COMBINATORIA

Metodología Problem Solving

Gerard Romo Garrido

Toomates Coolección vol. 7

TooMates
Coolección

Toomates Coolección

Los documentos de **Toomates** son materiales digitales y gratuitos. Son digitales porque están pensados para ser consultados mediante un ordenador, tablet o móvil. Son gratuitos porque se ofrecen a la comunidad educativa sin coste alguno. Los libros de texto pueden ser digitales o en papel, gratuitos o en venta, y ninguna de estas opciones es necesariamente mejor o peor que las otras. Es más: Suele suceder que los mejores docentes son los que piden a sus alumnos la compra de un libro de texto en papel, esto es un hecho. Lo que no es aceptable, por inmoral y mezquino, es el modelo de las llamadas "**licencias digitales**" con las que las editoriales pretenden cobrar a los estudiantes, una y otra vez, por acceder a los mismos contenidos (unos contenidos que, además, son de una bajísima calidad). Este modelo de negocio es miserable, pues impide el compartir un mismo libro, incluso entre dos hermanos, pretende convertir a los estudiantes en un mercado cautivo, exige a los estudiantes y a las escuelas costosísimas líneas de Internet, pretende pervertir el conocimiento, que es algo social, público, convirtiéndolo en un producto de propiedad privada, accesible solo a aquellos que se lo puedan permitir, y solo de una manera encapsulada, fragmentada, impidiendo el derecho del alumno de poseer todo el libro, de acceder a todo el libro, de moverse libremente por todo el libro.
Nadie puede pretender ser neutral ante esto: Mirar para otro lado y aceptar el modelo de licencias digitales es admitir un mundo más injusto, es participar en la denegación del acceso al conocimiento a aquellos que no disponen de medios económicos, y esto en un mundo en el que las modernas tecnologías actuales permiten, por primera vez en la historia de la Humanidad, poder compartir el conocimiento sin coste alguno, con algo tan simple como es un archivo "pdf". **El conocimiento no es una mercancía**.
El proyecto Toomates tiene como objetivo la promoción y difusión entre el profesorado y el colectivo de estudiantes de unos materiales didácticos libres, gratuitos y de calidad, que fuerce a las editoriales a competir ofreciendo alternativas de pago atractivas aumentando la calidad de unos libros de texto que actualmente son muy mediocres, y no mediante retorcidas técnicas comerciales.

¡Libérate de la tiranía y mediocridad de las editoriales! Crea, utiliza y comparte tus propios materiales didácticos

Toomates Coolección **Problem Solving** (en español):
Geometría Axiomática , Problemas de Geometría 1 , Problemas de Geometría 2
Introducción a la Geometría , Álgebra , Teoría de números , Combinatoria , Probabilidad
Trigonometría , Desigualdades , Números complejos , Funciones

Toomates Coolección **Llibres de Text** (en catalán):
Nombres (Preàlgebra) , Àlgebra , Proporcionalitat , Mesures geomètriques , Geometria analítica
Combinatòria i Probabilitat , Estadística , Trigonometria , Funcions , Nombres Complexos ,
Àlgebra Lineal , Geometria Lineal , Càlcul Infinitesimal , Programació Lineal , Mates amb Excel

Toomates Coolección **Compendiums**:
Ámbito PAU: Catalunya TEC Catalunya CCSS Galicia País Vasco Portugal A Portugal B Italia
Ámbito Canguro: ESP , CAT , FR , USA , UK , AUS
Ámbito USA: Mathcounts AMC 8 AMC 10 AMC 12 AIME USAJMO USAMO
Ámbito español: OME , OMEFL , OMEC , OMEA , OMEM , CDP
Ámbito internacional: IMO OMI IGO SMT INMO CMO REOIM Arquimede HMMT
Ámbito Pruebas acceso: ACM4 , CFGS , PAP
Recopilatorios Pizzazz!: Book A Book B Book C Book D Book E Pre-Algebra Algebra
Recopilatorios AHSME: Book 1 Book 2 Book 3 Book 4 Book 5 Book 6 Book 7 Book 8 Book 9

¡Genera tus propias versiones de este documento! Siempre que es posible se ofrecen las versiones editables "MS Word" de todos los materiales, para facilitar su edición. Descarga en los siguientes enlaces la versión "**.doc**" de este documento:

http://www.toomates.net/biblioteca/Combinatoria.doc

¡Ayuda a mejorar! Envía cualquier duda, observación, comentario o sugerencia a **toomates@gmail.com**

¡No utilices una versión anticuada! Todos estos documentos se mejoran constantemente. Descarga totalmente gratis la última versión de estos documentos en los correspondientes enlaces superiores, en los que siempre encontrarás la versión más actualizada.

Consulta el **Catálogo de libros** de la biblioteca Toomates Coolección en http://www.toomates.net/biblioteca.htm

Encontrarás muchos más materiales para el aprendizaje de las matemáticas en **www.toomates.net**

Visita mi **Canal de Youtube**: **https://www.youtube.com/c/GerardRomo**

Versión de este documento: **14/07/2023**

Índice

Por la "Ley de LaPlace" muchos problemas de probabilidad se reducen a problemas de recuento. Para evitar duplicidades entre los dosieres se sigue el siguiente criterio: Todos los problemas de cálculo de probabilidades que se reducen a problemas de recuento se entienden como problemas de aplicación de combinatoria, y se incluyen en este dossier, no en el dossier de Probabilidad
www.toomates.net/biblioteca/Probabilidad.pdf

1 Los principios fundamentales del recuento.

1.1 Principio de la partición.

Si $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, con $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$, tenemos

$$|A| = |A_1| \cup |A_2| \cup ... \cup |A_n|$$

¡Divide y vencerás! La técnica fundamental del recuento es dividir el conjunto en partes disjuntas y contar cada parte por separado.

1.1.1 F

¿Cuántos enteros de tres dígitos pares tienen la propiedad de que sus dígitos, leídos de izquierda a derecha, están en orden estrictamente creciente?

(A) 21 (B) 34 (C) 51 (D) 72 (E) 150

AMC12B 2006 #9

1.1.2 D

Determina el número de pares ordenados (a,b) tales que $a + b = 1000$ y ni a ni b tienen el dígito "0".

AIME II 2006 #7

1.2 Principio del producto.

Al elegir n objetos de manera que en la primera elección se escoge un elemento de un subconjunto de m_1 objetos, en la segunda se selecciona otro elemento de un subconjunto de m_2 objetos, y así sucesivamente hasta la n-ésima elección, en la que se dispone de m_n objetos, la elección se puede realizar de $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$ formas diferentes.

Ejemplo.

Supongamos que un menú ofrecido por un restaurante consta de un primer plato a elegir de entre 4 posibilidades, un segundo plato a elegir entre 3 posibilidades y postre a elegir entre 5 posibilidades. Entonces el número de menús posibles ofrecidos por el restaurante es

$$4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

1.2.1 MD

Determina el número de subconjuntos de cuatro elementos de $\{1,2,3,4,...,20\}$ con la siguiente propiedad: Contiene dos números distintos que suman 16 y dos números distintos que suman 24. Por ejemplo: $\{3,5,13,19\}$ y $\{6,10,20,18\}$ son aceptables.

AIME I 2018 #9

1.3 Principio de la aplicación biyectiva.

Otra técnica de conteo elemental consiste en definir una aplicación biyectiva entre el conjunto A cuyo cardinal queremos determinar y un conjunto B de cardinal conocido.

Ejemplo.

Demostrar que el número de partes $P(X)$ (es decir, de subconjuntos de X incluyendo el conjunto vacío $\varnothing$) de un conjunto dado X de n elementos es 2^n

En efecto, numeramos los elementos de $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y establecemos una función

$$f : P(X) \to \{0,1\}^n$$
$$A \mapsto (a_1, a_2, ..., a_n)$$

donde $a_i = \begin{cases} 1 \; si \; x_i \in A \\ 0 \; si \; x_i \notin A \end{cases}$

Por ejemplo, $f(\varnothing) = (0,0,...,0)$ y $f(X) = (1,1,...,1)$

Esta función es una biyección y por tanto $|P(X)| = \left|\{0,1\}^n\right| = 2^n$

1.4 Principio de pasar al complementario.

A veces resulta más fácil calcular el cardinal del conjunto complementario $\neg A$, es decir, aquellos elementos que no cumplen la condición impuesta.

Ejemplo.

¿Cuántos números naturales $1 \le n \le 99999$ tienen alguno de sus dígitos igual a "1"?

Aquí vemos que es más fácil contar el conjunto complementario, es decir, aquellos números que no contienen el dígito "1", es decir, que se pueden formar con los otros nueve dígitos. En total son 9^5, y por tanto la cantidad pedida es $99999 - 9^5 = 40950$.

1.5 Principio del casillero.

La idea que subyace en este principio es muy sencilla: Si tenemos tres automóviles y solo dos garajes, necesariamente en uno de los garajes habrá más de un automóvil. El enunciado general es el siguiente:

Si debemos distribuir $n+1$ objetos en n celdas o casillas, entonces al menos una de ellas contiene más de un objeto.

Este principio se conoce también como "Principio del palomar" o "de Dirichlet" (**Dirichlet, P.G. Lejeune** 1805-1859).

1.5.1 F

¿Cuántas personas hay que reunir para asegurar que hay al menos dos que tengan nombres con la misma inicial?

1.5.2 F

¿Cuántas personas hay que reunir para asegurar que hay al menos seis que tengan nombres con la misma inicial?

1.5.3 F

Demostrar que en un grupo de siete personas hay como mínimo 4 con el mismo sexo.

1.5.4 F

Sea A un conjunto de veinte enteros tomados de la progresión aritmética

$$1, 4, 8, 12, \ldots, 100 .$$

Demostrar que existen en A dos enteros diferentes cuya suma es 104.

PUTNAM 1978

1.5.5 F

Demuestra que, en todo conjunto de siete números positivos distintos no superiores a 126, se encuentran dos elementos a, b tales que $a < b \leq 2a$.

1.5.6 F

Demostrar que en todo subconjunto de 55 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ siempre podemos encontrar dos elementos que cuya diferencia sea 10.

1.5.7 D

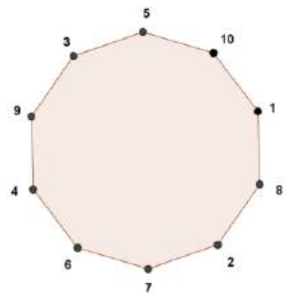
En un trablero de ajedrez se colocan 33 torres. Prueba que se pueden elegir al menos 5 de ellas que no se coman entre sí.

OMEFL Castilla y León 2023 #3

1.5.8 M

Si ponemos en cualquier orden los números del 1 al 10 en ronda, probar que hay por lo menos tres números que quedan seguidos que suman 17 o más.

Para aclarar el enunciado ponemos un ejemplo: en la siguiente distribución, hay varias ternas de números que satisfacen la condición: el 10, el 1 y el 8; el 7, el 6 y el 4, el 6, el 4 y el 9; y el 9, el 3 y el 5.



1.6 El principio de inducción.

1.6.1 D

Sea n un entero positivo. Sea T el conjunto de puntos (x, y) del plano tales que x e y son enteros no negativos con $x + y < n$. Cada punto de T se colorea de azul o rojo. Si un punto (x, y) es rojo, entonces también son rojos todos los puntos (x', y') de T tales que $x' \leq x$ y x≤ x y $y' \leq y$. Se dice que un conjunto de n puntos azules es de tipo X si las coordenadas x de sus puntos son todas distintas. Se dice que un conjunto de n puntos azules es de tipo Y si las coordenadas y de sus puntos son todas distintas. Demostrar que el número de conjuntos de tipo X es igual al número de conjuntos de tipo Y.

IMO 2002 #1

1.7 Problemas.

1.7.1 [MF]

¿Cuántas sumas diferentes de puntos puedes obtener tirando tres dados simultáneamente?

(A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 18

Canguro N5 2019 #4, Cangur B1 2019 #4

1.7.2 [MF]

Un parque tiene cinco puertas. Mónica quiere entrar por una puerta y salir por otra distinta. ¿De cuántas maneras puede entrar y salir del parque?

(A) 25 (B) 20 (C) 16 (D) 15 (E) 10

Canguro N5 2019 #6, Cangur B1 2019 #6

1.7.3 [MF]

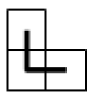
Los pesos de tres canguros son números enteros distintos. En total pesan 97 kg. ¿Cuánto puede pesar como máximo el que menos pesa?

(A) 1 kg (B) 30 kg (C) 31 kg (D) 32 kg (E) 33 kg

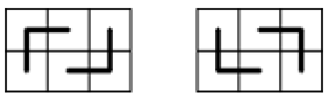
Canguro N5 2019 #7, Cangur B1 2019 #7

1.7.4 [MF]

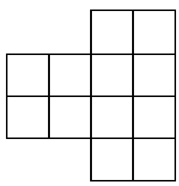
Un rectángulo de dimensiones 3×2 puede ser cubierto exactamente por dos de las piezas



en forma de L, de dos maneras diferentes, como se muestra a continuación:



¿De cuántas maneras diferentes puede cubrirse la figura de abajo con las piezas en forma de L?

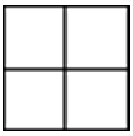


(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 48

Canguro N5 2019 #14

1.7.5 MF

Se escriben los números 1, 2, 3 y 4 en celdas diferentes de una tabla 2 × 2. Luego se calcula la suma de los números de cada fila y de cada columna. Dos de estas sumas son 4 y 5. ¿Cuáles son las otras dos sumas?

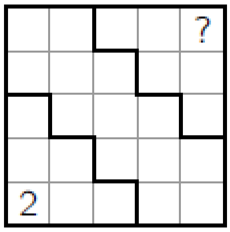


(A) 6 y 6   (B) 3 y 5   (C) 4 y 5   (D) 4 y 6   (E) 5 y 6

Canguro N6 2019 #2, Cangur B2 2019 #2

1.7.6 D

El cuadrado de la figura se rellena con los números 1, 2, 3, 4 y 5 de tal manera que cada fila y cada columna contienen cada uno de ellos exactamente una vez. Además, la suma de los números en cada una de las tres regiones con bordes en negrita es igual. ¿Qué número está en la esquina superior derecha?



(A) 1   (B) 2   (C) 3   (D) 4   (E) 5

Canguro N6 2019 #30, Cangur B2 2019 #30

1.7.7 D

Tenemos diez personas sentadas alrededor de un círculo. Cada persona conoce exactamente otras tres del resto: Las dos personas que se sientan a sus lados y la persona que está en la posición diametralmente opuesta. ¿De cuántas formas podemos agrupar estas 10 personas en 5 parejas, de forma que en cada pareja se conozcan entre ambos?

(A) 11   (B) 12   (C) 13   (D) 14   (E) 15

AMC 12B 2020 #15

1.7.8 F

Un equipo de fútbol dispone de 22 jugadores. Un conjunto fijo de 11 jugadores empieza el partido, mientras que los 11 restantes quedan como substitutos. Durante el partido, el entrenador pude hacer hasta un máximo de 3 substituciones, en las que uno de 11 jugadores en el partido puede ser reemplazado por uno de los substitutos. Ningún jugador que haya sido reemplazado puede volver a jugar, y un substituto que haya entrado a jugar se puede reemplazar. No se pueden hacer dos sustituciones al mismo tiempo. Determina el número total de posibles substituciones que puede hacer el entrenador, sabiendo que los jugadores involucrados y el orden de las substituciones importa.

AIME I 2019 #4

1.7.9 F

Marcamos con 1, 2, 3, … unos nenúfares en fila en un estanque. Una rana genera una secuencia de saltos empezando en el nenúfar 1. Desde el nenúfar k, la rana puede saltar al nenúfar $k+1$ o al nenúfar $k+2$ al azar, con probabilidad $1/2$ y con independencia de los otros saltos. Determina la probabilidad de que la rana pase por el nenúfar 7.

AIME II 2019 #2

1.7.10 F

Determina el número de formas diferentes de pintar los enteros $2,3,...,9$ de rojo, verde y azul, de forma que cada número tenga un color diferente de todos y cada uno de sus divisores propios.

(A) 144 (B) 216 (C) 256 (D) 384 (E) 432

AMC 12A 2019 #13

1.7.11 MF

Una caja contiene 20 bolas rojas, 20 bolas verdes, 19 bolas amarillas, 13 bolas azules, 11 bolas blancas y 9 bolas negras. ¿Cuál es el mínimo de bolas que debemos coger de la caja, sin reemplazamiento, para garantizar que sacaremos como mínimo 15 bolas del mismo color?

(A) 75 (B) 76 (C) 79 (D) 84 (E) 91

AMC 10A 2019 #4, AMC 12A 2019 #3

1.7.12 MF

Al explorar una cueva, Carl encuentra unas rocas de 5 quilos de valor 14$ la unidad, unas rocas de 4 quilos de valor 11$ la unidad, y unas rocas de 1 quilo de valor 2$ la unidad. Hay al menos 20 piedras de cada peso. Él puede cargar con 18 quilos como máximo. ¿Cuál es el valor máximo, en dólares, del total de rocas que puede extraer de la cueva?

(A) 48 (B) 49 (C) 50 (D) 51 (E) 52

AMC 12A 2018 #2

1.7.13 F

Determina el número de subconjuntos de $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ que contienen al menos un número primo.

(A) 128 (B) 192 (C) 224 (D) 240 (E) 256

AMC 12B 2018 #5

1.7.14 F

Un código de scanner consiste en una cuadrícula de $7x7$ cuadrados, algunos pintados de negro y el resto de blanco. Debe haber al menos un cuadrado pintado de cada color en esta cuadrícula de 49 cuadrados. Diremos que un código es *simétrico* queda inalterable cuando toda la cuadrícula se rota un múltiplo de 90º alrededor de su centro y en el sentido de las agujas del reloj, o cuando se somete a una reflexión respecto de las rectas que unen las esquinas opuestas, o se somete a una reflexión respecto de las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos. Determina el número de posibles códigos simétricos.

(A) 510 (B) 1022 (C) 8190 (D) 8192 (E) 65534

AMC 12A 2018 #15

1.7.15 MF

Determina el número de posibilidades que tiene un estudiante para programarse 3 cursos de matemáticas (álgebra, geometría y teoría de números) en un horario de seis períodos si no se pueden tomar dos cursos de matemáticas en períodos consecutivos. (Los cursos que tome el estudiante durante los otros 3 períodos no son relevantes).
(Usando las iniciales, dos ejemplos de horarios aceptables serían AXGXTX, o AXXTXG, donde X es cualquier otro curso que no sea A,T o G)

(A) 3 (B) 6 (C) 12 (D) 18 (E) 24

1.7.16 F

Determina el número de enteros positivos de 3 cifras que son divisibles entre 3 pero que no contienen el dígito 3.

(A) 96 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

AMC 12B 2018 #15

1.7.17 F

Sea S el número de pares ordenados de enteros (a,b), con $1 \leq a \leq 100$ y $b \geq 0$ tales que el polinomio $x^2 + ax + b$ se puede factorizar como un producto de dos factores lineales no necesariamente diferentes con coeficientes enteros. Determina el residuo cuando S se divide entre 1000.

AIME I 2018 #1

1.7.18 F

Sea un prisma hexagonal recto de altura 2, cuyas bases son hexágonos regulares de lado 1. Cualquier grupo de tres vértices del total de 12 determinan un triángulo. Determina el número de esos triángulos que son isósceles (incluyendo triángulos equiláteros).

AIME I 2018 #7

1.7.19 MF

Digamos que los números telefónicos son todos los enteros de 7 dígitos, excepto aquellos que empiezan por 0 o por 1. ¿Qué fracción de dichos números telefónicos empiezan por 9 y acaban en 0?

$$\text{(A) } \frac{1}{63} \quad \text{(B) } \frac{1}{80} \quad \text{(C) } \frac{1}{81} \quad \text{(D) } \frac{1}{90} \quad \text{(E) } \frac{1}{100}$$

AJHSME 1985 #22

1.7.20 MF

Ayer hubo 4 recien nacidos en el hospital de la ciudad. Suponiendo que hay las mismas probabilidades de ser niño o niña, ¿Cual de las siguientes opciones tiene más probabilidad?

(A) Los cuatro han sido niños.
(B) Los cuatro han sido niñas.
(C) 2 han sido niñas y 2 han sido niños.
(D) 3 han sido de un género y 1 del otro género.
(E) Todas las opciones anteriores son igualmente probables.

AMC 8 2014 #18

1.7.21 MF

María tiene diez trozos de papel, algunos de ellos son cuadrados y el resto triángulos. Corta tres cuadrados en diagonal, de esquina a esquina. Luego cuenta el número total de vértices de los 13 trozos de papel obtenidos, y observa que hay 42 vértices. ¿Cuántos triángulos tenía antes de hacer los cortes?

(A) 8 (B) 7 (C) 6 (D) 5 (E) 4

Canguro N5 2020 #8, Cangur B1 2020 #7

1.7.22 MF

Elena desea visitar a su abuela durante 18 días consecutivos. Su abuela lee sus libros de cuentos los martes, sábados y domingos. Si Elena quiere pasar el mayor número de días leyendo cuentos con su abuela, ¿en qué día de la semana debería comenzar su visita?

(A) lunes (B) martes (C) viernes (D) sábado (E) domingo

Canguro N5 2020 #11, Cangur B1 2020 #9

1.7.23 F

Sea A un subconjunto de 90 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ y sea S la suma de los elementos de A. Determina el número de posibles valores de S.

AIME I 2006 #2

1.7.24 MF

En un concurso de matemáticas hay 57 estudiantes llevando camiseta azul, y otros 75 estudiantes llevando camiseta amarilla. Estos 132 estudiantes se reparten en 66 parejas. En exactamente 23 de estas parejas ambos estudiantes llevan camisetas azules. ¿Cuántas parejas hay en las que ambos concursantes lleven camisetas amarillas?

(A) 23 (B) 32 (C) 37 (D) 41 (E) 64

AMC 10B 2021 #4, AMC 12B 2021 #2

1.7.25 MF

Determina el número de enteros positivos menores de 1000 que se pueden expresar como la diferencia de dos potencias de 2 enteras.

AIME I 2021 #3

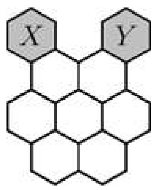
1.7.26 F

Determina el número de formas posibles de organizar 66 monedas idénticas en tres pilas no vacías, de forma que en la primera pila haya menos monedas que en las segunda, y en la segunda haya menos monedas que en la tercera.

AIME I 2021 #4

1.7.27 MF

Pilar se mueve del hexágono X al hexágono Y. Solo puede moverse de un hexágono a otro si tienen un borde en común. ¿Cuántas rutas diferentes hay desde X hasta Y que pasan por cada uno de los siete hexágonos blancos exactamente una vez?

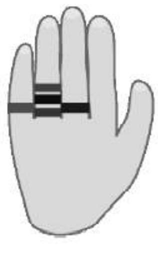


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Cangur B1 2022 #12, Kangaroo Junior 2022 #14

1.7.28 F

Verónica tiene cinco anillos en los dedos, como se muestra en la imagen. Ella se quita los anillos uno a la vez. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacer esto?



(A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 45

Cangur B1 2022 #20, Cangur E4 2022 #30, Kangaroo Junior 2022 #22

1.7.29 F

Amelia sube 8 escalones, subiendo 1 o 2 escalones a la vez. Hay un agujero en el sexto escalón, por lo que no puede usar este escalón. ¿De cuántas formas diferentes puede Amelia alcanzar el escalón más alto?

(A) 6   (B) 7   (C) 8   (D) 10   (E) 9

Cangur B1 2021 #12, Kangaroo Junior 2021 #12

1.7.30 F

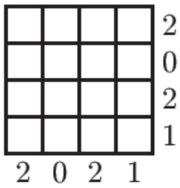
En una competición por equipos, hay cinco equipos esperando para comenzar. Cada equipo consta de solo niños o solo niñas. El número de miembros del equipo es 9, 15, 17, 19 y 21. Después de que todos los miembros del primer equipo hayan comenzado, el número de niñas que aún no han comenzado es tres veces el número de niños que aún no han comenzado. ¿Cuántos miembros hay en el equipo que ya ha comenzado?

(A) 21   (B) 19   (C) 17   (D) 9   (E) 15

Cangur B1 2021 #14, Kangaroo Junior 2021 #16

1.7.31 F

En la cuadrícula 4×4, algunas celdas deben pintarse de negro. Los números al lado y debajo de la tabla muestran cuántas celdas en esa fila o columna deben ser negras.



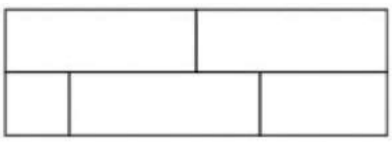
¿De cuántas formas se puede pintar esta cuadrícula?

(A) 5   (B) 3   (C) 1   (D) 2   (E) Més de 5

Cangur B1 2021 #27, Kangaroo Junior 2021 #27

1.7.32 F

Un rectángulo está dividido en 5 regiones tal y como se muestra en la imagen.



Cada región se puede pintar de un color (rojo, naranja, amarillo, azul o verde), de forma que dos regiones que se tocan tengan colores diferentes, y cada color puede usarse más de una vez. Determina el número de coloraciones posibles.

(A) 120   (B) 270   (C) 360   (D) 540   (E) 720

AMC 12A 2022 #7

1.7.33 F

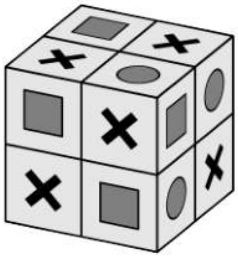
Los vértices de un polígono de 20 lados se numeran del 1 al 20 de forma que los números de vértices adyacentes difieran en 1 o en 2. Pintamos de color rojo los lados del polígono cuyos extremos difieren solo en 1. ¿Cuántos lados rojos hay?

(A) 10   (B) 5   (C) 2   (D) 1   (E) Hay diversas posibilidades

Cangur B2 2022 #25, Kangaroo Student 2022 #21

1.7.34 MF

Los cuadrados en la superficie de un cubo de $2 \times 2 \times 2$ tienen una de tres formas en ellos. Las formas son un círculo, un cuadrado o un signo X. Dos cuadrados cualesquiera que comparten un lado común tienen formas diferentes en ellos. La imagen muestra una de esas posibilidades.



¿Cuál de las siguientes combinaciones de formas también es posible en dicho cubo?
(A) 6 círculos, 8 cuadrados y el resto X's
(B) 7 círculos, 8 cuadrados el resto X's
(C) 5 círculos, 8 cuadrados y el resto X's
(D) 7 círculos, 7 cuadrados el resto X's
(E) ninguno de los anteriores

Cangur 2022 B1 #24

1.7.35 MF

Determina el número de matrices 4×4 cuyas entradas son ceros y unos tales que la suma de las entradas de las filas son 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden, y la suma de las entradas de las columnas también son 1, 2, 3 y 4 en cualquier orden.
Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satisface esta condición.

(A) 144   (B) 240   (C) 336   (D) 576   (E) 624

AMC 12B 2022 #17

1.7.36 MF

Cinco hombres y nueve mujeres se colocan alrededor de un círculo de forma equiespaciada en orden aleatorio. Determina la probabilidad de que cada hombre se encuentre en una posición diametralmente opuesta a una mujer.

AIME I 2023 #1

1.7.37 D **Problema solucionado paso a paso en vídeo .**

Sea N el número de formas de colocar los enteros del 1 al 12 en las 12 celdas de una tabla 2×6 de forma que siempre que dos celdas sean colaterales contengan números cuya diferencia no sea divisible entre 3. En la imagen se muestra una configuración aceptable. Determina el número de divisores positivos de N.

1	3	5	7	9	11
2	4	6	8	10	12

AIME 2023 II #10

Solución: https://youtu.be/fZrbbq3p7gI

1.7.38 M

Determina el número de subconjuntos de $\{1,2,3,\ldots,10\}$ que contienen exactamente un par de enteros consecutivos. Los subconjuntos $\{1,2,5\}$ y $\{1,3,6,7,10\}$ son ejemplos de estos subconjuntos.

AIME I 2023 #11

1.7.39 MF

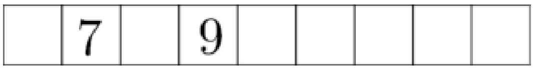
La Emma tiene cuatro colores y quiere pintar una bandera de tres franjas, con la única condición que dos franjas adyacentes no pueden ser del mismo color. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

(A) 27 (B) 24 (C) 48 (D) 36 (E) 65

Cangur B2 2023 #4, Canguro N6 2023 #4

1.7.40 F

Tenemos que colocar los números enteros del 1 al 9 en las 9 casillas del dibujo, de forma que tres números consecutivos siempre sumen un múltiplo de 3. Los números 7 y 9 ya están colocados.



¿De cuántas formas se pueden colocar los números restantes en las casillas que están vacías?

(A) 35   (B) 24   (C) 18   (D) 15   (E) 12

Nota: Para una generalización de este problema: #1.7.42.

Cangur B2 2023 #10, Canguro N6 2023 #9

1.7.41 MF

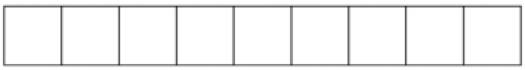
Veintitrés animales se sientan en una fila de butacas de un cine, sin dejar ningún asiento vacío entre ellos. Cada animal es un castor o un canguro. Cada uno de ellos tiene al menos un vecino que es canguro. Determina el máximo número de castores que puede haber en la fila.

(A) 12   (B) 11   (C) 10   (D) 8   (E) 7

Cangur B2 2023 #16, Canguro N6 2023 #16

1.7.42 M

Pia quiere escribir los números enteros del 1 al 9 en una tabla de 9 casillas, tal y como se muestra en la imagen. Lo quiere hacer de forma que tres casillas adjacentes siempre sumen un múltiplo de 3. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?



(A) 6^4 (B) 6^3 (C) 2^9 (D) $6!$ (E) 6^6

Nota: Este problema es una generalización de #1.7.40.

Cangur B1 2023 #30, Canguro N5 2023 #29

1.7.43 F

Determina el número de maneras diferentes de poder leer la palabra BANANA en la siguiente tabla, si nos movemos de una celda a cualquier otra con la que comparte un lado.
Nota. En cada lectura de la palabra podemos utilizar la misma celda más de una vez.

B	A	N
A	N	A
N	A	N

(A) 84   (B) 56   (C) 28   (D) 14   (E) Cap de les anteriors

Cangur B1 2023 #28, Canguro N5 2023 #30

1.7.44 F

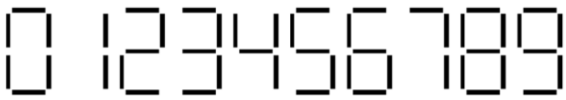
Determina el número de formas de agrupar los enteros del 1 al 14 en 7 parejas de forma que, en cada pareja, el número mayor sea, como mínimo, dos veces el menor.

(A) 108   (B) 120   (C) 126   (D) 132   (E) 144

AMC 12A 2022 #10, AMC 10A 2022 #14

1.7.45 MF

Una pantalla digital muestra los dígitos como aparecen en la figura. Para representar el número 23, la pantalla usa un total de 10 barras: cinco para el dígito 2 y otras cinco para el dígito 3. ¿Cuántos números naturales de dos dígitos, incluido el número 23, se pueden mostrar usando exactamente 10 barras?

