre os números $\sin y$, $\cos y$, $\sin^2 y$, $\cos^2 y$ e $\sin y \cdot \cos y$ é

- a) $\sin y$
- b) $\cos y$
- c) $\sin^2 y$
- d) $\cos^2 y$
- e) $\sin y \cdot \cos y$



Comentários

$$0 < \sin y < 1 \Rightarrow \sin^2 y < \sin y < 1$$

$$0 < \cos y < 1 \Rightarrow \cos^2 y < \cos y < 1$$

Além disso, como $0^\circ < y < 30^\circ$, e como $\cos y < 1$,

$$\cos y > \sin y > \sin y \cdot \cos y$$

Portanto, $\cos y$ é o maior número.

Gabarito: “b”.

90. (EsPCEx/2000)

O valor de $3\sin 10^\circ \cdot (\operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{cotg} 5^\circ)$ é igual a

a) $\frac{3}{2}$

b) 2

c) 3

d) 5

e) 6

Comentários

$$\begin{aligned} 3\sin 10^\circ \cdot (\operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{cotg} 5^\circ) &= 3\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ} + \frac{\cos 5^\circ}{\sin 5^\circ} \right) \\ &= 3\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{2\sin^2 5^\circ}{2\sin 5^\circ \cos 5^\circ} + \frac{2\cos^2 5^\circ}{2\sin 5^\circ \cos 5^\circ} \right) = 3\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{2(\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ)}{2\sin 5^\circ \cos 5^\circ} \right). \end{aligned}$$

Usando a identidade fundamental da trigonometria e a fórmula para seno do arco duplo, temos que a expressão acima é igual a

$$3\sin 10^\circ \cdot \left(\frac{2}{\sin 10^\circ} \right) = 6$$

Gabarito: “e”.

91. (EsPCEx/2000)

O número de arcos existentes entre 0° e 1560° cujo seno vale $\frac{2}{7}$ é

a) 6

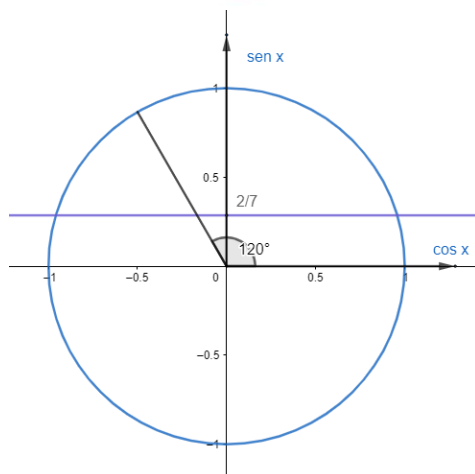
b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Comentários



$1560^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 120^\circ$. Assim, estamos dando quatro voltas no círculo trigonométrico e avançando mais 120° além. Como $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{2}{7}$ e como, no segundo quadrante, a função seno é decrescente, temos que o ângulo do segundo quadrante cujo seno é $\frac{2}{7}$ é maior que 120° . Logo, temos 2 ângulos cujo seno é $\frac{2}{7}$ a cada volta (um no primeiro e outro no segundo quadrante) e mais um último ângulo no primeiro quadrante, contido no intervalo $[4 \cdot 360^\circ, 4 \cdot 360^\circ + 120^\circ)$, dando um total de 9 arcos.

Gabarito: “d”.

92. (EsPCEx/2000) [Adaptada]

O domínio e imagem da função $f(x) = \frac{1}{5 - \sin x}$ são, respectivamente,

a) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $[-1, 1]$

b) $\mathbb{R}$ e $]-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}[$

c) $\mathbb{R}$ e $[\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$

d) $\mathbb{R}^*$ e $[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$

e) $\mathbb{R} - \{5\}$ e $]-1, \frac{1}{3}]$

Comentários

O maior domínio para essa função é aquele que considera todos os números reais, exceto aqueles que zeram o denominador da expressão, pois aí a função não ficaria definida. Acontece que se tivermos $5 - \sin x = 0$, então $\sin x = 5$, equação que não tem solução nos reais. Logo, nenhum número será excluído e o domínio é todos os reais, isto é, $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para a imagem, pensemos o seguinte (na primeira equivalência, faz-se o produto por -1):

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Leftrightarrow 5 - 1 \leq 5 - \sin x \leq 5 + 1 \Leftrightarrow 4 \leq 5 - \sin x \leq 6.$$

Assim, como $5 - \sin x$ está entre 4 e 6, o inverso, que é $f(x) = \frac{1}{5 - \sin x}$, deve estar entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$. Como $\frac{1}{6}$ é menor, temos $\frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$, isto é, $Im(f) = [\frac{1}{6}, \frac{1}{4}]$.

Gabarito: “c”.

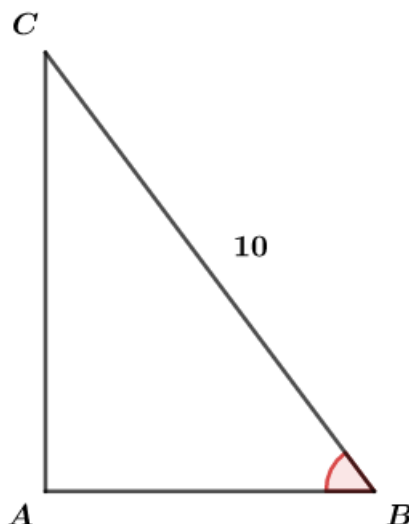


93. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo retângulo ABC , a hipotenusa BC mede 10 cm e $\cos \hat{B} = 0,6$. Calcular a soma dos catetos.

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Usando os dados do enunciado:

$$\cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$0,6 = \frac{AB}{10} \Rightarrow AB = 6$$

Aplicando a relação fundamental:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

A soma dos catetos é dada por:

$$S = AB + AC = 6 + 8 = 14$$

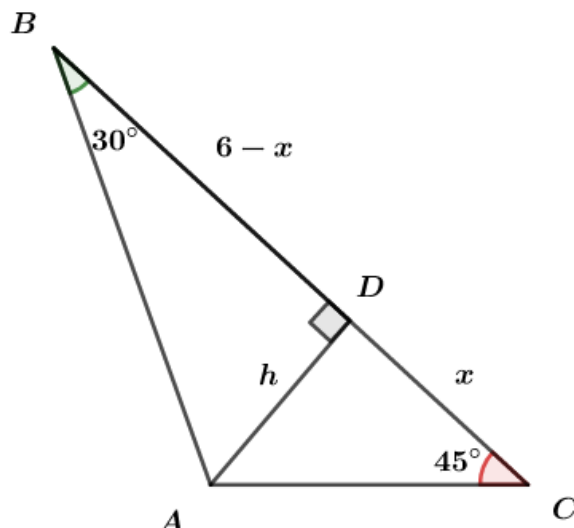
Gabarito: $S = 14$

94. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Num triângulo ABC tem-se $BC = 6$, $\hat{ABC} = 30^\circ$ e $\hat{BCA} = 45^\circ$. Calcular a medida da altura relativa ao lado BC .

Comentários

Temos o seguinte triângulo:



Queremos calcular h . Perceba que o triângulo ADC é isósceles:

$$\widehat{DAC} + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = 45^\circ$$

Assim, podemos afirmar que $x = h$. Usando a razão tangente no triângulo ADB :

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{h}{6-h} \Rightarrow h = \frac{(6-h)\sqrt{3}}{3} \Rightarrow (3+\sqrt{3})h = 6\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} - 3$$

Gabarito: $h = 3\sqrt{3} - 3$

95. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Obter M tal que $\cos x = \frac{1}{M}$ e $\sen x = \frac{\sqrt{M+1}}{M}$.

Comentários

Usando a relação fundamental, obtemos:

$$\sen^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{M+1}{M^2} + \frac{1}{M^2} = 1$$

$$M^2 - M - 2 = 0$$

As raízes são dadas por:

$$M = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = -1 \text{ ou } 2$$

Gabarito: $M = -1$ ou $M = 2$

96. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular $\sec x$ sabendo que $\sen x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $a > b > 0$.

Comentários

Sabemos que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Então, devemos calcular cosseno. Usando a relação fundamental:



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2}}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)^2}}{a^2 + b^2}$$

$$\cos x = \pm \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

Assim, o secante é dado por:

$$\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

Gabarito: $\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

97. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:

$$y = (\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)^2 + (1 - \cos x)^2 - (\sec x - 1)^2$$

Comentários

Vamos desenvolver a expressão:

$$y = \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x - (\sec^2 x + 1 - 2\sec x)$$

Usando a relação $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$, temos:

$$y = \sec^2 x - 1 - 2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x + \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_1 + 1 - 2\cos x - \sec^2 x - 1 + 2\sec x$$

$$y = -2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x - 2\cos x + 2\sec x$$

$$y = -\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} - 2\cos x + \frac{2}{\cos x}$$

$$y = \frac{\underbrace{-2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x + 2}_{-2}}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y = 0$$

Gabarito: $y = 0$

98. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Simplifique:



$$y = \frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{1 - \operatorname{tg}^4 x} + \frac{\operatorname{cosecx} - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}$$

Comentários

Vamos simplificar a expressão, escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{1 - \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}} + \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\cos x} - \cos x} \\ y &= \frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\frac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}} + \frac{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}} \\ y &= \cos^4 x + \frac{\cos x (\cos^2 x)}{\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x)} \\ y &= \cos^4 x + \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^3 x} \\ \Rightarrow y &= \cos^4 x + \operatorname{cotg}^3 x \end{aligned}$$

Gabarito: $y = \cos^4 x + \operatorname{cotg}^3 x$

99. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as seguintes identidades:

a) $\operatorname{tg}(-2734^\circ) = -\operatorname{tg} 34^\circ$

b) $\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$

Comentários

a) Sabemos que os valores da razão tangente repetem para cada $k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$. Assim, vamos encontrar o valor do arco congruente a -2734° :

$$\operatorname{tg}(-2734^\circ) = \operatorname{tg}(-34^\circ - 15 \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg}(-34^\circ)$$

b) A função cosseno repete seus valores para cada $k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Desse modo:

$$\cos\left(-\frac{37\pi}{7}\right) = \cos\left(-5\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = \cos\left(-\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

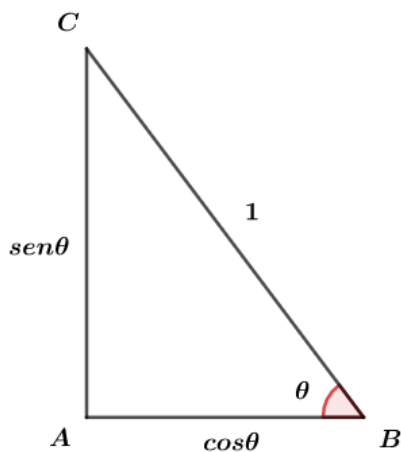
Gabarito: Demonstração

100. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Utilizando um triângulo retângulo de hipotenusa igual a 1 e um dos ângulos agudos de medida θ encontre $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ em função de senos e cossenos.

