

Notas de Aula de Mecânica Clássica

Alessandro S. Villar

2014/2015

Palavras iniciais

Estas notas foram escritas com o intuito principal de permitirem aos estudantes acompanharem as aulas sem precisarem estar presentes ou copiar o quadro. Elas seguem assim de forma quase exata as aulas de Mecânica Clássica 1 (três primeiros capítulos) e 2 (quatro últimos capítulos) ministradas por mim no DF/UFPE. Outro objetivo importante foi contribuir para disponibilizar na internet brasileira conteúdo técnico que permita a qualquer pessoa aprender aquilo pelo que se interessar (e conseguir absorver!). Eu de fato me baseei em várias notas de aula (em inglês...) que encontrei por aí na internet (coloco abaixo uma lista para referência), além dos livros do Moysés, Marion e Goldstein. A ideia destas notas não é serem referência aos diversos assuntos tratados para uso de especialistas; pelo contrário, foram pensadas como um texto a ser lido apenas uma vez. Promovem a explicação detalhada em forte detrimento da concisão. São por isso mesmo apropriadamente intituladas “notas de aula”: a conversão mais fidedigna possível da aula para o formato escrito. Existe aí, portanto, uma clara escolha de estilo e de nível do público alvo. O objetivo ideal perseguido foi tentar permitir aos interessados aprenderem todo o conteúdo básico de mecânica de maneira logicamente consistente sem precisarem se referenciar a outras fontes (além do Google, é claro).

Este curso buscou frisar a evolução conceitual da mecânica do ponto de vista da contemporaneidade. Não se busca aqui dar qualquer tipo de ênfase histórica (até porque a história é uma bagunça merecedora de notas de aula à parte!). A ênfase aqui é na mecânica como teoria contemporânea. Talvez por isso a parte mais difícil do curso seja ter de ‘engolir’ o formalismo newtoniano, cheio de conceitos *ad hoc* como é típico de quem só começou a explorar alguma coisa e ainda não entendeu bem o que está fazendo (sim, a história de brincar com conchinhas na praia era bem fidedigna). No entanto, é preciso do ponto de vista da contemporaneidade subir essa escada para depois jogá-la fora. Por esse motivo faço uma revisão um tanto detalhada das leis de Newton e suas aplicações. Entretanto, tento separar desse conjunto o conceito de energia, cuja relevância e generalidade só emergiriam com clareza quando outras grandes áreas de física começariam a utilizá-lo como conceito unificador. É mesmo a energia que nos leva à formulação contemporânea da mecânica (apesar de ser muitas vezes estudada de maneira indistinta como parte do formalismo newtoniano) e que nestas notas começa a ser estudada apenas depois de apresentada a formulação medieval, digo, draconiana, digo newtoniana da mecânica. Parto então para mostrar como se trata o movimento no método de Lagrange: e daí vem todo o resto numa sucessão muito mais coerente e límpida do que tudo que veio antes. Disso segue a síntese da mecânica hamiltoniana e seus fantásticos desdobramentos, tais como a analogia com a ótica geométrica e a mecânica ondulatória de Schrödinger.

A mecânica é para mim a teoria básica mais bonita da física. Foi um grande prazer aprender de verdade sobre os seus conceitos (como diria John A. Wheeler, “se quiser aprender, ensine!”). Ficam então estas notas de aula como testemunho de minha privilegiada posição de raríssimo diletantismo (digo, ao menos para professores/pesquisadores ingressantes) cujo espírito, espero, esteja aparente em seu texto. Note, no entanto, que é só ao escrever as suas próprias notas de aula que você irá entender para si tudo que está aqui: e este será o momento certo de jogar estas notas pela janela como fazemos com todas as escadas conceituais depois de subirmos por elas. Eu já joguei fora a minha cópia.

Abaixo encontra-se uma lista de notas de aula utilizadas na preparação destas notas.

- <https://www.math.psu.edu/srikrish/math251/notes/morewronskian.pdf>
- <http://www.vanderbilt.edu/AnS/physics/brau/P227a/Green%20functions.pdf>
- http://www.int.washington.edu/users/dbkaplan/228_01/green.pdf
- <http://www.physics.ohio-state.edu/~mathur/greensfunctions.pdf>
- <http://cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-6124-12/StGoChap5.pdf>
- <http://users.phys.psu.edu/~lammert/419/Notes/chapter3.pdf>
- http://www.bogan.ca/orbits/kepler/e_anonly.html
- <http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/Lagrangemech.pdf>
- <http://julian.tau.ac.il/bqs/functionals/node1.html>
- http://www.tau.ac.il/~kantor/QUIZ/02/least_action.pdf
- <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0308119>
- <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/md327/teaching.html>
- <http://www.physics.rutgers.edu/~shapiro/507/book3.pdf>
- <http://staff.www.ltu.se/~larserik/applmath/chap7en/part7.html>
- http://www.fuw.edu.pl/~psznajder/cambridge_wyklady_mechklas.pdf
- <http://julian.tau.ac.il/bqs/functionals/node7.html#SECTION00070000000000000000>
- <http://www-physics.ucsd.edu/students/courses/fall2010/physics110a/LECTURES/CH08.pdf>
- http://www.ingvet.kau.se/juerfuch/kurs/amek/prst/11_nhco.pdf
- <https://www.math.wisc.edu/~matz/AppliedMath.pdf>
- <https://www.math.wisc.edu/~matz/AppliedMath.pdf>
- <http://www.mth.kcl.ac.uk/~llandau/231a/GenCoords>
- <http://www.ita.uni-heidelberg.de/~dullemond/lectures/tensor/tensor.pdf>
- <http://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/En221/Notes/Tensors/Tensors.htm>
- <http://mathpages.com/rr/s5-02/5-02.htm>
- <http://www.physics.miami.edu/~nearing/mathmethods/tensors.pdf>
- <http://www.cis.upenn.edu/~cis610/cis610sl7.pdf>
- http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall_2010/Lectures/03.pdf
- <https://www.math.lsu.edu/~mhajij1/Slides/SU%282%29%20and%20S0%283%29%20Representations.pdf>
- <http://cft.fis.uc.pt/eef/evbgroups.pdf>
- <http://www.stat.uchicago.edu/~pmcc/tensorbook/tensorbook.pdf>
- <http://people.csail.mit.edu/madhu/ST12/scribe/lect03.pdf>
- <http://www.phas.ubc.ca/~birger/p206119/>
- <http://www.physics.usu.edu/Wheeler/ClassicalMechanics/CMnotesLeviCivita.pdf>
- <http://n.ethz.ch/~stiegerc/HS09/Mechanik/Unterlagen/Lecture18.pdf>

- <http://www.physics.buffalo.edu/phy302/topic3/>
- <http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/Dalembert.pdf>
- <http://homes.chass.utoronto.ca/~cfraser/Lagrangeorigins.pdf>
- https://www.irphe.fr/~clanet/otherpaperfile/articles/Lagrange/N0029071_PDF_1_530.pdf
- <http://www.nt.ntnu.no/users/jensoa/field1.pdf>
- http://www.sbfisica.org.br/bjp/files/v31_235.pdf
- <http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/CanonicalTransformations.pdf>
- <http://www3.nd.edu/~powers/ame.20231/zia.pdf>
- <http://users.physics.harvard.edu/~morii/phys151/lectures/Lecture20.pdf>
- http://www.math.cornell.edu/~templier/junior/final_paper/Brian_Tu.pdf
- <http://www.cds.caltech.edu/~marsden/wiki/uploads/projects/geomech/Mizel1995.pdf>
- http://www.ks.uiuc.edu/Services/Class/PHYS480/qm_PDF/chp1.pdf
- <http://www.physics.hku.hk/~phys3336/Lecture/chapter8.pdf>
- <http://www.srl.caltech.edu/phys106/p106b01/topic2.pdf>
- <https://www.aapt.org/docdirectory/meetingpresentations/SM14/Mungan-Poster.pdf>
- http://www2.ph.ed.ac.uk/~rhorsley/SII10-11_hamd/lec10.pdf
- http://physics.bu.edu/~rebbi/py408_lect4.pdf
- http://www.physics.usu.edu/torre/6010_Fall_2010/Lectures/12.pdf
- <http://math.etsu.edu/multicalc/prealpha/Chap3/Chap3-3/printversion.pdf>
- <http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-pub-9939.pdf>
- http://www.uow.edu.au/~nillsen/M201_2007_classical_inverse.pdf
- http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/pm/PM_11.pdf
- <http://www.physics.ohio-state.edu/~mathur/821hj.pdf>
- <http://hitoshi.berkeley.edu/221a/classical2.pdf>
- <http://www.srl.caltech.edu/phys106/p106b01/topic2.pdf>
- <http://www.math.uchicago.edu/~ac/hje.pdf>
- http://www.nipne.ro/rjp/2011_56_9-10/1053_1056.pdf
- <http://arxiv.org/abs/1204.0653>
- <http://www.sfu.ca/lux/Teaching/summary.pdf>
- http://www.colorado.edu/physics/phys7230/phys7230_sp09/Bohr-Sommerfeld.pdf
- <https://nmb1.stanford.edu/publications/pdf/DeSapio2008.pdf>
- <http://authors.library.caltech.edu/17303/>
- <http://arxiv.org/abs/1203.2736>
- <http://arxiv.org/pdf/physics/0309059.pdf>
- <http://www.maths.tcd.ie/~dleen/mathsoc/pdf/Notes.pdf>

- <https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry228.pdf>
- <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993AmJPh..61..175K>
- <http://physics.unm.edu/Courses/Finley/p573/perturb1.pdf>
- <http://www.physics.hmc.edu/~saeta/courses/p111/uploads/Y2011/HSChapter3.pdf>
- <http://www.maths.tcd.ie/~cblair/notes/432.pdf>
- <http://www.staff.science.uu.nl/~aruty101/CFT.pdf>
- http://www2.ph.ed.ac.uk/~rhorsley/SII12-13_hamd/lec16.pdf
- <https://www.coursehero.com/file/9711597/Advanced-Mechanics-notes5/>
- http://web.hep.uiuc.edu/home/serrede/P436/Lecture_Notes/P436_Lect_18p5.pdf
- <http://www.gsjournal.net/old/physics/hamdan1.pdf>
- <http://www2.ph.ed.ac.uk/~playfer/EMlect18.pdf>
- http://physics.ucsd.edu/students/courses/fall2009/physics130b/Spec_Rel.pdf
- http://background.uchicago.edu/~whu/Courses/Ast305_10/ast305_06.pdf
- <http://redshift.vif.com/JournalFiles/V11N02PDF/V11N2ENG.pdf>
- <http://www.phas.ubc.ca/~mav/p526/lec6.pdf>
- http://www.hep.upenn.edu/~rreece/docs/notes/qft_notes.pdf
- http://www.tat.physik.uni-tuebingen.de/~kokkotas/Teaching/Field_Theory_files/FT_course07.pdf
- http://quantummechanics.ucsd.edu/ph130a/130_notes/node452.html

Sumário

1	Mecânica newtoniana	15
1.1	As leis de Newton do movimento	16
1.1.1	Primeira lei	16
1.1.2	Segunda lei	16
1.1.3	Terceira lei	17
1.1.4	O referencial inercial	19
1.2	Estática, ou a arte de ficar parado	21
1.2.1	Forças de coesão	22
1.2.2	Centro de gravidade	23
1.2.3	O uso de vetores na estática	24
1.2.4	Distribuição das forças de coesão em estruturas contínuas	26
1.3	Dinâmica newtoniana e modelos de forças	29
1.3.1	Visão geral da dinâmica newtoniana	29
1.3.2	Campo gravitacional uniforme	32
1.3.3	Movimento circular uniforme	36
1.3.4	Força de propulsão por ejeção de material	39
1.3.5	Oscilador harmônico simples	42
1.3.6	Oscilador harmônico amortecido	45
1.3.7	Oscilador harmônico forçado harmonicamente	52
1.3.8	Oscilador harmônico forçado periodicamente	57
1.3.9	Oscilador harmônico forçado impulsivamente	68

1.3.10	Força gravitacional universal	76
1.4	A mecânica em referenciais não inerciais	82
1.4.1	Colocação do problema	83
1.4.2	Referencial em aceleração linear constante	85
1.4.3	Referencial em queda livre num campo gravitacional não uniforme	86
1.4.4	Referencial em rotação	90
1.5	Energia e campos de forças conservativos	103
1.5.1	Forças conservativas	104
1.5.2	Energia potencial gravitacional	107
1.5.3	Conservação da energia	108
1.5.4	Movimento unidimensional em campo conservativo	109
1.5.5	Energia potencial quadrática	113
1.6	Campo de forças central	116
1.6.1	Energia potencial centrífuga	116
1.6.2	Constantes decorrentes de condições iniciais e leis de conservação	119
1.6.3	Características gerais das trajetórias	120
1.7	Interação gravitacional entre duas partículas	121
1.7.1	Energia potencial efetiva	121
1.7.2	Órbita circular	124
1.7.3	Pequenas oscilações em torno da órbita circular	124
1.7.4	Sistema ligado	125
1.7.5	Sistema livre	126
1.7.6	Equação de movimento	126
1.7.7	Equação da trajetória	127
1.7.8	Soluções para as trajetórias	128
1.7.9	Trajетórias elípticas	130
1.7.10	Trajетórias parabólicas	134

1.7.11	Trajétórias hiperbólicas	135
1.8	Espalhamento de Rutherford	138
1.8.1	Espalhamento por campo de forças coulombiano	139
1.8.2	Parâmetros de trajetória acessíveis no experimento de Rutherford	140
1.8.3	Seção de choque de Rutherford	142
2	Mecânica lagrangiana	145
2.1	Formulação lagrangiana da mecânica	146
2.1.1	Princípio de d'Alembert	146
2.1.2	Inclusão de vínculos no movimento	147
2.1.3	Coordenadas generalizadas e o espaço de configurações lagrangiano	148
2.1.4	Equações de Lagrange para o movimento	151
2.1.5	Aplicação básica do formalismo lagrangiano	157
2.2	Trajétória como curva extremal e o princípio de Hamilton	162
2.2.1	Cálculo variacional	163
2.2.2	Princípio de Hamilton	172
2.3	Leis de conservação e simetrias de transformação	176
2.3.1	Primeiras integrais	176
2.3.2	Teorema de Noether	178
2.3.3	Simetria de translação e conservação do momento linear	178
2.3.4	Simetria de rotação e conservação do momento angular	180
2.3.5	Invariância temporal e conservação da energia	182
2.3.6	Campo de forças central revisitado	184
2.4	Tratamento geral de vínculos no movimento	188
2.4.1	Equações de movimento e multiplicadores de Lagrange	189
2.4.2	Determinação das forças de vínculo	192
2.4.3	Vínculos semi-holonômicos	197
2.5	Palavras finais sobre o formalismo lagrangiano	200

3	Mecânica dos corpos rígidos	203
3.1	Corpo rígido em duas dimensões do espaço	205
3.1.1	Momento de inércia	205
3.1.2	Teorema dos eixos paralelos	206
3.1.3	Momento angular	208
3.1.4	Torque e equação de movimento	209
3.2	Corpo rígido em três dimensões do espaço	211
3.2.1	Notação e digressões	214
3.2.2	Tensor de inércia e momento angular em três dimensões	220
3.2.3	Tensor de inércia no limite contínuo	222
3.2.4	Representação matricial do tensor de inércia	222
3.2.5	Eixos principais de inércia	224
3.2.6	Teorema dos eixos paralelos em três dimensões	230
3.2.7	Energia cinética de rotação	233
3.3	Rotações	235
3.3.1	Representação matricial das rotações	236
3.3.2	Rotações infinitesimais em três dimensões	239
3.3.3	Ângulos de Euler	243
3.4	Equações de Euler para a dinâmica de corpos rígidos	246
3.4.1	Ângulos de Euler como coordenadas	247
3.4.2	Equações de Euler para o corpo rígido	250
3.4.3	Movimento livre do corpo rígido	254
3.4.4	Orientação temporal do corpo rígido na formulação de Euler	263
3.5	Formulação lagrangiana da dinâmica dos corpos rígidos	265
3.5.1	Obtenção das equações de Euler a partir das equações de Lagrange	266
3.5.2	Primeiras integrais	266
3.5.3	Pião de brinquedo	268

4	Oscilações acopladas	277
4.1	Par de osciladores idênticos acoplados	277
4.1.1	Tratamento ingênuo	278
4.1.2	Tratamento matricial	290
4.2	Problema geral das oscilações acopladas	298
4.2.1	Lagrangiana	299
4.2.2	Formulação matricial das equações de movimento	303
4.2.3	Problema de autovalores e autovetores	304
4.2.4	Solução geral	308
4.2.5	Coordenadas normais	308
4.2.6	Padrão geral de movimento dos modos normais de vibração	311
4.3	Sistema acoplado com perdas: efeitos da dissipação	315
4.4	Sistema acoplado forçado: ressonâncias	318
4.5	Partículas vs. Modos: a ‘dualidade onda-partícula’ na mecânica clássica	322
4.6	Oscilações em sistemas contínuos: ondas	325
4.6.1	Limite contínuo	325
4.6.2	Densidade lagrangiana e equações do movimento	327
4.6.3	Equação de onda	328
4.6.4	Soluções harmônicas da equação de onda	329
4.6.5	Solução genérica da equação de onda	331
4.6.6	Dispersão	332
5	Mecânica hamiltoniana	335
5.1	Construção do formalismo hamiltoniano	339
5.1.1	A função hamiltoniana	339
5.1.2	Transformada de Legendre	340
5.1.3	Equações de Hamilton para o movimento	343
5.1.4	Princípio variacional na formulação hamiltoniana	347

5.1.5	Obtenção da função hamiltoniana no cenário usual	348
5.2	Transformações canônicas	352
5.2.1	Liberdade de escolha da lagrangiana	355
5.2.2	Funções geradoras de transformações canônicas	358
5.2.3	Transformações canônicas infinitesimais	368
5.3	Forma simplética: formulação geométrica da dinâmica hamiltoniana	371
5.3.1	Condições diretas de canonicidade	374
5.3.2	Preservação da forma simplética	377
5.3.3	Estrutura geométrica da dinâmica hamiltoniana	380
5.4	Colchetes de Poisson: formulação algébrica da dinâmica hamiltoniana	383
5.4.1	Motivação e definição	383
5.4.2	Condições de canonicidade	385
5.4.3	Transformações canônicas	387
5.4.4	Simetria, conservação e coordenadas cíclicas	390
5.4.5	Álgebra da mecânica hamiltoniana	391
5.4.6	Garantindo a canonicidade das coordenadas no espaço de fase	394
5.4.7	Conexão com a mecânica quântica	395
6	Formulação de Hamilton-Jacobi da mecânica	397
6.1	Função principal de Hamilton	397
6.2	Equação de Hamilton-Jacobi	400
6.3	Função principal de Hamilton como integral de ação	402
6.4	Função característica para hamiltoniana independente do tempo	409
6.5	Função característica na presença de coordenadas cíclicas	410
6.6	Princípio de mínima ação	413
6.7	Ótica geométrica e a equação de Hamilton-Jacobi	416
6.7.1	Raios de luz e a lei de Snell-Descartes	418
6.7.2	Analogia newtoniana entre energia potencial e índice de refração	420

6.7.3	Analogia entre o eikonal e a função principal de Hamilton	421
6.8	Conexões com a descrição ondulatória da mecânica quântica	424
6.8.1	Equação de onda de Schrödinger	425
6.8.2	Comprimento de onda de de Broglie	428
6.9	Variáveis de ação-ângulo	430
6.9.1	Construção do método	430
6.9.2	Invariância adiabática da variável de ação	434
7	Um pouco de relatividade	437
7.1	Princípio de relatividade	438
7.2	Transformações de Lorentz	440
7.3	Relatividade restrita	441
7.3.1	Intervalo	441
7.3.2	Simultaneidade temporal e espacial	443
7.3.3	Transformações de Lorentz	444
7.3.4	Contração do espaço	444
7.3.5	Dilatação do tempo	445
7.3.6	Composição de velocidades	446
7.3.7	Momento e energia	447
7.4	Geometria do espaço-tempo	450
7.4.1	Métrica e quadrivetores	450
7.4.2	Transformação relativística entre referenciais inerciais	452
7.4.3	Outros quadrivetores	454
7.5	Eletromagnetismo na formulação relativística	455

Capítulo 1

Mecânica newtoniana

A mecânica na formulação de Isaac Newton, exposta nos *Principia*¹ em 1687, se dispõe a *descrever o movimento* de corpos no espaço como consequência das interações entre eles e com o mundo externo. Descrever o movimento significa *saber determinar as posições espaciais dos objetos de interesse para qualquer valor do parâmetro tempo*. Como conceito dual, faz parte desse quadro também o estudo dos objetos parados, a *estática*². A mecânica newtoniana se constrói sobre a ideia central de *conservação do momento* como estado natural, ou sua variação como consequência de interações físicas, da qual decorre naturalmente a ideia de *força*.

Para entender melhor o que a mecânica newtoniana se dispõe a descrever, é igualmente interessante ter em mente o que ela *não* busca descrever. Antes de tudo, está fora do escopo da mecânica entender a natureza fundamental das interações, ou seja, o ‘motivo’ físico e as grandezas relevantes que determinam as formas de interação a causar o movimento (e.g. carga elétrica³). Longe de ser uma limitação, essa renúncia racional à tentação de explicar tudo torna as leis newtonianas muito gerais, sendo na verdade evidência do poder de abstração de Newton.

Também não faz parte da ambição descritiva da mecânica newtoniana formar um quadro fundamental da natureza do movimento: sua ambição principal é ser funcional. E, nessa ânsia pela simplicidade, ela fornece os primeiros passos necessários para se atingirem conceitos fundamentais. Como veremos mais à frente, conceitos capazes de elucidar melhor a natureza do movimento, e que por serem mais fundamentais acabariam por influenciar outras áreas da física, só seriam totalmente montados num quadro conciso e consistente com o advento do formalismo hamiltoniano da mecânica no séc. XIX.

Os avanços obtidos por Newton têm como base as primeiras incursões de Galileu Galilei pela cinemática por volta de 1600, com seus estudos sobre o pêndulo simples, o plano inclinado, o lançamento de projéteis e muitos outros temas, e é seguido ao longo dos dois séculos seguintes pela invenção dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano da mecânica, temas deste curso.

¹Do latim, ‘Princípios matemáticos da física’ (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*).

²Curiosamente, a estática talvez tenha sido mais importante para a elucidação das leis da mecânica do ponto de vista histórico do que estudos do movimento em si.

³É preciso notar, no entanto, que a mecânica newtoniana torna inevitável tocar nesses assuntos a partir do ponto em que modelos de força se tornam necessários. Mesmo Newton já se ocupava do assunto ao modelar em sua nova linguagem os elementos essenciais da interação gravitacional em termos de forças.

1.1 As leis de Newton do movimento

As três leis do movimento de Newton não parecem mesmo ‘leis’ gerais com *insight* profundo sobre a natureza do movimento, mas antes um conjunto autoconsistente de postulados embasados na experimentação e em conceitos intuitivos como tempo e espaço. O poder de previsão das leis de Newton decorre de buscarmos no quadro geral proposto, sabendo-o autoconsistente, as peças faltantes. A fim de melhor embasar a interpretação da mecânica newtoniana, analisemos suas leis em detalhe.

1.1.1 Primeira lei

A primeira lei estabelece que um corpo se move com *velocidade constante* a não ser que uma *força* aja sobre ele⁴. Esse postulado faz referência aos conceitos de *velocidade*, significando a taxa temporal com que a posição do corpo varia, e de *força*, que fica sem significado até aqui. A forma mais lógica de entender o postulado é como uma definição operacional do ‘palco’ onde os próximos postulados devem valer: antes de aplicar as demais leis, o experimentador precisa estar num referencial em que vale o primeiro postulado, ou, como veremos, saber abstrair para encontrar tal referencial hipotético.

O conteúdo físico da primeira lei se resume a reconhecer que referenciais que se movem com velocidade relativa constante observarão o mesmo tipo de física do movimento, uma afirmação pouco intuitiva até ser enunciada por Galileu Galilei algum tempo antes: o *princípio da relatividade*. Podemos dizer que, na síntese das leis *gerais* do movimento, Galileu chegou até aí (ou parou aí, para os pessimistas), tendo fornecido pistas para as demais características importantes.

A primeira lei se enuncia de forma sintética dando-se um nome aos palcos possíveis em que valem as leis de Newton: o **referencial inercial**⁵. Esse referencial não precisa ser aquele em que se realizam os experimentos, desde que o experimentador saiba como abstrair para obter um desses em sua interpretação dos dados. As próximas leis de Newton nos auxiliam nessa tarefa.

1.1.2 Segunda lei

A segunda lei de Newton postula que o movimento de um corpo sob ação de uma força é tal que a *taxa de variação temporal de seu momento é igual à força*. O principal conteúdo físico da segunda lei é colocar o momento no centro da dinâmica e sua variação temporal, proporcional à aceleração da partícula, como consequência de uma grandeza única, a força, responsável por mudar a trajetória com relação àquela ‘padrão’ definida na primeira lei. Podemos então dizer que a força é definida como aquilo que causa uma variação no momento, e deixar para o experimento determinar o campo de forças e as propriedades intrínsecas de que

⁴Enunciamos aqui as leis de Newton sem priorizar a exatidão na tradução dos *Principia*. Estamos mesmo concentrados em entender o significado do conjunto. Nosso intuito não é de forma alguma destrinchar as palavras de Newton conforme ele mesmo as entendia à época, mas penetrar o significado de suas ideias sob o ponto de vista de física contemporânea.

⁵Nessa linguagem, o princípio da relatividade de Galileu postula que o enunciado de qualquer lei da física – e portanto a *forma* das equações a representá-lo como relações entre quantidades relevantes – vale sem modificação em qualquer referencial inercial.

depende⁶.

Assim, a grandeza física com papel central na dinâmica newtoniana é o **momento**, definido externamente ao postulado como o produto da massa do corpo por sua velocidade. Notemos que o conceito de *massa* não está definido ainda, mas que seu papel é calibrar o quanto a *velocidade* de um corpo deve variar sob a ação de uma força. Dessa forma, a segunda lei incorpora implicitamente no formalismo a existência de uma propriedade intrínseca (massa) a cada corpo para reconhecer que a ação da *mesma força* pode acelerar *diferentemente* corpos distintos. E isso se dá de forma simples, através de uma única constante de proporcionalidade intrínseca ao corpo que vale para todas as interações em que ele possa se envolver. De maneira complementar, podemos dizer que o conceito de força serve para entender acelerações em corpos distintos como produto de uma *mesma interação* (quando cabível) desde que se utilizem as massas para ‘calibrar’ a aceleração produzida em cada corpo. A força continua sem definição física fundamental no formalismo, simplesmente definida operacionalmente como algo responsável pela mudança temporal do momento.

Notemos também que a primeira lei se inclui na estrutura matemática da segunda, pois uma mudança no vetor velocidade da partícula por uma constante (troca de referencial) não afeta a aceleração observada (efeito da força): uma força tem o mesmo efeito em qualquer referencial inercial, de maneira consistente com o princípio guiador dessas leis, o princípio de relatividade.

É possível ainda interpretar as duas primeiras leis em conjunto, como uma ‘aproximação em série’ da posição futura do objeto, utilizando ideias do cálculo diferencial criado por Newton. A primeira lei estabelece que conhecer a velocidade do objeto nos permite inferir a linha reta que ele deve seguir como trajetória padrão, e com isso atualizar sua posição no próximo infinitésimo de tempo; a segunda, como corrigir essa linha em primeira aproximação.

É interessante notar que Newton não continuou até ordens mais altas, parando aí mesmo na aceleração, o que sugere novamente o conceito ‘diferencial’ de suas leis: o próximo ponto da trajetória é obtido apenas pela posição e pelo momento *instantâneos* (primeira lei), desde que este último seja *atualizado em primeira ordem no tempo* pelas forças que agem sobre o sistema desde o último valor assumido (segunda lei). As correções de ordem mais alta da posição futura da partícula para tempos não infinitesimais se incluem automaticamente no formalismo pelo cálculo da trajetória ponto a ponto (i.e. pela forma diferencial do enunciado).

1.1.3 Terceira lei

A terceira lei nos ajuda a entender como operar com as demais e nisso determina características *físicas* gerais das *interações* newtonianas. Ou seja, mais do que postular padrões matemáticos gerais do movimento, a terceira lei trata das interações físicas subjacentes ao mesmo. Ela estabelece que corpos sempre interagem

⁶Caso as forças possíveis na natureza fossem altamente variáveis de uma partícula para outra e/ou dependentes de uma infinidade de parâmetros intrínsecos, seu conceito seria pouco útil; a descrição newtoniana funciona porque as forças conhecidas na natureza apresentam formas funcionais bem amigáveis e dependentes de poucos parâmetros intrínsecos. De fato, hoje podemos dizer que o universo como Newton conhecia pode ser explicado por apenas dois tipos de interação: a gravitacional e a eletromagnética, ambas variáveis apenas do espaço (e não do tempo) e dependentes de uma única propriedade intrínseca (a massa como ‘carga gravitacional’ no primeiro caso, e a carga elétrica no segundo).

aos *pares*, com a criação de duas forças (uma agindo em cada corpo) possuindo *mesma magnitude e sentidos opostos de uma mesma direção*.

Além de mencionar explicitamente o caráter vetorial (direção, sentido e magnitude) das grandezas de interesse (velocidade, momento e força), a terceira lei define toda interação como ocorrendo aos *pares* (de fato, a possibilidade mais simples possível de se suportar). Se dois corpos interagem, dessa forma produzindo forças mútuas, o corpo 2 causa uma força $\vec{F}_{1(2)}$ ao agir sobre o corpo 1, e vice-versa para definirmos $\vec{F}_{2(1)}$; então vale de acordo com a terceira lei que

$$\vec{F}_{1(2)} = -\vec{F}_{2(1)}. \quad (1.1)$$

Essa é uma característica *fundamental* imposta a toda força consistente com as leis de Newton e suas consequências. Na realidade, essa lei precisa ser adaptada para lidar com fatos experimentais desconhecidos à época de Newton: o mais básico deles, o fato de que existe uma velocidade máxima para a propagação das influências físicas; dentro do contexto conhecido por Newton, no entanto, e de fato até o advento do eletromagnetismo um par de séculos depois, a terceira lei encontraria validade universal na descrição do movimento.

Usamos agora a segunda lei para entender o que a Eq. (1.1) implica para os momentos das duas partículas (até porque não sabemos nada sobre as forças além de que elas são definidas a partir das variações temporais causadas nos respectivos momentos!). Para tanto, escrevemos a segunda lei em forma vetorial como

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}, \quad (1.2)$$

da qual se deduz, em combinação com a terceira lei, que

$$\vec{F}_{1(2)} + \vec{F}_{2(1)} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \quad (1.3)$$

se apenas forças mútuas agirem sobre os dois corpos. Pelo fato de que as forças agindo internamente a um sistema de partículas podem ser entendidas como uma série de *pares independentes*, um dos conteúdos físicos implícitos mais importantes da terceira lei é a imposição de *linearidade* das interações: o efeito total de todas as interações das quais participa um corpo é obtido somando-se vetorialmente o efeito de cada um dos pares de interação⁷. Isso nos permite rotular cada partícula desse sistema por um índice $j = 1, 2, \dots, N$ (em que N é o total de partículas) e somar todas as equações independentes similares à Eq. (1.3) para escrever

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = 0, \quad \text{em que} \quad \vec{P} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j, \quad (1.4)$$

se apenas ocorrem interações entre as partículas do sistema (*forças internas*) e nada externo a elas as influencia (*sistema isolado*).

Visto por outro lado, as leis de Newton são construídas para reconhecer que existe uma quantidade física invariante no meio de tantas outras coisas variando com o movimento: *a soma total dos momentos de partículas num sistema isolado é uma constante do movimento*. Apesar de pouco óbvio de se deduzir pela

⁷Notemos que isso não precisaria ser assim, e de fato também essa suposição precisa ser corrigida em alguns sistemas físicos inimagináveis à época de Newton. Na mecânica quântica, por exemplo, há situações em que as ‘interações efetivas’ dependem do *número* de partículas presentes, tal como na emissão laser. Efeitos de número de partículas estão relacionados à natureza bosônica ou fermiônica das partículas.

mera observação do movimento, esse resultado podia ser facilmente testado em experimentos, inclusive por suas consequências indiretas.

Outra consequência da terceira lei de Newton é a definição operacional de *massa* do ponto de vista experimental. Tomando ainda as duas partículas isoladas do mundo externo, a Eq. (1.3) nos permite deduzir, utilizando a definição de momento em termos da massa m e velocidade \vec{v} de uma partícula como

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (1.5)$$

que a terceira lei na forma da Eq. (1.3) implica em

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{a}_2, \quad (1.6)$$

em que se denotou a aceleração da partícula como $\vec{a}_j = \frac{d}{dt}\vec{v}_j$.

Essa relação nos permite empregar uma *massa de prova* para definir massa de maneira quantitativa e pragmática: definimos uma massa em relação à qual todas as outras são definidas. Do ponto de vista operacional, medir a grandeza *massa* de uma partícula significa fazê-la interagir isoladamente com a massa de prova num referencial inercial e medir a razão entre as acelerações das duas partículas.

O significado físico mais profundo da massa, no entanto, permanece oculto ao formalismo newtoniano. Definindo a coisa por seu efeito, as equações de Newton permitem dizer que maior massa implica em menor aceleração, e vice-versa, de onde surge a ideia de *inércia*: a massa é a propriedade da partícula cujo efeito é tornar seu movimento menos suscetível à ação de uma interação. A mecânica de Newton não permite ir além disso⁸.

Em resumo, o efeito de qualquer interação newtoniana pode ser colocado da seguinte forma: interações sempre têm como efeito causar acelerações em *pares* de partículas em *sentidos opostos de uma mesma direção* e na *razão inversa de suas massas* (uma vez que vale para as magnitudes das acelerações das partículas que $a_1/a_2 = m_2/m_1$). Se houver mais de uma interação ocorrendo e mais de uma partícula presente, somamos todos os efeitos isolados e obtemos as acelerações observadas. Todo o movimento, segundo Newton, se reduz a isso: essa é a síntese newtoniana do movimento, o primeiro passo intelectual em torno do qual a mecânica clássica seria construída.

1.1.4 O referencial inercial

Mas tudo o que concluímos acima só vale se pudermos encontrar um referencial inercial. Nisso a terceira lei também nos ajuda. Para determinarmos experimentalmente a validade de aplicação das leis de Newton, não é necessário ‘desligar’ todas as forças para primeiro garantir que todas as partículas se movam uniformemente em nosso referencial para só então ‘ligar’ de volta as forças para observar sua dinâmica (o que não seria lá muito prático), mas apenas ser capaz de ‘subtrair’ de alguma forma os efeitos de todas as forças externas agindo sobre o referencial.

⁸As próximas conexões conceituais interessantes teriam de esperar mais alguns séculos, quando Einstein conectaria primeiramente massa à energia, i.e. energia à inércia, e logo depois a algo capaz de modificar a geometria do espaço e do tempo em sua teoria para a gravidade.

Existem várias maneiras de se fazer isso. Discutamos algumas delas só para nos convenceremos de que é possível abstrair até o ponto de se achar descrições auto-consistentes.

Uma forma de encontrarmos um referencial inercial apropriado seria monitorar os momentos de todas as partículas num referencial arbitrário escolhido e somá-los para detetar sua necessária constância, como dita a Eq. (1.4). Se constante, provamos que apenas forças internas agem nas partículas, e podemos garantir com tranquilidade nosso referencial de medida como inercial. Caso contrário, tentamos achar o par ação-reação a causar a variação do momento das partículas monitoradas. Se o encontrarmos, temos uma solução simples para definirmos o referencial inercial, que consiste em incluir o objeto causador das perturbações em nosso sistema monitorado, de onde forçamos a validade da Eq. (1.4). Se ainda detetarmos variações temporais no momento total, podemos continuar procurando mais pares de ação-reação externos ao sistema, e assim sucessivamente, até encontrarmos todos e com isso finalmente declararmos o referencial de medida como inercial.

Um comentário digno de nota é o seguinte: é impossível do ponto de vista prático encontrarmos *todos* os pares de ação-reação agindo sobre um sistema. Sabemos que há pelo menos um tipo de força de longo alcance (gravitacional) existente no universo que nos impede de isolar rigorosamente qualquer sistema. Devemos aqui utilizar o fato realista de que há sempre precisão finita nas medidas e notar que a razão das magnitudes de diferentes efeitos pode tornar alguns deles desprezíveis para o tipo de descrição intentada. É sempre nesse sentido *científico*, i.e. baseado em quantidades observáveis, e não em neuroses perfeccionistas típicas de iniciantes, que devemos definir um referencial inercial ‘*aproximado*’⁹: a aceleração não-inercial residual deve ter efeito (sobre o movimento) menor do que a sensibilidade das medidas disponíveis. Em outras palavras, o referencial inercial não é apenas uma idealização útil (embora possa ser tomado como tal em várias situações), mas um conceito prático com validade dentro de um contexto testável experimentalmente.

Uma outra solução para a busca por um referencial inercial válido consiste em mapear o campo de forças externo a perturbar o sistema, utilizando para tanto cada partícula como corpo de prova até aprendermos como a força externa atua sobre cada uma delas (em especial, se existe alguma propriedade nova que precisa ser levada em conta, tal como e.g. carga elétrica). Essa solução é mais realista por corresponder ao que fazemos em geral para entendermos como forças atuam. No caso especial em que o campo de forças externo tem o mesmo efeito sobre todas as partículas (i.e. causa-lhes o mesmo vetor aceleração), então a solução mais simples é ‘seguir junto’ com a força, como se faz e.g. ao simular-se um referencial livre de forças no interior de um avião em queda livre (ou em órbita da Terra, o que é a mesma coisa), assim definindo um referencial inercial de medida.

Por fim, outra solução prática consiste em descrever o movimento apenas nas direções ortogonais à força externa, como e.g. na colisão de bolinhas confinadas à superfície horizontal de uma mesa. Nesse caso, a mesa cancela o efeito de forças externas na vertical desde que as bolinhas se mantenham em contato com sua superfície. Mas ainda que a mesa não estivesse lá, e ainda que a força variasse em magnitude entre as diferentes partículas e no tempo, o movimento no plano ortogonal à direção da força seguiria aquele de um referencial inercial, bastando para isso que a força mantivesse sua direção constante, por causa do caráter vetorial das interações newtonianas (i.e. independência das direções ortogonais do espaço cartesiano¹⁰).

⁹Coloco assim ‘aproximado’, entre aspas, porque tudo é sempre aproximado em física. O simples fato de escolhermos definir o que chamamos de ‘sistema’ é uma aproximação que visa evitar descrevermos o universo inteiro para se entender uma pequena parte dele. Essa forma de pensamento, chamada ‘reducionista’, funciona muito bem para coisas não-vivas.

¹⁰É possível sempre pensar nesses termos, mesmo em sistemas de coordenadas não cartesianas, casos em que se faz necessário

Como se pode ver, as leis de Newton são úteis porque existem várias formas de abstração capazes de encontrar um referencial inercial quando se precisa de um.

A superfície da Terra é o referencial de fato utilizado na grande maioria dos problemas práticos (e, naturalmente, onde Newton se encontrava quando inventou suas leis da mecânica!). Ele é claramente um referencial não-inercial dentro da crua precisão experimental de nossos olhos, o que pode ser verificado soltando um objeto no ar e notando que ele não se move com velocidade constante. No entanto, aqui funciona a abstração de ‘subtrair’ o efeito de um certo modelo de campo de forças (constante, no caso) para construirmos um referencial inercial no qual se podem aplicar os postulados de Newton. Assim, o referencial da superfície da Terra pode ser entendido (até certa precisão!), para efeito de aplicação das leis de Newton, como se fosse um referencial inercial no qual um campo de forças gravitacional uniforme foi ‘ligado’. Para grandes distâncias ou velocidades, é preciso ainda corrigir esse referencial com maior precisão, pelo uso de modelos de forças fictícias causadas pela rotação da Terra, e assim por diante. O nível de rebuscamento do modelo de forças fica sempre a depender da precisão com que se descreve o movimento.

Em resumo, os postulados de Newton formam uma estrutura autoconsistente cuja validade experimental pode ser testada por medidas. Os dois primeiros postulados nos fornecem o contexto de validade desse formalismo. O primeiro estabelece o ‘palco’ onde funciona a descrição do movimento, o referencial inercial, e o segundo define o efeito de uma força sobre a quantidade física central no formalismo, o momento. Na prática, ‘forçamos’ a situação física real a ‘caber’ nessa descrição abstrata através de aproximações e criação de modelos de força, e testamos ao final a consistência do quadro. O terceiro postulado possui praticamente todo o conteúdo físico de como devem ser as interações newtonianas, ao lhes impor linearidade e ação entre pares de partículas respeitando magnitudes e direções relativas bem determinadas.

Para finalmente começarmos a descrever o movimento, precisamos descobrir expressões para as forças em função do espaço, do tempo, e de características relevantes das partículas. Isso só pode ser feito experimentalmente, uma vez que a mecânica de Newton não pretende prever nem os tipos de interações possíveis nem as origens físicas últimas das mesmas.

1.2 Estática, ou a arte de ficar parado

A aplicação à primeira vista mais trivial das leis de Newton diz respeito às ‘coisas paradas’, ou melhor, às coisas que se movem como estabelece o primeiro postulado de Newton. Mas, apesar da aparência de simplicidade, há uma infinidade de aplicações (algumas bastante complexas) para a estática newtoniana¹¹. É por seu uso ainda hoje que descrevemos as forças (e.g. compressão, tração) agindo sobre estruturas em geral (e.g. prédios, brocas, motores) para avaliarmos estabilidade e materiais de construção adequados.

A estática considera o problema de averiguar ou garantir que um corpo ou conjunto de corpos fique em repouso no referencial inercial escolhido. Queremos calcular as condições mecânicas necessárias para

restringir o movimento a uma superfície normal ao gradiente da força externa e no qual o mesmo tenha magnitude constante (equipotencial).

¹¹Historicamente, foram considerações de estática que levaram James Bernoulli e d’Alembert (por volta de 1730) a desenvolverem outro princípio fundamental capaz de elucidar a física da mecânica, o princípio de ‘trabalho virtual nulo’ que leva à mecânica de Lagrange e a conexões com o cálculo variacional de Euler.

que todas as partes de uma estrutura coesa possam ter aceleração zero. Em primeiro lugar, deve valer, então, que a força total agindo sobre o sistema se anule, i.e. $\vec{F}_j = 0$, para cada partícula microscópica j constituindo o corpo macroscópico. Em segundo lugar, a estática também impõe a ausência de *rotação*.

Para descrever rotações, é conveniente definir os vetores torque $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ e momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, em que \vec{r} é a *posição pontual* de atuação da força efetiva, a qual queremos descobrir. Fazendo o produto vetorial com \vec{r} , a segunda lei de Newton aplicada às rotações se escreve

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{L}. \quad (1.7)$$

A estática requer, como condição adicional, que o torque total atuando sobre o sistema seja nulo, $\vec{\tau} = 0$.

Vamos considerar nesta seção (por conveniência) sempre o referencial em que o sistema sob estudo permanece em repouso. Os sistemas considerados na estática quase sempre não são isolados de forças externas; mais precisamente, sofrem ação de campo de forças uniforme (o modelo mais simples para descrever a estática na superfície da Terra). Esse campo aponta na vertical com relação ao solo, no sentido de cima para baixo, e tem a propriedade peculiar de que a magnitude da força depende da massa inercial m do objeto, ou seja,

$$\vec{F} = m\vec{g}, \quad (1.8)$$

em que \vec{g} é a aceleração gravitacional local. Ele modelo de força reconhece, por construção, que o campo gravitacional produz a mesma aceleração em qualquer objeto que se encontre sob sua influência pura.

1.2.1 Forças de coesão

Consideremos um simples bloco rígido repousando sobre superfície. Pense numa partícula microscópica com massa dm constituindo a superfície superior do corpo. Sobre ela age a força gravitacional com magnitude $dP = gdm$. Essa força normalmente aceleraria a partícula para baixo. No entanto, por se encontrar presa ao material, permanece parada. Isso só pode ocorrer se o corpo exerce força que balanceie exatamente a força gravitacional.

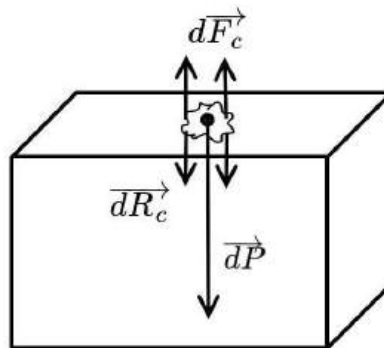


Figura 1.1: Forças agindo num pedaço infinitesimal de um bloco coeso na superfície da Terra.

A natureza dessa *força de coesão* não é óbvia se nos falta a compreensão das interações atômicas e moleculares (como faltava a Newton!), mas alguns fatos simples e gerais sobre ela podem ser estabelecidos a partir das leis newtonianas. Por exemplo, podemos tentar descobrir de onde vem a força de coesão cortando o corpo em pedaços menores. Se o cortarmos na metade, e afastarmos a metade que não contém a partícula,

esta permanecerá no mesmo local sem ser perturbada, indicando que a outra metade não deve ter qualquer influência sobre ela. Podemos continuar esse processo de cortar fora pedaços do corpo rígido (desde que não removamos material sob a partícula), e sabemos que mesmo assim ela manterá seu estado de equilíbrio estático. Isso nos indica que a força de coesão não age à distância, mas deve ser uma força localizada de *contato*. Com isso queremos dizer que sua atuação requer proximidade muito maior do que nossa precisão de observação ou de corte. O fato de o material sob a partícula não poder ser removido junto com o material a seu redor sem alterar sua posição ou velocidade pode nos indicar que a força de sustentação age ao longo de toda uma coluna vertical de partículas (empilhadas por forças locais de contato) até chegar na partícula da superfície. É como se a força peso da partícula estivesse comprimindo todas as partículas abaixo dela, que reagem por contato local umas sobre as outras até que, na posição da partícula na superfície, a força de coesão cancele sua força peso.

No entanto, alguém pode notar, é possível também remover material sob a partícula, desde que dessa vez preservemos material na superfície de forma a sustentar a partícula nessa nova situação. De fato, se o material for um corpo rígido ideal (i.e. indeformável), é preciso apenas que ao menos um pedaço de material encoste na partícula para que ela permaneça inerte. Uma aplicação comum desse princípio é a seguinte: podemos remover todo o material do bloco, deixando apenas suas quatro arestas verticais e a superfície superior: construímos, assim, uma mesa.

A diferença entre as duas situações acima, a coluna de material e a mesa, é a forma como a força peso da partícula inerte se *distribui* nas partículas vizinhas. É interessante notar que nos dois casos a soma de todas as forças de contato a atuar na partícula deve resultar no oposto exato de sua força peso, quer as forças parciais venham por baixo ou pela lateral da partícula. De fato, essa é a definição de um corpo rígido perfeito: as forças de coesão a unir suas partículas se opõem de forma a compensar qualquer perturbação externa, mantendo constantes suas posições relativas. A distribuição do peso em estruturas é o problema prático mais importante da estática.