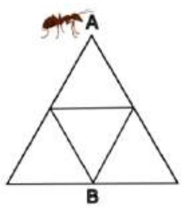


(A) 13   (B) 14   (C) 15   (D) 16   (E) 17

Canguro N4 2023 #27, Känguru Kadett 2023 #14

1.7.46 MF

Una hormiga se mueve desde el punto A al punto B. Para hacerlo, no puede moverse dos veces en el mismo segmento. ¿De cuántas maneras puede llegar desde A a B?



(A) 6   (B) 8   (C) 4   (D) 10   (E) 9

Canguro N4 2023 #9

2 Recuento basado en fórmulas.

2.1 Las fórmulas básicas.

Número de partes de un conjunto A.

Sea A un conjunto con n elementos. El número de subconjuntos de A (incluyendo $\varnothing$ y el propio A) es

$$2^n$$

Variaciones de n elementos tomados de k en k.

Las formas diferentes de ordenar n objetos en grupos de longitud k, por lo tanto importa el orden y no hay repetición.

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutaciones de n elementos.

Es un caso particular del anterior cuando $k = n$.

$$P_n = n!$$

Combinaciones de n elementos tomados de k en k.

Son variaciones sin repetición en las que no importa el orden de los elementos.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Son variaciones en las que se pueden repetir elementos.

$$VR_n^k = n^k$$

Combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

Son combinaciones en las que se pueden repetir elementos.

$$CR_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}$$

2.1.1 MF

Pat compra cuatro rosquillas a escoger entre un amplio surtido de tres tipos: Glazé, Chocolate y Vainilla. ¿Cuántas selecciones diferentes puede hacer?

AMC 10 2001 #19

2.1.2 F

Determina el número de enteros positivos de 4 dígitos (esto es, enteros entre 1000 y 9999 incluidos), divisibles entre 5 y cuyos dígitos son todos pares.

(A) 80 (B) 100 (C) 125 (D) 200 (E) 500

Nota: En este problema consideramos el 0 como par.

AMC12A 2020 #4

2.1.3 M

Se toman aleatoriamente dos unidades cuadradas sin reemplazamiento de una cuadrícula de $n \times n$ unidades cuadradas. Determina el menor entero positivo n tal que la probabilidad de que las dos unidades cuadradas tomadas se toquen en vertical o en horizontal sea menor que $1/2015$.

AIME II 2015 #5

2.1.4 M

Melinda dispone de tres cajas vacías y doce libros de texto, tres de los cuales son de matemáticas. En una caja pondrá tres libros, en otra pondrá cuatro libros y en la tercera pondrá cinco libros, siempre de forma aleatoria. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres libros de matemáticas vayan a la misma caja?

AIME I 2013 #6

2.1.5 D

Sea $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{12})$ una permutación de $(1,2,3,...,12)$ tal que

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 \text{ y } a_6 < a_7 < a_8 < a_9 < a_{10} < a_{11} < a_{12}$$

Un ejemplo sería $(6,5,4,3,2,1,7,8,9,10,11,12)$. Determina el número de tales permutaciones.

AIME II 2006 #4

2.1.6 F

En un hotel se prepara el desayuno para sus tres huéspedes. Cada desayuno debe constar de tres bocadillos: Uno de queso, uno de atún y uno de jamón dulce. Se preparan los nueve bocadillos y se envasan, de forma que quedan indistinguibles entre ellos. Accidentalmente, los nueve bocadillos se desordenan. Se ponen los nueve bocadillos en tres bolsas, tres bocadillos en cada bolsa, al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de los tres huéspedes reciba un bocadillo de cada tipo?

AIME II 2005 #2

2.1.7 MF

Cuatro chicos y tres chicas van al cine y ocupan lugares consecutivos en una misma fila. ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que no queden dos chicas juntas?

2.2 Permutaciones con repetición.

La fórmula de las permutaciones con repeticiones.

Permutaciones de n elementos en los que un elemento se repite p_1 veces, otro p_2 veces, otro p_3 veces... cumpliendo $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_m \leq n$

$$P_n^{p_1, p_2, ..., p_m} = \frac{n!}{p_1!\, p_2! ... p_m!}$$

Ejemplo: Queremos saber cuántos números de cinco cifras se pueden formar con los dígitos 2, 7 y 9, en los que el 7 aparece dos veces y el 9 dos veces también. Por ejemplo: "27799", "72799", "92977", etc... En este caso $n = 5$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, y por tanto:

$$P_5^{1,2,2} = \frac{5!}{1!\, 2! 2!} = 30$$

2.2.1 M

Una rana está posicionada en el origen del plano coordenado. Desde el punto (x, y) puede saltar a los puntos $(x+1, y)$, $(x+2, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y+2)$. Determina el número de secuencias de salto diferentes en los que la rana, saliendo de $(0,0)$, acaba en $(4,4)$.

AIME II 2018 #8

2.2.2 MF

Cuando lanzamos siete dados normales de 6 caras, la probabilidad de que la suma de los números de las caras superiores sea 10 se puede escribir como $\frac{n}{6^7}$ donde n es un entero positivo. Determina n.

(A) 42 (B) 49 (C) 56 (D) 63 (E) 84

AMC 10A 2018 #11

2.2.3 MF

Lanzamos cuatro dados ordinarios de seis caras. Determina la probabilidad de que la suma de los números en las caras superiores sea 5.

UNCO Math Contest II 2012 #2

2.2.4 M

Una urna contiene 2 bolas blancas, 3 bolas rojas y 4 bolas negras. Extraemos sucesivas bolas al azar, sin devolver a la urna las extraídas, hasta que la urna queda vacía. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando se extraiga la última bola blanca todavía haya bolas rojas y negras en la urna?

2.2.5 F

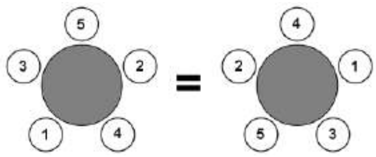
Una hormiga empieza en el punto (1,1). Puede viajar por toda la cuadrícula de enteros, pero solo moviéndose positivamente en las direcciones x e y. Determina el número de caminos para alcanzar el punto (5,5) sin pasar por el punto (3,3).

SMT 2022 Discrete Test #1

2.3 Permutaciones y variaciones circulares.

Permutaciones circulares.

La permutación circular es un caso de permutación en el cual los elementos se ordenan alrededor de un círculo. Luego dos permutaciones circulares se considerarán iguales si una se puede obtener a partir de la otra mediante una rotación conveniente:



Dados n elementos, hay n rotaciones posibles, luego del total de permutaciones circulares es:

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Ejemplo.

¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en torno a una mesa circular? ¿Y si dos de ellas, digamos A y B, no pueden sentarse en posiciones contiguas?

Solución:

a) $PC_6 = 5! = 120$

b) A los 120 casos anteriores le hemos de restar todos los casos en los que A y B estén en posiciones contiguas. Fijamos "A,B", tenemos los otros cuatro que pueden estar como quieran, y por tanto hay $4!$. Pero también puede ser "B,A", y los otros cuatro como quieran, es decir, hay $120 - 2 \cdot 4! = 72$.

Variaciones circulares.

Podemos ampliar el caso anterior. Supongamos que hay n personas que se quieren sentar alrededor de una mesa de r sillas, $n \geq r$

En este caso, las permutaciones anteriores se multiplican por todos los posibles grupos de r personas que podamos realizar, con lo que la fórmula es:

$$VC_n^r = C_n^r \cdot PC_n = \binom{n}{r}(n-1)!$$

Ejemplo.

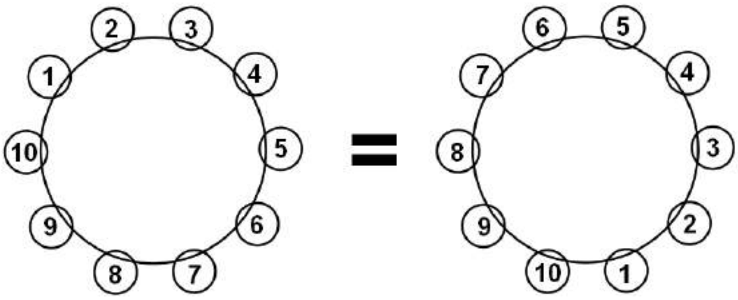
¿Cuántas configuraciones diferentes se pueden formar con 20 personas y una mesa con espacio para 15 comensales?

Solución:

$$VC_{20}^{15} = \binom{20}{15} 14! = 1351612226\ 764800$$

Observación. Collares.

En ciertas circunstancias se pueden dar otras equivalencias, por ejemplo, al hacer collares que se pueden girar, es decir, ponerse por los dos lados, con lo que tenemos la mitad de combinaciones posibles, pues es la misma combinación es en el sentido de las agujas del reloj que en el contrario:



Ejemplo.

¿Cuántos collares diferentes se pueden formar con 8 piezas de diferentes colores?

Solución: $\dfrac{(8-1)!}{2} = \dfrac{7!}{2} = 2520$

2.3.1 F

¿Cuántas maneras hay de colocar n maridos y sus correspondientes n esposas alrededor de una mesa, de forma que cada marido esté al lado de su correspondiente esposa?

2.3.2 F

¿De cuántas formas se pueden sentar 5 chicos y 5 chicas alrededor de una mesa, de forma que no se sienten dos chicos juntos?

2.3.3 MF

En un grupo de 6 amigos, hay una pareja de novios. ¿De cuántas maneras pueden sentarse alrededor de una fogata, si los novios deben sentarse siempre juntos?

Observación. Asientos numerados.

Si los asientos alrededor de la mesa están numerados, las configuraciones no serán iguales bajo una rotación, y el número de casos aumenta considerablemente. Esto sucede, por ejemplo, en el siguiente problema.

2.3.4 MD

Cuatro embajadores y sus respectivos cuatro consejeros se sientan en una mesa redonda de 12 asientos, numerados del 1 al 12. Cada embajador debe sentarse en un asiento numerado como par. Cada consejero debe sentarse en un asiento contiguo a su embajador. ¿De cuantas formas posibles se pueden sentar?

AIME II 2019 #5

2.4 Problemas.

2.4.1 F

Una heladería ofrece por la mañana helados de 16 sabores y Ana elige un helado de 2 sabores. Por la tarde se agotaron los de varios sabores y Belén eligió un helado de 3 sabores de los que quedaron. Tanto Ana como Belén pudieron elegir entre la misma cantidad de combinaciones posibles de sabores. ¿Cuántos sabores se agotaron?

(A) 2   (B) 3   (C) 4   (D) 5   (E) 6

Canguro N6 2020 #25, Cangur B2 2020 #25

2.4.2 F

Etiquetamos las caras de un dado como 1, 2, 3, 4, 5, 5 y lo lanzamos cinco veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 1, 2, 3, 4, 5 en cualquier orden?

2.4.3 F

Del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ escogemos al azar tres números diferentes. Determina la probabilidad de que uno de ellos sea la media de los otros dos.

(A) 1/6   (B) 1/3   (C) 1/2   (D) 1/4   (E) 1/10

Cangur B2 2019 #29, Canguro N6 2019 #28

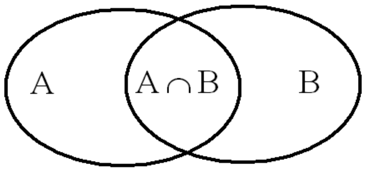
3 El principio de inclusión-exclusión (PIE).

Este principio viene a formalizar lo que es de sentido común: Cuando contamos los elementos de la unión de unos conjuntos, no debemos sumar dos veces su intersección.

Si denotaremos por $|S|$ el número de elementos del conjunto S, solo sucede $|A \cup B| = |A| + |B|$ cuando $A \cap B = \varnothing$.

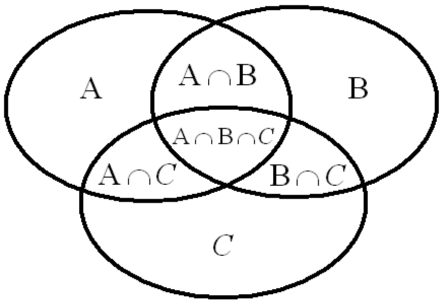
Para el caso más sencillo de dos conjuntos A y B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Para el caso de tres conjuntos A, B y C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Para el caso general de $S_1, S_2, \ldots, S_n$ conjuntos finitos:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |S_i \cap S_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |S_i \cap S_j \cap S_k| - + \ldots + (-1)^{n+1} |S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n|$$

Problema ejemplo.

¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son múltiplos de 2 o de 3?

Solución:

Para calcular los múltiplos de un número dividimos el total entre dicho número y nos quedamos con su parte entera, sin decimales. Esto lo denotamos por $\lfloor n/m \rfloor$

Enteros menores que 120 múltiplos de 2: $|A| = \lfloor 119/2 \rfloor = 59$

$B =$ Enteros menores que 120 múltiplos de 3: $|B| = \lfloor 120/3 \rfloor = 39$

$A \cap B =$ Enteros menores que 120 múltiples de 2 y de 3.

Aprovechando que 2 y 3 son coprimos, serán todos los múltiples de $2 \cdot 3 = 6$:

$|A \cap B| = \lfloor 119/6 \rfloor = 19$

Luego $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 59 + 39 - 19 = 79$

3.1.1

¿Cuántos enteros positivos que no excedan de 2001 son múltiples de 3 o de 4 pero no de 5?

(A) 768 (B) 801 (C) 934 (D) 1067 (E) 1167

AMC 12 2001 #12

3.1.2

Llamemos "pseudo-primo" a todo número compuesto pero no divisible entre 2, 3 o 5. Los tres pseudo-primos más pequeños son 49, 77 y 91. Hay 168 primos menores que 1000. ¿Cuántos pseudo-primos hay menores que 1000?

(A) 100 (B) 102 (C) 104 (D) 106 (E) 108

AMC 12A 2005 #18

3.1.3 F

Determina el número de subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ que no son subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ ni de $\{4,5,6,7,8\}$.

AIME II 2017 #1

3.1.4 F

El Sr. Sanders recibe periódicamente la visita de sus tres nietos. El primero le visita cada tres días, el segundo le visita cada cuatro días y el tercero le visita cada cinco días. Los tres le visitaron el 31 de diciembre del 2016. Determina el número de días del año siguiente en los que no recibirá visita de ninguno de sus tres nietos.

(A) 78 (B) 80 (C) 144 (D) 146 (E) 152

Nota: El 2017 no fue un año bisiesto.

AMC 8 2017 #24

3.1.5 M

El Sr. Sanders recibe periódicamente la visita de sus tres nietos. El primero le visita cada tres días, el segundo le visita cada cuatro días y el tercero le visita cada cinco días. Los tres le visitaron el 31 de diciembre del 2016. Determina el número de días del año siguiente en los que no recibirá visita de ninguno de sus tres nietos.

(A) 78 (B) 80 (C) 144 (D) 146 (E) 152

Nota: El 2017 no fue un año bisiesto.

AMC 8 2017 #24

3.1.6 M

Diremos que un entero es “primigenio” cuando es compuesto pero no es divisible entre 2, 3 o 5. Los tres números “primigenios” más pequeños son 49, 77 y 91. Existen 168 números primos menores que 1000. Determina el número de enteros “primigenios” menores que 1000.

(A) 100   (B) 102   (C) 104   (D) 106   (E) 108

AMC 12A 2005 #18

3.1.7 M

Determina el número de enteros positivos no superiores a 2001 que son múltiples de 3 o de 4 pero no de 5.

(A) 768   (B) 801   (C) 934   (D) 1067   (E) 1167

AMC 10 2001 #25 , AMC 12 2001 #12

4 Los números combinatorios.

4.1 Definición y propiedades básicas.

4.1.1 Definición. Número combinatorio.

Dados $n \geq k \geq 0$, definimos el número combinatorio "**n sobre k**" como

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Donde $n! = n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1$, y se define $0! = 1$

4.1.2 Propiedades básicas de los números combinatorios.

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1$ "**Fórmula de Pascal**"

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + ... + \binom{k}{k-1} + \binom{k-1}{k-1}$ para $n \geq k \geq 1$

d) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \quad n \geq k \geq 1$

e) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

f) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$

g) Todos los números combinatorios son enteros.

Demostración.

a) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

b)

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)k!(n-1-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

d)

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} =$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

4.1.3 M

a) Demuestra que, para todo $n \geq 2$, se cumple:

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2$$

b) Aplica esta igualdad para demostrar la fórmula de la suma de los cuadrados de los primeros n números naturales:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.1.4 F

Para cada número real a y para cada entero positivo k, definimos

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots\left(a-(k-1)\right)}{k(k-1)(k-2)\ldots\, 2\cdot 1}$$

¿ Cuál es el valor de $\binom{-1/2}{100} \div \binom{1/2}{100}$?

(A) -199 (B) -197 (C) -1 (D) 197 (E) 199

ASHME 1988 #14

4.1.5 F

Determina el valor de $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

4.2 El Teorema del binomio.

4.2.1 El Teorema del binomio.

Este teorema establece que cualquier potencia de un binomio $x+y$ puede ser expandida en una suma de potencias $x^i y^j$ de la siguiente manera:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k} = \binom{n}{0}x^0y^n + \binom{n}{1}x^1y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}x^n y^0$$

Demostración. Se demuestra por inducción sobre n.

Si $n=0,1$ el resultado se puede comprobar fácilmente. Supongamos que el resultado es cierto para $n \geq 1$. Entonces:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k} =$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}\,y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k\,y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k\,y^{n+1-k}$$

Teorema multinomial.

El teorema del binomio se puede ampliar para potencias de más de dos elementos:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_t)^n = \sum_{e_1+\ldots+e_t=n}\frac{n!}{e_1!\ldots e_t!}x_1^{e_1}\ldots x_t^{e_t}$$

Observación.

Desde el punto de vista de la combinatoria, el coeficiente multinomial

$$\frac{n!}{e_1!\ldots e_t!}$$

Cuenta el número de diferentes maneras de dividir un conjunto de n elementos en subconjuntos disjuntos de tamaños $e_1, e_2, \ldots, e_t$

4.2.2 M

Expandimos y simplificamos la expresión

$$(x+y+z)^{2006} + (x-y-z)^{2006}$$

¿Cuántos términos contiene la expresión simplificada?

(A) 6018 (B) 671.676 (C) 1007514 (D) 1008016 (E) 2015028

AMC12A 2006 #24

4.3 Más propiedades de los números combinatorios.

4.3.1 Otras propiedades de los números combinatorios.

a) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

b) $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$ Identidad de Vanderemonde

c) $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1}$ Identidad "Hockey-Stick"

d) $\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{k}=\binom{m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$

Demostración.
a) Una forma de demostrar esta igualdad es mediante el Teorema del binomio (4.2.1):

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n=\left(\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}x^{n-k}\right)$$

$$(1+x)^{2n}=\sum_{0\le k\le 2n}\binom{2n}{k}x^k$$

Y todo se reduce a observar, en las dos igualdades anteriores, el coeficiente del monomio x^n.
Otra forma de demostrar esta igualdad sería mediante la identidad de Vandermonde.

4.3.2 M

Disponemos de 2n bombillas colocadas en dos filas (A y B) y numeradas de 1 a n en cada fila. Algunas (o ninguna) de las bombillas están encendidas y el resto apagadas; decimos que eso es un “estado”. Dos estados son distintos si hay una bombilla que está encendida en uno de ellos y apagada en el otro. Diremos que un estado es “bueno” si hay la misma cantidad de bombillas encendidas en la fila A que en la B.
Demuestra que el número total de estados buenos, EB, dividido por el número total de estados, ET, es

$$\frac{EB}{ET}=\frac{3\cdot 5\cdot 7...(2n-1)}{2^n\ n!}$$

OME 2021 #5

4.3.3 MD

Determina el residuo cuando

$$\binom{\binom{3}{2}}{2}+\binom{\binom{4}{2}}{2}+\ldots+\binom{\binom{40}{2}}{2}$$

se divide entre 1000.

AIME II 2022 #10

5 Técnicas avanzadas de recuento.

5.1 Números salteados.

Problema modelo.

Se considera el conjunto $\{1,2,...,20\}$. ¿De cuántas formas se puede elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

Solución.

Si hacemos una elección de cinco elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ cumpliendo la condición anterior, que podemos suponer ordenados de menor a mayor,

$$1 \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \le 20$$

se cumple

$$x_5 > x_4 + 1,\ x_4 > x_3 + 1,\ x_3 > x_2 + 1,\ x_2 > x_1 + 1$$

Y por tanto, el conjunto $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4\}$

estará formado por cinco números diferentes, entre 1 y 16.

Y recíprocamente, si consideramos cualquier conjunto de cinco números diferentes

$$1 \le y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < y_5 \le 16$$

El conjunto $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4\}$

Estará formado por cinco números diferentes no consecutivos entre 1 y 20.

Así pues, tenemos una biyección entre los conjuntos que cumplen la condición del enunciado y el número de conjuntos de 5 elementos diferentes que se pueden formar con $n = 20 - 4 = 16$

Este razonamiento se puede generalizar para encontrar el número de subconjuntos de k elementos no consecutivos de $\{1,2,3,...,n\}$

$$\binom{n-k+1}{k}$$

5.1.1 M

¿Cuántos subconjuntos S no vacíos de $\{1,2,3,...,15\}$ tienen las siguientes dos propiedades?

(1) No hay dos enteros consecutivos perteneciendo a S al mismo tiempo.

(2) Si S contiene k elementos, entonces ningún número menor que k pertenece a S.

(A) 277 (B) 311 (C) 376 (D) 377 (E) 405

AMC12A 2006 #25

5.1.2 M

Diremos que un conjunto de enteros es *espaciado* cuando no contenga más de uno de cada tres enteros consecutivos. ¿Cuántos subconjuntos de $\{1, 2, 3, ..., 12\}$, incluyendo el conjunto vacío, son espaciados?

(A) 121 (B) 123 (C) 125 (D) 127 (E) 129

AMC12A 2007 #25

5.2 Subgrupos condicionados.

5.2.1 D

Disponemos de 15 letras: 5 "A", 5 "B" y 5 "C". ¿De cuántas formas se pueden ordenar de forma que no haya ninguna "A" en el primer grupo de 5, ninguna "B" en el segundo grupo de 5 y ninguna "C" en el tercer grupo de 5?

(A) $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}^3$ (B) $3^5 \cdot 2^5$ (C) 2^{15} (D) $\frac{15!}{(5!)^3}$ (E) 3^{15}

AMC12A 2003 #20

5.3 Bolas y cajas (Tablas de doble entrada).

5.3.1 MF

Jenn toma aleatoriamente un número J entre 1,2,3,...,19,20. Después Bela toma aleatoriamente un número B entre 1,2,3,...,19,20, distinto de J. ¿Cuál es la probabilidad de que $B-J$ sea como mínimo 2?

AIME I 2019 #2

5.4 Toma de tres números ordenados.

Proposición.

Las diferentes combinaciones en que tres números aleatorios $0 \le a,b,c \le n$ estén ordenados, es decir, $a \le b \le c$ son $\binom{n+3}{3}$

5.4.1 M

Sea S el conjunto de todos los enteros positivos divisores de 20^9. Se toman tres números de este conjunto, aleatoriamente y con reemplazamiento, y se etiquetan como a_1, a_2, a_3 en el orden en que van apareciendo. Determina la probabilidad P de que a_1 divida a a_2 y de que a_2 divida a a_3.

AIME I 2020 #9

5.5 Los Teoremas "Barras y estrellas" ("Stars and bars").

Con este nombre se suelen denominar unos teoremas que pueden ser de mucha ayuda para resolver ciertos problemas de combinatoria. Fueron popularizadas por William Feller en su obra "An Introduction to Probability Theory and Its Applications" (1950).

Teoremas "Barras y estrellas".

Dados dos números enteros positivos n, k ,

a) El número de k-tuplas de enteros <u>positivos</u> cuya suma es igual a n es

$$\binom{n-1}{k-1}$$

b) El número de k-tuplas de enteros <u>no negativos</u> cuya suma es igual a n es

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

5.5.1

Determina el número de polinomios $P(x)$ de grado menor o igual que 3, cuyos coeficientes son todos elementos del conjunto $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y que cumplen $P(-1) = -9$.

(A) 110 (B) 143 (C) 165 (D) 220 (E) 286

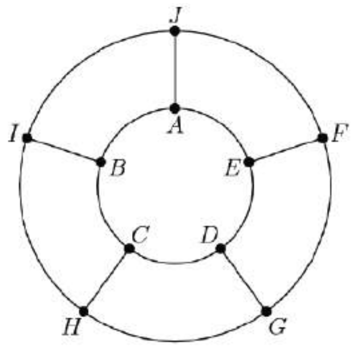
AMC 12B 2018 #22

5.6 Recuento mediante recursividad.

Los dos problemas siguientes se pueden resolver mediante recursividad. Se ofrecen dos versiones de resolución para cada uno de los dos problemas.
La primera versión es mediante recursividad pura, mecánica, lo que los americanos llaman "bashing". Llegaremos seguro al resultado buscado, pero a costa de realizar una gran cantidad de cálculos mecánicos.
La segunda versión es mucho más elegante: Se trata de encontrar la fórmula recursiva que nos permitirá alcanzar el resultado buscado ahorrándonos una gran cantidad de tediosos cálculos, pero a costa de tener que encontrarla, cosa que puede exigir una gran cantidad de tiempo. En las soluciones oficiales siempre se nos presenta esta segunda versión, mucho más elegante, pero la pregunta es obligada: En el contexto de una competición matemática, con el tiempo limitado, ¿Merece la pena arriesgar el tiempo en encontrar la fórmula recursiva?

5.6.1 D

Disponemos de una rueda consistente en dos circunferencias y cinco radios, con una etiqueta en cada punto de contacto entre los radios, tal y como aparece en la figura. Un gusano avanza por la rueda, empezando en el punto A. Este gusano avanza en cada paso desde un punto etiquetado a uno adyacente. Por la circunferencia interna este gusano solo puede avanzar en el sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras que por la circunferencia exterior este gusano solo puede avanzar en el sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, el gusano puede realizar el camino AJABCHCHIJA, que tiene 10 pasos. Sea n el número de caminos de 15 pasos que empiezan y acaban en A. Determina el residuo cuando n se divide entre 1000.



AIME I 2018 #10

5.6.2 D

Sea un heptágono $SP_1P_2P_3EP_4P_5$. Una rana empieza saltando desde el vértice S. Desde cualquiera de los vértices del heptágono excepto E, la rana puede saltar a cualquiera de sus dos vértices adyacentes. La rana se para cuando alcanza el vértice E. Determina el número de secuencias diferentes de no más de 12 saltos que acaban en E.

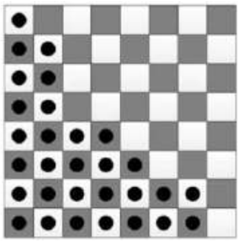
AIME I 2018 #14

6 Problemas de estrategia.

6.1 Problemas de estrategia óptima.

6.1.1 D

Anna y Bernat juegan sobre un tablero de ajedrez de dimensiones 2020×2020 . Diremos que una colección de piezas sobre el tablero está "arrinconada" (en la esquina inferior izquierda) si no hay ninguna casilla vacía tal que la casilla inmediatamente encima o inmediatamente a la derecha contenga una pieza, tal y como se muestra en la figura.



Inicialmente hay 2020 piezas colocadas en una posición arrinconada. En turnos alternos, comenzando por Anna, cada jugador retira dos piezas en casillas adyacentes, con la condición de que la configuración que quede siga siendo arrinconada. Pierde el jugador que no puede hacer ningún movimiento. Determinar cuál de los dos jugadores ganará, en función de la posición inicial de las 2020 piezas, suponiendo que ambos juegan de forma óptima.

OMEC 2021 #5

6.1.2 M

En un castillo encantado hay n habitaciones idénticas, numeradas de 1 a n, cada una de las cuales tiene k puertas alineadas. En la habitación j, $1 \leq j \leq n-1$ hay una única puerta que te lleva a la habitación j+1 y en la habitación n hay una única puerta que te saca del castillo. Todas las demás puestas te llevan de vuelta a la habitación 1. Cuando pasas una puerta y llegas a una habitación, no puedes saber en qué habitación estás entrando ni qué puertas has usado con anterioridad. Empiezas en la habitación 1 y conoces los valores de n y k. Determina para qué valores de n y k existe una estrategia que te garantiza que podrás salir del castillo, explica en qué consiste la estrategia y demuestra que funciona.

OMEM 2021 #9

6.1.3 F

Cinco monedas están sobre una mesa con las "caras" hacia arriba. Después, en cada paso se voltean tres monedas. ¿Cuál es el menor número de pasos necesarios para que todas las monedas tengan sus "cruces" hacia arriba?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) no es posible

Canguro N6 2020 #12, Cangur B2 2020 #12

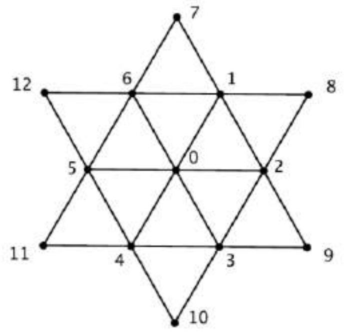
6.1.4 F

Alrededor de un círculo hay 2021 espacios. Se colocan 2020 ceros y 1 uno. La única operación que se permite es escoger un número y cambiar sus dos vecinos (de 0 a 1 o de 1 a 0). ¿Es posible cambiar todos los números a 1? ¿Y si hubiéramos empezado con 2021 ceros?

Olimpíada Matemática Rioplatense 1997

6.1.5 F

La estrella de seis puntas de la figura es regular: todos los ángulos interiores de los triángulos pequeños son iguales. A cada uno de los trece puntos señalados se le asigna un color: verde o rojo. Demuestra que siempre habrá tres puntos del mismo color que son vértices de un triángulo equilátero.



OME 2022 #1

6.1.6 MF

Cinco autos participaron en una carrera, comenzando en el orden que se muestra.

Cada vez que un automóvil adelantaba a otro, se otorgaba un punto. Los coches llegaron a la meta en el siguiente orden:

¿Cuál es la menor cantidad de puntos en total que se podría haber otorgado?

(A) 10 (B) 9 (C) 7 (D) 6 (E) 8

Cangur B1 2021 #17, Kangaroo Junior 2021 #17

6.1.7 F

Un número finito de intervalos cerrados de longitud 1 cubren el intervalo $[0,50]$. Demuestra que podemos determinar un subcojnto de al menos 25 intervalos disjuntos dos a dos.

Canadian Mathematical Olympiad 1997 #2

6.1.8 F

2021 bolas están dispuestas en una fila y están numeradas del 1 al 2021. Cada bola está coloreada en uno de los cuatro colores: verde, rojo, amarillo o azul. Entre cinco bolas consecutivas, hay exactamente una roja, una amarilla y una azul. Después de cualquier bola roja, la siguiente bola es amarilla. Las bolas numeradas 2, 20 y 202 son verdes. ¿De qué color es la bola numerada 2021?

(A) Verde (B) Rojo (C) Amarillo (D) Azul (E) Es imposible de determinar.

Cangur B1 2021 #30, Kangaroo Junior 2021 #30

6.1.9 D

Cristina tiene ocho monedas cuyos pesos en gramos son diferentes enteros positivos. Cuando Cristina pone dos monedas en un lado de la balanza y dos en el otro lado de la balanza, el lado que contiene la más pesada de las cuatro monedas es siempre el lado más pesado. ¿Cuál es el menor peso posible de la moneda más pesada?