Comentários

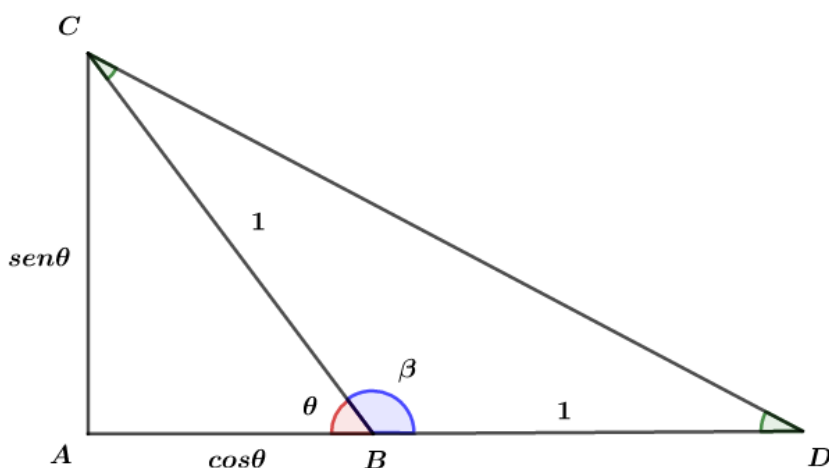
A figura inicial é dada por:



**SE LIGA
NO BIZU**



Podemos estender o lado AB de forma a obter um triângulo isósceles BCD :

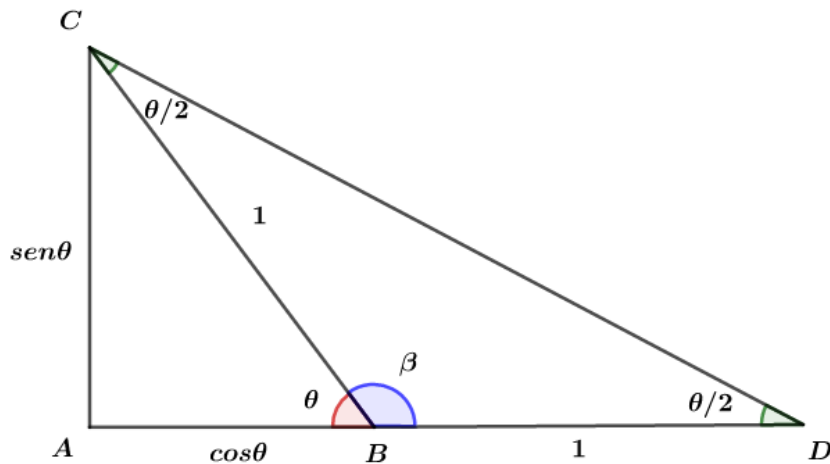


Pelas propriedades do triângulo isósceles, como $BD = BC$, temos $\hat{D} = \hat{C} = \alpha$.

O ângulo externo θ é a soma dos ângulos adjacentes $\hat{C}$ e $\hat{D}$. Veja:

$$\begin{aligned}\theta + \underbrace{\beta}_{\alpha + \alpha + \beta = \pi} &= \pi \\ \theta + (\pi - (\alpha + \alpha)) &= \pi \\ \theta &= 2\alpha \\ \alpha &= \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte figura:



Podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}$$

Gabarito: Demonstração

101. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $y = 2 - 3\operatorname{sen} x$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

- a) 5
- b) 1
- c) 3
- d) -1
- e) 6

Comentários

Sabemos que a imagem da função seno é dada por:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

Então, o valor máximo que y assume ocorre quando $\operatorname{sen} x$ é mínimo, isto é, $\operatorname{sen} x = -1$:

$$y = 2 - 3(-1) = 5$$

Gabarito: $y = 5$

102. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sendo dado que $\operatorname{sen} x + \cos x = a$, calcule:

- a) $\operatorname{sen} x \cos x$
- b) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$
- c) $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$

Comentários



a) Podemos elevar a equação dada ao quadrado:

$$\begin{aligned}(senx + cosx)^2 &= a^2 \\ \underbrace{sen^2x + cos^2x}_1 + 2senxcosx &= a^2 \\ 1 + 2senxcosx &= a^2 \\ senxcosx &= \frac{a^2 - 1}{2}\end{aligned}$$

b) Vamos escrever a relação como um quadrado perfeito:

$$\begin{aligned}sen^4x + cos^4x &= sen^4x + cos^4x + 2sen^2xcos^2x - 2sen^2xcos^2x \\ sen^4x + cos^4x &= \left(\underbrace{sen^2x + cos^2x}_1 \right)^2 - 2(senxcosx)^2\end{aligned}$$

Substituindo o valor calculado de $senxcosx$:

$$\begin{aligned}sen^4x + cos^4x &= 1 - 2\left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 \\ sen^4x + cos^4x &= 1 - \frac{2(a^4 - 2a^2 + 1)}{4} \\ sen^4x + cos^4x &= \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2}\end{aligned}$$

c) Usando a fatoração clássica:

$$sen^6x + cos^6x = \left(\underbrace{sen^2x + cos^2x}_1 \right) (sen^4x - sen^2xcos^2x + cos^4x)$$

Substituindo os valores de $senxcosx$ e $sen^4x + cos^4x$, obtemos:

$$\begin{aligned}sen^6x + cos^6x &= \frac{-a^4 + 2a^2 + 1}{2} - \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 \\ sen^6x + cos^6x &= \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2}{4} - \frac{(a^4 - 2a^2 + 1)}{4} \\ sen^6x + cos^6x &= \frac{-2a^4 + 4a^2 + 2 - a^4 + 2a^2 - 1}{4} \\ sen^6x + cos^6x &= \frac{-3a^4 + 6a^2 + 1}{4}\end{aligned}$$

Gabarito: a) $senxcosx = \frac{a^2-1}{2}$ b) $sen^4x + cos^4x = \frac{-a^4+2a^2+1}{2}$ c) $sen^6x + cos^6x = \frac{-3a^4+6a^2+1}{4}$

103. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Se $\frac{senx-seny}{cosx-cosy} = 2$ e $tgx = \frac{1}{3}$, então $tg y$ é igual a:

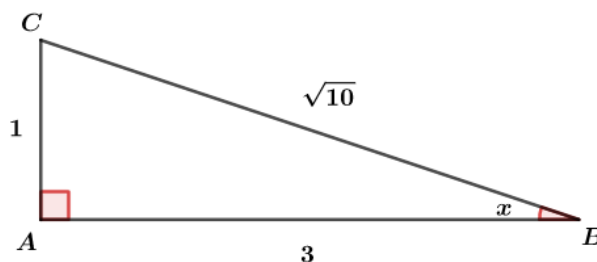
a) 3



- b) $1/6$
- c) 0
- d) $-4/3$
- e) -3

Comentários

Podemos usar o triângulo:



BC foi obtido usando o teorema de Pitágoras:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$BC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Assim, temos as seguintes razões:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Substituindo os valores na expressão, obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y} = 2$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2(\operatorname{cos} x - \operatorname{cos} y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}} - \operatorname{sen} y = \frac{6}{\sqrt{10}} - 2\operatorname{cos} y$$

$$2\operatorname{cos} y - \operatorname{sen} y = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

Dividindo a equação por $\operatorname{cos} y$:

$$2 - \operatorname{tg} y = \frac{5}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos} y}$$

$$2 - \operatorname{tg} y = \frac{5}{\sqrt{10}} \operatorname{sec} y$$

Elevando a equação ao quadrado e usando a relação $\operatorname{sec}^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$:

$$4 + \operatorname{tg}^2 y - 4\operatorname{tg} y = \frac{25}{10} (1 + \operatorname{tg}^2 y)$$



$$8 + 2tg^2y - 8tgy = 5 + 5tg^2y$$

$$3tg^2y + 8tgy - 3 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$tgy = \frac{-4 \pm \sqrt{25}}{3} = -3 \text{ ou } \frac{1}{3}$$

Não podemos ter $tgy = 1/3$, pois:

$$tgy = \frac{1}{3} \Rightarrow seny = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow cosy = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{senx - seny}{cosx - cosy} = \frac{0}{0} \text{ (valor indeterminado)}$$

Portanto:

$$tgy = -3$$

Gabarito: “e”.

104.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = 1 - 2sen^2x$

b) $\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$

Comentários

a) Vamos escrever a tangente em função do seno e cosseno:

$$\frac{1-tg^2x}{1+tg^2x} = \frac{1-\frac{sen^2x}{cos^2x}}{1+\frac{sen^2x}{cos^2x}} = \frac{\frac{1-sen^2x}{cos^2x} - \frac{sen^2x}{cos^2x}}{\frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}} = \frac{\frac{1-sen^2x-sen^2x}{cos^2x}}{\frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x}} = \frac{1-2sen^2x}{1} = 1 - 2sen^2x$$

b) Vamos dividir a expressão à esquerda por $cosx$:

$$\frac{cosx-senx}{cosx+senx} = \frac{1-\frac{senx}{cosx}}{1+\frac{senx}{cosx}} = \frac{1-tgx}{1+tgx}$$

Gabarito: Demonstração

105.(Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $tgx + secx = 3/2$, calcular $senx$ e $cosx$.