Mas não existem corpos rígidos ideais, e com um pouco mais de investigação experimental podemos aprender mais uma coisa importante sobre esse tipo de força de contato: ela sempre vem acompanhada de uma deformação, que pode ser tanto na direção da força resultante (tração ou compressão), quanto em alguma direção ortogonal (cisalhamento). Além disso, para deformações reversíveis (i.e. se o corpo retorna ao mesmo formato quando a força de perturbação cessa), a magnitude da força de coesão é *proporcional* à magnitude da deformação (relação linear).

1.2.2 Centro de gravidade

A condição de coesão de um corpo nos permite simplificar a descrição do campo gravitacional. Cada pedacinho do corpo é ‘puxado para baixo’ pela força peso $d\vec{P} = \vec{g} dm$, que é então balanceada pela força total de contato $d\vec{F}_c$ advinda dos elementos vizinhos. A condição de coesão do corpo¹² implica em $d\vec{F}_c = -d\vec{P}$.

A essa força corresponde o par de reação $d\vec{R}_c$, a força com que o pedaço infinitesimal considerado ‘puxa para baixo’ seus elementos vizinhos, efetivamente ‘repassando-lhes’ seu peso, i.e. $d\vec{R}_c = -d\vec{F}_c$ de acordo

¹²Essa condição não supõe um corpo rígido ideal, sendo válida sempre que as partes que formam um corpo permanecem em repouso relativo. O ponto central que diferencia um corpo rígido ideal de outros corpos coesos é que o primeiro atinge essa condição *com deformação nula*.

com a terceira lei de Newton. Esse mesmo efeito ocorre para todo elemento infinitesimal do corpo. Temos então o cenário em que localmente, para cada pedaço infinitesimal do corpo, é criada por seus vizinhos a força de contato com direção e magnitude corretas para cancelar exatamente sua força peso. As forças de contato e os pesos infinitesimais, portanto, sempre se anulam localmente, restando livre apenas o efeito das forças de reação às forças de contato, que, somadas, fornecem

$$\vec{R}_c = \int_V d\vec{R}_c \stackrel{3^a \text{ lei}}{=} - \int_V d\vec{F}_c \stackrel{\text{coesão}}{=} \int_V d\vec{P} = \vec{P}, \quad (1.9)$$

em que as integrais são realizadas sobre o volume V do corpo. Assim, o que ‘puxa para baixo’ um corpo rígido é a resultante dos pares de reação às forças locais de coesão, e não o peso¹³! As forças de reação se ‘propagam’ pela estrutura, somando-se.

No final, é como se a gravidade tratasse o corpo como um objeto contendo toda a massa concentrada num ponto. Podemos então ignorar as forças de coesão atuando internamente ao corpo e substituí-las por seu efeito (i.e. o corpo permanecer coeso, com aceleração relativa nula entre seus elementos) para começarmos a interpretar o corpo rígido extenso (para efeito da dinâmica) como se fosse uma partícula. A posição desse objeto pontual abstrato precisa ser encontrada através da imposição adicional de ausência de *rotação*.

Para um corpo rígido sob influência do campo gravitacional uniforme, o *centro de gravidade* é o ponto fictício \vec{r}_g no qual toda a massa parece se concentrar sob o ponto de vista da dinâmica. Escrevendo o torque total agindo sobre o corpo como

$$\vec{\tau} = \int_V d\vec{\tau} = \int_V \vec{r} \times d\vec{P} = \int_V \vec{r} \times \vec{g} dm = \vec{r}_{cm} \times \vec{P}, \quad \text{em que} \quad \vec{r}_{cm} = \int_V \vec{r} dm, \quad (1.10)$$

vemos então que impor para o torque a forma fictícia

$$\vec{\tau} = \vec{r}_g \times \vec{P} \quad (1.11)$$

estabelece que o centro de massa e o centro de gravidade coincidem (i.e. $\vec{r}_g = \vec{r}_{cm}$) num campo gravitacional constante. Esse resultado nos permite simplificar o tratamento de várias situações realistas.

1.2.3 O uso de vetores na estática

As leis de Newton possuem afinidade natural com vetores definidos no espaço euclidiano. Além de sintetizarem em um só objeto várias quantidades mencionadas nas leis de Newton (direção, sentido e magnitude), vetores não fazem referência a pontos específicos do espaço, algo admitido implicitamente pelo referencial inercial newtoniano.

Por isso vetores nos permitem resolver problemas de maneira geométrica, sem a necessidade de utilização de um sistema de referência. Considere um problema de estática em que uma pessoa com massa conhecida se encontra sobre uma escada, de massa desprezível, apoiada numa parede sem atrito (Fig. 1.2, esquerda). Sobre o ponto de apoio da escada no solo atua uma força de atrito a ser determinada. Existem três forças atuando sobre a escada para que ela permaneça em equilíbrio estático: o peso \vec{P} do bloco, a reação \vec{R} da

¹³Na verdade, isso é um jogo de palavras. O que ocorre é o seguinte: $\int_V (d\vec{R}_c + d\vec{F}_c + d\vec{P}) = \vec{P}$, ficando à critério de preferência pessoal escolher que força diferencial se cancela com qual e qual ‘sobra’ para fazer a integral.

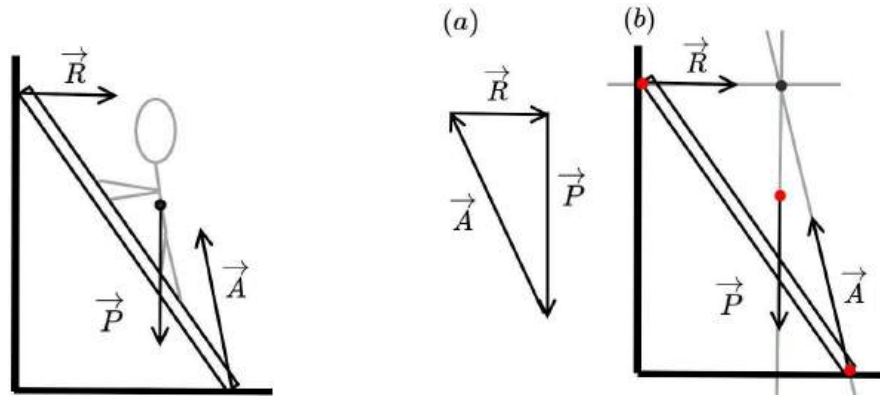


Figura 1.2: Esquema de um problema típico de estática. Uma pessoa se encontra sobre uma escada apoiada à parede e ao chão (esquerda). As forças atuando sobre o sistema ideal são representadas à direita.

parede, e o atrito \vec{A} do solo (Fig. 1.2, direita). Sua soma vetorial precisa ser nula. E cada uma delas atua sobre um ponto do espaço, respectivamente: $\vec{r}_{\vec{P}}$, $\vec{r}_{\vec{R}}$ e $\vec{r}_{\vec{A}}$. A soma vetorial dos torques deve se anular. O tratamento vetorial do problema nos permite escrever essas duas condições de equilíbrio estático como

$$\begin{aligned} (a) \quad & \vec{P} + \vec{R} + \vec{A} = 0, \\ (b) \quad & \vec{r}_{\vec{P}} \times \vec{P} + \vec{r}_{\vec{R}} \times \vec{R} + \vec{r}_{\vec{A}} \times \vec{A} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

A condição (a) determina que os três vetores formam um triângulo (Fig. 1.2a), e nos permite fixar as direções e magnitudes relativas uns aos outros. A segunda condição nos permite determinar a direção da força de atrito, pela geometria dos pontos conhecidos de aplicação das forças, notando que a equação pode ser tornada nula pela anulação de cada um de seus termos (Fig. 1.2b). Isso corresponde a determinar geometricamente o ponto que, por se encontrar simultaneamente na linha de ação de todas as forças, torna nulo cada um dos torques individualmente (i.e. $\vec{r}_{\vec{P}} \parallel \vec{P}$, $\vec{r}_{\vec{R}} \parallel \vec{R}$ e $\vec{r}_{\vec{A}} \parallel \vec{A}$). Tomando como linha de base a força peso (vertical), e a força de reação da parede, que precisa ser horizontal por causa da falta de atrito com a parede, encontramos o ângulo entre \vec{A} e as demais forças. O triângulo encontrado na primeira condição nos permite resolver todas as magnitudes faltantes, sem se precisar de sistemas de referência para a decomposição das forças.

O problema geral da estática é um pouco mais complicado do que isso. Consideramos no exemplo acima as condições ideais em que todas as forças infinitesimais agindo sobre o sistema podem ser reduzidas a apenas três, o que é importante para tornar o problema solúvel por apenas uma escolha de configurações de forças. Por isso supusemos que a escada toca o chão em apenas um ponto, o mesmo valendo em seu contato com a parede. No mundo real, a força de reação sobre a escada produzida pelo contato com o chão se distribui por toda uma superfície, já que é produzida pela deformação local do chão e da escada. O mesmo vale para a parede, que além disso produz atrito para impedir a locomoção longitudinal da escada. O problema real admite, portanto, várias soluções compatíveis com as equações simples da estática, sendo necessário buscar outros princípios para determinar a configuração efetivamente escolhida pela natureza (e.g. minimização da energia). Os exemplos idealizados nos fornecem aproximações simples para nos auxiliar a entender o comportamento geral de sistemas físicos reais.

1.2.4 Distribuição das forças de coesão em estruturas contínuas

Talvez a aplicação mais importante das leis de Newton no contexto da estática seja no cálculo de estruturas funcionais. O problema se resume a obter uma estrutura contínua que se auto-sustente no campo gravitacional terrestre.

Exemplo: Corda em suspensão. Consideremos a título de exemplo uma corda com densidade uniforme de massa suspensa ao teto (Fig. 1.3a). Busquemos entender como ocorre a distribuição de forças ao longo da corda. No ponto de sustentação no teto, a força atuante sobre a corda deve ser igual em magnitude à força peso da corda; já na outra ponta da corda, em sua extremidade suspensa, a força deve tender a um infinitésimo, pois lá nada precisa ser sustentado. Vemos então que a tração deve variar com a posição na corda. A forma como isso ocorre pode ser determinada considerando as forças que atuam sobre cada área transversal da corda.

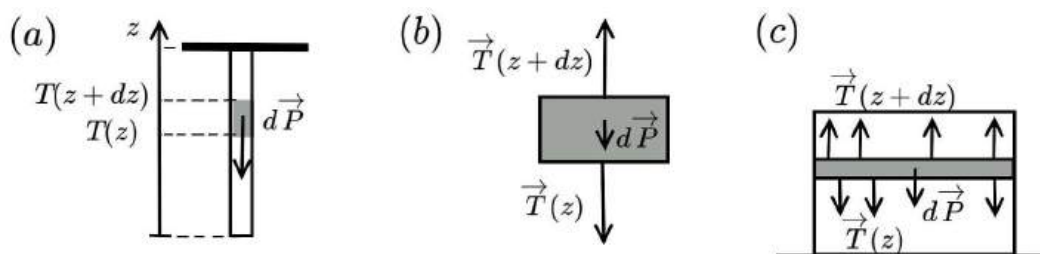


Figura 1.3: (a) Corda presa ao teto. A magnitude da tração T varia com a altura z do elemento de corda. (b) Detalhe das forças agindo sobre um pedaço infinitesimal da corda. (c) Bloco disposto sobre o chão.

A diferença entre a magnitude da tração $T(z)$ numa altura z da corda e num infinitésimo dz acima dessa posição é dada pela magnitude da força peso $dP = gdm$ do elemento infinitesimal da corda, i.e. a tração varia para sustentar os pedaços adicionais de corda¹⁴. A massa desse elemento se relaciona à densidade linear μ da corda como $dm = \mu dz$. Podemos escrever

$$T(z + dz) - T(z) = dP = g dm = \mu g dz \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz}T(z) = \mu g. \quad (1.13)$$

A mesma relação seria encontrada impondo como nula a totalidade das forças atuando sobre um pedaço infinitesimal qualquer da corda, como nos diz a estática, caso em que escreveríamos $\vec{T}(z + dz) + \vec{T}(z) + d\vec{P} = 0$ (Fig. 1.3b). A função $T(z)$ é encontrada por integração em z impondo-se as condições de contorno mencionadas anteriormente, i.e. $T(z = 0) = 0$ e $T(z = \ell) = P$, em que ℓ é o comprimento da corda e $P = \mu g \ell$, a magnitude de seu peso. Obtemos como solução

$$T(z) = P \frac{z}{\ell} = \mu g z. \quad (1.14)$$

Exemplo: Elevador espacial. Relação similar à Eq. (1.14) vale para as forças de compressão atuando no interior de um corpo rígido disposto sobre uma superfície (Fig. 1.3c). A magnitude da força total de

¹⁴Observemos que a força de tração se distribui sobre toda a área transversal do material. Supomos por simplicidade uma corda ideal delgada, na qual não precisamos nos preocupar com isso.

compressão atuando sobre sua seção transversal na altura z se escreve como $T(z) = P(1 - z/l)$, em que nesse caso se tem o solo como ponto de apoio e, portanto, todo o peso sustentado pela seção na altura $z = 0$.

Na realidade, essa situação em que o material é submetido a um estresse variável com a altura não permite aproveitar bem suas características mecânicas. Todo material possui uma compressão ou tração máxima fora da qual perde sua coesão (i.e. danifica-se), chamado de ponto de *resistência à tensão ou à compressão*. A estratégia utilizada acima, i.e. empilhar material com seções transversais uniformes, coloca o máximo estresse em apenas uma região do corpo (no caso de uma estrutura em tração, como a corda, essa região coincide com o ponto de fixação no teto; no caso do bloco ou de uma torre, a região sob maior estresse de compressão é sua base), e por isso acaba limitando a altura máxima dos objetos que podem ser construídos com ele. Por exemplo, para uma coluna de concreto, que possui resistência à compressão dada por $S \approx 3$ MPa (unidade de pressão), e escrevendo sua densidade como $\mu = \rho A$ (em que A é a área da seção transversal e ρ , sua densidade volumétrica), temos que a máxima altura de uma coluna de sustentação com seção transversal uniforme seria dada por $\ell_{max} = S/(\rho g)$, que para o concreto ($\rho \approx 2,4 \times 10^3$ kg/m³) seria $\ell_{max} \approx 100$ m. Para aumentar a altura máxima da estrutura mantendo o mesmo material, é preciso distribuir melhor seu peso para diminuir a concentração do estresse.

Suponha que façamos a área transversal variável com a altura, na forma $A(z)$. Nesse caso, a pressão $\mathcal{P}(z + dz)$ sobre o material na altura $z + dz$ é dada por

$$\mathcal{P}(z + dz) = \frac{F(z + dz)}{A(z + dz)} \approx \frac{F(z) + \frac{d}{dz}F(z)dz}{A(z) + \frac{d}{dz}A(z)dz} \quad (1.15)$$

$$\approx \mathcal{P}(z) + \left(\frac{1}{F(z)} \frac{d}{dz}F(z) - \frac{1}{A(z)} \frac{d}{dz}A(z) \right) dz, \quad (1.16)$$

em que termos de segunda ordem em dz foram desconsiderados (i.e. supomos pequena a curvatura da estrutura). Em comparação com a Eq. (1.13), a variação de primeira ordem passa a conter dois termos: o termo usual de variação da magnitude da força do objeto com a altura e um termo novo que depende da variação da área transversal e que pode ser manipulado para ter sinal oposto ao primeiro.

No caso mais favorável, podemos cancelar exatamente o aumento de pressão pelo aumento da área, caso em que queremos tornar a compressão $\mathcal{P}(z) = F(z)/A(z) = \mathcal{P}_0$ constante ao longo de toda a estrutura,

$$\frac{1}{F(z)} \frac{d}{dz}F(z) - \frac{1}{A(z)} \frac{d}{dz}A(z) = 0. \quad (1.17)$$

Utilizando a imposição $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_0$ e a expressão $\frac{d}{dz}F(z) = -g dm = -\rho g A(z) dz$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{d}{dz}A(z) = -\frac{\rho g}{\mathcal{P}_0}A(z), \quad (1.18)$$

cujas solução é a função exponencial,

$$A(z) = A(0) \exp(-z/z_0), \quad z_0 = \mathcal{P}_0/\rho g, \quad (1.19)$$

na qual z_0 fornece a escala típica de variação da área transversal.

O maior valor possível de z_0 para um dado material é aquele que lhe causa uma compressão $\mathcal{P}_0 = S$ igual à sua resistência, e coincide com a altura máxima ℓ_{max} encontrada anteriormente. Entretanto, a situação agora muda drasticamente, já que a altura máxima permitida pelo material não mais existe: se a base de

apoio for suficientemente grande, o material pode sustentar uma torre com qualquer altura. O preço a pagar é que cada z_0 a mais de comprimento da estrutura demanda aumentar sua área de base por um fator relativo fixo (aumento exponencial), o que logo torna impraticável obter alturas muito maiores do que z_0 (e.g. $e^5 \sim 10^2$, significando que altura acima de z_0 por um fator 5 aumenta o diâmetro da estrutura por um fator 100 do topo ao solo¹⁵).

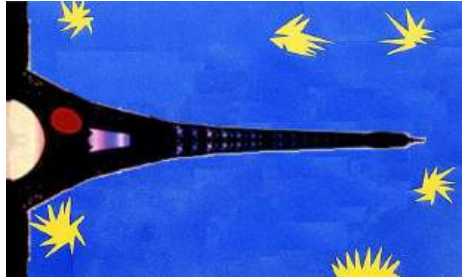


Figura 1.4: O elevador espacial com perfil exponencial otimiza a distribuição estrutural de peso.

Podemos empregar a Eq. (1.19) para estimar a ordem de grandeza das alturas máximas fisicamente possíveis¹⁶ para estruturas construídas sobre a superfície da Terra (para materiais conhecidos!). A Tab. 1.1 mostra as propriedades de alguns materiais (fonte: Wikipédia). Para possuir valor alto de z_0 , um material precisa combinar resistência e leveza.

O destaque da tabela fica com os materiais biológicos, desenvolvidos por seleção natural para serem leves e resistentes (teia de aranha tudo bem, mas você já sabia que o bambu possui excelentes propriedades mecânicas? Por isso ele é cada vez mais usado na construção civil!). Dentre os metais, destaca-se o berílio por sua leveza e resistência¹⁷. Talvez seja pouco surpreendente notar que os únicos materiais com resistência capaz de compensar alta densidade são o aço e o diamante. O material comercial mais adequado à construção de uma estrutura com altura recorde seria a fibra de carbono ou similar. Estimativas teóricas de primeiros princípios mostram que novos materiais baseados em nanotubos de carbono ou similares têm o potencial de permitir a construção de estruturas com dimensões comparáveis ao raio da Terra.

Nesses casos hipotéticos extremos, a aproximação de campo gravitacional constante deixa de valer, sendo preciso utilizar a expressão completa da força gravitacional newtoniana para corrigir nosso modelo. Uma estrutura desse porte poderia fornecer acesso mais econômico ao espaço, visto que grande parte do combustível de um foguete é usado só para contrabalancear a atração gravitacional durante a ascensão. O chamado ‘elevador espacial’ poderia levar carga até a órbita geostacionária evitando essa parte enorme do custo de energia. Estima-se que o custo financeiro atual de envio de 1 kg de carga ao espaço, da ordem de U\$ 10 mil, poderia ser reduzido a apenas U\$ 100, talvez tornando o espaço um ambiente *pop*. Existem estudos da Nasa sobre o assunto, mas a logística de construção é bastante complicada.

¹⁵ Isso pode não parecer impressionantemente difícil à primeira vista, mas lembremos a regra maligna de composição da exponencial: se quiséssemos aumentar a altura por apenas o dobro desse fator, i.e. um fator 10, teríamos de alargar seu diâmetro por um fator 10000 (i.e. 100×100); um aumento de altura por fator 15 (i.e. $5 + 5 + 5$) demandaria alargamento de diâmetro em 1 milhão vezes (i.e. $100 \times 100 \times 100$), e assim por diante. A cada parcela na altura corresponde um fator no diâmetro!

¹⁶ A altura máxima de uma estrutura na prática requer a adoção de uma margem de segurança no uso do material. Utiliza-se na engenharia geralmente um fator 2 como margem (o fator exato depende da aplicação), significando que a compressão ou tração máxima agindo no material só pode atingir metade do valor de ruptura.

¹⁷ Por essa e por suas propriedades térmicas, o berílio é empregado no suporte para o grande espelho do telescópio espacial James Webb, o sucessor do Hubble.

Material	ρ_0 (10^3 kg/m ³)	S (GPa)	z_0 (km)
pele	2,2	0,002	0,09
concreto especial	2,7	0,003	0,11
plástico	0,9	0,05	5,6
<i>nylon</i>	1,1	0,075	6,7
osso	1,6	0,13	8,3
aço comum	8,2	0,86	11
titânio	4,5	1,04	24
berílio	1,8	0,45	25
aço especial	7,4	5,2	71
teia de aranha	1,3	1,0	78
diamante	3,5	2,8	82
bambu	0,4	0,42	$1,0 \times 10^2$
<i>kevlar</i>	1,4	3,8	$2,7 \times 10^2$
nanotubo de carbono macroscópico	1,3	3,6	$2,8 \times 10^2$
fibra de carbono	1,8	6,4	$3,6 \times 10^2$
nanotubo de carbono microscópico	1,3	63	5×10^3
grafeno (teórico)	1,0	~ 130	13×10^3
nanotubo de carbono (teórico)	1,3	~ 300	23×10^3

Tabela 1.1: Altura de ruptura z_0 de materiais conhecidos, de acordo com a Eq. (1.19). Para efeito de comparação, a estrutura artificial mais alta já erguida sobre a superfície da Terra possui $\approx 0,9$ km de altura; o raio da Terra vale $R_T \approx 6,4 \times 10^3$ km.

Por fim, notemos que as estruturas consideradas como exemplo não são lá muito realistas por serem assumidas sólidas. Uma estrutura real possui vãos livres e só utiliza o material de suporte em colunas e lajes. A ideia principal, no entanto, não muda muito, bastando imaginar cortes na estrutura sólida que calculamos. Uma forma prática de obter estruturas reais leves e resistentes é combinar barras de um material em formas geométricas adaptadas à boa distribuição das forças de compressão, tal como realizado pelas notórias ‘esferas geodésicas’ do arquiteto americano Richard Fuller. Para se construir uma torre eficiente baseada nessa ideia, é preciso que o número de barras (se idênticas) em cada camada respeite as relações exponenciais encontradas.

1.3 Dinâmica newtoniana e modelos de forças

1.3.1 Visão geral da dinâmica newtoniana

Resolver a dinâmica do movimento de uma partícula significa encontrar sua trajetória no espaço como função do tempo. Tudo é formulado em termos das grandezas mensuráveis posição e tempo, que formam o substrato estrutural sobre o qual a teoria newtoniana é construída. A grandeza física central na dinâmica newtoniana é o momento, sendo a forma como varia no tempo determinada por forças.

Trajetórias de partículas são entendidas como linhas contínuas no espaço tridimensional euclidiano onde o “tic-tac” do tempo marca posições específicas: o tempo é como uma régua a posicionar cada partícula em

um ponto específico de sua linha de trajetória. Todos os demais conceitos da mecânica newtoniana derivam dessa visão intuitiva do movimento.

A primeira lei de Newton dita que a trajetória padrão de qualquer partícula livre da ação de forças e movendo-se num referencial inercial é uma linha reta (abstração originada no trabalho de Galileu Galilei). Se fizermos marcações na trajetória referentes às posições assumidas pela partícula a cada “tic-tac” do relógio (como se a trajetória fosse uma régua linear), obteremos pontos equidistantes no espaço. Em cada uma dessas marcações podemos desenhar o vetor velocidade instantânea da partícula, que será constante e deve apontar para o próximo ponto.

A velocidade instantânea pode ser entendida como a relação entre a distância percorrida durante um “tic-tac” infinitesimal e a duração do mesmo. A aceleração da partícula é dada pela forma como as distâncias entre marcações do “tic-tac” do relógio variam na trajetória entre pontos diferentes. Podemos aqui também pensar num “tic-tac” infinitesimal e subtrair os vetores velocidade instantânea separados na trajetória pela distância correspondente a ele. Aceleração é sempre o único efeito de forças, pois, estritamente falando, a massa de uma partícula é uma propriedade própria imutável na mecânica de Newton¹⁸. O advento da massa reflete o fato inescapável de que a mesma força pode afetar diferentemente partículas distintas, e pode ser medida indiretamente através de medidas diretas de espaço e tempo pelo uso de uma massa de prova. Encontraremos o vetor nulo para a aceleração na trajetória padrão.

A variação temporal do momento é causada pela resultante das forças atuando sobre a partícula. Forças são representadas por vetores fixados a cada ponto do espaço (campo vetorial), eventualmente variáveis no tempo. A presença de uma força num ponto da trajetória da partícula tem o efeito de lhe acelerar localmente (mudar seu vetor momento, i.e. sua velocidade). O estudo da dinâmica requer o desenvolvimento de modelos teóricos para os campos de forças nos quais ocorre o movimento.

Como o tempo é entendido como uma grandeza contínua, é sempre possível encontrar um intervalo de tempo pequeno o suficiente para que a força tenha efeito desprezível sobre a velocidade da partícula, de forma que esta possa ser assumida constante para se encontrar o próximo ponto da trajetória. Em outras palavras, o vetor distância entre dois pontos consecutivos de uma trajetória pode sempre ser escrito até primeira ordem no tempo como independente da aceleração, desde que o intervalo de tempo escolhido seja suficientemente pequeno. Isso nos permite construir a trajetória ponto a ponto pelo prolongamento de segmentos de reta infinitesimais.

De fato, a dinâmica newtoniana parece ter sido pensada dessa forma intuitiva em que o ‘estado’ da partícula, dado pelo par posição e momento num certo instante do tempo, junto à configuração do campo de forças no mesmo instante e posição, pode ser usado para encontrar o próximo ‘estado’ da partícula no tempo (notemos que Newton desenvolvia o cálculo diferencial enquanto criava suas leis da mecânica). Resolver o movimento se reduz a encontrar a transformação que leva cada estado $\{\vec{r}(t), \vec{p}(t)\}$ no subsequente $\{\vec{r}(t + dt), \vec{p}(t + dt)\}$.

Segundo os postulados de Newton, se dt for suficientemente menor do que qualquer escala de variação

¹⁸Ainda que em alguns problemas possa ser útil definir um objeto com massa variável, o que se faz efetivamente nesses casos é o truque de redefinir o sistema físico de interesse como algo que ejeta partículas que antes eram entendidas como parte do sistema. Se contarmos a massa total do sistema incluindo as partículas ejetadas do subsistema físico de interesse, a massa newtoniana é imutável. Isso viria entretanto a ser mudado com o advento da teoria da relatividade de Einstein.

do sistema, todo movimento se reduz ao conjunto de regras

$$\{\vec{r}(t), \vec{p}(t)\} \xrightarrow{\text{Newton}} \{\vec{r}(t+dt), \vec{p}(t+dt)\}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} \vec{r}(t+dt) \stackrel{1^{\text{a}} \text{ lei}}{=} \vec{r}(t) + \frac{\vec{p}(t)}{m} dt \\ \vec{p}(t+dt) \stackrel{2^{\text{a}} \text{ lei}}{=} \vec{p}(t) + \vec{F}(\vec{r}, t) dt \end{cases}. \quad (1.20)$$

A primeira equação utiliza a primeira lei para aproximar a trajetória por uma reta localmente; já a segunda corrige em primeira ordem no tempo a taxa de percurso da partícula sobre a reta para o cálculo do próximo ponto. Se houvesse computadores na época de Newton, possivelmente não teríamos as ferramentas de solução analítica de equações diferenciais, pois o conjunto de regras acima permite resolver qualquer trajetória numericamente! Essa é uma visão hoje chamada de ‘local’, i.e. tudo pode ser pensado em termos de pequenos acontecimentos localizados numa região infinitesimal do espaço. O oposto disso seria uma visão ‘global’, na qual a trajetória como um todo é pensada para satisfazer alguma propriedade dependente de todos os pontos da curva. A visão ‘global’ da trajetória, conforme veremos no decorrer do curso, é o ponto de partida da formulação lagrangiana da mecânica.

Observemos, no entanto, que o campo de forças newtoniano não satisfaz necessariamente a mesma propriedade de localidade das trajetórias, pois em geral terá como causa outra partícula também possuidora de um ‘estado’ próprio no mesmo instante de tempo. Se essa partícula estiver a uma grande distância da primeira (e Newton foi de fato quem inventou a “ação à distância” com sua formulação da gravidade), o campo de forças na posição da primeira partícula deve depender do ‘estado’ instantâneo da segunda partícula. Isso *precisa* ser assim na teoria newtoniana por conta de sua terceira lei: forças mútuas são sempre opostas e de mesma magnitude, *ainda que à distância*. Assim, um sistema físico cujas partículas evoluem numa escala típica τ_d e no qual as forças internas tomam tempo típico τ_f para se atualizarem é bem descrito pela dinâmica newtoniana, i.e. pelas regras da Eq. (1.20) para a construção ponto a ponto da trajetória, no cenário aproximado

$$\tau_f \ll dt \ll \tau_d. \quad (1.21)$$

Esse requisito pode ser usado, de maneira reversa, como critério de escolha do intervalo dt usado no cálculo diferencial da trajetória.

A parte não-local das interações newtonianas (explicitada, em especial, na força da gravidade) seria corrigida por Einstein na teoria da relatividade geral, inspirado pelas equações do eletromagnetismo de Maxwell que impõem a “ação retardada” do campo eletromagnético de forma natural e elegante. Portanto, a terceira lei não vale sempre, e por isso as trajetórias newtonianas não são perfeitamente corretas (mas o que é?). A mecânica newtoniana se restringe a descrever o movimento advindo de interações percebidas como instantâneas dentro da precisão de medida (sendo esse mais um dos conteúdos físicos da terceira lei!). Para sermos menos duros com Newton, que certamente merece no mínimo nosso respeito (senão nosso assombro), podemos dizer que suas leis valem no limite em que a escala de tempo de variação do estado das partículas é muito maior do que o intervalo de tempo¹⁹ necessário para que o campo de forças se reajuste aos novos estados das partículas.

Uma consequência curiosa dessa forma ‘infinitesimal’ ou ‘local’ de pensar é a propriedade inesperada de *reversibilidade* do quadro pela inversão da direção do tempo. Por conta dessa simetria, as leis de Newton

¹⁹Segundo a teoria da relatividade especial, esse tempo precisa ser no mínimo igual ao tempo que a luz toma para percorrer a distância que separa as partículas.

permitem calcular não apenas o futuro, mas também o passado. Se o ‘estado’ da partícula e a configuração do campo de forças relevante são perfeitamente conhecidos, as leis de Newton permitem deduzir com base apenas nessa informação *toda a história* pregressa e futura da partícula. É muito tentador generalizar esse quadro e transformá-lo em visão de mundo, chamada mecanicista ou determinística, para aplicá-lo a outras situações que não relativas ao movimento de objetos no espaço. Todavia, o mecanicismo e, de forma mais geral, também o determinismo, estão em frontal desacordo com o que conhecemos da natureza.

Contra o mecanicismo podemos citar simplesmente nossa experiência diária: sabemos que eventos complexos não ocorrem com mesma probabilidade nos dois sentidos (não se conhecem exemplos de pessoas rejuvenescendo!). Os sistemas mais simples a mostrar evidências de uma direção preferencial de evolução do tempo ocorrem na termodinâmica, parte da física na qual leis simétricas no tempo não permitem descrever alguns comportamentos básicos observados (segunda lei da termodinâmica!). Contra a ideia de determinismo absoluto, a mecânica quântica viria a ter grande sucesso na descrição de sistemas microscópicos ao custo de abrir mão de parte do determinismo, em especial do “sacrossanto” princípio de que uma teoria deve prever resultados individuais de medida. Sabemos, então, que as leis da mecânica de Newton não podem descrever tudo, ao contrário da visão determinística, e outros elementos teóricos devem ser fundamentais para se entender aspectos mais gerais da dinâmica. Atemo-nos, portanto, ao modesto objetivo de descrever o movimento.

1.3.2 Campo gravitacional uniforme

As aplicações mais elementares das leis de Newton envolvem o campo gravitacional uniforme que experienciamos todos os dias²⁰. Vejamos abaixo alguns exemplos típicos de situações físicas bem descritas por esse modelo simples de força.

Plano inclinado

Consideremos um bloco com massa m disposto sobre uma superfície plana sem atrito e inclinada por um ângulo θ com relação à horizontal. As forças relevantes são esquematizadas na Fig. 1.5.

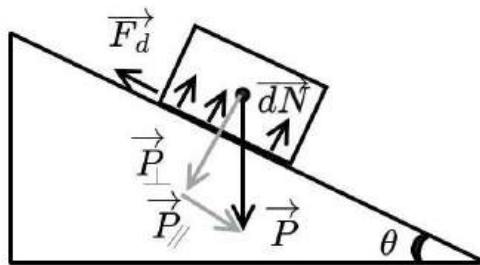


Figura 1.5: Bloco rígido movimentando-se sobre um plano inclinado no campo de forças uniforme.

A principal força a atuar sobre o bloco é seu peso \vec{P} . É ela que produz todas as demais. Ao comprimir

²⁰Em geral, vamos entender um campo de forças como “uniforme” se ele não variar no espaço. Como todo campo, ele pode depender adicionalmente de alguma propriedade interna das partículas que sofrem sua ação, tal como a massa inercial no caso do campo gravitacional, não sendo portanto percebido da mesma forma por todas as partículas.

a superfície do plano inclinado, o bloco obriga seu material a reagir com a força normal \vec{N} para manter coesão; esta atua de volta no bloco, equilibrando sua força peso e restringindo seu movimento à superfície do plano inclinado²¹. Como a força normal é criada para balancear exatamente a componente de compressão da força da gravidade²², deve-se ter $N = P \cos \theta$.

A última força a atuar sobre o bloco é o atrito. Essa força tem origem em efeitos microscópicos altamente não triviais, e por isso sua modelagem é puramente empírica²³. Ela também atua localmente com pequenas contribuições que dependem de diversas propriedades das superfícies, como rugosidade, contaminação (impurezas), e afinidade química. Vamos utilizar aqui o fato empírico de que a força de atrito total entre duas superfícies, para baixas velocidades, é proporcional à força de compressão entre as superfícies (no caso, a força normal de reação). Além disso, ela sempre se opõe ao movimento, sendo tangencial à superfície de atrito, e ocorre em dois regimes diversos. Se os objetos se encontram em repouso relativo, a força de atrito assume magnitude maior (atrito estático) do que para objetos em movimento relativo (atrito dinâmico). Nos dois casos, escrevemos, respectivamente, para a magnitude da força de atrito, as expressões $F_e = \mu_e N$ e $F_d = \mu_d N$, em que μ_e é o coeficiente de atrito estático e μ_d , dinâmico.

O movimento do bloco é determinado pela combinação linear das forças acima. Como a reação normal da superfície do plano inclinado é criada pelo material para balancear a força de compressão do bloco, restam a influenciar o movimento apenas a projeção da força peso na direção paralela à superfície e a força de atrito, oposta à primeira. A magnitude da força resultante se torna $F_R = P \cos \theta - F_d$. A segunda lei nos indica uma forma bastante simples de movimento, com aceleração constante com magnitude $a = F_R/m$, direção paralela à superfície e no sentido de levar o bloco ao solo. O movimento é acelerado uniforme até atingir o chão.

Sistema de massas e roldanas

Sistemas compostos por massas e roldanas ilustram situações em que condições de coesão influenciam fortemente a dinâmica. Consideremos uma corda apoiada por uma roldana (ambas com massa desprezível) na qual dois blocos com massas m_1 e m_2 são suspensos. A corda, desde que tensionada, restringe os blocos a se moverem em conjunto. A força atuando sobre o bloco 1 é a soma vetorial de sua força peso à força de tração da corda, valendo o mesmo para o bloco 2. Podemos descrever esse problema em etapas como o

²¹Notemos que a força normal em princípio atua localmente com pequenas forças $d\vec{N}$ sobre toda a superfície de contato entre o bloco e o plano inclinado. De forma similar à atuação da força gravitacional, podemos somar todas essas influências e substituí-las por uma força única com magnitude igual à soma de todas as forças parciais. O ponto de ação dessa força também pode ser tomado como o centro de massa, uma vez que, sabemos, ela não causa rotação no corpo (seu torque deve ser nulo).

²²Apesar disso, a força normal não representa o par de ação-reação da força peso: este consiste na força com que o bloco acelera a Terra pela mesma interação gravitacional. O par ação-reação da força normal atuando sobre o bloco é a força de compressão (local à superfície de contato) com que o bloco atua sobre o plano inclinado. Um par ação-reação sempre se refere a forças atuando sobre corpos diferentes através de uma *mesma interação* newtoniana.

²³Evidência dessa complexidade é a existência de todo um campo de pesquisa aplicada visando diminuir o atrito entre superfícies mecânicas, tais como no desenvolvimento de óleos lubrificantes e de técnicas de deposição de camadas protetoras (atesta-se a visibilidade dessa área de pesquisa pelo prêmio Ig Nobel conquistado em 2014 pelo estudo sobre [o motivo porque bananas são escorregadias](#)).

movimento de dois blocos independentes mas condicionados a se moverem de forma coesa, ou seja,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 = T - P_1 \\ m_2 \ddot{z}_2 = T - P_2 \end{cases}, \quad \text{tal que } h - z_1 + (h - z_2) = \ell, \quad (1.22)$$

relações nas quais utilizamos a notação $\ddot{z} = \frac{d^2}{dt^2}z$.

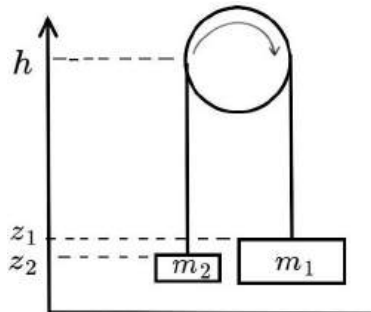


Figura 1.6: Esquema de funcionamento da máquina de Atwood (séc. XVIII).

A condição de coesão da corda implica que as velocidades e acelerações dos blocos devem variar juntas, o que pode ser deduzido formalmente derivando a equação de vínculo com relação ao tempo para obtermos $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0$. Utilizando as equações de movimento, deduzimos que

$$(\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) = \frac{T - P_1}{m_1} + \frac{T - P_2}{m_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 2\mu g, \quad (1.23)$$

em que $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida dos blocos e usamos as relações $P_j = m_j g$, com $j = 1, 2$. Substituindo o valor encontrado para T nas equações do movimento, obtemos

$$\ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = -\ddot{z}_2. \quad (1.24)$$

Assim, a aceleração do sistema é determinada pela *diferença* de massa entre os blocos. Para massas balanceadas $m_1 \approx m_2$, isso implica que a aceleração devida à gravidade é bastante reduzida, pois uma massa serve de contrapeso para a outra. Tal arranjo para ‘cancelar’ a força de gravidade é utilizado e.g. em elevadores, para facilitar o controle do movimento com segurança e economia de energia.

Partícula em queda livre na atmosfera

Um corpo em queda livre na atmosfera sofre a ação combinada da gravidade e do atrito com o ar. A força de atrito advém de efeitos de contato não triviais entre a superfície da partícula e o ar. Estudo experimental mostra que esse tipo de força pode ser expandido em potências da magnitude da velocidade da partícula. No caso mais simples de ‘baixas velocidades’, temos a proporcionalidade $\vec{F}_a = -b\vec{v}$. Assim como o significado de ‘baixa velocidade’, a constante b é determinada empiricamente, e depende de fatores tais como geometria da partícula, rugosidade de sua superfície e estado termodinâmico do ar. Mas o importante para nós, e esse é o poder do formalismo de Newton, é entender o comportamento geral desse tipo de movimento: esses fatores podem mudar os valores específicos de posição e velocidade da partícula, mas não o formato genérico da trajetória (desde que sejam mantidos constantes durante o movimento!).

Consideremos a título de exemplo o movimento de um corpo solto a partir do repouso na atmosfera. Inicialmente, esperamos que a força de atrito freie o objeto, mas que não seja capaz de balancear totalmente

a força peso, uma vez que o ar se deforma e ‘sai do caminho’ do objeto em queda livre; entretanto, como a magnitude da força de atrito aumenta com a velocidade, esperamos que o corpo atinja uma velocidade limite para a qual o balanço entre as duas forças ocorra. Denominamos τ_0 o tempo típico de transição entre esses dois regimes de movimento.

A força resultante agindo sobre a partícula é $\vec{F}_R = \vec{P} + \vec{F}_a = m\vec{g} - b\vec{v}$. A segunda lei fornece a equação da trajetória da partícula como

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - b\dot{\vec{r}}, \quad (1.25)$$

em que usamos a notação $\frac{d}{dt}\vec{r} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}$ e $\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \ddot{\vec{r}}$. A geometria do problema (partícula em queda livre inicialmente em repouso) nos permite escolher um sistema de referências que torna a equação escalar, já que as duas forças se encontram na direção vertical, dada pelo eixo z . A equação escalar se torna

$$\ddot{z} = -g - \frac{b}{m}\dot{z}. \quad (1.26)$$

Como ela não possui termo dependente de $z(t)$, podemos entendê-la como uma equação diferencial não-homogênea de primeira ordem na função $v(t) = \dot{z}(t)$, por simplicidade,

$$\dot{v} = -g - \frac{b}{m}v. \quad (1.27)$$

Analisemos essa equação. Ela nos diz que a taxa de variação da componente vertical da velocidade é causada por dois termos: um deles constante, e outro proporcional ao valor da velocidade naquele instante. Como a partícula é solta a partir do repouso, o segundo termo não influencia apreciavelmente o movimento nos instantes iniciais, e a equação se reduz aproximadamente a

$$\dot{v} \approx -g, \quad \text{para } t \ll \tau_0. \quad (1.28)$$

A escala de tempo τ_0 em que isso vale precisa ser encontrada posteriormente, mas sabemos que ela existe. A solução dessa equação é o movimento acelerado uniforme,

$$v(t) \approx -gt, \quad \text{para } t \ll \tau_0, \quad (1.29)$$

em que já utilizamos o fato de que $v(0) = 0$.

Essa solução aproximada deixa de valer quando a magnitude da velocidade da partícula se torna grande o suficiente para que o segundo termo da Eq. (1.27) comece a influenciar o movimento. Nesse caso limite hipotético, em que a velocidade assumisse magnitude para muito além de um valor crítico v_0 , o movimento passaria a ser dominado precisamente pelo termo desprezado inicialmente. No entanto, notemos que essa situação nunca ocorre em nosso caso²⁴: o termo de que estamos falando é por construção sempre oposto à velocidade, e por isso ele mesmo não permite que a velocidade aumente tanto.

De fato, a situação para tempos muito longos deve ser o equilíbrio entre os dois termos da Eq. (1.27), já que se opõem em seus efeitos: a velocidade limite deve possuir magnitude tal que o segundo termo desacelera a partícula exatamente da mesma quantidade que a gravidade a acelera. Temos nessa situação

$$\dot{v} \approx 0 = -g - \frac{b}{m}v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -\frac{mg}{b}. \quad (1.30)$$

²⁴Ela poderia ocorrer, no entanto, se a partícula fosse acelerada por ainda outra força externo, como ocorre e.g. para um avião ou uma nave espacial que inicie seu movimento com velocidade muito alta.

A velocidade crítica v_0 é chamada *velocidade terminal*, e corresponde à magnitude atingida para $t \gg \tau_0$. Ela possui valor crítico no sentido de que o movimento passaria a ser dominado pelo atrito (e por outra força externa) para velocidades maiores do que v_0 , e vice-versa.

Agora que conhecemos as soluções em casos limites, precisamos conectar os regimes de movimento em $t \ll \tau_0$ e $t \gg \tau_0$, o que obtemos resolvendo a equação diferencial exatamente. Mas já é possível perceber que precisamos de uma função que aumente linearmente em módulo no início do movimento e atinja um valor assintótico para tempos longos em comparação a τ_0 . A forma da equação diferencial já indica que essa função deve ser uma exponencial, visto que a desaceleração causada pelo atrito é proporcional ao valor da velocidade. Além disso, por se tratar de um efeito transiente, esperamos que a exponencial apareça na solução homogênea da equação diferencial; a velocidade terminal deve corresponder à solução particular.

Sabendo o que esperar, passamos a calcular a solução completa da Eq. (1.27). Sua solução geral é a soma das soluções homogênea e particular. A equação homogênea é

$$\dot{v}_h + \frac{b}{m} v_h = 0, \quad (1.31)$$

cuja solução v_h é a função exponencial

$$v_h(t) = e^{-t/\tau_0}, \quad (1.32)$$

em que $\tau_0 = m/b$ é a escala de tempo típica que procurávamos. A solução particular é simples de encontrar nesse caso (pois o termo não homogêneo constante pode vir da própria função, sem a necessidade de considerarmos o termo de derivada),

$$v_p(t) = -\frac{mg}{b} = v_0, \quad (1.33)$$

que pode ser checada por substituição direta na Eq. (1.26). Escrevemos então a solução da Eq. (1.26) como

$$v(t) = A e^{-t/\tau_0} + v_0, \quad (1.34)$$

em que A é uma constante livre que nos permite ajustar a solução geral à condição inicial. No caso, temos $v(0) = 0$, do que se obtém $A = -v_0$ e, portanto, a solução completa

$$v(t) = v_0 \left(1 - e^{-t/\tau_0}\right). \quad (1.35)$$

Notemos que, na situação limite $t \gg \tau_0$, o sistema se encontra livre da influência de forças (como uma partícula livre?²⁵), e portanto sua aceleração deve ser nula. Isso nos mostra que a velocidade terminal pode também ser determinada por considerações da estática!

1.3.3 Movimento circular uniforme

Uma partícula em movimento circular precisa sofrer a ação de uma força, ainda que a magnitude de sua velocidade seja constante, por conta do caráter vetorial das equações de Newton. A condição para que sua trajetória seja uma circunferência envolve de certa forma ‘calibrar’ a variação tangencial do vetor momento

²⁵Não exatamente. Observemos que a partícula só se encontra livre de forças para a velocidade terminal específica encontrada (em magnitude, direção e sentido!). Isso significa que a aplicação de uma força adicional tenderia a alterar essa velocidade e, com isso, a condição de equilíbrio de forças, produzindo um movimento diferente do esperado para uma partícula livre. Assim, essa ideia de chamar a partícula nessa situação de ‘livre’ não sobreviveria a testes experimentais simples.

para induzir na trajetória a curvatura correta capaz de fechar a curva após uma volta. A força que obtém esse resultado é chamada *centrípeta*.

Em primeiro lugar, esse tipo de movimento demanda que o vetor variação de momento (a força!) tenha direção perpendicular ao vetor momento, ou seja, $\vec{F} \cdot \vec{p} = 0$. Em segundo lugar, o módulo da força deve ser tal que o desvio diferencial do vetor momento seja o mesmo desvio de uma circunferência com relação à sua reta tangente. Podemos dizer que no movimento circular uniforme o vetor momento se desvia da linha reta apontada por sua direção tanto quanto uma circunferência se desviaria. A magnitude do desvio dá o raio da circunferência.

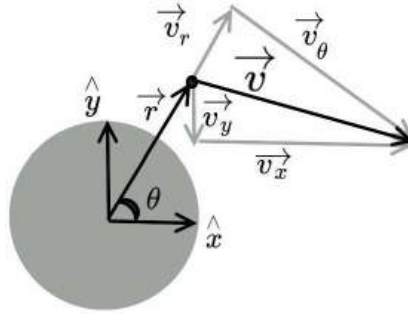


Figura 1.7: Decomposição cartesiana (\vec{v}_x e \vec{v}_y) e cilíndrica (\vec{v}_r e \vec{v}_θ) do vetor velocidade \vec{v} .