(A) 8 (B) 12 (C) 34 (D) 128 (E) 256

Cangur B1 2021 #29, Kangaroo Junior 2021 #30

6.1.10 D

Los primeros 1000 enteros positivos se escriben en una fila con algún orden y todas las sumas de tres números adyacentes se calculan. ¿Cuál es la mayor cantidad de sumas impares que se pueden obtener?

(A) 997 (B) 996 (C) 995 (D) 994 (E) 993

Cangur B2 2021 #14 Kangaroo Student 2021 #14

6.1.11 M

Ana y Berta tienen una tableta de chocolate de dimensiones $n \times m$ (donde n y m son enteros positivos), y juegan al juego que se explica a continuación:
a) Las jugadoras se alternan por turnos, y en cada turno la jugadora a la que toca jugar hace estas acciones: decide como cortar la tableta en dos partes (de dimensiones $(n-k) \times m$ y $k \times m$, con $k<n$, o bien de dimensiones $n \times (m-k)$ y $n \times k$, con $k<m$, (donde k es siempre un entero positivo), y una vez hecho el corte decide cual de las dos partes se come y cual de las dos partes sigue en el juego y se la pasa a la otra jugadora.
Pierde la jugadora que recibe una tableta de dimensiones 1×1.
Si comienza Ana, determina para qué valores de m y n tiene una estrategia ganadora.
b) Consideremos ahora una versión alternativa de este juego en la que, en cada turno, la jugadora que tiene la tableta decide como romperla, pero es la otra jugadora la que escoge qué parte sigue en el juego.
Si comienza Ana, determina ahora para qué valores de m y n tiene una estrategia ganadora.

Nota: Se ofrece una solución completa para la primera parte, de una dificultad moderada. Para la segunda parte, de una dificultad mucho mayor, nos remitimos a las soluciones oficiales.

OME Fase local Catalunya 2023 #3

6.2 Puzles combinatorios.

6.2.1 M

Tres niños jugaron un juego de ”Palabras” en el que cada uno escribió 10 palabras. Cada niño obtuvo tres puntos si ninguno de los otros niños tenía la misma palabra. Cada niño obtuvo un punto si solo uno de los otros niños tenía la misma palabra. No se otorgaron puntos por las palabras que tenían los tres niños iguales. Cuando sumaron sus puntajes, encontraron que cada uno tenía un puntaje diferente. Sam tuvo 19 puntos, que fue el puntaje más pequeño, y James tuvo el puntaje más alto. ¿Cuántos puntos obtuvo James?

(A) 20 (B) 21 (C) 23 (D) 24 (E) 25

Cangur B1 2021 #24, Kangaroo Junior 2021 #24

6.2.2 D **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

Alicia, Blanca y Carla participaron en una competición de lucha libre. En cada combate, dos luchaban y la tercera descansaba. Después de cada combate, en el siguiente, la ganadora se enfrentaba con la que había descansado. En total, Alicia hizo 10 combates, Blanca 15 y Carla 17. ¿Quién perdió el segundo?

(A) Alicia (B) Blanca (C) Carla (D) Blanca o Carla (E) no se puede saber

Canguro N5 2020 #28, Cangur B1 2020 #28

Solución: https://youtu.be/TEkjB2dbm8g

6.2.3 M

Se crea una espiral de números consecutivos comenzando por el 1, tal y como se muestra en la figura. Si el patrón formado por la espiral continuara, ¿En qué posición encontraríamos los números 625, 626 y 627?

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & 10 & \rightarrow & 11 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 13 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & & & \downarrow \\
24 & & 9 & & 2 & \rightarrow & 3 & & 14 \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\
23 & & 8 & & 1 & & 4 & & 15 \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
22 & & 7 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 5 & & 16 \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow \\
21 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 19 & \leftarrow & 18 & \leftarrow & 17
\end{array}
$$

A) $\begin{array}{c} 625 \\ \downarrow \\ 626 \\ \downarrow \\ 627 \end{array}$ B) $\begin{array}{cc} 625 \rightarrow & 626 \\ & \downarrow \\ & 627 \end{array}$ C) $625 \rightarrow 626 \rightarrow 627$ D) $\begin{array}{cc} 626 & \rightarrow 627 \\ \uparrow & \\ 625 & \end{array}$ E) $\begin{array}{c} 627 \\ \uparrow \\ 626 \\ \uparrow \\ 625 \end{array}$

Cangur B2 2023 #23, Canguro N6 2023 #23

6.2.4 F

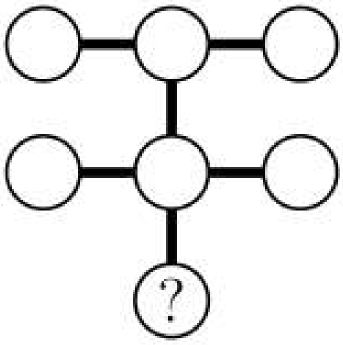
En una competición de escalada, 13 escaladores compiten en tres categorías. La puntuación final de cada competidor es el producto de sus posiciones en cada una de las tres categorías. Por ejemplo, si uno queda cuatro, tercero y sexto en las tres categorías, su puntuación final es $4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$. Cuanto mayor es la puntuación, más baja es la posición final. ¿Cuál es la posición final más baja que puede obtener Anna si ha quedado primera en dos de las tres categorías?

(A) 2a (B) 3a (C) 4a (D) 5a (E) 6a

Cangur B2 2023 #22, Canguro N6 2023 #22

6.2.5 M

Colocamos siete números enteros positivos diferentes de una sola cifra en los círculos del diagrama adjunto. El producto de los tres números situados en línea recta es el mismo para los tres casos. Determina el número que hay en el círculo con el signo de interrogación.

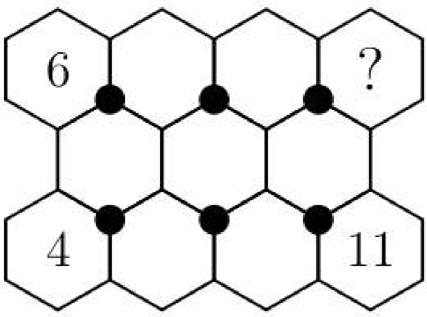


(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 3 (E) 2

Cangur B1 2023 #25, Canguro N5 2023 #25

6.2.6 D

Ponemos los números del 1 al 11 en cada uno de los hexágonos del siguiente diagrama, sin repetir ninguno, con la condición de que los tres números que hay en los hexágonos que tocan cada punto negro suman siempre lo mismo. ¿Qué número hemos puesto en el hexágono marcado con un interrogante?



(A) 9 (B) 3 (C) 7 (D) 4 (E) 5

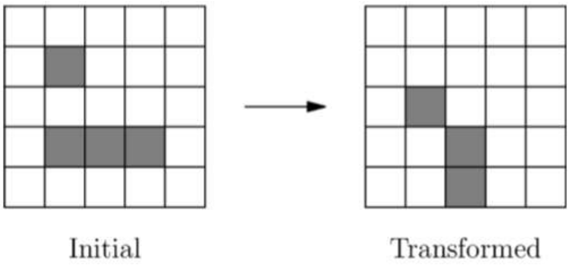
Cangur B1 2023 #28, Canguro N6 2023 #28

6.2.7 M

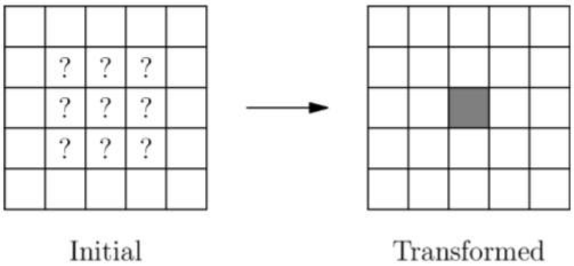
Cada casilla de una cuadrícula 5×5 puede estar llena o vacía, y tiene ocho casillas vecinas, donde por vecinas entendemos que comparten un lado o una esquina. La tabla se puede transformar mediante las siguientes reglas:

- Una casilla llena con dos o tres casillas vecinas llenas permanece llena.
- Una casilla vacía con exactamente tres casillas vecinas llenas se convierte en una casilla llena.
- Cualquier otra posibilidad hace que una casilla permanezca vacía o se convierta en vacía.

Un ejemplo de transformación se muestra en la siguiente figura:



Supongamos que la tabla 5×5 tiene un borde de casillas vacías rodeando una tabla interna 3×3. Determina el número de configuraciones iniciales que se transformarán en una cuadrícula consistiendo en una única casilla llena en el centro, después de una única transformación (Las rotaciones y reflexiones de una misma configuración se consideran diferentes).



(A) 14 (B) 18 (C) 22 (D) 26 (E) 30

AMC 12B 2022 #18, AMC 10B 2022 #19

https://youtu.be/mwOktcvq94k

7 Problemas olímpicos y pre-olímpicos.

7.1.1 D

Sea S el conjunto de todos los puntos de coordenadas (x, y, z), donde $x.y, z$ se toman del conjunto $\{0,1,2\}$. ¿Cuántos triángulos equiláteros podemos encontrar cuyos vértices estén en S?

AMC 12A 2005 #25

7.1.2 M

Lanzamos un dado cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los cuatro lanzamientos sea un cuadrado perfecto?

AIME II 2019 #4

7.1.3 F

Disponemos de seis cartas numeradas del 1 al 6 alineadas. Determina el número de permutaciones de estas seis cartas tales que si se elimina una de ellas, las otras cinco restantes quedan ordenadas, en orden descendente o ascendente.

AIME I 2020 #5

7.1.4 F

Mientras ven un espectáculo, Ayako, Billy, Carlos, Dahlia, Ehuang y Frank se sientan en este orden en una fila de seis bancos. Durante el intermedio, salen a tomar algo, y al volver se sienten en esos mismos asientos de manera que, si dos de ellos estaban sentados juntos antes, ahora no lo están. ¿De cuantas formas posibles se han podido sentar al volver del intermedio?

AIME II 2020 #9

7.1.5 D

Un club consistente en 11 hombres y 12 mujeres necesita escoger un comité entre sus miembros, de forma que el número de mujeres del comité sea uno más que el número de hombres de dicho comité. Este comité puede tener entre 1 y 23 miembros. Sea N el número de comités que se pueden formar. Determina la suma de todos los números primos que dividen N.

AIME I 2020 #7

7.1.6 F

Considere todos los números naturales de siete cifras que se pueden escribir utilizando dos cifras "5", cuatro cifras "6" y una cifra "7". Determine cuántos de estos números son impares y mayores que seis millones.

PAU PORTUGAL 2019 635 #4

7.1.7 D

Denotamos por $D(n)$ el número de formas es escribir un entero positivo n como producto

$$n = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k$$

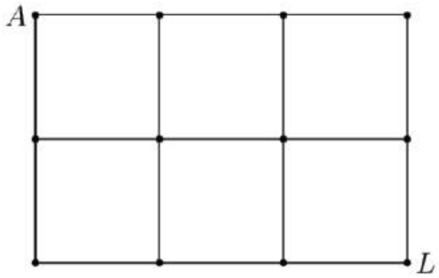
donde $k \geq 1$, los f_i son enteros estrictamente mayores que 1 y el orden de los factores sí importa (es decir, dos representaciones que difieren solo en el orden se consideran diferentes). Por ejemplo, el número 6 se puede escribir como 6, $2 \cdot 3$ y $3 \cdot 2$, y por tanto $D(6) = 3$.
Determina $D(96)$.

(A) 112 (B) 128 (C) 144 (D) 172 (E) 184

AMC 12B 2020 #24

7.1.8 D

La siguiente figura es un mapa en el que se muestran 12 ciudades y 17 carreteras que conectan ciertos pares de ciudades. Paula desea recorrer exactamente 13 de estas carreteras, empezando en la ciudad A y finalizando en la ciudad L, sin recorrer ninguna porción de carretera más de una vez (Paula puede visitar una ciudad más de una vez).



¿Cuántas rutas diferentes puede tomar Paula?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

AMC 12B 2019 #10

7.1.9 M

Determina el número de secuencias de “0” y “1” de longitud 19, que empiezan y terminan con “0”, no contienen dos “0” consecutivos, y no contienen tres “1” consecutivos.

(A) 55 (B) 60 (C) 65 (D) 70 (E) 75

AMC 12B 2019 #23

7.1.10 F

Colocamos aleatoriamente los números 1, 2, ... , 9 en una cuadrícula de 3 filas y 3 columnas. En cada casilla ponemos un número, y cada uno de los números se usa una única vez. Determina la probabilidad de que la suma de los números en cada fila y en cada columna sean números impares.

$$\text{(A) } \frac{1}{21} \quad \text{(B) } \frac{1}{14} \quad \text{(C) } \frac{5}{63} \quad \text{(D) } \frac{2}{21} \quad \text{(E) } \frac{1}{7}$$

AMC 12A 2019 #16

7.1.11 D

Determina el número de funciones $f(x)$ de $\{1,2,3,4,5\}$ en $\{1,2,3,4,5\}$ que satisfacen $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ para todo x de $\{1,2,3,4,5\}$.

AIME II 2018 #10

7.1.12 D

Determina el número de permutaciones de 1, 2, 3, 4, 5, 6 tales que para cada k con $1 \le k \le 5$, al menos uno de los primeros k términos de la permutación es mayor que k.

AIME II 2018 #11

7.1.13 MD

Determina el número de funciones f de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ en los enteros tales que $f(0) = 0$, $f(6) = 12$ y

$$|x - y| \le |f(x) - f(y)| \le 3|x - y|$$

para todo x, y en $\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

AIME II 2018 #15

7.1.14 D

Determinar todas las parejas de enteros positivos (m, n) para los cuales es posible colocar algunas piedras en las casillas de un tablero de m filas y n columnas, no más de una piedra por casilla, de manera que todas las columnas tengan la misma cantidad de piedras, y no existan dos filas con la misma cantidad de piedras.

OME Fase Local Aragón 2021 #4

7.1.15 F

Sea P un polígono regular de n lados, $n \ge 6$. Determinar el número de triángulos que tienen vértices en los vèrtices del polígono y lados sobre las diagonales (no lados) de P.

OMEC 2021 #1

7.1.16 M

Determina el número de pares ordenados (a,b) de enteros tales que la sucesión

$$3\,,\,4\,,\,5\,,\,a\,,\,b\,,\,30\,,\,40\,,\,50$$

es estrictamente creciente y no hay ningún subgrupo de cuatro (no necesariamente consecutivos) términos que formen una progresión aritmética.

AIME I 2022 #6

7.1.17 MD

Elena dispone de doce fichas de colores, dos por cada de los siguientes colores: Rojo (R), azul (B), amarillo (Y), verde (G), naranja (O) y púrpura (P). Diremos que una ordenación de fichas será par si hay un número par de posiciones entre cualquier par de fichas del mismo color. Por ejemplo, la ordenación R B B Y G G Y R O P P O es par. Ellina ordena sus fichas de forma aleatoria. La probabilidad de que obtenga un orden par es m/n, con m y n enteros positivos coprimos. Determina m+n.

AIME I 2022 #9

7.1.18 D **Problema solucionado paso a paso en vídeo.**

El código de barras mostrado se compone de franjas blancas y negras alternadas, siendo negras las de los extremos. Cada una de las franjas, blanca o negra, tiene anchura 1 ó 2 y el ancho total del código es 12.

¿Cuántos códigos de barras diferentes, en esas condiciones, leídos de izquierda a derecha, es posible construir?

(A) 12 (B) 24 (C) 66 (D) 132 (E) 116

Canguro N6 2010 #24, Kangaroo Student 2010 #24, Cangur N4 2010 #27

Solución: https://youtu.be/A7sTeff8lzk

7.1.19 F

Un tablero de 2022×2022 casillas se tiene que recubrir completamente por piezas que son triángulos rectángulos isósceles con catetos de longitud igual a cada casilla del tablero (que son todas cuadradas). Hay triángulos blancos y triángulos negros. Un recubrimiento es bueno si dos triángulos que tocan por un lado tienen colores diferentes. ¿Cuántos recubrimientos buenos diferentes se pueden hacer en este tablero?

OMEFL Catalunya 2023 #4

7.1.20 D

Determina el número de colecciones de 16 subconjuntos diferentes de {1,2,3,4,5} con la propiedad de que para cualquier par de subconjuntos X, Y de esta colección, $X \cap Y \neq \varnothing$.

AIME II 2023 #11

Soluciones.

1.1.1

Sea $n = \overline{a_3}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}$ se tiene que cumplir:

$a_1 \in \{0,2,4,6,8\}$, $a_2 \in \{0,1,2,...,a_1 - 1\}$, $a_1 \in \{1,2,...,a_2 - 1\}$

Luego el total es

$a_1 = 0 \Rightarrow \varnothing$

$a_1 = 2 \Rightarrow a_2 \in \{0,1\} \Rightarrow \varnothing$

$a_1 = 4 \Rightarrow a_2 \in \{0,1,2,3\} \Rightarrow 1 + 2 = 3$

$a_1 = 6 \Rightarrow a_2 \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

$a_1 = 8 \Rightarrow a_2 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

En total: $3 + 10 + 21 = 34$ casos

1.1.2

El número b queda determinado por el número a:

$a \to b = 1000 - a$

$1 \to 999$

$2 \to 998$

...

$999 \to 1$

De todos estas 999 parejas debemos eliminar aquellas que contengan el dígito "0", en a o en b. Estudiaremos los casos por centenas:

Del 101 al 200 hay: Diez números a que acaban en "0": $\{110,120,130,...,200\}$, y nueve números más que tienen el cero en la cifra de las decenas: $\{101,102,103,...,109\}$

Y esto se repite con los bloques 1**, 2**, 3**, ... , 8**

A estos debemos añadir los números $a \in \{191,192,193,199\}$ pues determinan números b con cero en las decenas: $1000 - 191 = 809$, $1000 - 192 = 808$, ... , $1000 - 199 = 801$

En total $10 + 9 + 9 = 28$.

Esto sucede exactamente igual para cada bloque 1**,2**,3**,...,8**.

Pero en el bloque 9** ya no contamos el 1000, ni tampoco los $a \in \{991,992,993,999\}$ pues estos generan números b con ceros a la izquierda, que no se tienen en cuenta:

$1000 - 991 = 9$, $1000 - 992 = 8$...

Luego hay $10 + 8 = 18$

Y en el bloque del 1 al 100 no contamos los números del 1 al 9, luego son $\{10,20,30,...,90,100\}$, y los que generan un b con cero: $\{91,92,93,..99\}$

En total hay 10+9=19.

Por lo tanto, el número buscado es $999-8\cdot 28-18-19=738$.

1.2.1
Vamos a ordenarlos por subconjuntos que contengan una pareja que sume 16, y vamos a añadir dos números más para que también haya dos que sumen 24.

$\{1,15,a,b\}$ $\{1,15,20,4\}$, $\{1,15,9,*\}\times 21$
$\{2,14,a,b\}$ $\{2,14,20,4\}$, $\{2,14,10,*\}\times 21$
$\{3,13,a,b\}$ $\{3,13,20,4\}$, $\{3,13,11,*\}\times 21$
$\{4,12,a,b\}$ $\{4,12,20,*\}\times 21$
$\{5,11,a,b\}$ $\{5,11,20,4\}$, $\{5,11,19,*\}\times 21, \{5,11,13,*\}\times 21$
$\{6,10,a,b\}$ $\{6,10,20,4\}$, $\{6,10,18,*\}\times 21, \{6,10,14,*\}\times 21$
$\{7,9,a,b\}$ $\{7,9,20,4\}$, $\{7,9,17,*\}\times 21, \{7,9,15,*\}\times 21$

Todos ellos suman $10\cdot 21+6=216$.

Pero vemos que hay alguna repetición, hay seis elementos que los hemos contado dos veces:
Los grupos $\{3,13,11,*\}\times 21$ y $\{5,11,13,*\}\times 21$ comparten el elemento $\{5,11,13,3\}$.
Los grupos $\{2,14,10,*\}\times 21$ y $\{6,10,14,*\}\times 21$ comparten $\{6,10,14,2\}$
Los grupos $\{5,11,19,*\}\times 21$ y $\{5,11,13,*\}\times 21$ comparten $\{5,11,19,13\}$
Los grupos $\{6,10,18,*\}\times 21$ y $\{6,10,14,*\}\times 21$ comparten $\{6,10,14,18\}$
Los grupos $\{7,9,17,*\}\times 21$ y $\{7,9,15,*\}\times 21$ comparten $\{7,9,15,17\}$
Los grupos $\{1,15,9,*\}\times 21$ y $\{7,9,15,*\}\times 21$ comparten $\{7,9,15,1\}$

Por lo tanto hay $216-6=210$ subconjuntos.

1.4.1
Aquí el conjunto de casillas son las 27 letras del abecedario. Por lo tanto, si tenemos 28 personas y las colocamos en las casillas, seguro que habrá al menos dos ocupando una misma casilla, es decir, tendrán nombres con la misma inicial. Si solo hubiera 27 podría darse el caso de que todas tuvieran nombres con iniciales diferentes.

1.5.2
Si tenemos $27\cdot 5=135$ personas, podría darse el caso de que hubiera 5 personas en cada una de las 27 letras (“casillas”). Luego llamando a una más, es decir, con 136 personas, garantizamos que al menos en una de las casillas hay un mínimo 6 personas, es decir, que hay al menos 6 personas con la misma inicial.

1.5.3
En este caso tenemos 2 “casillas”: “varón” y “mujer”, y si colocamos 6 personas, podría darse el caso de tener tres y tres. Pero si añadimos la séptima, seguro que al menos en una de las dos hay 4 personas.

1.5.4
Los elementos de A son de la forma $x_i=4k_i$, con $1\le k_i\le 25$, y

$x_i + x_j = 104 \Leftrightarrow 4k_i + 4k_j = 104 \Leftrightarrow k_i + k_j = 104/4 = 26$, luego nuestro problema se reduce a un conjunto A de 20 elementos entre 1 y 25 en el que debemos encontrar al menos una pareja cuya suma sea 26.
Consideremos los siguientes 13 conjuntos, que serán nuestras “casillas”:

$$\{1,25\}\ ,\ \{2,24\}\ ,\ \{3,23\}\ ,\ \{4,24\}\ ,\ \dots\ ,\ \{11,15\}\ ,\ \{12,14\}\ ,\ \{13\}$$

Cada elemento de A irá a parar a una de estas casillas, y puesto que hay 20 números y solo 13 casillas, aplicando el “Principio del casillero”, obligatoriamente dos elementos de A irán a parar a la misma casilla. Dicho de otra manera, existirán dos números de A cuya suma sea 26.

1.5.5
Consideremos los conjuntos siguientes:

$$\{1,2\},\ \{3,6\},\ \{7,14\},\ \{15,30\},\ \{31,62\},\{63,126\}$$

Los siete números del enunciado deberán ir a alguno de estos seis conjuntos, y por el Principio del Casillero, al menos existirán dos elementos $a < b$ en el mismo conjunto. Los conjuntos están ya diseñados de forma que la distancia máxima sea
$n \le a < b \le 2n \le 2a \Rightarrow a < b \le 2a$.

1.5.6
Observamos que en un conjunto de 10 elementos, por ejemplo en

$$\{1,11,\ 21,31,41,51,61,71,81,\ 91\}$$

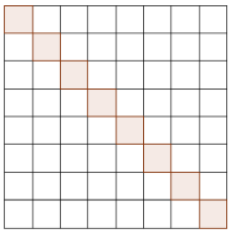
Solo puede haber un máximo de cinco elementos separados. Si añadimos un sexto, estará tocando, por la derecha o por la izquierda, a otro.

Consideremos los siguientes 10 conjuntos:

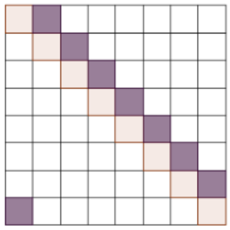
$$\{1,11,21,...,91\}\ ,\ \{2,12,22,...,92\}\ ,\ \dots\ ,\ \{9,19,29,...,99\}\ ,\ \{10,20,30,...,100\}$$

Al repartir los 55 elementos en estos 10 conjuntos, al menos habrá uno con 6 elementos o más, y no podrán estar separados entre ellos, luego existirán dos elementos juntos, es decir, cuya diferencia será 10.

1.5.7
La clave para resolver este problema mediante el “principio del palomar” es encontrar 8 zonas digamos “aceptables” (es decir, en la que las torres no se coman entre sí) en las que se pueden colocar 5 torres.
Puesto que $33 = 8 \cdot 4 + 1$, garantizaremos que, al menos en una de estas 8 zonas hay al menos 5 piezas.
En el documento “El Principio de Dirichlet (o una excusa para pensar matemática)” de Juan Sabia, se presenta la siguiente propuesta:
Una primera zona es la diagonal principal. En ella todas las torres que coloquemos no se comerán entre ellas:



Una segunda zona es la diagonal inmediatemente a la derecha de la anterior y la casilla de la esquina inferior izquierda:



Y de esta forma vamos encontrando las ocho zonas que queremos, que aparecen en la siguiente imagen numeradas del 1 al 8:

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

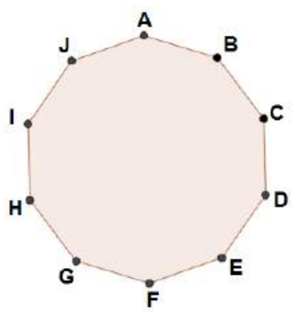
Este problema fue planteado por primera vez por S. G. Slobodnik y A. Soifer en 1973.

Fuente de esta solución: “El Principio de Dirichlet (o una excusa para pensar matemática)” Juan Sabia

1.5.8

Con las mismas condiciones, probar que siempre hay 3 números que quedan seguidos cuya suma es por lo menos 18, y que con 19, el resultado es falso.

Etiquetamos las posiciones con letras:



Podemos organizar estas posiciones como si fueran diez cajas triples:

ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, GHI, HIJ, IJK, JAB

En las que vamos a poner $3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)=165$ elementos (cada elemento aparece por triplicado).

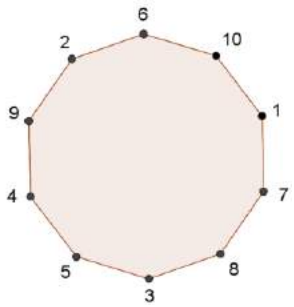
Puesto que $165 = 16 \cdot 10 + 5$, aplicando “el principio del Palomar” garantizamos que, en al menos una de estas “cajas triples” hay al menos 16+1=17 elementos, tal y como queríamos demostrar.

Vamos a ver ahora que podemos afinar más el resultado anterior y demostrar que podemos encontrar tres posiciones consecutivas cuya suma sea al menos 18.
Si descartamos el 1, nos quedan los números del 2 al 10 cuya suma es 54. Si los agrupamos en tres cajas consecutivas, y puesto que hay nueve cajas triples:

ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH, GHI, HIJ, IJK

Tendremos $54 \cdot 3 = 162$ elementos, y puesto que $162 = 9 \cdot 18$, en al menos una de estas cajas triples habrá 18 elementos.

Un contraejemplo con 19 elementos puede ser el siguiente:



Fuente de esta solución: “El Principio de Dirichlet (o una excusa para pensar matemática)” Juan Sabia

1.6.1
Simplificaremos nuestro problema trabajando con una tabla de casillas de filas (coordenada x) y columnas (coordenada y), que marcaremos con “R” (rojo) o “A” (azul).
Dado un valor de n fijo, llamaremos a_i al número de casillas “A” en la columna i, y llamaremos b_i al número de casillas “A” en la fila i.
Lo ilustraremos con el siguiente ejemplo, en donde $n = 5$:

4	A				
3	A	A			
2	R	A	A		
1	R	R	R	A	
0	R	R	R	R	A
	0	1	2	3	4

$$a_0 = 2, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, \quad b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 2, b_4 = 1$$

Observamos que son los mismos números permutados: (2,2,1,1,1) y (1,1,2,2,1). Esto siempre sucede cuando llenamos la tabla en la manera que indica el enunciado, y es la clave para resolver este problema.

Vamos a demostrar este hecho por inducción “fuerte” sobre n.

Para $n=1$ es trivial. Solo hay una casilla, y está "R" y por tanto $a_0 = b_0 = 0$ o bien está "A", y por tanto $a_0 = b_0 = 1$.
Para $n=2$ hay cuatro casos posibles:

1	R	
0	R	R
	0	1

$a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$

1	A	
0	R	R
	0	1

$a_0 = 1, a_1 = 0, b_0 = 0, b_1 = 1$

1	A	
0	R	A
	0	1

$a_0 = 1, a_1 = 1, b_0 = 1, b_1 = 1$

1	A	
0	A	A
	0	1

$a_0 = 2, a_1 = 1, b_0 = 2, b_1 = 1$

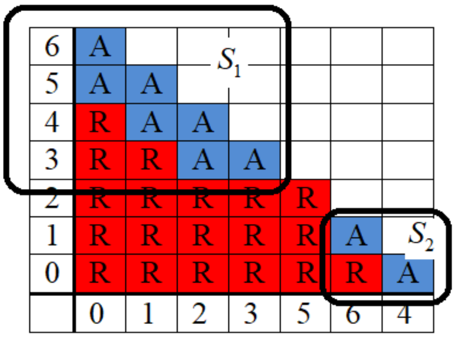
Vamos a suponer que se cumple la propiedad para todo $k < n$.

Vamos a distinguir dos casos:
a) Toda la diagonal $x + y = n-1$ se ha llenado con "A". Entonces observamos la tabla generada con las $n-1$ filas y $n-1$ columnas, en la que podemos aplicar el principio de inducción para garantizar que hay una permutación entre $(a_0, a_1, a_2,..., a_{n-1})$ y $(b_0, b_1, b_2,..., b_{n-1})$

6	A						
5	A	A					
4	A	A	A				
3	R	R	A	A			
2	R	R	R	A	A		
1	R	R	R	A	A	A	
0	R	R	R	R	R	A	A
	0	1	2	3	5	6	4

Pero ahora hemos incrementado todos estos valores en 1 y hemos añadido un $a_n = b_n = 1$, con lo cual está claro que mantenemos una permutación entre $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$

b) Supongamos que hemos puesto al menos un "R" en la diagonal, digamos en la posición (i, j). Entonces podemos dividir el esquema en dos partes: S_1, con las filas superiores y las columnas anteriores a esta "R", y S_2, con las filas inferiores y las columnas posteriores a esta "R":



En ambas tablas podemos aplicar la hipótesis de inducción, y por lo tanto tendremos, por un lado, una permutación entre $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{i-1})$ y $(b_{j+1}, b_{j+2}, \ldots, b_n)$ y por otro lado, una permutación entre $(a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n)$ y $(b_0, b_1, \ldots, b_{j-1})$. A estas columnas le tenemos que añadir ahora una $a_i = 0$ y $b_j = 0$, que completan una permutación entre $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, tal y como queríamos ver.

Con este resultado la resolución del problema es trivial:
El número de tomar n puntos "A" con las coordenadas x diferentes será igual al producto $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, y el número de formas de tomar n puntos "A" con las coordenadas y diferentes será igual al producto $b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$, y puesto que estos números son los mismos cambiados de orden, está claro que $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n$.