Comentários

$$tgx + secx = \frac{3}{2}$$

$$tgx = \frac{3}{2} - secx$$



Elevando a equação ao quadrado, obtemos:

$$tg^2 x = \frac{9}{4} - 3secx + sec^2 x$$

Usando a relação $sec^2 x = 1 + tg^2 x$:

$$sec^2 x - 1 = \frac{9}{4} - 3secx + sec^2 x$$

$$3secx = \frac{9}{4} + 1$$

$$\frac{1}{cosx} = \frac{13}{12}$$

$$cosx = \frac{12}{13}$$

$$senx = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \pm \frac{5}{13}$$

Testando os valores:

$$tgx + \frac{13}{12} = \frac{3}{2}$$

$$tgx = \frac{5}{12} > 0$$

Como a tangente é positiva, temos que o seno deve ser positivo:

$$cosx > 0 \Rightarrow senx > 0$$

$$\therefore senx = \frac{5}{13}$$

Gabarito: $senx = 5/13$ e $cosx = 12/13$

106. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $sen^2 x + senx = 1$, provar que $cos^4 x + cos^2 x = 1$.

Comentários

Vamos calcular o valor da expressão $cos^4 x + cos^2 x$:

$$cos^4 x + cos^2 x = cos^2 x (cos^2 x + 1)$$

Usando a relação fundamental:

$$cos^4 x + cos^2 x = (1 - sen^2 x)(1 - sen^2 x + 1)$$

$$cos^4 x + cos^2 x = 2 - sen^2 x - 2sen^2 x + sen^4 x$$

$$cos^4 x + cos^2 x = 2 - 3sen^2 x + (sen^2 x)^2$$

Usando o dado do enunciado:

$$sen^2 x = 1 - senx$$

$$\Rightarrow cos^4 x + cos^2 x = 2 - 3(1 - senx) + (1 - senx)^2$$



$$\begin{aligned}\cos^4 x + \cos^2 x &= 2 - 3 + 3\text{sen}x + 1 + \text{sen}^2 x - 2\text{sen}x \\ \Rightarrow \cos^4 x + \cos^2 x &= \text{sen}^2 x + \text{sen}x = 1\end{aligned}$$

Gabarito: Demonstração

107. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Para $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, prove as identidades abaixo:

a) $\frac{\sec x}{\text{tg}x + \text{cotg}x} = \text{sen}x$

b) $\frac{\text{tg}x - \text{cotg}x}{\text{tg}x + \text{cotg}x} = 2\text{sen}^2 x - 1$

Comentários

a) Vamos simplificar a expressão:

$$\frac{\sec x}{\text{tg}x + \text{cotg}x}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x}} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \text{sen}x}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x \text{sen}x}{1} = \text{sen}x$$

b) Simplificando a expressão:

$$\frac{\text{tg}x - \text{cotg}x}{\text{tg}x + \text{cotg}x}$$

Escrevendo tudo em função de seno e cosseno:

$$\frac{\frac{\text{sen}x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\text{sen}x}}{\frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x}} = \frac{\frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos x \text{sen}x}}{\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \text{sen}x}} = \frac{\text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x)}{\text{sen}^2 x + \cos^2 x} = 2\text{sen}^2 x - 1$$

Gabarito: Demonstração

108. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Elimine o arco x na equação:

$$\begin{cases} \text{sen}x - \cos x = a \\ \cos 2x = b \end{cases}$$

Comentários

Analisando a segunda equação, temos:

$$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = b$$

$$\left(\underbrace{\cos x - \text{sen}x}_{-a} \right) (\cos x + \text{sen}x) = b$$

$$\cos x + \text{sen}x = -\frac{b}{a}$$

Somando a equação acima com a primeira equação do sistema, temos:



$$2\operatorname{sen} x = a - \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{a^2 - b}{2a}$$

Substituindo o valor do seno na primeira equação:

$$\operatorname{cos} x = \operatorname{sen} x - a$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{a^2 - b}{2a} - a$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{-a^2 - b}{2a}$$

Usando a relação fundamental:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

$$\left(\frac{a^2 - b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-a^2 - b}{2a}\right)^2 = 1$$

$$2a^4 + 2b^2 = 4a^2$$

$$b^2 = a^2(2 - a^2)$$

Gabarito: $b^2 = a^2(2 - a^2)$

109. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Verifique a seguinte identidade:

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Comentários

Fazendo $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right)$ e $\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$, temos para $\alpha, \beta \in] - \pi/2, \pi/2[$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7}$$

Vamos calcular o valor da seguinte expressão:

$$\operatorname{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(2\alpha) + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}(2\alpha)\operatorname{tg} \beta}$$

Calculando $\operatorname{tg}(2\alpha)$:

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

Substituindo os valores na expressão:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\alpha + \beta) &= \frac{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{7}\right)}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1 \\ \therefore 2\alpha + \beta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Gabarito: Demonstração

110. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sabendo que $0 < x < \pi/2$, analise as proposições e classifique-as como verdadeiras (V) ou falsas (F).

a) Se $\alpha + x = 2\pi$, então, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} \alpha$

b) Se $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$, então, $\sec x = \operatorname{cosec} \alpha$

c) Sendo $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3}{5}$, então, $\cos(\pi - x) = \frac{3}{5}$

d) A função $f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ é idêntica a função $g(x) = 2 - \cos x$

Comentários

a) Verdadeira.

$$\begin{aligned} x &= 2\pi - \alpha \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

b) Verdadeira.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \sec x &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned}$$

c) Falsa.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x = \frac{3}{5} \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

d) Verdadeira.

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = -\cos x + 2 = g(x)$$

Gabarito: a) V b) V c) F d) V

111. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Sobre a função f definida por $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, podemos afirmar que:

a) f não é limitada.



- b) f é constante.
- c) f é injetora.
- d) f é ímpar.
- e) $f(x) = \cos^2 x$, para todo x real.

Comentários

Desenvolvendo a função, obtemos:

$$f(x) = \cos^2 x + \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x \right]^2 + \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x \right]^2$$

$$f(x) = \cos^2 x + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos^2 x + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin^2 x$$

$$f(x) = \cos^2 x + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cos^2 x + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2 x$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{3}{2} \sin^2 x$$

$$f(x) = \frac{3}{2}$$

Portanto, f é constante.

Gabarito: "b".

112. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

O valor numérico da expressão

$$\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

É

- a) $1/2$
- b) $1/3$
- c) $1/4$
- d) $1/6$
- e) $1/8$

Comentários

Reescrevendo a expressão:

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\left[-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] \left[-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$



$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ & \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

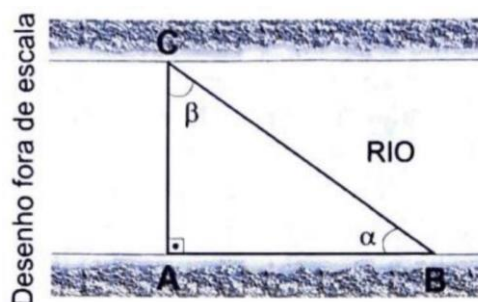
Gabarito: "c".

10. QUESTÕES NÍVEL 2

113. (AFA/2021)

Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio.

Para tal, ele tomou dois pontos A e B em uma margem do rio e outro ponto C na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir.



Considere que:

- a distância entre os pontos A e B é de 30m;
- os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(\sin^2 \alpha)x^2 - 9(\sin \alpha)(\cos \beta) + \frac{5}{2} \cos \beta = 0$, na qual $x = 2$ é uma de suas raízes;
- $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$.

A largura aproximada do rio, em m, é igual a

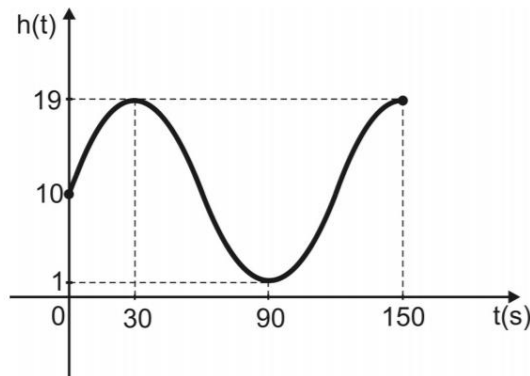
- a) 15
- b) 17
- c) 21
- d) 51

114. (AFA/2020)



Em uma roda gigante, a altura h , em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante t , em segundos, é dada pela função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(t) = A + B \sin(Ct)$, em que A, B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo $[0, 150]$



Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

() $|A \cdot B \cdot C| = \pi$

() No instante $t = 20s$, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$

() A função real f definida por $f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h

Sobre as proposições, tem-se que:

- a) todas são verdadeiras.
- b) apenas duas são verdadeiras.
- c) apenas uma é verdadeira.
- d) nenhuma delas é verdadeira.

115. (AFA/2016)

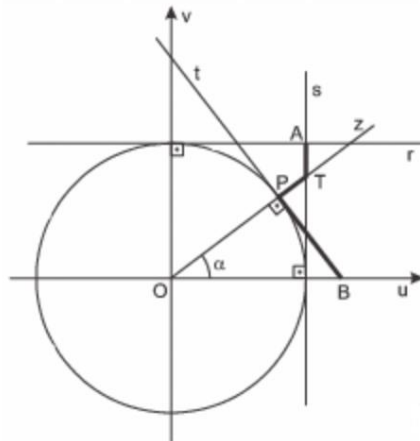
Considera a função real sobrejetora $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

Sobre f é FALSO afirmar que

- a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- b) f é par
- c) f é injetora.
- d) $B = \{2\}$

116. (AFA/2014)

No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z .



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT , TP e PB , pode ser calculado, como função de α , por

- a) $\sec \alpha$
- b) $\cos \sec \alpha$
- c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha$
- d) $\cos \sec \alpha + \sec \alpha$

117. (AFA/2013)

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{4} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{2} \right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão **NÃO** condiz com o modelo proposto.

- a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
- b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
- c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
- d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

118. (AFA/2012)

Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$.

Sobre a função f é correto afirmar que



a) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

b) é periódica com período igual a π .

c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

d) é ímpar.