É conveniente nesse estágio utilizar versores cilíndricos para descrever o movimento, conforme ilustrado na Fig. 1.7. Os versores cilíndricos são definidos em relação à origem O do sistema de coordenadas. O versor \hat{r} dá a direção do ponto de interesse com relação à O , enquanto o versor $\hat{\theta}$ aponta na direção ortogonal a essa no ponto de interesse, sendo seu sentido escolhido para produzir circulação anti-horária. Versores cartesianos e cilíndricos se relacionam pelas transformações

$$\begin{cases} \hat{r} &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}, \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \hat{x} &= \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}, \\ \hat{y} &= \sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}, \end{cases} \quad (1.36)$$

i.e. uma rotação de eixos. A Fig. 1.7 ilustra a decomposição no sistema de coordenadas com origem em O do vetor velocidade \vec{v} de uma partícula localizada na posição \vec{r} . É importante frisar que, ao contrário dos versores cartesianos, os versores cilíndricos dependem da localização do ponto \vec{r} em que são avaliados²⁶, i.e. $\hat{r} = \hat{r}(\vec{r})$ e $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\vec{r})$. A velocidade pode ser decomposta de duas formas equivalentes,

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}, \quad (1.37)$$

em que a troca de sistema de coordenadas para os valores das componentes é realizada utilizando-se a Eq. (1.36) para escrever $\hat{x} = \hat{x}(\hat{r}, \hat{\theta})$ e $\hat{y} = \hat{y}(\hat{r}, \hat{\theta})$ ou vice-versa. As decomposições cartesiana e cilíndrica de qualquer vetor associado à partícula estão relacionadas entre si por uma rotação de eixos pelo ângulo θ do vetor de posição \vec{r} da partícula.

Feitas essas considerações, voltemos ao problema de determinar como deve ser a forma geral da força centrípeta. Consideremos uma partícula na posição \vec{r} do sistema de coordenadas com origem no centro da trajetória circular desejada. O vetor deslocamento $d\vec{r}$ a representar a distância percorrida pela partícula entre dois pontos muito próximos da circunferência possui magnitude relacionada ao raio $r = |\vec{r}|$ da trajetória

²⁶Mais precisamente, eles dependem apenas da posição angular θ do ponto, como se vê na Eq. (1.36), sendo por isso fundamental para esses versores a posição da origem.

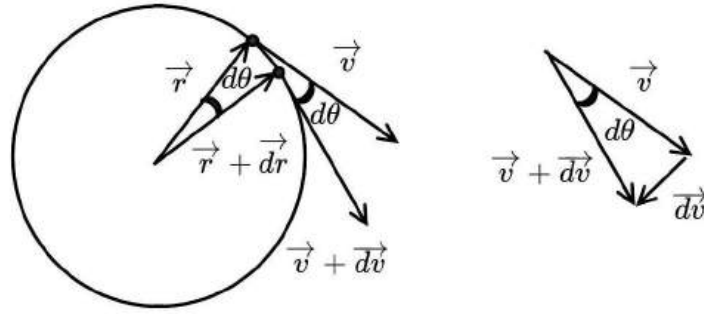


Figura 1.8: Para que o movimento seja circular uniforme, o vetor velocidade deve variar entre pontos da trajetória de forma a sempre permanecer tangente a uma circunferência.

pela expressão $dr = r d\theta$; ademais, sua direção é também perpendicular ao raio, dada por $d\vec{r} = \hat{n} \times \hat{r}$, em que \hat{n} é o versor normal ao plano da trajetória. Como o raio da trajetória permanece por hipótese constante durante o movimento ($\dot{r} = 0$), a derivada temporal da posição da partícula nos fornece

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} (r\hat{r}(t)) = r\dot{\hat{r}}(t). \quad (1.38)$$

Nessa expressão, a derivada temporal do versor radial cilíndrico não é nula, uma vez que sua direção depende do ponto \vec{r} ; temos²⁷

$$\dot{\hat{r}} = \frac{d}{dt} (\cos \theta(t) \hat{x} + \sin \theta(t) \hat{y}) = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{x} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{y} \stackrel{\text{Eq. (1.36)}}{=} \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (1.39)$$

Com isso, a Eq. (1.38) nos fornece

$$\dot{\vec{r}}(t) = r\omega\hat{\theta}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = v_{\theta}\hat{\theta}(t), \quad (1.40)$$

em que $\dot{\theta} = \omega$ é a frequência angular constante do movimento circular e $v_{\theta} = r\omega$ é a magnitude (constante) da velocidade da partícula, vista como puramente tangencial.

Notemos que o vetor velocidade (e o vetor momento, por conseguinte) também realiza um movimento circular, embora isso fique mascarado pelo fato de que, ao posicioná-lo sobre a partícula, a origem de sua circunferência varia. Se desenharmos os vetores sobre o mesmo ponto (Fig. 1.8, detalhe à direita), podemos ver mais claramente que a mesma relação vale para a circunferência realizada pelo vetor velocidade, pois $d\vec{v}$ também é perpendicular a \vec{v} . De maneira mais formal, derivamos novamente a expressão com relação ao tempo para encontrar a *aceleração centrípeta* $\vec{a}_{\odot}(t)$,

$$\vec{a}_{\odot}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = v_{\theta}\dot{\hat{\theta}}(t). \quad (1.41)$$

Precisamos calcular nesse caso

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{d}{dt} (-\sin \theta(t) \hat{x} + \cos \theta(t) \hat{y}) = -\dot{\theta} \cos \theta \hat{x} - \dot{\theta} \sin \theta \hat{y} \stackrel{\text{Eq. (1.36)}}{=} -\dot{\theta} \hat{r}. \quad (1.42)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (1.41), obtemos

$$\vec{a}_{\odot} = -\omega^2 r \hat{r} = \frac{v_{\theta}^2}{r} \hat{r} = a_{\odot} \hat{r}. \quad (1.43)$$

²⁷Observemos que a troca do referencial cilíndrico para o cartesiano se faz necessária no cálculo da derivada porque os versores cartesianos se mantêm os mesmos para qualquer ponto do espaço.

Assim, a força centrípeta aponta no sentido oposto ao vetor radial, puxando a partícula para o centro da circunferência, e possui magnitude $F_{\odot} = ma_{\odot} = m\omega^2 r = mv_{\theta}^2/r$. Em forma vetorial, sua expressão é

$$\vec{F}_{\odot} = -m\omega^2 r \hat{r} = -m \frac{v_{\theta}^2}{r} \hat{r}. \quad (1.44)$$

Notemos que sua expressão é proporcional à massa da partícula e a fatores geométricos. Isso nos fornece uma forma alternativa de medir a massa de um corpo, que consiste em colocá-lo em movimento circular uniforme com uma força de magnitude calibrada e medir raio e período da trajetória obtida experimentalmente.

1.3.4 Força de propulsão por ejeção de material

As leis de Newton estabelecem o movimento como consequência da interação entre objetos físicos aos pares. Para nos locomovermos, por exemplo, dependemos de forças de contato para guiarmos nossos corpos pela superfície da Terra – vale sempre como excelente aproximação que o par de reação correspondente à força útil que nos move nada faz sobre a Terra. Por isso, em nossa experiência cotidiana, tudo ocorre *como se* movêssemos nossos automóveis e aviões sem precisarmos respeitar a terceira lei de Newton (a Terra funciona como uma espécie de ‘reservatório de momento’).

Essa situação simplificadora deixa de valer quando perdemos contato com essa enorme massa chamada Terra. Os foguetes, satélites e astronautas precisam utilizar um princípio geral totalmente diferente para se locomoverem: a ejeção de material. Isso é necessário porque forças internas a um sistema não podem (como reconhecido por construção no formalismo newtoniano!) alterar o estado de movimento de seu centro de massa. A maneira de ‘burlar’ essa proibição é redefinir o que se chama de ‘sistema’ não como o corpo inteiro, mas como ‘tudo menos a massa a ser expelida’ para lhe dar propulsão.

Consideremos um veículo subdividido dessa maneira movendo-se, por simplicidade, em apenas uma dimensão. Sua massa de combustível é $M(t)$, variável no tempo, e a massa de sua ‘carga útil’ é fixa e igual a m . A ejeção de uma quantidade dM de massa de combustível a uma velocidade v_e (relativa à carga útil) deve resultar, pela conservação do momento, em variação dv da velocidade do veículo (i.e. carga útil mais massa restante de combustível). Se o momento inicial é $p_i = (M + m)v$, temos após a ejeção

$$p_f = dM(v - v_e) + (M + m - dM)(v + dv). \quad (1.45)$$

Para um veículo livre de forças externas, a conservação do momento impõe

$$p_i = p_f \quad \Rightarrow \quad -v_e dM + (M + m)dv = 0, \quad (1.46)$$

em que mantivemos apenas termos de primeira ordem em dM e dv . Essa equação pode ainda ser escrita como

$$dv = \frac{v_e}{M + m} dM, \quad (1.47)$$

uma relação a unir o incremento de velocidade à quantidade ejetada de massa. Se a velocidade de ejeção v_e for constante, essa equação já nos permite determinar por integração direta que

$$\int_v^{v+\Delta v} dv = v_e \int_0^{M_0} \frac{dM}{M + m} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = v_e \ln \left(1 + \frac{M_0}{m} \right). \quad (1.48)$$

Esse resultado estabelece que a variação de velocidade Δv do veículo é proporcional à velocidade de ejeção e depende de maneira bastante desfavorável da razão entre as massas de combustível M_0 e de carga útil m :

através de um logaritmo. De fato, olhando essa expressão de outra forma, vemos que a massa de combustível aumenta *exponencialmente* com Δv desejado, pois

$$e^{\frac{\Delta v}{v_e}} = 1 + \frac{M_0}{m}. \quad (1.49)$$

Assim, para obtermos Δv substancialmente maior do que v_e , é necessária a quantidade $M_0 \approx m e^{\frac{\Delta v}{v_e}}$ de combustível. Tipicamente, o primeiro estágio de foguetes é construído para que $M_0 \approx 10m$, o que forneceria $\Delta v \approx 2,5$ caso não houvesse (mas há!) a força gravitacional para dificultar a ascensão do foguete.

Voltando ao problema de obter a equação de movimento do veículo, notemos que dv na Eq. (1.47) se refere à variação da velocidade da carga útil e do combustível restante como um todo. Se nosso interesse jaz no movimento da carga útil apenas, a equação de Newton deve se referir somente à variação do momento p dessa parte do sistema, como

$$\frac{d}{dt}p = m \frac{dv}{dt}. \quad (1.50)$$

O membro direito dessa equação é a força efetiva agindo somente sobre a carga útil, uma *fração* da força total de reação à ejeção de material (grande parte da força de ejeção de material é usada para acelerar o combustível restante no foguete). A taxa temporal de variação da velocidade é dada pela Eq. (1.47); devemos apenas ter o cuidado de utilizar o sinal correto entre os membros dessa equação notando que o sentido positivo da variação temporal de massa, $dM = M(t) - M(t + dt) > 0$, foi definido contrariamente ao sentido positivo de variação da velocidade, $dv = v(t + dt) - v(t) > 0$. Obtemos assim a equação de movimento

$$\frac{d}{dt}p = -m \frac{v_e}{m + M(t)} \frac{dM(t)}{dt}, \quad (1.51)$$

na qual deixamos explícita a dependência $M = M(t)$ (em geral, uma função decrescente do tempo). A forma temporal exata da força efetiva depende da taxa como a massa é ejetada, característica que altera tanto dM/dt no numerador quanto $M(t)$ no denominador, sendo por isso um dado externo necessário à resolução do problema do movimento do foguete. Um caso particular simples ocorre quando a taxa dM/dt de ejeção de material é constante, no qual a massa de combustível varia no tempo como

$$M(t) = M_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dt} = -\frac{M_0}{T}. \quad (1.52)$$

em que T é o intervalo de tempo necessário para exaurir o combustível. Nesse cenário, a Eq. (1.51) pode ser integrada para fornecer

$$\int_p^{p+\Delta p} dp' = mv_e \int_0^t \frac{\frac{dt'}{T}}{\frac{m}{M_0} + 1 - \frac{t'}{T}} \quad \Rightarrow \quad \Delta p(t) = mv_e \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1 + \frac{m}{M_0} t}{T}} \right). \quad (1.53)$$

Esse resultado se reduz à Eq. (1.48) para $t = T$, como esperado²⁸. Na verdade, a relação desfavorável da Eq. (1.49) entre massa de combustível e ganho de momento faz com que numa situação realista se tenha $M_0 \gg m$ (i.e. a massa do foguete é dominada pelo combustível). Nesse caso, podemos aproximar²⁹ $\frac{1}{1 + \frac{m}{M_0}} \approx 1 - \frac{m}{M_0}$, obtendo para a Eq. (1.53) a expressão

$$\Delta p(t) = mv_e \ln \left(\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{M_0}\right) \frac{t}{T}} \right). \quad (1.54)$$

²⁸Na verdade, a Eq. (1.48) já fornece a solução completa do problema se integrarmos a massa no membro direito entre dois valores quaisquer possíveis. Para obtermos o comportamento temporal, basta nela substituir a função $M(t)$ conhecida.

²⁹Usamos aqui a aproximação da série de Taylor $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$.

Para tempos pequenos, i.e. $t \ll T$, o momento aumenta linearmente no tempo, pois

$$\Delta p(t) = mv_e \ln \left(\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{M_0}\right) \frac{t}{T}} \right) \approx mv_e \ln \left(1 + \left(1 - \frac{m}{M_0}\right) \frac{t}{T} \right) \approx m \frac{v_e}{T} t, \quad (1.55)$$

em que usamos a aproximação em série de Taylor $\ln(1+x) \approx x$ para $x \ll 1$ e desprezamos o termo de segunda ordem $\frac{m}{M_0} \frac{t}{T}$. A aceleração inicial do foguete é, portanto, $a_i \approx v_e/T$.

A forma como a Eq. (1.51) descreve o movimento, em termos de uma força efetiva agindo apenas sobre a carga útil, nos permite incluir facilmente efeitos do campo gravitacional externo para obtermos a descrição mais realista de um foguete em ascensão próximo à superfície da Terra. Basta adicionar à equação o termo gravitacional,

$$\frac{d}{dt}p = -m \frac{v_e}{m + M(t)} \frac{dM(t)}{dt} - mg. \quad (1.56)$$

A integração direta dessa equação (supondo válidos o mesmo modelo de ejeção constante de massa e a aproximação $m \ll M_0$) fornece nesse caso a solução

$$\Delta p(t) = mv_e \ln \left[\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{m}{M_0}\right) \frac{t}{T}} \right] - mgt \quad (1.57)$$

Com relação à estimativa otimista da Eq. (1.49), o termo gravitacional implica numa ‘penalidade’ $-mgt$ para o ganho de momento $\Delta p(T)$ obtido após a queima total do combustível.

Além disso, vemos que nos instantes iniciais da ascensão ($t \ll T$) a força de propulsão precisa possuir magnitude maior do que certo valor mínimo crítico, já que na presença do campo gravitacional a aceleração inicial diminui para

$$a_i \approx \frac{v_e}{T} - g. \quad (1.58)$$

O valor crítico de parâmetros para o qual $a_i = 0$ dá origem ao chamado ‘impulso específico’ I do motor de propulsão³⁰, definido como $I = v_e/g$. Nessa maneira de escrever, podemos entendê-lo como o tempo máximo de duração do combustível caso o foguete se mantenha parado e flutuando no ar (já que $I = T$ no caso crítico); alternativamente, ele nos fornece a velocidade média de ejeção de material pela expressão $v_e = gI$.

Atualmente, a propulsão de foguetes pode ser grosseiramente separada em duas técnicas extremas que suprem nichos diferentes de utilização. As formas de propulsão sólida e a gás se caracterizam por produzir forças com grandes magnitudes por intervalos relativamente curtos de tempo. São utilizadas em foguetes espaciais para vencer a poderosa força da gravidade e também em mísseis para produzir grandes acelerações em tempos curtos. No outro extremo, a propulsão iônica gera forças pequeníssimas por intervalos muito longos de tempo, o que se reflete em capacidade de produzir maior mudança de velocidade Δv no longo prazo.

Para efeitos comparativos, a próxima geração de foguetes espaciais da NASA deve ejetar material a $v_e \approx 4$ km/s e produzir força efetiva da ordem de 1 MN (i.e. o peso de uma massa com ≈ 100 toneladas). A ideia é utilizá-los para enviar grandes equipamentos ao espaço próximo e também permitir o envio de naves tripuladas a locais mais distantes do que a Lua (e.g. Marte). Já a próxima geração de propulsores iônicos é comprovadamente capaz de ejetar íons de um plasma com $v_e \approx 100$ km/s; no entanto, a força produzida

³⁰Em foguetes de verdade, em geral são utilizados vários motores de propulsão.

é da ordem de 0,5 N (o peso de uma dezena de moedas). O ponto forte desse tipo de sistema é a eficiência da propulsão, já que o ganho de momento por massa ejetada é o maior de todas as tecnologias disponíveis.

1.3.5 Oscilador harmônico simples

Uma força que tende a levar um sistema perturbado de volta a seu estado de equilíbrio é chamada *restauradora*. A forma mais simples de força restauradora varia proporcional e contrariamente à perturbação. Um caso específico de grande interesse para a dinâmica envolve uma partícula deslocada de sua posição de equilíbrio por força desse tipo. Surpreendentemente, a fenomenologia de oscilações daí decorrente possui grande abrangência na compreensão dos sistemas físicos mais variados, e por isso é de fundamental importância o domínio completo e irrestrito de tudo que tem a ver com o *oscilador harmônico*!

Por simplicidade, consideremos alguma projeção unidimensional do movimento de uma partícula com massa m sobre um eixo a que chamaremos x , e tomemos a posição de equilíbrio como localizada em $x = 0$. A magnitude da força restauradora linear em uma dimensão assume a expressão

$$F(x) = -kx, \quad (1.59)$$

em que $k > 0$ é uma constante que define a ‘rigidez’ da força. Incrementar o valor de k implica em aumentar a oposição da força ao deslocamento do equilíbrio. No contexto da mecânica, esse tipo de força permite descrever o movimento de muitos tipos de sistemas mecânicos ligeiramente perturbados, como veremos.

Oscilador harmônico ideal

O modelo de força da Eq. (1.59) nos fornece para o desvio x do equilíbrio a equação de movimento

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t), \quad (1.60)$$

cuja solução requer encontrar funções proporcionais ao oposto de suas derivadas segundas. Por se tratar de uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, precisamos de duas soluções independentes. As funções harmônicas obedecem a essa condição, de forma que

$$x_1(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = \sin(\omega_0 t) \quad (1.61)$$

são as duas soluções procuradas. O parâmetro ω_0 possui a dimensão de inverso de tempo. O valor que ω_0 precisa assumir para satisfazer a Eq. (1.60) é encontrado por substituição direta de x_1 e x_2 na equação diferencial, resultando em

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.62)$$

A solução geral da equação homogênea é uma combinação linear de suas duas soluções linearmente independentes,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (1.63)$$

A partícula sujeita à força restauradora linear apresenta movimento oscilante e harmônico no tempo, sendo por isso denominada de *oscilador harmônico simples*. O movimento ocorre pela oposição de duas

influências que se revezam: a força restauradora e a inércia da partícula. A força restauradora atinge sua magnitude maximamente contrária ao deslocamento no ponto em que o deslocamento também é máximo em módulo; a partir daí, a força restauradora acelera a partícula para trazê-la de volta à sua posição de equilíbrio, onde se anula e deixa de agir. No entanto, por conta da inércia da partícula, esta se move com velocidade constante (em primeira ordem) no entorno da posição de equilíbrio. É essa velocidade que retira a partícula do equilíbrio novamente, fazendo com que a força restauradora comece a atuar, dessa vez no sentido de frear a partícula, até que ela atinja seu deslocamento máximo com velocidade nula. A força restauradora mais uma vez acelera a partícula para trazê-la de volta à origem, e o ciclo se reinicia.

A partícula executa um movimento repetitivo no tempo, i.e. *periódico*, uma vez que existe um intervalo de tempo τ_0 para o qual

$$x(t + \tau_0) = x(t). \quad (1.64)$$

Essa identidade aplicada à Eq. (1.63) fornece

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (1.65)$$

de onde se conclui que o *período* τ_0 de repetição da oscilação é proporcional ao inverso de ω_0 . Assim, ω_0 é proporcional à *frequência* $\nu_0 = 1/\tau_0$ da oscilação, entendida como o número de ciclos que o oscilador realiza por unidade de tempo, sendo por isso chamada de *frequência própria* do oscilador. O fator 2π entre ω_0 e ν_0 existe para escalar corretamente o período temporal ao período adimensional das funções seno e cosseno. Por isso, chamamos ω_0 de *frequência angular* de oscilação³¹. Podemos dizer que a partícula leva tempo τ_0 para começar a repetir-se em seu movimento ou que este se repete $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$ vezes a cada unidade de tempo. Notemos que τ_0 e ω_0 são propriedades do oscilador, advindas da equação diferencial envolvendo a inércia da partícula e a rigidez da força restauradora e, portanto, são independentes do ‘estado’ do mesmo.

As constantes A e B devem ser escolhidas para particularizar a forma genérica da trajetória ao movimento de uma partícula de interesse. Para tanto, precisamos conhecer ao menos um ‘estado’ $\{x(t), p(t)\}$ da partícula em algum instante. A praxe é definir esse instante como o início da contagem do tempo ($t = 0$), e denominar esse estado como a ‘condição inicial’ do movimento. Denotamos sua posição inicial $x(0) = x_0$ e seu momento inicial $p(0) = p_0 = mv_0 = m\dot{x}(0)$. De acordo com a Eq. (1.63), tem-se $x(t = 0) = A$ e, de sua derivada temporal, $p(t = 0) = m\omega B$, do que se deduz

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (1.66)$$

O ponto no qual o ciclo de oscilação se inicia depende de mera definição da origem de medição do tempo. De fato, as funções harmônicas cosseno e seno descrevem ambas as projeções de um mesmo raio vetor de um círculo unitário sobre os eixos cartesianos, e por isso possuem essencialmente a mesma forma de variação com seus argumentos. A diferença entre elas é apenas a escolha da origem de contagem do ângulo, pois $\cos \phi = \sin(\phi + \pi/2)$, representando uma *fase relativa*. Essa propriedade das funções harmônicas apenas reflete a física do problema de que tanto a posição quanto o momento oscilam harmonicamente, embora com uma defasagem relativa (máximo módulo do deslocamento ocorre para magnitude mínima do momento e vice-versa). Portanto, deve ser possível escolher a origem do tempo (fase) de forma a manter apenas um

³¹Nestas notas, nos referiremos também a ω_0 como a ‘frequência própria’ caso não haja dubiedade, já que ω_0 e ν_0 representam fisicamente a mesma coisa: a frequência própria de oscilação, seja angular, seja no tempo.

termo harmônico na solução, para torná-la mais compacta. Usando a propriedade do cosseno³²

$$\cos(\omega t + \phi) = \cos \phi \cos(\omega t) - \sin \phi \sin(\omega t), \quad (1.67)$$

podemos reescrever a Eq. (1.66) como

$$x(t) = x_a \cos(\omega t + \phi), \quad \text{em que} \quad \begin{cases} x_a \cos \phi = x_0, \\ x_a \sin \phi = -p_0/(m\omega_0). \end{cases} \quad (1.68)$$

As constantes x_a e ϕ explicitam mais claramente os parâmetros relevantes da oscilação harmônica, respectivamente: amplitude (valor máximo do deslocamento) e fase (início da contagem do tempo). O valor de cada uma delas em função das condições iniciais é

$$x_a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{p_0}{m\omega_0}\right)^2} \quad \text{e} \quad \phi = -\arctan\left(\frac{p_0}{m\omega_0 x_0}\right). \quad (1.69)$$

Assim, se a partícula inicia seu movimento a partir do repouso ($p_0 = 0$), seu deslocamento deve ser máximo, portanto já correspondendo à amplitude de oscilação, e sua trajetória deve seguir a função cosseno ($x_a = x_0$ e $\phi = 0$). Por outro lado, se sua trajetória se inicia na posição de equilíbrio ($x = 0$), então sua trajetória precisa seguir a curva seno ($\phi = -\pi/2$), de onde segue que $x_a = p_0/(m\omega_0)$.

Representação da trajetória no espaço de fase

A visão geométrica do movimento mencionada acima é facilitada pela representação da trajetória da partícula no *espaço de fase*, uma construção matemática que veremos em maior detalhe no estudo do formalismo hamiltoniano da mecânica. Como o estado do oscilador depende de duas funções do tempo, posição e momento, o espaço de fase possui duas dimensões para cada *grau de liberdade* do movimento. No caso do movimento unidimensional tratado aqui (1 grau de liberdade), o espaço de fase forma um plano. Nele representamos os pares ordenados de estados $\{x(t), p(t)\}$ sem precisar fazer referência ao tempo.

O oscilador harmônico ideal possui estado

$$\begin{cases} x(t) = x_a \cos(\omega_0 t + \phi), \\ p(t) = -m\omega_0 x_a \sin(\omega_0 t + \phi), \end{cases} \quad (1.70)$$

em que a segunda equação foi obtida usando a derivada temporal da Eq. (1.68). Como posição e momento possuem dimensões diferentes, é praxe normalizá-los para torná-los adimensionais ou com mesma dimensionalidade. Adotamos aqui a segunda prática para representar o par $\{x(t), p(t)/(m\omega_0)\}$ no espaço de fase, notando que as grandezas utilizadas na normalização do momento são propriedades do oscilador independentes de seu estado.

É simples reconhecer que as relações da Eq. (1.70) são a representação paramétrica de uma *circunferência* nas variáveis $\{x(t), p(t)/(m\omega_0)\}$. O raio da circunferência é dado pela amplitude x_a do movimento oscilatório unidimensional, e o ponto inicial da partícula sobre a circunferência é determinado pela fase ϕ . Além disso, a partícula ‘se move’ no espaço de fase com frequência angular constante, i.e. realiza um movimento circular

³²Esse tipo de propriedade trigonométrica é facilmente demonstrado com o auxílio da relação de Euler, que estabelece $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$. Utilizando números complexos, segue que $\cos(\phi + \theta) = \text{Re}\{e^{i(\phi+\theta)}\} = \text{Re}\{e^{i\phi} e^{i\theta}\} = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta$. Assim podemos economizar memória para coisas mais importantes.

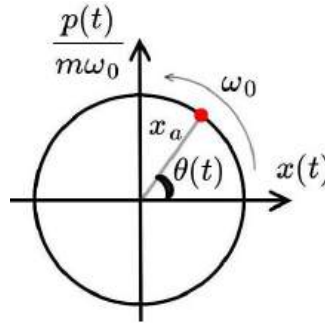


Figura 1.9: Trajetória do oscilador harmônico simples no espaço de fase.

uniforme. A velocidade angular desse movimento é a própria frequência angular ω_0 da oscilação. Em coordenadas cilíndricas, a trajetória no espaço de fase pode ser escrita como

$$\begin{cases} r(t) = x_a \\ \theta(t) = \phi + \omega_0 t \end{cases} \quad (1.71)$$

A representação no espaço de fase permite visualizar simultaneamente a região de parâmetros visitadas pela partícula tanto na posição quanto no momento. Seu uso é bastante comum no estudo da dinâmica de sistemas caóticos ou complexos em geral, pois permite visualizar propriedades gerais da trajetória (e.g. se fechada, se mais densa em alguma região, se restrita a um volume finito no espaço de parâmetros etc).

1.3.6 Oscilador harmônico amortecido

Apesar de condensar os elementos principais das oscilações harmônicas, o movimento visto acima nem sempre corresponde a uma situação realista. Sistemas mecânicos como conhecemos sofrem efeito de forças de atrito, que tendem a extinguir o movimento.

O modelo mais apropriado de força de atrito depende da física do problema, e deve ser escolhido de acordo com as evidências experimentais. Consideramos aqui a força de atrito como proporcional à velocidade, tal como a resistência oferecida pelo ar ao movimento em baixas velocidades³³. A equação de movimento se torna nesse caso

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) - b\dot{x}(t). \quad (1.72)$$

Podemos reescrevê-la de forma mais organizada como

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (1.73)$$

em que utilizamos a Eq. (1.62) e definimos a grandeza

$$\gamma = \frac{b}{m}, \quad (1.74)$$

³³Por exemplo, caso a situação do oscilador fosse mais parecida à de um bloco deslizando sobre uma superfície rugosa, provavelmente o modelo mais apropriado de atrito seria aquele utilizado na Sec. 1.3.2, i.e. força de atrito oposta à velocidade e proporcional à reação normal de contato com a superfície. Nesse caso, além de a força de atrito cinético ser descontínua no ponto de troca de sinal da velocidade da partícula, a inclusão do atrito estático pode levar o oscilador à parada total nesse mesmo ponto, tornando por vezes a solução trivial. É preciso entender a física do sistema sob estudo para escolher o modelo de força mais relevante à descrição do movimento.

que possui unidade de frequência.

Resolver a Eq. (1.73) requer encontrar soluções consistentes com casos limites vistos anteriormente (além disso, devemos sempre que possível analisar casos limites para testar a sanidade de nossos modelos!). No limite em que a força de atrito domina incontestemente a dinâmica, devemos desprezar o termo restaurador da Eq. (1.73), com o que obtemos a equação diferencial aproximada

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) \approx 0. \quad (1.75)$$

Obtemos essa mesma equação na descrição de uma partícula em queda livre na atmosfera [Eq. (1.26)], e portanto a mesma solução lá encontrada deve servir para o caso em questão: o oscilador é freado exponencialmente com escala de tempo dada por $1/\gamma$. Nesse limite, a solução requer encontrarmos função cuja derivada primeira seja a *própria* função.

No limite oposto, no qual $b \rightarrow 0$, o efeito dinâmico da força de atrito é desprezível face àquele da força restauradora (ao menos durante algum intervalo curto de tempo!). A Eq. (1.73) requer que desprezemos o termo em \dot{x} para se tornar aproximadamente

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) \approx 0, \quad (1.76)$$

da qual obtemos como esperado a solução oscilatória ideal da Eq. (1.63). Notemos que nesse limite a solução aproximada requer encontrarmos uma função que derivada duas vezes retorne o *negativo* de si mesma.

Solução complexa. No caso geral, os dois termos de força devem se alternar em importância durante o movimento, não sendo possível portanto desprezar nenhum deles. A Eq. (1.73) requer como solução uma função que seja essencialmente sua derivada segunda, a menos de um sinal que pode ou não ser trocado nesse processo. Por isso, o comportamento geral do oscilador amortecido deve incluir uma combinação dos dois tipos de solução vistas acima, tanto harmônica quanto exponencial. Como proceder?

Esses dois tipos de função parecem à primeira vista incompatíveis. E de fato são, no domínio em que estamos trabalhando. Nesse tipo de situação, é natural buscar alguma *generalização* matemática dessas funções que apresente os comportamentos buscados em certos limites³⁴. E o requisito imposto pela Eq. (1.76), uma função cuja derivada segunda retorne o *negativo* de si mesma, pode ser entendido de forma alternativa como: queremos uma função cuja derivada *primeira* retorne $\sqrt{-1}$ multiplicada por si mesma. Isso nos remete aos números complexos.

De fato, a função que une os comportamentos exponencial e senoidal de maneira suave e contínua é a função exponencial generalizada ao plano complexo, da forma

$$e^w = e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b), \quad (1.77)$$

em que w é um número complexo escrito em termos dos números reais a e b como $w = a + ib$. Usamos na última igualdade a relação de Euler. No eixo real ($b = 0$), a exponencial complexa se torna a exponencial comum, crescente ou decrescente (a depender do sinal de a), e sua derivada retorna a própria função; no

³⁴E aqui nos deparamos com um dos aspectos que tornam a matemática tão importante como linguagem para a física: podemos nos aproveitar de conexões não triviais entre objetos matemáticos para entender problemas físicos mais facilmente.

eixo imaginário ($a = 0$), ela se torna uma função harmônica, e sua derivada segunda fornece o negativo de si mesma. No meio do caminho, tem-se uma combinação dos dois comportamentos³⁵.

Para resolver a equação com o ferramental dos número complexos, precisamos primeiro generalizar a Eq. (1.73) para variáveis complexas³⁶. Simplesmente escrevemos a Eq. (1.73) para uma função complexa $z(t)$, obtendo

$$\ddot{z}(t) + \gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = 0. \quad (1.78)$$

Tentamos então a solução comentada acima,

$$z \stackrel{?}{=} e^{\lambda t}, \quad (1.79)$$

em que λ é uma constante complexa. Substituindo essa forma para $z(t)$ na Eq. (1.78), obtemos o cancelamento das exponenciais $e^{\lambda t}$ e, com isso, uma equação algébrica em λ independente do tempo, a *equação característica*,

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (1.80)$$

cujas raízes são

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}. \quad (1.81)$$

Encontramos, portanto, as soluções da equação diferencial de maneira bastante direta. Conforme esperado, os parâmetros λ_{\pm} se comportam no limite $\gamma \ll \omega_0$ como imaginários puros, implicando em $x(t)$ oscilatória, e como real para $\gamma \gg \omega_0$, fornecendo solução exponencial. Vamos denotar as duas soluções linearmente independentes por

$$z_1 = e^{\lambda_+ t} \quad \text{e} \quad z_2 = e^{\lambda_- t} \quad (1.82)$$

e estudá-las em detalhe. Existem claramente três cenários diferentes para o comportamento geral dos parâmetros λ_{\pm} , encontrados, determinados pelo sinal da constante $\Delta = (\gamma/2 + \omega_0)(\gamma/2 - \omega_0)$ no argumento da raiz quadrada. Estudamos cada um deles a seguir.

Claro que ainda resta um pequeno detalhe de consistência: nossa equação diferencial de interesse se refere ao deslocamento do oscilador, uma quantidade real! Como recuperar a Eq. (1.73) a partir da Eq. (1.78)? A resposta é simples: utilizando a linearidade dessas equações. De fato, podemos combinar números complexos de duas maneiras distintas para formar números reais, da forma $z + z^*$ (essencialmente a *parte real* de z) ou $i(z - z^*)$ (sua *parte imaginária*). Em outras palavras, se $z(t)$ satisfaz a Eq. (1.78), então suas partes real e imaginária *também a satisfazem* (já que os coeficientes da equação diferencial são reais), e são portanto soluções da Eq. (1.73) de interesse. Fica simples construir uma equação real a partir da equação complexa, e recuperamos assim as soluções para $x(t)$ de maneira bastante direta.

Para entender os tipos de movimento encontrados, uma possibilidade é estudar as duas soluções reais linearmente independentes como $x_1(t) = \text{Re}\{z_1(t)\}$ e $x_2(t) = \text{Re}\{z_2(t)\}$. A solução geral será uma combinação

³⁵Reconhecemos, em especial, que os sinais positivo ou negativo são apenas casos particulares de *defasagem*: de fato, no meio do caminho da vida de uma exponencial, ela é multiplicada por um *fator complexo* de fase que se reduz a 0 no eixo real e a π no eixo imaginário.

³⁶Você deve estar se perguntando: mas não poderíamos resolver a equação diferencial buscando soluções dadas pelo produto de uma exponencial e uma senoidal? Sim, poderíamos, mas esse método ‘força bruta’ não atingiria nem um pingão de elegância. Utilizar os números complexos (a ferramenta ‘natural’ nesse caso) se assemelha à situação em que ‘damos a volta’ (i.e. arrodamos) num obstáculo para chegar ao outro lado mais rapidamente ou em maior segurança. Arrodeios intelectuais são muitas vezes o ingrediente essencial faltante para se atingir objetivos não óbvios. Afinal, qualquer um pode ver a linha reta: saber dar a volta é que requer treinamento. Acostume-se por isso a utilizar com frequência essa técnica tão essencial à sobrevivência no Brasil, mesmo em contextos não muito intelectualizados (tal como e.g. andar por uma calçada ou dirigir pela BR-101).

linear das mesmas, $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$. A outra possibilidade é investigar diretamente as soluções z_1 e z_2 . Construímos então a solução complexa geral pela combinação linear dessas soluções, $z(t) = Az_1(t) + Bz_2(t)$ (nesse caso, as constantes A e B são complexas), para ao final obter a solução real $x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$ ou $x(t) = \text{Im}\{z(t)\}$. Como todas as operações envolvidas na passagem $z(t) \leftrightarrow x(t)$ são lineares, a ordem em que fazemos as coisas não importa do ponto de vista formal. Fica ao gosto de cada um proceder da maneira mais clara em seu próprio entendimento.

Amortecimento subcrítico

No primeiro cenário, o oscilador no regime *subcrítico* de amortecimento tem seu movimento dominado pela força restauradora, possuindo $\omega_0 > \gamma/2$ e implicando em $\Delta < 0$. As soluções da equação diferencial complexa se tornam

$$z_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega'_0 t} \quad \text{e} \quad z_2 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega'_0 t}, \quad (1.83)$$

em que é conveniente definir a frequência angular modificada pelo atrito como³⁷

$$\omega'_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (1.84)$$

A solução complexa mais geral é dada pela combinação linear de z_1 e z_2 ,

$$z(t) = A' e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega'_0 t} + B' e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega'_0 t}, \quad (1.85)$$

da qual deduzimos a solução da equação de movimento, tomada como $x(t) = \text{Re}\{z(t)\}$, como

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (A \cos(\omega'_0 t) + B \sin(\omega'_0 t)), \quad (1.86)$$

em que A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais. Essa solução se torna mais compacta se escrita em termos de apenas uma função harmônica com fase ajustável, pois então

$$x(t) = x_a e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega'_0 t + \phi). \quad (1.87)$$

Em termos de A e B , a amplitude x_a e a fase ϕ da oscilação se deduzem como no caso do oscilador ideal.

As sequência de gráficos da Fig. 1.10 ilustra a solução típica do oscilador amortecido para força de atrito crescente, i.e. valores crescentes de $\gamma/2$. Os eixos são normalizados a constantes típicas do movimento para torná-los adimensionais. As curvas contínuas correspondem ao termo cosseno da Eq. (1.86), e as curvas tracejadas mostram a evolução do termo seno da mesma equação.

³⁷Observemos que o aumento da frequência angular do cosseno com relação ao caso ideal não significa que a partícula ‘oscile mais rápido’ com a inclusão do atrito, como aparente à primeira vista. De fato, o movimento amortecido deixa de ser periódico no sentido estrito, uma vez que a partícula jamais retorna à mesma configuração. Mas é possível ainda assim pensar em ciclos ‘quase periódicos’, caso em que podemos definir o período τ'_0 como o intervalo de tempo entre dois zeros do deslocamento, i.e. pela observação dos instantes a satisfazerem ao mesmo tempo as condições $x(t) = x(t + \tau'_0) = 0$ e $\dot{x}(t) = \dot{x}(t + \tau'_0)$ (notemos que teremos então $\tau'_0 \neq 2\pi/\omega'_0$). Para encontrar esses pontos, é preciso levar em conta não só o aumento de ω'_0 , que tende a diminuir τ'_0 , mas também a influência da exponencial decrescente, que tende a aumentar τ'_0 . É possível mostrar que, para pequenos valores de γ , o período aparente τ'_0 de oscilação da partícula permanece praticamente idêntico ao período $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$ do oscilador ideal (observe com atenção a Fig. 1.10). O aumento da frequência de oscilação só se torna relevante para valores de γ comparáveis a ω_0 , regime em que a oscilação decai rapidamente e a própria definição de ‘quase periódico’ perde sentido.

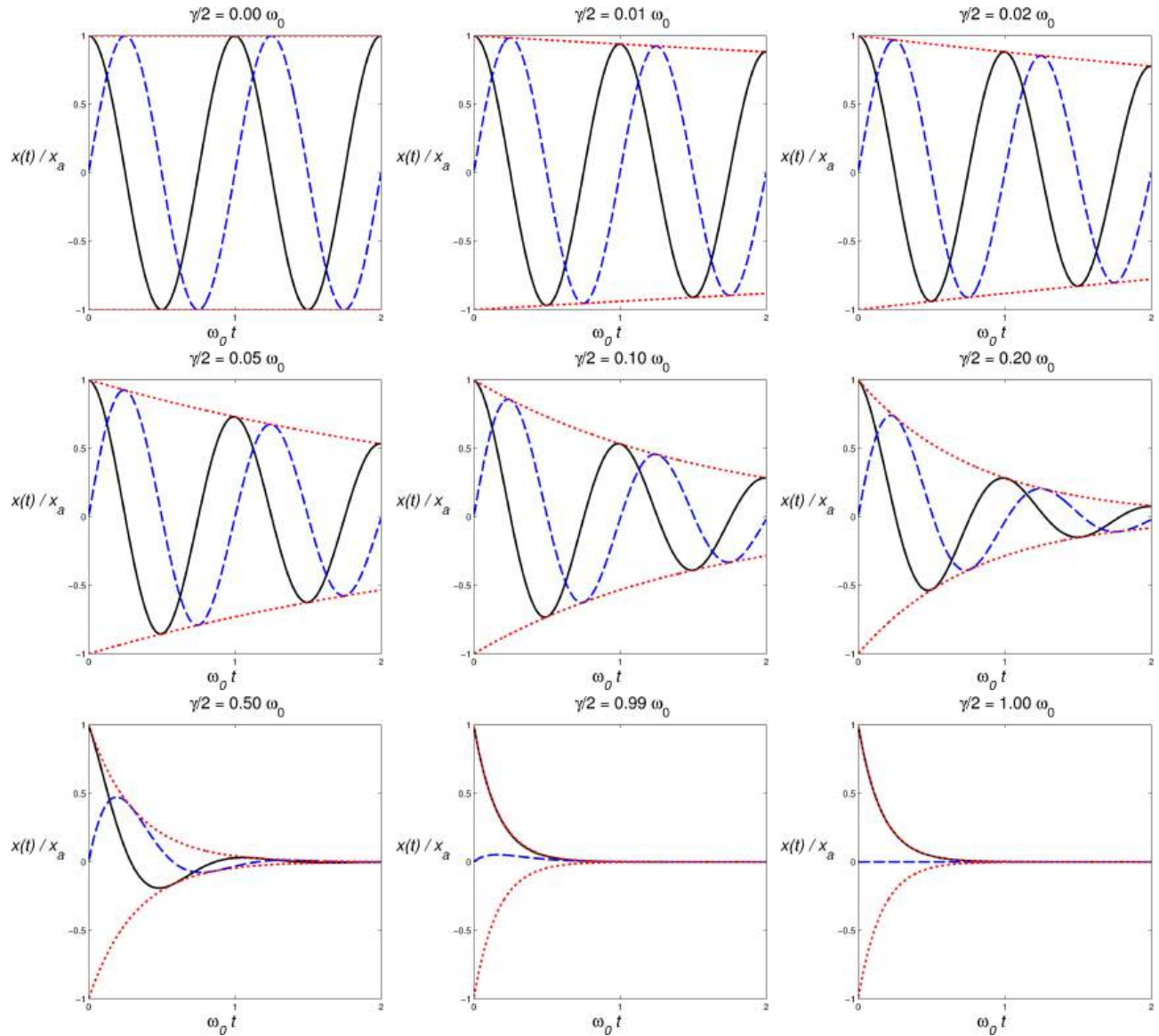


Figura 1.10: Deslocamento temporal do oscilador harmônico amortecido para diferentes magnitudes da força de atrito. As curvas contínuas e tracejadas representam os termos cosseno e seno da Eq. (1.86), respectivamente; as curvas pontilhadas ilustram as envoltórias exponenciais.

A primeira figura ($\gamma = 0$) ilustra o deslocamento temporal do oscilador harmônico ideal, para o qual a força de atrito se anula. Conforme $\gamma/2$ assume valores crescentes, o decaimento exponencial vai se tornando cada vez mais importante para descrever a curva, até que a partir de $\gamma/2 = 0.5$ as oscilações praticamente cessam. Notemos que a frequência ω'_0 das funções harmônicas é modificada pelo atrito, tornando-se menor do que a frequência própria ω_0 do oscilador. No entanto, por causa do decaimento exponencial, as posições dos máximos e mínimos não se alteram apreciavelmente, como pode ser visto na sequência de figuras acima.

Assim, o oscilador harmônico amortecido, quando dominado pela força restauradora (*amortecimento subcrítico*), apresenta fenomenologia muito similar à do oscilador harmônico ideal, com a novidade de que sua amplitude de oscilação (o termo que multiplica o cosseno na Eq. (1.87)) decai exponencialmente no tempo. A trajetória da partícula no espaço de fase é uma *espiral* que se inicia no ponto dado pela condição inicial e se aproxima exponencialmente da origem, o destino último de todo oscilador.

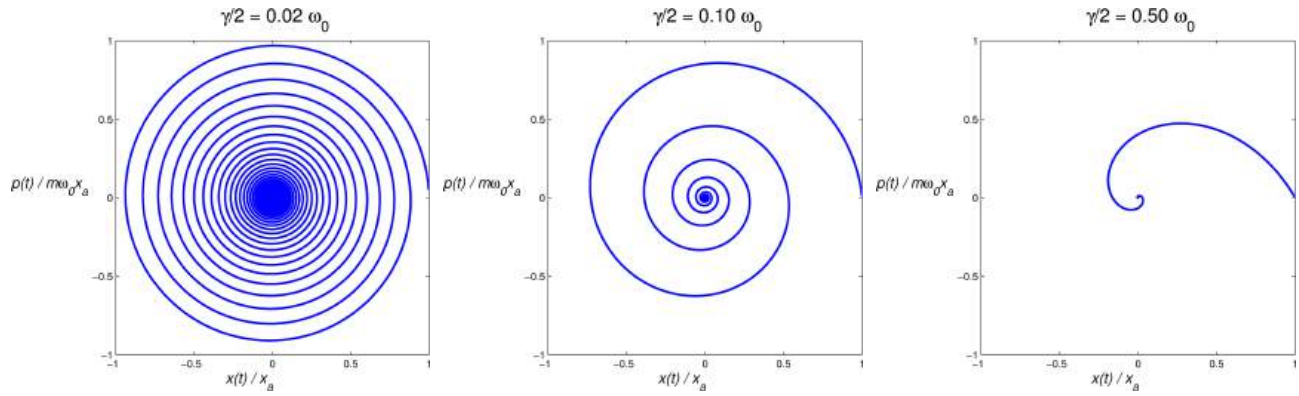


Figura 1.11: Trajetórias no espaço de fase do oscilador amortecido para diferentes valores de atrito. O decaimento exponencial da amplitude de oscilação leva à formação de uma curva espiral que tende à origem do espaço de fase.

No limite em que o atrito se torna desprezível, com $\gamma \ll \omega_0$, obtém-se na prática a solução do oscilador harmônico ideal por um tempo tão longo quanto se queira. Além disso, a frequência de oscilação ω'_0 se torna a frequência própria do oscilador $\omega'_0 \approx \omega_0 - \mathcal{O}(\gamma^2/\omega_0^2)$, a menos de correções de segunda ordem [Eq. (1.84)].