Fuente de esta solución: Problem-Solving Methods in Combinatorics (Pablo Soberón, 2013)

1.7.1

$$\left.\begin{array}{l} 1-1-1 \to 3 \\ \ldots \\ 6-6-6 \to 18 \end{array}\right\} \to 18-3+1=16 \;\; \text{(C)}$$

1.7.2

$5 \cdot 4 = 20$ (B)

1.7.3

$33+34+35=102$ y me paso
$32+33+34=99$ y me paso
$31+32+33=96$ y es aceptable, por ejemplo $31+32+34=97$ (C)

1.7.4

B

1.7.5
Por tanteo, probando combinaciones llegamos a una combinación compatible:

1	4
3	2

Las otras dos sumas son 5 y 6. (E)

1.7.6
La suma total es $5(1+2+3+4+5)=75$, y puesto que, por hipótesis, cada una de las tres regiones tiene igual suma, cada una de las tres sumará 25.
Comencemos por la inferior izquierda.
Tenemos que llegar a $25-2=23$, luego necesitaremos forzosamente tres "5", pues de los contrario $5+5+4+4+4=22$ no llegaríamos a 23. Estos tres "5" forzosamente se tienen que colocar seguidos en la diagonal.
Luego nos faltan dos números que sumen 8. Ninguno de los dos puede ser "5", así que ambos tienen que ser "4".
Con esto ya hemos completado la región inferior izquierda.

Los dos "5" restantes deben ir en las dos primeras filas y las dos últimas columnas, luego deben estar en diagonal:

			5	?
				5
5				
4	5			
2	4	5		

Para completar la región superior derecha necesitamos, además, $25-5-5=15$, con cuatro números, ninguno 5, con solo dos "4" no llegamos: $4+4+3+3=14$, luego necesitaremos los tres "4", y el cuarto debe ser un "3". La única forma de colocarlos es la siguiente:

		4	5	3
			4	5
5				4
4	5			
2	4	5		

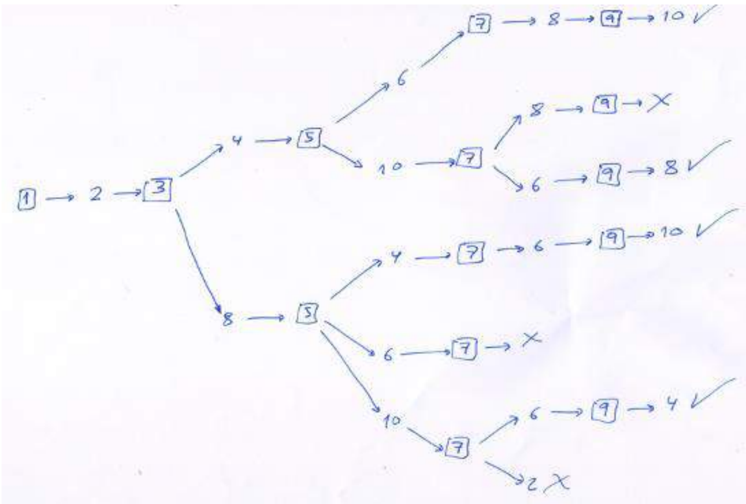
Y el número de la esquina superior derecha será un "3" (C)

1.7.7
Haciendo un esquema vemos las diferentes posibilidades, y vemos que las parejas se pueden organizar por las posiciones impares: 1, 3, 5, 7, 9 pues estas posiciones no compartirán nunca parejas entre ellas.

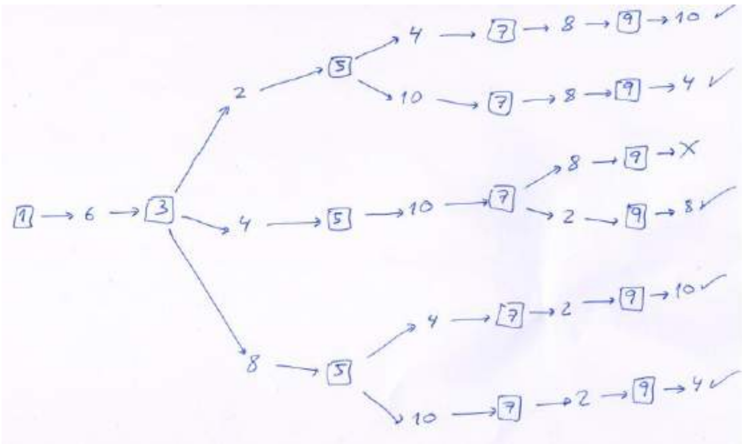
$$1\to\{2,10,6\},\ 3\to\{2,4,7\},\ 5\to\{4,6,10\},\ 7\to\{6,8,2\},\ 9\to\{8,10,4\}$$

Podemos ir escribiendo una a una todas las posibilidades.

Si $1 \to 2$, hay 4 posibilidades:



Si $1 \to 6$, hay 5 posibilidades:



Si $1 \to 10$, es un caso simétrico al primero, luego habrá 4 posibilidades también.
En total $4+4+5=13$ posibilidades. (C)

1.7.8
Ordenaremos los casos en función del número de substituciones hechas:

Primer caso: 0 substituciones.
1 caso.

Segundo caso: 1 substitución.
Hay 11 jugadores potencialmente substituibles y 11 jugadores substitutos, luego en total:
$11 \cdot 11 = 121$ casos.

Tercer caso: 2 substituciones.
En la segunda substitución tenemos 10 posibles substitutos, luego el total es
$11 \cdot 11 = 121$ casos para la primera substitución, y
$11 \cdot 10 = 110$ para la segunda, $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 10 = 13310$ casos.

Cuarto caso: 3 substituciones.

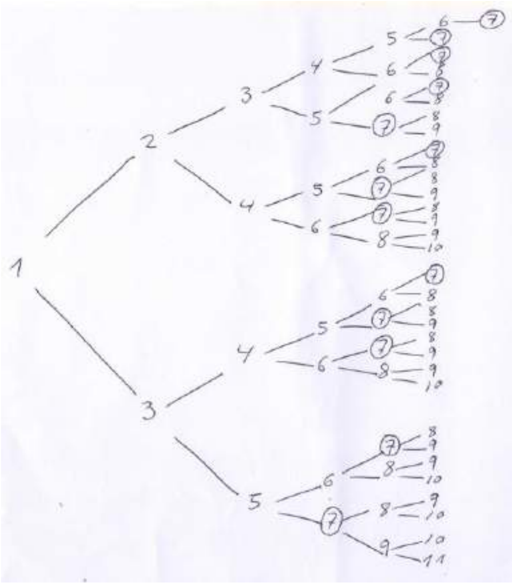
Siguiendo la pauta anterior, cada vez tenemos un substituto menos, luego hay:

$(11\cdot 11)(11\cdot 10)(11\cdot 9)=1317690$ casos

Luego el total es $1+121+13310+1317690=1331122$ casos.

1.7.9

Generamos el árbol de posibilidades, hasta con 6 saltos:



Vemos que en total hay 2^6 caminos diferentes, de los cuales son favorables los siguientes:

1 camino en el salto 6.

5 caminos en el salto 5, en total $5\cdot 2$.

6 caminos en el salto 4, en total $6\cdot 2^2$.

1 caminos en el salto 3, en total $1\cdot 2^3$

El total de caminos favorables es $1+5\cdot 2+6\cdot 2^2+1\cdot 2^3=43$

La probabilidad es, por tanto, $P=\dfrac{43}{2^6}=\dfrac{43}{64}$

1.7.10

En primer lugar, vemos que los números 5 y 7 se pueden pintar de cualquier color, pues ni son divisibles ni son divisores de ningún otro.

Por lo que parece, el 2 es el elemento con más restricciones. Fijamos un color para el 2, por ejemplo, $2=R$.

$$2=R\Rightarrow\begin{cases}4=G\Rightarrow 8=B\\4=B\Rightarrow 8=G\end{cases}$$

Por otro lado, $2 = R \Rightarrow \begin{cases} 6 = B \Rightarrow \begin{cases} 3 = G \\ 3 = R \end{cases} \\ 6 = G \Rightarrow \begin{cases} 3 = R \\ 3 = B \end{cases} \end{cases}$

Y con esto quedan determinados todos los números, excepto el 9, que no puede ser del mismo color que el 3.

En total $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

Y con las combinaciones de los números 5 y 7, en total $48 \cdot 3 \cdot 3 = 432$ (E)

1.7.11
Poniéndonos en el peor de los casos, podríamos sacar 13 bolas azules, 11 bolas blancas y 9 bolas negras, 33 bolas en total, y no habríamos sacado 15 del mismo color. Además, podríamos sacar 14 bolas rojas, 14 bolas verdes y 14 bolas amarillas (en total 75) y seguiríamos sin haber sacado 15 bolas del mismo color. Pero entonces, con una más, seguro que hay 15 rojas, verdes o amarillas. La solución es 76 (B).

1.7.12
Lo mejor que puede hacer es tomar 2 piedras de 5 quilos y 2 piedras de 4 quilos, con un total de 18 quilos y un valor de $2 \cdot 14 + 2 \cdot 11 = 50\,\$$ (C)

Otras opciones, como por ejemplo: 3 piedras de 5 quilos y 3 piedras de 1 quilo generan un valor de $3 \cdot 14 + 3 \cdot 2 = 48\,\$$, que es menor.

1.7.13
Este conjunto contiene 4 números primos y 4 números compuestos. Para evitar repeticiones, organizaremos los subconjuntos válidos por el número de primos que contiene:

Primera versión.
Con un número primo: $\binom{4}{1} \cdot 2^4$. Con dos números primos: $\binom{4}{2} \cdot 2^4$

Con tres números primos: $\binom{4}{3} \cdot 2^4$. Con cuatro números primos: $\binom{4}{4} \cdot 2^4$

Total:

$$\binom{4}{1} \cdot 2^4 + \binom{4}{2} \cdot 2^4 + \binom{4}{3} \cdot 2^4 + \binom{4}{4} \cdot 2^4 = 2^4 \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] =$$

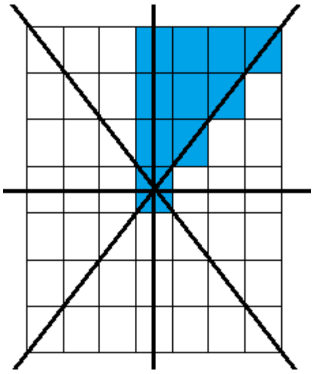
$$= 2^4 \left[2^4 - \binom{4}{0} \right] = 2^4 \left(2^4 - 1 \right) = 16 \cdot 15 = 240 \quad (D)$$

En donde hemos aplicado la identidad $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Segunda versión.

Mucho más rápidamente, pasando al complementario: Hay en total 2^8 subconjuntos, y que no contengan ninguno de los 4 primos son 2^4, y por tanto los que sí contienen alguno de los 4 primos son $2^8 - 2^4 = 256 - 16 = 240 \quad (D)$.

1.7.14
Observando el efecto de las transformaciones que deben dejar el código invariante deducimos que el código queda determinado por 9 casillas, que pueden ser, por ejemplo, las que aparecen en el siguiente esquema:



Luego, en total, y teniendo en cuenta que no puede ser totalmente blanca o totalmente negra, habrá $2^{10} - 2 = 1024 - 2 = 1022$ posibilidades distintas.

1.7.15
Los cursos de matemáticas se pueden organizar a lo largo de los 6 períodos de cuatro formas diferentes:

$$1-3-5\ ,\ 1-3-6\ ,\ 1-4-6\ ,\ 2-4-6$$

Para cada una de estas posibilidades, hay $3 \cdot 2 = 6$ formas diferentes de ordenar los tres cursos de matemáticas, haciendo un total de $6 \cdot 4 = 24$ horarios diferentes (E).

1.7.16
Queremos determinar la cantidad de enteros $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ de forma que

$$a \in \{1,2,4,5,6,7,8,9\}$$
$$b \in \{0,1,2,4,5,6,7,8,9\}$$
$$c \in \{1,5,7,9\}$$

satisfaciendo $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$.

Ordenamos los casos en función del tercer dígito c:
A) $a + b + 1 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a + b \equiv 2 \pmod 3$
B) $a + b + 5 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a + b \equiv 1 \pmod 3$
C) $a + b + 7 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a + b \equiv 2 \pmod 3$
D) $a + b + 9 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow a + b \equiv 0 \pmod 3$

Vemos que los grupos B, C y D, juntos, recorren todas las combinaciones posibles de parejas (a,b) con un total de $8 \cdot 9 = 72$ casos.

Luego solo tenemos que añadir los elementos del grupo A, que se pueden contar uno por uno:

11,15,17,20,26,29,41,44,47,50,56,59,62,65,68,71,74,77,80,86,89,92,95,98

En total hay $8 \cdot 3 = 24$ casos de combinaciones posibles (a, b).
Finalmente, tenemos un total de $72 + 24 = 96$ combinaciones posibles (a, b, c) (A)

1.7.17

$$x^2 + ax + b = (\alpha_1 x + \beta_1)(\alpha_2 x + \beta_2) = \alpha_1\alpha_2 x + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)x + \beta_1\beta_2$$

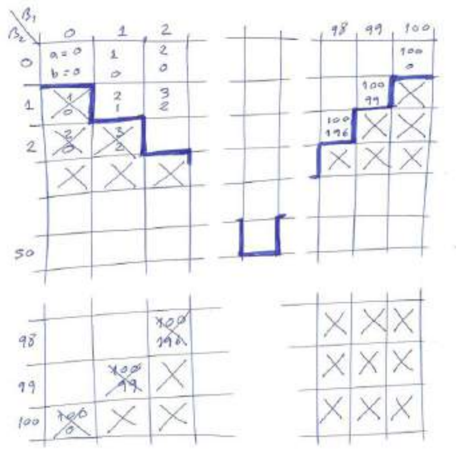
Luego

$$1 = \alpha_1\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = 1$$
$$a = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$$
$$0 \le b = \beta_1\beta_2 \Rightarrow \beta_1, \beta_2 \ge 0$$

Luego el problema se reduce a encontrar todas las parejas (a, b) de la forma

$$1 \le a = \beta_2 + \beta_1 \le 100,\ \beta_1, \beta_2 \ge 0$$

Haciendo una tabla de doble entrada β_1, β_2, eliminado las parejas cuya suma excede 100 por la derecha y eliminando las repeticiones que van produciendo por la izquierda:



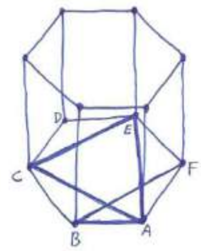
El total es:

$$101 + 99 + 97 + \ldots + 1 = \sum_{k=0}^{50} 101 - 2k = 101 \cdot 51 - 2\sum_{k=0}^{50} k = 101 \cdot 51 - 2\frac{50 \cdot 51}{2} =$$
$$= 51(101 - 50) = 51^2 = 2601$$

Pero debemos restar 1 de la combinación $\beta_1 = \beta_2 = 0$ que tampoco es aceptable.
Así pues, $S = 2600$, y la respuesta correcta es 600.

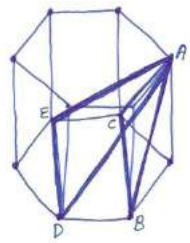
1.7.18

En el interior de las bases vemos que, fijado un vértice A, podemos formar los triángulos isósceles ΔABF (6 triángulos) y ΔACE (dos triángulos) del siguiente esquema:



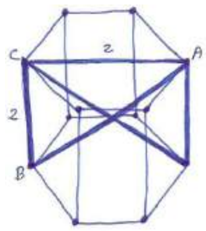
con un total de $8 \cdot 2 = 16$ triángulos.

De una base a la otra, vemos que, fijado un vértice A, podemos formar los triángulos isósceles ΔABC y ΔADE del siguiente esquema:



con un total de $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ triángulos.

Pero, puesto que la longitud entre vértices opuestos del hexágono es 2, y coincide con la altura, también los triángulos ΔABC del siguiente esquema:



con un total de $6 \cdot 2 = 12$ triángulos.
En total podemos formar $16 + 24 + 12 = 52$ triángulos isósceles.

1.7.19
Para el primer dígito tenemos 8 posibilidades: $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, para el segundo y siguientes tenemos 10 posibilidades: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, luego en total hay

$$T = 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 8 \cdot 10^6$$

Los casos en que empiezan por 9 y acaban en 0 se reducen: El primer dígito solo puede ser 9 y el último solo puede ser 0, por lo tanto:

$$F = 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 = 10^5$$

Y la fracción pedida es $\dfrac{F}{T} = \dfrac{10^5}{8 \cdot 10^6} = \dfrac{1}{8 \cdot 10} = \dfrac{1}{80}$ (B)

1.7.20
Tenemos 16 casos posibles, desde VVVV hasta FFFF.

Veamos las opciones favorables para cada caso:
(A) se cumple para 1 caso, luego la probabilidad es 1/16.
(B) se cumple para 1 caso. luego la probabilidad es 1/16.
(C) Se cumple para VVHH y sus permutaciones: $P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ casos, luego la probabilidad es $6/16 = 3/8$.

(D) Se cumple para VVVH, HHHV, y sus permutaciones: $P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4 \rightarrow 4 \cdot 2 = 8$ casos, luego la probabilidad es $8/16 = 1/2$.
Así pues, la más probable es la opción (D).

1.7.21
Sea n el número de triángulos. La ecuación que se nos plantea es
$3n + 4(10 - n - 3) + 6 \cdot 3 = 42 \Leftrightarrow 3n + 28 - 4n + 18 = 42 \Leftrightarrow 28 + 18 - 42 = n \Leftrightarrow n = 4$
(E)

1.7.22
En sábado, para pasar así 9 días leyendo cuentos. (D)

1.7.23
Vemos que el valor mínimo se toma para

$$A_m = \{1, 2, 3, \ldots, 90\} \rightarrow S_m = \frac{91 \cdot 90}{2} = 91 \cdot 45 = 4095$$

Y el valor máximo se obtiene para el subconjunto

$$A_M = \{11, 12, 13, \ldots, 100\} \rightarrow S_M = \frac{101 \cdot 90}{2} = 111 \cdot 45 = 4995$$

Es fácil ver que se pueden obtener todos los valores entre 4095 y 4995, por inducción.
Los primeros valores son triviales:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 89, 91\} \rightarrow S = 4096$

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 89, 92\} \rightarrow S = 4097$, y así sucesivamente.

Supongamos que tenemos un subconjunto $A_n = \{a_1, a_2, a_3, a_{90}\}$ con suma n, si $n < 4097$ entonces no será la cadena maximal $A_M = \{11, 12, 13, \ldots, 100\}$, y por lo tanto podremos encontrar algún “hueco”, es decir: $a_k \in A_n$ y $a_k + 1 \notin A_n$, con lo que generar un subconjunto

$$A_{n+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + 1, a_{k+1}, \ldots, a_{90}\}$$

de suma n+1.
Luego la solución es $111 \cdot 45 - 91 \cdot 45 + 1 = (111 - 91) \cdot 45 + 1 = 901$

1.7.24
Hay $23 \cdot 2 = 46$ alumnos en las parejas azul-azul. Luego hay $57 - 46 = 11$ alumnos con camiseta azul que se emparejan con alguien forzosamente con camiseta amarilla.
Luego, de las $66 - 23 = 43$ parejas restantes, habrá 11 parejas azul-amarillo, y por tanto $43 - 11 = 32$ parejas amarillo-amarillo (B).

1.7.25
Queremos determinar el número de valores diferentes que se pueden escribir como

$$0 < 2^a - 2^b < 1000$$

Luego está claro que $1024 \geq a > b \geq 0$.
Vamos completando una tabla de filas y columnas, observando que van saliendo valores todos diferentes, por lo tanto no tenemos que calcularlos. Solo tenemos que prestar atención a la última fila, con $a = 10 \Rightarrow 2^a = 1024$, en la que debemos descartar los cinco primeros valores.

	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
1											
2	1										
4	3	2									
8	7	6	4								
16	15	14	12	8							
32	31	30	28	24	16						
64	63	62	60	56	48	32					
128	127	126	124	120	112	96	64				
256	255	254	252	248	240	224	192	128			
512	511	510	508	504	496	480	448	384	256		
1024						992	960	896	768	512	

En total hay 1+2+3+4+5+6+7+8+9+5=50 valores diferentes.

1.7.26
Si en la primera pila hay 1 moneda, en la segunda pueden haber entre 2 y 32 monedas:
(1 , 2 , 63) , (1 , 3 , 62) , ... , (1 , 32 , 33)
Hay 31 combinaciones posibles.

Si en la primera pila hay 2 monedas, en la segunda pueden haber entre 3 y 31 monedas:
(2 , 3 , 61) , (2 , 4 , 60) , ... , (2 , 31 , 33)
Hay 29 combinaciones posibles.

Si en la primera pila hay 3 monedas, en la segunda pueden haber entre 4 y 31 monedas:
(3 , 4 , 59) , (3 , 5 , 58) , ... , (3 , 31 , 32)
Hay 28 combinaciones posibles.

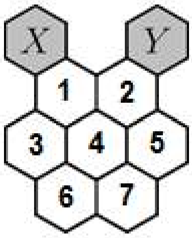
Si en la primera pila hay 4 monedas, en la segunda pueden haber entre 4 y 30 monedas:
(4 , 5 , 57) , (4 , 6 , 56) , ... , (4 , 30 , 32)
Hay 26 combinaciones posibles.

Si en la primera pila hay 5 monedas, en la segunda pueden haber entre 4 y 30 monedas:
(5 , 6 , 55) , (5 , 7 , 54) , ... , (5 , 30 , 31)
Hay 25 combinaciones posibles.

Así sucesivamente, hasta llegar a poner 21 monedas en la primera pila:
(21 , 22 , 23)
Hay 1 combinación posible.

En total hay: 31 + 29 + 28 + 26 + 25 + 24 + ... + 4 + 2 + 1 =
= (31 + 28 + 25 + ... + 1) + (29 + 26 + 23 + ... + 2) = 176 + 155 = 331

1.7.27
Numeramos las casillas blancas tal y como se muestra en la siguiente imagen:



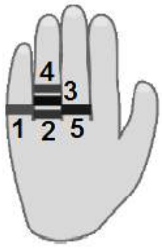
Es fácil determinar todas las posibilidades:

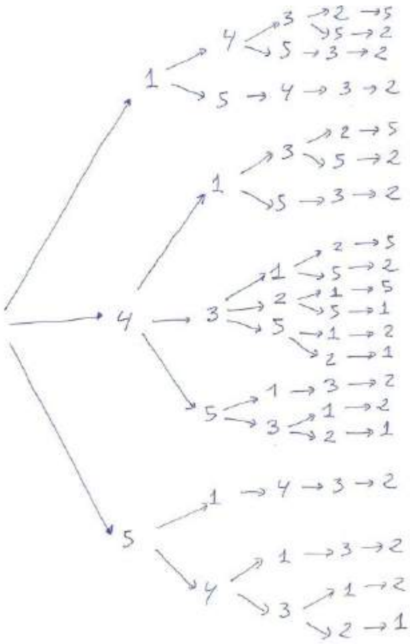
1→3→4→6→7→5→2→Y
1→3→6→4→7→5→2→Y
1→3→6→7→4→5→2→Y
1→3→6→7→5→4→2→Y
1→4→3→6→7→5→2→Y

Hay 5 posibilidades (D).

1.7.28

Numerando los anillos de la siguiente manera, podemos determinar todo el árbol de posibilidades:





Y vemos que hay 20 ramas en total (B).

1.7.29

Está claro que tiene que llegar al 5 para hacer un salto de 2 hasta el 7, luego un salto de 1 hasta el 8. Por lo tanto, serán todas las formas posibles de llegar hasta el 5:

1 1 1 1 1
2 1 1 1

1 2 1 1
1 1 2 1
1 1 1 2
2 2 1
2 1 2
1 2 2
Ocho formas diferentes (C).

1.7.30
Eliminando el 21, observamos que $19+17+9=45=3\cdot 15$, luego hemos dado una combinación aceptable eliminado el 21 (A).

1.7.31
Digamos que “pintada de negro” es 1, y “pintada de blanco” es 0.
Marcamos como “0” las casillas que, seguro, no serán 0, y el resto las denotamos con las letras A a I, tal y como se muestra en la imagen:

A	0	B	C	2
0	0	0	0	0
D	0	E	F	2
G	0	H	I	1
2	0	2	1	

Supongamos que I=1. Entonces F=C=H=G=0, y por tanto A=B=D=E=1:

1	0	1	0	2
0	0	0	0	0
1	0	1	0	2
0	0	0	1	1
2	0	2	1	

Supongamos que I=0. Entonces o bien G=1 y H=0 o bien G=0 y H=1.
Supongamos que G=1 y H=0. Entonces E=B=1:

	0	1	C	2
0	0	0	0	0
	0	1	F	2
1	0	0	0	1
2	0	2	1	

Luego o bien F=1 y C=0 o bien F=0 y C=1.
Supongamos que F=1 y C=0. Entonces A=1 y D=0:

1	0	1	0	2
0	0	0	0	0
0	0	1	1	2
1	0	0	0	1
2	0	2	1	

Supongamos que F=0 y C=1. Entonces A=0 y D=1:

0	0	1	1	2
0	0	0	0	0
1	0	1	0	2
1	0	0	0	1
2	0	2	1	

Supongamos que G=0 y H=1. Entonces A=D=1:

1	0			2
0	0	0	0	0
1	0			2
0	0	1	0	1
2	0	2	1	

Supongamos que B=1. Entonces C=E=0, F=1

1	0	1	0	2
0	0	0	0	0
1	0	0	1	2
0	0	1	0	1
2	0	2	1	

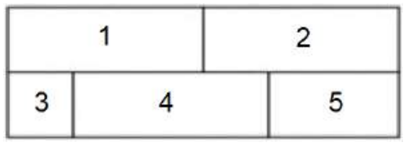
Supongamos que B=0. Entonces C=E=1 y F=0:

1	0	0	1	2
0	0	0	0	0
1	0	1	0	2
0	0	1	0	1
2	0	2	1	

Hay cinco casos en total (A)

1.7.32

Numeramos las regiones del 1 al 5 tal y como se muestra en la siguiente imagen:



Está claro que las regiones “1”, “2” y “4” deben tener colores diferentes, luego hay $5\cdot 4\cdot 3=60$ combinaciones diferentes.
Para cada una de estas combinaciones, la región “5” debe ser diferente de la “2” y la “4”, luego hay 3 colores disponibles.
De la misma forma, la región “3” debe ser diferente de la “1” y la “4”, luego hay 3 colores disponibles. Así pues, el total de formas de colorear es
$60\cdot 3\cdot 3=540$ (D)

1.7.33

Una vez colocamos el 1, necesariamente el 2 y el 3 van a cada lado. Y vemos que solo hay una forma de colocar el 4 y el 5, el 5 y el 6, así sucesivamente, los pares por un lado y los impares por otro, hasta completar el polígono con el 19 y el 20.
La única combinación aceptable, dando la vuelta al polígono, es:

1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3

En total son 2 lados rojos: Entre el 1 y el 2 y entre el 19 y el 20, y la respuesta correcta es C.

1.7.34

Vemos que en cada esquina del cubo concurren tres cuadrados, y estos tres cuadrados tienen que ser diferentes, por lo tanto debe haber un círculo, un cuadrado y un signo X. Hay 8 esquinas en el cubo, por lo tanto, forzosamente habrá un total de 8 círculos, 8 cuadrados y 8 signos X. La respuesta correcta es (E).

1.7.35

En primer lugar vemos que estas matrices están caracterizadas por tener una fila y una columna llenas de unos. Hay 4×4 posibilidades.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De las tres filas y tres columnas que quedan, una de las filas y una de las columnas estará llena de ceros. Hay 3×3 posibilidades.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y por último, de las cuatro entradas que quedan, en tres habrán ceros y en una de ellas un uno. Hay 4 posibilidades para colocar este uno.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En total hay 4×4×3×3×4=576 combinaciones diferentes (D).

1.7.36

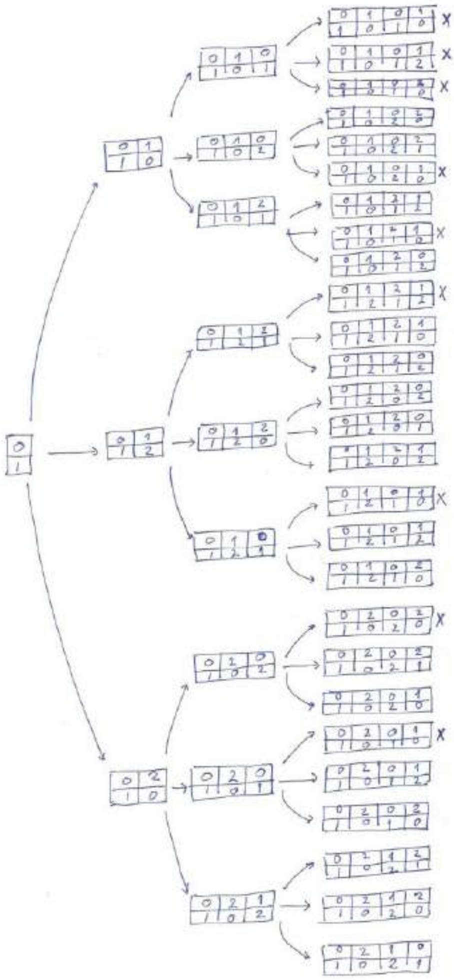
Los casos posibles son todas las formas de colocar los cinco hombres en las 14 posiciones posibles: $14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10$.

Para calcular los casos favorables seguiremos el siguiente razonamiento: Para colocar el primer hombre tenemos todas las 14 posiciones libres. Pero para colocar al segundo solo 12, pues no lo podemos colocar ni en la posición del primero ni en su posición diametralmente opuesta. De la misma forma, para colocar al tercero ya solo 10, para el cuarto 8 y para el quinto 6. Así pues,

$$P=\frac{14\cdot 12\cdot 10\cdot 8\cdot 6}{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}=\frac{8\cdot 6}{13\cdot 11}=\frac{48}{143}$$

1.7.37

En primer lugar vemos que, a efectos prácticos, podemos reducir el problema a enteros módulo 3, con lo cual tenemos tres valores: 0, 1 y 2, que tenemos que colocar en una tabla 2×6 de forma que haya 4 “0”, 4 “1” y 4 “2” , y dos celdas colaterales no pueden tener el mismo valor. Si vamos llenando la tabla de izquierda a derecha, vemos que, de cada columna dada, tenemos tres formas diferentes de llenar la columna que está a su derecha. En particular, si empezamos con 1 y 0, podemos construir el árbol entero de posibilidades:



Llegando finalmente a las 30 combinaciones posibles:

Pero hay seis formas diferentes de empezar la primera columna: “01”, “10”, “12”, “21” , ”20” y ”02”, y en cada casilla hay cuatro posibles números iguales módulo 3, Luego, en total tenemos $N = (4!)^3 \cdot 6 \cdot 30 = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^1$, y por tanto, el número de decimales es $12 \cdot 6 \cdot 2 = 144$.