119. (AFA/2011)

O período da função real f definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π

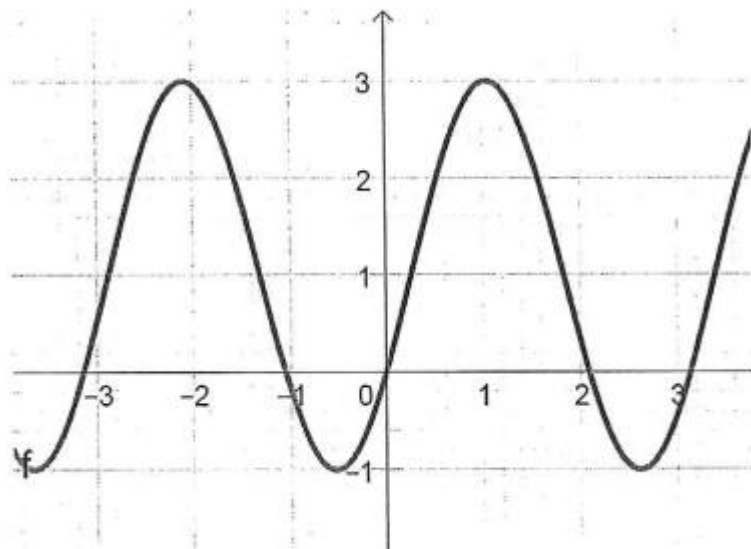
b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

120. (EFOMM/2020)

Uma parte do gráfico da função f está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar $f(x)$.



a) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \pi) + 1$

b) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$

c) $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

d) $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x) + 1$

e) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

**121. (EFOMM/2017)**

Dado $f(x) = x + a$, $f(g(x)) = \frac{\operatorname{sen} x + a^2 + a}{a+1}$ e $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Determine o valor de a .

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$

e) $a = 4$

122. (EFOMM/2013)

Se $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\operatorname{sen} x + \cos x$ vale:

a) $-7/13$.

b) $5/13$.

c) $12/13$.

d) $15/12$.

e) $17/13$.

123. (EFOMM/2010)

O valor numérico da expressão $\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cosec}^2(-780^\circ)}$ é igual a

a) 1

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

124. (EFOMM/2009)



Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\hat{P}_2P_1 = \beta$, $tg\alpha = 2$ e $tg\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

- a) 83
- b) 84
- c) 85
- d) 86
- e) 87

125. (EFOMM/2009)

Considerando-se a função clássica $f(x) = \arcsen x$ e a sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de $f \circ g$ e $g \circ f$ são

- a) iguais
- b) diferentes, mas o de $f \circ g$ está contido no de $g \circ f$.
- c) diferentes, mas o de $g \circ f$ está contido no de $f \circ g$.
- d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
- e) diferentes e de intersecção vazia.

126. (EFOMM/2006)

O valor de $\cos \left[\frac{29\pi}{4} \right] + tg \left[\frac{-16\pi}{3} \right]$ é

- a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$
- c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$
- d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
- e) $-\left[\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$

127. (EFOMM/2006)

Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que $\cos \alpha = 0,8$ e $\sen \beta = 0,6$. O valor de $\sen(\alpha + \beta)$ é

- a) 1,00



- b) 0,96
- c) 0,70.
- d) 0,48
- e) 0,00

128.(EFOMM/2005)

Dois barcos navegam em direções perpendiculares. A trajetória de um deles forma um ângulo de $18^\circ 24'$ com direção indicada pela agulha da bússola, indicando o norte. Qual é a medida do ângulo agudo formado pela trajetória do outro e pela direção indicada pela agulha da bússola?

- a) $41^\circ 36'$
- b) $51^\circ 36'$
- c) $71^\circ 36'$
- d) $75^\circ 36'$
- e) $70^\circ 36'$

129. (EFOMM/2005)

O período e o conjunto imagem da função $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} + x \right)$, são, respectivamente:

- a) $\frac{\pi}{2}$; $[1, 5, 2, 5]$
- b) π ; $[-0, 5, 2]$
- c) 2π ; $[-0, 5, 2]$
- d) $\frac{\pi}{2}$; $[-0, 5, 0, 5]$
- e) 2π ; $[1, 5, 2, 5]$

130. (Escola Naval/2016)

Seja $q = (\cos 5^\circ) \cdot (\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 85^\circ)$ a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$. Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

- a) $\frac{1}{15}$
- b) $\frac{2}{15}$
- c) $\frac{3}{15}$



d) $\frac{4}{15}$

e) $\frac{7}{15}$

131. (Escola Naval/2014)

O valor do produto $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$ é

a) $\frac{-1}{8}$

b) $\frac{-1}{4}$

c) -1

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

132. (Escola Naval/2013)

Para que valores de m vale a igualdade $\sen x = \frac{m-1}{m-2}$, $x \in \mathbb{R}$?

a) $m < 2$

b) $m \leq \frac{3}{2}$

c) $m \leq \frac{3}{2}$ ou $m \geq 2$

d) $m \leq \frac{5}{2}$ e $m \neq 2$

e) $m \leq \frac{7}{2}$ e $m \neq 2$

133. (Escola Naval/2013)

Considerando a função $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, é inversível, o valor de $tg\left(\arccos \frac{2}{5}\right)$ é

a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

b) $-\frac{4}{25}$

c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$

e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

134. (Escola Naval/2012)



Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \pi x + \cot g \frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?

- a) $\sqrt{3}$
- b) -1
- c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$
- d) 2
- e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

135.(EFOMM/2021)

O valor de $\frac{\sec^5(5) + \operatorname{cosec}^2(5)}{\operatorname{cosec}^2(10)}$ é igual a:

- a) $1/2$
- b) 1
- c) 2
- d) $5/2$
- e) 4

GABARITO

- 113. b
- 114. b
- 115. c
- 116. a
- 117. c
- 118. a
- 119. d
- 120. e
- 121. d
- 122. e
- 123. e
- 124. b
- 125. c
- 126. e
- 127. e
- 128. c
- 129. e
- 130. d
- 131. a



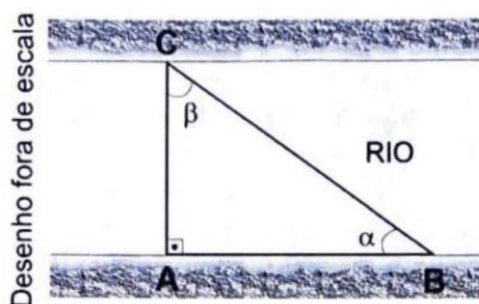
- 132. b
- 133. e
- 134. d
- 135. e

RESOLUÇÃO

113. (AFA/2021)

Em uma aula de topografia, o professor queria medir a largura de um rio.

Para tal, ele tomou dois pontos A e B em uma margem do rio e outro ponto C na margem oposta, de modo que o segmento $\overline{CA}$ ficasse perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, como indicado na figura a seguir.



Considere que:

- a distância entre os pontos A e B é de 30m;
- os ângulos agudos α e β podem ser obtidos através da equação $(\text{sen}^2 \alpha)x^2 - 9(\text{sen} \alpha)(\cos \beta) + \frac{5}{2} \cos \beta = 0$, na qual $x = 2$ é uma de suas raízes;
- $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$.

A largura aproximada do rio, em m, é igual a

- a) 15
- b) 17
- c) 21
- d) 51

Comentários

Como α e β são ângulos internos do triângulo retângulo, temos:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$$

Usando a equação e sabendo que $x = 2$ é raiz:

$$(\text{sen}^2 \alpha)2^2 - 9(\text{sen} \alpha)(\cos \beta) + \frac{5}{2} \cos \beta = 0$$



$$4(\operatorname{sen}^2 \alpha) - 9(\operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{sen} \alpha) + \frac{5}{2}(\operatorname{sen} \alpha) = 0$$

$$-5\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{5}{2}\operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha \left(-\operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Como $0 < \alpha < 90^\circ$, devemos ter $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$, logo $\alpha = 30^\circ$.

A largura do rio é dada por:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{AC}{AB}$$

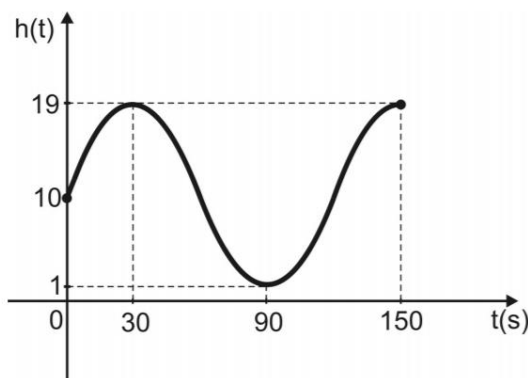
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AC}{30} \Rightarrow AC = 10\sqrt{3} = 10 \cdot 1,7 = 17 \text{ m}$$

Gabarito: B

114. (AFA/2020)

Em uma roda gigante, a altura h , em metros, em que uma pessoa se encontra, em relação ao solo, no instante t , em segundos, é dada pela função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(t) = A + B\operatorname{sen}(Ct)$, em que A, B e C são constantes reais.

A figura a seguir ilustra o gráfico dessa função, no intervalo $[0, 150]$



Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

() $|A \cdot B \cdot C| = \pi$

() No instante $t = 20s$, a pessoa estará a uma altura h tal que $h \in [17,5; 17,8]$

() A função real f definida por $f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$ é idêntica à função h

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.



b) apenas duas são verdadeiras.

c) apenas uma é verdadeira.

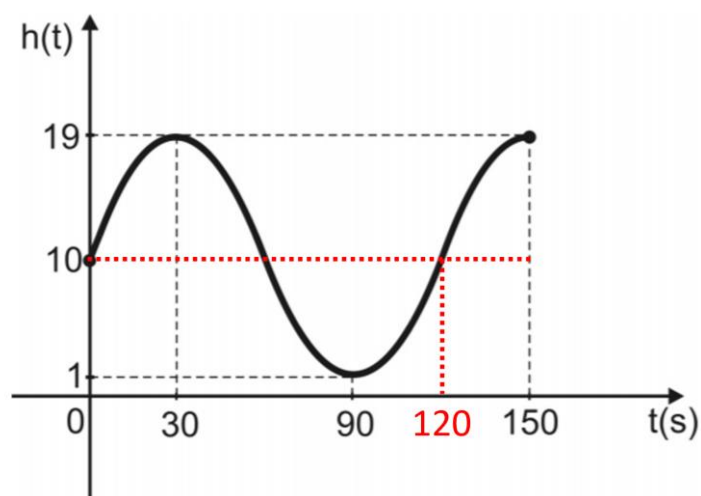
d) nenhuma delas é verdadeira.