Sistemas com essa propriedade guardam interesse prático muito especial por estarem no centro da medição do tempo, *definido* no mundo real pela contagem de ciclos de um oscilador harmônico com amortecimento pequeno. Quanto menor o amortecimento, maior o período de tempo no qual se pode contar oscilações sem a perda de informação da fase inicial. A quantificação do número de oscilações ‘disponíveis’ no oscilador amortecido é realizada pelo *fator de qualidade* Q , uma propriedade intrínseca do oscilador definida pela razão entre os dois tempos típicos de interesse: o tempo de decaimento $\tau_\gamma = 1/\gamma$ e o período de uma oscilação $\tau'_0 = 2\pi/\omega'_0 = 1/\nu'_0$,

$$Q = \frac{\tau_\gamma}{\tau'_0} = \frac{\nu'_0}{\gamma_0}. \quad (1.88)$$

Para $Q \gg 1$, tem-se $Q \approx Q_0 = \nu_0/\gamma$. O parâmetro Q fornece uma estimativa do número de oscilações disponíveis antes que a amplitude do oscilador diminua por um fator típico. Esse parâmetro é muito utilizado para comparar a qualidade de osciladores, como diz seu nome. Por exemplo, um cristal de quartzo utilizado em relógios de pulso possui $Q \sim 10^5$, enquanto os melhores relógios do planeta, baseados em oscilações óticas de dipolos atômicos³⁸, podem chegar a $Q \sim 10^{16}$.

Amortecimento supercrítico

O segundo cenário claro para o movimento ocorre quando $\Delta < 0$, ou seja, $\gamma/2 > \omega_0$, regime chamado de *supercrítico*. Nesse caso, os parâmetros λ_\pm assumem valores reais [Eq. (1.81)],

$$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q_0^2} \right). \quad (1.89)$$

³⁸ Isso significa grosseiramente que o relógio atômico permite atingir precisão 100 bilhões de vezes melhor do que um relógio de pulso, o que se reflete em grande precisão de medidas derivadas, tal como e.g. distâncias. É por causa de sistemas como esse que hoje as rotas de aviões distam apenas 100 m umas das outras em altitude (a precisão do GPS atinge algo entre metros a uma dezena de metros no espaço tridimensional), adensando a utilização do espaço aéreo.

Notemos que $Q_0 < 1/2$ (embora seja difícil justificar o nome ‘fator de qualidade’ nesse contexto). A solução geral é

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-4Q_0^2}t} + Be^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{\frac{\gamma}{2}\sqrt{1-4Q_0^2}t}. \quad (1.90)$$

Perde-se o caráter oscilatório do movimento, e a solução é uma combinação de dois decaimentos exponenciais. As constantes A e B são determinadas pelas condições iniciais.

No caso limite de um oscilador fortemente dominado pela força de atrito ($Q_0 \ll 1$), a solução se divide em duas exponenciais com escalas de tempo bastante distintas. Uma delas possui a escala de tempo típica do atrito, pois $\lambda_+ \approx -\gamma$, enquanto a outra, com escala de tempo determinada por $\lambda_- \approx -\gamma Q_0^2 = -\nu_0 Q_0$, decai num tempo muito maior do que $1/\gamma$ e um tanto maior do que τ_0 . Assim, o oscilador amortecido supercrítico pode apresentar decaimento da oscilação de maneira extremamente rápida ou incansavelmente lenta, a depender das condições iniciais.

Amortecimento crítico

O terceiro cenário do movimento ocorre na ‘fronteira’ entre os dois primeiros, quando $\Delta = 0$, i.e. $\omega_0 = \gamma/2$, denominado de *amortecimento crítico*. Por se tratar de um *ponto* na região de parâmetros (dimensão zero), não faria sentido esperar que um oscilador real satisfizesse exatamente essa condição, até mesmo porque seus parâmetros devem variar ligeiramente com as condições do ambiente (e.g. temperatura).

O que ocorre na realidade é que esse ponto serve como modelo de comportamento do oscilador na situação em que $\omega_0 - \gamma/2 \ll \omega_0, \gamma$, e por isso possui relevância prática em toda uma região finita de parâmetros. Para entender esse tipo de movimento, podemos investigar nesse limite as soluções já encontradas nas duas situações anteriores.

Na região de amortecimento subcrítico, a condição $\Delta \approx 0_+$ implica $\omega'_0 \rightarrow 0_+$, com o que podemos expandir a solução da Eq. (1.86) até primeira ordem em ω'_0 como

$$x(t) \approx Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} + Cte^{-\frac{\gamma}{2}t}, \quad (1.91)$$

uma vez que $\cos(\omega'_0 t) \approx 1$, $\sin(\omega'_0 t) \approx \omega'_0 t$, e C é uma nova constante. Essa equação não depende de Δ e pode ser tomada como a solução esperada no ponto ideal em que $\Delta = 0$. Substituição direta na equação diferencial do movimento [Eq. (1.73)] confirma que $x_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e $x_2 = te^{-\frac{\gamma}{2}t}$ são, de fato, as duas soluções linearmente independentes procuradas³⁹.

Assim como no caso superamortecido, o movimento oscilatório dá aqui lugar a decaimentos exponenciais da amplitude, embora no caso crítico haja apenas exponenciais com mesma taxa de decaimento. Por não possuir a solução com decaimento lento, o amortecimento crítico garante que a amplitude de oscilação tenderá rapidamente ao valor nulo, independentemente das condições iniciais. Sistemas oscilatórios em que

³⁹Essas soluções podem ser determinadas formalmente considerando a Eq. (1.73) com $\Delta = 0$. Nesse caso, a equação característica [Eq. (1.81)] só fornece uma das soluções. Para encontrar a outra, podemos utilizar o wronskiano calculado de duas maneiras diferentes. Na primeira, calcula-se o mesmo por sua definição, $W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}$, em que $x_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ e x_2 é a solução desconhecida. Na segunda, utiliza-se o fato (teorema de Abel) de que $W(x_1(t), x_2(t)) = W(x_1(0), x_2(0))e^{-\int_0^t p(t')dt'}$, em que a equação diferencial se escreve como $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$. Igualando as duas formas de cálculo do wronskiano, encontra-se uma equação diferencial para x_2 . A independência das soluções é confirmada verificando-se que $W(x_1, x_2) \neq 0$.

o amortecimento é necessário, mas não a oscilação, tal como o sistema de molas de suspensão de veículos, são construídos para funcionarem como amortecedores críticos.

1.3.7 Oscilador harmônico forçado harmonicamente

Vimos que uma força restauradora linear oposta ao deslocamento da partícula produz oscilações caso o efeito do atrito não domine o movimento. A próxima etapa de complexidade nesse regime de movimento envolve aplicar sobre a partícula oscilante uma força externa adicional que seja também *periódica e harmônica*. Esse tipo de força é capaz de excitar o oscilador em maior ou menor grau, a depender de sua frequência, num fenômeno típico de *ressonância*. A configuração geral de oscilação submetida a uma força externa é chamada de *oscilação forçada*.

Consideramos uma força externa harmônica com magnitude $F_{ext}(t) = F \cos(\omega t)$ agindo sobre o oscilador. A equação de movimento dada pela Eq. (1.73) se modifica para

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos(\omega t), \quad (1.92)$$

e possui adicionalmente um termo não-homogêneo dependente do tempo.

Sua solução completa contém portanto duas partes: a solução homogênea já discutida, e que deve ser escolhida de acordo com o valor de Δ , e a solução particular a ser encontrada. Vimos que todas as possibilidades de solução homogênea fornecem um movimento que decai exponencialmente à posição de equilíbrio conforme passa o tempo. Isso significa que a solução homogênea deixa de ser importante para a descrição do movimento após certo tempo característico, sendo por isso chamada de *transiente*. Para tempos muito longos, a tendência é que apenas a solução particular tenha papel relevante.

Um procedimento importante para determinar a solução particular consiste em utilizar as facilidades dos números complexos. Definimos a versão complexa da força externa como

$$\tilde{F}_{ext}(t) = F e^{i\omega t}, \quad (1.93)$$

tal que $F_{ext}(t) = \text{Re}\{\tilde{F}_{ext}(t)\}$. A equação diferencial na função complexa $z(t)$ se torna

$$\ddot{z}(t) + \gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \tilde{F} e^{i\omega t}. \quad (1.94)$$

A solução particular z_p deve depender do tempo de maneira tal que cancele a dependência temporal do termo homogêneo e assim produza uma equação algébrica para coeficientes constantes. A dependência procurada só pode ser uma variação periódica no tempo com frequência ω , ou a exponencial complexa do termo homogêneo não se cancelaria. Podemos tentar então solução na forma

$$z_p = \tilde{A} e^{i\omega t}, \quad (1.95)$$

em que \tilde{A} é uma constante complexa⁴⁰. Fisicamente, estamos dizendo que a partícula será obrigada a oscilar na *mesma* frequência da força externa.

⁴⁰Caso isso não funcionasse, poderíamos tentar ainda uma solução mais geral com \tilde{A} dependente do tempo: assim funcionam – ou não – métodos de tentativa e erro como esse!

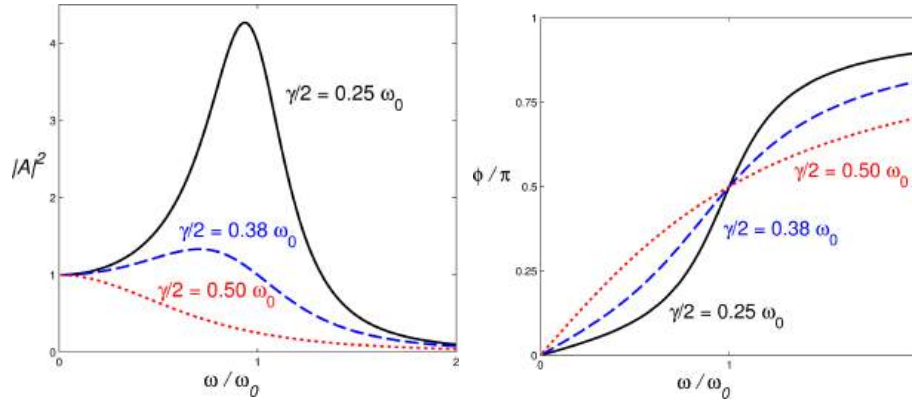


Figura 1.12: Comportamento da amplitude (esquerda) e fase (direita) do oscilador como função da frequência ω da força externa e para alguns valores da constante de atrito γ .

Substituindo x_p e suas derivadas na Eq. (1.94), conseguimos cancelar a dependência temporal e obter a seguinte expressão para a amplitude complexa \tilde{A} :

$$-\omega^2 \tilde{A} + i\gamma\omega \tilde{A} + \omega_0^2 \tilde{A} = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}. \quad (1.96)$$

Escrevendo $\tilde{A} = Ae^{i\theta}$, a solução particular da equação complexa nos fornece o deslocamento real do oscilador na forma

$$z_p = Ae^{i(\omega t + \theta)} = A(\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)) \quad \Leftrightarrow \quad x_p = \text{Re}\{z_p(t)\} = A \cos(\omega t + \theta). \quad (1.97)$$

Vemos que o papel da amplitude complexa na Eq. (1.95) é adequar à força externa a *amplitude* e a *fase* do oscilador forçado para que a equação diferencial de movimento seja respeitada. A Eq. (1.96) nos fornece a representação polar de \tilde{A} ,

$$A^2 = \frac{F^2/m^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (1.98)$$

Sua magnitude absoluta A determina a *amplitude* da oscilação, ou seja, o valor de deslocamento máximo da partícula. A fase θ fornece o atraso relativo entre a resposta do oscilador e a força externa, ou seja, o tempo decorrido entre a força assumir seu valor máximo e o oscilador se deslocar maximamente do equilíbrio.

A Fig. 1.12 ilustra a dependência da amplitude A^2 da oscilação forçada e de sua fase θ como função da frequência de excitação da força externa. Os eixos são colocados em formato adimensional para facilitar a compreensão dos gráficos. Conforme o valor de $\gamma/2$ decresce a partir do ponto crítico $\gamma/2 = \omega_0$, a figura à esquerda mostra que a resposta do oscilador se torna cada vez mais intensa no entorno de sua frequência própria ω_0 , num fenômeno incipiente de ressonância. A figura à direita mostra a fase relativa entre oscilação forçada e força externa, com o perfil típico de *defasagem* conforme se passa pela ressonância exata.

A solução para o movimento (passada a resposta transiente) é $x(t) = x_p(t) = \text{Re}\{z(t)\} = \text{Re}\{Ae^{i(\omega t + \theta)}\}$, dada explicitamente por

$$x(t) = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right). \quad (1.99)$$

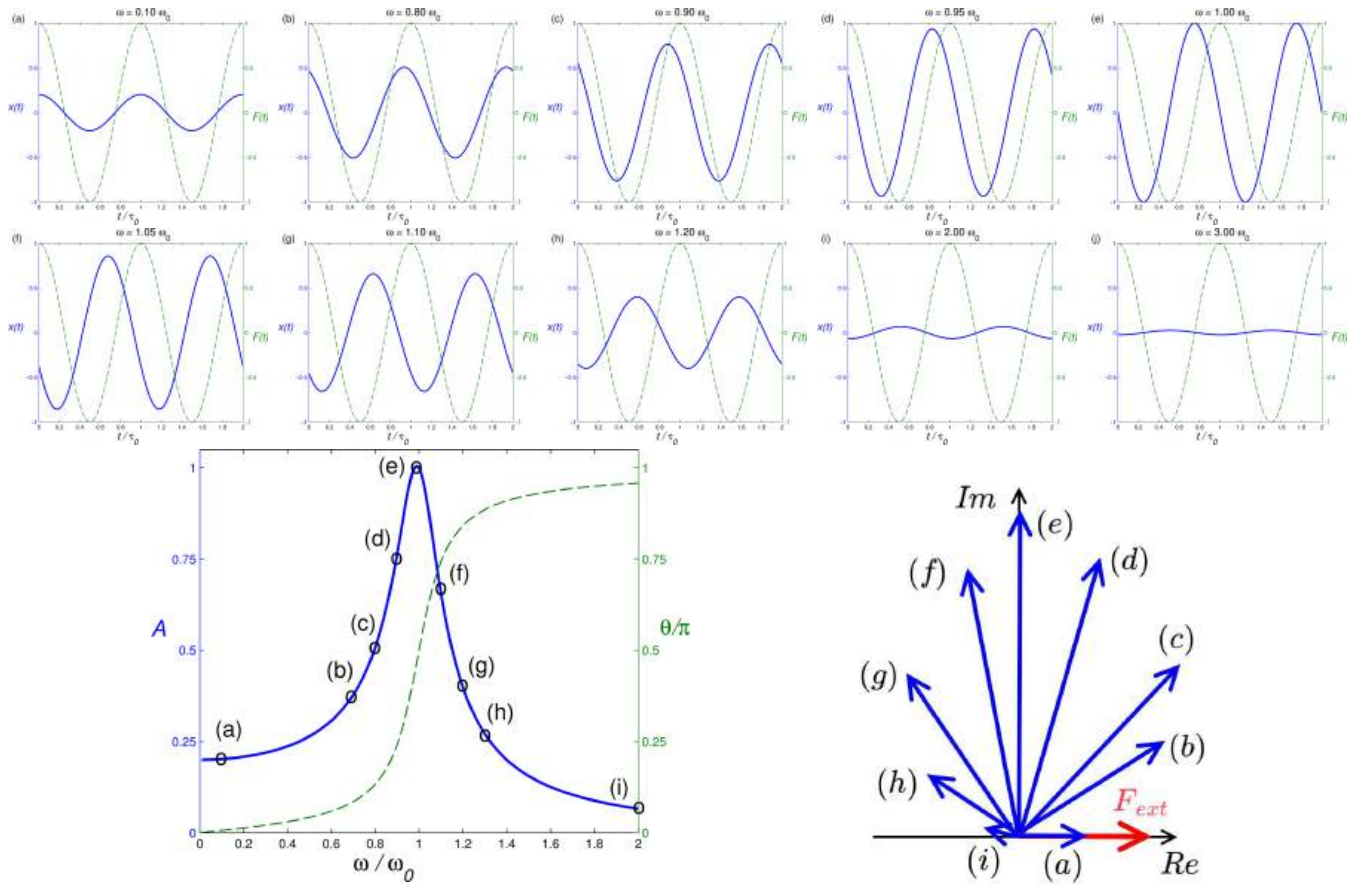


Figura 1.13: Quadros (a) a (j): Força externa (linha tracejada) e deslocamento (linha contínua) do oscilador como funções do tempo. Cada gráfico retrata um possível valor ω para a frequência da força externa, à qual correspondem amplitude e fase específicas do oscilador. Quadro inferior, esquerda: Curvas de amplitude (linha contínua) e fase (linha tracejada) do oscilador como funções da frequência da força externa. Os círculos e letras indicam o quadro superior correspondente. Quadro inferior, direita: Representação de $\tilde{A} = Ae^{i\theta}$ no plano complexo. Os fasores à direita e à esquerda da frequência livre do oscilador se tornam perfeitamente simétricos em relação ao fasor (e) no limite de um bom oscilador, $\omega_0 \gg \gamma$. Usamos $\gamma/2 = 0,1\omega_0$.

Na verdade, o movimento pode ser também visualizado utilizando diretamente a solução complexa $z_p(t)$, através dos chamados ‘fasores’. Podemos tomar a parte real de $z_p(t)$ na Eq. (1.97) de outra maneira, realizando o produto explícito das exponenciais de tempo e de fase, na forma

$$z_p(t) = \tilde{A}e^{i\omega t} = \left(\text{Re}\{\tilde{A}\} + i\text{Im}\{\tilde{A}\} \right) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \Leftrightarrow x_p(t) = \text{Re}\{\tilde{A}\} \cos(\omega t) - \text{Im}\{\tilde{A}\} \sin(\omega t). \quad (1.100)$$

Assim, as partes real e imaginária de \tilde{A} nos fornecem as amplitudes das funções cosseno e seno do deslocamento. A solução cosseno representa a resposta do oscilador *em fase* com a força externa, enquanto a componente seno, a resposta em *quadratura* (i.e. defasada de $\pi/2$ com relação à força externa). Usando a Eq. (1.96) para \tilde{A} , obtemos

$$\tilde{A} = \frac{F}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega), \quad (1.101)$$

com o que a solução para o deslocamento da partícula em termos de funções cosseno e seno se torna

$$x(t) = \frac{F}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \gamma \omega \sin(\omega t)], \quad \text{para } t \gg \gamma^{-1}. \quad (1.102)$$

A Fig. 1.13 ilustra a solução para o movimento do oscilador para diferentes valores da frequência ω da força externa. Os quadros de (a) a (j) mostram o aumento da amplitude de oscilação conforme ω se aproxima da frequência própria ω_0 do oscilador e seu posterior decréscimo para valores muito distantes disso. A fase da oscilação também pode ser vista variar entre $\theta \approx 0$ para $\omega \ll \omega_0$, passar por $\theta = \pi/2$ na condição $\omega = \omega_0$ e tender assintoticamente a $\theta \approx \pi$ para $\omega \gg \omega_0$. A variação da fase pode ser vista comparando-se o movimento da partícula (curvas contínuas) ao valor da força externa (curvas tracejadas).

A localização de cada quadro na curva de resposta do oscilador se encontra demarcada no quadro inferior à esquerda. A representação da amplitude complexa \tilde{A} ('fasores') para os quadros (a)–(i) é mostrada no quadro inferior direito, e nos fornece uma maneira visual e sintética de entender como se comportam a amplitude e a fase da oscilação. É notável a região próxima à ressonância, relativa aos quadros (d) a (f), na qual a amplitude de oscilação já se encontra próxima ao valor máximo e a fase apresenta grande variação. Por esse motivo, respostas ressonantes como essa são importantes para realizar medidas interferométricas, i.e. sensíveis à fase: o movimento do oscilador transforma com grande sensibilidade informação sobre a frequência da força na fase relativa da oscilação.

Ressonância

Em geral, o oscilador forçado é de interesse com atrito muito pequeno ($Q \gg 1$), quando então efeitos claros de ressonância se fazem presentes. Para ilustrar esses efeitos de forma simples, vamos considerar desde o início de nosso tratamento a situação em que $\gamma \ll \omega_0$. Nesse caso, é conveniente definirmos a *dessintonia* em frequência entre a força externa e o oscilador como $\delta\omega = \omega - \omega_0$ e investigar a resposta do mesmo numa escala de frequência de alguns γ no entorno de ω_0 , restringindo-nos ao limite em que $\delta\omega \sim \gamma \ll \omega_0$.

Com essas considerações, cuja consistência pode ser checada conforme avançarmos no tratamento, podemos utilizar as aproximações

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0 \delta\omega \quad \text{e} \quad \gamma\omega \approx \gamma\omega_0, \quad (1.103)$$

em que mantivemos apenas termos até primeira ordem em $\delta\omega$ e em γ . Por contas simples, obtemos a partir da Eq. (1.96) as respostas aproximadas para a amplitude e a fase do oscilador como

$$\tilde{A} \approx -i \frac{F/m}{\gamma\omega_0} \frac{1}{1 + i \frac{\delta\omega}{\gamma/2}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A^2 \approx \left(\frac{F/m}{\gamma\omega_0} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{\delta\omega}{\gamma/2} \right)^2} \\ \theta \approx \arctan \frac{1}{\frac{\delta\omega}{\gamma/2}} \end{cases}. \quad (1.104)$$

As dependências de A^2 e θ com a frequência da força externa são ilustradas na Fig. 1.14. A amplitude A^2 segue um curva *lorentziana*. Essa curva possui um pico bem definido centrado na frequência ω_0 , decaindo lentamente em volta desse ponto. O oscilador se excita maximamente quando a frequência da força se

encontra em *ressonância exata* ($\omega = \omega_0$), i.e. frequência de excitação igual à frequência própria do oscilador. Sua amplitude vale $A_{max} = (F/m)/(2\omega_0\gamma)$ nesse ponto, e aumenta conforme a influência do atrito (γ) diminui⁴¹.

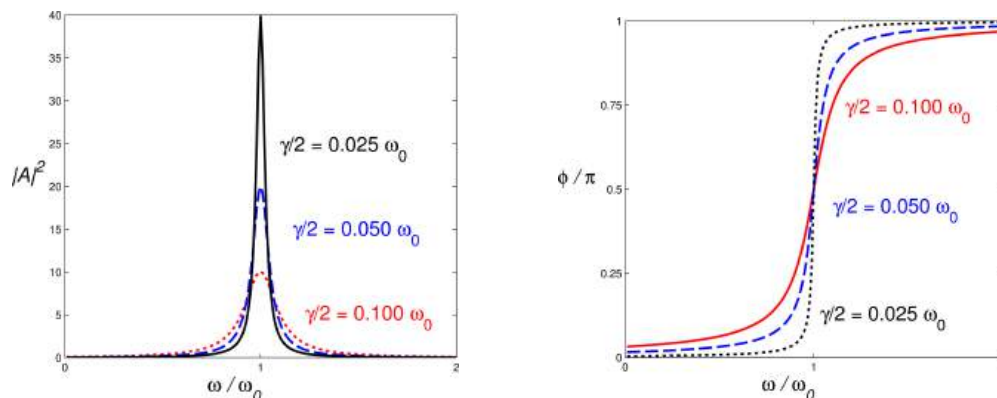


Figura 1.14: Perfis de ressonância das respostas em amplitude (esquerda) e fase (direita) do oscilador como função da frequência ω da força externa.

A *largura* do pico de ressonância é proporcional a γ . Define-se sua *largura à meia altura* como a distância em frequência entre os pontos nos quais a resposta cai à metade de seu valor máximo, i.e. considerando a distância entre os valores de $\delta\omega$ tal que $|\tilde{A}(\delta\omega)| = A_{max}/2$. Existe um valor possível em cada lado da ressonância, $\delta\omega = \pm\gamma/2$, e portanto a largura à meia altura do pico, dada pela diferença entre essas frequências, é γ .

A fase de resposta do oscilador segue uma função arcotangente com a dessintonia (Fig. 1.14, direita). Em ressonância exata, obtemos $\theta = \pi/2$, i.e. força e oscilador se encontram em quadratura, $x_p(t) \propto \sin(\omega t)$. Para frequências de excitação dessintonizadas para o lado negativo ($\delta\omega \ll \omega_0$), o oscilador responde praticamente em fase com a força externa ($\theta \approx 0$). Nesse caso, a escala de tempo de variação da força ($\approx 1/\omega$) é ‘lenta’ com relação à escala de tempo de resposta típica do oscilador (da ordem de $1/\omega_0$): o oscilador ‘segue’ facilmente a força externa (imaginemos o caso extremo em que uma pessoa puxa lentamente o oscilador, $\omega \rightarrow 0$). No caso oposto, com dessintonias muito grandes e positivas ($\delta\omega \gg \omega_0$), a força se torna muito ‘rápida’ para o oscilador, e este tende a responder em oposição de fase ($\theta \approx \pi$) por conta de sua inércia.

Temos acesso agora ao quadro geral de um fenômeno de ressonância. A frequência própria do oscilador fornece o valor de frequência no qual a força externa é capaz de excitar maximamente o movimento oscilatório. O atrito influencia a tolerância a pequenas dessintonias em torno desse ponto, fornecendo a largura do pico de resposta. Caso a força externa tenha frequência tal que $|\omega - \omega_0| \lesssim \gamma$ (resposta ressonante), o oscilador se excita maximamente; no entanto, o mesmo não responde apreciavelmente para grandes dessintonias (i.e. $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$). Em geral, a resposta ressonante do oscilador é tão maior em amplitude quanto menor for γ , embora a sintonia da força externa se torne cada vez mais crítica.

Além disso, o deslocamento do oscilador ocorre fora de sincronia com a força externa. Variando a frequência de excitação de valores baixos até valores altos comparados a ω_0 em unidades de γ , a defasagem

⁴¹No limite teórico em que γ fosse a zero, obteríamos o oscilador harmônico ideal. O pico de ressonância teria largura zero e altura infinita perfeitamente localizada no ponto $\delta = 0$. Essa é uma visão pictórica para a função *delta de Dirac*. Todo oscilador real, no entanto, possui uma largura intrínseca. A função delta de Dirac é uma boa aproximação quando a precisão com que se mede frequência não é suficiente para se resolver a largura γ da ressonância.

varia de zero a π conforme se cruza a ressonância. A escala de frequência típica para a mudança de fase também é γ . Essa fase é por vezes a única evidência da resposta de um oscilador. Apesar de termos tratado de uma ressonância mecânica, essa fenomenologia se aplica também aos mais diversos sistemas físicos fora desse contexto, dada a ubiquidade das ressonâncias na natureza. Para entender esse quadro de forma mais ampla, fazemos as seguintes generalizações: o oscilador se torna um sistema físico periódico em algum sentido (e.g. a carga acumulada num capacitor ligado a um indutor); o papel da força externa pode ser desempenhado por qualquer agente externo periódico em interação com o oscilador (e.g. uma fonte externa de tensão); e o atrito mecânico fica entendido como qualquer outra forma de interação que influencie o oscilador incoerentemente (i.e. de maneira aperiódica ou até mesmo aleatória).

Ao contrário do oscilador mecânico, no entanto, cuja posição pode ser medida facilmente no tempo, é comum que osciladores de outros tipos sejam acessíveis justamente através da própria interação associada à força externa, e por nada mais. Um exemplo desse tipo de sistema seria a interação entre uma molécula da atmosfera e a luz solar. Toda molécula, por ser essencialmente um sistema ligado de cargas elétricas, possui frequências próprias de oscilação associadas ao movimento relativo entre suas cargas. E cargas elétricas interagem com campos elétricos, daí a possibilidade de excitar oscilações de moléculas com luz. Embora seja difícil observar o movimento dessas cargas, uma molécula não só se excita na presença de luz, mas também a emite ao oscilar. Temos então a situação em que o oscilador pode ser sondado pela luz reemitida após ser excitado. E a interferência entre a luz usada na excitação e a luz reemitida é por vezes o sinal utilizado na medida do estado da molécula, caso em que a fase relativa entre elas se torna essencial.

São efeitos de ressonância que permitem explicar a cor do céu e as linhas espectrais observadas na fotosfera solar. Analogamente, ressonâncias observadas na interação entre o núcleo atômico e raios gama foram o fenômeno utilizado nos primórdios da física nuclear para entender melhor a estrutura do núcleo. Como veremos, quase todo sistema físico perturbado a partir do equilíbrio se torna um oscilador, e por isso sua excitação quase sempre produz algum fenômeno de ressonância.

1.3.8 Oscilador harmônico forçado periodicamente

A solução encontrada como resposta do oscilador a uma força harmônica pode ser utilizada para construir formatos temporais mais gerais de força pela *superposição* de soluções. Na verdade, o tipo de força considerada – harmônica – traz ampla generalidade para o tratamento de qualquer⁴² força *periódica* $F(t)$, ainda que não seja harmônica. A superposição de soluções harmônicas possibilita resolver a equação mais geral

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (1.105)$$

em que supomos existir intervalo de tempo τ tal que $F(t + \tau) = F(t), \forall t$ (i.e. F é periódica). Existem pelo menos dois motivos gerais para justificar o fato de que esse procedimento funciona.

O primeiro deles é a linearidade da equação de movimento. O movimento do oscilador induzido por uma força externa dada pela *superposição* de funções harmônicas distintas pode ser resolvido como se a Eq. (1.92) fosse na verdade várias equações independentes, uma para cada parcela da força. A resposta do oscilador

⁴²As condições sobre a força externa para que o movimento possa ser resolvido com os métodos a seguir apresentados são basicamente condições de ‘fiscalidade’: a função precisa se anular de forma suficientemente rápida no infinito.

a essa superposição de forças é a superposição das respostas a cada componente harmônica da força, o que vale para qualquer número de forças harmônicas superpostas.

Assim, por exemplo, a solução particular para a força externa $F_{ext}(t) = F_1 \cos(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t)$ é simplesmente dada por $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, em que x_1 resolve a primeira parcela de $F_{ext}(t)$ e x_2 , a segunda, ou seja,

$$\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{F_1}{m} \cos(\omega_1 t), \quad (1.106)$$

$$\ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \frac{F_2}{m} \cos(\omega_2 t). \quad (1.107)$$

Logo, a linearidade da equação diferencial implica em

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) &= \frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) + \gamma \frac{d}{dt} (x_1 + x_2) + \omega_0^2 (x_1 + x_2) \\ &= (\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1) + (\ddot{x}_2 + \gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2) \\ &= \frac{F_1}{m} \cos(\omega_1 t) + \frac{F_2}{m} \cos(\omega_2 t) \\ &= \frac{F_{ext}(t)}{m}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

e, portanto, $x(t)$ resolve o movimento sob ação de $F_{ext}(t)$. O mesmo valeria caso a força externa fosse a soma de três frequências distintas: a superposição de parcelas harmônicas a produzir a força se refletiria na superposição de oscilações harmônicas da partícula. E assim por diante.

Mas a estratégia de decompor a força em parcelas harmônicas só deve funcionar para o conjunto de funções $F_{ext}(t)$ que admitem essa decomposição: à primeira vista, estaríamos solucionando apenas um subconjunto de todas as forças periódicas possíveis. Na verdade, o segundo motivo por trás da generalidade desse tipo de procedimento de resolução do movimento é o fato de que funções harmônicas servem como *base* para a decomposição de *qualquer* função periódica bem comportada. A decomposição em *série de Fourier* permite escrever qualquer $F(t)$ periódica (e física!) como uma superposição de funções harmônicas!

Decomposição da força externa em série de Fourier

Para usarmos a nosso favor tanto a linearidade da equação diferencial do oscilador harmônico quanto nossa solução para a força externa harmônica, é preciso primeiro resolver o problema de como decompor uma força periódica qualquer em funções harmônicas. Uma força periódica se repete a cada intervalo τ , seu período, e portanto existe τ tal que $F(t + \tau) = F(t), \forall t$. Vejamos então buscar como decompor uma função $F(t)$, que para nós representará a força externa atuando sobre o oscilador, em funções harmônicas num intervalo de tamanho τ .

Como $F(t)$ é periódica, qualquer intervalo com o tamanho correto já deve possuir toda a informação necessária para descrever a função, e por isso escolhemos por simetria o intervalo $[-\tau/2, \tau/2]$. Para que a decomposição funcione em qualquer intervalo anterior ou posterior a esse, devemos escrevê-la em termos de funções harmônicas com períodos compatíveis com τ , i.e. que também se repitam a cada intervalo τ . Isso ocorre se escolhermos cossenos e senos com frequências angulares tais que

$$\tau_n = \frac{\tau}{n} \quad \Rightarrow \quad \omega_n = n\omega, \quad \text{com } n, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.109)$$

Dessa forma, as funções harmônicas candidatas ao papel de ‘base’ na qual descrever $F(t)$ são

$$\{\cos(n\omega t), \sin(m\omega t)\}, \quad (1.110)$$

e, como podemos ver, há infinitas delas. Todas se repetem a cada intervalo τ , como queríamos. A frequência ω faz o papel de ‘frequência fundamental’ do intervalo, sendo todas as demais múltiplas dela.

O motivo por que qualquer função periódica fisicamente razoável $F(t)$ pode ser entendida como uma superposição de funções harmônicas desse tipo está intimamente relacionado ao fato de que as funções da Eq. (1.110) respeitam relações de *ortogonalidade* e de *completeza*, tal qual os versores cartesianos de base. Por isso, o conjunto $\{\cos(n\omega t), \sin(m\omega t)\}$ forma uma base (infinita!) no espaço de funções periódicas bem comportadas.

Tudo o que nos resta para podermos entendê-las assim, como um *espaço vetorial*, é a definição de um produto escalar⁴³. Já que vamos encarar as funções harmônicas da Eq. (1.110) como vetores de um espaço, é útil denotá-las de maneira mais conveniente. Vamos denotar as funções de base como

$$|c, n\rangle = \cos(n\omega t) \quad \text{e} \quad |s, n\rangle = \sin(n\omega t). \quad (1.111)$$

Denotamos o produto escalar entre dois vetores quaisquer, e.g. $|c, n\rangle$ e $|c, m\rangle$, como $\langle c, n | c, m \rangle$. Queremos então inventar uma operação de produto interno capaz de tornar esses vetores ortogonais entre si; no caso das funções cosseno, queremos que valham as relações

$$\langle c, n | c, m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m, \end{cases} \quad (1.112)$$

o mesmo valendo para as funções seno,

$$\langle s, n | s, m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases} \quad (1.113)$$

Além disso, funções cosseno e seno devem ser também ortogonais entre si, ou seja,

$$\langle c, n | s, m \rangle = 0, \quad \forall n, m. \quad (1.114)$$

Todas essas equações se escrevem em forma compacta pelo uso do *delta de Kronecker*, uma função discreta de dois índices definida como

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = m \\ 0, & \text{se } n \neq m \end{cases}. \quad (1.115)$$

Por seu uso, as condições de ortogonalidade que buscamos se reduzem à forma

$$\langle c, n | c, m \rangle = \delta_{nm}, \quad \langle s, n | s, m \rangle = \delta_{nm} \quad \text{e} \quad \langle c, n | s, m \rangle = 0. \quad (1.116)$$

O desafio se torna então pensar num produto escalar capaz de produzir essas condições. Uma possível operação linear que age no espaço de funções e é capaz de levar funções (i.e. vetores) em escalares é a *integral* definida. E o intervalo de integração deve ser, em nosso caso, o domínio $[-\tau/2, \tau/2]$ que escolhemos para

⁴³Um espaço vetorial é um conjunto de objetos munidos de um produto escalar (representado pelo símbolo ‘ \cdot ’) e de uma operação de soma (símbolo ‘+’) com certas propriedades mínimas, como linearidade e distributividade.

representar um período da função. A maneira pela qual podemos combinar duas funções é tomando-lhes o produto (comum) dentro do integrando. Usamos duas funções cosseno como teste para tentarmos a definição

$$\langle c, n|c, m \rangle \stackrel{?}{=} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt. \quad (1.117)$$

Essa integral pode ser resolvida expressando o produto de funções trigonométricas como uma soma,

$$\begin{aligned} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} (\cos[(n+m)\omega t] + \cos[(n-m)\omega t]) dt \\ &\stackrel{n \neq m}{=} \frac{\sin[(n+m)\pi]}{(n+m)\omega} + \frac{\sin[(n-m)\pi]}{(n-m)\omega}, \end{aligned} \quad (1.118)$$

em que assumimos $n \neq m$ na última passagem para realizar a integral. Como o seno de um múltiplo de π é nulo, essa forma de produto escalar nos fornece a ortogonalidade buscada entre as diferentes funções cosseno, pois valem as relações

$$\langle c, n|c, m \rangle \stackrel{?}{=} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = 0, \quad \text{se } n \neq m. \quad (1.119)$$

Seguindo a Eq. (1.118), o caso em que $n = m$ produz o resultado

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos^2(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\cos[2n\omega t] + 1) dt = \frac{\cancel{\sin[(n+m)\pi]}^0}{(n+m)\omega} + \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2}, \quad (1.120)$$

ou seja, uma constante. Para obrigar essa constante a ser igual a 1, podemos renormalizar as funções de base, multiplicando todas pela constante $\sqrt{2/\tau}$, ou, o que é mais comum, redefinir o produto escalar usando a mesma lógica. Utilizamos esta última alternativa para definir o produto escalar entre duas funções periódicas $F(t)$ e $G(t)$ quaisquer como

$$\langle F|G \rangle = \langle G|F \rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t)G(t) dt. \quad (1.121)$$

Quando aplicado às funções de base, o produto escalar nos fornece as relações de ortogonalidade desejadas,

$$\langle c, n|c, m \rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \delta_{nm}, \quad (1.122)$$

$$\langle s, n|s, m \rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \delta_{nm}, \quad (1.123)$$

$$\langle c, n|s, m \rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0. \quad (1.124)$$

Em conclusão: nossa operação de produto escalar funciona! Notemos que o produto escalar entre uma função de base e uma constante α é nulo,

$$\langle c, n|\alpha \rangle = \langle s, n|\alpha \rangle = 0, \quad \forall n, \quad (1.125)$$

já que a média das funções cosseno e seno é nula no intervalo τ . Além disso, o produto escalar é linear,

$$\begin{aligned} \langle c, n|\alpha F + \beta G \rangle &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\alpha F(t) + \beta G(t)) \cos(n\omega t) dt \\ &= \alpha \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t) \cos(n\omega t) dt + \beta \int_{-\tau/2}^{\tau/2} G(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \alpha \langle c, n|F(t) \rangle + \beta \langle c, n|G(t) \rangle. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Possuímos agora as ferramentas necessárias para escrever qualquer função periódica $F(t)$ como uma soma de funções harmônicas. Notemos em primeiro lugar que $F(t)$, entendida como um vetor, deve poder ser escrita como uma soma dos vetores de base, na forma

$$|F\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |c, n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} b_n |s, n\rangle, \quad (1.127)$$

em que a_n e b_m representam as ‘projeções’ de $|F\rangle$ nas ‘direções’ $|c, n\rangle$ e $|s, m\rangle$. As relações de ortogonalidade das Eqs. (1.122)–(1.124) nos permitem justamente determinar esses coeficientes. De fato, tomando o produto escalar da Eq. (1.127) com um vetor de base $|c, m\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle c, m|F\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle c, m|c, n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \langle c, m|s, n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{nm} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 \\ &= a_m. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Assim, tomar o produto escalar de $F(t)$ com a função de base $|c, m\rangle$ nos dá acesso à projeção de $|F\rangle$ em $|c, m\rangle$, o mesmo valendo para as funções seno. Os coeficientes (constantess!) da expansão de $F(t)$ em funções harmônicas são, portanto,

$$a_n = \langle c, n|F\rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t') \cos(n\omega t') dt' \quad \text{e} \quad b_n = \langle s, n|F\rangle = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t') \sin(n\omega t') dt'. \quad (1.129)$$

Na verdade, ainda falta um ‘pedaço’ de $F(t)$: sua média no intervalo. Esse valor não aparece na decomposição da Eq. (1.127) por causa das médias nulas das funções harmônicas [Eq. (1.125)]. É preciso incluir esse termo ‘na mão’ para completar a decomposição. Atualizamos a Eq. (1.127) para definirmos a *série de Fourier* da função $F(t)$ como

$$F(t) = \bar{F} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right], \quad (1.130)$$

em que adicionamos o termo

$$\bar{F} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} F(t') dt'. \quad (1.131)$$

Em essência, a série de Fourier descreve a função $F(t)$ como uma somatória de componentes harmônicas $F_n(t)$ independentes, pois

$$F(t) = \bar{F} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \quad \text{com} \quad F_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t). \quad (1.132)$$

Essa forma de escrever dá ênfase à descrição em termos de componentes cosseno (com amplitude a_n) e seno (amplitude b_n). Da mesma maneira que a solução harmônica do movimento pode ser escrita de duas formas – em termos das funções seno e cosseno [Eq. (1.102)] ou, alternativamente, em termos de uma função cosseno com fase ajustável [Eq. (1.99)] –, vale para cada componente de Fourier $F_n(t)$ a expressão alternativa

$$F_n(t) = c_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad \text{em que} \quad \begin{cases} a_n = c_n \cos \phi_n, \\ b_n = c_n \sin \phi_n, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \phi_n = \arctan(b_n/a_n). \end{cases} \quad (1.133)$$

As novas constantes c_n e ϕ_n fornecem respectivamente a *amplitude* e a *fase* da componente harmônica com frequência ω_n , i.e. $F_n(t)$, da força externa. A série de Fourier se escreve em termos dessas constantes como

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t + \phi_n), \quad (1.134)$$

em que definimos por simplicidade de notação as quantidades

$$c_0 = \bar{F} \quad \text{e} \quad \phi_0 = 0, \quad (1.135)$$

e fizemos a somatória em n ir de 0 a ∞ . As Eqs. (1.130) e (1.134) nos fornecem duas formas diferentes de expressar a série de Fourier. O contexto deve indicar qual delas se torna mais conveniente.

Exemplo: Pulso retangular. O cálculo da série de Fourier pode ser simplificado se a função a ser decomposta possuir paridade bem definida. Como a função cosseno (seno) é par (ímpar), funções $F(t)$ pares (ímpares) possuirão apenas termos em cosseno (seno). Façamos um exemplo. Consideremos uma força descrita por um pulso retangular,

$$F(t) = \begin{cases} F_{<} = 0, & \text{se } t < -T/2 \\ F_0 = f, & \text{se } -T/2 < t < T/2 \\ F_{>} = 0, & \text{se } t > T/2 \end{cases}. \quad (1.136)$$

Para decompor essa função em série de Fourier, é necessário determinar sua média \bar{F} e os coeficientes a_n e b_n dados pela Eq. (1.129). O valor médio da função no intervalo é simplesmente a área do retângulo com base T e altura f dividida pela duração τ do intervalo: $\bar{F} = fT/\tau$. Os coeficientes a_n são calculados como

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}} F_{<} \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F_0 \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{\tau} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F_{>} \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2f}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2f}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{T}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (1.137)$$

Já os coeficientes das funções seno são nulos, por conta de ser $F(t)$ par⁴⁴, i.e. $F(t) = F(-t)$, pois

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^0 F(t) \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{\tau} \int_{\frac{\tau}{2}}^0 F(-t) \sin(-n\omega t) (-dt) + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= -\frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt + \frac{2}{\tau} \int_0^{\frac{\tau}{2}} F(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.138)$$

⁴⁴Sempre que a função a ser decomposta apresentar alguma simetria, torna-se conveniente escolher o ponto $t = 0$ de maneira a tirar proveito dessa propriedade. No caso da função em questão, escolhemos definir o instante $t = 0$ no ponto médio do retângulo.

em que usamos as identidades $\sin(-n\omega t) = -\sin(n\omega t)$ e $\int_{-\frac{\tau}{2}}^0 dt = \int_{\frac{\tau}{2}}^0 (-dt) = -\int_{\frac{\tau}{2}}^0 dt = \int_0^{\frac{\tau}{2}} dt$. A expansão de $F(t)$ em série de Fourier toma a forma

$$F(t) = \frac{\omega T}{2\pi} f + \frac{2f}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(n \frac{\omega T}{2}\right) \cos(n\omega t), \quad (1.139)$$

em que usamos $\tau = 2\pi/\omega$. Nesse caso simples, a Eq. (1.139) já contempla também a representação da série de Fourier na forma ‘polar’ da Eq. (1.134), bastando ter o cuidado de incluir o sinal correto na frente do cosseno (pois $b_n = 0 \Rightarrow \phi_n = 0$ ou $\phi = \pi$).

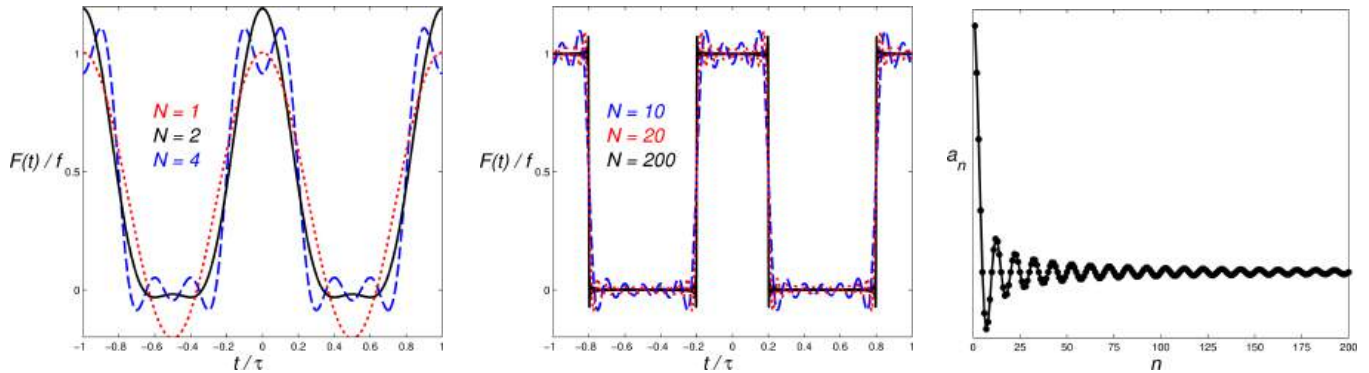


Figura 1.15: Decomposição em série de Fourier do pulso retangular da Eq. (1.136). Esquerda: Superposição parcial da série até os primeiros 4 termos. Centro: superposições parciais com até 200 termos. Direita: Coeficientes a_n como função de n .

A Fig. 1.15 ilustra somatórias parciais da série de Fourier da Eq. (1.139) para um pulso retangular com largura $T = 2\tau/5$. O gráfico à esquerda mostra como a superposição (em etapas) dos primeiros quatro termos já capta as principais características do pulso retangular. No gráfico central, é possível ver como a soma de mais termos à série permite corrigir paulatinamente desvios com relação à função ideal de maneira cada vez mais cuidadosa: com 200 termos, obtemos o pulso retangular com grande precisão. Finalmente, vemos no gráfico à direita as amplitudes relativas a_n de contribuição das diversas frequências ω_n . Em particular, a importância dos quatro primeiros termos da série se torna bastante evidente, visto que os coeficientes a_1 a a_4 possuem, de fato, os quatro maiores valores absolutos do conjunto.

Notemos ainda que cada uma das amplitudes c_n (e fase ϕ_n) podem ser usadas para representar graficamente sua respectiva componente $F_n(t)$ da força externa como ‘fasores’, no mesmo espírito da Fig. 1.13 (canto inferior esquerdo). A força física $F(t)$ é dada pela soma de infinitos fasores. No caso em questão, todas as componentes serão reais, embora com fases ϕ_n ‘pulando’ entre 0 e π de acordo com o sinal de a_n . Explicitamente, abrimos a Eq. (1.139) para escrever

$$F(t) = \underbrace{f \frac{\omega T}{2\pi}}_{\bar{F}} + \underbrace{\frac{2f}{\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)}_{a_1} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{f}{\pi} \sin(\omega T)}_{a_2} \cos(2\omega t) + \underbrace{\frac{2f}{3\pi} \sin\left(\frac{3}{2}\omega T\right)}_{a_3} \cos(3\omega t) + \dots \quad (1.140)$$

O fato de que todas as componentes harmônicas $F_n(t)$ devem estar em fase ou em oposição de fase entre si pode também ser percebido na Fig. 1.15: todas as ondas parciais parecem se somar ou subtrair no ponto $t = 0$. Isso não ocorreria caso o pulso não possuísse paridade bem definida (ou, melhor, caso não tivéssemos escolhido o ponto $t = 0$ de forma esperta).