1.7.38

Vamos a hacer el recuento de estos subconjuntos por orden.

a) Subconjuntos que contienen exclusivamente {1,2}

El 3 queda descartado, por lo que debemos añadir a {1,2} todos los subconjuntos posibles de {4,5,6,7,8,9,10} que no tengan ninguna pareja de enteros consecutivos:

Con 0 elementos: el conjunto vacío → 1 subconjunto

Con 1 elemento: {4} {5} {6} {7} {8} {9} {10} → 7 subconjuntos

Con 2 elementos: {4,6},{4,7},{4,8},{4,9}, {4,10}, {5,7},
{5,8},{5,9},{5,10},{6,8},{6,9},{6,10},{7,9},{7,10},{8,10} → 10 subconjuntos
Con 3 elementos: {4,6,8},{4,6,9},{4,6,10},{4,7,9},{4,7,10},{4,8,10},
{5,7,9},{5,7,10},{5,8,10},{6,8,10} → 10 subconjuntos
Con 4 elementos: {4,6,8,10} → 1 subconjunto.
Total: 34 subconjuntos.

b) Subconjuntos que contienen exclusivamente {2,3}
El 1 y el 4 quedan descartados, luego debemos añadir todos los subconjuntos de {5,6,7,8,9,10} que no tienen elementos consecutivos:
Con 0 elementos: El conjunto vacío →1 subconjunto
Con 1 elemento: {5},{6},{7},{8},{9},{10} → 6 subconjuntos.
Con 2 elementos: {5,7},{5,8},{5,9},{5,10},{6,8},{6,9},{6,10},
{7,9},{7,10},{8,10} → 10 subconjuntos.
Con 3 elementos: {5,7,9},{5,7,10},{5,8,10},{6,8,10} → 4 subconjuntos
Total: 21 subconjuntos.

c) Subconjuntos que contienen exclusivamente {3,4}
El 2 y el 5 quedan descartados, luego debemos añadir todos los subconjuntos de {1,6,7,8,9,10} que no tienen elementos consecutivos:
Con 0 elementos: El conjunto vacío → 1 subconjunto.
Con 1 elemento: {1},{6},{7},{8},{9},{10} → 6 subconjuntos.
Con 2 elementos: {1,6},{1,7},{1,8},{1,9},{1,10},{6,8},{6,9},{6,10},
{7,9},{7,10},{8,10} → 11 subconjuntos
Con 3 elementos: {1,6,8},{1,6,9},{1,6,10},{1,7,9},{1,7,10},{1,8,10},{6,8,10}
→ 7 subconjuntos
Con 4 elementos: {1,6,8,10} → 1 subconjunto.
Total: 26 subconjuntos.

d) Subconjuntos que contienen exclusivamente {4,5}
Descartamos el 2 y el 6, luego debemos añadir todos los subconjuntos de {1,2,7,8,9,10} sin elementos consecutivos.
Con 0 elementos: El conjunto vacío → 1 subconjunto.
Con 1 elemento: {1},{2},{7},{8},{9},{10} → 6 subconjuntos.
Con 2 elementos: {1,7},{1,8},{1,9},{1,10},{2,7},{2,8},{2,9},
{2,10},{7,9},{7,10},{8,10} → 11 subconjuntos
Con 3 elementos: {1,7,9},{1,7,10},{1,8,10},{2,7,9},{2,8,10},{2,7,10} → 6 subconjuntos
Total: 24 subconjuntos.

e) Subconjuntos que contienen exclusivamente {5,6}
Descartamos el 4 y el 7, por lo que debemos añadir todos los subconjuntos de {1,2,3,8,9,10} sin elementos consecutivos.
Con 0 elementos: El conjunto vacío → 1 subconjunto.
Con 1 elemento: {1},{2},{3},{8},{9},{10} → 6 subconjuntos.
Con 2 elementos: {1,3},{1,8},{1,9},{1,10},{2,8},{2,9},{2,10},{3,8},
{3,9},{3,10},{8,10} → 11 subconjuntos
Con 3 elementos: {1,3,8},{1,3,9},{1,3,10},{1,8,10},{2,8,10},{3,8,10} → 6 subconjuntos
Con 4 elementos: {1,3,8,10} → 1 subconjunto.
Total: 25 subconjuntos.

El resto de casos coincide con alguno de los anteriores por simetría. Luego el total de subconjuntos es:
34+21+26+24+25+24+26+21+34=235

1.7.39
Haciendo el árbol de posibilidades se ve fácilmente que el total de combinaciones es $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ (D).

1.7.40
Denotamos las casillas de izquierda a derecha con las letras A a I.
En la casilla C solo pueden ir el 2, 5 o 8.
En la casilla A solo pueden ir 3 o 6.
En la casilla E solo pueden ir el 1 o 4.
Estas combinaciones son independientes entre ellas, pues los números involucrados son todos diferentes.
En total hay 3×2×2=12 combinaciones. Una vez hemos colocado una de estas combinaciones, vemos que:
En la casilla F solo pueden ir el 3 y el 6. Pero uno de ellos lo hemos colocado ya en la casilla A. solo hay una opción aceptable.
En la casilla G pueden ir el 2, 5 o 8, pero uno de ellos ya está colocado en la casilla C, luego tenemos 2 opciones posibles.
En la casilla H pueden ir 1 o 4, pero uno de ellos ya está colocado en la casilla E, luego tenemos solo una opción aceptable.
En la casilla I pueden ir 3 o 6, pero uno de ellos ya está colocado en la casilla F, luego solo hay una opción aceptable.
En total tenemos 12×2=24 opciones posibles (B).

1.7.41
Denotaremos por C a un canguro y por T a un castor. No puede haber tres TTT seguidas. Ni puede haber TT en el inicio o al final de la fila.
Si la fila empieza por T, la combinación máxima será

TCTTC TTCTT CTTCT TCTTC TTC con 15 castores.

Si la fila empiza por C, la combinación máxima será

CTTCT TCTTC TTCTT CTTCT TCT con 15 castores.

Así pues, el máximo número de castores es 15.

1.7.42
Vemos que este problema lo podemos simplificar pasando los nueve números a módulo 3:
1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0

Vemos que, para las tres primeras casillas, las únicas combinaciones aceptables son las seis permutaciones de 0, 1, 2:

"0 1 2" , "0 2 1", "1 0 2", "1 2 0", "2 0 1", "2 1 0"

Puesto que, por ejemplo, la combinación "1 1 1" obligaría después a seguir con "1" en la cuarta posición: 1 1 1 1 , y solo tenemos tres "1".

Una vez hemos fijado una combinación para las primeras tres posiciones, vemos que para la cuarta y sucesivas ya solo tenemos una opción posible. Por ejemplo, para la combinación " 1 0 2" sigue "1".

Así pues, tenemos las siguientes combinaciones posibles:

012 012 012 , 021 021 021 , 102 102 102 , 120 120 120 , 201 201 201 , 210 210 210

Vemos que para las tres primeras posiciones tenemos tres opciones para cada casilla. Para las tres siguientes sólo dos, y las tres últimas posiciones quedan totalmente determinadas por las seis primeras. En total hay $6\times3\times3\times3\times2\times2\times2=6\times6\times6\times6=6^4$ combinaciones posibles (A).

1.7.43

Empezando por la letra "B" de la esquina superior izquierda, podemos seguir hacia la derecha o hacia abajo, pero por simetría de la tabla podemos contar solo una de estas dos opciones y después multiplicar por 2. Haciendo un arbol meticuloso, y teniendo en cuenta que muchas veces también podemos volver hacia atrás, llegamos al resultado 84 (A).

1.7.44

Estudiando un poco los casos que aparecen vemos que el 7 solo se puede emparejar con el 14, y que todas las posibilidades se pueden organizar de la siguiente forma:

$$((1,a_1),(2,a_2),(3,a_3),(4,a_4),(5,a_5),(6,a_6),(7,a_7))$$

en donde

$a_1 = 8,9,10,11,12,13$
$a_2 = 8,9,10,11,12,13$
$a_3 = 8,9,10,11,12,13$
$a_4 = 8,9,10,11,12,13$
$a_5 = 10,11,12,13$
$a_6 = 12,13$
$a_7 = 14$

Una vez escogido a_6 (2 opciones), nos quedan 3 opciones para a_5, y 4 opciones para a_4. Luego ya solo 3 para a_3, 2 opciones para a_2 y una sola opción disponible para a_1. En total son $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=144$ opciones (E).

1.7.45

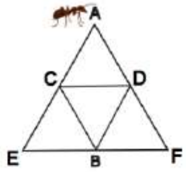
Calculamos el número de barras que contiene cada dígito:
"0" → 6, "1" → 2, "2" → 5, "3" → 5, "4" → 4, "5" → 5, "6" → 6, "7" → 3, "8" → 7, "9" → 6

Y ahora contamos todas las combinaciones que pueden dar lugar a un total de 10 barras, teniendo en cuenta que el "0" no puede aparecer en primera posición:

2+8 → ninguna
3 + 7 → "78"
4 + 6 → "40", "46", "49"
5 +5 → "22", "23", "25", "32", "33", "35", "52", "53", "55",
6 + 4 → "64", "94",
7 + 3 → "87",

En total 16 posibilidades.

1.7.46
Denotamos por C, D, E y F los otros vértices de la figura:



basta hacer un simple arbol de posibilidadades para ver que los caminos aceptables son:
ACB, ACEB, ACDB, ACDFB, ADB, ADFB, ADCEB, ADCB, 8 en total.

2.1.1
Estamos hablando de un caso de combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 4 en 4:

$$CR_3^4 = C_{3+4-1}^4 = C_6^4 = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

2.1.2
Sean D_1, D_2, D_3, D_4 los cuatro dígitos del número.

D_1	D_2	D_3	D_4

Los números divisibles entre 5 acaban en 0 o 5, el cinco lo descartamos pues no es par, luego $D_4 = 0$ (fijo).

D_1 no puede ser 0, luego puede ser $\{2,4,6,8\}$

Para el resto de dígitos D_2 , D_3, pueden ser $\{0,2,4,6,8\}$, sin más condición, luego, el número de posibilidades es:

$$4 \cdot 5 \cdot 50 = 100 \qquad \text{(B)}$$

2.1.3
Podemos numerar las unidades en filas: De 1 a n, de $n+1$ a $2n$,... hasta la casilla n^2.

Estamos trabajando con todas las parejas posibles de n^2 elementos tomados de dos en dos, sin repetición:

$$C_{n^2}^2 = \binom{n^2}{2} = \frac{(n^2)!}{2!\,(n^2-2)!} = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$$

Para contar las parejas colindantes, verticalmente u horizontalmente, razonamos de la siguiente forma:
Partimos de la esquina superior izquierda, y para cada casilla, hay dos parejas: la que contiene la posición de su derecha y la que contiene la posición inferior. Esto lo podemos hacer para las primeras $n-1$ filas y $n-1$ columnas.

$$\Omega_1 = 2(n-1)(n-1)$$

A esto hay que añadir las parejas verticales que se obtienen en la última columna:

$$\Omega_2 = n-1$$

Y las parejas horizontales que se obtienen en la última fila:

$$\Omega_3 = n-1$$

En total: $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 2(n-1)(n-1) + n-1 + n-1 = 2n^2 - 2n = 2n(n-1)$

La probabilidad es

$$P = \frac{2n(n-1)}{n^2(n^2-1)/2} = \frac{4}{n(n+1)}$$

Y por lo tanto buscamos el n tal que

$$\frac{4}{n(n+1)} < \frac{1}{2015} \Leftrightarrow 4\cdot 2015 < n(n+1) \Leftrightarrow 4\cdot 2015 < n(n+1) \Leftrightarrow 8060 < n(n+1)$$

Determinamos el valor de n por tanteo:

$$90\cdot 91 = 8190$$

$$88\cdot 89 = 7832$$

$$89\cdot 90 = 8010$$

La solución es $n = 90$

2.1.4

Denotaremos por A la caja de los 3 libros, por B la caja de los 4 libros y por C la caja de los 5 libros.

Las posibilidades totales son las siguientes:

Para la caja A tenemos 12 libros agruparemos en grupos de 3, siempre sin importar el orden:

$$\binom{12}{3}$$

Una vez que hemos colocado estos tres libros, para la caja B tenemos 9 libros que agruparemos en grupos de 4:

$$\binom{9}{4}$$

Para la tercera caja nos quedan 5 libros en un grupo de 5, es decir, una única posibilidad.

El total es, pues,

$$T = \binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4} = \frac{12!}{3!9!}\frac{9!}{4!5!} = \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2} = 11\cdot 5\cdot 9\cdot 8\cdot 7$$

Las posibilidades favorables son las siguientes:

a) Que los tres libros de matemáticas estén en la caja A:

Luego tengo los 9 libros restantes para llenar la caja B, y cinco libros para llenar la caja C

$$\binom{9}{4}$$

b) Que los tres libros de matemáticas estén en la caja B:
Me queda un libro de 9 para completar la caja B, y luego 8 libros para completar la caja A y los restantes van a la caja C:

$$9 \cdot \binom{8}{3}$$

c) Que los tres libros de matemáticas estén en la caja C:
Me quedan dos libros de 9 para completar la caja C, y luego, con los 7 restantes, tengo que hacer grupos de 3 para la caja A:

$$\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3}$$

Luego el total de casos favorables es

$$F = \binom{9}{4} + 9 \cdot \binom{8}{3} + \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = \frac{9!}{4!\,5!} + 9\frac{8!}{3!\,5!} + \frac{9!}{2!\,7!}\frac{7!}{3!\,4!} = \frac{9!}{4!\,5!} + \frac{9!}{3!\,5!} + \frac{9!}{2!\,3!\,4!} =$$

$$= \frac{9!}{3!\,4!}\left(\frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5\left(\frac{1+4+10}{5 \cdot 4}\right) = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5\left(\frac{15}{5 \cdot 4}\right) = 9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$$

Y la probabilidad es

$$P = \frac{F}{T} = \frac{9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3}{11 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{3}{11 \cdot 4} = \frac{3}{44}$$

2.1.5
Lo primero que vemos es que forzosamente $a_6 = 1$, pues los 11 números restantes son mayores que a_6, y esto solo puede ocurrir si $a_6 = 1$.

Tomando cualquier grupo de 5 números entre 2 y 12, los podemos ordenar, e irán a la izquierda de $a_6 = 1$. Los restantes 6 irán, ordenados, a la derecha de a_6, obteniendo una permutación que cumple la condición del enunciado.

Recíprocamente, dada una permutación del enunciado, podemos sacar los elementos $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, que son obviamente un subconjunto de $\{2,3,4,\ldots,12\}$

Así pues, hemos establecido una biyección entre el conjunto de permutaciones pedidas en el enunciado y los subconjuntos de 5 elementos de $\{2,3,4,\ldots,12\}$, luego su número es

$$C_{11}^{5} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 462$$

Fuente de la solución: Solución oficial en www.artofproblensolving.com

2.1.6
Numeramos los nueve bocadillos $\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3\}$, y las tres bolsas $\{X, Y, Z\}$.

En primer lugar, ponemos tres bocadillos en la bolsa X, de 9 disponibles: $C_9^3 = \binom{9}{3}$

Después, ponemos tres bocadillos en la bolsa Y, de los 6 disponibles: $C_6^3 = \binom{6}{3}$

Para la tercera bolsa solo quedan 3 bocadillos, luego 1 sola posibilidad.

En total: $T = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} \cdot 1 = \frac{9!}{3!6!} \frac{6!}{3!3!} = \frac{9!}{3!3!3!} = 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$

Los casos favorables son los siguientes:
Para la primera caja:

$\{A_1, B_1, C_1\}, \{A_1, B_1, C_2\}, \{A_1, B_1, C_3\},$
$\{A_1, B_2, C_1\}, \{A_1, B_2, C_2\}, \{A_1, B_2, C_3\},$
$\{A_1, B_3, C_1\}, \{A_1, B_3, C_2\}, \{A_1, B_3, C_3\}, ...$

Hasta un total de $3^3 = 27$ posibilidades.

Para la segunda caja, ya solo ya dos A's, dos B's y dos C's luego hay $2^3 = 8$

En total, $F = 3^3 \cdot 2^3$

Y, finalmente, la probabilidad es $P = \frac{F}{T} = \frac{3^3 \cdot 2^3}{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{3^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{9}{70}$

2.1.7
Las diferentes posiciones en las que se pueden colocar las chicas son las siguientes:

X		X		X		
X		X			X	
X		X				X
X			X		X	
X			X			X
X				X		X
	X		X		X	
	X		X			X
	X			X		X
		X		X		X

En total hay 10, y para cada una de ellas, hay $3!$ formas de colocar las chicas y $4!$ formas de colocar los chicos, luego el total es $10 \cdot 3! \cdot 4! = 1440$ formas diferentes.

2.2.1
Llamaremos H_1, H_2, V_1 y V_2 a los saltos respectivos $(x+1, y)$, $(x+2, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y+2)$.

Está claro que la rana ha de realizar cuatro pasos hacia la derecha y cuatro pasos hacia arriba. Estos pasos se pueden realizar en cualquier orden.

Con ocho saltos, la única secuencia posible es

H_1 H_1 H_1 H_1 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

Con siete saltos:

H_2 H_1 H_1 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.
H_1 H_1 H_1 H_1 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_7^{2,4} = \frac{7!}{2!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105 \rightarrow 105 \cdot 2 = 210$$

Con seis saltos:

H_2 H_2 V_1 V_1 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.
H_1 H_1 H_1 H_1 V_2 V_2 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_6^{2,4} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \rightarrow 15 \cdot 2 = 30$$

H_2 H_1 H_1 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 180$$

Con cinco saltos:

H_2 H_2 V_2 V_1 V_1 y todas sus permutaciones posibles.
V_2 V_2 H_2 H_1 H_1 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 30 \rightarrow 30 \cdot 2 = 60$$

Con cuatro saltos:

H_2 H_2 V_2 V_2 y todas sus permutaciones posibles.

$$P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

En total: $70 + 210 + 30 + 180 + 60 + 6 = 556$ secuencias posibles.

2.2.2

Vemos que las variaciones que pueden dar suma 10 son básicamente las tres siguientes:

1111114
1111123
1111222

Junto con todas las permutaciones posibles, es decir, los casos favorables son:

$$F = P_7^{6,1} + P_7^{5,1,1} + P_7^{4,3} = \frac{7!}{6!} + \frac{7!}{5!} + \frac{7!}{4!3!} = 7 + 7 \cdot 6 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 7 + 7 \cdot 6 + 7 \cdot 5 = 7(1 + 6 + 5) =$$

$$= 7 \cdot 12 = 84$$

y la respuesta correcta es (E)

2.2.3

Casos posibles: $T = 6^4$.

El único caso favorable es 1112 y todas sus posibles permutaciones, por lo tanto:

Casos favorables: $F = P_4^{3,1} = \frac{4!}{3!1!} = 4$, y por tanto:

$$P = \frac{F}{T} = \frac{4}{6^4} = \frac{1}{324}$$

2.2.4

Resolveremos este problema mediante Ley de Laplace, y para simplificar este problema aplicaremos recuento mediante permutaciones con repetición.

En total hay $T = P_9^{2,3,4} = \frac{9!}{2!3!4!} = 1260$ casos.

Ahora vamos viendo casos que no sean favorables:

a) Cuando la novena es blanca: Nos quedan ocho posiciones y 1B, 3R, 4N:

$a = P_8^{3,4} = \frac{8!}{3!4!} = 280$ casos.

b) Cuando la octava es blanca y la novena es Roja:

En las 7 posiciones iniciales hay 1B, 2R, 4N: $b = P_7^{2,4} = \frac{7!}{2!4!} = 105$

c) Cuando la octava es blanca y la novena es Negra:

En las 7 posiciones iniciales hay 1B, 3R, 3N: $c = P_7^{3,3} = \frac{7!}{3!3!} = 140$

d) Cuando la séptima es blanca y después hay dos rojas:

En las 6 posiciones iniciales hay 1B,1R, 4N: $d = P_6^{4} = \frac{6!}{4!} = 30$

e) Cuando la séptima es blanca y después hay dos negras:

En las 6 posiciones iniciales hay 1B,3R, 2N: $e = P_6^{3,2} = \frac{6!}{3!2!} = 60$

f) Cuando la sexta es blanca y después hay tres rojas:

En las 5 posiciones iniciales hay 1B,0R, 4N: $f = P_5^{4} = \frac{5!}{4!} = 5$

g) Cuando la sexta es blanca y después hay tres negras:

En las 5 posiciones iniciales hay 1B,3R, 1N: $g = P_5^{3} = \frac{5!}{3!} = 20$

h) Cuando la quinta es blanca y después hay cuatro negras:

En las 4 posiciones iniciales hay 1B,3R, 0N: $h = P_4^{3} = \frac{4!}{3!} = 4$

En total hay

$$a+b+c+d+e+f+g+h = 280+105+140+30+60+5+20+4 = 644$$

Luego el total de casos favorables es $F = 1260 - 644 = 616$

Y la probabilidad es $P = \frac{F}{T} = \frac{616}{1260} = \frac{22}{45}$

Fuente de esta solución: Francisco Javier García Capitán.

2.2.5
Cada paso de la hormiga puede ser → o ↑. El total A de caminos que llevan al punto (5,5) son todas las permutaciones posibles de → → → → ↑ ↑ ↑ ↑, es decir:

$$A = P_8^{4,4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 70$$

Los caminos que llegan a (5,5) y pasan por (3,3) son aquellos que empiezan por cualquier permutación posible de → → ↑ ↑ , y después cualquier permutación posible de → → ↑ ↑

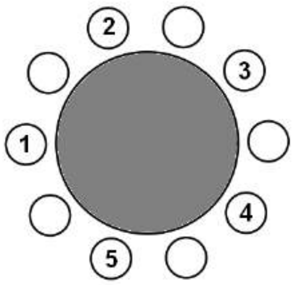
$$B = P_4^{2,2}\cdot P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2} = 6\cdot 6 = 36$$

Así pues, los caminos que llegan a (5,5) sin pasar por (3,3) son $A - B = 70 - 36 = 34$

2.3.1
Podemos imaginarnos que el marido m_k y la esposa e_k forman un solo elemento, digamos la pareja p_k, y por lo tanto las diferentes formas de colocar n parejas alrededor de una mesa son $PC_n = (n-1)!$.
Ahora bien, cada pareja puede estar colocada de dos formas diferentes: El marido a la derecha o a la izquierda de su esposa, luego el total es
$2^n(n-1)!$

2.3.2
Con los 5 chicos y las 5 chicas se pueden formar $5!$ parejas diferentes.
Estas cinco parejas se pueden ordenar alrededor de una mesa de $PC_5 = 4!$ formas diferentes, luego el total es $5!\cdot 4!$

Otra forma de verlo es situar a los chicos primero alrededor de la mesa:



Y hay $4!$ diferentes de hacerlo, y luego colocar las chicas en los puestos intermedios, que hay $5!$ formas diferentes de hacerlo.

2.3.3
Podemos considerar esta pareja como si fueran una misma persona, con lo cual tenemos 5 "personas" alrededor de una fogata. Hay $PC_5 = 4! = 24$ formas diferentes de colocarlos.
Además, para cada una de estas formas, la pareja puede estar colocada de dos maneras diferentes, con el chico a la derecha o con el chico a la izquierda, por lo tanto, en total, hay $24\cdot 2 = 48$ formas diferentes.

2.3.4

Lo primero que debemos observar en este problema es que los asientos están numerados, por lo que no hay equivalencia por rotaciones.

Denotaremos por E_1, E_2, E_3, E_4 los embajadores y por C_1, C_2, C_3, C_4 sus respectivos cuatro consejeros.

Aunque trabajamos con una mesa redonda, ponemos las posiciones en fila para mayor comodidad. Marcamos en gris los asientos pares, los de los embajadores.

En primer lugar, colocamos a los embajadores. Hay que dejar dos sitios marcados como par libres. Luego colocaremos los consejeros alrededor de estos.

Primer caso: Los dos sitios libres están juntos, y los cuatro embajadores juntos entre ellos.
Los huecos pueden ser (2,4), (4,6), (6,8), (8,10), (10,12) o (12,2), y en cada caso hay $4!$ formas de colocar los embajadores, luego $6\cdot 4!$

Para colocar los consejeros:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	E1		E2		E3		E4				
C1		C2		C3		C4					
C1		C2		C3				C4			
C1		C2				C3		C4			
C1				C2		C3		C4			
		C1		C2		C3		C4			

Hay 5 configuraciones diferentes de consejeros. El total es $6\cdot 4!\cdot 5=720$ combinaciones.

Segundo caso. Los asientos están separados por un embajador.
Pueden ser (2,6), (4,8), (6,10), (8,12), (10,2), (12,4) y para cada uno de ellos, hay $4!$ formas de colocar los embajadores. En total: $6\cdot 4!$
Si los dos asientos libres están separados por algún consejero, digamos el "4" y el "8", las posibilidades de colocar los consejeros son las siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	E1				E2				E3		E4
C1				C2				C3		C4	
C1						C2		C3		C4	
		C1		C2				C3		C4	
C4		C1		C2						C3	
C4		C1		C2				C3			
C4		C1				C2				C3	
C4		C1				C2		C3			
		C1		C2				C3		C4	

Hay 8 formas posibles de situar a los consejeros.

Por tanto, el número total de posibilidades es $8\cdot 6\cdot 4!=1152$ configuraciones distintas.

Tercer caso.
Si hay dos embajadores entre los dos huecos, los huecos pueden ser: (2,8), (4,10), (6, 12), y de nuevo hay $4!$ formas diferentes de poner los embajadores. En total: $3 \cdot 4!$
Ahora, para colocar los consejeros, digamos que los huecos son el "4" y el "10":

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	E1				E2		E3				E4
C1				C2				C3		C4	
C1				C2		C3				C4	
C1						C2		C3		C4	
C4		C1		C2		C3					
C4		C1		C2				C3			
C4		C1				C2		C3			
		C1		C2		C3				C4	
		C1		C2				C3		C4	
		C1				C2		C3		C4	

Hay 9 posibilidades distintas. En total $3 \cdot 4! \cdot 9 = 648$

El número total de posibilidades es: $720 + 1152 + 648 = 2520$

Fuente de esta solución: artofproblemsolving.com

2.4.1
Sea n el número de helados que quedan por la tarde. La ecuación que se nos plantea es:
$$C_{16}^2 = C_n^3 \Leftrightarrow \frac{16!}{14!2!} = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Leftrightarrow 8 \cdot 15 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Y vemos que el valor de $n < 16$ que se adapta a esta ecuación es $n = 10$, en efecto:
$10 \cdot 9 \cdot 8 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^3 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
Luego la solución es $16 - 10 = 6$. (E)

2.4.2
Etiquetamos las caras como $1,2,3,4,5_1,5_2$ y vemos que los casos posibles son $T = 6^5$, mientras que los casos favorables son $(1,2,3,4,5_1)$ y $(1,2,3,4,5_2)$, en cualquier orden, es decir $F = 2 \cdot 5!$, por lo tanto:
$$P = \frac{F}{T} = \frac{2 \cdot 5!}{6^5} = \frac{5}{162}$$

2.4.3
El total de casos son $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$

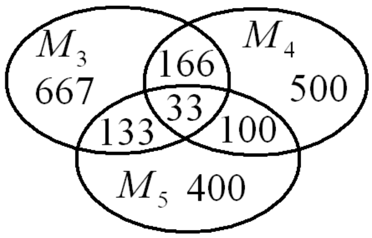
Contemos ahora los casos favorables.
Tomamos una de estas ternas. La ordenamos: $a < b < c$, la media siempre está entre los extremos, luego si se cumple el enunciado, será b:
$$b = \frac{a+c}{2} \Leftrightarrow 2b = a + c \Leftrightarrow c = a - 2b$$
Podemos ir enumerando todos los casos que cumplen esta condición:

1 2 3 , 1 3 5 , 1 4 7 , 1 5 9 , 1 6 11 , 1 7 13 , 2 3 4 , 2 4 6 , 2 5 8
2 6 10 , 3 4 5 , 3 5 7 , 3 6 9 , 4 5 6 , 4 6 8 , 4 7 10 , 5 6 7 , 5 7 9
6 7 8 , 6 8 20 , 7 8 9 , 8 9 10
Hay 20 casos favorables, luego, aplicando la Ley de LaPlace,

$$P = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \quad \text{(A)}$$

3.1.1
Denotamos por M_n los múltiplos de n menores o iguales a 2001.

$$M_3 = \lfloor 2001/3 \rfloor = 667$$
$$M_4 = \lfloor 2001/4 \rfloor = 500$$
$$M_5 = \lfloor 2001/5 \rfloor = 400$$
$$M_3 \cap M_4 = M_{12} = \lfloor 2001/5 \rfloor = 166$$
$$M_4 \cap M_5 = M_{20} = \lfloor 2001/20 \rfloor = 100$$
$$M_3 \cap M_5 = M_{15} = \lfloor 2001/15 \rfloor = 133$$
$$M_3 \cap M_4 \cap M_5 = M_{60} = \lfloor 2001/60 \rfloor = 33$$



Luego el resultado es

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M}_{3o4} = 667 + 500 - 166 = 1001 \\ 133 + 100 - 33 = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 1001 - 200 = 801 \quad \text{(B)}$$

3.1.2
Números divisibles entre 2: $\lfloor 999/2 \rfloor = 499$.
Números divisibles entre 3: $\lfloor 999/3 \rfloor = 333$.
Números divisibles entre 5: $\lfloor 999/5 \rfloor = 199$.
Números divisibles entre 2 y 3: $\lfloor 999/6 \rfloor = 166$.
Números divisibles entre 3 y 5: $\lfloor 999/15 \rfloor = 66$.
Números divisibles entre 2 y 5: $\lfloor 999/10 \rfloor = 99$.
Números divisibles entre 2 , 3 y 5: $\lfloor 999/10 \rfloor = 33$.
Por el Principio de Inclusión-exclusión:
Números divisibles entre 2, 3 o 5: $199 + 499 + 333 - 166 - 99 - 66 + 33 = 733$
Números no divisibles entre 2, 3 o 5: $999 - 733 = 266$
Números compuestos no divisibles entre 2, 3 o 5: $266 - 165 = 101$
Y puesto que el 1 no se considera ni primo ni compuesto, $101 - 1 = 100$ (A)

3.1.3
El número de subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ es 2^8

El número de subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ es 2^5.
El número de subconjuntos de $\{4,5,6,7,8\}$ es 2^5.
Pero su intersección no está vacía. Son todos los 2^2 subconjuntos de $\{4,5\}$ que si no vamos con cuidado los contaremos dos veces, luego el número de subconjuntos buscado es
$$2^8-2^5-2^5+2^2=2^8-2\cdot 2^5+2^2=2^8-2^6+2^2=2^6\left(2^2-1\right)+2^2=64\cdot 3+4=192+4=196$$

3.1.4
Resolvemos este problema como aplicación directa del Principio de Inclusión-Exclusión (PIE). Sea A el conjunto de días múltiples de 3, B el conjunto de días múltiples de 4 y C el conjunto de días múltiples de 5.
$$|A|=\lfloor 365/3\rfloor=121$$
$$|B|=\lfloor 365/4\rfloor=91$$
$$|C|=\lfloor 365/5\rfloor=73$$
El conjunto $A\cap B$ será el conjunto de múltiples de $3\cdot 4=12$:
$$|A\cap B|=\lfloor 365/12\rfloor=30$$
Y de la misma manera:
$$|A\cap C|=\lfloor 365/15\rfloor=24$$
$$|B\cap C|=\lfloor 365/15\rfloor=18$$
El conjunto $A\cap B\cap C$ será el conjunto de múltiples de 60:
$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 365/20\rfloor=6$$

Luego
$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$
$$=121+91+73-30-24-18+6=219$$

Y por tanto los días sin visita son $365-189=146$ (D)

3.1.5
Resolvemos este problema como aplicación directa del Principio de Inclusión-Exclusión (PIE). Sea A el conjunto de días múltiples de 3, B el conjunto de días múltiples de 4 y C el conjunto de días múltiples de 5.
$$|A|=\lfloor 365/3\rfloor=121$$
$$|B|=\lfloor 365/4\rfloor=91$$
$$|C|=\lfloor 365/5\rfloor=73$$
El conjunto $A\cap B$ será el conjunto de múltiples de $3\cdot 4=12$:
$$|A\cap B|=\lfloor 365/12\rfloor=30$$
Y de la misma manera:
$$|A\cap C|=\lfloor 365/15\rfloor=24$$
$$|B\cap C|=\lfloor 365/15\rfloor=18$$
El conjunto $A\cap B\cap C$ será el conjunto de múltiples de 60:
$$|A\cap B\cap C|=\lfloor 365/20\rfloor=6$$