Comentários

Precisamos encontrar os coeficientes A , B e C da função h dada por:

$$h(t) = A + B\sin(Ct)$$

Analisando o gráfico dado, temos que o período é 120s:



Assim, temos:

$$T = \frac{2\pi}{C} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{120} \therefore \boxed{C = \frac{\pi}{60}}$$

A amplitude B é igual à diferença entre o maior valor que função assume e o seu menor valor, logo:

$$B = \frac{19 - 1}{2} = \frac{18}{2} \therefore \boxed{B = 9}$$

Como B vale 9, ele deveria variar entre -9 e $+9$. Entretanto, o que se percebe é que ele varia entre 1 e 19, o que significa que a função foi transladada verticalmente, ou seja:

$$\begin{aligned} 1 &= -9 + 10 \\ 19 &= +9 + 10 \end{aligned} \therefore \boxed{A = 10}$$

Portanto, a função h é:

$$h(t) = 10 + 9\sin\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

Vamos analisar as alternativas:

Para o primeiro item:



$$A \cdot B \cdot C = 10 \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{60} = \frac{3\pi}{2} \neq \pi \therefore \text{Falso}$$

Segundo item:

Substituindo $t = 20s$ na função, temos:

$$h(20) = 10 + 9\text{sen}\left(\frac{\pi}{60} \cdot 20\right) = 10 + 9\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 + 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 10 + 4,5 \cdot 1,7$$

$$h(20) \cong 17,65$$

Esse valor está contido no intervalo $[17,5; 17,8]$, portanto, assertiva VERDADEIRA.

Terceiro Item:

Aplicando-se as transformações na função f :

$$f(t) = 10 - 9 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right)$$

Veja que:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{60}t\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{60}t\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{60}t\right) \\ &= 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{60}t\right) + (-1) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{60}t\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{60}t\right) \end{aligned}$$

Substituindo:

$$f(t) = 10 - 9\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{60}t\right)\right) = 10 + 9\text{sen}\left(\frac{\pi}{60}t\right) = h(t)$$

Portanto, assertiva VERDADEIRA.

Gabarito: "b"

115. (AFA/2016)

Considera a função real sobrejetora $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = \frac{\text{sen}3x}{\text{sen}x} - \frac{\cos3x}{\cos x}$

Sobre f é FALSO afirmar que

- a) O conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- b) f é par
- c) f é injetora.
- d) $B = \{2\}$

Comentários

Analisando a condição de existência da função, temos:



$$\operatorname{sen} x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0 \therefore x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Note que:

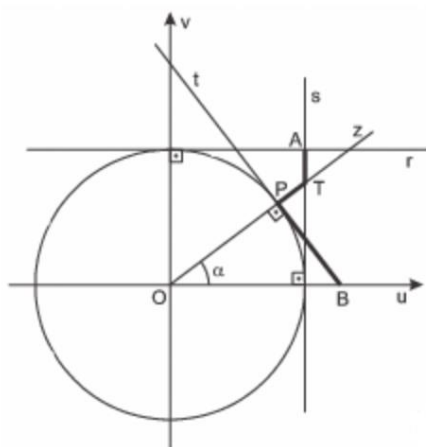
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen}(3x - x)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} \\ &= \frac{2\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = 2 \end{aligned}$$

- a) VERDADEIRA. Sabemos que $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, o conjunto A é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- b) VERDADEIRA. Como $f(x) = 2, \forall x \in A$, então $f(x) = f(-x) = 2$, logo a função é par.
- c) FALSA. Para todo x do domínio, sabe-se que f vale sempre 2. Logo, f não é injetora.
- d) VERDADEIRA. Como a função é sobrejetora, então $B = \{2\}$ para que seja satisfeita a condição do problema.

Gabarito: “c”.

116. (AFA/2014)

No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z .



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, AT, TP e PB , pode ser calculado, como função de α , por

- a) $\sec \alpha$
- b) $\cos \sec \alpha$
- c) $\operatorname{tg} \alpha + \cot g \alpha$
- d) $\cos \sec \alpha + \sec \alpha$

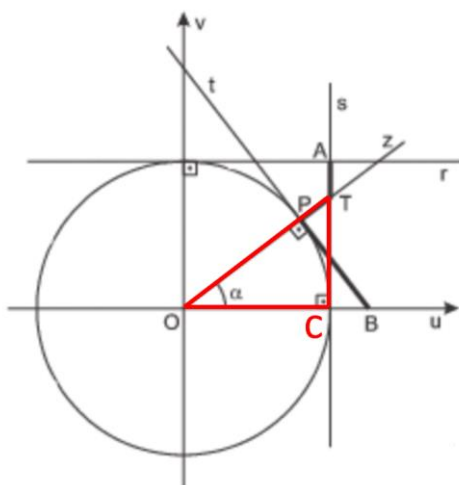
Comentários:

Do triângulo OPB , temos:



$$tg\alpha = \frac{PB}{OP} = \frac{PB}{1} = PB \Rightarrow PB = tg\alpha$$

Sendo C o encontro das retas s e u temos:



$$\Delta OCT: \cos \alpha = \frac{OC}{OT} \Rightarrow OT = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$tg\alpha = \frac{TC}{OC} \Rightarrow TC = tg\alpha$$

$$TP = OT - OP = \sec \alpha - 1$$

$$AT = AC - TC = 1 - t_g \alpha$$

Logo,

$$AT + TP + PB = (1 - t g \alpha) + (\sec \alpha - 1) + t g \alpha = \sec \alpha$$

Gabarito: “a”.

117. (AFA/2013)

Uma piscina com ondas artificiais foi programada de modo que a altura da onda varie com o tempo de acordo com o modelo $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ em que $y = f(x)$ é a altura da onda, em metros, e x o tempo, em minutos.

Dentre as alternativas que seguem, assinale a única cuja conclusão NÃO condiz com o modelo proposto.

- a) A altura de uma onda nunca atinge 2 metros.
- b) Entre o momento de detecção de uma crista (altura máxima de uma onda) e o de outra seguinte, passam-se 2 minutos.
- c) De zero a 4 minutos, podem ser observadas mais de duas cristas.
- d) As alturas das ondas observadas com 30, 90, 150, ... segundos são sempre iguais.

Comentários



Veja que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ \Rightarrow f(x) &= 3 \underbrace{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}_{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

a) (V) Como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1$, então $f(x) \leq \frac{3}{2}$ e, portanto, nunca atinge 2 metros.

b) (V) Queremos que $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right| = 1$, logo

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi(1+2k)}{2} \Rightarrow x = 1 + 2k$$

Assim, entre duas ondas consecutivas temos $2 \cdot 1 = 2$ minutos.

c) (F) Há apenas cristas em $x = 1$ e 3 minutos, pois $\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right| = \left|\frac{\operatorname{sen}3\pi}{2}\right| = 1$. Portanto, não há mais de duas cristas de zero a 4 minutos.

d) Perceba que:

$$x = 30 \text{ seg} = \frac{1}{2} \text{ min}$$

$$x = 90 \text{ seg} = \frac{3}{2} \text{ min}$$

$$x = 150 \text{ seg} = \frac{5}{2} \text{ min}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \dots = \frac{1}{2}$$

Assim, as alturas nesses tempos são iguais.

Gabarito: "c".

118. (AFA/2012)

Considere A o conjunto mais amplo possível na função real $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$.

Sobre a função f é correto afirmar que

a) $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) é periódica com período igual a π .



c) é decrescente se $x \in \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) é ímpar.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência da função.

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\cos x}{\sec x}$$

$$\operatorname{cosec} x \Rightarrow \operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0; x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sec x \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Unindo as restrições:

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, temos:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra “a”.

Gabarito: “a”.

119.(AFA/2011)

O período da função real f definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x}$ é igual a

a) 2π

b) π

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{2}$

Comentários

Da transformação de soma em produto no numerador e denominador:

$$f(x) = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(x)}{\cos(2x) \cdot \cos(x)}$$

Para $\cos x \neq 0$:

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x)$$

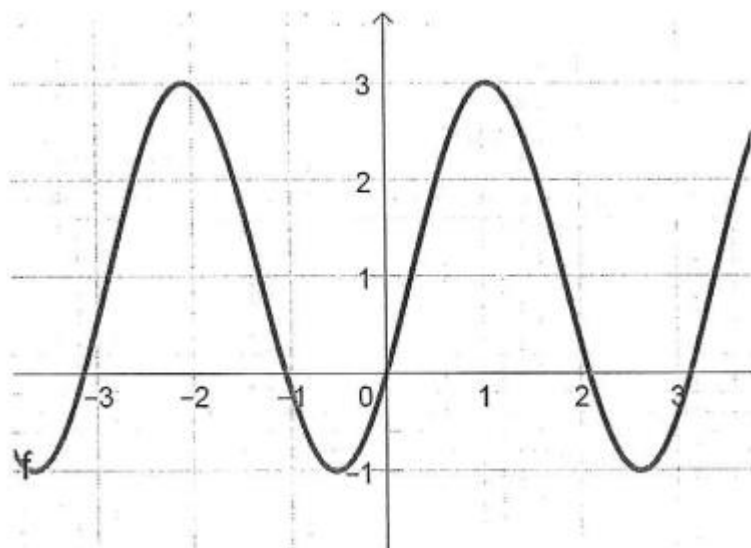


Logo, como o período da função $\operatorname{tg} x$ é π , quando dobramos o argumento da tangente seu período cai pela metade. Assim, $T = \frac{\pi}{2}$.

Gabarito: “d”.

120.(EFOMM/2020)

Uma parte do gráfico da função f está representado na figura abaixo. Assinale a alternativa que pode representar $f(x)$.