Uma característica curiosa do pulso reconstruído com 200 termos harmônicos (gráfico central) são as oscilações rápidas a ocorrerem nas regiões de ‘saltos’ bruscos em $F(t)$. Poderíamos tentar argumentar que

esses artefatos não são um problema fundamental, já que a função exata $F(t)$ só seria obtida para um número infinito de termos na série (a esperança residiria em acreditar que os artefatos sumiriam com o aumento do número de termos na série). Mas isso não é bem verdade: é possível mostrar que essas oscilações persistem mesmo para número muito grande de termos, o que pode ser visto no gráfico à direita: as amplitudes dos coeficientes a_n para n grande tendem a oscilar para sempre, indicando que frequências infinitamente grandes devem contribuir para a série. À primeira vista, essa falha na convergência parece incômoda: afinal, podemos ou não decompor qualquer função $F(t)$ em série de Fourier?

Sim, podemos, se aplicarmos a restrição de que as forças $F(t)$ devem ser ‘físicamente razoáveis’. De fato, o pulso retangular possui descontinuidades que o tornam nada mais nada menos do que uma *aproximação* idealizada de uma força física. A subida repentina em $t = -T/2$ não é fisicamente razoável, pois nenhum processo físico ocorre instantaneamente. A aproximação de subida instantânea só pode significar fisicamente que o tempo de subida é muito menor do que o tempo T de duração do pulso.

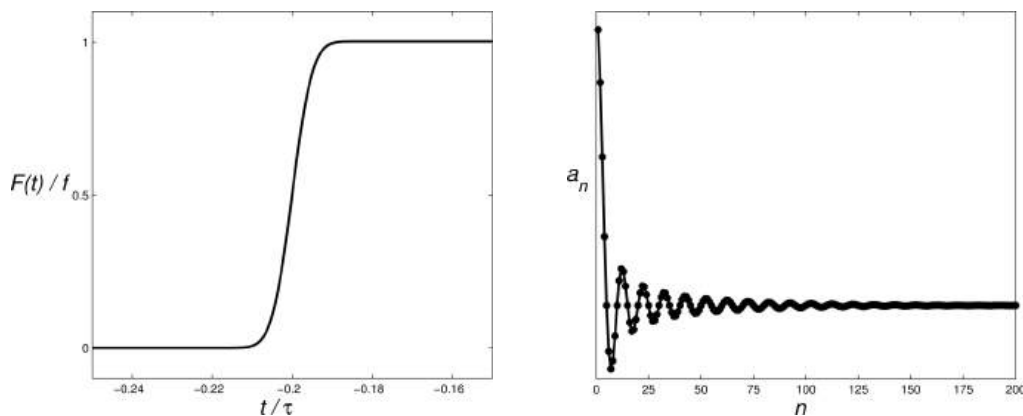


Figura 1.16: Pulso retangular suave. À esquerda, vemos ampliada a região onde anteriormente havia uma descontinuidade ser ‘consertada’ por uma variação rápida mas contínua. Os coeficientes da série de Fourier para esse pulso são mostrados no gráfico à direita, e dessa vez tendem a zero para n grande.

As flutuações rápidas persistentes na região de ‘saltos’ repentinos da função, mesmo para 200 termos somados, são artifícios matemáticos dessa descontinuidade da força. Na verdade, a força real a agir sobre o sistema sempre possui tempos típicos de subida e descida. A essas escalas de tempo ‘rápidas’ de variação da força devem corresponder termos de mais alta frequência (tipicamente dada pelo inverso de duração da subida e descida) da série de Fourier. Termos com frequências maiores do que qualquer escala típica do sistema tenderão a ter amplitude nula na decomposição, o que permite truncar a série sem problemas.

Isso é confirmado pela Fig. 1.16, na qual o pulso retangular é ‘consertado’ para apresentar tempos finitos de subida e descida. O efeito da suavização pode ser observado diretamente na queda dos novos coeficientes a_n conforme se aumenta a frequência ω_n , mostrando que nesse caso é possível fazer a série convergir numericamente até determinada precisão de interesse. Na prática, a amplitude mínima da série de Fourier para pulsos reais é determinada pela influência de ruído aleatório introduzida na criação do pulso (i.e. amplitudes muito pequenas passam a refletir apenas o ruído, e não mais o pulso de interesse); além disso, a escala física mais rápida de tempo sempre limitará a frequência ω_n até a qual se faz necessário considerar a série. Essa característica da série de Fourier permite em diversas situações analisar separadamente as diferentes escalas de tempo envolvidas num fenômeno físico, já que efeitos com escalas de tempo muito

distintas devem afetar coeficientes a_n distantes em frequência.

Resposta do oscilador a forças periódicas

Tendo visto que de fato podemos escrever qualquer força periódica como uma superposição de forças harmônicas, e tendo também encontrado a resposta do oscilador a cada uma delas [Eq. (1.99)], resta-nos apenas superpor todas as respostas oscilatórias para obtermos o movimento seguido pela partícula.

Entretanto, a resposta que encontramos para o oscilador na Eq. (1.99) não levou em conta os termos seno da força, mas apenas os termos cosseno. Esse pequeno problema de incompatibilidade pode ser resolvido utilizando a forma da Eq. (1.134) para a série de Fourier da força externa. A resposta do oscilador a uma força desse tipo é bastante simples: basta pegar a solução da Eq. (1.99) e somar à fase do oscilador a fase ϕ_n da componente harmônica $F_n(t)$ da força externa (já que esta lhe serve como referência). Reescrevemos então a Eq. (1.102) como

$$x_n(t) = A_n \cos(\omega_n t + \theta_n), \quad \text{com} \quad \begin{cases} A_n = \frac{c_n/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2}}, \\ \theta_n = \arctan\left(\frac{\gamma \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_0^2}\right) + \phi_n. \end{cases} \quad (1.141)$$

As únicas alterações da expressão acima com relação à Eq. (1.99) foi a adição da fase ϕ_n de referência da componente harmônica $F_n(t)$ da força externa ao argumento do cosseno e atualização de notação (essencialmente, a inclusão de índices n nas quantidades relevantes). Observe novamente como as diferentes frequências causam respostas diferentes no oscilador.

O deslocamento físico $x(t)$ do oscilador causado pela força externa $F_{ext}(t)$ é dada pela soma de cada uma das respostas descritas pela Eq. (1.141). Obtemos

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\omega_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_n^2}} \cos\left(\omega_n t + \arctan\frac{\gamma \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_0^2} + \phi_n\right). \quad (1.142)$$

O oscilador responde com amplitude e fase variáveis a cada componente $F_n(t)$ da força externa e combina tudo ao final, fornecendo um resultado que é essencialmente um batimento bastante complicado: sua amplitude $x(t)$ ‘filtra’ e ‘deforma’ a função original $F_{ext}(t)$.

Em conclusão, decompor a força externa em série de Fourier significa encontrar suas componentes harmônicas, para as quais sabemos calcular de maneira simples o movimento do oscilador. Pela superposição de todas essas soluções, determinamos a resposta do oscilador a basicamente qualquer força externa periódica. Isso nos permite evitar o trabalho de resolver a equação de movimento sempre que tivermos a atuação de $F_{ext}(t)$ específica: a série de Fourier a resolve de uma vez por todas e de forma abrangente.

Exemplo: Resposta do oscilador ao pulso retangular. Nossa análise não estaria completa se não incluíssemos aqui a resposta do oscilador ao pulso triangular considerado como exemplo de decomposição em série de Fourier! Obtemos o deslocamento $x(t)$ do oscilador simplesmente substituindo os coeficientes da Eq. (1.139) na solução da Eq. (1.142), o que fazemos numericamente por um *script* em Matlab.

O resultado é mostrado na Fig. 1.17. Os gráficos superiores ilustram a resposta do oscilador a pulsos retangulares com durações diferentes. O primeiro gráfico (canto superior esquerdo) ilustra a situação em que a duração do pulso é menor ou da ordem do período do oscilador. A ação da força cessa logo após excitar a partícula. O movimento subsequente do oscilador segue essencialmente a oscilação livre.

O gráfico inferior a esse (canto inferior esquerdo) mostra os coeficientes A_n e θ_n de cada componente de frequência ω_n do oscilador [Eq. (1.141)] e também as amplitudes c_n da força [Eq. (1.134)]. A região espectral em que a força externa possui a maior parte de sua decomposição ($n \lesssim 400$) coincide com a ressonância do oscilador em $\omega_0 = \omega_{200}$. No entanto, o oscilador não responde bem às componentes de frequência mais altas, indicando que a força é ‘muito rápida’ para ser seguida por ele.

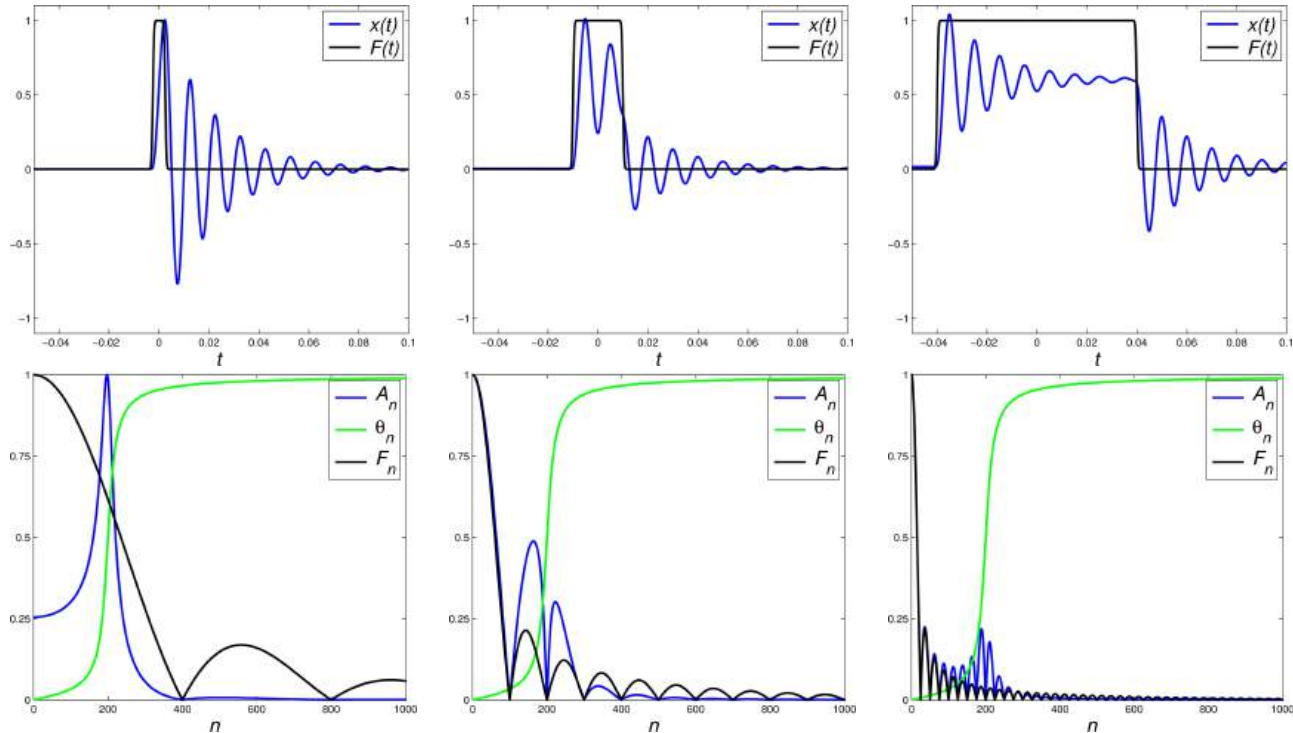


Figura 1.17: Resposta do oscilador a pulsos triangulares com duração crescente. Cima: deslocamento $x(t)$ do oscilador (curva azul) e magnitude da força (curva preta) como funções do tempo. Os dois eixos se encontram em unidades arbitrárias. Baixo: coeficientes c_n [Eq. (1.134)] da série de Fourier da força externa (curva preta) e da resposta do oscilador em amplitude A_n (curva azul) e fase θ_n (curva verde) [Eq. (1.141)] como funções do índice n da frequência ω_n . Utilizamos os parâmetros: $\omega_0 = \omega_{200}$, $\gamma = \omega_0/(4\pi)$. A subida e a descida do pulso retangular foram suavizadas como na Fig. 1.16 a fim de evitar artifícios numéricos.

No outro extremo, o gráfico superior direito da Fig. 1.17 mostra a situação em que o pulso triangular é ‘lento’ na escala de resposta do oscilador. De fato, a partícula se desloca rapidamente para a nova posição de equilíbrio assim que o pulso de força começa a atuar sobre ela, e continua sua oscilação em torno dessa posição como se fosse um oscilador livre. O mesmo efeito ocorre quando a força externa cessa. O gráfico inferior direito confirma a ‘lentidão’ relativa da força ao mostrar que o oscilador é capaz de responder à maior parte das componente de frequência da força externa.

A situação intermediária é ilustrada pela coluna central da mesma figura. Temos aí o cenário misto em que oscilador e força possuem aproximadamente a mesma escala de tempo típica de duração. A força excita

inicialmente o oscilador e termina sua ação após decorrido um período do oscilador; dessa forma, a segunda fonte de excitação do oscilador, advinda do ‘desligamento’ do pulso de força, o perturba enquanto o mesmo ainda se encontra em movimento decorrente da excitação inicial, num fenômeno de interferência entre essas duas influências.

O gráfico inferior indica como o oscilador responde bem às frequências intermediárias da força externa, embora o pico da ressonância coincida nesse caso com uma das componentes de frequência com amplitude nula de força (em ω_{200}). De fato, o oscilador divide o espectro da força em duas partes, uma das quais o desloca em fase ($\omega_n < \omega_0$) e outra produzindo componentes em oposição de fase ($\omega_n > \omega_0$). Efeitos de ‘interferência’ como esse (no caso, entre as excitações causadas pela ‘subida’ e pela ‘descida’ do pulso), por dependerem da fase relativa entre duas excitações distintas, são muito utilizados em medidas de precisão (e.g. em relógios atômicos).

Comentário: Forças não periódicas. Uma maneira de tornar a solução ainda mais geral para contemplar também forças não periódicas é encarar o intervalo τ usado na decomposição de $F_{ext}(t)$ não como o período de repetição da força, mas como o intervalo de observação do sistema. Poderíamos usar o pulso retangular, por exemplo, para entender como o oscilador responde a uma força que se inicia ou se interrompe bruscamente: estaríamos interessados no comportamento do oscilador logo após a descontinuidade apresentada pela força, deixando-o evoluir pelo tempo necessário de observação. Essa situação ocorre, por exemplo, na primeira coluna da Fig. 1.17.

A estratégia de escolher τ muito grande com relação às escalas típicas do sistema faz com que $F_{ext}(t)$, apesar de ainda periódica do ponto de vista matemático formal, passe a se repetir a uma taxa tão baixa que a resposta do oscilador dependa apenas de cada pulso de força (i.e. o oscilador volta à origem do espaço de fase no longo intervalo entre pulsos de força). Essa situação pode ser tornada formal fazendo-se o limite $\tau \rightarrow \infty$, no qual as frequências $n\omega = 2n\pi/\tau$ se tornam um contínuo e a série de Fourier dá lugar a uma integral, a *transformada de Fourier*.

Comentário: Não-localidade das funções harmônicas de base. Existe ainda um último fato curioso digno de nota. Observemos que as forças harmônicas oscilam em *todo* o intervalo τ de decomposição. O mesmo pode não valer para $F(t)$, como vimos no exemplo do pulso retangular, que pode até mesmo possuir valor *nulo* em grande parte do intervalo considerado. Como é possível formar uma função nula pela soma de muitas funções não nulas diferentes entre si? De fato, a ‘mágica’ da decomposição de Fourier é precisamente determinar as amplitudes e fases de combinação entre *infinitas* ‘ondas’ harmônicas para que exista *interferência perfeitamente destrutiva* entre elas nas regiões em que $F(t)$ se anula, e interferência parcial ou totalmente construtiva nos pontos em que $F(t)$ possui valores não nulos.

Isso nos leva ao seguinte fato curioso: ainda que $F(t)$ seja um pulso bem localizado no tempo, o *oposto* deve ser dito de suas componentes harmônicas, sempre *espalhadas* igualmente em todo o intervalo τ . Imaginemos a título de exemplo um pulso de força bem localizado em torno no instante $t = 0$. Pela decomposição de Fourier, como escolhermos o intervalo $-\tau/2 < t < \tau/2$ para decompor $F(t)$, isso faz parecer que o oscilador já começa a responder a cada uma das componentes harmônicas da força no tempo $-\tau/2$, i.e. *muito antes* de a força $F(t)$ sequer começar. Na verdade, como τ é escolhido por nós (ou pela periodicidade real da força, para facilitar as contas), podemos ter $-\tau/2$ tão adiantado com relação ao pico de força quanto queiramos.

Devemos então concluir que o oscilador começa a interagir com as componentes harmônicas da força muito antes do pulso de força ter lhe afetado?

É necessário nesse ponto separar a matemática da física, e não atribuir interpretação muito profunda à forma como fazemos a matemática com o intuito de facilitar a física. De fato, as funções harmônicas são *não locais*, no sentido que se estendem por todo o intervalo τ , mesmo que τ seja infinitamente grande. Elas são uma base abstrata (muito útil!) de funções, mas podem não representar algo físico em limites extremos (tal como para $\tau \rightarrow \infty$).

Na solução física, o que vale verdadeiramente é o *deslocamento* $x(t)$ do oscilador à força externa $F_{ext}(t)$ *como um todo*, e não suas componentes harmônicas $x_{\omega_n}(t)$. A artificialidade de decompor $F_{ext}(t)$ em funções não locais foi introduzida como um *método matemático poderoso* para encontrar solução simples e abrangente do movimento, mas pode não possuir significado físico em alguns contextos: o certo é que, se a função $F_{ext}(t)$ é nula, então ela é . . . nula, e portanto não há aceleração produzida por ela naquele instante! É verdade que nossa técnica parece nos fornecer o resultado correto (deslocamento nulo) para tempos anteriores à ação da força como resultante de uma ‘interferência’ entre infinitas forças harmônicas não nulas, mas isso só acontece no papel ou em nossa imaginação. Se alguém *medir* o deslocamento temporal como função da força externa, não observará o oscilador responder antes que a força tenha atuado sobre ele, como deve ser.

É sempre muito importante separar o que *medidas* podem estabelecer como fatos concretos daquilo que nossa imaginação fértil pode criar para resolver problemas mais facilmente! A mensagem é simples: assim como apenas a força externa $F_{ext}(t)$ *total* possui sentido físico claro (e o mesmo nem sempre pode ser dito de suas componentes harmônicas!), também somente o *deslocamento total* $x(t)$ do oscilador deve ser considerado como fisicamente significativo, não sendo garantido que suas componentes parciais $x_{\omega_n}(t)$ encontrem interpretação física clara em todos os contextos. Podemos dizer que as componentes harmônicas só fazem sentido físico estrito quando em superposição umas com as outras.

1.3.9 Oscilador harmônico forçado impulsivamente

Existem duas maneiras complementares de se entender a dependência de grandezas físicas com o tempo ou com o espaço. Conforme vimos na seção anterior, a série de Fourier nos permite descrever uma função periódica qualquer em termos de funções harmônicas *não locais*, i.e. que ocupam o intervalo completo de decomposição.

A forma complementar de pensar utiliza a decomposição em termos de funções ‘infinitamente localizadas’, representadas pela distribuição *delta de Dirac*. Analogamente às funções não locais, a ‘função’ delta de Dirac não pode representar grandezas físicas por si só, mas apenas em superposição, nesse caso por causa da divergência inerente a esse tipo de distribuição. Sua utilidade vem da disponibilização de ferramental matemático extremamente poderoso para a solução de forças com formatos genéricos no tempo ou no espaço.

Consideremos uma força $F_{ext}(t)$ chamada *impulsiva*, i.e. com duração δt muito curta com relação às escalas de tempo típicas do sistema (i.e. $\delta t \ll 1/\omega_0, 1/\gamma$) e com magnitude momentaneamente muito maior

do que qualquer outra força agindo sobre a partícula. Podemos modelar essa força pela função

$$F_{ext}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ F_I, & \text{se } 0 < t < \delta t \\ 0, & \text{se } t > \delta t \end{cases} . \quad (1.143)$$

A característica da força impulsiva de dominar a dinâmica durante breve instante nos permite desprezar todas as demais forças no intervalo $0 < t < \delta t$ de ação de $F_{ext}(t)$, simplificando a equação de movimento para

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{F_I}{m}, \quad \text{para } 0 < t < \delta t. \quad (1.144)$$

A solução do movimento para esse intervalo é igualmente simples,

$$v(t) = v(0) + \frac{F_I}{m}\delta t \quad \text{e} \quad x(t) = x(0) + v(0)\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2). \quad (1.145)$$

A ideia agora é fazer com que apenas o termo de correção da velocidade seja relevante na solução. E com isso atingimos a definição operacional do que significa uma força ‘impulsiva’: se F_I é tal que o produto $F_I\delta t = I$ (i.e. o ‘impulso’) seja mantido constante e tomamos simultaneamente o limite $\delta t \rightarrow 0$ (i.e. $F_I \rightarrow \infty$), a solução se torna com grande precisão (em ordem zero em δt)

$$v(t) = v(0) + \frac{I}{m} \quad \text{e} \quad x(t) = x(0). \quad (1.146)$$

Ou seja, a partícula passa por um acréscimo ‘instantâneo’ de velocidade (i.e. que ocorre muito mais rapidamente do que a escala de tempo típica de variação da velocidade na ausência da força impulsiva) sem que sua posição varie. Em outras palavras, a força impulsiva tem o efeito de mudar a velocidade do oscilador tão rapidamente que ele ‘não tem tempo’ de mudar sua posição. Vamos considerar por simplicidade o oscilador harmônico inicialmente em repouso na origem, i.e. $v(0) = x(0) = 0$, o que nos fornece a solução impulsiva

$$v(t) = \frac{F_I\delta t}{m} \quad \text{e} \quad x(t) = 0. \quad (1.147)$$

Após o impulso, o movimento do oscilador volta a ser dominado pela equação homogênea [Eq. (1.73)], cujas soluções já conhecemos. Portanto, para todos os efeitos práticos, a força impulsiva funciona como um ‘peteleco’ equivalente a impor ao oscilador as condições iniciais da Eq. (1.147). Vamos tratar aqui do oscilador com amortecimento subcrítico, por ser aquele com movimento mais interessante. Utilizando a Eq. (1.147) como se fossem condições iniciais da solução da Eq. (1.86), obtemos para o movimento do oscilador subsequente à ação impulsiva a solução

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \frac{F_I\delta t}{m\omega'_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_0)} \sin(\omega'_0(t-t_0)), & \text{se } t > \delta t \end{cases} . \quad (1.148)$$

A Fig. 1.18 ilustra o comportamento do oscilador descrito por essa equação. Seu movimento se inicia na posição de equilíbrio, com velocidade inicial fornecida pelo ‘peteleco’, e se desenvolve seguindo a oscilação com amplitude em decrescimento exponencial até atingir o repouso assintoticamente.

A utilidade da força impulsiva é semelhante àquela trazida pelas funções harmônicas na série de Fourier: servir como ‘base’ para a descrição de forças com formatos mais gerais, pelo princípio da superposição. Utilizamos por isso o mesmo raciocínio empregado na Seção 1.3.8.

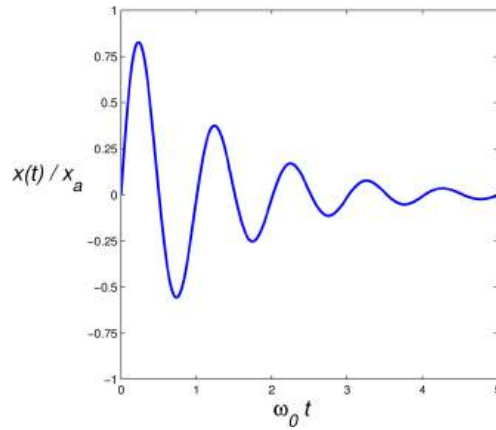


Figura 1.18: Deslocamento do oscilador como função do tempo após ser excitado por força impulsiva. A partícula parte do repouso na origem.

As funções impulsivas de base d_n são nesse caso pulsos retangulares com largura δt , na forma

$$d_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_n \\ \frac{1}{\delta t}, & \text{se } t_n < t < t_n + \delta t \\ 0, & \text{se } t > t_n + \delta t \end{cases}, \quad (1.149)$$

em que $t_n = n\delta t$ é o instante em que o pulso assume seu valor máximo. Uma força qualquer pode ser entendida então como uma série desses impulsos consecutivos, no mesmo tipo de discretização usado e.g. para se calcular a integral de uma função. Decompomos $F_{ext}(t)$ como a superposição

$$F_{ext}(t) = \sum_n F_n d_n(t). \quad (1.150)$$

e resolvemos o movimento $x_n(t)$ do oscilador para cada função $d_n(t)$. Mas isso já foi feito na Eq. (1.148): basta generalizarmos o instante de aplicação da força para $t_n = n\delta t$, ou seja,

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t_n \\ \frac{F_n \delta t}{m\omega'_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_n)} \sin(\omega'_0(t-t_n)), & \text{se } t > t_n + \delta t \end{cases}. \quad (1.151)$$

A resposta $x_n(t)$ denota o valor de deslocamento do oscilador no instante t devido unicamente à força impulsiva $d_n(t)$ aplicada no instante t_n .

Usamos agora a linearidade da equação diferencial de movimento para obter a resposta do oscilador à $F_{ext}(t)$ pela soma das contribuições parciais $x_n(t)$. A superposição das respostas a componentes impulsivas individuais nos fornece a solução

$$x(t) \approx \sum_{\substack{n \\ (t_n < t)}} x_n(t) = \sum_{\substack{n \\ (t_n < t)}} \frac{F_n \delta t}{m\omega'_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t_n)} \sin(\omega'_0(t-t_n)). \quad (1.152)$$

A restrição $t_n < t$ nos somatórios em n segue como consequência de serem nulas as respostas do oscilador no instante t a forças que ainda não agiram sobre ele ($t_n > t$), como explicitado nas soluções parciais da Eq. (1.148). A técnica de forças impulsivas, respeita, portanto, e de forma automática, o princípio de *causalidade*, segundo o qual a consequência só pode vir depois da causa.

O último passo de nossa solução requer que tomemos o limite $\delta t \rightarrow 0$. Nesse caso, o número de forças impulsivas parciais vai a infinito e a soma da Eq. (1.152) dá lugar a uma integral pela regra $\sum_n \delta t \rightarrow \int dt'$. Escrevemos finalmente a solução particular exata como

$$x(t) = \frac{1}{m\omega'_0} \int_{-\infty}^t F(t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin(\omega'_0(t-t')) dt'. \quad (1.153)$$

Os limites de integração seguem a restrição da Eq. (1.148), i.e. a integral engloba todas as contribuições impulsivas agindo até o instante t (mas não além dele). Observemos que a solução acima é estritamente *local*, pois depende de todas as forças que já atuaram sobre o oscilador no passado (i.e. de toda a sua história).

Função de Green

A ‘força impulsiva ideal’ deve possuir duração infinitésima e amplitude infinita. Ela pode ser vista como o limite $\delta t \rightarrow 0$ de nosso modelo da Eq. (1.149), no qual a função $d_n(t)$ passaria a apresentar divergência e deixaria por isso de ser uma função propriamente dita. A *distribuição*⁴⁵ especial criada nesse limite é chamada *delta de Dirac* e se define pelas propriedades⁴⁶

$$\delta(t) = 0, \text{ para } t \neq 0, \quad \text{mas } \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = 1, \text{ mesmo para } \epsilon \rightarrow 0. \quad (1.154)$$

Assim, $\delta(t)$ é nula em todos os pontos, mas sua integral em torno da origem resulta num valor finito, um par aparentemente contraditório de propriedades⁴⁷. Pictoricamente, é como se $\delta(t)$ possuísse um pico infinitamente fino e alto localizado na origem. Essas propriedades nos permitem usar a função $\delta(t-t')$ para extrair o valor da função $F(t')$ no ponto t , uma vez que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t-t') dt' = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} F(t') \delta(t-t') dt' \approx F(t) \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(t-t') dt' = F(t), \quad (1.155)$$

em que usamos o fato de que ϵ pode ser feito tão pequeno quanto necessário para que a função $F(t)$ se torne constante no limite em que o intervalo $t' - \epsilon < t < t' + \epsilon$ vai a zero e possa ser retirada da integral. Com isso assumimos apenas que $F(t)$ seja mais suave do que a distribuição delta.

⁴⁵Uma distribuição pode fazer coisas que uma função não pode, como por exemplo conter divergências. Mas aqui não vamos insistir muito nessa distinção; de fato, vamos nos referir à delta como ‘função’, ainda que ela seja uma distribuição, porque jamais vimos qualquer consequência de se cometer esse errinho tão charmoso (e.g. como dizer ‘iorgute’ em vez de ‘iogurte’).

⁴⁶Notemos que a definição em termos de uma propriedade integral de $\delta(t)$ nos permite evitar dizer de forma explícita o que ocorre na origem, como intentado na Eq. (1.149).

⁴⁷Bem, você pode argumentar que ela não é nula em *todos* os pontos, já que nada dissemos sobre $t = 0$ na Eq. (1.154). Mas, veja bem... o que é um ponto? Toda região de qualquer objeto contínuo fisicamente relevante (espaço, tempo, ou qualquer outro parâmetro) está associada a alguma quantidade mensurável e, ainda que em nossos modelos as coisas mensuráveis possam mesmo parecer como valores pontuais, isso em geral decorre de simplificações dos mesmos: no laboratório, medimos sempre coisas com certo limite de validade, e portanto um modelo teórico estritamente perfeito deveria fornecer como resposta a distribuição observada no laboratório: jamais um ponto! Bem, isso não é bem verdade, pois modelos ‘perfeitos’ dão mais trabalho de fazer do que o experimento que nos permite colocar perguntas diretamente à natureza sem intermediários! As simplificações são essenciais para identificarem os elementos importantes dos fenômenos observados, e o que faltar para a ‘perfeição’ será em geral ruído ou alguma outra coisa incontrolável sem importância: a perfeição de fato é saber explicar o essencial! A Eq. (1.154) explicita o essencial e nada mais.

Escrita de outra forma, essa relação pode ser entendida como a decomposição de $F(t)$ em ‘vetores’ de base $\delta(t - t')$, na forma

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\delta(t - t')dt'. \quad (1.156)$$

De fato, $F(t')$ podem ser encarados nessa expressão como *coeficientes* da superposição de funções de base.

Analogamente ao caso das forças harmônicas, é mais simples resolver a equação diferencial do oscilador forçado pela força impulsiva ideal $\delta(t - t')$ do que pela força genérica $F_{ext}(t)$. Por isso buscamos resolver o problema em etapas, primeiramente obtendo a resposta do oscilador a cada componente $\delta(t - t')$ para superpô-las ao final e encontrar a resposta à força externa $F_{ext}(t)$ propriamente dita.

A resposta $G(t, t')$ à força impulsiva ideal $\delta(t - t')$ é chamada *função de Green*. Se a encontrarmos, a solução para o deslocamento do oscilador segue a mesma superposição da Eq. (1.156), porém trocando as funções de base $\delta(t - t')$ pelas respostas $G(t, t')$ às mesmas, ou seja,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t')G(t, t')dt'. \quad (1.157)$$

Para determinarmos $G(t, t')$, partimos da equação de movimento e nela utilizamos as decomposições das Eqs. (1.156) e (1.157) para obter

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)x(t) &= \frac{F(t)}{m}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} F(t')\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)G(t, t')dt' &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} F(t')\delta(t - t')dt'. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Para valer para força $F(t)$ *qualquer*, os termos que a multiplicam no integrando precisam ser idênticos nos dois membros da equação, i.e.

$$\ddot{G}(t, t') + \gamma\dot{G}(t, t') + \omega_0^2G(t, t') = \frac{1}{m}\delta(t - t'). \quad (1.159)$$

Com o objetivo de simplificar a solução nesse nosso primeiro ataque à Eq. (1.159), escolhemos por enquanto o instante $t' = 0$ para a aplicação da força impulsiva e omitimos por isso o segundo argumento na função de Green, escrevendo $G(t) = G(t, 0)$. Vamos corrigir isso de maneira simples ao final. Queremos resolver a equação diferencial

$$\ddot{G}(t) + \gamma\dot{G}(t) + \omega_0^2G(t) = \frac{1}{m}\delta(t). \quad (1.160)$$

A solução dessa equação é muito simples fora do ponto $t = 0$ no qual a função delta faz algo esquisito. Antes de $t = 0$, a solução precisa ser identicamente nula pela nossa imposição de condições iniciais $x(t < 0) = v(t < 0) = 0$. Após o instante $t = 0$, a equação se torna homogênea novamente e, portanto, sua solução se reduz ao oscilador harmônico amortecido livre [Eq. (1.73)], cuja forma no caso subcrítico é

$$G(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(A\cos(\omega_0't) + B\sin(\omega_0't)\right), \quad t > 0. \quad (1.161)$$

Os coeficientes A e B são determinados por uma condição que *conecte* o movimento *anterior* à atuação da força impulsiva (escolhida como o oscilador em repouso na origem) ao movimento perturbado *posterior* a esse instante. Resolver o problema se resume a estudar o comportamento dessa equação em torno do ponto esquisito em que a função delta atua para *conectar* as soluções dos dois lados.

Pela propriedade da delta, a condição buscada deve ser encontrada pela integração dos dois membros da Eq. (1.161) na região infinitesimal $-\epsilon < t < \epsilon$ e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \ddot{G}(t) dt + \gamma \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \dot{G}(t) dt + \omega_0^2 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(t) dt \right) = \frac{1}{m} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt. \quad (1.162)$$

O membro direito da equação vale $1/m$, pela propriedade especial da função delta. E portanto alguma das integrais do membro esquerdo precisa possuir descontinuidade para que a equação seja satisfeita (caso contrário, todas as integrais seriam nulas!). Vejamos cada uma das integrais em detalhe. A última integral do membro esquerdo é claramente nula, pois $\omega_0^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(t) dt$ representa a integral da *força restauradora*, que é contínua e portanto satisfaz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} G(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(0) 2\epsilon = 0. \quad (1.163)$$

O mesmo raciocínio vale para o segundo termo, a integral da força dissipativa. Realizando formalmente a integral, escrevemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \dot{G}(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G(t) \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = G(0_+) - G(0_-). \quad (1.164)$$

em que 0_+ representa o instante de tempo infinitesimalmente posterior ao instante nulo, e vice-versa para 0_- . A expressão acima representa a diferença das posições da partícula anterior e posterior à ação da força. Pelas condições iniciais escolhidas, temos $G(0_-) = 0$. Como a partícula deve ter *trajetória contínua*, i.e. sem ‘saltos’ descontínuos em sua posição, devemos ter $G(0_+) = G(0_-) = 0$, de forma que esse termo da equação diferencial também se anula por conta de propriedades fundamentais de como partículas se movem no espaço. Portanto, as duas primeiras integrais tratadas se anulam como consequência da imposição *física* de que a posição do oscilador deve ser contínua.

A única integral da Eq. (1.162) a apresentar descontinuidade por conta da força impulsiva é a primeira, ou seja, a aceleração, pois a força delta age diretamente sobre ela (i.e. a força descontínua deve causar uma aceleração descontínua, o que parece razoável),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \ddot{G}(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(t) \Big|_{-\epsilon}^{\epsilon} = \dot{G}(0_+) - \dot{G}(0_-). \quad (1.165)$$

Pela condição inicial, com a qual *todas* as respostas impulsivas consideradas precisam ser consistentes (caso contrário, a superposição linear contradiria dessas soluções a contradiria), tem-se que a velocidade logo antes da atuação da força impulsiva vale $\dot{G}(0_-) = 0$, com o que a Eq. (1.162) nos fornece

$$\dot{G}(0_+) = \frac{1}{m}. \quad (1.166)$$

Essa condição, juntamente com $G(0_+) = 0$, precisa ser satisfeita pela solução genérica da Eq. (1.161). Isso determina as constantes A e B . Obtemos

$$G(0_+) = A = 0 \quad \text{e} \quad \dot{G}(0_+) = \omega B = \frac{1}{m}, \quad (1.167)$$

de onde segue que a função de Green possui a forma

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0, \\ \frac{1}{m\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\omega'_0 t), & \text{se } t > 0. \end{cases} \quad (1.168)$$

Generalizamos essa solução para o caso em que a força impulsiva é aplicada em qualquer instante t' . A função de Green se torna $G(t, t')$

$$G(t, t') = \begin{cases} 0, & \text{se } t < t', \\ \frac{1}{m\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin(\omega'_0(t-t')) & \text{se } t > t'. \end{cases} \quad (1.169)$$

Sendo $G(t, t')$ a solução para a força impulsiva ideal $\delta(t - t')$, e sendo qualquer força $F(t)$ decomposta em funções $\delta(t - t')$ segundo a Eq. (1.156), a solução do oscilador forçado inicialmente em repouso na origem é dada pela superposição das respostas do oscilador a cada força impulsiva $\delta(t')$ com o peso correspondente a $F(t')$, conforme dita a Eq. (1.160), fornecendo-nos a solução

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_{-\infty}^t F(t') e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \sin(\omega'_0(t-t')) dt'. \quad (1.170)$$

Na técnica de Green, o uso das ‘funções de base’ delta nos permite substituir uma equação diferencial (que pode ser em geral complicada) por sua forma homogênea e uma condição de conexão entre as soluções homogêneas. Essa condição depende das condições iniciais. E com ela podemos resolver a resposta do oscilador a qualquer força, não necessariamente periódica⁴⁸.

Notemos que essa técnica faz uso de funções de base *locais*, i.e. de ‘forças base’ com localização temporal perfeitamente definida. Como consequência, a solução do movimento no tempo t aparece, em princípio, como dependente de *todos* os eventos passados da história do oscilador. Na verdade, para o oscilador harmônico forçado, vemos que a função de Green se estende ao passado pela escala típica da função exponencial, entendida em geral como uma dependência fraca no passado. Na prática, apenas eventos passados distantes por um tempo algumas vezes maior do que γ^{-1} influenciam o sistema, i.e. o oscilador possui ‘memória’ com duração da ordem de γ^{-1} .

Comentário: O que Fourier e Green têm em comum. Vimos que forçar o oscilador harmônico introduz um termo não homogêneo naquela que seria sua equação diferencial ‘própria’. Se a equação livre sintetiza todo o comportamento do oscilador em si – de fato, ela *define* o que é um oscilador –, o termo de força nos remete a um agente externo e com ele a um novo problema: a *interação* entre aquilo a que chamamos oscilador e algo mais. E a interação cria sempre algo diferente de cada uma das partes a interagirem, um novo objeto que em geral não possui nome, mas aqui chamado de ‘oscilador harmônico forçado’ se ignorarmos o efeito de reação (produzido pelo oscilador) sobre o agente externo.

A dificuldade em se resolver a equação não homogênea reside em geral no fato de que a força externa é em princípio arbitrária, já que, ao contrário do sistema que a ‘recebe’ (o oscilador) nada é dito sobre o sistema que a produz. Por isso, técnicas foram criadas para entender como o oscilador age sob efeito de alguns tipos específicos de força. A ideia é encarar a equação diferencial do movimento como uma transformação, um operador diferencial agindo sobre uma função a representar o deslocamento do oscilador no tempo. Se a escrevermos na forma

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right) x(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (1.171)$$

⁴⁸Como vimos anteriormente, a técnica de decomposição harmônica também nos permite fazer isso se usarmos alguns truques simples.

o operador em questão fica definido como a soma de termos entre parênteses agindo sobre $x(t)$ para transformá-la em $F(t)$.

Encontrar a solução particular $x(t)$ desse problema pode parecer complicado à primeira vista, mas na verdade a linearidade da equação introduz simetrias que simplificam a tarefa: essa propriedade permite que as funções $x(t)$ e $F(t)$ sejam encaradas como as funções de interesse em si ou então como uma *soma* de funções de nossa escolha, a qual pode ser realizada de várias maneiras diferentes. O importante é que *todas* essas diferentes formas de somar (ou não somar) devem satisfazer a equação diferencial (i.e. tudo somado, ou cada parcela de muitas decomposições possíveis).

O desafio é justamente achar parcelas que não se ‘misturem’ entre si, ou seja, que sejam ‘ortogonais’ no sentido de que o operador diferencial do oscilador agindo sobre as mesmas forme um conjunto de soluções distinguíveis umas das outras. De fato, como vimos, o desafio de encontrar funções ortogonais felizmente não depende do operador diferencial, por ser este linear. Por isso, as técnicas de decomposição em série de Fourier ou em funções delta de Dirac servem para resolver uma grande classe de problemas.

Se decomposermos $F(t)$ em parcelas $g_n(t)$ com essa propriedade especial, a linearidade da equação diferencial nos permite expressá-la como

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) \sum_n x_n(t) = \frac{1}{m} \sum_n F_n g_n(t) \quad \Rightarrow \quad \sum_n \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x_n(t) \right] = \frac{1}{m} \sum_n F_n g_n(t). \quad (1.172)$$

E se, além disso, conseguirmos achar alguma base ‘compatível’ com o operador diferencial, ou seja, que nos permita separar o somatório acima num sistema de n equações, uma para cada termo da base (que essencialmente são a mesma equação!), teremos de resolver a equação mais simples

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x_n(t) = \frac{1}{m} g_n(t), \quad (1.173)$$

na qual a arbitrariedade da força é substituída pela função conhecida de nossa escolha $g_n(t)$!

No caso da base harmônica, essa equação básica assume a forma

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) z_n(t) = \frac{\tilde{F}}{m} e^{i\omega_n t}, \quad (1.174)$$

e de fato também a solução pode ser escrita em termos das mesmas funções de base, $z_n(t) = \tilde{A} e^{i\omega_n t}$. Nesse caso especial, cada função de base não é sequer alterada pelo operador diferencial: apenas multiplicada por uma constante dependente dos parâmetros do problema (frequências e atrito).

Já no caso das funções impulsivas de base, a Eq. (1.173) se torna (na aproximação discreta)

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) x_n(t) = \frac{F_n}{m} d_n(t), \quad (1.175)$$

e as soluções $x_n(t)$ encontradas dizem mais respeito à equação diferencial livre do oscilador do que à força impulsiva propriamente dita. A função de Green caracteriza o sistema físico através da pergunta: ‘como ele responde a uma mudança brusca em seu estado?’. Nesse caso, a solução $x_n(t)$ não pertence ao conjunto de funções de base $d_n(t)$, sendo sua descontinuidade inicial o único vestígio da perturbação impulsiva.

1.3.10 Força gravitacional universal

O último tipo de força de que tratamos nesse início de curso é aquele produzido pela primeira interação fundamental a ser percebida e sistematizada, a gravidade. Ironicamente, embora saibamos muito mais sobre ela hoje do que na época de Newton, ela continua sendo (há décadas) a única interação fundamental a desafiar os esforços intelectuais de gerações de físicos no sentido de unificação das interações.

No quadro newtoniano, a força gravitacional significou a primeira unificação da física, quando o movimento dos astros conforme visto no céu pôde ser finalmente entendido na mesma base conceitual do movimento como o conhecemos na superfície da Terra. Para conseguir explicar tudo com um único tipo de força, Newton supôs um campo de forças *central* atrativo proporcional às *massas inerciais* dos corpos em interação e com magnitude determinada pelo *inverso do quadrado* das distâncias entre os corpos.

Os pedaços do quebra-cabeça a sustentar tal visão são dois, de fato. Por um lado, as leis de Kepler do movimento planetário, baseadas em padrões descobertos experimentalmente, implicavam algumas propriedades matemáticas muito claras para a força gravitacional à luz da nova mecânica newtoniana. Por outro lado, Newton sabia que todos os objetos na superfície da Terra caem com a mesma aceleração sobre o solo. Tomando a força gravitacional sentida na superfície da Terra como o efeito local do campo que se estenderia até as posições dos corpos celestes, Newton pôde deduzir a forma geral da força.

No entanto, foi só com o experimento de Henry Cavendish, realizado mais de dois séculos depois da unificação capitaneada por Newton, que a escala típica da constante universal G a regular a magnitude da força pôde ser determinada. Isso porque a aceleração gravitacional medida na superfície da Terra depende não só dessa constante, mas também da massa da Terra. Cavendish então chamou seu experimento de ‘pesagem da Terra’. Até hoje, a constante gravitacional é uma das constantes fundamentais da natureza conhecidas com menor precisão, consequência da debilidade da interação gravitacional.

A expressão newtoniana para a força da gravidade

O fato experimental de que corpos caem com a mesma aceleração sobre a superfície da Terra, independentemente de suas massas, implica, pela segunda lei de Newton, que a força gravitacional \vec{F}_m atuando sobre um corpo qualquer com massa m precisa ser proporcional à sua inércia,

$$\vec{F}_m = m\vec{g}. \quad (1.176)$$

A terceira lei estabelece que precisa existir um par de reação a essa força. Newton identificou o corpo responsável pela força gravitacional na superfície da Terra como a *própria Terra*, e portanto a força de reação precisa ser também proporcional à massa da Terra. Sob o ponto de vista da Terra, deve valer a expressão

$$\vec{F}_{M_\oplus} = M_\oplus\vec{g}', \quad (1.177)$$

de onde deduzimos que a constante \vec{g} de aceleração observada na superfície da Terra deve depender de sua massa. É mais ou menos evidente que a força deve apontar na direção que une os corpos, já que os objetos sempre caem na vertical definida localmente em qualquer ponto da Terra, um corpo aproximadamente esférico. Assim,

$$\vec{F}_m = -\vec{F}_{M_\oplus} = -\alpha m M_\oplus \hat{r}. \quad (1.178)$$

O sinal negativo indica que a força é sempre atrativa. Resta deduzir de que depende α .

Na época em que Newton inventava o formalismo conceitual geral do movimento, o astrônomo Johannes Kepler já havia enunciado suas próprias ‘leis’ específicas do *movimento planetário*. Cabia a Newton tentar colocar esses fatos experimentais na forma de uma *lei de força* que coubesse em suas leis gerais para obter teoricamente os tipos de movimento observados.

A primeira lei de Kepler dita o formato das órbitas: elipses num plano fixo, com o Sol posicionado em um dos focos. Então Newton precisava de uma expressão de força que produzisse (dito em linguagem contemporânea) uma equação diferencial do movimento cujas soluções fossem trajetórias elípticas com centro de forças em um dos focos. Veremos mais adiante como obtê-las.