Luego

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 121 + 91 + 73 - 30 - 24 - 18 + 6 = 219$$

Y por tanto los días sin visita son $365 - 189 = 146$ (D)

3.1.6
Aplicaremos el Principio de Inclusión-Exclusión.
Sea A el conjunto de enteros positivos menores de 1000 divisibles entre 2.

$$|A| = \lfloor 999 \div 2 \rfloor = 499$$

Sea B el conjunto de enteros positivos menores de 1000 divisibles entre 3.

$$|B| = \lfloor 999 \div 3 \rfloor = 333$$

Sea C el conjunto de enteros positivos menores de 1000 divisibles entre 5.

$$|C| = \lfloor 999 \div 5 \rfloor = 199$$

Luego

$$|A \cap B| = \lfloor 999 \div 6 \rfloor = 166\ ,\ |A \cap C| = \lfloor 999 \div 10 \rfloor = 99\ ,\ |B \cap C| = \lfloor 999 \div 15 \rfloor = 66\ ,$$
$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 999 \div 30 \rfloor = 33$$

Y por tanto

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \left(|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|\right) + |A \cap B \cap C| =$$
$$= 499 + 333 + 199 - (166 + 66 + 99) + 33 = 733$$

Hay 733 números divisibles entre 2, 3 o 5. En este conjunto están incluidos el propio 2, el 3 y el 5.
Luego hay $999 - 733 = 266$ números no divisibles entre alguno de los tres.
En este conjunto no están incluidos el 2, el 3 y el 5.
A estos les tenemos que quitar los primos (excepto el 2, el 3 y el 5 que ya no están), y también quitar el 1, que no se considera primo pero tampoco compuesto. En total:
$266 - (168 - 3 + 1) = 100$ (A)

3.1.7
Sean m_3, m_4 y m_5 los conjuntos de enteros positivos no superiores a 2001 múltiples de 3, 4 y 5 respectivamente.
Queremos calcular $\left|m_3 \cup m_4 \cap \overline{m_5}\right|$
Aplicaremos el Principio de Inclusión-Exclusión.

$$|m_3| = \lfloor 2001 \div 3 \rfloor = 667$$
$$|m_4| = \lfloor 2001 \div 4 \rfloor = 500$$
$$|m_3 \cap m_5| = \lfloor 2001 \div 15 \rfloor = 133$$
$$|m_4 \cap m_5| = \lfloor 2001 \div 20 \rfloor = 100$$
$$|m_3 \cap m_4| = \lfloor 2001 \div 12 \rfloor = 166$$
$$|m_3 \cap m_4 \cap m_5| = \lfloor 2001 \div 60 \rfloor = 33$$
$$\left|m_3 \cup m_4 \cap \overline{m_5}\right| = |m_3| + |m_4| - |m_3 \cap m_4| - |m_3 \cap m_5| - |m_4 \cap m_5| + |m_3 \cap m_4 \cap m_5| =$$

$$= 667 + 500 - 166 - 133 - 100 + 33 = 801 \quad \text{(B)}$$

4.1.3

a) Basta desarrollar la suma:

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n+1)n + n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

b) Aplicamos el primer apartado y la Propiedad c de los números combinatorios:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k+1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} =$$

$$= \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} + \frac{(n+1)!}{3!(n+1-3)!} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2+n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.1.4

$$100!\binom{-1/2}{100} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2} - 1\right)\left(\frac{-1}{2} - 2\right)\ldots\left(\frac{-1}{2} - 99\right) =$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1-2\cdot 1}{2}\right)\left(\frac{-1-2\cdot 2}{2}\right)\ldots\left(\frac{-1-2\cdot 99}{2}\right) = \frac{1}{2^{100}}(-1)(-1-2\cdot 1)(-1-2\cdot 2)\ldots(-1-2\cdot 99) =$$

$$= \frac{1}{2^{100}}(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)$$

$$100!\binom{1/2}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - 99\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-2\cdot 1}{2}\right)\left(\frac{1-2\cdot 2}{2}\right)\ldots\left(\frac{1-2\cdot 99}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{100}}(1)(1-2\cdot 1)(1-2\cdot 2)\ldots(1-2\cdot 99) = \frac{1}{2^{100}}(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)$$

Y por tanto:

$$\binom{-1/2}{100} \div \binom{1/2}{100} = \frac{\frac{1}{100!\cdot 2^{100}}(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)}{\frac{1}{100!\cdot 2^{100}}(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)} = \frac{(-1)(-3)(-5)(-7)\ldots(-199)}{(-1)(-3)(-5)\ldots(-197)} =$$

$$= -199$$

4.1.5

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n}$$

Sumamos dos veces los mismos términos, y recordando que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

$$0\binom{n}{0}+1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}+$$
$$+n\binom{n}{n}+(n-1)\binom{n}{n-1}+\ldots+2\binom{n}{2}+1\binom{n}{1}+0\binom{n}{0}=$$
$$=n\binom{n}{0}+n\binom{n}{1}+n\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}=n\,2^n$$

Así pues, la suma será igual a $\frac{n2^n}{2}=n2^{n-1}$

4.2.2

Aplicamos el Teorema del Binomio:

$$(x+y+z)^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}\binom{2006}{k}x^k(y+z)^{2006-k}$$
$$(x-y-z)^{2006}=(x-(y+z))^{2006}=\sum_{k=0}^{2006}\binom{2006}{k}(-1)^k x^k(y+z)^{2006-k}$$

Y vemos que se cancelarán todos los términos $k=1,3,5,7...,2005$. Luego

$$(x+y+z)^{2006}+(x-y-z)^{2006}=\sum_{k=0}^{1003}\binom{2006}{2k}x^{2k}(y+z)^{2006-2k}$$

De nuevo aplicamos el Teorema del Binomio:

$$(y+z)^{2006-2k}=\sum_{j=0}^{2006-2k}\binom{2006-2k}{j}y^j z^{2006-2k-j}$$

Esta expresión consta de $2006-2k+1$ elementos, el número de elementos de la expresión del enunciado es:

$$\sum_{k=0}^{1003}2006-2k+1=\sum_{k=0}^{1003}2007-2k=\sum_{k=0}^{1003}2007-\sum_{k=0}^{1003}2k=2007\sum_{k=0}^{1003}1-2\sum_{k=0}^{1003}k=$$
$$=2007\cdot 1004-2\frac{1003\cdot 1004}{2}=2007\cdot 1004-1003\cdot 1004=1004^2=1008016 \qquad (D)$$

Observación: En las soluciones oficiales se presenta una solución alternativa utilizando el Teorema Multinominal.

4.3.2

La resolución de este problema se basa en la identidad 4.3.1:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Y en la siguiente identidad:

$$3\cdot 5\cdot 7...(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}$$

Esta última se demuestra fácilmente:

$$(2n)!=\prod_{k=1}^{2n} k=\prod_{k=1}^{n}(2k)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=2^n n!\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\Rightarrow\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Está claro que el número total de combinaciones posibles ET es 2^{2n}.
Determinemos la cantidad de estados "buenos". Para cada $0\le k\le n$, sea C_k el número de combinaciones de k bombillas encendidas en una fila de n bombillas. Se puede interpretar como el número de permutaciones de n elementos con k elementos iguales de un tipo y (n-k) elementos iguales de otro tipo:

$$C_k=P_n^{k,n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$$

Por cada combinación de n bombillas con k encendidas en A, el número total de combinaciones con las mismas bombillas en B será $C_k\cdot C_k=C_k^2=\binom{n}{k}^2$, luego el número total de estados buenos será

$$EB=\sum_{k=0}^{n}C_k^2=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{n!^2}$$

Luego

$$\frac{EB}{ET}=\frac{(2n)!}{2^{2n}\ n!^2}=\frac{(2n)!/(2^n n!)}{2^n\ n!}=\frac{3\cdot5\cdot7...(2n-1)}{2^n\ n!}$$

tal y como queríamos ver.

4.3.3
Primera versión.

En primer lugar, teniendo en cuenta que $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, deducimos fácilmente que

$$\binom{\binom{k}{2}}{2}=\frac{1}{2}\binom{k}{2}\left(\binom{k}{2}-1\right)=\frac{1}{2}\frac{k(k-1)}{2}\left(\frac{k(k-1)}{2}-1\right)=\frac{1}{8}k(k-1)\big(k(k-1)-2\big)$$

Luego

$$\binom{\binom{3}{2}}{2}+\binom{\binom{4}{2}}{2}+...+\binom{\binom{40}{2}}{2}=\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{40}k(k-1)\big[k(k-1)-2\big]=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{40}k(k-1)\big[(k-2)(k-3)+4(k-2)\big]=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{40}\big[k(k-1)(k-2)(k-3)+4k(k-1)(k-2)\big]=$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{40}k(k-1)(k-2)(k-3)+\frac{1}{8}\sum_{k=3}^{40}4k(k-1)(k-2)=$$

$$=\frac{4!}{8}\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{4}+\frac{4\cdot 3!}{8}\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{3}=3\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{4}+3\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{3}=3\left(\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{4}+\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{3}\right)=*$$

Ahora aplicamos la fórmula

$$\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{k}=\binom{m+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}$$

En nuestro caso:

$$\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{4}=\binom{40+1}{4+1}-\binom{3}{4+1}=\binom{41}{5}-\binom{3}{5}$$

$$\sum_{k=3}^{40}\binom{k}{3}=\binom{40+1}{3+1}-\binom{3}{3+1}=\binom{41}{4}-\binom{3}{4}$$

Y por tanto:

$$(*)=3\left[\binom{41}{5}-\binom{3}{5}+\binom{41}{4}-\binom{3}{4}\right]=3\left[\binom{41}{5}+\binom{41}{4}\right]$$

$$=3\left[\frac{41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{5!}+\frac{41\cdot 40\cdot 39\cdot 38}{4!}\right]=$$

$$=\frac{3\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38}{5!}\cdot(37+5)=\frac{3\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 42}{5!}=$$

$$=\frac{3\cdot 41\cdot 40\cdot 39\cdot 38\cdot 42}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=3\cdot 41\cdot 13\cdot 38\cdot 42$$

$$=38\cdot 39\cdot 41\cdot 42=$$

$$=(40-2)(40-1)(40+1)(40+2)=(40^2-2^2)(40^2-1^2)=$$

$$=(40^2-4)(40^2-1)=40^4-5\cdot 40^2+4\equiv 4\pmod{1000}$$

Segunda versión.
Como en la versión anterior,

$$\binom{\binom{k}{2}}{2}=\ldots=\frac{1}{8}k(k-1)\big(k(k-1)-2\big)=\frac{1}{8}k(k-1)\big(k^2-k-2\big)=$$

$$=\frac{1}{8}(k+1)k(k-1)(k-2)=\frac{(k+1)!}{8(k-3)!}=3\frac{(k+1)!}{4!(k-3)!}=3\binom{k+1}{4}$$

Ahora aplicamos la identidad "**Hockey-Stick**": $\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1}$

$$\binom{\binom{3}{2}}{2}+\binom{\binom{4}{2}}{2}+\dots+\binom{\binom{40}{2}}{2}=\sum_{k=3}^{40}3\binom{k+1}{4}=3\sum_{k=4}^{41}\binom{k}{4}=3\cdot\binom{42}{5}=$$
$$=42\cdot 41\cdot 39\cdot 38=\left(40^2-2^2\right)\left(40^2-1^2\right)\equiv 4\ (\text{mod } 1000)$$

Fuente de estas soluciones: www.artofproblemsolving.com

5.1.1

El problema equivale a encontrar el número de subconjuntos de k elementos de $P_k=\{k,k+1,...,15\}$ sin contener números consecutivos, es decir:

Con un elemento: $n=15$, $k=1$, $\binom{15-1+1}{1}=\binom{15}{1}=15$

Con dos elementos: $n=14$, $k=2$, $\binom{14-2+1}{2}=\binom{13}{2}=78$

Con tres elementos: $n=13$, $k=3$, $\binom{13-3+1}{3}=\binom{11}{3}=165$

Con cuatro elementos: $n=12$, $k=4$, $\binom{12-4+1}{4}=\binom{9}{4}=126$

Con cinco elementos: $n=11$, $k=5$, $\binom{11-5+1}{5}=\binom{7}{5}=21$

Vemos que ya no se pueden formar subconjuntos de seis elementos en $\{6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$, ni subconjuntos mayores.

Por lo tanto la solución es $15+78+165+126+21=405$ (E)

5.1.2

Dado un subconjunto espaciado $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de $\{1,2,3,...,12\}$, que supondremos ordenado: $a_1<a_2<...<a_n$, vemos que

$$\left.\begin{array}{l} a_2>a_1+2 \\ a_3>a_2+2 \\ \dots \\ a_n>a_{n-1}+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2>a_1+2 \\ a_3>a_1+6 \\ a_4>a_1+8 \\ \dots \end{array}$$

La función $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\rightarrow\{a_1, a_2-2, a_3-4, a_4-6\}$

Transforma todo subconjunto espaciado de cuatro elementos en un subconjunto de cuatro elementos de $\{1,2,3,4,5,6\}$

Luego $C_6^4=\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$

La función $\{a_1, a_2, a_3\}\rightarrow\{a_1, a_2-2, a_3-4\}$

Transforma todo subconjunto espaciado de tres elementos en un subconjunto de tres elementos de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Luego $C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

La función $\{ a_1 , a_2 \} \to \{ a_1 , a_2 - 2 \}$
Transforma todo subconjunto espaciado de dos elementos en un subconjunto de dos elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Luego $C_{10}^2 = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$

Finalmente, hay 12 subconjuntos espaciados de 1 solo elemento, y contando el conjunto vacío llegamos a un total de $15 + 56 + 45 + 12 + 1 = 129$ subconjuntos (E)

Nota: En las soluciones oficiales ("The Contest Problem Book IX", pág 187) tenemos un interesante desarrollo recursivo de la fórmula del cardinal de los conjuntos espaciados.

5.2.1
Observamos la distribución de los tres grupos:

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
0B 5C	0C 5A	5B
1B 4C	1C 4A	4B 1A
2B 3C	2C 3A	3B 2A
3B 2C	3C 2A	2B 3A
4B 1C	4C 1A	1B 4A
5B 0C	5C	5A

Vemos que todo depende del número k de letras "B" que haya en el primer grupo.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
k B y (5-k) C	k C y (5-k) A	(5-k) B y k A

En cada fila, puedo, en primer lugar, escoger k cartas "B" de un total de 5: $\binom{5}{k}$

Luego, puedo escoger 5-k cartas "C" de un total de 5: $\binom{5}{5-k} = \binom{5}{k}$

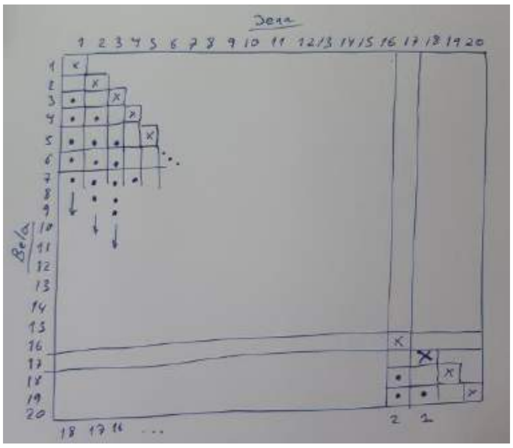
Y en el segundo grupo, las cartas "C" son las k que quedan, luego únicas, y puedo escoger un grupo de 5-k cartas "A" de un total de 5: $\binom{5}{5-k} = \binom{5}{k}$

Por lo tanto, en cada fila, hay un total de $\binom{5}{k} \cdot \binom{5}{5-k} \cdot \binom{5}{5-k} = \binom{5}{k}^3$

Así pues, el total de posibilidades es $\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}^3$

5.3.1

Hacemos una tabla de casos. En columnas, la bola de Jenn, en filas, la bola de Bela:



El número total de casos es $20\cdot 19$ (pues descartamos la diagonal), y los casos favorables son $18+17+16+15+...+2+1=\frac{18\cdot 19}{2}$

Luego la probabilidad es $P=\frac{18\cdot 19/2}{20\cdot 19}=\frac{18/2}{20}=\frac{9}{20}$

5.4.1

$20^9=(2^2 5)^9=2^{18}5^9$

Los divisores de 20^9 son todos los números de la forma $2^b 5^c$ con $0\le b\le 18$ y $0\le c\le 9$

Luego

$a_i=2^{b_i}5^{c_i}$ con $0\le b_i\le 18$, $0\le c_i\le 9$, $0\le i\le 3$

La divisibilidad se convierte en un problema de orden: $a_i \mid a_j \Leftrightarrow \begin{cases} b_i\le b_j \\ c_i\le c_j \end{cases}$

Luego nuestro problema se reduce a determinar la probabilidad de que seis números $0\le b_1,b_2,b_3\le 18$ y $0\le c_1,c_2,c_3\le 9$ cumplan $b_1\le b_2\le b_3$ y $c_1\le c_2\le c_3$.

El total de casos es $T=19^3\cdot 10^3$.

Contemos ahora el total de casos favorables. Aplicaremos la Proposición 5.5:

El número de casos de tomar $0\le b_1\le b_2\le b_3\le 18$ es $\binom{21}{3}=1330$

El número de casos de tomar $0\le c_1\le c_2\le c_3\le 9$ es $\binom{12}{3}=220$

Y por tanto, los casos favorables son: $F=1330\cdot 220$, y la probabilidad es:

$$P=\frac{F}{T}=\frac{1330\cdot 220}{19^3\cdot 10^3}=\frac{77}{1805}$$

5.5.1

Primera versión.

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$-9 = P(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = -a + b - c + d = b + d - (a + c) \Leftrightarrow$

$a + c - (b + d) = 9$

a) $a + c = 9$, $b + d = 0$

$a + c = 9 \Rightarrow a = 9, c = 0$; $a = 8, c = 1$; $a = 7, c = 2$;... ; $a = 0, c = 9 \rightarrow$ 10 casos

$b + d = 0 \Rightarrow b = 0, d = 0 \rightarrow$ 1 caso.

Total: $10 \cdot 1 = 10$ casos.

b) $a + c = 10$, $b + d = 1$

$a + c = 10 \Rightarrow a = 9, c = 1$; $a = 8, c = 2$; $a = 7, c = 3$;... ; $a = 1, c = 9 \rightarrow$ 9 casos

$b + d = 1 \Rightarrow b = 1, d = 0$; $b = 0, d = 1 \rightarrow$ 2 casos.

Total: $9 \cdot 2 = 18$ casos.

c) $a + c = 11$, $b + d = 2$

$a + c = 11 \Rightarrow a = 9, c = 2$; $a = 8, c = 3$; $a = 7, c = 4$;... ; $a = 2, c = 9 \rightarrow$ 8 casos

$b + d = 2 \Rightarrow b = 2, d = 0$; $b = 1, d = 1$; $b = 0, d = 2 \rightarrow$ 3 casos.

Total: $8 \cdot 3 = 24$ casos.

d) $a + c = 12$, $b + d = 3$

$a + c = 12 \Rightarrow a = 9, c = 3$; $a = 8, c = 4$; $a = 7, c = 5$;... ; $a = 3, c = 9 \rightarrow$ 7 casos

$b + d = 3 \Rightarrow b = 3, d = 0$; $b = 2, d = 1$; $b = 1, d = 2$; $b = 0, d = 3 \rightarrow$ 4 casos.

Total: $7 \cdot 4 = 28$ casos.

Y así hasta:

$a + c = 0$, $b + d = 9$ que es igual que el caso a), con $1 \cdot 10 = 10$ casos.

Así pues, el número de casos es:

$$10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10 =$$

$$= 2(10 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5) = 2 \cdot 110 = 220 \quad (D)$$

Segunda versión.

Llegando a $-a - c + b + d = -9$, haciendo el cambio de variable $-a = a' - 9$ y $-c = c' - 9$, tenemos la ecuación

$a' + c' + b + d = 9$ con $0 \le a', b, c', d \le 9$

Y podemos aplicar "Barras y estrellas" (CO/5.7b), para obtener un total de

$$\binom{9 + 4 - 1}{9} = \binom{12}{9} = \frac{12!}{9!(12 - 9)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 4 \cdot 11 \cdot 5 = 220$$

5.6.1

Primera versión: Mediante recursión pura.

Vamos a resolver este problema de forma recursiva, rellenando, paso a paso, una tabla en la que las columnas son los puntos finales, y las filas son el número de pasos. En cada casilla pondremos el número de caminos que hay para llegar al punto final (columna) mediante caminos de n pasos (fila), siempre saliendo del punto A.

Por ejemplo, en la primera fila hay un 1 en B y en J, porque con caminos de 1 paso, y saliendo de A, solo podemos llegar a B y a J, y de una sola manera.
En la segunda fila, hay un 1 en la columna A indicando que hay un camino posible de longitud 2 desde A, que es "AJA", un camino posible para llegar a C, que es "ABC", un camino posible para llegar a F, que es "AJF", y un camino posible para llegar a I, que es "ABI".
Vemos claramente la pauta:

$$A_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ B_n = A_{n-1} + I_{n-1},\ C_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ D_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ E_n = D_{n-1} + F_{n-1}$$
$$F_n = E_{n-1} + J_{n-1},\ G_n = D_{n-1} + F_{n-1},\ H_n = C_{n-1} + G_{n-1},\ I_n = B_{n-1} + H_{n-1},\ J_n = A_{n-1} + I_{n-1}$$

n	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2
...										
14										
15										

Está claro que este problema, así planteado, requiere un trabajo más propio de una hoja de cálculo que de un humano:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	TOTAL
3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2
4	2	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	4
5	3	0	2	0	1	1	0	1	1	0	2	8
6	4	3	0	3	1	1	3	1	1	3	0	16
7	5	1	6	1	4	4	1	4	4	1	6	32
8	6	10	2	10	5	5	10	5	5	10	2	64
9	7	7	20	7	15	15	7	15	15	7	20	128
10	8	35	14	35	22	22	35	22	22	35	14	256
11	9	36	70	36	57	57	36	57	57	36	70	512
12	10	127	72	127	93	93	127	93	93	127	72	1024
13	11	165	254	165	220	220	165	220	220	165	254	2048
14	12	474	330	474	385	385	474	385	385	474	330	4096
15	13	715	948	715	859	859	715	859	859	715	948	8192
16	14	1807	1430	1807	1574	1574	1807	1574	1574	1807	1430	16384
17	15	**3004**	3614	3004	3381	3381	3004	3381	3381	3004	3614	32768
18												

En todo caso llegamos a $A_{15} = 3004$ y por tanto la respuesta correcta es $3004 \bmod 1000 = 4$.

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.
Observamos un dato interesante: En cada paso, el gusano tiene siempre dos caminos posibles para continuar, luego el número total de caminos es 2^n:

$$S_n = A_n + B_n + C_n + D_n + E_n + G_n + H_n + I_n = 2^n$$

Con este dato podemos optimizar el proceso para llegar a A_{15}. En efecto:

$$A_n = E_{n-1} + J_{n-1} = D_{n-2} + F_{n-2} + A_{n-2} + I_{n-2} =$$
$$= C_{n-3} + G_{n-3} + E_{n-3} + J_{n-3} + A_{n-2} + B_{n-3} + H_{n-3} =$$

$$= A_{n-2} + B_{n-3} + C_{n-3} + D_{n-3} + E_{n-3} + F_{n-3} + G_{n-3} + H_{n-3} + I_{n-3} + J_{n-3} - D_{n-3} - F_{n-3} - I_{n-3} =$$
$$= S_{n-3} - \left(D_{n-3} + F_{n-3} + I_{n-3}\right) =$$
$$= S_{n-3} - \left(E_{n-2} + I_{n-3}\right) =$$
$$= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - J_{n-2} + I_{n-3}\right) =$$
$$= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - \left(A_{n-3} + I_{n-3}\right) + I_{n-3}\right) =$$
$$= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - A_{n-3} - I_{n-3} + I_{n-3}\right) =$$
$$= S_{n-3} - \left(A_{n-1} - A_{n-3}\right) =$$
$$= 2^{n-3} - A_{n-1} + A_{n-3}$$

Calculando directamente los primeros valores:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 0,\ A_4 = 3$$

Y utilizando la fórmula recursiva anterior se llega a $A_{15} = 3004$.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_10
https://youtu.be/JD51G1wUKEs

5.6.2
Primera versión: Mediante recursión pura.

Como en el problema anterior, sea P_k^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice P_k , y sean E^n y S^n el número de secuencias de n saltos que empiezan en S y acaban en el vértice E y en el vértice S, respectivamente.

Está claro que:

$$S^n = P_1^{n-1} + P_5^{n-1},\ P_1^n = S^{n-1} + P_2^{n-1},\ P_2^n = P_1^{n-1} + P_3^{n-1},\ P_3^n = P_2^{n-1},\ E^n = P_3^{n-1} + P_4^{n-1},$$
$$P_4^n = P_5^{n-1},\ P_5^n = P_4^{n-1} + S^{n-1},$$

Y se nos pide calcular $E^1 + E^2 + ... + E^{12}$.

n	S^n	P_1^n	P_2^n	P_3^n	E^n	P_4^n	P_5^n
1	0	1	0	0	0	0	1
2	2	0	1	0	0	1	0
3							
...							
12							

Igual que con el problema anterior, el problema, así planteado, es tarea propia de una hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		S	P1	P2	P3	E	P4	P5
3	1	0	1	0	0	0	0	1
4	2	2	0	1	0	0	1	0
5	3	0	3	0	1	1	0	3
6	4	6	0	4	0	1	3	0
7	5	0	10	0	4	3	0	9
8	6	19	0	14	0	4	9	0
9	7	0	33	0	14	9	0	28
10	8	61	0	47	0	14	28	0
11	9	0	108	0	47	28	0	89
12	10	197	0	155	0	47	89	0
13	11	0	352	0	155	89	0	286
14	12	638	0	507	0	155	286	0
15								

Y la respuesta al problema es: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155=351$

Segunda versión: Determinando una fórmula recursiva.

Para determinar la fórmula recursiva de E^n vamos a utilizar la siguiente propiedad:

$$E^{n-1}-E^{n-3}=P_3^{n-2}+P_4^{n-2}-\left(P_3^{n-4}+P_4^{n-4}\right)=P_2^{n-3}+P_5^{n-3}-P_3^{n-4}+P_4^{n-4}=$$
$$=P_1^{n-4}+P_3^{n-4}+P_4^{n-4}+S^{n-4}-P_3^{n-4}+P_4^{n-4}=P_1^{n-4}+S^{n-4}$$

Y ahora vamos a buscar la fórmula recursiva:

$$E^n=P_3^{n-1}+P_4^{n-1}=$$
$$=P_2^{n-2}+P_5^{n-2}=$$
$$=P_1^{n-3}+P_3^{n-3}+P_4^{n-3}+S^{n-3}=$$
$$=E^{n-2}+P_1^{n-3}+S^{n-3}\Rightarrow E^n-E^{n-2}=S^{n-3}+P_1^{n-3}$$

Por otro lado:

$$S^{n-3}+P_1^{n-3}=$$
$$=P_1^{n-4}+P_5^{n-4}+S^{n-4}+P_2^{n-4}=$$
$$=S^{n-4}+P_1^{n-4}+P_5^{n-4}+P_2^{n-4}=$$
$$=E^{n-1}-E^{n-3}+P_5^{n-4}+P_2^{n-4}=$$
$$=E^{n-1}-E^{n-3}+P_4^{n-3}+P_3^{n-3}=$$
$$=E^{n-1}-E^{n-3}+E^{n-2}$$

En donde hemos aplicado la propiedad demostrada anteriormente. Así pues:

$$E^n-E^{n-2}=E^{n-1}-E^{n-3}+E^{n-2}\Rightarrow$$
$$E^n=E^{n-1}-E^{n-3}+2E^{n-2}$$

Ahora calculamos directamente los primeros términos de la sucesión:

$E^0=0$, $E^1=0$, $E^2=0$, $E^3=1$, $E^4=1$

Y mediante la fórmula recursiva vamos determinando los siguientes términos:

$E^5=3$, $E^6=4$, $E^7=9$, $E^8=14$, $E^9=28$, $E^{10}=47$, $E^{11}=89$, $E^{12}=155$

Y, finalmente: $0+0+1+1+3+4+9+14+28+47+89+155=351$.

Fuentes:

https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_I_Problems/Problem_14
https://youtu.be/11utulhU590

6.1.1
Ver las soluciones oficiales (OMEC pág. 426)

6.1.2
Existe una estrategia para cualquier valor de n y de k. Numeramos las puertas en orden, de izquierda a derecha como $1, 2, ..., k$. Luego escapar del castillo equivale a encontrar la combinación correcta

$$(p_1, p_2, ..., p_n) \text{ con } 1 \leq p_i \leq k$$

Es decir, debemos probar todas las variaciones posibles de los k números tomados en cadenas de longitud n, pero garantizando que empezamos en la habitación 1, puesto que al probar una combinación, podemos salir del castillo pero también podemos acabar en cualquiera de sus habitaciones.

Por tanto, nuestro problema se reduce a encontrar una combinación que garantize que nos situamos en la habitación 1, saliendo de una habitación cualquiera, una especie de “reset”.

La clave está en ver que si $1 \leq q_1 \leq k$ es la puerta que lleva de la habitación 1 a la habitación 2, entonces, tomando cualquier $p \neq q_1$, la cadena de longitud n

$$(p, p, ..., p)$$

Nos deja seguro en la habitación 1 independientemente de donde estemos (o bien nos saca del castillo).
En efecto, aplicando la cadena anterior, independientemente de donde estemos, o bien salimos del castillo, o bien nos situamos en la habitación 1, de donde ya no saldremos, pues $p \neq q_1$.

Asi pues, supongamos que queremos probar la combinación $(p_1, p_2, ..., p_n)$.
Tomamos un $p \neq p_1$ y aplicamos previamente la combinación $(p, p, ..., p)$.
Si $p \neq q_1$, entonces la combinación $(p, p, ..., p)$ nos dejará seguro en la habitación 1 y ahora probamos la combinación $(p_1, p_2, ..., p_n)$, que nos puede o no sacar del castillo.
Si $p = q_1$, puesto que entonces $p_1 \neq q_1$, da igual porque la combinación a probar no sería la correcta.

Fuente de esta solución: Soluciones oficiales.

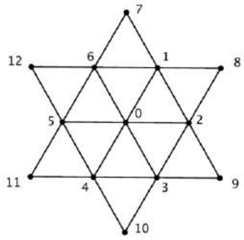
6.1.3
Tres movimientos: C C C C C > + + + C C > + C C + C > + + + + + (B)

6.1.4
Sí es posible cambiar todos los números a 1. Para ello observamos que un grupo de cuatro ceros los podemos pasar a cuatro unos de la forma siguiente:
Partimos de 0000.
Seleccionamos el segundo, con lo que se convierte en 1010
Ahora seleccionamos el tercero, con lo que se convierte en 1111.

Vemos que $2021 = 505 \cdot 4 + 1$, luego agrupando todos los 2020 ceros en grupos de cuatro ceros, podemos aplicar en cada grupo el método anterior para convertir, uno por uno, cada grupo de cuatro ceros en cuatro unos, conviertiendo así todos los números en unos.