- a) $f(x) = \operatorname{sen}(x - \pi) + 1$
- b) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$
- c) $f(x) = \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$
- d) $f(x) = 2\operatorname{sen}(2x) + 1$
- e) $f(x) = 2\operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$

Comentários

Analisando o gráfico, vemos que:

$$f(0) = 0 \text{ e } f(1) \cong 3$$

Nessa questão, devemos analisar o gráfico e a partir dele inferir algumas funções que possam ter correspondência correta como é pedido na questão. Pela análise do gráfico percebe-se que as alternativas *a*, *b*, *c* e *d* não satisfazem o gráfico da questão para os 2 valores acima

- a) $f(0) = \operatorname{sen}(-\pi) + 1 = 1 \neq 0$
- b) $f(0) = 2\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 1 = -1 \neq 0$
- c) $f(0) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \neq 0$
- d) $f(0) = 2\operatorname{sen}(0) + 1 = 1 \neq 0$



Mas a letra e satisfaz.

$$e) f(0) = 2\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

$$f(1) = 2\text{sen}\left(2 - \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

Para $\pi = 3,14$:

$$f(1) \cong 2\text{sen}(2 - 0,5) + 1 \cong 2\text{sen}(1,5) + 1 \cong 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \cong 3$$

Assim, ela é a correta.

Gabarito: “e”.

121.(EFOMM/2017)

Dado $f(x) = x + a$, $f(g(x)) = \frac{\text{sen } x + a^2 + a}{a+1} \text{ e } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Determine o valor de a .

a) $a = 0$

b) $a = 1$

c) $a = 2$

d) $a = 3$

e) $a = 4$

Comentários

$$f(x) = x + a \Rightarrow f(g(x)) = g(x) + a \Rightarrow \frac{\text{sen } x + a^2 + a}{a+1} = g(x) + a$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{\text{sen } x + a^2 + a}{a+1} - a = \frac{\text{sen } x + a^2 + a - a^2 - a}{a+1} = \frac{\text{sen } x}{a+1}$$

Sabendo que $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}$, temos:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a+1} \Rightarrow 2a + 2 = 8 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Gabarito: “d”.

122.(EFOMM/2013)

Se $\text{tg } x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\text{sen } x + \cos x$ vale:

a) $-7/13$.

b) $5/13$.



c) 12/13.

d) 15/12.

e) 17/13.

Comentários

Da relação fundamental, temos:

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)(\sec x - \operatorname{tg} x) = 1$$

Substituindo o valor do enunciado:

$$\frac{3}{2}(\sec x - \operatorname{tg} x) = 1$$

Logo,

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$$

Somando as duas equações, temos:

$$2\sec x = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13}$$

Subtraindo as duas equações:

$$2\operatorname{tg} x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$$

Assim,

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{17}{13}$$

Gabarito: “e”.

123. (EFOMM/2010)

O valor numérico da expressão $\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cosec}^2(-780^\circ)}$ é igual a

a) 1



b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

Comentários

Vamos simplificar os termos da expressão:

$$\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{42\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sec(2400^\circ) = \sec(360^\circ \cdot 6 + 240^\circ) = \sec(240^\circ) = \frac{1}{\cos(240^\circ)} = -2$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{32\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\operatorname{cosec}(-780^\circ) = \operatorname{cosec}(-360^\circ \cdot 2 - 60^\circ) = \operatorname{cosec}(-60^\circ) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-60^\circ)} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}^2(-780^\circ) = \frac{4}{3}$$

Logo,

$$\frac{\cos\left(\frac{44\pi}{3}\right) - \sec(2400^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cosec}^2(-780^\circ)} = \frac{-\frac{1}{2} + 2 - 1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{-1 + 4 - 2}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}$$

Gabarito: "e".

124.(EFOMM/2009)

Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\hat{P}_2P_1 = \beta$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ e $\operatorname{tg}\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

a) 83

b) 84

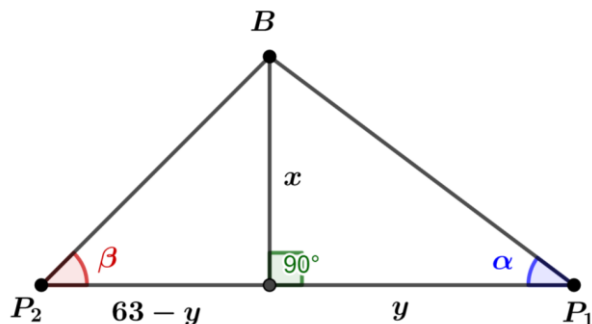
c) 85

d) 86

e) 87

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:



Observando os triângulos retângulos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow 2 = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x}{63 - y} \Rightarrow 4 = \frac{x}{63 - y} \Rightarrow 252 - 4y = x$$

Substituindo y na última equação:

$$252 - 4\left(\frac{x}{2}\right) = x \Rightarrow 252 - 2x = x \Rightarrow 3x = 252 \Rightarrow x = 84$$

Gabarito: “b”.

125. (EFOMM/2009)

Considerando-se a função clássica $f(x) = \arcsen x$ e a sua inversa $g(x) = f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de $f \circ g$ e $g \circ f$ são

- a) iguais
- b) diferentes, mas o de $f \circ g$ está contido no de $g \circ f$.
- c) diferentes, mas o de $g \circ f$ está contido no de $f \circ g$.
- d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
- e) diferentes e de intersecção vazia.

Comentários

Para que f seja inversível, ela deve ser bijetora. Assim, temos:

$$f: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f \circ g(x) = \arcsen(\operatorname{sen} x)$$

$$g \circ f(x) = \operatorname{sen}(\arcsen x)$$



Como o seno varia entre -1 e $+1$ e o arcoseno varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, temos:

$$fog(\pm 1) = \arcsen(\pm 1) \cong \pm 1,57$$

E

$$gof\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \sen\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$

Logo, a imagem de gof está contido na imagem de fog .

Gabarito: “c”.

126.(EFOMM/2006)

O valor de $\cos\left[\frac{29\pi}{4}\right] + tg\left[\frac{-16\pi}{3}\right]$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$

e) $-\left[\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Comentários

Simplificando as razões trigonométricas:

$$\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{18\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3} - 6\pi\right) = tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Logo:

$$\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right) + tg\left(-\frac{16\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}$$

Gabarito: “e”.

127.(EFOMM/2006)

Sejam α um arco do 1º quadrante e β um arco do 2º quadrante, tais que $\cos \alpha = 0,8$ e $\sen \beta = 0,6$. O valor de $\sen(\alpha + \beta)$ é

a) 1,00

b) 0,96

c) 0,70.



d) 0,48

e) 0,00

Comentários

Se α é do 1º quadrante, então $\operatorname{sen} \alpha > 0$, logo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6$$

Sendo β do 2º quadrante, então $\cos \beta < 0$:

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} = -\sqrt{1 - 0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cdot \cos \alpha = 0,6 \cdot (-0,8) + 0,6 \cdot 0,8 = 0,00$$

Gabarito: “e”.**128.(EFOMM/2005)**

Dois barcos navegam em direções perpendiculares. A trajetória de um deles forma um ângulo de $18^\circ 24'$ com direção indicada pela agulha da bússola, indicando o norte. Qual é a medida do ângulo agudo formado pela trajetória do outro e pela direção indicada pela agulha da bússola?

a) $41^\circ 36'$ b) $51^\circ 36'$ c) $71^\circ 36'$ d) $75^\circ 36'$ e) $70^\circ 36'$ **Comentários**

$$\text{Ângulo suplementar} = 90^\circ - 18^\circ 24' = 89^\circ 60' - 18^\circ 24' = 71^\circ 36'$$

Gabarito: “c”**129.(EFOMM/2005)**

O período e o conjunto imagem da função $f(x) = 2 - \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} + x \right)$, são, respectivamente:

a) $\frac{\pi}{2}; [1, 5, 2, 5]$ b) $\pi; [-0, 5, 2]$ c) $2\pi; [-0, 5, 2]$ d) $\frac{\pi}{2}; [-0, 5, 0, 5]$ e) $2\pi; [1, 5, 2, 5]$ **Comentários**



Veja que:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = 2 - \frac{1}{2} \sin(x)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{2} \sin x \leq 2 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 2 - \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow 1,5 \leq f(x) \leq 2,5$$

Assim, temos que $Im(f) = [1,5; 2,5]$ e o seu período é igual ao período da função $\sin x$, ou seja, 2π .

Gabarito: “e”.

130. (Escola Naval/2016)

Seja $q = (\cos 5^\circ) \cdot (\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 85^\circ)$ a razão de uma progressão geométrica infinita com termo inicial $a_0 = \frac{1}{4}$. Sendo assim, é correto afirmar que a soma dos termos dessa progressão vale:

- a) $\frac{1}{15}$
- b) $\frac{2}{15}$
- c) $\frac{3}{15}$
- d) $\frac{4}{15}$
- e) $\frac{7}{15}$

Comentários

Vamos reescrever a razão:

$$q = (\cos 5^\circ) \cdot (\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 85^\circ)$$

$$q = (\cos 5^\circ) \cdot (\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\sin(90^\circ - 85^\circ))$$

$$q = \underbrace{(\sin 5^\circ)(\cos 5^\circ)}_{\frac{1}{2}\sin(10^\circ)} (\cos 20^\circ)(\cos 40^\circ)$$

$$q = \frac{1}{2} \sin(10^\circ) \cos(20^\circ) \cos(40^\circ)$$

Multiplicando a equação por $4 \cos 10^\circ$:

$$4 \cos 10^\circ q = 4 \cos 10^\circ \frac{1}{2} \sin(10^\circ) \cos(20^\circ) \cos(40^\circ)$$

$$4 \cos 10^\circ q = \underbrace{2 \cos 10^\circ \sin(10^\circ)}_{\sin(20^\circ)} \cos(20^\circ) \cos(40^\circ)$$



$$4 \cos 10^\circ q = \underbrace{\frac{\sin(20^\circ) \cos(20^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(40^\circ)}}_{\frac{1}{2}\sin(40^\circ)} \cos(40^\circ)$$

$$4 \cos 10^\circ q = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\sin(40^\circ) \cos(40^\circ)}{\frac{1}{2}\sin(80^\circ)}}_{\frac{1}{2}\sin(80^\circ)}$$

$$4 \cos 10^\circ q = \frac{1}{4} \sin(80^\circ)$$

$$4 \cos 10^\circ q = \frac{1}{4} \cos(90^\circ - 80^\circ)$$

$$4 \cos 10^\circ q = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$$

$$\therefore q = \frac{1}{16}$$

Como a PG é infinita e a razão é menor que 1, temos que a soma dos seus termos é:

$$S = \frac{a_0}{1 - q} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{16}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{16}} = \frac{4}{15}$$

Gabarito: "d".