Já a segunda lei de Kepler determina a relação a ser obedecida pelas áreas varridas pelo segmento de reta unindo um foco da elipse ao planeta em sua trajetória, e o tempo necessário para completar esse movimento. Essa lei, expressa em forma geométrica, pode ser colocada em termos mais afeitos à linguagem da dinâmica de Newton. Para qualquer área diferencial, vale

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{r^2(t)d\theta}{dt} \stackrel{\text{Kepler}}{=} cte, \quad \implies \quad r^2(t)\dot{\theta}(t) = cte \quad (1.179)$$

em que $r(t)$ é a distância do planeta ao foco da elipse, e $\theta(t)$, sua posição angular. Segundo Newton, essa relação nos diz algo sobre o momento angular orbital. De fato, sua expressão se escreve

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \frac{d}{dt} \left(r(t) \hat{r}(t) \right). \quad (1.180)$$

Calculando a derivada do vetor radial explicitamente pelo uso da Eq.(1.38), obtemos

$$\frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} \left(r(t) \hat{r}(t) \right) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\hat{r}} \stackrel{\text{Eq.(1.38)}}{=} \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}. \quad (1.181)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (1.180) e utilizando os produtos vetoriais $\hat{r} \times \hat{r} = 0$ e $\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{z}$, obtemos para o momento angular a expressão

$$\vec{L} = mr^2 \dot{\theta} \hat{z}. \quad (1.182)$$

Assim, a Eq. (1.179) estabelece como constante a *magnitude* do momento angular.

Em conjunto, a primeira e a segunda leis estabelecem, portanto, a *conservação do vetor momento angular*, já que a primeira lei, ao afirmar que o movimento ocorre num plano fixo, garante a invariabilidade da *direção* do vetor. O conteúdo físico da combinação das primeiras duas leis de Kepler pode ser sintetizado pela relação

$$\vec{L}_0 = mr^2(t) \dot{\theta}(t) \hat{z}, \quad (1.183)$$

em que \vec{L}_0 é o vetor constante representando o momento angular do planeta. Essa equação já representa uma grande restrição sobre o tipo de campo de forças capaz de satisfazê-la. Para que o momento angular se conserve, a segunda Lei de Newton aplicada a rotações nos indica que o torque provocado pela força gravitacional deve se anular, ou seja,

$$\vec{\tau}_g = \vec{r} \times \vec{F}_g = 0 \quad \implies \quad \hat{F}_g = -F_g \hat{r}. \quad (1.184)$$

Assim, a força gravitacional precisa apontar na direção a unir os corpos também de acordo com o movimento observado dos corpos celestes, ratificando o sugerido pela fenomenologia observada na superfície da Terra [Eq. (1.178)]. Esse tipo de campo de forças é chamado *central*.

A condição final sobre a forma da força gravitacional advém da terceira lei de Kepler, que implica ser o período T da órbita relacionado ao seu raio médio R , na forma

$$T^2 = \beta R^3. \quad (1.185)$$

Para entendermos melhor as consequências dessa expressão, consideremos por simplicidade uma partícula em órbita circular ($R = r$) em torno de uma massa muito maior do que a sua ($M \gg m$). Nesse caso, a expressão newtoniana para a força centrípeta permite relacionar o período da órbita à magnitude da força necessária para mantê-la. Para a força gravitacional fazendo o papel de força centrípeta, devemos ter $\omega^2 = F_m/(mr)$ de acordo com a Eq. (1.44). Essa relação aplicada à terceira lei de Kepler implica

$$F_m = \frac{4\pi^2}{\beta} m \frac{1}{r^2}. \quad (1.186)$$

A parte essencial dessa relação é a dependência da força com o inverso do quadrado da distância entre os corpos. Juntando essa relação à Eq. (1.178), obtemos para a interação gravitacional entre dois corpos com massas m (com posição \vec{r}) e M (localizada em \vec{r}') a expressão newtoniana

$$\vec{F}_m = -G \frac{mM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.187)$$

A força \vec{F}_M agindo sobre a massa M vale $\vec{F}_M = -\vec{F}_m$, de acordo com a terceira lei de Newton.

No caso do campo gravitacional da Terra, costumamos escolher a origem das posições no centro do planeta (pois $M_\oplus \gg m$), de forma que a aceleração gravitacional em sua superfície pode ser escrita como

$$\vec{g} = -G \frac{M_\oplus}{R_\oplus^2} \hat{r}. \quad (1.188)$$

Como pode ser visto, o valor experimental de g e de R_\oplus permite calcular apenas o produto GM_\oplus . O experimento de Cavendish foi essencial para obter os valores individuais das constantes no produto.

Comentário: Geometria e linhas de fluxo do campo gravitacional. Algo interessante sobre a dependência r^{-2} da força gravitacional é a interpretação geométrica que possui. Imaginemos linhas de campo emanando de um corpo em todas as direções, do centro até o infinito, para representar seu campo gravitacional; suponhamos que a magnitude da força numa certa região do espaço seja proporcional ao fluxo de linhas de campo atravessando uma pequena calota esférica nesse local.

Comparemos então esse valor ao fluxo total cruzando uma superfície esférica centrada na fonte da força. Como o elemento de área é proporcional ao quadrado da distância e seu vetor normal aponta na direção radial, isso implica que a integral do fluxo na superfície inteira não depende da distância ao centro. Ademais, o fluxo local de linhas diminui em qualquer ponto da superfície esférica com o inverso do quadrado da distância ao seu centro.

Nessa forma de ver, a queda da magnitude da força gravitacional com a distância segue como consequência da geometria do espaço euclidiano, pelo fato de que as linhas precisam se afastar uma das outras, por causa da geometria, quando caminhamos do centro de forças até o infinito. Essa também é uma forma de visualizar que a força gravitacional consiste de uma interação de *longo alcance*, pois se estende com fluxo constante de linhas na superfície total mesmo no infinito. E, de fato, a gravidade é a interação responsável por moldar o universo em grandes escalas.

Dois corpos pelo preço de um

O tratamento da interação gravitacional entre dois corpos admite uma simplificação bastante útil. Como a força só depende da distância relativa, é possível descrever o movimento com apenas uma equação diferencial não trivial. Vamos usar a notação m para a massa e \vec{r} para a posição de um dos corpos e, para o outro, M para sua massa e \vec{R} para sua posição. Na interação entre dois corpos, precisamos resolver em princípio duas equações diferenciais,

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = -G \frac{mM}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}), \quad (1.189)$$

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = G \frac{mM}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}). \quad (1.190)$$

A má notícia é que elas se encontram *acopladas*, dificultando em princípio a solução. Mas seus membros direitos nos indicam que a variável relevante para a solução do movimento é $\vec{r} - \vec{R}$. Isso nos sugere escrever a equação para esta variável, pela subtração das equações acima, como

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r} - \vec{R}) &= -G \frac{M}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}) - G \frac{m}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}) \\ &= -G \frac{m + M}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} (\vec{r} - \vec{R}). \end{aligned} \quad (1.191)$$

Essa equação só depende de uma variável, a posição relativa $\vec{r}_{\text{rel}} = \vec{r} - \vec{R}$, o que já é um passo na direção correta, embora o membro direito assuma como consequência uma forma um tanto quanto feinha (e expressões tão fundamentais com aspectos desagradáveis comumente indicam algum erro de conta!).

Para levar a força no membro direito à forma da força gravitacional, multiplicamos a Eq. (1.191) por $mM/(m + M)$, obtendo

$$\mu \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{rel}} = -G \frac{mM}{r_{\text{rel}}^2} \hat{r}_{\text{rel}}, \quad \mu = \frac{mM}{m + M}. \quad (1.192)$$

A constante μ é chamada de *massa reduzida*. Essa equação possui o formato da equação de movimento para uma massa μ sendo atraída para o centro do sistema de coordenadas \vec{r}_{rel} . Assim, ela nos permite substituir matematicamente o movimento de dois corpos em interação gravitacional pelo problema equivalente (embora abstrato) mais simples de um corpo. Isso ajuda bastante a resolver o problema.

Uma vez resolvida a equação para \vec{r}_{rel} , as posições dos corpos podem ser encontradas pela solução da soma das Eqs. (1.189)–(1.190),

$$m \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} + M \frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = 0, \quad (1.193)$$

uma equação que representa nada mais do que o enunciado da terceira lei de Newton. Podemos colocá-la em forma mais sugestiva se juntarmos os termos de derivada e a dividirmos pela massa total do sistema, pois então obtemos

$$\frac{1}{m + M} \frac{d^2}{dt^2} (m\vec{r} + M\vec{R}) = 0, \quad (1.194)$$

equação que pode ser interpretada como

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_{\text{cm}} = 0, \quad \text{em que } \vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m\vec{r} + M\vec{R}}{m + M}. \quad (1.195)$$

Assim, o conteúdo físico da Eq. (1.193) se reduz à conservação do momento total do sistema isolado de dois corpos. As Eqs. (1.192) e (1.195) fornecem em conjunto o mesmo movimento das Eqs. (1.189) e (1.190), porém de forma mais intuitiva e simples de resolver.

Gravidade de corpos extensos com simetria

A isotropia da força gravitacional e sua dependência com o inverso da distância permitem simplificar enormemente a interação gravitacional de corpos com simetria cilíndrica ou esférica. Vamos revisar dois resultados bem conhecidos nesse contexto.

Consideremos primeiramente um anel unidimensional de matéria com massa total m uniformemente distribuída e raio ρ_0 , conforme esquematizado na Fig. 1.19 (esquerda). A força gravitacional $d\vec{F}$ gerada por um pedaço infinitesimal desse anel sobre uma massa de prova m' estacionada no eixo do anel na altura z , é dada por

$$d\vec{F} = \frac{Gm'dm}{\rho_0^2 + z^2} (-\cos\theta \hat{z} + \sin\theta \hat{\rho}), \quad z > 0, \quad (1.196)$$

em que $\hat{\rho} = \cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y}$ é o versor radial no plano transversal ao eixo z .

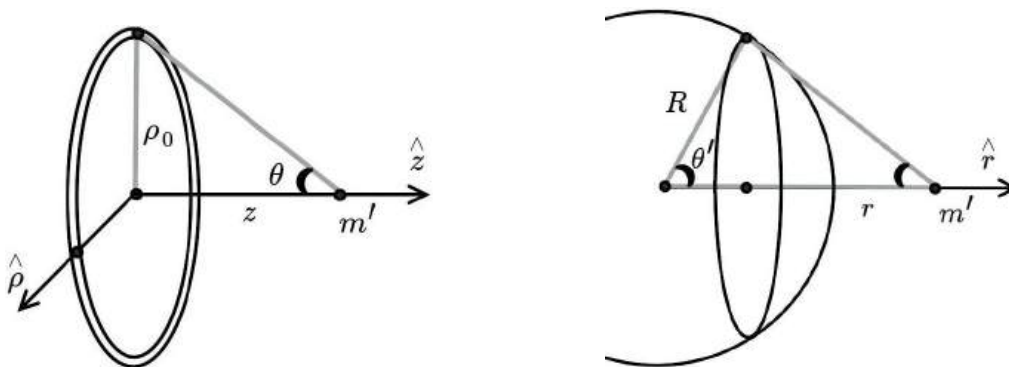


Figura 1.19: Exemplos de corpos extensos com simetria. As variáveis empregadas no texto estão definidas nos esquemas acima.

A força total com que o anel atrai a massa de prova é calculada somando-se *vetorialmente* todas as forças diferenciais da expressão acima, o que é obtido pela integração em φ de cada componente. Mesmo sem realizar a integração formal, a simetria envolvida já nos mostra que a força na direção $\hat{\rho}$ deve se cancelar, uma vez que cada pedaço infinitesimal do anel na posição φ gera componente de força na direção $\hat{\rho}$ que se opõe à mesma componente produzida pelo pedaço localizado em $\varphi + \pi$, i.e. na posição ‘oposta’ do anel.

Por outro lado, a componente \hat{z} da força não apresenta dependência em φ , de forma que a integração mencionada equivale a simplesmente somar todas as massas infinitesimais dm para obter como resultado a massa do anel m . Usando a geometria para escrever $\cos\theta = z/\sqrt{\rho_0^2 + z^2}$, a força de atração do anel sobre a partícula em seu eixo vale

$$\vec{F} = -\frac{Gm'm}{(\rho_0^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}. \quad (1.197)$$

É aparente que essa força *não* respeita a dependência r^{-2} postulada por Newton, um efeito causado pela geometria do corpo na região ‘próxima’ a ele. De fato, Newton sugeriu a lei de força gravitacional

considerando o limite de ‘partículas’, i.e. corpos cujas dimensões são muito menores do que as distâncias com que são observados. É simples verificar que a força retratada na Eq. (1.197) respeita essa regra. O anel deve se parecer com uma ‘partícula’ no que tange seu efeito sobre a massa de prova para $z \gg \rho_0$, ou seja,

$$\vec{F} = -\frac{Gm'm}{z^3 \left(1 + \frac{\rho_0^2}{z^2}\right)^{3/2}} \vec{z} \stackrel{z \gg \rho_0}{\approx} -\frac{Gm'm}{z^3} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\rho_0^2}{z^2}\right) \vec{z}, \quad (1.198)$$

em que usamos a expansão de Taylor para escrever a aproximação $\left(1 + \frac{\rho_0^2}{z^2}\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2} \frac{\rho_0^2}{z^2}$. Como esperado, o termo de ordem zero da Eq. (1.198) nos fornece a dependência z^{-2} . O primeiro termo de correção nos diz que a força de um anel fornece magnitude ligeiramente menor que a força de uma partícula de mesma massa, e nos fornece informação sobre a distribuição de massa do corpo⁴⁹.

Com esse resultado, podemos calcular a força gravitacional produzida por uma casca esférica imaginando-a como a sobreposição de infinitos anéis. Desejamos agora redefinir a posição da massa de prova m' tomando como referência o centro da casca esférica (Fig. 1.19, direita). A simetria esférica nos permite escolher o eixo z de forma a conectar o centro da casca à massa de prova, passando pelos centros de todos os anéis.

Cada anel é identificado pelo ângulo θ' de ‘latitude’ na esfera. A distância entre a massa de prova e o centro do anel nas novas variáveis passa a ser $r = z - R \cos \theta'$, e o raio do anel se torna $\rho_0 = R \sin \theta'$. A massa diferencial de um anel com largura infinitesimal $d\ell = R d\theta'$ fornece $dm = 2\pi\mu R^2 \sin \theta' d\theta'$, em que $\mu = m/(4\pi R^2)$ é a densidade superficial de massa da casca esférica. Calcular a integral em θ' é um exercício bastante direto. Ela nos fornece

$$\vec{F} = \begin{cases} -G \frac{m'm}{r^2} \hat{r}, & \text{para } r > R \\ 0, & \text{para } r < R \end{cases}. \quad (1.199)$$

Esse resultado (obtido por Newton!) mostra que partículas no exterior da casca esférica com massa uniformemente distribuída sofrem ação de força gravitacional igual à produzida por uma massa pontual localizada no centro da casca e possuindo a massa total da casca. Em particular, para uma esfera sólida com *qualquer distribuição radial* de massa, tudo se passa para uma partícula em seu exterior como se toda a massa da esfera se concentrasse em seu centro. A estrutura radial da distribuição de massa não afeta o campo gravitacional externo de uma esfera!

No interior da esfera, a força gravitacional é nula. Portanto, no caso de uma esfera sólida, uma partícula em seu interior só sofre ação efetiva do campo gravitacional gerado pela fração de sua massa que se encontra no interior da casca esférica imaginária sobre a qual se encontra a partícula.

Esse resultado anti-intuitivo pode ser entendido analisando como partes ‘opostas’ de uma casca esférica (sob o ponto de vista de uma partícula em seu interior) atuam para terem suas forças canceladas. A dependência r^{-2} da força é essencial para a validade desse resultado. É conveniente dividir o espaço em muitos pares de *ângulos sólidos*⁵⁰ iguais e opostos para visualizar o cancelamento. A Fig. 1.20 ilustra a geometria de duas dessas regiões com ângulos sólidos $\Omega_1 = \Omega_2$.

⁴⁹É esse tipo de correção que sondas planetárias buscam para inferir a presença de eventuais oceanos sob as superfícies de mundos enigmáticos e inexplorados como as luas de Júpiter ou Saturno.

⁵⁰O ângulo sólido Ω é a generalização tridimensional do conceito bidimensional de ângulo, e representa a ‘área angular’ de uma região vista por um observador. Para calculá-lo, começamos por imaginar uma casca esférica centrada no observador. Tomamos então a área da superfície esférica dentro da região de observação e a dividimos pelo raio da esfera. Por exemplo, o

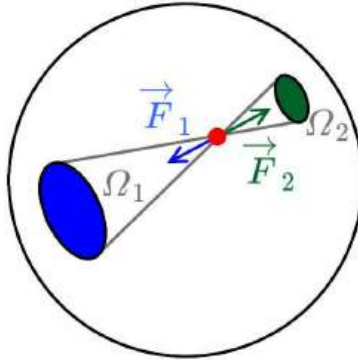


Figura 1.20: Força gravitacional agindo sobre uma partícula no interior de uma casca esférica. Regiões opostas da esfera conspiram para cancelarem mutuamente suas influências.

As massas das calotas esféricas subentendidas pelas duas regiões são

$$M_1 \approx \mu r_1^2 \Omega_1 \quad \text{e} \quad M_2 \approx \mu r_2^2 \Omega_2, \quad (1.201)$$

em que supomos serem as calotas suficientemente pequenas para que todos os seus pontos se encontrem a aproximadamente a mesma distância da massa de prova. As magnitudes das forças gravitacionais F_1 e F_2 devem ser proporcionais a M_1 e a M_2 , respectivamente. Mas a Eq. (1.201) nos mostra que essas massas aumentam com r_j^2 ($j = 1, 2$), ou seja, o inverso da dependência explícita da força gravitacional; cada calota gera assim a força atrativa

$$F_j \approx G \frac{M_j m'}{r_j^2} = G \mu m' \Omega_j, \quad (1.202)$$

um resultado independente de r_j ! Duas calotas opostas produzem forças de mesma magnitude.

Assim, para um ângulo sólido fixo, a quantidade de matéria atraindo uma massa de prova aumenta com a distância (proporcionalmente a r^2) mas seu efeito diminui com a distância (com o inverso de r^2). Portanto, considerando um ângulo sólido infinitesimal e sua projeção simétrica no sentido oposto, seus efeitos se cancelam exatamente como consequência da geometria e na forma r^{-2} da força.

1.4 A mecânica em referenciais não inerciais

As leis de Newton fornecem a descrição do movimento em referenciais inerciais. Para estendê-la a referenciais não inerciais, imaginamos um observador fixo em um referencial inercial a monitorar a posição de um segundo referencial, suposto não inercial, e a aplicar as leis de Newton em seu próprio referencial para tentar entender como o movimento *seria descrito* pelo observador no outro referencial.

Apesar de parecer uma complicação desnecessária tentar descrever a dinâmica num referencial mais ‘complicado’, já que sempre é possível definir um referencial inercial onde o movimento segue as leis de

elemento infinitesimal de ângulo sólido vale

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi, \quad (1.200)$$

e é bem conhecido das integrais tridimensionais em coordenadas esféricas (lembramos que o elemento de volume é dado nesse caso por $dx^3 = dr dA$, no qual o termo de área é $dA = r^2 d\Omega$). Esse procedimento torna Ω adimensional (como um ângulo deve ser!), e portanto independente da distância em que se imagina a esfera de observação. O ângulo sólido de um observador que possui visão desobstruída em todas as direções (solto no espaço e possuidor de ao menos 4 olhos em tetraedro) é 4π .

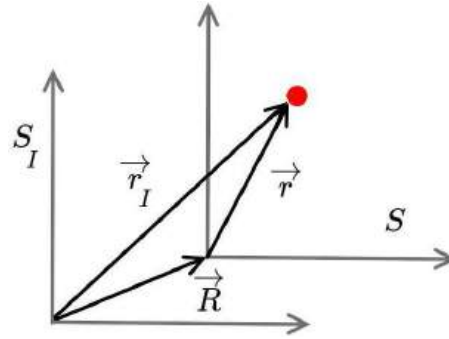


Figura 1.21: Partícula monitorada em dois referenciais, num dos quais, por ser inercial (\mathcal{S}_I), podem ser aplicadas as leis de Newton. A questão de interesse é desvendar a *forma* das equações de movimento no referencial não inercial \mathcal{S} .

Newton, algumas vezes se torna ‘prático’ descrever o movimento sob o ponto de vista de um observador não inercial, portanto também sob ação de forças, tal como ... nós mesmos aqui na superfície da Terra!

A geometria da situação genérica de interesse é ilustrada na Fig. 1.21. Um observador no referencial inercial \mathcal{S}_I monitora a posição $\vec{r}_I(t)$ de uma partícula. Ele define uma origem \mathcal{O}_I e versores espaciais \hat{x}_I , \hat{y}_I e \hat{z}_I , os quais vamos tomar como referência para aplicar as leis de Newton. Um outro observador monitora a mesma partícula, atribuindo-lhe vetor posição $\vec{r}(t)$ em seu referencial próprio \mathcal{S} . Seu sistema de coordenadas possui origem \mathcal{O} e versores espaciais \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} que podem variar de orientação no tempo com relação ao referencial \mathcal{S}_I . Vamos denominar $\vec{R}(t)$ o vetor que permite ao observador em \mathcal{S}_I descrever o movimento errático de seu colega em \mathcal{S} .

Supomos neste tratamento que os dois observadores medem espaço e tempo de forma *absoluta* como definida por Newton, implicando que massas também fornecem medidas idênticas nos dois referenciais. Essas suposições valem no limite em que as velocidades envolvidas no movimento são muito menores do que a velocidade da luz, mas precisariam ser corrigidas de acordo com a relatividade especial em casos extremos.

Conforme veremos em seguida, num referencial não inercial aparecem *forças fictícias*, cujas causas não são claras por não advirem de interações físicas. O ganho trazido pela abordagem é evitar o trabalho de se monitorar dois objetos no sistema inercial (partícula e movimento do observador não inercial), tratando tudo de início já no referencial de interesse. Como sempre, o motivo de se buscar novas abordagens é facilitar a solução ou compreensão de algumas situações físicas, ficando a cargo de cada um escolher o formalismo mais apropriado em seu caso.

1.4.1 Colocação do problema

Vamos supor por simplicidade num primeiro momento que os eixos dos sistemas de coordenadas \mathcal{S}_I e \mathcal{S} se mantêm paralelos durante o movimento, i.e. $\hat{x}_I = \hat{x}$, $\hat{y}_I = \hat{y}$ e $\hat{z}_I = \hat{z}$, de forma que apenas as origens dos dois sistemas de referência possam mover-se relativamente. Os vetores posição \vec{r}_I e \vec{r} da partícula monitorada nos dois referenciais satisfazem

$$\vec{r}_I(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}(t). \quad (1.203)$$

Para que essa relação seja verdade em qualquer instante de tempo, pequenas variações nos vetores devem também estar relacionadas pela equação acima. Dividindo esses vetores diferenciais pelo intervalo de tempo de variação, temos as derivadas temporais dos vetores a nos fornecerem a relação entre as *velocidades* observadas nos dois referenciais,

$$\vec{v}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v}(t). \quad (1.204)$$

Nessa expressão, $\vec{v}_{\mathcal{I}}$ é a velocidade da partícula monitorada conforme vista no referencial inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, \vec{V} é a velocidade com que a origem do referencial \mathcal{S} se move com relação à origem do referencial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, e \vec{v} é a velocidade da partícula medida no referencial \mathcal{S} .

Diferenciando uma vez também a Eq. (1.204), obtemos a relação entre as acelerações,

$$\vec{a}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a}(t), \quad (1.205)$$

em que os significados dos termos seguem o mesmo padrão da Eq. (1.204). É essa equação que estará ligada às forças percebidas em ambos os referenciais.

A segunda lei de Newton estabelece que a aceleração $\vec{a}_{\mathcal{I}}$ medida no referencial inercial deve ser causada por forças vinculadas a *interações físicas* agindo sobre a partícula. Por exemplo, esse tipo de força ‘real’ deve pertencer a um par de ação-reação e seguir ela mesma a segunda lei de Newton, i.e. $\vec{F}_{\mathcal{I}} = m\vec{a}_{\mathcal{I}}$, em que m é a massa da partícula. Pensando nisso, multiplicamos os dois membros da Eq. (1.205) por m para colocá-la na forma habitual,

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}_{\mathcal{I}}(t) - m\vec{A}(t), \quad (1.206)$$

e aqui já percebemos coisas curiosas aparecendo.

Primeiramente, a Eq. (1.206) nos indica que a aceleração \vec{a} da partícula conforme medida no referencial \mathcal{S} seria a mesma aceleração obtida pelos postulados de Newton aplicados no referencial inercial se $\vec{A} = 0$, i.e. caso os dois referenciais se movam com aceleração relativa nula. De fato, \mathcal{S} é nesse caso também um referencial inercial. Esse tipo de transformação de coordenadas, chamada *transformação de Galileu*, e descrita pelas regras

$$\begin{cases} \vec{x}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{x}(t) + \vec{V}t, \\ t_{\mathcal{I}} = t \end{cases}, \quad \vec{V} = cte, \quad (1.207)$$

só é capaz de alterar as velocidades relativas dos referenciais, mas não modifica as *formas* das leis físicas. Em outras palavras, as equações do movimento de Newton são *invariantes* pelas transformações de Galileu, mantendo a mesma forma matemática nos dois referenciais. O princípio de que as leis físicas devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial é chamado *princípio de relatividade*⁵¹.

No caso geral, no entanto, a existência de uma aceleração \vec{A} torna o referencial \mathcal{S} não inercial e obriga esse observador a adicionar um termo ‘fictício’ de força na sua descrição do movimento para que suas previsões correspondam àquelas do referencial inercial. Curiosamente, o termo não inercial, o qual definimos como

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}} = -m\vec{A}, \quad (1.208)$$

⁵¹A teoria do eletromagnetismo viria a encontrar uma incompatibilidade entre as transformações de Galileu e as equações de evolução dos campos elétricos e magnéticos. As equações de Maxwell não permanecem invariantes por essas transformações, sendo as *transformações de Lorentz* aquelas a seguirem do princípio de relatividade quando aplicado ao eletromagnetismo. Dentre as duas possibilidades, Einstein iria escolher a última, e “corrigir” a mecânica newtoniana para compatibilizá-la com as transformações de Lorentz, daí nascendo a teoria da relatividade especial.

possui dependência com a massa inercial da partícula. Essa é uma propriedade de todas as forças fictícias⁵²: como seus efeitos se definem diretamente pela aceleração causada, que afeta igualmente todos os objetos medidos em \mathcal{S} (já que é \mathcal{S} que se move de maneira acelerada!), a multiplicação pela massa não seria necessária⁵³. As forças fictícias são também chamadas de *forças inerciais*, por serem criadas por efeitos devidos unicamente ao movimento acelerado de um referencial não inercial.

A ‘força’ $F = m\vec{a}$ a descrever o movimento da partícula no referencial não inercial \mathcal{S} se dá pela composição da força $\vec{F}_{\mathcal{I}}$, advinda de interações físicas, e do termo fictício $\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$ de correção. Ressaltemos que $\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$ é *independente de qualquer interação física*, e por isso a chamamos de ‘força’ (assim, com apóstrofes demeritórios) anteriormente. A equação do movimento em \mathcal{S} segue a expressão efetiva

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathcal{I}} + \vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}, \quad (1.209)$$

e depende de maneira explícita da forma como a aceleração afeta o referencial \mathcal{S} .

Lembremo-nos sempre, no entanto, ao olhar para expressões como a Eq. (1.209), de que a única força real aí presente é $\vec{F}_{\mathcal{I}}$: a ‘força’ $\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$ representa (mesmo) apenas uma aceleração (multiplicada pela massa da partícula por conveniência de forma); por consequência, a ‘força’ \vec{F} se refere a uma aceleração criada por interação (até aí tudo bem) somada a uma aceleração artificial (ai!⁵⁴), e por isso *também não é* uma força propriamente dita, mas apenas alguma coisa que, percebida no referencial não inercial, produz a aceleração lá observada. Tratamos a seguir dos casos mais comuns de movimento acelerado.

1.4.2 Referencial em aceleração linear constante

A situação mais simples de movimento em referencial não inercial ocorre quando o observador em \mathcal{S} realiza movimento uniformemente acelerado segundo o observador no referencial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$. Nesse caso, a força fictícia definida na Eq. (1.208) possui a forma

$$\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}} = -m\vec{A} = cte, \quad (1.210)$$

ou seja, aparece como um campo de forças *constante* (para uma dada partícula com massa m) a afetar o movimento em \mathcal{S} . Como a força fictícia é sempre proporcional à massa, todos os objetos nesse referencial parecem sujeitos ao mesmo vetor aceleração \vec{A} .

Todos os exemplos de movimento estudados na Seção 1.3 considerando o campo gravitacional na superfície da Terra se aplicam a esse tipo de força inercial, embora nesse caso a ‘vertical’ aponte sempre na direção de $\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$ (em especial, o sentido ‘para cima’ típico do campo gravitacional constante seria redefinido nesse caso como oposto ao sentido da força fictícia, i.e. fazendo $\hat{z} \rightarrow -\hat{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$).

⁵² Isso nos lembra alguma coisa? Certamente: a força gravitacional na superfície da Terra possui essa propriedade especial. Mas isso não passa de uma coincidência no tratamento newtoniano: nele, a força gravitacional é física e originária de interação entre os corpos, e portanto faz parte de um par ação-reação e tudo o mais. Entretanto, ainda assim, sua similaridade com uma força inercial é tão insólita que sugere haver algo a mais por trás disso. A teoria da relatividade geral de Einstein se baseia nas consequências de se *impor* que a força gravitacional seja uma força fictícia típica de referenciais não inerciais, no chamado *princípio de equivalência*, inclusive redefinindo o que seria um referencial inercial nesse caso (um referencial em ‘queda livre’). A origem física da força ‘inercial’ gravitacional sobre a superfície da Terra seria vista a partir de um referencial inercial verdadeiro como devida à curvatura local do espaço-tempo.

⁵³ De fato, a definição da Eq. (1.208) consiste em mero retoque estético para que a equação de movimento no referencial não inercial pareça possuir a mesma forma ‘familiar’ da segunda lei de Newton (embora ela não a tenha de fato!).

⁵⁴ Quem quer passar além do referencial inercial tem que passar além da confusão mental!

Exemplo: Caminhão acelerado. Considere um caminhão em cuja carroceria se encontra preso ao teto um objeto com massa m por um fio de massa desprezível (pêndulo ideal). Durante um período de aceleração constante, um observador no interior da carroceria veria o fio se estabilizar num ângulo $\theta \neq \pi/2$ com o teto.

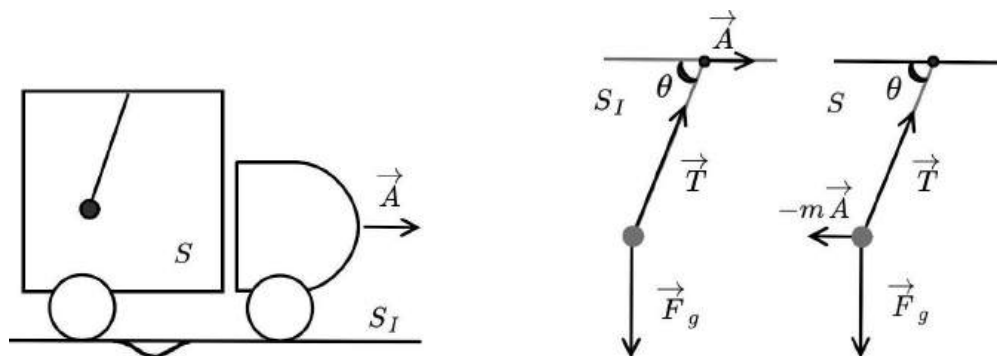


Figura 1.22: Caminhão acelerado carregando um pêndulo pelas ruas de Recife. Os esquemas ao lado representam o equilíbrio de forças conforme entendido nos referenciais inercial (esquerda) e não inercial (direita).

Para um observador inercial no solo (referencial \mathcal{S}_I), o fio se inclina para transmitir a aceleração \vec{A} do caminhão à massa m , uma vez que, por se encontrar esta presa ao caminhão, precisa se acelerar na mesma taxa que o mesmo (Fig. 1.22, esquema à esquerda). A componente vertical da tensão no fio se autoajusta para contrabalançar a força peso da massa $T \sin \theta = -mg$, enquanto sua componente horizontal se regula para produzir a aceleração necessária na massa, $T \cos \theta = mA$.

Essa situação é explicada pelo observador não inercial no interior do caminhão (referencial \mathcal{S}) como devida a uma força fictícia $\vec{\mathcal{F}}_{\text{fict}}$ a atuar sobre a massa, uma vez que para ele o interior da carroceria permanece em repouso (Fig. 1.22, esquema à direita). A componente horizontal da tração no fio contrabalança a força fictícia, $T \cos \theta = -\mathcal{F}_I$, resultando no mesmo valor observado no referencial inercial, como esperado. A única diferença entre os dois referenciais ocorre na interpretação da origem das forças atuantes sobre a massa m .

1.4.3 Referencial em queda livre num campo gravitacional não uniforme

Como visto anteriormente, o campo gravitacional possui a propriedade especial de acelerar *localmente* todas as partículas com o mesmo vetor aceleração. Por esse motivo, um observador que queira embarcar num referencial *localmente* inercial na superfície da Terra só precisa ‘cair junto’ com as partículas monitoradas⁵⁵.

O mesmo não vale se o observador for capaz de sondar uma região mais extensa do espaço, caso em que a aceleração gravitacional produzida por uma mesma fonte poderia *variar* entre diferentes pontos de seu referencial. A tática de ‘cair junto’ consegue cancelar a aceleração não inercial vista pelo observador em sua posição local, mas não a aceleração residual proveniente da não uniformidade do campo gravitacional

⁵⁵Notemos que, pela definição de Newton de referencial inercial (primeira lei), o observador em queda livre deve observar dinâmica *local* compatível com todas as leis newtonianas, uma vez que experimentos não conseguiriam detetar efeitos do campo gravitacional externo (pois o campo acelera tudo com a mesma aceleração, inclusive o observador). No entanto, ele deve perceber algo estranho ocorrendo se olhar além de sua vizinhança. Por exemplo, para explicar o movimento observado das galáxias distantes, esse mesmo observador precisa supor que ele se encontra na verdade em um referencial não inercial em queda livre na superfície da Terra. É isso que queremos dizer com ‘localmente inercial’.

ao percorrer distâncias maiores.

Consideremos como exemplo o campo gravitacional solar na região da Terra. Nosso planeta ‘cai junto’ com tudo que está nele, e por isso quase nada *na superfície da Terra* evidencia o fato de estarmos em princípio num referencial não inercial. Podemos ignorar sem peso na consciência (e sem trocadilhos) as acelerações gravitacionais causadas pelo Sol e pela Lua (os corpos celestes mais próximos de nós) na descrição do movimento e da estática dos objetos a nosso redor. É só quando olhamos o universo distante (estrelas e galáxias) ou percorremos distâncias comparáveis ao raio da Terra que percebemos ser nosso movimento diferente de linear uniforme, ficando claro o limite de validade da aproximação do referencial inercial preso à superfície da Terra.

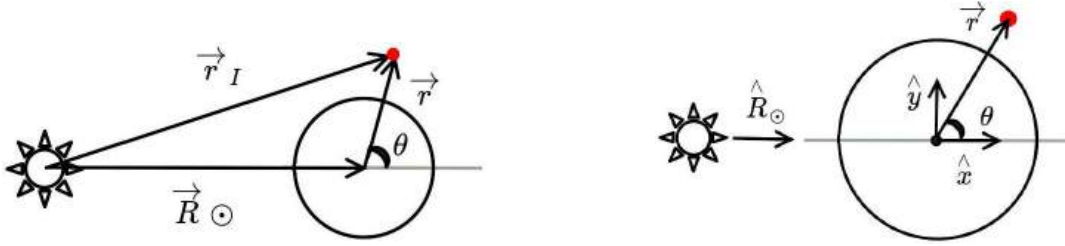


Figura 1.23: Esquerda: Relação entre os vetores utilizados para denotar a posição de uma partícula com relação à Terra (\vec{r}) e ao Sol (\vec{r}_I). A distância Terra-Sol é denotada pelo vetor \vec{R}_\odot . Direita: Definição dos versores empregados na decomposição de \vec{r} .

Usamos a seguir a notação \vec{R}_\odot para a distância Terra-Sol, M_\odot para a massa do Sol, m para a massa de prova e R_\oplus para o raio da Terra. Escolhemos o referencial não inercial \mathcal{S} em ‘queda livre’ no Sol com origem no centro da Terra. Segundo a Eq. (1.206), a aceleração \vec{A}_\odot produzida pelo campo de forças gravitacional aparente \vec{F}_\odot em \mathcal{S} é causada pelo campo gravitacional do Sol \vec{F}_\odot (conforme percebido num referencial inercial \mathcal{S}_I) subtraída da aceleração \vec{A}_\oplus a que o centro da Terra está submetido,

$$\begin{aligned}\vec{F}_\odot(\vec{r}) &= \vec{F}_\odot(\vec{r}_I) - m\vec{A}_\oplus \\ &= -G\frac{M_\odot m}{r_I^3}\vec{r}_I + G\frac{M_\odot m}{R_\odot^3}\vec{R}_\odot, \quad \text{com } \vec{r}_I = \vec{R}_\odot + \vec{r}.\end{aligned}\quad (1.211)$$

Notemos que os vetores \vec{r} e \vec{R}_\odot são dependentes do tempo, pois seguem a Terra em sua órbita ao redor do Sol. Esse efeito fica implícito pela escolha de versores esféricos, tornando nossa análise válida para qualquer ponto da órbita terrestre. Para posições \vec{r} localizadas nas proximidades da Terra, i.e. $r \approx R_\oplus$, vale $r \ll R_\odot$, o que nos permite escrever

$$r_I^2 = \vec{r}_I \cdot \vec{r}_I = (\vec{R}_\odot + \vec{r}) \cdot (\vec{R}_\odot + \vec{r}) = R_\odot^2 + r^2 + 2\vec{R}_\odot \cdot \vec{r} \approx R_\odot^2 \left(1 + 2\frac{r}{R_\odot} \cos \theta\right). \quad (1.212)$$

Substituindo essa relação na Eq. (1.211), e generalizando-a para o caso $r_I^{-3} \approx R_\odot^{-3} \left(1 - 3\frac{r}{R_\odot} \cos \theta\right)$, obtemos para a força aparente no referencial da Terra a expressão

$$\vec{F}_\odot(\vec{r}) \approx -G\frac{M_\odot m}{R_\odot^3} \left[\left(1 - 3\frac{r}{R_\odot} \cos \theta\right) \vec{r}_I - \vec{R}_\odot \right] \stackrel{\vec{r}_I = \vec{R}_\odot + \vec{r}}{\approx} -G\frac{M_\odot m}{R_\odot^3} \left[\vec{r} - 3\frac{r}{R_\odot} \cos \theta \vec{r}_I \right]. \quad (1.213)$$

Empregando a aproximação de ordem zero $\vec{r}_I/R_\odot \approx \hat{R}_\odot$, essa expressão pode ainda ser escrita como

$$\vec{F}_\odot(\vec{r}) \approx -G\frac{M_\odot m}{R_\odot^3} \left[\hat{r} - 3\cos \theta \hat{R}_\odot \right] r. \quad (1.214)$$

A simetria cilíndrica do problema em torno do vetor \vec{R}_\odot nos permite simplificar a situação para entendê-la em qualquer plano que corte os centros do Sol e da Terra simultaneamente. Escolhemos por simplicidade o plano de órbita da Terra, de forma que o eixo x do observador no planeta aponte a direção Terra-Sol, i.e. $\hat{x} = \hat{R}_\odot$. Nesse caso, o ângulo θ corresponde à definição de longitude no planeta (Fig. 1.23). Com essa escolha de sistema de eixos, escrevemos $\vec{r} = r(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})$, levando a Eq. (1.214) à forma

$$\vec{\mathcal{F}}_\odot(\vec{r}) \approx G \frac{M_\odot m}{R_\odot^3} (2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}) r. \quad (1.215)$$

No referencial não inercial \mathcal{S} (Fig. 1.24, direita), o campo de forças aparente tende a ‘esgarçar’ a Terra na direção que une seu centro ao Sol, puxando sua parte mais próxima da estrela e empurrando sua parte mais distante. Na direção ortogonal a essa, cilindricamente simétrica, o campo de forças comprime a Terra. Seu efeito mais visível é deformar a superfície da Terra, em especial nas regiões tomadas por líquido, formando as *marés*. A Eq. (1.215) prevê a existência de duas marés altas e duas marés baixas por dia.

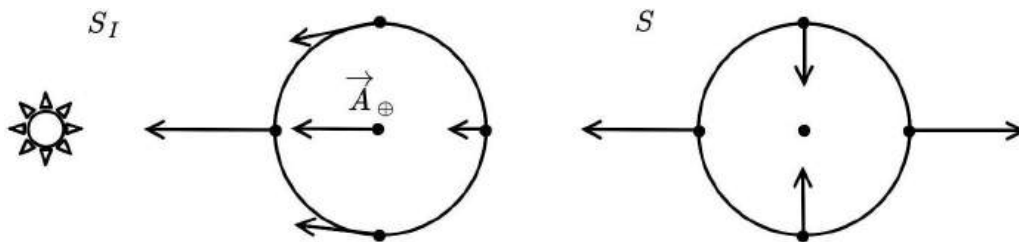


Figura 1.24: Efeito diferencial das forças de maré do Sol agindo sobre a Terra, conforme vista no referencial inercial do Sol (esquerda) e no referencial não inercial preso à Terra (direita).

No referencial inercial \mathcal{S}_I , o mesmo efeito é explicado pela queda da magnitude da força gravitacional com a distância (Fig. 1.24, esquerda): embora a força gravitacional seja sempre atrativa, ela é maior na face da Terra mais próxima ao Sol do que na face mais distante.

Newton utilizou raciocínio análogo a esse para, conhecendo através de medidas a altura máxima da maré solar, calcular a razão entre as massas da Terra e do Sol. Para encontrar uma expressão teórica para a altura da maré, Newton imaginou um sistema de vasos comunicantes se estendendo do centro da Terra até sua superfície. Uma das colunas de água abria-se no zênite com Sol a pino, e a outra se abria na direção ortogonal (e.g. longitude onde o sol aparece nascente no mesmo instante). Ele obteve estimativa bastante razoável para a razão das massas entre a Terra e o Sol, e repetiu o mesmo para a Lua, onde no entanto obteve valor discrepante do aceite atualmente por ter se baseado em medidas locais da maré (a altura máxima da maré varia bastante na região costeira por depender de acidentes geográficos locais).

A expressão para as forças de maré produzidas pela Lua é análoga à Eq. (1.215), trocando-se apenas a massa do Sol pela da Lua, i.e. $M_\odot \rightarrow M_\zeta$, e a distância Terra-Sol pela distância Terra-Lua, i.e. $R_\odot \rightarrow R_\zeta$. Na superfície da Terra ($r = R_\oplus$), a constante multiplicativa da Eq. (1.215) vale $\approx 2,5 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$, enquanto a equação adaptada ao caso da Lua fornece $\approx 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$, evidenciando que esse tipo de aceleração é muito menor que o valor de g produzido pela Terra e que as marés de Lua devem ter aproximadamente o dobro da amplitude das marés causadas pelo Sol, fato que concorda bem com a evidência experimental em mar aberto.

Notemos que a aceleração não inercial de maré observada no referencial \mathcal{S} *não resulta* propriamente de um força fictícia, uma vez que é o campo gravitacional (interação física) que a produz por conta de sua não

uniformidade na região do observador. O efeito da aceleração não inercial é *distorcer* o campo de forças solar (e lunar) no referencial \mathcal{S} . O campo observado é fictício no sentido de que sua forma não corresponde à ‘verdadeira’ (i.e. aquela observada no referencial inercial \mathcal{S}_I).

As marés são o fenômeno de curto prazo mais óbvio da não uniformidade em grandes escalas do campo gravitacional. Existem, no entanto, efeitos de longo prazo que vêm como consequência do *atrito* produzido pelas forças de maré. Como vimos, um corpo extenso sob efeito do campo gravitacional de outro sofre forças de *dilatação* na direção a unir seus centros e de *compressão* nas demais direções ortogonais a essa, tendendo a assumir um formato ovalado (elipsoide de revolução) caso seja esférico na ausência de campo. Esse ‘formato’ ou ‘padrão’ imposto ao corpo depende da posição relativa entre ele e o centro de forças, sendo portanto independente do estado de movimento do mesmo. Assim, um corpo em rotação em torno de seu eixo percebe esse formato como variável no tempo em seu próprio referencial, como se uma ‘onda’ de compressão e outra de dilatação o deformassem periodicamente. No referencial inercial, veríamos uma espécie de ‘competição’ entre a rotação e o padrão de maré, ou seja, veríamos o corpo girando ‘sob o padrão’ também girante, o que produz atrito.

O atrito transforma a energia de rotação do corpo em outras formas de energia, em especial calor. Esse tipo de efeito é, por exemplo, responsável pela existência de oceanos líquidos sob a superfície congelada de Titã, o maior satélite natural de Saturno. A dissipação cessa quando os dois tipos de movimento se sincronizam, i.e. quando a rotação ocorre com o mesmo período de variação do formato elipsoidal. Na maior parte dos casos, o formato elipsoidal varia de orientação no tempo justamente por conta do movimento *orbital* de translação do corpo extenso, caso em que sua rotação própria e seu período orbital se sincronizam. De fato, é por esse motivo que a Lua tem sempre a mesma ‘face’ voltada para a Terra; nesse caso, a sincronização ocorreu por causa da ação das forças de maré produzidas na Lua pelo campo terrestre. Da mesma forma, o período da Terra aumenta de ≈ 2 ms a cada 100 anos por conta das forças de maré do Sol e da Lua.

A segunda consequência interessante dessas forças é o acoplamento gerado entre o movimento de rotação e o de translação orbital para corpos ligados: é também criado nesse caso um ‘fluxo’ de *momento angular* entre essas duas formas de movimento. No caso do sistema Terra-Lua, a força de atrito reduz a velocidade de rotação própria da Terra, levando embora parte da energia rotacional mas também o momento angular de rotação. Como o campo gravitacional é central e por isso conserva o momento angular, este acaba por ser transferido da rotação para a translação orbital, aumentando a distância entre os corpos ligados, num movimento chamado de ‘recessão’. De fato, o acoplamento entre rotação e translação orbital causado pelas forças de maré torna um tanto artificial separar esses dois tipos de movimento, uma vez que deixam de ser independentes.

O movimento de recessão causado pela força de maré é claramente observado no sistema Terra-Lua, cuja distância é monitorada com alta precisão (centímetros) por feixes laser. A técnica utiliza pulsos intensos de luz laser, telescópios para focar o laser enviado e coletar a radiação refletida (poucos fótons), além de (crucialmente) espelhos tipo ‘olho de gato’⁵⁶ deixados na superfície da Lua por algumas missões lunares. A distância é inferida pelo tempo de vôo do laser, tal como num radar.

⁵⁶Esses espelhos, formados por cubos intercalados, refletem a luz por caminho paralelo ao de incidência.

1.4.4 Referencial em rotação

Um referencial não inercial \mathcal{S} em movimento de rotação é qualitativamente diferente do referencial não inercial em movimento acelerado linear. O efeito da rotação é causar *variação temporal fictícia* nos vetores posição observados em \mathcal{S} , consequência de estarem variando os *próprios eixos* do sistema de referência não inercial.