Si hubiéramos empezado con 2021 ceros no sería posible, pues basta ver que esta operación nunca cambia la paridad de la cantidad de unos que hay en el círculo.
En efecto, de 000 pasa a 101, de 001 pasa a 100, de 010 a 111, de 011 a 110, de 100 a 001, de 101 a 000, de 110 a 011, y de 111 a 010, es decir, si antes la cantidad de unos era par, después seguirá siendo par, y si era impar igualmente seguirá siendo impar.

6.1.5
Para resolver este problema hay que tener en cuenta que, además de los triángulos visibles pequeños, por ejemplo 6-7-1, y los no tan pequeños, como 5-7-2, también forman triángulos equiláteros vértices como por ejemplo 5-1-3 o 7 – 0 – 8.



Sin pérdida de generalidad podemos suponer que pintamos el vértice 0 de verde.
Vamos a resolver este problema viendo que no hay forma de pintar los vértices 5 y 2.
a) Supongamos que ambos son verdes.
1 A, 3 A, 4 A, 6 A, 8 V, 9 V, 11 V, 12 V, 7 A, y nos queda 7-6-1 A A A.

b) Supongamos que ambos son azules.
7 V, 10 V, 8 A, 9 A, 11 A, 12 A, 6 V,1 A, y nos queda 1-2-8 AAA

c) Supongamos que 2 es verde y 5 es azul.
1 A, 3A, y nos queda 1-3-5 AAA.

d) Por simetría, con el caso 2 azul y 5 verde llegaríamos también a una combinación prohibida.

6.1.6
Una sucesión de cambios minimalista sería la siguiente:

3	7	11	18	22	0
3	11	7	18	22	+1
3	11	18	7	22	+2
3	11	18	22	7	+3
3	11	22	18	7	+4
11	3	22	18	7	+5
11	22	3	18	7	+6

Y la respuesta correcta es 6 (D).

6.1.7
Sea este conjunto $I = \{ I_1, I_2, ..., I_n \}$, con $I_k = [a_k , b_k]$.

Para que I sea un recubrimiento de $[0,50]$, existirá al menos un intervalo $I_k = [\ a_k\ , b_k\ ]$ para el cual $a_k \in [k, k+1)$ para todo $0 \le k < 50$
Basta con tomar los intervalos asociados a $k = 0, 2, 4, 8, 10\ , \ldots, 48$ para obtener un conjunto de 25 intervalos disjuntos.

6.1.8
Vamos a llamar a los colores V verde, R rojo, A amarillo y B azul.
Veamos como empieza la secuencia. Está claro que la posición 2 va V, y en las cinco primeras tiene que haber una R y una A, una detrás de otra.

Vemos también que las cinco primeras posiciones determinan completamente la secuencia. Luego, si la 20 tiene que ser V, la 5 lo tiene que ser también.

Puesto que, además, debemos poner un par RA seguidas en este orden, el único hueco que queda es 3R, 4A, y por tanto 1 B:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	V	R	A	V	B	V	R	A	V

Y vemos que esta secuencia satisface todas las condiciones del enunciado.
La bola 20 será V y la bola 202=40·5+2 será también V.
La bola 2021=404·5+1 será azul (D)

6.1.9
Vamos a construir la sucesión minimal que satisface la condición del enunciado, es decir, aquella que contiene las monedas de menor peso posible.
Vemos que la condición del enunciado afecta a cualquier grupo de cuatro monedas. Por lo tanto, empezaremos por un grupo de cuatro.Las supondremos siempre ordenadas de menor a mayor peso.
La combinación 1 – 2 – 3 – 4 no es aceptable porque 4 + 1 = 2 + 3, luego la moneda más pesada deberá ser como mínimo de 5 gramos.
La combinación 2 – 3 – 4 – 5 no es aceptable porque 5 + 2 = 3 + 4
La combinación 1 – 2 – 4 – 5 tampoco es aceptable porque 1 + 5 = 2 + 4.
La única combinación aceptable es 1 – 2 – 3 – 5 .
Ahora vamos a añadir una quinta moneda m_5.
Se debe cumplir $m_5 + 1 > 3 + 5 = 8 \Rightarrow m_5 > 7$. Vemos que la combinación 1 – 2 – 3 – 5 – 8 es aceptable.
En general vemos que para añadir una nueva moneda, es suficiente que se cumpla

$$m_k + 1 > m_{k-2} + m_{k-1} \Leftrightarrow m_k > m_{k-2} + m_{k-1} - 1$$

Y que tomando $m_k = m_{k-2} + m_{k-1}$, se cumple la condición del enunciado. Así pues, vemos que las monedas van siguiendo la sucesión de Fibonacci:

1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 ...

Y el valor octavo de la sucesión minimal es 34 (C).

6.1.10
Lo primero que observamos es que en este problema no importa el valor de los números, solo si son pares P o impares I.

Para que tres números consecutivos generen una suma impar se debe dar una de estas cuatro combinaciones: PPI, PIP, IPP, III.

Jugando con las diferentes combinaciones vemos que la forma óptima para colocar los 500 “P” y los 500 “I” para obtener la mayor cantidad de sumas impares de tres nombres consecutivos es

I P P I P P I P P I P P I .... I P P I I I I I I I I I I I I

En cualquier ordenación que sea compatible con esta vemos que todas las 998 sumas de tres números consecutivos dará impar, exceptuando solo una, la que aparece en la parte central como “ P I I “. Luego serán 997 de las 998 posibles (A).

6.1.11
a) Está claro que quien tiene una tableta 1×1 pierde.
Cualquiera que tenga una tableta 1×n , n>1, siempre gana, pues basta romperla “por la punta”, es decir, obtener un trozo 1×1 y dárselo a su contrincante.

Cualquiera que tenga una tableta 2×2 pierde. En efecto, la rompa como la rompa, siempre tendrá que dar a su contrincante un trozo 1×2, y por tanto el contrincante tendrá una tableta ganadora, como hemos explicado antes.
Cualquiera que tenga una tableta 2×n, n>2, siempre gana. En efecto, la puede romper en un trozo 2×2 y dárselo a su contrincante, que ya hemos visto que es un trozo perdedor.

Cualquiera que tenga una tableta 3×3 pierde, pues la rompa como la rompa tiempre tendrá que dar a su contrincante una tableta no cuadrada, de dimensiones menores, que, como hemos visto, siempre será una tableta ganadora.

Cualquiera que tenga una tableta 3×n, n>3, siempre gana. En efecto, la puede romper en un trozo 3×3 y dárselo a su contrincante, que ya hemos visto que es un trozo perdedor.

De esta forma vemos que tener un trozo n×n, es decir, cuadrado, es siempre un trozo perdedor. Mientras que tener un trozo n×m, con m≠n es siempre un trozo ganador. Esto se podría demostrar de forma rigurosa por inducción.

Así pues, Ana siempre perderá si m=n, y siempre ganará si m≠n.

b) Ver soluciones oficiales (Compendium OMEC, página 441)

6.2.1
Supongamos que los jugadores son Sam = 1, Segundo jugador = 2, y James = 3.
Sea A_i, B_i, C_i el número de palabras de tres, uno y cero puntos, respectivamente, del jugador i.
Por otro lado, está claro que $C_1 = C_2 = C_3$, y que $A_i = B_i = C_i = 10$

Está claro que $3 \cdot A_1 + 1 \cdot B_1 + 0 \cdot C_1 = 19$, y las únicas posibilidades son

a) $A_1 = 6, B_1 = 1, C_1 = 3$ b) $A_1 = 5, B_1 = 4, C_1 = 1$

Veamos la primera opción:

a) $A_1 = 6, B_1 = 1, C_1 = 3$.

Luego $C_2 = C_3 = 3$, y además, $B_1 = 1$ implica que $B_2 \geq 1$ o $B_3 \geq 1$.
Si el jugador 2 tiene mayor puntución que el jugador 1, la única posibilidad que tenemos es:
$A_2 = 7, B_2 = 0, C_2 = 3 \to 21$
Porque la opción $A_2 = 6, B_2 = 1, C_2 = 3 \to 19$ queda descartada por ser igual al jugador 1.
Luego para la tercera tendremos que solo nos queda

$A_3 = 6, B_3 = 1, C_3 = 3 \to 19$ que queda descartada porque no cumple las condiciones, ya que es igual que la puntuación del jugador 1 y además no es la máxima.

b) $A_1 = 5, B_1 = 4, C_1 = 1$.
Luego $C_2 = C_3 = 1$, y además, $B_1 = 4$ implica que $B_2 \geq 4$ o $B_3 \geq 4$.
Supongamos que $B_2 \geq 4$. Las opciones son

$A_2 = 5, B_2 = 4, C_2 = 1 \to 19$ descartada.

$A_2 = 4, B_2 = 5, C_2 = 1 \to 17$ descartada.

El resto de opciones queda descartadas.
Supongamos que $B_3 \geq 4$
Luego las opciones que quedan para el jugador 2 son
$A_2 = 6, B_2 = 3, C_2 = 1 \to 21$ y por tanto

$A_3 = 5, B_3 = 4, C_3 = 1 \to 19$ descartada

$A_3 = 7, B_3 = 2, C_3 = 1 \to 23$ no aceptable en B

$A_3 = 8, B_3 = 1, C_3 = 1 \to 25$ aceptable.

Como el enunciado supone que la solución es única, no hay necesidad de seguir. La respuesta correcta es 25 (E).

6.2.2
En primer lugar, vemos que el número de partidas jugadas es 10+15+17=42. Puesto que en cada ronda juegan dos personas, el número de partidas será 42/2=21.
La clave para resolver este problema está en observar que Alicia ha jugado un número significativamente pequeño de partidas, diez en total. La única forma de jugar tan pocas partidas es perdiendo siempre. Aun así, si hubiera empezado jugando en la ronda 1, y perdiendo todas las partidas jugadas, hubiera jugado en 11 rondas:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P

La única forma de jugar en solo 10 rondas es descansando (D) la ronda 1 y perdiendo (P) siempre:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D	P	D

Luego podemos afirmar que Alicia jugó y perdió la ronda 2 (A).

Fuente de la solución: Känguru AUS

6.2.3
Vemos que podemos organizar la espiral por cuadrados, de dentro a fuera:

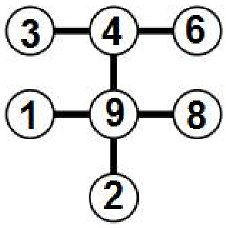
$2^2=4$, $4^2=16$, $6^2=36$, $8^2=64$, $10^2=100$, $12^2=144$, $14^2=196$, $16^2=256$, $18^2=324$, $20^2=400$, $22^2=484$, $24^2=576$, $26^2=676$
Por lo tanto, vemos que estos números estarán en el cuadrado de lado 26, que acaba en 676 en la esquina inferior derecha.
La esquina superior derecha será 676-25=651.
La esquina superior izquierda será 651-25=626, que es el número central de los tres que buscamos, luego la respuesta correcta es (D).

6.2.4
Anna ha obtenido, en el peor de los casos, $1 \cdot 1 \cdot 13 = 13$ puntos, y con puntuaciones más bajas que esta (es decir, con posiciones más altas) $a \cdot b \cdot c \leq 12$, se pueden obtener como mucho dos escaladores:

$$2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$
$$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

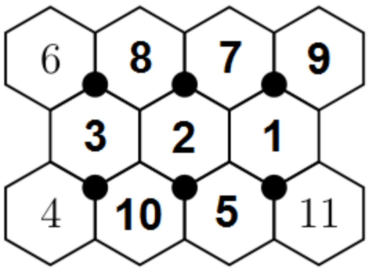
Teniendo en cuenta que en cada una de las competiciones no se puede repetir posición.
Así pues, en el peor de los casos quedará en tercera posición (B).

6.2.5
Probando con diferentes combinaciones de números llegamos al siguiente resultado aceptable:



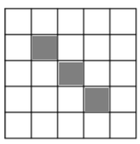
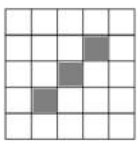
y por tanto la solución es 2 (E).

6.2.6

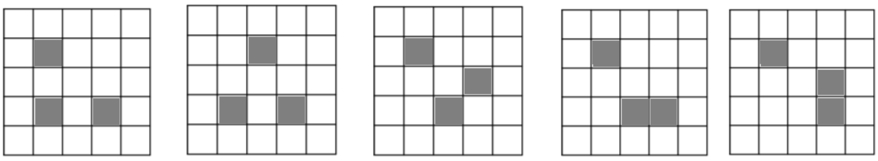


y la respuesta correcta es 9 (A)

6.2.7
a) Si la casilla central está llena, debemos poner dos o tres casillas más alrededor para que "sobreviva", pero no tan cercanas entre ellas como para que "aguanten" vivas una generación. Observando un poco llegamos a la conclusión de que solo hay dos configuraciones satisfactorias:

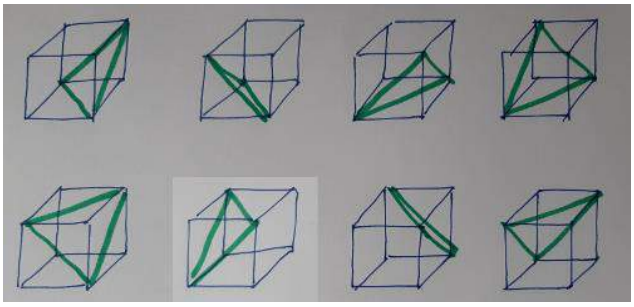
b) Si la casilla central está vacía, debemos poner tres casillas alrededor para que aparezca la central, pero no tan juntas entre ellas como para que interaccionen y no desaparezcan. Observando las distintas opciones llegamos a la conclusión de que solo hay cuatro opciones válidas:



Cada una de ellas en realidad son cuatro configuraciones diferentes, pues las podemos ir "rotando".

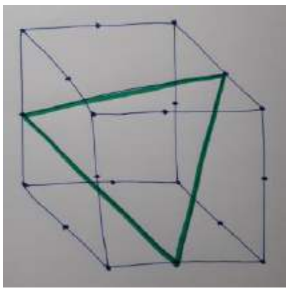
En total hay 4+4+4+4+4+2 = 22 configuraciones aceptables (C).

7.1.1
Hay ocho diferentes triángulos equiláteros que podemos determinar con los vértices de un cubo:



En el conjunto S hay 8 cubos de lado 1 y un cubo de lado 2, luego el total de triángulos será $8 \cdot 8 + 8 \cdot 1 = 8(8+1) = 72$ triángulos equiláteros.

Pero, además, en un cubo $2 \times 2 \times 2$ también podemos trabajar con "puntos medios" y determinar el siguiente triángulo equilátero con sus ocho variaciones posibles:



En total hay $72 + 8 = 80$ triángulos equiláteros distintos.

7.1.2
El número total de casos es 6^4.
Sea C_n el número de casos de obtener un cuadrado lanzando un dado dos veces, si ya tenemos un n previo.

$C(1,1) = 8$: (1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1)

$C(2,1)=6$: (2,1), (1,2),(3,6),(6,3),(2,4),(4,2)
$C(3,1)=6$: (1,3), (3,1),(3,4),(4,3),(2,6),(6,2)
$C(4,1)=8$: (1,4), (4,1), (1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)
$C(5,1)=4$: (5,1), (1,5),(5,4),(4,5)
$C(6,1)=6$: (1,6), (6,1),(2,3),(3,2),(4,6),(6,4)

$C(2,2)=8$: (1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1)
$C(3,2)=6$: (2,3), (3,2) (1,6),(6,1),(4,6),(6,4)
$C(4,2)=6$: (2,1), (1,2),(4,1),(1,4),(3,6),(6,3)
$C(5,2)=2$: (5,2), (2,5)
$C(6,2)=6$: (3,1), (1,3) (3,4),(4,3),(6,2),(2,6)

$C(3,3)=8$: (1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1)
$C(4,3)=6$: (3,1), (1,3),(6,2),(2,6),(3,4),(4,3)
$C(5,3)=2$: (5,3), (3,5)
$C(6,3)=6$: (2,1), (1,2),(2,4),(4,2),(6,3),(3,6)

$C(4,4)=8$: (1,1), (2,2),(3,3,),(4,4),(5,5),(6,6),(4,1),(1,4)
$C(5,4)=4$: (5,1), (1,5),(5,4),(4,5)
$C(6,4)=6$: (6,1), (1,6), (2,3),(3,2),(4,6),(6,4)
$C(5,5)=8$: (1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(4,1)(1,4)
$C(6,5)=2$: (5,6), (6,5)
$C(6,6)=8$: (1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,4),(4,1)

Ahora escribimos todas las posibilidades en función de los dos dados primeros:

1,1	8		2,1	6		3,1	6	
1,2	6		2,2	8		3,2	6	
1,3	6		2,3	6		3,3	8	
1,4	8		2,4	6		3,4	6	
1,5	4		2,5	2		3,5	2	
1,6	6	Total: 38	2,6	6	Total: 34	3,6	6	Total: 34
4,1	8		5,1	4		6,1	6	
4,2	6		5,2	2		6,2	6	
4,3	6		5,3	2		6,3	6	
4,4	8		5,4	4		6,4	6	
4,5	4		5,5	8		6,5	2	
4,6	6	Total: 38	5,6	2	Total: 22	6,6	8	Total: 34

TOTAL: 38+34+34+38+22+34=200

$$P=\frac{200}{6^4}=\frac{25}{162}$$

Observación: En las soluciones oficiales se presentan varias alternativas, siempre teniendo en cuenta esta o aquella propiedad. Como suele pasar, hay que valorar entre utilizar la fuerza bruta del cómputo o aprovechar alguna propiedad para eliminar casos.

7.1.3
Para este problema lo más práctico es enumerarlas una a una, en función de la carta que eliminamos. Por cada permutación ascendente válida habrá una descendente, por lo que contaremos solo las ascendentes y el resultado lo multiplicaremos por dos.

1	2	3	4	5	6
2	1	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5
4	1	2	3	4	6
5	1	2	3	4	6
6	1	2	3	4	5

2	1	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	3	2	4	5	6
1	4	2	3	5	6
1	5	2	3	4	5
1	6	2	3	4	5

2	3	1	4	5	6
1	3	2	4	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	4	3	5	6
1	2	5	3	4	6
1	2	6	3	4	5

2	3	4	1	5	6
1	3	4	2	5	6
1	2	4	3	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	5	4	6
1	2	3	6	4	5

2	3	4	1	5	6
1	3	4	2	5	6
1	2	4	3	5	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	5	4	6
1	2	3	6	4	5

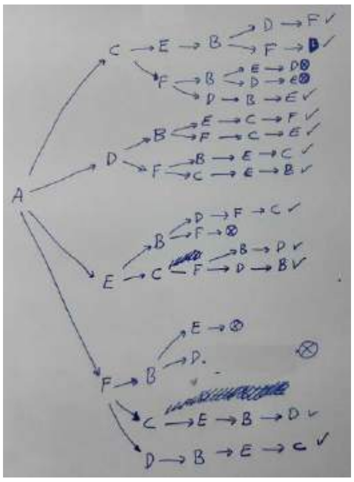
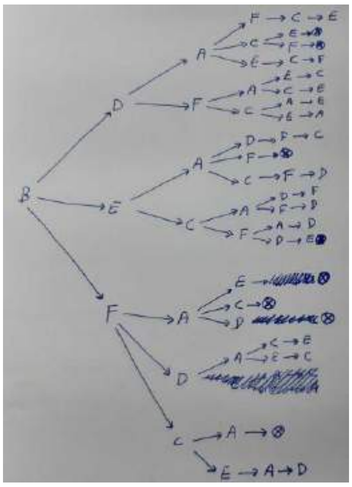
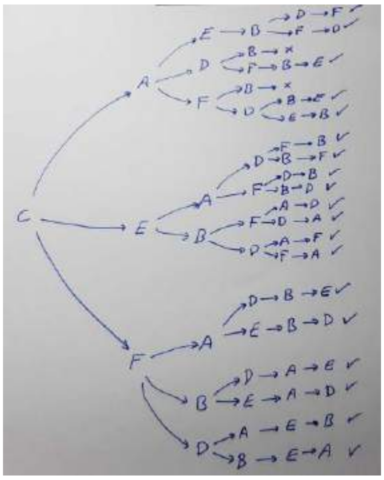
2	3	4	5	1	6
1	3	4	5	2	6
1	2	4	5	3	6
1	2	3	5	4	6
1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	6	5

En las cuales vemos algunas repeticiones, que se han marcado en gris. En total hay

$$6+4\cdot 5=26$$

Y como el orden puede ser también descendente, $26\cdot 2=52$

7.1.4
Este problema se puede resolver por "bashing", "machaqueo", es decir: generando todo el arbol de posibilidades. Por simetría nos reduciremos a detallar todas las posibilidades que comienzan por "A", "B" o "C", y multiplicaremos por 2:

En total hay $45\cdot 2=90$ posibilidades diferentes.

7.1.5
Consideremos un subconjunto cualquiera de 11 miembros del club.
Sea $0\le i\le 11$ el número de hombres de dicho grupo.

Luego el número de mujeres será $11-i$.
Y por tanto el número de mujeres fuera del grupo es $12-(11-i)=i+1$.

Luego si tomamos los hombres de dicho grupo y las mujeres que no están en dicho grupo, obtenemos un comité que se adapta al enunciado.

Recíprocamente, si tenemos un comité de $i+1$ mujeres y i hombres, con las $12-(i+1)=11-i$ mujeres que no están en el comité y los i hombres que sí están podemos formar un grupo de 11 personas.

Así pues, existe una biyección entre el número de comités posible y los subconjuntos de 11 personas:

$$N=\binom{23}{11}$$

$$N=\binom{23}{11}=\frac{23!}{11!\,12!}=\frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=23\cdot 19\cdot 17\cdot 13\cdot 7\cdot 2$$

Y por tanto la suma pedida es $23+19+17+13+7+2=81$

Fuente de la solución: Solución oficial MAA en AoPS

7.1.6

A	B	C	D	E	F	G
6	0	0	0	0	0	0

El dígito A solo puede ser un "6" o un "7".
El dígito G solo puede ser un "5" o un "7"

A="6", G="5", y para el resto tenemos 1 "5", 3 "6" y 1 "7": El número de posibilidades será el de formas de colocar los 3 "6" en las cinco posiciones:

$$C_5^3=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{20}{2}=10$$

Y luego colocar el "5" y el "7", dos posiciones. Luego el total es $2C_5^3=20$

A="6", G="7", y para el resto tenemos 2 "5", 3 "6":
El número de posibilidades quedará determinado por las posiciones de los "6":

$$C_5^3=\frac{5!}{3!\,2!}=\frac{20}{2}=10$$

A="7", G="5", y para el resto tenemos 1 "5", 4 "6":
El número de posibilidades quedará determinado por las formas de colocar los cuatro "6":

$$C_5^4=\frac{5!}{4!\,1!}=5$$

Luego, en total, hay $20+10+5=35$ números diferentes.

7.1.7
Resolveremos este problema "por fuerza bruta".

Vemos que $96 = 2^5 \cdot 3$, por lo que el número de posibilidades quedará determinado por las diferentes formas de agrupar los "2".

En un único grupo:

1 posibilidad.

En dos grupos:

En todo momento, escribimos los exponentes de las potencias de 2,y multiplicamos por las posiciones del "3"

0 5 $\times 1$
1 4 $\times 2$
2 3 $\times 2$
3 2 $\times 2$
4 1 $\times 2$
5 0 $\times 1$ 10 posibilidades.

En tres grupos:

0 0 5 $\times 0$
0 1 4 $\times 1$
0 2 3 $\times 1$
0 3 2 $\times 1$
0 4 1 $\times 1$
0 5 0 $\times 0$
1 0 4 $\times 1$
1 1 3 $\times 3$
1 2 2 $\times 3$
1 3 1 $\times 3$
1 4 0 $\times 1$
2 0 3 $\times 1$
2 1 2 $\times 3$
2 2 1 $\times 3$
2 3 0 $\times 1$
3 0 2 $\times 1$
3 1 1 $\times 3$
3 2 0 $\times 1$
4 0 1 $\times 1$
4 1 0 $\times 1$
5 0 0 $\times 0$

30 posibilidades en total.

En cuatro grupos:

0 0 x x $\times 0$
0 1 0 4 $\times 0$
0 1 1 3 $\times 1$
0 1 2 2 $\times 1$
0 1 3 1 $\times 1$

0 1 4 0 ×0
0 2 1 2 ×1
0 2 2 1 ×1
0 2 3 0 ×0
0 3 1 1 ×1
0 3 2 0 ×0
0 4 x x ×0
1 0 1 3 ×1
1 0 2 2 ×1
1 0 3 1 ×1
1 0 4 0 ×0
1 1 0 3 ×1
1 1 1 2 ×4
1 1 2 1 ×4
1 1 3 0 ×1
1 2 0 2 ×1
1 2 1 1 ×4
1 2 2 0 ×1
1 3 0 1 ×1
1 3 1 0 ×1
1 4 0 0 ×0
2 0 0 3 ×0
2 0 1 2 ×1
2 0 2 1 ×1
2 0 3 0 ×0
2 1 0 2 ×1
2 1 1 1 ×4
2 1 2 0 ×1
2 2 0 1 ×1
2 2 1 0 ×1
2 3 0 0 ×0
3 0 0 2 ×0
3 0 1 1 ×1
3 0 2 0 ×0
3 1 0 1 ×1
3 1 1 0 ×1
3 2 0 0 ×0
4 x x x ×0
5 x x x ×0

40 posibilidades en total.

En cinco grupos:

0 0 x x x ×0
0 1 0 x x ×0
0 1 1 1 2 ×1
0 1 1 2 1 ×1
0 1 1 3 0 ×0
0 1 2 0 2 ×0
0 1 2 1 1 ×1
0 1 2 2 0 ×0

0 1 3 x x $\times 0$
0 1 4 x x $\times 0$
0 2 0 x x $\times 0$
0 2 1 1 1 $\times 1$
0 3 x x x $\times 0$
0 4 x x x $\times 0$
1 0 0 x x $\times 0$
1 0 1 1 2 $\times 1$
1 0 1 2 1 $\times 1$
1 0 2 1 1 $\times 1$
1 0 3 x x $\times 0$
1 1 0 1 2 $\times 1$
1 1 0 2 1 $\times 1$
1 1 1 0 2 $\times 1$
1 1 1 1 1 $\times 5$
1 1 1 2 0 $\times 1$
1 1 2 0 1 $\times 1$
1 1 2 1 0 $\times 1$
1 2 0 1 1 $\times 1$
1 2 1 1 0 $\times 1$
1 2 1 0 1 $\times 1$
2 0 1 1 1 $\times 1$
2 1 0 1 1 $\times 1$
2 1 1 0 1 $\times 1$
2 1 1 1 0 $\times 1$
3 x x x x $\times 0$
4 x x x x $\times 0$
5 x x x x $\times 0$

25 posibilidades en total.

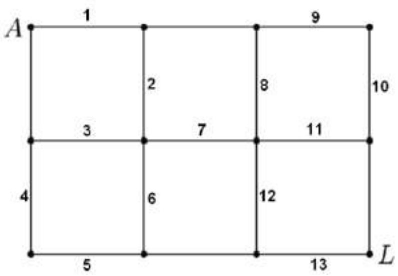
En seis grupos:

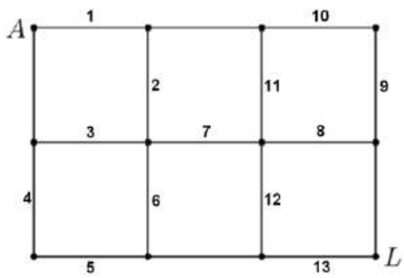
Hay 6 posibilidades: $96 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ y sus otras 5 posiciones del “3”.

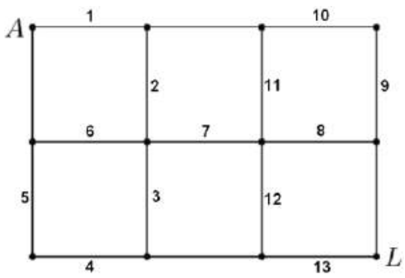
Total: $6 + 25 + 40 + 30 + 10 + 1 = 112 \quad (A)$

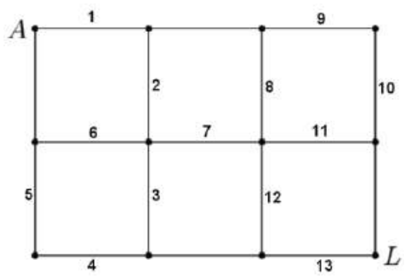
7.1.8

Hay cuatro posibilidades, en función del sentido en el que "tomamos la curva" de las dos esquinas:









Probando se observa que cualquier otra opción no es aceptable. (E)

7.1.9

Puesto que empiezan y acaban en “0” y no pueden tener dos “0” consecutivos, el segundo número y el que hace 18 serán “1”. Luego reducimos las secuencias a longitud 15, que pueden empezar y acabar con “0” o con “1”.

Dividimos las 15 posiciones en 5 secuencias de longitud 3. Las secuencias pueden ser:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111

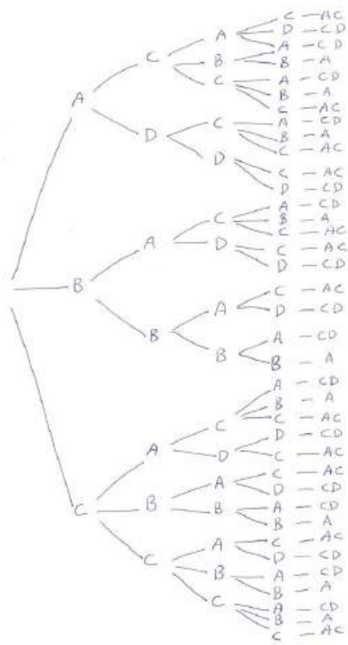
Pero por condiciones del enunciado se reducen a:

A=”010”, B=”011”, C=”101”, D=”110”

Ahora podemos construir el árbol de posibilidades:

La primera pieza puede ser cualquiera de las cuatro, pero después de A solo puede ir C o D, después de B solo puede ir A o B, después de C solo puede ir A, B o C, y después de D solo puede ir C o D.

Además, la primera pieza no puede ser D y la quinta pieza no puede ser B.



Hay un total de 65 (C).

7.1.10

Para que la suma de tres números dados sea impar es necesario que sean los tres impares o solo uno de ellos. Puesto que disponemos de cinco números impares (1, 3, 5, 7 y 9) las únicas posibilidades son las siguientes nueve:

I	I	I
I	P	P
I	P	P

I	P	P
I	I	I
I	P	P

I	P	P
I	P	P
I	I	I

I	I	I
P	I	P
P	I	P

P	I	P
I	I	I
P	I	P

P	I	P
P	I	P
I	I	I

I	I	I
P	P	I
P	P	I

P	P	I
I	I	I
P	P	I

P	P	I
P	P	I
I	I	I

En cada una de ellas podemos colocar 5 números impares y 4 números pares, luego los casos favorables son

$$F = 9 \cdot 5! \cdot 4!$$

Los casos totales son $T = 9!$, luego la probabilidad es

$$P = \frac{F}{T} = \frac{9 \cdot 5! \cdot 4!}{9!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{14} \quad \text{(B)}$$

7.1.11

La condición del enunciado equivale a decir que todo elemento de $\{1,2,3,4,5\}$ tiene un ciclo de longitud igual o menor que 3:

Longitud 1:

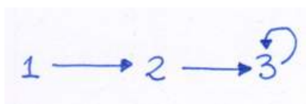
$$f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = f(x) = x \\ f(f(f(x))) = f(f(x)) = f(x) = x \end{cases}$$

Longitud 2:

$$f(x) = y \neq x,\ f(y) = y \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = f(y) = y \\ f(f(f(x))) = f(f(y)) = f(y) = y \end{cases}$$

Longitud 3:

$$f(x) = y \neq x,\ f(y) = z \neq x, y,\ f(z) = z \Rightarrow \begin{cases} f(f(x)) = f(y) = z \\ f(f(f(x))) = f(f(y)) = f(z) = z \end{cases}$$



Sin embargo, podemos observar que la condición del enunciado no se cumpliría para longitudes superiores a 3.