131. (Escola Naval/2014)

O valor do produto $\cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$ é

a) $\frac{-1}{8}$

b) $\frac{-1}{4}$

c) -1

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Seja $P = \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$. Multiplicando P por $2\sin 40^\circ$, temos:

$$2\sin 40^\circ P = \underbrace{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}_{\sin 80^\circ} \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 160^\circ$$

$$2\sin 40^\circ P = \underbrace{\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 160^\circ} \cdot \cos 160^\circ$$

$$2\sin 40^\circ P = \frac{1}{2} \underbrace{\sin 160^\circ \cdot \cos 160^\circ}_{\frac{1}{2}\sin 320^\circ}$$



$$2\operatorname{sen}40^\circ P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}320^\circ$$

$$\operatorname{sen}40^\circ P = \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sen}(360^\circ - 40^\circ)$$

$$\operatorname{sen}40^\circ P = \frac{1}{8} \cdot \operatorname{sen}(-40^\circ)$$

$$\operatorname{sen}40^\circ P = -\frac{1}{8} \cdot \operatorname{sen}(40^\circ)$$

$$\therefore P = -\frac{1}{8}$$

Gabarito: “a”.

132. (Escola Naval/2013)

Para que valores de m vale a igualdade $\operatorname{sen} x = \frac{m-1}{m-2}$, $x \in \mathbb{R}$?

a) $m < 2$

b) $m \leq \frac{3}{2}$

c) $m \leq \frac{3}{2}$ ou $m \geq 2$

d) $m \leq \frac{5}{2}$ e $m \neq 2$

e) $m \leq \frac{7}{2}$ e $m \neq 2$

Comentários

A imagem da função seno é o conjunto $[-1, 1]$, logo:

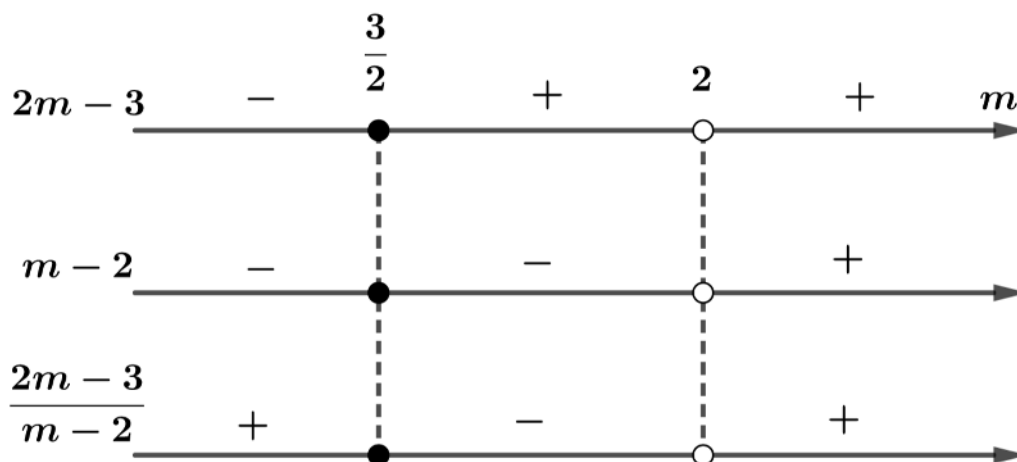
$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{m-1}{m-2} \leq 1$$

$$\begin{cases} \frac{m-1}{m-2} \geq -1 \\ \frac{m-1}{m-2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m-2} + 1 \geq 0 \\ \frac{m-1}{m-2} - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1+m-2}{m-2} \geq 0 \\ \frac{m-1-m+2}{m-2} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m-3}{m-2} \geq 0 \text{ (i)} \\ \frac{1}{m-2} \leq 0 \text{ (ii)} \end{cases}$$

Fazendo o estudo do sinal:

(i)



Logo,

$$m \leq \frac{3}{2} \text{ ou } m > 2$$

Para (ii):

$$\frac{1}{m-2} \leq 0 \Rightarrow m-2 \leq 0 \Rightarrow m \leq 2$$

Fazendo a intersecção das soluções de (i) e (ii):

$$S = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m \leq \frac{3}{2} \right\}$$

Gabarito: “b”.

133. (Escola Naval/2013)

Considerando a função $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, é inversível, o valor de $tg\left(\arccos \frac{2}{5}\right)$ é

- a) $-\frac{\sqrt{21}}{5}$
- b) $-\frac{4}{25}$
- c) $-\frac{\sqrt{21}}{2}$
- d) $\frac{\sqrt{21}}{25}$
- e) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

Comentários

$$x = \arccos \frac{2}{5} \Rightarrow \cos x = \frac{2}{5}$$

Assim, x pertence ao primeiro quadrante, logo, $\sin x$ é positivo. Pela relação fundamental:



$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Logo,

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{2}{5}\right) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Gabarito: "e".

134. (Escola Naval/2012)

Qual o valor da expressão $\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \pi x + \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?

- a) $\sqrt{3}$
- b) -1
- c) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$
- d) 2
- e) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

Comentários

Vamos resolver a equação e encontrar o valor de x . Consideremos:

$$\alpha = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = x$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{x+1}$$

Aplicando a tangente na equação e sabendo que $x \neq -1$:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x + \frac{x}{x+1}}{1 - x \frac{x}{x+1}} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{-x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = -x^2 + x + 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$



$$x_1 = -1 \text{ ou } x_2 = \frac{1}{2}$$

Como $x \neq -1$, temos:

$$x = \frac{1}{2}$$

Assim, o valor da expressão é dado por:

$$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2} + \cot g \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + 2} = \sqrt{1 + \cot g \left(\frac{\pi}{4} \right) + 2} = \sqrt{1 + 1 + 2} = \sqrt{4} = 2$$

Gabarito: "d".

135. (EFOMM/2021)

O valor de $\frac{\sec^5(5) + \operatorname{cosec}^2(5)}{\operatorname{cosec}^2(10)}$ é igual a:

- a) $1/2$
- b) 1
- c) 2
- d) $5/2$
- e) 4

Comentários

Vamos simplificar a expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\sec^5(5) + \operatorname{cosec}^2(5)}{\operatorname{cosec}^2(10)} &= \frac{\frac{1}{\cos^2(5)} + \frac{1}{\sin^2(5)}}{\frac{1}{\sin^2(10)}} = \frac{\sin^2(5) + \cos^2(5)}{\sin^2(5) \cos^2(5)} \cdot \sin^2(10) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2\sin(5)\cos(5)}{2} \right)^2} \cdot \sin^2(10) = \frac{1}{\left(\frac{\sin(10)}{2} \right)^2} \cdot \sin^2(10) = 4 \end{aligned}$$

Gabarito: E

11. QUESTÕES NÍVEL 3

136. (ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\sin^2(3x) + \sin(6x) - 1$ são, respectivamente,

- a) $[-3, 3]$ e 2π



- b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$
- c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$
- d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$
- e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

137. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsen x + \arccos x$, temos que:

- a) f é não-crescente e ímpar.
- b) f não é par nem ímpar.
- c) f é sobrejetora.
- d) f é injetora.
- e) f é constante.

138. (ITA/2002)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R}; \text{sen } y < x\}$.

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$, então

- a) $A = [-1, 1]$.
- b) $A = [a, \infty), \forall a > 1$.
- c) $A = [a, \infty), \forall a \geq 1$.
- d) $A = (-\infty, a], \forall a < -1$.
- e) $A = (-\infty, a], \forall a \leq -1$.

139. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\text{sen}3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

- a) é uma função par.
- b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π .
- c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
- d) é uma função periódica de período fundamental 2π .



e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

140. (ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a \left(x + \frac{\pi}{2} \right), & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R}; f(y) = 0\}$. Qual o valor de a , sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

141. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove que se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

142. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular a soma

$$S = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{15}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{15}\right) + \dots + \operatorname{sen}\left(\frac{33\pi}{15}\right)$$

143. Desafio

Prove que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$$

144. Desafio

Calcular a soma abaixo, cujos arcos estão em PG:

$$S = \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) + \operatorname{tg}(2a) \cdot \sec(4a) + \operatorname{tg}(4a) \cdot \sec(8a) + \dots + \operatorname{tg}(2^{n-1}a) \cdot \sec(2^n a)$$

**GABARITO**

136.c

137.e

138.b

139.b

140.d

141.Demonstração

142. $S = \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$

143.Demonstração

144. $S = \text{tg}(2^n a) - \text{tga}$ **RESOLUÇÃO**

136.(ITA/2008)

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\text{sen}^2(3x) + \text{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$ c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$ d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$ e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$ **Comentários**

Perceba que temos o termo escondido $\cos(6x) = 1 - 2\text{sen}^2(3x)$.

Assim, podemos escrever:

$$f(x) = \text{sen}(6x) - (1 - 2\text{sen}^2(3x))$$

$$f(x) = \text{sen}(6x) - \cos(6x)$$

Agora, encontramos uma equação clássica. Veja o pulo do gato:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} (\text{sen}(6x) - \cos(6x))$$

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\text{sen}(6x) \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(6x) \right)$$

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\text{sen}(6x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(6x) \right)$$



Essa é a fórmula da diferença do seno:

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\text{sen} \left(6x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Sabemos que a função seno pertence ao intervalo $[-1; 1]$, dessa forma:

$$-1 \leq \text{sen} \left(6x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \text{sen} \left(6x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$$

Para encontrar o período da função, podemos usar a definição:

$$f(x + T) = f(x)$$

$$\sqrt{2} \text{sen} \left(6(x + T) - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \text{sen} \left(6x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Sabemos que o período da função seno é $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$6x + 6T - \frac{\pi}{4} = 6x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$6T = 2k\pi$$

$$T = \frac{k\pi}{3}$$

O período é dado pelo menor valor positivo de T :

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

Com isso, encontramos o gabarito na letra “c”.