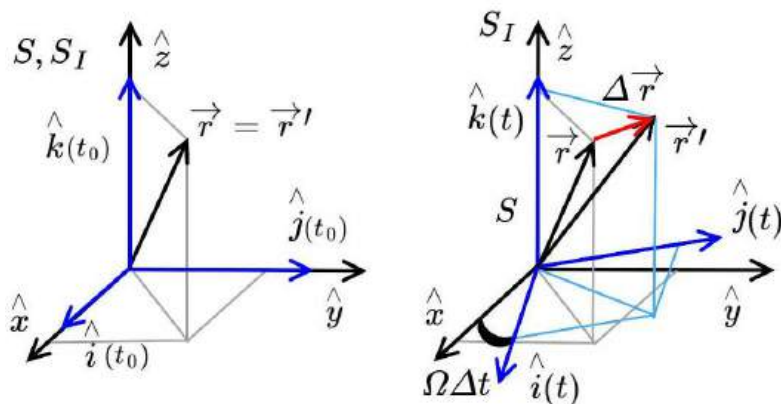


Figura 1.25: Posição de uma partícula conforme medida nos referenciais inercial \mathcal{S}_I e não inercial \mathcal{S} em rotação uniforme com velocidade angular Ω . Dois vetores coincidentes (esquerda) passam a apontar em direções diferentes passado certo tempo Δt (direita), já que os versores de referência em \mathcal{S} variam no tempo.

Se esse observador medir a posição $\vec{r}(t)$ de uma partícula no instante t e anotar os valores de suas componentes espaciais, no instante seguinte o vetor $\vec{r}'(t)$ possuindo a *mesma* decomposição no referencial \mathcal{S} não coincidirá com o vetor $\vec{r}(t)$ conforme visto no referencial inercial \mathcal{S}_I . De forma contrária, um vetor observado como constante no referencial inercial parecerá variar no referencial não inercial por conta do mesmo efeito.

Consideremos por simplicidade o referencial não inercial em rotação pura, i.e. as origens \mathcal{O} e \mathcal{O}_I dos dois referenciais são coincidentes em qualquer tempo, conforme esquematizado na Fig. 1.25. A posição $\vec{r}_I(t)$ de uma partícula no referencial inercial pode ser descrita em termos de suas componentes como

$$\vec{r}_I(t) = x_I(t) \hat{x} + y_I(t) \hat{y} + z_I(t) \hat{z}. \quad (1.216)$$

Já no referencial não inercial, o mesmo vetor posição precisa ser escrito como

$$\vec{r}'(t) = x(t) \hat{i}(t) + y(t) \hat{j}(t) + z(t) \hat{k}(t), \quad (1.217)$$

em que os próprios versores espaciais \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são funções do tempo.

Observemos que os vetores $\vec{r}_I(t)$ e $\vec{r}'(t)$ são o *mesmo* vetor nos dois referenciais a menos de uma rotação instantânea. Isso fica claro se escolhermos um dos sistemas de referência tal que os versores coincidam em algum tempo t_0 na forma $\hat{i}(t_0) = \hat{x}$, $\hat{j}(t_0) = \hat{y}$ e $\hat{k}(t_0) = \hat{z}$. Entretanto, passado um tempo $\Delta t = t - t_0$, o vetor \vec{r}' com a decomposição da Eq. (1.217) na forma $\vec{r}' = x(t_0) \hat{x} + y(t_0) \hat{y} + z(t_0) \hat{z}$ já não corresponderá ao vetor $\vec{r}_I(t)$, por conta da variação temporal dos versores (girados de um ângulo $\Omega \Delta t$) – embora o observador em \mathcal{S} não perceba isso. De fato, esse observador ‘erra’ por $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ sempre que for calcular variações

temporais em seu referencial, pois entende estarem fixos seus versores quando na verdade variam com relação ao referencial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ no qual valem as leis de Newton.

A variação temporal do vetor posição da partícula é percebida no referencial inercial da maneira usual,

$$\frac{d}{dt}\vec{r}_{\mathcal{I}}(t) = \dot{x}_{\mathcal{I}}(t)\hat{x} + \dot{y}_{\mathcal{I}}(t)\hat{y} + \dot{z}_{\mathcal{I}}(t)\hat{z}. \quad (1.218)$$

Essa é a variação *real* do vetor, que portanto fornece a velocidade da partícula $\vec{v}_{\mathcal{I}}(t) = \dot{\vec{r}}_{\mathcal{I}}(t)$. Já no referencial não inercial, vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{r}(t) &= \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{i}(t) + y(t)\hat{j}(t) + z(t)\hat{k}(t)\right) \\ &= \left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}\right) + \left(x\frac{d}{dt}\hat{i} + y\frac{d}{dt}\hat{j} + z\frac{d}{dt}\hat{k}\right). \end{aligned} \quad (1.219)$$

O membro esquerdo dessa equação também representa a variação real do vetor, e portanto $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{v}_{\mathcal{I}}(t)$. Mas o observador em \mathcal{S} percebe apenas o primeiro grupo de termos entre parênteses no membro direito (i.e. sua medida não é sensível ao segundo grupo), já que acredita estarem fixos os seus versores de referência e por isso se baseia apenas nas projeções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ para determinar vetores. Portanto, o primeiro grupo de termos representa a variação do vetor posição conforme observada em \mathcal{S} , i.e. a velocidade observada no referencial não inercial,

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}. \quad (1.220)$$

O segundo grupo de termos produz as forças fictícias necessárias para corrigir o movimento visto em \mathcal{S} . Seu cálculo requer conhecermos a forma como se movem os versores de \mathcal{S} conforme vistos em $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$.

Como dissemos, supomos ser essa transformação uma rotação pura, descrita pelo vetor velocidade angular $\vec{\Omega}$, que fornece o eixo de rotação e seu respectivo ângulo $d\theta_{rot} = \Omega dt$. A rotação do referencial faz cada versor *precessionar* em torno de $\vec{\Omega}$ de acordo com as relações

$$\frac{d}{dt}\hat{i} = \vec{\Omega} \times \hat{i}, \quad \frac{d}{dt}\hat{j} = \vec{\Omega} \times \hat{j}, \quad \frac{d}{dt}\hat{k} = \vec{\Omega} \times \hat{k}. \quad (1.221)$$

Observemos que essas relações devem estar corretas porque, por um lado, os módulos dos versores permanecem constantes durante a transformação (pois cada vetor variação aponta ortogonalmente ao seu respectivo versor) e, por outro, o vetor variação precisa ser ortogonal também a $\vec{\Omega}$. Assim, as projeções dos versores paralelas a $\vec{\Omega}$ permanecem fixas, enquanto as componentes ortogonais giram.

Usando essas relações na Eq. (1.219), obtemos a transformação de velocidades entre os referenciais,

$$\vec{v}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{v}(t) + \vec{\Omega} \times \vec{r}(t), \quad (1.222)$$

em que empregamos a Eq. (1.217) para escrever o vetor $\vec{r}(t)$. Poderíamos sem problemas escrever $\vec{r}_{\mathcal{I}}(t)$ em lugar de $\vec{r}(t)$ na equação acima, bastando para isso escolhermos sempre o instante t em que calcular a velocidade como o instante t_0 no qual os versores coincidem. De fato, essa escolha é irrelevante porque os vetores $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}_{\mathcal{I}}(t)$ podem sempre ser escolhidos como possuindo a mesma decomposição nos dois referenciais por uma operação matemática (e não física) de rotação instantânea de eixos (i.e. uma simples redefinição dos eixos arbitrários de referência). A única quantidade física a de fato se distinguir entre os referenciais \mathcal{S} e $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ são *variações temporais* de vetores de posição, por causa da rotação (física) ocorrendo.

Finalmente, a *aceleração fictícia* pode ser calculada pela diferenciação da Eq. (1.219), que nos fornece

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \right) + \frac{d}{dt} \left(x \frac{d}{dt}\hat{i} + y \frac{d}{dt}\hat{j} + z \frac{d}{dt}\hat{k} \right) \\ &= \left(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \right) + 2 \left(\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}} \right) + \left(x\ddot{\hat{i}} + y\ddot{\hat{j}} + z\ddot{\hat{k}} \right).\end{aligned}\quad (1.223)$$

Novamente, o membro esquerdo da equação representa a variação temporal de segunda ordem *real* do vetor, e portanto corresponde à aceleração conforme observada no referencial inercial, $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}_{\mathcal{I}}(t) = \vec{a}_{\mathcal{I}}(t)$. O primeiro grupo de termos do membro direito da equação representa a variação das *componentes* nas quais a posição é medida, correspondendo assim à aceleração $\vec{a}(t) = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ conforme observada no referencial não inercial \mathcal{S} .

Os dois últimos grupos de termos – as contribuições fictícias da aceleração – assumem expressões mais claras ao utilizarmos a Eq. (1.221). O primeiro termo fornece

$$\dot{x}\dot{\hat{i}} + \dot{y}\dot{\hat{j}} + \dot{z}\dot{\hat{k}} = \dot{x}\vec{\Omega} \times \hat{i} + \dot{y}\vec{\Omega} \times \hat{j} + \dot{z}\vec{\Omega} \times \hat{k} = \vec{\Omega} \times \vec{v}, \quad (1.224)$$

em que juntamos as parcelas para identificar a velocidade da Eq. (1.220) conforme medida no referencial não inercial \mathcal{S} . Quanto ao segundo grupo de termos, temos e.g. que a segunda derivada do versor \hat{i} fornece

$$\ddot{\hat{i}} = \frac{d}{dt}\dot{\hat{i}} = \frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega} \times \hat{i} \right) \stackrel{\vec{\Omega}=cte}{=} \vec{\Omega} \times \dot{\hat{i}} = \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \hat{i} \right), \quad (1.225)$$

da qual se obtém

$$x\ddot{\hat{i}} + y\ddot{\hat{j}} + z\ddot{\hat{k}} = \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right). \quad (1.226)$$

Notemos que essas expressões pressupõem ser constante a velocidade angular de rotação de \mathcal{S} , por ser o caso (com ótima aproximação) em nosso referencial não inercial de interesse, a superfície da Terra⁵⁷; caso isso não valha, mais termos de força fictícia devem aparecer!

Juntando todos os termos na Eq. (1.223), e multiplicando a equação pela massa da partícula, obtemos a equação de movimento a ser utilizada no referencial não inercial \mathcal{S} como

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\mathcal{I}} + \vec{\mathcal{F}}_{centrif} + \vec{\mathcal{F}}_{coriolis}, \quad (1.227)$$

em que $\vec{F}_{\mathcal{I}}$ representam interações físicas conforme observadas no referencial inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, e as forças fictícias são a *força centrífuga*

$$\vec{\mathcal{F}}_{centrif} = -m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \quad (1.228)$$

e a *força de Coriolis*

$$\vec{\mathcal{F}}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}. \quad (1.229)$$

Força centrífuga

A força centrífuga é aquela com a qual temos mais familiaridade por possivelmente termos já ‘sentido’ seu efeito quando em repouso num referencial em rotação. Ela tende a propelir objetos fixos ao referencial não inercial para longe da origem, na direção radial.

⁵⁷De fato, a precessão do eixo de rotação da Terra tem período de ≈ 20 mil anos, com efeito desprezível em escalas de tempo muito menores do que essa.

Segundo a Eq. (1.226), a força centrífuga se origina nas variações temporais de segunda ordem dos *versores* do referencial não inercial. Ela reflete o fato de que um observador em \mathcal{S} que queira manter objetos *parados* em seu referencial estará, na verdade, colocando-os em movimento circular uniforme no referencial inercial. Por consequência, ele precisa sentir uma falsa ‘resistência inercial’ do objeto em ficar parado.

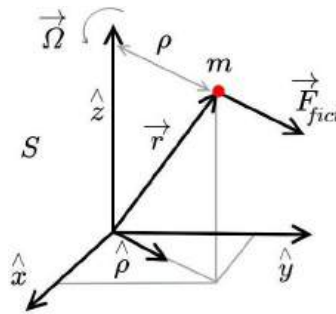


Figura 1.26: Representação esquemática da força centrífuga atuando num referencial girante. Essa força fictícia aponta na direção radial no plano ortogonal à velocidade angular $\vec{\Omega}$.

Esse exemplo deixa claro que a força centrífuga deve apontar na direção radial no sentido de expulsar a partícula do eixo determinado por $\vec{\Omega}$, ou seja, o oposto de uma força centrípeta. O termo $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ aponta na direção ortogonal tanto a $\vec{\Omega}$ quanto a \vec{r} . O produto vetorial desse resultado com o vetor $-\vec{\Omega}$ implica que a força centrífuga aponta na direção e sentido de $\hat{\rho}$, o versor cilíndrico radial do sistema de eixos em que z segue a direção $\vec{\Omega}$. O módulo da força centrífuga vale $\mathcal{F}_{centrif} = m\Omega^2\rho$, em que ρ é a distância da partícula ao eixo z .

Exemplo: Superfície de um líquido em rotação. Considere um balde com água em rotação com velocidade angular $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Gostaríamos de determinar a forma geométrica tomada pela superfície do líquido em rotação.

Um líquido ideal (sem viscosidade) não possui estrutura microscópica capaz de suportar forças *tangenciais*, e se acomoda de forma a resistir apenas a forças puras de *compressão*. Essa restrição implica que qualquer superfície de pressão constante precisa ser *normal* à força a comprimi-la. No referencial inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, encontrar a forma dessas superfícies requer escrever uma equação para o movimento do líquido. A vantagem de utilizar o referencial não inercial \mathcal{S} em rotação com o líquido é tornar o problema meramente *estático*.

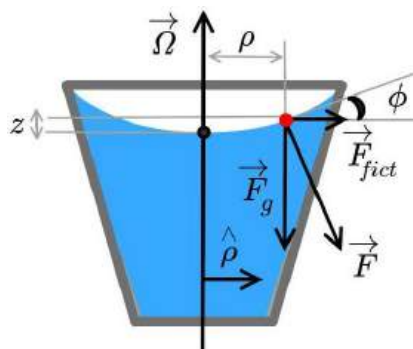


Figura 1.27: Forças agindo sobre um elemento de massa na superfície de um líquido em rotação uniforme. O líquido se deforma para que a força resultante seja normal à sua superfície.

No referencial \mathcal{S} , um elemento de massa infinitesimal do líquido sofre a ação de duas forças de compressão,

seu peso e a força centrífuga⁵⁸ (por sua vez balanceadas pela pressão local do líquido criada por ‘forças de contato’ entre as moléculas como ‘reação’ à compressão). A força peso é constante para qualquer elemento de mesma massa dm e igual a $\vec{F}_g = -gdm\hat{z}$. A força centrífuga depende da distância ρ ao eixo de rotação, e vale $\vec{F}_{centrif} = \Omega^2 dm \vec{\rho}$. Portanto, a força resultante de compressão vale

$$\vec{F} = dm (-g\hat{z} + \Omega^2 \rho \hat{\rho}). \quad (1.230)$$

A variável relevante aqui é a *inclinação* ϕ do vetor força resultante conforme o elemento de volume se afasta do eixo de rotação. A superfície do líquido (ou, de fato, qualquer superfície isobárica interna ao líquido) precisa ser perpendicular à força de compressão, de forma que sua direção fornece o *versor normal* à superfície. Esse ângulo (Fig. 1.27) vale

$$\tan \phi = \frac{\Omega^2 \rho}{g}. \quad (1.231)$$

Mas $\tan \phi$, sendo a inclinação da curva que define a superfície, nos fornece a derivada dessa curva, descrita pela função $z(\rho)$. Assim,

$$\tan \phi = \frac{d}{d\rho} z(\rho) = \frac{\Omega^2}{g} \rho \quad \Rightarrow \quad z(\rho) = \frac{\Omega^2}{2g} \rho^2, \quad (1.232)$$

em que se escolheu a origem $z = 0$ como o ponto da superfície cortado pelo eixo de rotação. A superfície assume a forma de um parabolóide de revolução por conta do efeito inercial da força centrífuga⁵⁹.

Força de Coriolis

A força de Coriolis influencia fortemente deslocamentos de longa distância sobre a superfície da Terra. Em particular, ela molda o movimento dos oceanos e das massas de ar em distâncias continentais.

A ação da força de Coriolis se dá no sentido de produzir deslocamentos ortogonais à velocidade. Além disso, apenas a componente da velocidade ortogonal à velocidade angular $\vec{\Omega}$ contribui para a força, i.e. $\vec{F}_{coriolis}$ atua somente sobre o movimento ocorrendo no plano *ortogonal* à $\vec{\Omega}$ [Eq. (1.229)].

Há dois casos particulares de movimento ilustrados na Fig. 1.28 cuja consideração nos permite compreender melhor o efeito da força de Coriolis. No primeiro, uma partícula livre se afastando na direção radial do referencial inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ percorreria uma linha reta com velocidade uniforme. Sob o ponto de vista do referencial não inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, essa partícula deve seguir uma trajetória em espiral, por conta de sua rotação. Esse movimento só pode ocorrer caso haja uma força tangencial⁶⁰ defletindo a partícula (Fig. 1.28a).

⁵⁸A força de Coriolis se anula porque $\vec{v} = 0$.

⁵⁹Uma forma matematicamente mais direta de se obter o mesmo resultado é obrigar a superfície a seguir curva contínua cujo vetor tangente $d\vec{s} = d\rho\hat{\rho} + dz\hat{z}$ seja ortogonal à força resultante, impondo-lhe a condição

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Omega^2 \rho \hat{\rho} - g\hat{z}) \cdot (d\rho\hat{\rho} + dz\hat{z}) = 0, \quad (1.233)$$

de onde se chega à Eq. (1.232).

⁶⁰A natureza dessa força tangencial é um pouco sutil. Ela tem relação com o fato de que uma partícula se afastando na direção radial do referencial não inercial \mathcal{S} só poderia percorrer uma linha reta se a magnitude de sua velocidade *tangencial* (vista no referencial inercial) aumentasse com a distância ao eixo, uma vez que, sob o ponto de vista do referencial inercial $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$, manter a mesma velocidade angular $\vec{\Omega}$ implicaria em velocidade linear proporcional à distância ao eixo de rotação. De fato, existe para um objeto em rotação com velocidade uniforme ω uma relação a ser satisfeita entre a velocidade tangencial v_θ e a distância r ao eixo (de fato, $v_\theta = \omega r$). Essa relação não pode ser mantida no referencial não inercial, implicando que uma partícula livre de forças físicas nesse referencial não pode seguir uma linha reta (i.e. a trajetória não respeita a primeira lei de Newton: o referencial é não inercial). Assim, a força de Coriolis advém da comparação entre a velocidade tangencial com que

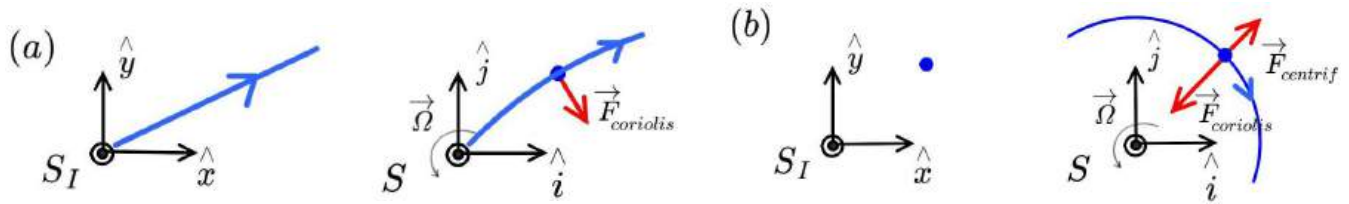


Figura 1.28: Situações simples que ajudam a ilustrar os efeitos cinemáticos da força de Coriolis. (a) Partícula livre no referencial inercial é vista defletir-se no referencial não inercial. (b) Partícula em repouso em S_I se mantém em movimento circular uniforme no referencial S por exercer $\vec{F}_{\text{coriolis}}$ o papel de força centrípeta (e cancelar \vec{F}_{centrif}).

No outro caso, uma partícula se movendo tangencialmente no referencial S possui ao menos parte desse movimento como efeito aparente da rotação do próprio referencial. No cenário extremo, uma partícula em repouso no referencial inercial apareceria em movimento circular uniforme em S (Fig. 1.28b). Como o referencial não inercial percebe sempre uma força fictícia centrífuga em partículas distantes do eixo de rotação, o movimento circular uniforme só se torna possível se uma segunda força fictícia, a força de Coriolis, excede a força centrífuga pelo dobro de seu valor: uma parte para cancelar seu efeito e outra para fazer o papel de força centrípeta nesse referencial.

Exemplo: Deflexão de massa em queda livre. A rotação da Terra tem efeito pequeno mas perceptível em objetos em queda livre, defletindo o movimento da vertical perfeita. Por simplicidade, consideremos a deflexão de uma massa solta em repouso de uma altura h do solo no plano do equador⁶¹. No referencial não inercial S , a equação de movimento da partícula se escreve

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{r} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}), \quad (1.234)$$

em que supomos no primeiro termo do membro direito a aproximação realista em que a aceleração gravitacional \vec{g} é tida como constante na superfície da Terra (i.e. $r \approx R_{\oplus}$).

A geometria nos sugere empregar o sistema de eixos em coordenadas cilíndricas⁶², no qual $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Nesse caso, a partícula (sabemos com base na experiência cotidiana!) deve se mover principalmente na direção \hat{r} da vertical local, na qual atuam a força gravitacional e centrífuga. Em particular, a força centrífuga resulta em

$$\vec{F}_{\text{centrif}} = m\Omega\hat{z} \times (\Omega\hat{z} \times \vec{r}) = m\Omega^2 r\hat{z} \times \hat{\theta} \approx m\Omega^2 R_{\oplus}\hat{r}. \quad (1.235)$$

Seu efeito no equador é simplesmente diminuir a aceleração gravitacional percebida localmente, de forma

um objeto em rotação uniforme deveria se mover a uma certa distância do eixo e a velocidade com que ele efetivamente se move: objetos que se afastam do eixo devem se ‘atrasar’ com relação a essa velocidade especial, fazendo parecer ao observador em S que uma força (a força de Coriolis) deflete seu vetor velocidade mantendo-lhe a mesma magnitude; o oposto ocorre para objetos que se aproximam do eixo de rotação, caso em que se ‘adiantam’ com relação ao movimento circular uniforme que realizariam caso se mantivessem na mesma posição radial. Vemos por esses argumentos qualitativos que o sentido da força precisa depender do sentido da velocidade do objeto e ser ortogonal a ela.

⁶¹A escolha desse plano torna a velocidade da partícula ortogonal à velocidade angular $\vec{\Omega}$ durante todo o movimento, simplificando a expressão da força de Coriolis. A situação física se torna similar à ilustrada na Fig. 1.28a, embora na queda livre a deflexão varie com a distância percorrida (i.e. com a velocidade instantânea), já que o movimento no referencial inercial é acelerado.

⁶²No equador, os versores cilíndricos coincidem com os versores esféricos, pois $\hat{r} = \hat{\rho}$ nesse plano.

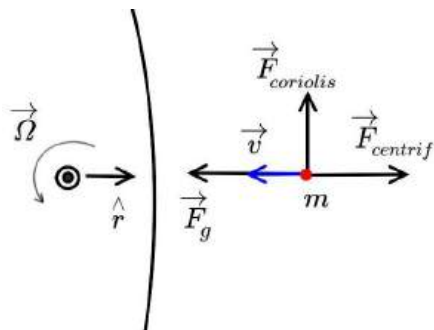


Figura 1.29: Partícula em queda livre na superfície da Terra em rotação. O plano do papel representa o plano do equador terrestre (i.e. o eixo da Terra atravessa o papel).

que a aceleração na queda livre se torna

$$g' = g - \Omega^2 R_{\oplus}. \quad (1.236)$$

Mas, na verdade, é isso que qualquer um chamaria de g na prática, e não g' ! Podemos então embutir o efeito da força centrífuga na ‘aceleração gravitacional efetiva’ observada localmente no equador. Fazemos por simplicidade de notação $g' \rightarrow g$ já sabendo, no entanto, que esse valor medido de g no equador advém do efeito *conjunto* da atração gravitacional e da força centrífuga. Usando essa expressão, a Eq. (1.234) se torna

$$\ddot{\vec{r}} = -g\hat{r} - 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}. \quad (1.237)$$

Ela nos indica que a partícula deve atingir o solo com pequeno desvio para o *leste*⁶³ em relação à vertical como consequência da força de Coriolis (Fig. 1.29).

Para escrever a equação de movimento nos versores cilíndricos, precisamos calcular as derivadas dos vetores posição nesse sistema de eixos. A Eq. (1.181) estabelece

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (1.238)$$

Com isso, o termo advindo da força de Coriolis na Eq. (1.237) se torna

$$\begin{aligned} -2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} &= -2\Omega\dot{r}\hat{z} \times \hat{r} - 2\Omega r\dot{\theta}\hat{z} \times \hat{\theta} \\ &= 2\Omega r\dot{\theta}\hat{r} - 2\Omega\dot{r}\hat{\theta}. \end{aligned} \quad (1.239)$$

Por outro lado, a aceleração em versores cilíndricos é obtida diferenciando-se a Eq. (1.238),

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}, \end{aligned} \quad (1.240)$$

em que se usaram as identidades $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ e $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$.

Igualando as componentes radial e tangencial da Eq. (1.237) com o uso em seu membro direito da Eq. (1.239) e em seu membro esquerdo da Eq. (1.240), obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= -g + 2\Omega r\dot{\theta}, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= -2\Omega\dot{r}. \end{cases} \quad (1.241)$$

⁶³Observemos que o sentido da força de Coriolis aponta nesse caso para leste porque a partícula se aproxima do eixo de rotação. Caso ela se afastasse, como ilustrado na Fig. 1.28, a deflexão seria para o oeste. Isso nos permite dizer que uma partícula arremessada para cima deve na volta atingir o solo sobre o mesmo ponto do qual partiu!

Na primeira equação, sabemos que o termo dominante deve ser a aceleração g , sendo todos os demais comparativamente desprezíveis (pois $r\dot{\theta}, \Omega r\dot{\theta} \ll g$). Com isso, estamos supondo que a força de Coriolis causa pequena deflexão no movimento de queda livre. A solução radial não é afetada e assume a forma familiar⁶⁴

$$\dot{r} \approx -gt \quad \Rightarrow \quad r(t) \approx r_0 - \frac{g}{2}t^2. \quad (1.242)$$

Na segunda equação, podemos usar o fato de que a variação da posição angular é desprezível face a Ω , i.e. $\dot{\theta} \ll \Omega$ para dispensar o segundo termo do membro esquerdo. Substituindo na equação o valor de \dot{r} obtido e fazendo a aproximação $r \approx R_{\oplus}$,

$$\ddot{\theta} \approx \frac{2g\Omega}{R_{\oplus}}t \quad \Rightarrow \quad \theta(t) \approx \frac{g\Omega}{3R_{\oplus}}t^3. \quad (1.243)$$

A deflexão observada se comporta como esperado, aumentando com a frequência angular Ω de rotação do referencial não inercial e diminuindo com a distância ao eixo de rotação (pois o efeito diferencial de ‘mudar de circunferência’ é maior próximo ao eixo). Além disso, ela varia com o cubo do tempo que a partícula permanece em queda, sendo portanto um efeito que cresce relativamente rápido com a altura de queda. De fato, utilizando o tempo de queda livre como $t \approx \sqrt{2h/g}$, a Eq. (1.243) se escreve em função de h como

$$y \approx \frac{\Omega}{3} \frac{(2h)^{3/2}}{\sqrt{g}}. \quad (1.244)$$

Podemos estimar facilmente a ordem de grandeza da deflexão $y = R_{\oplus}\theta_h$, em que θ_h é a deflexão angular após queda livre de altura h . Para um desses novos apartamentos tão espaçosos em prédios residenciais com 100 m de altura, uma partícula que caísse de seu topo se desviaria de ≈ 2 cm da vertical por conta da força de Coriolis. Se caísse do topo da construção mais alta do planeta ($h \approx 0,9$ km), o desvio seria de $\approx 0,6$ m. Um salto de paraquedas de uma altura típica de 4 km desviaria o aventureiro de 5 m apenas.

Exemplo: Pêndulo de Foucault. Por causa da rotação da Terra, mesmo o movimento de um pêndulo simples apresenta uma particularidade que ficou notória com o experimento de demonstração de Jean Foucault no séc. XIX. A ideia de Foucault se baseia no fato de que o plano de oscilação do pêndulo só permanece inalterado no referencial inercial: e a superfície da Terra, como bem sabemos, não é um deles! Logo, é possível observar o plano *aparente* de oscilação do pêndulo girar como consequência da rotação do planeta.

A situação se torna simples de entender para um pêndulo localizado sobre um dos polos terrestres, pois nesse caso a direção de \vec{g} permanece constante tanto no referencial \mathcal{S} quanto em $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}$ durante a rotação. Do referencial inercial observa-se ‘a Terra girando sob o pêndulo’, e por consistência o observador sobre a superfície da Terra precisa perceber uma *força fictícia tangencial* ao plano de oscilação do pêndulo (a força de Coriolis) a lhe causar giro contínuo com o mesmo período de rotação da Terra. O pêndulo de Foucault oferece evidência *local* sobre a rotação de um referencial não inercial, prescindindo o observador da análise do movimento das galáxias distantes.

Analisemos a atuação da força de Coriolis sobre o pêndulo. Sabemos a partir de experiência cotidiana que o movimento do pêndulo não apresenta qualquer anomalia em tempos curtos com relação ao período de rotação da Terra⁶⁵. O efeito inercial deve produzir, portanto, uma correção pequena no movimento, que se acumula e se faz visível somente após intervalo de tempo da ordem do dia terrestre. Para determinar esse

⁶⁴Com o detalhe de que g aqui significa a ‘aceleração gravitacional efetiva’ que leva em conta o efeito da força centrífuga local.

⁶⁵De fato, é muito difícil observar o movimento de um pêndulo por mais do que alguns minutos, já que forças de atrito,

intervalo, podemos considerar o movimento usual do pêndulo e investigar como a força de Coriolis induz *pequenos desvios* desse comportamento.

Em qualquer ponto da superfície da Terra, o movimento angular oscilatório em torno da vertical local pode ser decomposto em duas direções: na vertical local, representada pelo vetor radial esférico \hat{r} (i.e. o pêndulo sobe e desce), e em uma das duas direções pertencentes ao plano tangencial à superfície da Terra (i.e. o vai-e-vem do pêndulo). Lembremos-nos de que a força de Coriolis é produzida pela componente da velocidade *ortogonal* à $\vec{\Omega}$.

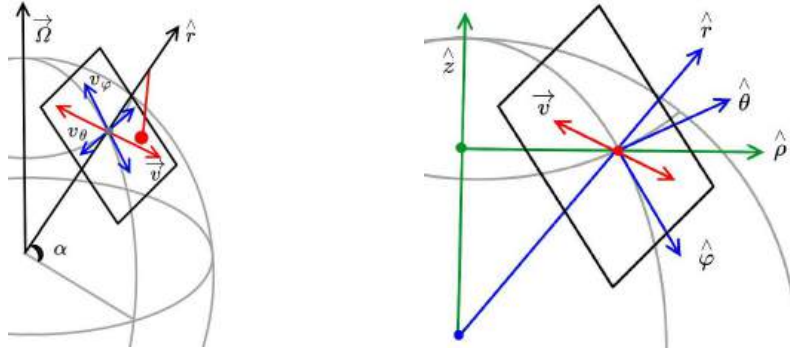


Figura 1.30: Esquerda: Decomposição do movimento de vai-e-vem de um pêndulo no plano tangencial à superfície da Terra. Direita: Definição dos versores esféricos e cilíndricos utilizados na descrição do problema (apenas o versor $\hat{\rho}$ é desenhado na tradição de perspectiva do Egito Antigo).

Em primeiro lugar, notemos que a velocidade radial v_r (associada ao sobe-e-desce do pêndulo na direção vertical local) pode ser tornada desprezível em relação à velocidade tangencial se a amplitude de oscilação for escolhida suficientemente pequena. De fato, é simples mostrar que v_r é nula em primeira ordem na amplitude angular da oscilação, e por isso não a consideramos relevante para o efeito divisado por Foucault.

Já o movimento tangencial pode ocorrer em duas direções diferentes (Fig. 1.30). Nesse caso, devemos ter dois cuidados essenciais: (i) encontrar a componente da velocidade do pêndulo que efetivamente *produz* a força de Coriolis e (ii) determinar a componente da força de Coriolis capaz de *girar* o plano de oscilação do pêndulo.

Por concretude, denominemos as direções tangenciais à esfera pelos versores esféricos $\hat{\varphi}$ e $\hat{\theta}$, significando respectivamente as direções seguidas pelas linhas de ‘longitude’ constante e ‘latitude’ constante na superfície da Terra, assumida esférica (Fig.1.30, direita). O pêndulo se encontra na latitude α .

Conforme vemos na Fig. 1.30, a velocidade tangencial possui componente v_θ totalmente ortogonal à $\vec{\Omega}$ e componente v_φ com projeção não nula na velocidade angular. São essas duas projeções ortogonais a $\vec{\Omega}$ que produzem a força de Coriolis, já que tendem a afastar ou aproximar (diferencialmente) o pêndulo do eixo de rotação. Essa identificação nos ajuda a resolver o problema (i).

Investiguemos a situação quantitativamente. A componente v_φ da velocidade na direção $\hat{\varphi}$ possui com-

dependentes principalmente da velocidade do pêndulo, tendem a dar fim ao movimento. A ‘sacada’ de Foucault foi construir um pêndulo longo o suficiente (i.e. longo período e baixa velocidade) para que efeitos dissipativos se tornassem pequenos num intervalo de tempo da ordem do dia terrestre. Sua demonstração mais notória se baseou num pêndulo com comprimento aproximado de 70 m preso à cúpula do panteão de Paris.

ponente paralela a $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$, que nada faz. Apenas a componente ortogonal a essa, dada por $v_\varphi \sin \alpha$, produz força de Coriolis na direção $\hat{\theta}$, pois

$$\vec{\mathcal{F}}_\theta = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_\varphi = -2m\Omega v_\varphi \hat{z} \times \hat{\varphi} = -2m\Omega v_\varphi \sin \alpha \hat{\theta}. \quad (1.245)$$

Já a componente $\hat{\theta}$ da velocidade⁶⁶, sempre ortogonal a $\vec{\Omega}$, produz força de Coriolis

$$\vec{\mathcal{F}}_\rho = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_\theta = -2m\Omega v_\theta \hat{z} \times \hat{\theta} = 2m\Omega v_\theta \hat{\rho}, \quad (1.246)$$

em que $\hat{\rho}$ é o vetor radial cilíndrico. No entanto, essa componente radial \hat{r} da força de Coriolis se encontra *paralela* ao plano de oscilação: seu efeito é diminuir o valor efetivo de \vec{g} , alterando ligeiramente a frequência de oscilação do pêndulo, mas não seu plano de oscilação. Apenas a projeção de $\vec{\mathcal{F}}_\varphi$ sobre o plano tangente à esfera atua no sentido de girar o plano de oscilação. Ela vale, pela geometria,

$$\vec{\mathcal{F}}_\varphi = \mathcal{F}_\rho \sin \alpha \hat{\varphi} = 2m\Omega v_\theta \sin \alpha \hat{\varphi}. \quad (1.247)$$

Isso resolve o problema (ii).

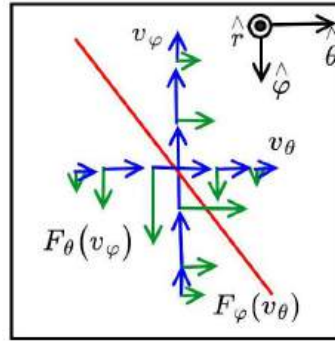


Figura 1.31: Efeito da força de Coriolis sobre o movimento do pêndulo no plano tangencial à superfície da Terra.

Portanto, a força fictícia $\vec{\mathcal{F}}_{giro}$ a girar o plano do pêndulo, dada pela projeção da força de Coriolis tangencial à superfície da Terra (por sua vez criada por v_θ e por uma componente de v_φ), vale

$$\vec{\mathcal{F}}_{giro} = \vec{\mathcal{F}}_\theta + \vec{\mathcal{F}}_\varphi = 2m\Omega \sin \alpha \left(-v_\varphi \hat{\theta} + v_\theta \hat{\varphi} \right) = -2m\Omega \sin \alpha \hat{r} \times \vec{v}. \quad (1.248)$$

A Fig. 1.31 ilustra o efeito dessa força para vários instantes da trajetória do pêndulo (linha vermelha). As projeções v_θ e v_φ da velocidade são mostradas em azul, enquanto a força de Coriolis instantânea aparece em verde. A direção e o sentido da força seguem as Eqs. (1.245) e (1.247).

Usando a segunda lei de Newton, podemos escrever $\vec{\mathcal{F}}_{giro} = m\dot{\vec{v}}$ para obter a equação que rege o movimento tangencial em escalas de tempo comparáveis ao período de rotação da Terra (i.e. muito mais lentas do que o tempo típico $\tau = 2\pi/\omega$ da oscilação) como

$$\dot{\vec{v}} = -2\Omega \sin \alpha \hat{r} \times \vec{v}. \quad (1.249)$$

Essa equação dita que a variação lenta do vetor velocidade é ortogonal tanto ao próprio vetor quanto à direção \hat{r} , mostrando que o vetor ‘gira’ no espaço sem alterar sua magnitude, caracterizando assim um

⁶⁶O versor esférico $\hat{\theta}$ é também o vetor azimutal cilíndrico $\hat{\theta}$.

movimento de *precessão* em torno da vertical local \hat{r} [como na Eq. (1.221)]. O sentido do movimento é *anti-horário* no hemisfério sul (pois $\alpha < 0$ nesse caso) e *horário* no hemisfério norte.

A *velocidade angular de precessão* pode ser calculada explicitamente considerando-se o movimento em maior detalhe, no qual se vê que a força de Coriolis atua no sentido de causar pequeno desvio do plano de oscilação a cada *meio período* (i.e. o intervalo de tempo em que a velocidade tangencial permanece com o mesmo sinal).

Um observador local define a posição de equilíbrio do pêndulo em $x = 0$ e $y = 0$ no plano tangente à superfície da Terra, eixo x crescente com $\hat{\varphi}$ e eixo y crescente com $\hat{\theta}$ (Fig. 1.30). Vamos considerar por concretude a trajetória de um pêndulo inicialmente oscilando na direção $\hat{\varphi}$, i.e. o pêndulo inicia sua oscilação no plano ortogonal à superfície da Terra definido pelo eixo x no plano tangente. Sua trajetória é inicialmente descrita por

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (1.250)$$

em que A é sua amplitude de oscilação e ω , sua frequência. Como vimos, a força inercial é produzida pela velocidade do pêndulo, que vale

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -A\omega \sin(\omega t), \quad (1.251)$$

e possui a direção \hat{y} ,

$$F_y(t) = -2m\Omega \sin \alpha v_x(t). \quad (1.252)$$

Consideremos o movimento do pêndulo no meio período compreendido entre os instantes $t = 0$ e $\tau/2 = \pi/\omega$, conforme ilustrado na Fig. 1.32. O pêndulo inicia seu movimento com deslocamento máximo $x(0) = A$ e se move até o extremo oposto em $x(\tau/2) = -A$. Nesse ínterim, sua velocidade v_x parte do repouso até sua magnitude máxima e de volta ao repouso, passando apenas por valores *negativos*, de forma que a força de Coriolis atua o tempo todo no mesmo sentido tangencial ao plano de oscilação. Seu efeito composto nesse intervalo se evidencia no movimento na direção y ,

$$\ddot{y}(t) = -2\Omega \sin \alpha v_x(t) = 2A\Omega\omega \sin \alpha \sin(\omega t), \quad (1.253)$$

relação que pode ser integrada diretamente para fornecer

$$v_y(t) = -2A\Omega \sin \alpha \cos(\omega t) + 2A\Omega \sin \alpha. \quad (1.254)$$

A constante de integração (segundo termo do membro direito) foi escolhida para satisfazer a condição inicial de repouso na direção y , i.e. $v_y(0) = 0$. Mais uma integração direta nos fornece o deslocamento y como

$$y(t) = -2A \frac{\Omega \sin \alpha}{\omega} \sin(\omega t) + 2A\Omega \sin \alpha t, \quad (1.255)$$

em que a constante de integração é nula, pois $y(0) = 0$. Portanto, após meio período, o desvio tangencial do plano inicial de oscilação vale

$$y(\tau/2) = A\Omega \sin \alpha \tau. \quad (1.256)$$

Esse resultado estabelece que o plano de oscilação gira, a cada semiperíodo, pelo ângulo total

$$\phi = \arctan \frac{y(\tau/2) - y(0)}{x(\tau/2) - x(0)} = -\arctan \left(\frac{\Omega \sin \alpha \tau}{2} \right) = -\arctan \left(\pi \frac{\Omega \sin \alpha}{\omega} \right) \stackrel{\omega \gg \Omega}{\approx} -\pi \frac{\Omega \sin \alpha}{\omega}. \quad (1.257)$$

A Fig. 1.32 ilustra em detalhe a atuação da força de Coriolis (verde) conforme a velocidade (azul) do pêndulo oscila no semiperíodo. A trajetória da partícula (vermelho) se desvia na direção tangencial ao plano original de oscilação, pelo ângulo ϕ . O sinal negativo de ϕ indica que o sentido de rotação é horário conforme percebido do hemisfério norte.

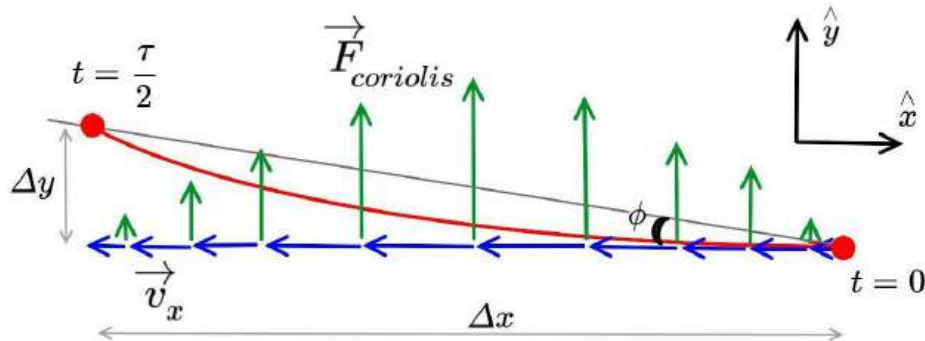


Figura 1.32: Movimento do pêndulo projetado no plano tangente à superfície da Terra. Em meio período, o pêndulo parte do deslocamento máximo no instante inicial e atinge o ponto de deslocamento mínimo. Crucialmente, a força de Coriolis mantém mesmo sentido durante todo o intervalo considerado, e a trajetória acumula desvios diferenciais.

O desvio calculado acima vale, como mostra a Eq. (1.249), para *qualquer* plano de oscilação. Além disso, o meio período seguinte vê o sentido da velocidade se inverter, o que inverte o sentido da força de Coriolis e com isso o deslocamento y , mantendo o *mesmo* ângulo ϕ de desvio (ver figura). O número de oscilações necessárias para que o plano dê uma volta completa em torno da vertical vale $N = 2\pi/(2\phi) \approx \omega/(\Omega \sin \alpha)$. O tempo necessário para que isso ocorra é $T_{prec} = \tau N$, o que resulta na frequência de precessão

$$\Omega_{prec} = \frac{2\pi}{T_{prec}} = \Omega \sin \alpha. \quad (1.258)$$

Essa expressão mostra que a precessão do plano de oscilação de um pêndulo construído próximo a um dos polos da Terra ($\alpha = \pm\pi/2$) deve fornecer uma medida *local* do período de rotação da Terra. Em qualquer outra latitude, a precessão ocorre mais lentamente do que isso. O pêndulo de Foucault fornece uma demonstração visual muito clara da rotação do planeta (isto é, ao menos em latitudes não muito próximas ao equador, onde o período de precessão se torna muito longo para produzir efeito observável⁶⁷).

Resta por fim apenas entender o que ocorre quando o pêndulo oscila exatamente no plano do equador terrestre. Nesse caso, as duas componentes tangenciais da velocidade não são capazes de produzir rotação do plano de oscilação do pêndulo (mas atuam no sentido de alterar o valor local de \vec{g}), o que nos obriga a considerar o efeito residual da força de Coriolis produzida pela pequena componente vertical de seu movimento.

⁶⁷Na prática, visitantes em museus de ciência esperam observar *alguma* mudança no plano de oscilação do pêndulo durante o tempo de visita (algumas horas). A pessoa chega no museu, olha o pêndulo, volta ao final da visita e verifica se a Terra ainda continua girando mesmo. A demonstração muitas vezes envolve a colocação de pedras de dominó no caminho do pêndulo, tal que o mesmo as vá derrubando conforme seu plano de oscilação gira. A Eq. (1.258) nos permite estimar em quantas partes o círculo centrado no pêndulo precisaria ser dividido para que os visitantes vissem ao menos 1 dominó ser derrubado durante sua visita. Em Recife, localizada na latitude de 8° , o período de precessão seria ≈ 7 vezes maior do que o período de rotação da Terra, e portanto o plano de oscilação do pêndulo giraria apenas 1° por hora de visita. Algo como 360 dominós (1 por grau) já daria aos visitantes uma experiência interessante!

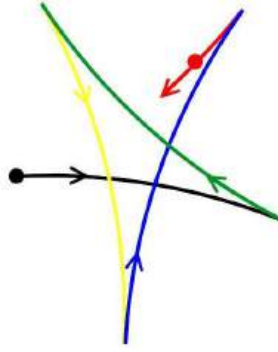


Figura 1.33: Padrão de ‘estrela’ desenhado pelo pêndulo de Foucault conforme seu plano de oscilação gira no referencial não inercial. Cada arco representa um meio período de oscilação. As deflexões da trajetória foram altamente exageradas (embora menos do que os rumores sobre a morte de Mark Twain) com o intuito de facilitar a visualização.

O fato a notar aqui é que essa componente troca de sinal sempre que o pêndulo se encontra na posição de equilíbrio com máxima velocidade tangencial (i.e. na metade do semiperíodo, ou a cada quarto de período). Por conta disso, a força de Coriolis tenderia a girar o plano de oscilação num sentido durante a descida do pêndulo (primeiro quarto do período) e no sentido oposto durante a subida subsequente (segundo quarto do período), tornando *nulo* o desvio de plano já a cada semiperíodo. Em outras palavras, a velocidade radial do pêndulo oscila com o dobro da frequência da velocidade tangencial, matando qualquer efeito cumulativo. Sem isso, o plano de oscilação do pêndulo não gira de forma visível, mas oscila de maneira imperceptível, característica pouco desejável para um experimento cujo único valor é justamente visual!

O espaço absoluto newtoniano

O experimento do balde girante ou mesmo o pêndulo de Foucault mostram que um observador não inercial deve testemunhar *localmente* efeitos de forças fictícias capazes de evidenciar a rotação de seu referencial. Mas em relação a que estaria esse observador girando? Para Newton, a resposta seria o *espaço absoluto*, como se existisse de fato um ‘estado’ privilegiado de movimento de ‘não rotação’ no universo (assumido sem explicação como o referencial em que as galáxias distantes permanecem ‘fixas’).

Ernst Mach, cujas ideias iriam influenciar a relatividade geral de Einstein, opunha-se ao conceito de espaço absoluto newtoniano defendendo que todo movimento é *relativo*: em sua opinião, a superfície do líquido também se curvaria se, em vez de girarmos o balde, pudéssemos girar as estrelas e galáxias distantes em volta da água! A relatividade geral de fato contempla preceitos gerais imaginados por Mach, tal como o efeito de ‘arraste de referencial’ (do inglês, *frame-dragging*) causado por um corpo massivo girante⁶⁸.