Sea a el número de elementos con ciclo de longitud 1, sea b el número de elementos con ciclo de longitud 2 y sea c el número de elementos con ciclos de longitud 3.

Está claro que $a+b+c=5$, y que si $a<4$ entonces $b>0$, puesto que si existe un elemento con ciclo igual a 3, $f^3(x)=x$, entonces $f^2(f(x))=f^3(x)=x$ y por tanto $f(x)$ será un elemento cuyo ciclo tendrá longitud 2.

Está claro también que $a>0$.

Ordenaremos los casos empezando por a, y luego por b:

1. $a=5$, $b=0$, $c=0$

   1 caso.

2. $a=4$, $b=0$, $c=1$

   No se puede dar.

3. $a=4$, $b=1$, $c=0$

   $5\cdot 4=20$ casos.

4. $a=3$, $b=0$, $c=2$

   No se puede dar.

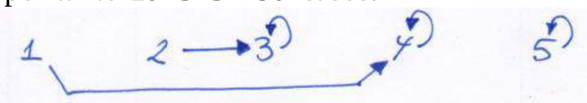
5. $a=3$, $b=1$, $c=1$

   $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{20}{2}=10$ grupos de 3 elementos de ciclo 1,

   $10\cdot 2\cdot 3=60$ casos.

6. $a=3$, $b=2$, $c=0$

   $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=\frac{20}{2}=10$ grupos de 3, y los otros dos pueden ir a cualquiera de los 3 elementos de ciclo 1, por tanto $10\cdot 3\cdot 3=90$ casos.

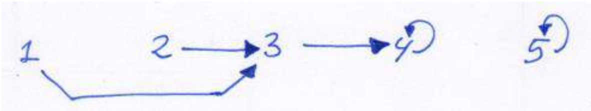


7. $a=2$, $b=0$, $c=3$

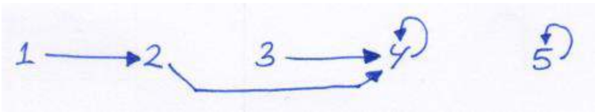
No se puede dar.

8. $a=2$, $b=1$, $c=2$

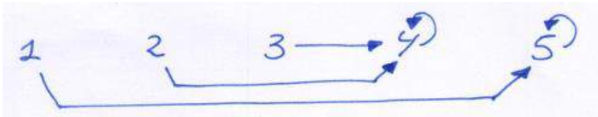
$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{20}{2}=10$ grupos de 2 elementos que tendrán asociados ciclos de longitud 1,
$10\cdot 3\cdot 2=60$ casos.



9. $a=2$, $b=2$, $c=1$
$10\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=240$ casos.

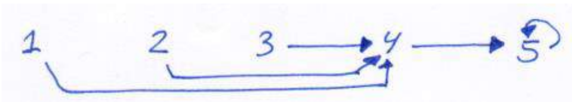


10. $a=2$, $b=3$, $c=0$
$10\cdot 2\cdot 2\cdot 2=80$ casos.



11. $a=1$, $b=0$, $c=4$
No se puede dar.

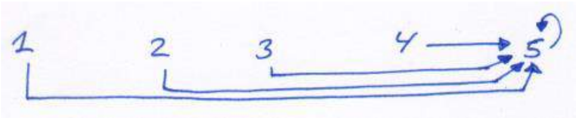
12. $a=1$, $b=1$, $c=3$
Tenemos 5 candidatos para el elemento de ciclo 1.
Después, 4 candidatos para el elemento de ciclo 2.
Los tres que quedan han de ir todos al candidato de ciclo 2.
En total, $5\cdot 4=20$ casos.



13. $a=1$, $b=2$, $c=2$
Tenemos 5 candidatos para el elemento de ciclo 1.
De los 4 restantes, seleccionamos 2 para tener ciclo de longitud 2.
$5\cdot\binom{4}{2}\cdot 2\cdot 2=5\frac{4!}{2!2!}\cdot 2\cdot 2=5\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 2\cdot 2=120$ casos.

14. $a=1$, $b=3$, $c=1$
$5\cdot\binom{4}{3}\cdot 3=5\cdot\frac{4!}{3!1!}\cdot 3=5\cdot 4\cdot 3=60$ casos.

15. $a=1$, $b=4$, $c=0$
Hay 5 casos.



En total, tendremos $1+20+60+90+60+240+80+20+120+60+5=756$ casos.

Observaciones. En la solución "oficial" de AoSP, encontramos la fórmula general para determinar el número de elementos en cada caso:

$$\binom{5}{a}\cdot\binom{5-a}{b}\cdot a^b\cdot b^c$$

También se indica que este problema apareció en la prueba "**Standford Math Tournament, Advanced Topics Test**" del 2011, y en "**Mock AIME 2**" 2010 (problema 7)

Fuente de la solución: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_10

7.1.12
El número total de permutaciones es $P_6=6!=720$, vamos a contar el número de permutaciones que no cumplen la condición del enunciado, es decir, que para cada k con $1\le k\le 5$, todos los primeros k términos de la permutación son menores o iguales que k.

Caso 1: $k=1$
Son todas las permutaciones que empiezan con 1: 1*****, es decir: $P_5=5!=120$.

Caso 2: $k=2$.
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 12, es decir: 12**** y 21****. Las primeras ya están contadas en el caso 1, luego son todas las que empiezan por 21: $P_4=4!=24$.

Caso 3: $k=3$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 123, es decir:

123*** Ya contadas en el caso 1	132*** Ya contadas en el caso 1
213*** Ya contadas en el caso 2	231***
312***	321***

Luego hay $3P_3=3\cdot 3!=18$

Caso 4: $k=4$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 1234, es decir:

1234** Ya contadas en el caso 1	1243** Ya contadas en el caso 1

1324** Ya contadas en el caso 1	1342** Ya contadas en el caso 1
1423** Ya contadas en el caso 1	1432** Ya contadas en el caso 1
2134** Ya contadas en el caso 2	2143** Ya contadas en el caso 2
2314** Ya contadas en el caso 3	2341**
2413**	2431**
3124** Ya contadas en el caso 3	3142**
3214** Ya contadas en el caso 3	3241**
3412**	3421**
4123**	4132**
4213**	4231**
4312**	4321**

Luego hay $13P_2 = 13 \cdot 2! = 26$

Caso 5: $k = 5$
Son todas las permutaciones que empiezan por todas las permutaciones posibles de 12345, es decir:
1***** Ya contadas en el caso 1

21**** Ya contadas en el caso 2	231*** Ya contadas en el caso 3
23415* Ya contadas en el caso 4	23451*
23514*	23541*
24135* Ya contadas en el caso 4	24153*
24315* Ya contadas en el caso 4	24351*
24513*	24531*
25134*	25143*
25314*	25341*
	11 Casos que empiezan por 2

31245* Ya contadas en el caso 3	31254* Ya contadas en el caso 3
31425* Ya contadas en el caso 4	31452*
31524*	31542*
32145* Ya contadas en el caso 3	32154* Ya contadas en el caso 3
32415* Ya contadas en el caso 4	32451*
32514*	32541*
34125* Ya contadas en el caso 4	34152*
34215* Ya contadas en el caso 4	34251*
34512*	34521*
35124*	35142*
35214*	35241*
35412*	35421*
	16 Casos que empiezan por 3

41235* Ya contadas en el caso 4	41253*
41325*	41352*
41523*	41532*
42135* Ya contadas en el caso 4	42153*
42315* Ya contadas en el caso 4	42351*
42513*	42531*

43125* Ya contadas en el caso 4	43152*
43215* Ya contadas en el caso 4	43251*
43512*	43521*
45123*	45132*
45213*	45231*
45312*	45321*
	20 Casos que empiezan por 4
5*****	$P_4 = 24$ Casos que empiezan por 5

En total hay $11+16+20+24=71$ casos.

Así pues, que no cumplan la condición del enunciado hay
$120+24+18+26+71=259$

Y finalmente, casos que sí cumplan la condición hay $720-259=461$.

Observación: En https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_11
Se pueden encontrar otras soluciones alternativas, sin pasar al complementario (tal vez) más elegantes que esta.

7.1.13

Nota preliminar: La resolución que expongo no es nada elegante. A posteriori, más bien parece una tentativa exitosa de no naufragar en un mar de casos y condiciones. Pero las soluciones digamos oficiales de **https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_AIME_II_Problems/Problem_15** tampoco las he encontrado nada esclarecedoras.

$$|x-y| \le |f(x)-f(y)| \le 3|x-y| \Leftrightarrow 1 \le \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le 3$$

Por lo tanto podemos interpretar este problema en términos de pendiente de la función: La variación vertical respecto de la variación horizontal.

$$1 \le \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \le 3$$

Para $\Delta x = 1$, está claro que $1 \le |\Delta y| \le 3$ y por lo tanto, de un valor x al siguiente $x+1$, los incrementos verticales admitidos son seis: $+3,+2,+1,-1,-2-3$.

Así pues, de momento, $f(1) \in \{3,2,1,-1,-2,-3\}$, $f(5) \ge 9$, $f(4) \ge 6$, $f(3) \ge 3$, $f(2) \ge 0$.

Para $\Delta x = 2$, tenemos

$$1 \le \left|\frac{\Delta y}{2}\right| \le 3 \Leftrightarrow 2 \le |\Delta y| \le 6$$

Completando una tabla "Primer paso vs Segundo paso" y sombreando los valores que no cumplen esta condición nos queda:

Δy	+3	+2	+1	-1	-2	-3
+3	6	5	4	2	1	0
+2	5	4	3	1	0	-1
+1	4	3	2	0	-1	-2
-1	2	1	0	-2	-3	-4
-2	1	0	-1	-3	-4	-5
-3	0	-1	-2	-4	-5	-6

Luego los únicos casos aceptables para $f(2)$ son: $f(2) = 2,3,4,5,6$

Para $\Delta x = 3$, tenemos

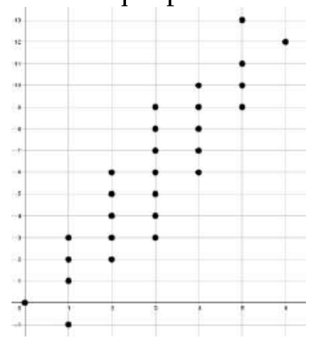
$$1 \le \left|\frac{\Delta y}{3}\right| \le 3 \Leftrightarrow 3 \le |\Delta y| \le 9$$

Completando una tabla "Primeros dos pasos vs Tercer paso" y sombreando los valores que no cumplen esta condición nos queda:

Δy	+3	+2	+1	-1	-2	-3
+6	9	8	7	5	4	3
+5	8	7	6	4	3	2
+4	7	6	5	3	2	1
+3	6	5	4	2	1	0
+2	5	4	3	1	0	-1
-2	1	0	-1	-3	-4	-5
-3	0	-1	-2	-4	-5	-6
-4	-1	-2	-3	-5	-6	-7
-5	-2	-3	-4	-6	-6	-8
-6	-3	-4	-5	-7	-8	-9

Así pues, puesto que necesito $f(6)=12$, y puesto que $f(2)\leq 6$, los únicos valores aceptables para $f(3)$ son: $f(3)=9,8,7,6,5,4,3$

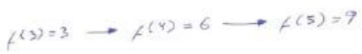
Eliminando algunos otros casos, los valores que puede tomar la función son los siguientes:



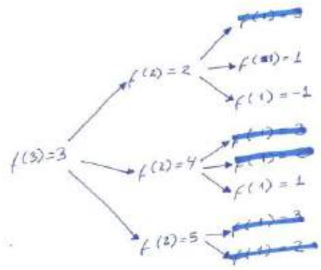
Que son lo suficientemente reducidos como para poder separar por casos:

A) $f(3)=3$.

Hacia delante: 1 camino:



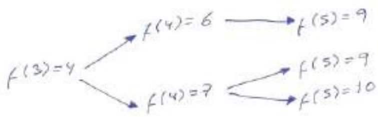
Hacia atrás: 3 caminos:



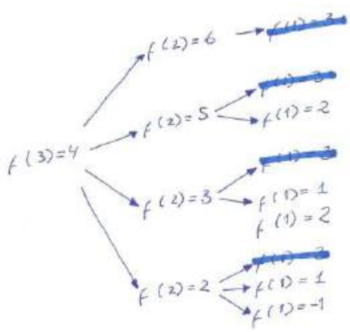
Total: 3 caminos.

B) $f(3)=4$

Hacia delante: 3 caminos:



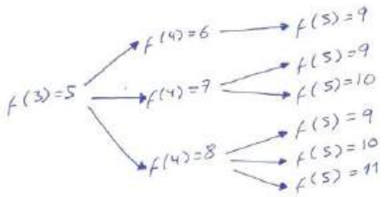
Hacia atrás: 5 caminos:



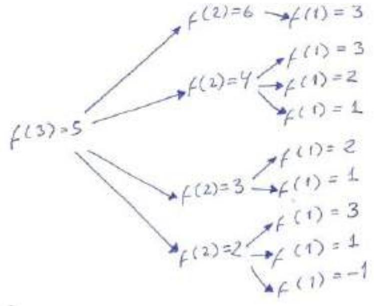
Total: 15 caminos.

C) $f(3)=5$

Hacia delante: 6 caminos:



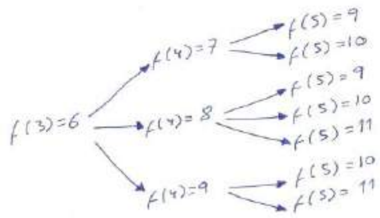
Hacia atrás: 9 caminos:



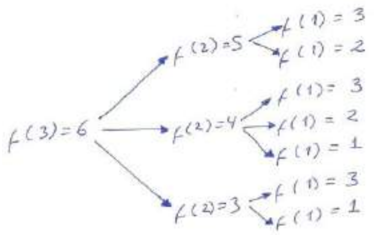
Total: 54 caminos.

D) $f(3) = 6$

Hacia delante: 7 caminos.



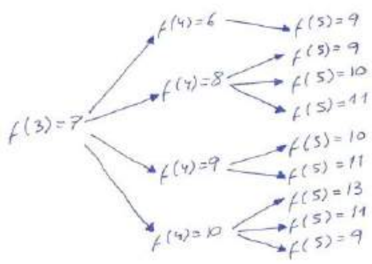
Hacia atrás: 7 caminos.



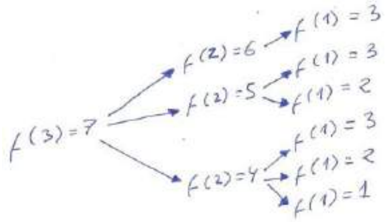
Total: 49 caminos.

E) $f(3) = 7$

Hacia delante: 9 caminos.



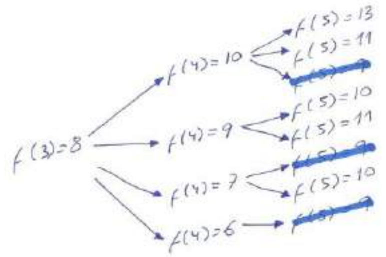
Hacia atrás: 6 caminos.



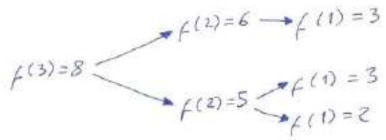
Total: 54 caminos.

F) $f(3)=8$

Hacia delante: 5 caminos.



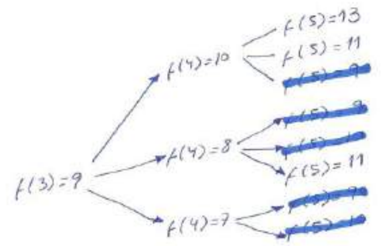
Hacia atrás: 3 caminos.



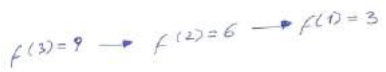
Total: 15 caminos.

G) $f(3)=9$

Hacia delante: 3 caminos.



Hacia atrás: 1 camino.



Total: 3 caminos.

Además, debemos descontar las combinaciones que hacen incompatible el grupo $\{f(2), f(3), f(4)\}$ que son:

$f(2)=6, f(3)=3, f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6, f(3)=5, f(4)=6$,

$f(2)=6, f(3)=4, f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6, f(3)=3, f(4)=6$,

$f(2)=6, f(3)=7, f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6, f(3)=8, f(4)=6$,

$f(2)=6, f(3)=9, f(4)=6$, $\quad$ $f(2)=6, f(3)=8, f(4)=7$.

Con lo que llegamos finalmente a: $3+15+54+49+54+15+3-8=185$ funciones.

7.1.14
Estudiando un poco la situación vemos que para un número elevado de columnas siempre es posible encontrar solución al problema.
Si el número de filas m es impar, rellenamos la fila del medio con piedras, y quitamos y ponemos algunas en las primeras columnas siguiendo el siguiente esquema:

$m=3$

	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x							

$m=5$

		x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x						
x							

$m=7$

			x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x					
x	x						
x							

Está claro que con este procedimiento podemos siempre obtener tableros en los que todas las columnas tengan el mismo número de piedras y en las filas tengamos

$$1<2<3...<n-3<n-2<n-1<n$$

piedras, es decir, un número diferente en todas y cada una de las filas.

Si m es par el procedimiento sería el mismo pero dejando la última fila vacía. Por ejemplo:

$m=4$

	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x							

$m=6$

		x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x						
x							

$m=8$

			x	x	x	x	x
		x	x	x	x	x	x
	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x					
x	x						
x							

El caso $m=2$ se soluciona fácilmente llenando una fila de piedras y dejando la otra vacía.

Este procedimiento falla cuando

$$\begin{cases} n < m & m \text{ impar} \\ n < m-1 & m \text{ par} \end{cases}$$

Por ejemplo, con $m = 7$ y $n = 6$ nos encontramos con el tablero siguiente:

			x	x	x
		x	x	x	x
	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x
x	x	x			
x	x				
x					

En el que la primera fila y la quinta tienen el mismo número de piedras.

En las soluciones oficiales encontramos el siguiente argumento para el caso límite $n = m-1$ y m impar:
Hay m filas, se pueden colocar un máximo de $m-1$ piedras en cada fila, todas las filas con diferente cantidad, luego forzosamente hay que poner $0, 1, 2, ..., m-1$ piedras (no necesariamente en este orden) pero entonces el total de piedras será

$$0+1+2+...+m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$$

que deberá ser de la forma

$$\frac{m(m-1)}{2} = k \cdot (m-1)$$

para cierto k que es el número de piedras en cada columna. Luego

$$\frac{m}{2} = k$$

lo cual es imposible porque m es impar.

7.1.15
La mejor estrategia es calcular todos los triángulos posibles y restar aquellos que tengan uno o dos lados sobre los lados del polígono.
La cantidad de triángulos posibles es el número de formas de tomar tres vértices, sin importar el orden:

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

La cantidad de triángulos que tienen un único lado sobre uno de los lados del polígono es
$n(n-4)$

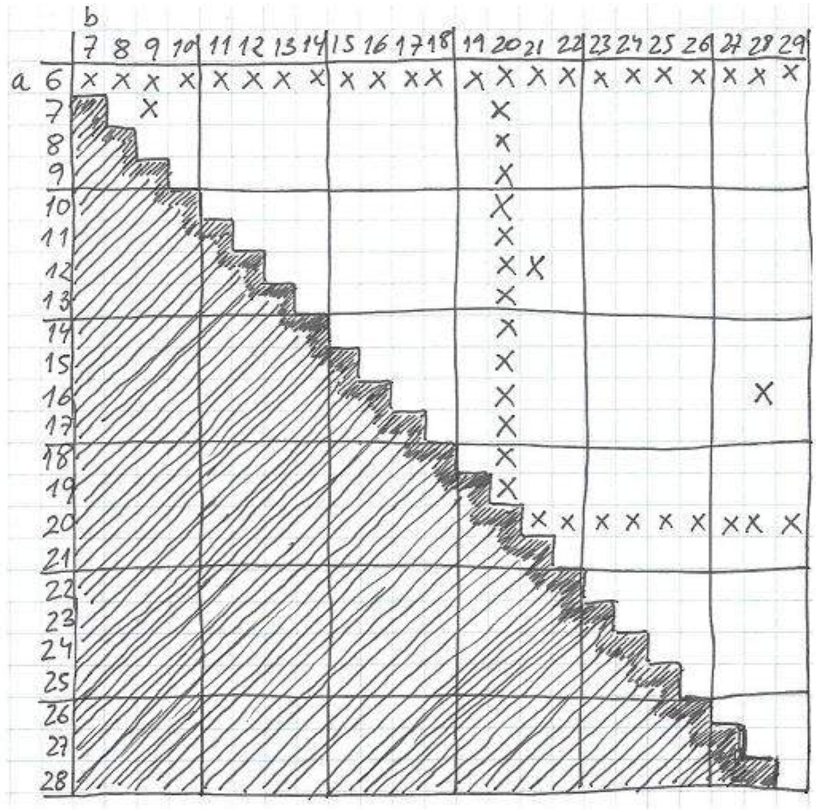
La cantidad de triángulos que tienen dos lados sobre dos lados consecutivos del polígono es
n

Luego la candidad pedida es

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-4) - n = \frac{n(n-1)(n-2) - 6n(n-4) - 6n}{6} = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}$$

7.1.16
Está claro que $6 \le a \le 28$ y que $a \le b \le 29$. A partir de esto, debemos ir eliminando las configuraciones que generen cuatro elementos en progresión aritmética:

$3\,,4\,,5\,,a \to a = 6$
$3\,,4\,,5\,,b \to b = 6$
$3\,,5\,,a\,,b \to a = 7\,,b = 9$
$3\,,a\,,b\,,30 \to a = 12\,,b = 21$
$4\,,a\,,b\,,40 \to a = 16\,,b = 28$
$a\,,b\,,30\,,40 \to a = 10\,,b = 20$
$a\,,b\,,40\,,50 \to a = 20\,,b = 30$
$b\,,30\,,40\,,50 \to b = 20$
$a\,,30\,,40\,,50 \to a = 20$



En total son $1+2+3+4+...+22 = \dfrac{23\cdot 22}{2} = 253 \to 253 - 25 = 228$.

7.1.17
Resolveremos este problema mediante la fórmula de Laplace.
El número total de ordenaciones será $12!$ pero teniendo en cuenta que hay repeticiones: cada una de las parejas tiene fichas indistinguibles entre ellas, luego tenemos $\dfrac{12!}{2^6}$ ordenaciones diferentes.

Veamos ahora los casos favorables. Observando como se puede colocar un determinado par en las casillas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		R			R						

(3 , 6) es aceptable

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			R						R		

(4, 10) no es aceptable

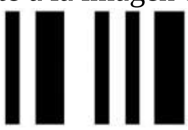
Observamos que las posiciones (x, y) de una determinada pareja del mismo color será aceptable si y solo si una de las dos posiciones es par y la otra impar.

Luego tendremos, por un lado, unas fichas R, B, Y, G, O, P que se pueden colocar en las posiciones 2, 4, 6, 8, 10 y 12, y por otro lado sus respectivas parejas que se pueden colocar en las posiciones 1, 3, 5, 7, 9 y 11.
En total son $6!\cdot 6!$ casos favorables.

Así pues, $P = \frac{6!\cdot 6!}{12!/2^6} = \frac{6!\cdot 6!\cdot 2^6}{12!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2^6}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{16}{231}$

Y la respuesta correcta es $16+231=247$.

7.1.18
Cada código está determinado por una secuencia de “1” y “2”: Un uno corresponde a una franja de anchura 1, y un dos corresponde a una franja de anchura 2.
Como empieza en negro y acaba en negro, el número total de franjas debe ser impar.
Por ejemplo, la secuencia correspondiente a la imagen del enunciado:



sería (1,1,2,2,1,1,1,1,2)

Sea a el número de franjas “2” y sea b el número de franjas “1”. Puesto que los códigos son de longitud 12, se debe cumplir $2a+b=12$, y puesto que empieza y acaba en negro, $a+b$ debe ser impar.
Pero vemos que $b=12-2a=2(6-a)$ es par, luego para que $a+b$ sea impar se debe cumplir que a sea impar.
De $2a+b=12$ se deduce que $a<6$, y por lo tanto ya hemos reducido el número de casos a una cantidad gestionable:

a) $a=5 \Rightarrow b=12-2\cdot 5=2$

Son todas las permutaciones de siete elementos, cinco de una forma y dos de otra:

$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$

b) $a=3 \Rightarrow b=12-2\cdot 3=6$

Son todas las permutaciones posibles de 9 elementos, seis de una forma y tres de otra:

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2} = 84$$

c) $a = 1 \Rightarrow b = 12 - 2\cdot 1 = 10$

Son todas las permutaciones posibles de 11 elementos, diez iguales entre ellos.

$$P_{11}^{10} = \frac{11!}{10!} = 11$$

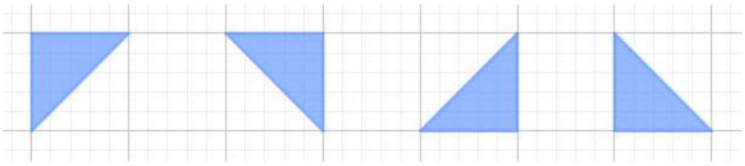
Así pues, el total de códigos será $21 + 84 + 11 = 116$ (E)

Fuente de esta solución: Compendium Kangaroo UK (pág. 124)

7.1.19

Primera versión.

En la casilla superior izquierda tenemos las cuatro opciones posibles:



Pero vemos que, una vez seleccionada una forma, en la casilla de la derecha solo tenemos dos posibilidades. Lo mismo pasa en la casilla inferior.

Además, en cada bloque 2×2, las dos piezas colocadas en las posiciones diagonales determinan totalmente las otras dos piezas.

Así pues, tenemos las siguientes posibilidades:

4	2	2	...	2
2	1	1	...	1
2	1	1	...	1
...	...	...	...	
2	1	1	...	1

En total hay $4\cdot 2^{2021}\cdot 2^{2021} = 2^{4044}$ combinaciones diferentes.

Segunda versión.

Siguiendo los argumentos de la primera versión, vemos que las posiciones de la diagonal de la cuadrícula 2022×2022 son libres, pero determinan totalmente el resto de casillas. Luego tenemos un total de $4^{2022} = \left(2^2\right)^{2022} = 2^{4044}$ combinaciones diferentes.

7.1.20

Está claro que el conjunto vacío $\varnothing$ no puede formar parte una de estas colecciones.

Dividimos los subconjuntos de $\{1,2,3,4,5\}$ en cinco clases, en función de su número de elementos:

A (subconjuntos con 1 elemento) :

$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}$ cinco subconjuntos.

B (subconjuntos con 2 elementos) :

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$ diez subconjuntos.

C (subconjuntos con 3 elementos) :
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{1,4,5},{2,3,4},{2,3,5},{2,4,5},{3,4,5}
diez subconjuntos.
D (subconjuntos con 4 elementos):
{1,2,3,4},{1,2,3,5},{1,2,4,5},{2,3,4,5},{1,3,4,5} cinco subconjuntos
E (subconjuntos con 5 elementos):
{1,2,3,4,5} un subconjunto.
En total hay 5+10+10+5+1=31 subconjuntos no vacíos.

a) En primer lugar, supongamos que una colección contiene un elemento del grupo A. Entonces está claro que no puede contener ningún otro elemento del grupo A y que todos los otros subconjuntos de esta colección también contienen a ese elemento.
Pero observamos que si, por ejemplo, contiene {1}, hay exactamente 15 subconjuntos más que contengan el elemento 1, es decir, hay una única colección de 16 subconjuntos. Luego hay exactamente 5 colecciones cumpliendo esta condición.

En lo siguiente, vamos a suponer que esta colección no contiene ningún elemento del grupo A.

b) Supongamos que no contiene ningún elemento del grupo B.
Supongamos que contine un elemento del grupo C, por ejemplo {1,2,3}. El resto de 15 subconjuntos que quedan satisfacen la condición del enunciado, que son compatibles entre ellos, y por tanto existe una única colección.

c) Supongamos que contiene exactamente un elemento del grupo B, por ejemplo {1,2}
Del grupo C hay 9 subconjuntos que satisfagan la condición del enunciado, del grupo D hay 5 subconjuntos, y del grupo E hay 1, luego en total hay exactamente 16 subconjuntos adecuados, es decir, una única colección. Así pues, hay en total 10 colecciones.

d) Supongamos que contiene exactamente dos elementos del grupo B, por ejemplo {1,2} y {2,3}.
Hay 8 subconjuntos del grupo C que son compatibles:
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{2,3,4},{2,3,5},{2,4,5}
y los 5 subconjuntos del grupo D y el subconjunto del grupo E satisfacen la condición del enunciado. Y entre ellos son compatibles, en el sentido de que cualquier par tiene intersección no vacía. En total 14 subconjuntos más para hacer una colección de 16.
Todo esto, por cada pareja del grupo B que sea compatible entre ellos, en total 30 parejas, haciendo un total final de 30 colecciones.

e) Supongamos que contiene exactamente tres subconjuntos del grupo B.
Aquí debemos diferenciar dos subcasos.
e1) Tres subconjuntos con un elemento común, por ejemplo {1,2},{2,3},{2,4}.

Del grupo C hay 7 subconjuntos satisfaciendo la condición del enunciado:
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{2,3,4},{2,3,5},{2,4,5}

Del grupo D todos los 5 subconjuntos son compatibles
El subconjunto del grupo E es siempre compatible con cualquiera, en total 3+7+5+1=16 subconjuntos, formando una única colección aceptable. 5×4=20 colecciones en total.

e2) Tres subconjuntos sin un elemento común, por ejemplo {1,2},{2,3},{1,3}.

Del grupo C hay 7 subgrupos compatibles:
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{2,3,4},{2,3,5}
Del grupo D todos los 5 subconjuntos son compatibles .
El subconjunto del grupo E es siempre compatible con cualquiera, en total 3+7+5+1=16 subconjuntos, formando una colección aceptable.
Las posibles combianciones de tres subconjuntos del grupo B sin elementos en común son

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\,,$$

determinando un total de 10 colecciones aceptables.

f) Supongamos que contiene exactamente cuatro elementos del grupo B. Por ejemplo:
{1,2},{1,3},{1,4},{1,5}
Del grupo C tendremos 6 subconjuntos aceptables:
{1,2,3},{1,2,4},{1,2,5},{1,3,4},{1,3,5},{1,4,5}
Del grupo D tendremos los cinco subconjuntos aceptables:
Y el elemento del grupo E es siempre compatible con cualquiera. Luego en total
6+5+1=12 subconjuntos, que junto a los cuatro del grupo B forman una única colección de 16 subconjuntos.
Todo esto por cada grupo de cuatro elementos del grupo B que podamos tomar, cinco en total.

g) Supongamos que contiene exactamente cinco elementos del grupo B. Este caso es imposible.

En total tenemos 5+1+10+30+20+10+5=81 colecciones aceptables.