Gabarito: “c”.

137. (ITA/2003)

Considere os contradomínios das funções arco-seno e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente.

Com respeito à função $f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsen x + \arccos x$, temos que:

a) f é não-crescente e ímpar.

b) f não é par nem ímpar.

c) f é sobrejetora.



d) f é injetora.

e) f é constante.

Comentários

Fazendo $\alpha = \arcsen x$ e $\beta = \arccos x$ tal que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\beta \in [0, \pi]$, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = x$$

$$\cos \beta = x$$

Igualando os dois valores de x :

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \Rightarrow -\pi \leq -\beta \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Devido às restrições dos intervalos, podemos escrever:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsen x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore f$ é constante

Gabarito: “e”.

138. (ITA/2002)

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$ dada por $f(x) = \{y \in \mathbb{R}; \operatorname{sen} y < x\}$.

Se A é tal que $f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$, então

a) $A = [-1, 1]$.

b) $A = [a, \infty), \forall a > 1$.

c) $A = [a, \infty), \forall a \geq 1$.

d) $A = (-\infty, a], \forall a < -1$.



e) $A = (-\infty, a], \forall a \leq -1.$

Comentários

Analisando a função e de acordo com o enunciado:

$$f(x) = \mathbb{R}, \forall x \in A$$

$$f(x) = \{y \in \mathbb{R}; \text{seny} < x\}$$

$$\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}; \text{seny} < x\} = \mathbb{R}$$

Para todo real y , temos $\text{seny} \leq 1$, então, se $x > 1$ a igualdade acima torna-se verdadeira.

Portanto, $x \in A \Leftrightarrow x > 1.$

$$A = [a, \infty], \forall a > 1$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra b.

Gabarito: “b”.

139. (ITA/2000)

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\text{sen}3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right]$. Sobre f podemos afirmar que:

- a) é uma função par.
- b) é uma função ímpar e periódica de período fundamental 4π .
- c) é uma função ímpar e periódica de período fundamental $4\pi/3$.
- d) é uma função periódica de período fundamental 2π .
- e) não é par, não é ímpar e não é periódica.

Comentários

Como a função cosseno é par, podemos escrever:

$$f(x) = 2\text{sen}3x - \cos\left[\frac{x-\pi}{2}\right] = 2\text{sen}3x - \cos\left[\frac{\pi-x}{2}\right] = 2\text{sen}3x - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Analisando a paridade da função:

$$f(-x) = 2\text{sen}(-3x) - \text{sen}\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -2\text{sen}(3x) + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$\therefore f$ é ímpar

O período da função $\text{sen}(3x)$ é:



$$T_1 = \frac{2\pi}{3}$$

O período da função $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ é:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Perceba que $T_2 = 4\pi = 6\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 6T_1$. Portanto, o período fundamental da função f é:

$$T = T_2 = 4\pi$$

Gabarito: “b”.

140. (ITA/1995)

Seja a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & \text{se } x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{a}{x} \operatorname{sen} x, & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Onde $a > 0$ é uma constante. Considere $K = \{y \in \mathbb{R}; f(y) = 0\}$. Qual o valor de a , sabendo-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K$?

a) $\pi/4$

b) $\pi/2$

c) π

d) $\pi^2/2$

e) π^2

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \in K \Rightarrow f\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

Calculando $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}$$

Temos que calcular $f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}\right)$:



Como $a > 0$, temos:

$$-a < 0 \Rightarrow -\frac{2a}{\pi} < 0$$

Então:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} < \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}\right) = a\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}\right) = a\left(\pi - \frac{2a}{\pi}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\pi}\right) = 0 \Rightarrow a\left(\pi - \frac{2a}{\pi}\right) = 0$$

Como $a > 0$:

$$\pi - \frac{2a}{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\pi^2}{2}$$

Gabarito: "d".

141. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Prove que se A, B e C são ângulos de um triângulo, então:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$$

Comentários

Se A, B, C são ângulos de um triângulo, temos a seguinte relação:

$$A + B + C = \pi$$

$$A = \pi - (B + C)$$

Desenvolvendo a seguinte expressão:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\cos^2(\pi - (B + C)) + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$[-\cos(B + C)]^2 + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\cos^2(B + C) + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$[\cos B \cos C - \sin B \sin C]^2 + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\cos^2 B \cos^2 C + \sin^2 B \sin^2 C - 2\cos B \cos C \sin B \sin C + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$\cos^2 B \cos^2 C + (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) - 2\cos B \cos C \sin B \sin C + \cos^2 B + \cos^2 C$$



$$\cos^2 B \cos^2 C + 1 - \cos^2 B - \cos^2 C + \cos^2 B \cos^2 C - 2\cos B \cos C \sin B \sin C + \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$1 + 2 \cos^2 B \cos^2 C - 2\cos B \cos C \sin B \sin C$$

$$1 + 2 \cos^2 B \cos^2 C - 2\cos B \cos C \sin B \sin C$$

$$1 + 2 \cos B \cos C (\cos B \cos C - \sin B \sin C)$$

$$1 + 2 \cos B \cos C \left(\cos \left(\frac{B+C}{\pi-A} \right) \right)$$

$$1 + 2 \cos B \cos C \cos(\pi - A)$$

$$1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

Gabarito: Demonstração

142. (Estratégia Militares - Prof. Victor So)

Calcular a soma

$$S = \text{sen} \left(\frac{\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{5\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{9\pi}{15} \right) + \dots + \text{sen} \left(\frac{33\pi}{15} \right)$$

Comentários

Temos a seguinte soma:

$$\begin{aligned} S &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{5\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{9\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{13\pi}{15} \right) \\ &+ \text{sen} \left(\frac{17\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{21\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{25\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{29\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{33\pi}{15} \right) \\ S &= \text{sen} \left(\frac{\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{5\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{9\pi}{15} \right) + \text{sen} \left(\frac{13\pi}{15} \right) \\ &+ \underbrace{\text{sen} \left(2\pi - \frac{13\pi}{15} \right)}_{-\text{sen} \left(\frac{13\pi}{15} \right)} + \underbrace{\text{sen} \left(2\pi - \frac{9\pi}{15} \right)}_{-\text{sen} \left(\frac{9\pi}{15} \right)} + \underbrace{\text{sen} \left(2\pi - \frac{5\pi}{15} \right)}_{-\text{sen} \left(\frac{5\pi}{15} \right)} + \underbrace{\text{sen} \left(2\pi - \frac{\pi}{15} \right)}_{-\text{sen} \left(\frac{\pi}{15} \right)} + \underbrace{\text{sen} \left(2\pi + \frac{3\pi}{15} \right)}_{\text{sen} \left(\frac{\pi}{15} \right)} \end{aligned}$$

Os termos coloridos se cancelam, logo:

$$S = \text{sen} \left(\frac{\pi}{5} \right)$$

Gabarito: $S = \text{sen} \left(\frac{\pi}{5} \right)$

143. Desafio

Prove que:

$$\cos \left(\frac{\pi}{7} \right) - \cos \left(\frac{2\pi}{7} \right) + \cos \left(\frac{3\pi}{7} \right) = \frac{1}{2}$$

Comentários

Vamos aplicar Prostaferese na diferença:



$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{14}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right) \\ &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{14}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \end{aligned}$$

Colocando seno em evidência:

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \left[2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{14}\right) + 1 \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{14}\right) + 1 \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \left[2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1 \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}_{2\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)-1} + 1 \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \right] \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Agora, vamos escrever o seno dessa forma:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right)\cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \Rightarrow 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Assim, temos:

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Somando as frações:

$$\begin{aligned} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{\pi}{14}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ &= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \right] \end{aligned}$$



Perceba que os termos em evidência são a soma do seno:

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{7}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

Usando a propriedade de arco complementar:

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Gabarito: Demonstração

144. Desafio

Calcular a soma abaixo, cujos arcos estão em PG:

$$S = \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) + \operatorname{tg}(2a) \cdot \sec(4a) + \operatorname{tg}(4a) \cdot \sec(8a) + \dots + \operatorname{tg}(2^{n-1}a) \cdot \sec(2^na)$$

Comentários

Geralmente, somatórios nesse formato devem ser transformados em soma telescópica. Vamos verificar se encontramos um padrão. Analisando $\operatorname{tga} \cdot \sec(2a)$:

$$\operatorname{tga} \cdot \sec(2a) = \frac{\operatorname{tga}}{\cos(2a)}$$

Usando a seguinte identidade:

$$\cos(2a) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) &= \frac{\operatorname{tga}(1 + \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \\ \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) &= \frac{\operatorname{tga}(2 - 1 + \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \\ \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) &= \frac{2\operatorname{tga} - \operatorname{tga}(1 - \operatorname{tg}^2 a)}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \\ \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) &= \frac{2\operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} - \operatorname{tga} \\ \operatorname{tga} \cdot \sec(2a) &= \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga} \end{aligned}$$

Portanto, temos o seguinte somatório:



$$S = \textcolor{red}{tg2a} - \textcolor{blue}{tga} + \textcolor{blue}{tg4a} - \textcolor{red}{tg2a} + \textcolor{green}{tg8a} - \textcolor{blue}{tg4a} + \dots + \textcolor{blue}{tg(2^na)} - \textcolor{violet}{tg(2^{n-1}a)}$$

Os termos coloridos se cancelam, logo, temos o seguinte resultado:

$$S = tg(2^na) - tga$$

Gabarito: $S = tg(2^na) - tga$

12. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da nossa aula de trigonometria. Esse assunto possui uma alta taxa de incidência nas provas militares. Tente resolver todos os exercícios dessa aula.

O melhor jeito de estudar trigonometria é resolver uma grande quantidade de exercícios e pegar todos os bizzus da aula. Na hora da prova, não teremos surpresas pois já saberemos resolver cada tipo de problema que possa cair.

Lembre-se! A prática leva à perfeição! Conte comigo na sua preparação!

Se ficar com dúvidas ou tiver alguma sugestão e/ou crítica, nos procure no fórum de dúvidas ou fale diretamente comigo:



13. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.
- [2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.



14. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.