Todavia, de forma mais geral, a ideia de que a *inércia* de uma partícula deve depender da distribuição e do movimento da matéria *no universo* conforme percebidos na posição da partícula ainda não possui evidência experimental ou conexão teórica formal, nem mesmo qualquer ‘dica’ de que tipo de interação seria responsável por isso (chute viajante: uma teoria quantizada da gravidade?). No entanto, caso existisse essa

⁶⁸Esse efeito foi comprovado experimentalmente pela sonda ‘Gravity probe B’ [Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011)] por meio de giroscópios extremamente precisos (embora menos precisos do que o planejado) enviados à órbita terrestre. A Terra, de fato, ‘arrasta o espaço’ conforme executa sua rotação.

relação, ela certamente precisaria ser escalar, para não depender da distribuição angular de matéria distante. Caso contrário, o fato de a distribuição de matéria no universo apresentar fortes flutuações com a direção de observação (as galáxias se distribuem em superaglomerados nas ‘superfícies’ de enormes ‘bolhas’ de vazio) implicaria que a massa inercial de uma partícula seria dependente da direção espacial, o que contradiz as evidências experimentais disponíveis.

Até hoje a inércia das partículas massivas é uma propriedade *ad hoc* introduzida pela simples necessidade de lidar com o fato de que partículas diferentes podem se mover distintamente ainda que sob efeito da mesma interação (em tempo: a relatividade especial revela outras conexões interessantes, mas que não explicam a origem da massa de repouso ou, de forma mais geral, da inércia associada à energia). À essa propriedade intrínseca chamamos ‘massa’. Portanto, a inércia está intimamente ligada ao *movimento* no espaço e no tempo. A ‘origem’ física da massa inercial como resultante de algum tipo de interação, como parece ter sido sugerido por Mach, permanece ainda hoje sem explicação. Talvez uma explicação mais profunda da pergunta igualmente espinhosa ‘o que é o *tempo*?’ pudesse ajudar a entender melhor a inércia. Fica para as próximas gerações de físicos pensarem novas conexões e experimentos capazes de iluminar esses temas tão fundamentais.

1.5 Energia e campos de forças conservativos

Vimos que as leis do movimento de Newton permitem determinar a trajetória de qualquer objeto, entendida como o ‘estado’ dado pelo par de vetores posição e momento como função do parâmetro tempo, através de uma equação diferencial a unir aceleração a uma lei de força que precisa ser conhecida de forma independente. Vimos também que as forças newtonianas precisam respeitar certas condições físicas, tal como a reciprocidade da ‘ação e reação’, como consequência do papel central assumido pelo momento na mecânica newtoniana. Em particular, não mencionamos o conceito de energia em lugar algum do curso até este instante, e por um bom motivo: a mecânica newtoniana *prescinde* do conceito de energia.

Então se a dinâmica está resolvida, para que buscar conceitos aparentemente redundantes, como energia, para reexplicar tudo de outro jeito? Existem várias respostas para isso. A mais geral defende que olhar situações que se julgam conhecidas por ângulos diferentes pode revelar aspectos inesperados do objeto sob estudo e até mesmo conexões interessantes com conceitos que antes se pensavam independentes. No outro extremo, a resposta mais pragmática diria que hoje sabemos ser a energia um conceito mais fundamental que o momento no sentido de permitir entender muito mais do que apenas o movimento. Entre essas duas respostas, podemos simplesmente argumentar que a energia como ferramenta conceitual nos fornece novas técnicas para a compreensão da física, auxiliando-nos também na busca por respostas matemáticas.

Nosso roteiro aqui será reescrever a mecânica newtoniana em torno do conceito de energia para (até o fim do curso) mostrarmos que força não é um conceito fundamental. Isso nos permitirá simplificar o formalismo teórico da mecânica, tornando-o mais poderoso, e ao mesmo tempo conectá-la a outras áreas da física.

O motivo porque Newton teria escolhido o momento como central à dinâmica, no lugar da energia, provavelmente tem relação com a complexidade de se entender qualquer coisa pela primeira vez. Newton sabia que algumas forças conhecidas empiricamente, tal como o atrito, não respeitam nenhuma lei de conservação senão a do momento numa interação isolada, talvez fazendo parecer o conceito de momento mais geral do que

o conceito de energia. Hoje sabemos que forças como o atrito, apesar de bastante complexas por envolverem muitas partículas, se baseiam em interações fundamentais que respeitam também a conservação da energia.

Na verdade, o fato de a energia não precisar ficar presa à forma mecânica, mas poder assumir muitas outras manifestações em graus de liberdade internos dos corpos, é o primeiro testemunho de sua generalidade na física. De fato, mesmo nesse exemplo simples envolvendo a força de atrito, o conceito de energia permite conectar a mecânica à termodinâmica, pois o atrito atua como fonte de calor ao aquecer as superfícies dos objetos em contato ao custo de energia mecânica, efeito fora do escopo da mecânica newtoniana. Mas essa conexão só seria demonstrada por James Joule dois séculos depois de Newton.

De fato, podemos iniciar nosso estudo da energia tomando como base propriedades da única interação fundamental conhecida à época de Newton, a gravidade, e ver como ela nos permite avançar nessa nova forma de sistematizar a dinâmica.

1.5.1 Forças conservativas

O campo gravitacional uniforme percebido na superfície da Terra possui a propriedade interessante de que a velocidade vertical de um corpo em movimento só depende de sua velocidade inicial e da distância percorrida, podendo eliminar-se o *tempo* na descrição do movimento.

Galileu foi possivelmente o primeiro a perceber isso em seus estudos experimentais do pêndulo simples na virada entre os séculos XVI e XVII. Algumas de suas conclusões mais importantes ditam que o pêndulo solto de uma certa altura retorna aproximadamente à mesma altura após meio período, e que o período de oscilação não depende da amplitude, indicando que a velocidade máxima do pêndulo deve aumentar com a altura de soltura de forma a compensar a maior distância (arco de circunferência) a ser percorrida.

Para relacionarmos a força a uma propriedade da interação sem fazer referência ao tempo, é preciso manipular as equações de Newton reconhecendo que a força depende do tempo através da derivada temporal de outro objeto. Para eliminar o tempo, é necessário multiplicar a força por ele. Usando a segunda lei de Newton, o produto $\vec{F} dt$ fornece

$$\vec{F} dt = m \frac{d}{dt} \vec{v} dt, \quad (1.259)$$

o que nos indica considerar o produto escalar com o vetor velocidade para completar a derivada, na forma

$$\vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d}{dt} \vec{v} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt. \quad (1.260)$$

Reconhecendo no membro esquerdo o deslocamento diferencial da partícula como $\vec{v} dt = d\vec{r}$, obtemos a relação

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right), \quad (1.261)$$

ou, na forma integral,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2, \quad (1.262)$$

em que a curva C se inicia na posição \vec{r}_0 na qual a partícula possui velocidade \vec{v}_0 e termina na posição \vec{r} correspondente à velocidade \vec{v} .

A equação acima por enquanto estabelece apenas que a variação da velocidade da partícula pode ser obtida pelo cálculo da integral de linha da força na trajetória da partícula, o que pode até ser uma ideia interessante embora não muito útil: se precisarmos resolver a equação diferencial de movimento para primeiro encontrarmos a trajetória para só então podermos calcular a integral de linha que determina a variação da velocidade da partícula . . . que já é determinada pela trajetória em primeiro lugar . . . bem, o procedimento não faria muito sentido.

Sua abrangência aparece justamente para forças cuja integral de linha *independe* da curva C escolhida, sendo determinada apenas pelos *pontos inicial e final* da curva. A classe de forças com essa característica é tão especial que recebe nome próprio: *forças conservativas*. Podemos nesse caso denotar a integral como

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \quad (1.263)$$

para explicitar o fato de que só depende dos pontos inicial \vec{r}_1 e final \vec{r}_2 da trajetória.

Segue como consequência direta dessa propriedade o fato de que forças conservativas possuem integral de linha nula em *qualquer* curva fechada C ,

$$\oint_C \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (1.264)$$

pois o ponto inicial e final coincidem, uma propriedade verdadeiramente fascinante. Essa identidade nos permite invocar o teorema de Stokes para relacionar a integral de linha sobre C a um fluxo sobre uma superfície S qualquer cujo bordo seja C , na forma

$$\oint_C \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{s} = 0, \quad (1.265)$$

em que o versor normal $d\vec{s}$ à superfície tem sentido dado pela circulação da curva orientada C . Assim, a condição para que um campo de forças respeite essa identidade para qualquer curva C ou superfície S , i.e. para que seja conservativo, é

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_{cons} = 0. \quad (1.266)$$

Essa condição nos diz algo sobre a geometria genérica do campo de forças $\vec{F}(\vec{r})$. Para que seja válida automaticamente, basta utilizarmos a propriedade de que o rotacional do gradiente de qualquer função escalar $U(\vec{r})$ é nulo, i.e.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} U(\vec{r})) = 0, \quad (1.267)$$

para escrever todo campo de forças conservativo na forma

$$\vec{F}_{cons}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}). \quad (1.268)$$

A função escalar $U(\vec{r})$ recebe o nome de *energia potencial*. Como seu gradiente envolve derivadas da posição, a energia potencial está definida a menos de uma constante (i.e. funções $U(\vec{r})$ e $U'(\vec{r})$ satisfazendo $U(\vec{r}) - U'(\vec{r}) = cte$ produzem o *mesmo* campo de forças).

A função $U(\vec{r})$ pode ser determinada substituindo-se a definição da Eq. (1.268) na relação original da Eq. (1.265), de onde segue por integração direta que

$$U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r}. \quad (1.269)$$

O negativo do membro direito dessa equação recebe o nome de *trabalho*⁶⁹, sendo definido como

$$W_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r}. \quad (1.270)$$

A energia potencial é, portanto, o negativo do trabalho realizado pela força para deslocar a partícula da posição \vec{r}_1 à posição \vec{r}_2 .

O gradiente de uma função aponta a direção e o sentido no espaço nos quais ocorre a *máxima variação* local da função. Forças, dadas pelo negativo do gradiente de $U(\vec{r})$, apontam na direção de *máximo decréscimo* da energia potencial nas vizinhanças de \vec{r} . Isso nos indica que em cada ponto do espaço podemos desenhar um plano infinitesimal *ortogonal* à direção do gradiente (i.e. da força) no qual a partícula se movimenta sem que a interação realize trabalho. Se juntarmos esses planos infinitesimais para formar uma superfície contínua extensa, encontramos as chamadas *equipotenciais*, superfícies em que a energia potencial se mantém constante, i.e. $U(\vec{r}) = U_0 = cte$. Como a força depende da variação da energia potencial, a componente da força tangencial à superfície equipotencial é nula por construção. Mover partículas sobre essas superfícies é ‘gratuito’ em termos de custos energéticos desde que a *magnitude* da velocidade permaneça constante.

Além disso, como consequência da linearidade na combinação de forças, as funções energia potencial associadas a interações independentes $U_1(\vec{r})$ e $U_2(\vec{r})$ se sobrepõem de forma *linear*, de maneira que a energia potencial total a determinar o movimento da partícula de interesse é

$$U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r}). \quad (1.271)$$

Segue daí que a interação de uma partícula com um corpo extenso pode ser determinada pela soma das interações da partícula com cada pedaço infinitesimal do corpo.

A Eq. (1.268) traz enorme simplificação no tratamento do movimento: ela substitui uma quantidade vetorial (força), cuja determinação requer conhecer *três* funções independentes (componentes espaciais) da posição, por uma função escalar, determinada por *uma única* função espacial. A energia potencial é especialmente útil nos casos em que se precisa combinar as interações de uma partícula com várias outras, pois determinar a energia total envolve apenas a soma de funções escalares, em contraposição às somas vetoriais envolvidas na superposição de forças. Apesar dessa ideia parecer restritiva por se aplicar ‘apenas’ a campos de forças conservativos, a realidade é que todas as interações fundamentais possuem essa característica.

Podemos dizer então que a introdução da energia potencial torna três vezes mais simples resolver o movimento? Bem, não tão rápido! A trajetória de qualquer partícula é ainda definida pelas mesmas grandezas dinâmicas de ‘estado’: um par escalar posição e momento para cada direção espacial (i.e. dois vetores). Por enquanto, a introdução da energia potencial nos permite descrever matematicamente as forças conservativas de forma mais compacta; todavia, resolver as equações do movimento de Newton ainda envolve o cálculo do gradiente da energia potencial.

⁶⁹ Ao contrário da energia potencial, a definição de trabalho pode fazer sentido mesmo para campos de forças não conservativos, caso em que W_C (o trabalho realizado para levar a partícula sobre a curva C) deve ser calculado pela integral de linha da força sobre a curva C especificada, qualquer que seja ela. Notemos que C não precisa nem mesmo ser a trajetória seguida pela partícula sob ação única do campo de forças estudado, mas uma trajetória imposta *ad hoc* por condições de vínculo, tal como ocorre e.g. com um carrinho preso à montanha russa – o trabalho do campo gravitacional (ou de qualquer força, como dissemos, tal como o atrito) pode ser calculado conhecendo-se a função horária $s(t)$ da partícula sobre a curva.

Mas isso pode possivelmente ser melhorado se conseguirmos interpretar as leis newtonianas numa forma que coloque a *energia* no centro da dinâmica. Com o que fizemos até aqui, já podemos colocar a dinâmica em palavras diferentes com esses novos conceitos: a trajetória de uma partícula sob ação de força conservativa é determinada pela *variação local* de uma função escalar, a energia potencial, sendo que a partícula se movimenta como se ‘buscasse’ regiões de *menor* energia potencial – consequência do sinal negativo escolhido na Eq. (1.268).

1.5.2 Energia potencial gravitacional

A primeira interação conservativa conhecida foi a gravitacional. Para calcular sua função energia potencial, utilizamos a Eq. (1.269) com a expressão da força gravitacional de Newton para encontrar

$$U_g(\vec{r}_2) - U_g(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(-G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \right) \cdot d\vec{r}, \quad (1.272)$$

em que m e M são as massas das partículas em interação e a origem do sistema de coordenadas foi escolhida sobre a partícula de massa M .

A simetria esférica da força nos indica denotar o caminho C de integração em versores esféricos, seguindo o vetor diferencial $d\vec{r} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta}$ para ir da posição \vec{r}_1 até \vec{r}_2 . Nesse caso, o produto escalar que aparece na integral resulta em $\hat{r} \cdot d\vec{r} = dr$, mostrando que o caminho angular *não contribui* para a curva (ou seja, as equipotenciais devem ser obtidas por deslocamentos puramente angulares). Assim, podemos escolher a curva C como partindo de qualquer ponto na esfera à qual pertence \vec{r}_1 e terminando em qualquer ponto da esfera à qual pertence \vec{r}_2 . A integral resulta em

$$U_g(r_2) - U_g(r_1) = GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -GmM \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = -\frac{GmM}{r_2} + \frac{GmM}{r_1}, \quad (1.273)$$

uma expressão de fato esfericamente simétrica, como a força.

Como apenas diferenças de energia potencial são relevantes, é comum escolher o valor nulo do potencial no infinito. Essa escolha decorre naturalmente do fato de que a magnitude da força de interação gravitacional se torna assintoticamente nula no infinito, significando que as partículas ‘deixam de interagir’⁷⁰. Esse valor assintótico da energia de interação (força nula) é feito nulo por simplicidade e por simbolismo. Isso significa que fazemos $U_g(r_1) = 0$ quando a distância da qual a partícula m parte for $r_1 \rightarrow \infty$ para obter a expressão genérica

$$U_g(r) = -\frac{GmM}{r}. \quad (1.274)$$

O sinal negativo da energia potencial gravitacional advém da convenção de sinais escolhida para trabalho, entendido como energia cinética liberada pela força, e energia potencial, entendida como o trabalho *externo* hipotético que precisaria ser realizado contra o campo de forças para se transitar entre configurações e que, uma vez realizado, fica ‘armazenado’ no próprio campo com o *potencial* de ser transformado em energia cinética pela ação livre da força.

⁷⁰Na verdade, a interação gravitacional decai de forma ‘lenta’ com a distância, significando que se espalha por praticamente todo o espaço. Com efeito, a gravidade molda o universo nas maiores escalas existentes (e.g. escala do universo!), e por isso essa interação está sempre presente. O que podemos dizer com propriedade é que existe na prática uma distância em que a força gravitacional se torna tão fraca que o movimento do corpo passa a ser determinado por outras influências mais locais.

Assim, o sinal negativo indica fisicamente que é preciso *fornecer* energia (aumentando a energia em potencial do sistema) para *afastar* as partículas (i.e. $U_g(r_2) - U_g(r_1) > 0$ para $r_2 > r_1$) ou, de forma análoga, que a força gravitacional *produz* energia cinética [Eq. (1.263)] quando a distância entre as partículas *diminui* (i.e. $T_2 - T_1 = U_g(r_1) - U_g(r_2) > 0$ se $r_2 < r_1$).

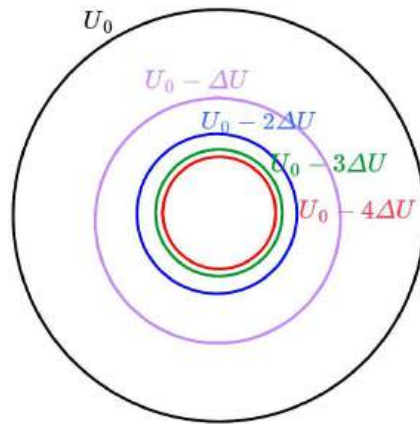


Figura 1.34: Curvas equipotenciais da interação gravitacional num plano de corte que contém o centro de forças. A dependência r^{-1} da energia potencial no indica que essas curvas se tornam mais próximas umas das outras na origem para a mesma variação ΔU de energia.

As superfícies equipotenciais da energia de interação gravitacional são *esferas* centradas na partícula a produzir a força atrativa, uma vez que

$$U_g(r) = U_0 = cte \quad \Rightarrow \quad r = r_0 = cte, \quad \text{em que } r_0 = -\frac{U_0}{GmM}, \quad U_0 < 0. \quad (1.275)$$

Esse fato é ilustrado na Fig. 1.34. Uma partícula mantém sua energia potencial constante ao se mover sobre uma dessas esferas, e componentes de forças externas agindo tangencialmente a essas esferas não realizam trabalho sobre o campo gravitacional.

Por causa da dependência da energia potencial com r^{-1} , superfícies numa sequência com diferença constante ΔU de potencial se encontram cada vez mais próximas umas das outras conforme nos aproximamos da origem, indicando que a magnitude da força, sempre ortogonal às superfícies equipotenciais, aumenta com o decréscimo da distância. Podemos dizer que a densidade de equipotenciais equidistantes em energia indica a magnitude da força.

1.5.3 Conservação da energia

Juntando as Eqs. (1.263) e (1.269), surge uma quantidade naturalmente *constante* no movimento de uma partícula sob ação de forças conservativas, pois a relação

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 = cte \quad (1.276)$$

vale para quaisquer pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 do espaço (utilizamos a notação mais simples $U(\vec{r}_1) = U_1$ etc). A nova quantidade K do movimento aí definida é a *energia cinética*,

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.277)$$

cuja expressão se originou diretamente da segunda lei de Newton e advém do *movimento* (ou inércia) da partícula. Assim como a energia potencial, a energia cinética também é definida a menos de uma constante aditiva, pois o princípio de relatividade estabelece que referenciais inerciais com velocidade relativa diferente de zero devem observar a mesma forma para as leis do movimento.

A Eq. (1.276) se escreve de forma sucinta como

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}), \quad (1.278)$$

em que E é a *energia mecânica* da partícula. A energia mecânica é também definida a menos de uma constante arbitrária, pois tanto a energia cinética quanto a energia potencial possuem essa propriedade. Em particular, ela pode assumir valores negativos, assim como a energia potencial (já a energia cinética só pode ser positiva, por envolver sempre o quadrado da magnitude da velocidade, independentemente do referencial escolhido).

Essa simetria do movimento – a insensibilidade a constantes aditivas na energia – nos indica que o mesmo só deve depender de *diferenças de energia* (notemos que a força, a grandeza a causar o movimento segundo Newton, aparece justamente como consequência da *variação local* da energia potencial, em acordo com esse princípio), e não de seu valor absoluto. O estudo do movimento através da energia nos oferece maneira de entender comportamentos *globais* da dinâmica, como veremos a seguir.

1.5.4 Movimento unidimensional em campo conservativo

O movimento em uma dimensão requer conhecer apenas uma função escalar da posição tanto no caso de utilizarmos forças (pois uma única componente se faz necessária) quanto ao empregarmos a energia potencial. Esse caso específico de movimento deve ser simples, portanto, de se colocar em termos da energia, podendo nos auxiliar na tarefa mais geral de tratar o movimento no espaço tridimensional.

A Eq. (1.278) nos permite escrever implicitamente a equação diferencial para o movimento na forma

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad \Rightarrow \quad v = \pm \sqrt{2 \frac{E - U(x)}{m}}. \quad (1.279)$$

Essa relação estabelece que a magnitude do *momento* em cada *posição* (as duas variáveis dinâmicas de interesse) é determinada pela diferença entre a energia mecânica da partícula (como vimos, uma constante a definir o movimento de forma global) e a energia potencial na posição da partícula.

Delimitação do movimento

A Eq. (1.279) estabelece características globais do movimento. Por exemplo, a região espacial *acessível* à partícula deve ser aquela em que

$$U(x) \leq E, \quad (1.280)$$

pois só nesse caso a velocidade tem solução real. Essa região será limitada se houver pontos em que a energia potencial se iguala à energia mecânica. Esses *pontos de inflexão* x_i , satisfazendo

$$U(x_i) = E, \quad (1.281)$$

nos permitem delimitar espacialmente a trajetória da partícula, quando for o caso. A energia potencial também nos permite determinar os pontos de velocidade máxima da trajetória como aqueles em que a energia potencial atinge seu mínimo. Também é possível determinar as regiões em que a velocidade aumenta, diminui, ou permanece constante.

Estabilidade de pontos de equilíbrio

Em especial, pontos de energia potencial constante em primeira ordem representam máximos ou mínimos locais de $U(x)$. Como a força é dada por $F(x) = -\frac{d}{dx}U(x)$, a força agindo sobre a partícula é nula nesses pontos. Se a partícula se encontrar numa dessas posições com velocidade nula, ela idealmente tenderia a lá permanecer.

Na realidade, a *estabilidade* da configuração precisa ser testada com relação a pequenos deslocamentos, pois todo sistema físico está sujeito a ruído (e.g. térmico) e por isso não pode permanecer rigorosamente parado numa posição matematicamente pontual. Essas perturbações inexoráveis poderão levar o sistema a sair do ponto de força nula se o equilíbrio for *instável*, ou a lá permanecer de forma robusta no caso de equilíbrio *estável*.

A instabilidade ou estabilidade do equilíbrio depende de como a energia potencial se comporta nas vizinhanças desses pontos. Numa configuração instável, a componente da força é positiva para deslocamentos positivos a partir do equilíbrio e vice-versa, i.e. $\frac{d}{dx}F = -\frac{d^2}{dx^2}U(x) > 0$. O oposto vale para posições de equilíbrio estável, nas quais a força tende a fazer a partícula retornar ao ponto de equilíbrio: sua componente é negativa para deslocamentos positivos, e vice-versa, de forma que $\frac{d}{dx}F = -\frac{d^2}{dx^2}U(x) < 0$. Essas condições se resumem a

$$\frac{d}{dx}U(x_{eq}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{equilíbrio estável:} & \frac{d^2}{dx^2}U(x_{eq}) > 0 \\ \text{equilíbrio instável:} & \frac{d^2}{dx^2}U(x_{eq}) < 0 \end{cases} . \quad (1.282)$$

De fato, o tipo de análise aqui descrita é bastante geral. Ela nos permite investigar o estado de equilíbrio de *configurações* descritas por funções energia potencial mais gerais, como e.g. dependentes de parâmetros físicos que não a posição (tal como a temperatura ou a pressão de um gás). No caso de uma função energia potencial dependente de vários parâmetros (e.g. no espaço tridimensional), pode ocorrer de haver equilíbrio estável numa direção e instável em outra para um mesmo ponto do espaço de parâmetros, caso em que a configuração em que isso ocorre recebe o nome de *ponto de sela*.

O exemplo da Fig. 1.35 evidencia como o conceito de energia nos permite inferir o quadro geral do movimento. A energia mecânica E da partícula lhe permite explorar a região limitada por $x_1 \leq x \leq x_2$, passando pelo mínimo global da energia potencial em x_{eq} , por um mínimo local em x'_{eq} , e por um ponto de equilíbrio instável em x'_{inst} . Caso a energia E fosse ligeiramente menor do que U_1 , seria necessário conhecer alguma posição visitada pela partícula (e.g. sua posição inicial) para determinar em qual dos dois ‘poços’ de potencial (se em torno de x_{eq} ou x'_{eq}) ela se moveria. Sua energia na região esquematizada deve sempre respeitar $E \geq U_0$. A partícula escaparia para além dessa região se $E > U_2$. Sua velocidade assume magnitude máxima na posição x_{eq} e valores constantes em primeira ordem nos deslocamentos a partir dos pontos x_{eq} , x'_{inst} e x'_{eq} . Consistentemente com isso, a componente da força é negativa entre as posições x_{eq}

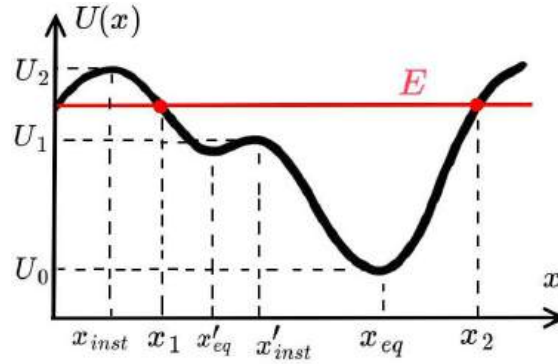


Figura 1.35: Visão global da dinâmica proporcionada pelo conceito de energia. Nesse gráfico podemos ver imediatamente as regiões acessíveis à partícula, bem como pontos de inflexão da trajetória e de máxima velocidade.

e x_2 , pois $\frac{d}{dx}U(x) = -F(x) > 0$, a mesma análise valendo em outras regiões.

Posição horária

No movimento unidimensional, é possível determinar a magnitude da velocidade da partícula (momento) e, pela definição do sentido de movimento e da posição inicial, determinar a sua posição como função do tempo.

Manipulando a Eq. (1.279) para que cada membro dependa apenas de uma variável e integrando-a, obtemos a trajetória $x(t)$ da partícula (na verdade, obtemos $t(x)$, sendo preciso inverter a relação) como

$$t - t_0 = \frac{m}{2} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{\sqrt{E - U(x')}} dx'. \quad (1.283)$$

Com isso, resolvemos, ao menos no caso importante de forças conservativas, a dinâmica unidimensional na forma alternativa que procurávamos, com a energia assumindo o papel de elemento central na mecânica.

A diferença conceitual que se revela entre o uso do momento ou da energia como quantidade central da dinâmica reside na forma de se entender o movimento: no primeiro caso, *equações diferenciais* determinam como o estado da partícula se transforma *infinitesimalmente* sob ação de interações que modificam seu momento; no segundo, uma *equação integral* [Eq. (1.283)] fornece a relação entre posição e momento a cada ponto da trajetória como consequência de uma quantidade *global* – a ‘energia mecânica’ da partícula – sendo transformada entre as formas potencial e cinética.

Exemplo: Oscilação harmônica. Vimos que uma partícula sujeita à força restauradora linear em torno de sua posição de equilíbrio $x_{eq} = 0$ segue trajetória confinada às proximidades dessa posição num movimento oscilatório harmônico.

Aplicando a Eq. (1.269), uma força restauradora linear unidimensional $F = -kx$ ($k > 0$) está associada à energia potencial

$$U_k(x) - U_k(x_0) = - \int_{x_0}^x (-kx' \hat{x}) \cdot dx' \hat{x} = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{2} kx_0^2. \quad (1.284)$$

A curva de integração segue nesse caso o elemento unidimensional de comprimento $d\vec{s} = dx\hat{x}$. A escolha natural da constante $U(x_0)$ é evidentemente $x_0 = x_{eq} = 0$ e $U(x_0) = 0$, da qual segue

$$U_k(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (1.285)$$

uma energia potencial *quadrática* no deslocamento da partícula a partir da posição de equilíbrio.

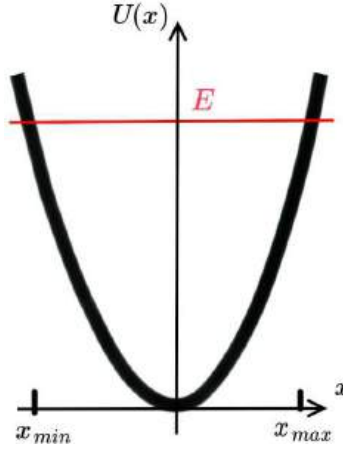


Figura 1.36: Energia potencial quadrática na posição. Essa forma de interação, universal na física, está associada na mecânica a uma força linear restauradora.

Essa forma de energia potencial revela diretamente que o movimento da partícula para qualquer energia mecânica E é confinado à região x a satisfazer

$$E - U_k(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \leq \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (1.286)$$

Os pontos de inflexão do movimento são, portanto,

$$x_{min} = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{e} \quad x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (1.287)$$

A região visitada pela partícula é simétrica com relação à origem. De fato, a origem $x = 0$ é a única posição x_{eq} de *equilíbrio estável* do movimento [Eq. (1.282)], uma vez que

$$\left. \frac{d}{dx}U_k(x) \right|_{x_{eq}} = kx_{eq} = 0 \Rightarrow x_{eq} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2}{dx^2}U_k(x) \right|_{x_{eq}} = k > 0. \quad (1.288)$$

A velocidade da partícula em qualquer posição vale, segundo a Eq. (1.279),

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right)}, \quad (1.289)$$

assumindo valor nulo nos pontos de inflexão e magnitude máxima v_{max} na posição de equilíbrio, pois

$$\left. \frac{d}{dx}v \right|_{v_{max}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{max} = v(x = x_{eq}) = \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (1.290)$$

Ao contrário da descrição da dinâmica em termos diferenciais, todas essas características gerais do movimento podem ser determinadas sem acesso à forma exata da posição da partícula como função do tempo. A descrição do movimento em termos globais torna a trajetória apenas *uma de várias* informações disponíveis, perdendo a mesma seu papel central na compreensão do movimento.

Sendo a energia mecânica E totalmente potencial nos pontos de inflexão e totalmente cinética na posição de equilíbrio, podemos escrever sua lei de conservação pelas igualdades

$$E = \frac{1}{2}kx_{max}^2 = \frac{1}{2}kx_{min}^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.291)$$

Assim, a trajetória do oscilador no espaço de fase é

$$x^2 + \frac{p^2}{mk} = \alpha^2, \quad (1.292)$$

formando um *círculo* nas variáveis $(x, p/\sqrt{mk})$ com raio $\alpha = \sqrt{E/(mk)}$ determinado pela *energia mecânica* da partícula.

Sua posição como função do tempo é obtida pela integral dada pela Eq. (1.283),

$$t = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - \frac{1}{2}kx^2)}} dx = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right), \quad (1.293)$$

a qual, quando invertida, resulta no movimento *harmônico* esperado,

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega t), \quad \text{com } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.294)$$

A energia em qualquer ponto da trajetória vale, portanto,

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_{max}^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2}mv_{max}^2 \sin^2(\omega t), \quad (1.295)$$

que é de fato facilmente verificável como constante. Além disso, as energias potencial e cinética *médias* em um período $\tau = 2\pi/\omega$ de oscilação valem

$$\overline{U}_\omega = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau U_\omega(t) dt = \frac{1}{4}m\omega^2 x_{max}^2 \quad \text{e} \quad \overline{K} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau K(t) dt = \frac{1}{4}mv_{max}^2, \quad (1.296)$$

em que mudamos a notação da energia potencial para destacar a frequência de oscilação como rótulo, $U_\omega(x) = U_k(x)$. Disso decorre que a energia mecânica permanece em média igualmente distribuída no tempo entre formas potencial e cinética,

$$\overline{U}_\omega = \overline{K} \quad \Rightarrow \quad E = 2\overline{U}_\omega \cos^2(\omega t) + 2\overline{K} \sin^2(\omega t). \quad (1.297)$$

Na dinâmica descrita sob o ponto de vista da energia, o movimento associado à interação da Eq. (1.285) aparece como a oscilação harmônica da *energia mecânica* entre as formas cinética e potencial.

1.5.5 Energia potencial quadrática

Curiosamente, notamos que possíveis origens físicas para as forças restauradoras lineares não foram sequer mencionadas nestas notas, o que pode parecer em contradição com a suposição tácita de que esse tipo de interação guarda singular importância na física. Na verdade, a generalidade da interação restauradora foi o que nos motivou a não motivá-la. Isso pode ser consertado agora que possuímos as ferramentas capazes de esclarecer o motivo da generalidade.

Uma partícula sujeita à uma energia potencial de interação $U(x)$ qualquer apresenta muitas vezes movimento limitado no espaço por não possuir energia mecânica suficiente para ‘escapar’ da região de interação. Essas configurações recebem o nome de *estados ligados*. Em particular, é de especial interesse a situação em que a partícula se encontra fortemente confinada a uma região ‘pequena’ do espaço.

De acordo com as ideias desenvolvidas até aqui, queremos tratar a situação em que a partícula se encontra no entorno de um ponto de equilíbrio estável x_{eq} , podendo explorar a forma de $U(x)$ apenas em sua vizinhança ‘próxima’. Podemos nesse caso expandir a energia potencial em série de potências no deslocamento a partir do equilíbrio como

$$U(x) = U(x_{eq}) + \left. \frac{d}{dx}U(x) \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{dx^2}U(x) \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 + \dots \quad (1.298)$$

Queremos descobrir características do movimento nessas condições bastante genéricas. Qual é o efeito de qualquer interação fisicamente razoável em ordem mais baixa no deslocamento a partir do equilíbrio?

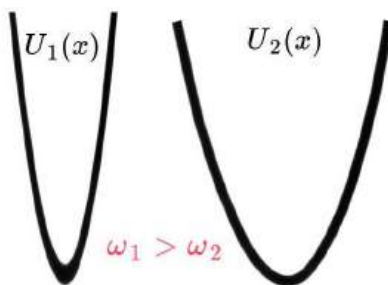


Figura 1.37: A curvatura da função energia potencial em torno do ponto de equilíbrio estável determina diretamente a frequência da oscilação harmônica da partícula confinada.

Em primeiro lugar, vimos que a dinâmica é determinada por variações da energia potencial, de maneira que podemos escolher a constante $U(x_{eq})$ como nula por simplicidade. Em segundo lugar, o fato de que a partícula precisa estar localizada nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável implica que podemos sempre escolher o ponto especial x_{eq} em torno do qual expandir $U(x_{eq})$ para que valha

$$\left. \frac{d}{dx}U(x) \right|_{x_{eq}} = 0. \quad (1.299)$$

Com isso, estabelecemos a correção de mais baixa ordem no deslocamento a partir do equilíbrio como a segunda ordem da série, i.e.

$$U(x) \approx U_k(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2, \quad \text{em que } k = \left. \frac{d^2}{dx^2}U(x) \right|_{x_{eq}} > 0 \quad (1.300)$$

por se tratar de ponto de equilíbrio *estável*. Como vimos acima, esse tipo de energia potencial dá origem a um movimento oscilatório harmônico com frequência de oscilação

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2}{dx^2}U(x) \right|_{x_{eq}}, \quad (1.301)$$

i.e. determinada pela *curvatura* da energia potencial em torno do ponto de equilíbrio. Aumentar a curvatura torna a função mais ‘íngreme’, implicando em maior frequência de oscilação, e vice-versa.

Eis então a resposta a nossa pergunta genérica: o movimento em regiões confinadas suficientemente ‘pequenas’ é uma oscilação harmônica. Sua generalidade de aplicação vem do seguinte fato: com raras

exceções⁷¹, a energia potencial descrita pela Eq. (1.300) é capaz de descrever qualquer tipo de interação nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável: basta que o deslocamento permitido à partícula seja suficientemente pequeno!

Mas o que é ‘pequeno’? A resposta depende do próximo termo na expansão em série da energia potencial [Eq. (1.298)]. No caso mais pessimista de aparecer já um termo cúbico de correção (i.e. termo quadrático na expressão da força),

$$U(x) \approx U_k(x) + \frac{\alpha}{3}(x - x_{eq})^3, \quad \text{em que} \quad \alpha = \frac{1}{2} \frac{d^3}{dx^3} U(x) \Big|_{x_{eq}}, \quad (1.302)$$

podemos estimar a amplitude x_{max} do movimento cuja descrição requer apenas o termo quadrático supondo que a solução oscilatória harmônica da Eq. (1.294) ainda valha aproximadamente. Tomando $x_{eq} = 0$ por simplicidade, a energia potencial com a contribuição do termo cúbico no ponto de maior deslocamento será

$$U(x_{max}) \approx \frac{1}{2} m \omega^2 x_{max}^2 + \frac{\alpha}{3} x_{max}^3, \quad (1.303)$$

de onde deduzimos que ‘pequenos deslocamentos’ são aqueles a satisfazer

$$x_{max} \ll \frac{m \omega^2}{|\alpha|} = \ell_{max}. \quad (1.304)$$

Na distância ℓ_{max} a partir do equilíbrio, a contribuição do termo cúbico se tornaria igual àquela do termo quadrático. O mesmo raciocínio pode ser empregado para energia potencial com correção quártica etc.

Na verdade, esse tipo de expansão em série da energia potencial vale não apenas para o movimento no espaço, mas para funções energia potencial dependentes de qualquer família de parâmetros relevantes para a descrição de um sistema físico. Nossa conclusão é bastante geral: caso o sistema se encontre numa situação de equilíbrio *estável* nos parâmetros, uma *pequena perturbação* o levará a *oscilar* em torno desse ponto de equilíbrio no espaço de parâmetros.

Por exemplo, um corpo sólido qualquer se acomoda sempre num certo formato tridimensional próprio a ele. Por ser uma situação estável, podemos imaginar que se trata de uma configuração capaz de minimizar uma função energia potencial dependente de algum jeito particular do *formato* do corpo (em geral uma função de muitas distâncias relativas causadas pelas interações entre suas moléculas). Perturbar *ligeiramente* o formato do sólido, e.g. comprimindo-o ligeiramente, deve então fazê-lo *oscilar* em torno de sua configuração de equilíbrio com amplitude dada pela *energia* envolvida na perturbação. Ademais, de acordo com a conclusão genérica da Eq. (1.301), um sólido muito rígido, i.e que requer força de grande magnitude para causar-lhe certa deformação, deve oscilar com frequência *maior* do que um sólido maleável⁷².

Talvez seja difícil encontrar a função energia potencial de nosso exemplo, e até mesmo impossível de se resolver analiticamente os formatos assumidos pelo sólido perturbado como função do tempo, mas podemos prever com exatidão o comportamento qualitativo do movimento: oscilação! Uma mola é apenas um caso especial de um sólido exposto a pequenas deformações. Sua construção utiliza a geometria para concentrar numa única direção a reação do sólido à deformação e amplificar ao máximo a região de ‘pequeno’ deslocamento, pois a perturbação se faz na direção normal a um plano comprido (embora espiralado para ser compacto).

⁷¹E.g. potenciais para os quais $k = 0$ e a correção de menor ordem precisa ir além da segunda ordem.

⁷²Em particular, um sólido abstrato ideal oscilaria com frequência infinita, significando que seria necessária uma força infinita para deformá-lo mesmo infinitesimalmente.

Em suma, a oscilação harmônica é um tipo de movimento geral próprio da dinâmica de um sistema físico no entorno de ponto de equilíbrio estável em seu espaço de parâmetros. A frequência de oscilação é determinada, em menor ordem no deslocamento a partir do equilíbrio, apenas pela *inércia* da partícula e pela *curvatura* da energia potencial em torno desse ponto (e.g. independe da amplitude de oscilação ou, equivalentemente, da energia mecânica da partícula). É dessa grande generalidade que surge a importância do potencial quadrático em vários contextos da física.

1.6 Campo de forças central

O movimento interessante mais simples a ocorrer em mais dimensões num sistema isolado diz respeito à interação entre duas partículas por força dependente apenas da distância a separá-las. Campos de força como esses desempenham papel importante na física, dado que tanto a interação gravitacional quanto a interação coulombiana entre cargas elétricas são desse tipo.

Veremos como tornar esse problema efetivamente unidimensional para reduzi-lo à realização de integrais como prescrito pela Eq. (1.283). Aplicaremos os resultados à força gravitacional e à interação coulombiana para deduzir os formatos das trajetórias das partículas para o caso particular de forças proporcionais ao inverso do quadrado da distância.

1.6.1 Energia potencial centrífuga

Vimos na Seção 1.3.10 que o tratamento da interação gravitacional entre dois corpos pode ser simplificado matematicamente [Eq. (1.192)]. A substituição considera, no lugar de dois corpos em interação com massas m_1 e m_2 , uma *única* partícula ‘efetiva’ com massa reduzida μ e localizada na posição relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Na verdade, o movimento sob ação de qualquer interação dependente apenas da distância pode ser colocado nessa forma. Campos de forças com essa propriedade são chamados *centrais*, e seguem a expressão geral

$$\vec{F}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = F(r) \hat{r}, \quad \text{em que } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (1.305)$$

i.e. possuem magnitudes dependentes apenas da distância $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ a separar as partículas e apontam na direção \hat{r} a uni-las. As equações de movimento se tornam

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{cases}, \quad (1.306)$$

e podem ser combinadas de maneira a simplificar a equação de movimento para a forma

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \Rightarrow \quad \mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}). \quad (1.307)$$

A outra equação de movimento necessária para a determinação de \vec{r}_1 e \vec{r}_2 se refere ao centro de massa [Eq. (1.195)], que se move livremente por ser o sistema de duas partículas considerado isolado.

A esse tipo de força está associada uma energia potencial $U(r)$ também dependente apenas da distância, calculada a partir da Eq. (1.269) como

$$U(r) - U(r_0) = - \int_r^{r_0} F(r') dr'. \quad (1.308)$$

A energia mecânica E da partícula μ , uma constante do movimento, é dada pela soma de suas partes cinética e potencial, valendo

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r), \quad (1.309)$$

em que o termo constante $U(r_0)$ da energia potencial foi tomado nulo. O movimento ocorre em princípio no espaço tridimensional, e precisaríamos considerar as três componentes espaciais da velocidade nessa equação.

No entanto, entra aqui uma propriedade crucial das forças centrais: elas são incapazes de exercer torque sozinhas, já que

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \stackrel{\text{Eq. (1.305)}}{=} \downarrow \vec{r} \times F(r)\hat{r} = 0 \quad (1.310)$$

i.e. \vec{F} é paralela⁷³ a \vec{r} .

Forças centrais portanto mantém conservado o momento angular \vec{L} do sistema de partículas: sua direção e magnitude permanecem constantes durante o movimento. Sobre a direção, o fato de ser constante implica que podemos sempre escolhê-la por conveniência como paralela ao versor \hat{z} , i.e.

$$\vec{L} = L\hat{z}; \quad (1.311)$$

por conseguinte, segue para a dinâmica que

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y}, \quad (1.312)$$

ou seja, os vetores posição e momento da partícula μ ficam restritos a se moverem paralelamente ao plano $\mathcal{O}xy$: o problema que parecia tridimensional se reduz na verdade a algo planar. Podemos sem perda de generalidade escolher esse plano como sendo $\mathcal{O}xy$, o que equivale a definir por conveniência a origem do eixo z tal que uma das condições iniciais seja $z(t_0) = z(t) = 0$.

O movimento planar nos impele a utilizar coordenadas cilíndricas em sua descrição. Escrevemos assim o vetor momento angular tal qual na Eq. (1.182), a qual repetimos aqui por conveniência,

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\hat{z}. \quad (1.313)$$

Vemos a partir dela que a constância da magnitude do momento angular implica na restrição

$$mr^2(t)\dot{\theta}(t) = L = cte \quad (1.314)$$

sobre as coordenadas da partícula μ .

Essa condição nos permite de fato simplificar ainda mais o problema, eliminando a menção explícita à variável angular θ na energia mecânica. De fato, sua expressão [Eq. (1.309)] se escreve em coordenadas cilíndricas como

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r), \quad (1.315)$$

em que usamos $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$ [Eq. (1.181)]. Dela eliminamos $\dot{\theta}$ em favor de L e r pelo uso da Eq. (1.314), obtendo

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (1.316)$$

⁷³Notemos que esse resultado vale apenas para *partículas*, sendo comum em corpos extensos a ocorrência de torque gravitacional (tal como ocorre e.g. no movimento de precessão dos equinócios na Terra): de fato, a gravidade não atua sozinha nesses casos, mas em conjunto com forças de coesão internas aos corpos extensos. Pense, por exemplo, num pêndulo simples: por estar preso a um ponto de apoio, a força gravitacional é capaz de produzir torque com relação a esse ponto, já que não age sozinha.

uma expressão *unidimensional* na coordenada radial! Se simplesmente olhássemos a Eq. (1.316) sem saber do que trata, diríamos que o primeiro termo se refere à energia cinética de uma partícula com massa μ movendo-se em uma dimensão com velocidade \dot{r} , e que os dois últimos termos fornecem algum tipo misterioso de ‘energia potencial’ dependente da coordenada r .

De fato, o segundo termo da Eq. (1.316), escrito como está em termos de L , uma constante do movimento, dispensa referência direta à velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ para se tornar dependente apenas da distância r , *tal qual uma energia potencial repulsiva*. Sua origem física advém do fato de que a existência de momento angular obriga a partícula a manter um estado mínimo de movimento: ela precisa aumentar sua velocidade caso se aproxime do centro de forças e vice-versa. Por isso esse termo recebe o nome de *energia potencial centrífuga*, definida como

$$U_c(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (1.317)$$

A *energia potencial efetiva* $U_{ef}(r)$ junta por conveniência numa só função o termo centrífugo à energia potencial da interação física, sendo definida como

$$U_{ef}(r) = U_c(r) + U(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (1.318)$$

A energia mecânica da partícula μ [Eq. (1.316)] assume com isso a forma intuitiva que teríamos adotado à primeira vista: a soma entre um termo de energia cinética exclusivamente radial e um termo de energia ‘potencial’ que depende apenas da coordenada,

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{ef}(r). \quad (1.319)$$

Formulamos assim o problema genérico da interação central entre dois corpos como unidimensional. Por conta disso, conforme discutido na Seção 1.5.4, sua solução já pode ser escrita em forma integral [Eq. (1.283)], obtida pela integração formal da Eq. (1.319),

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{E - U_{ef}(r')}}, \quad (1.320)$$

em que r_0 é a posição radial da partícula no instante t_0 , i.e. $r(t_0) = r_0$. Essa expressão nos fornece $t(r)$, mas pode ser em princípio invertida para fornecer a função horária $r(t)$.

O problema se resolve completamente utilizando a solução $r(t)$ para integrar por sua vez $\dot{\theta}$ na Eq. (1.314). A solução integral para $\theta(t)$ fica

$$\theta - \theta_0 = \frac{L}{\mu} \int \frac{dt}{r^2(t)}, \quad (1.321)$$

em que θ_0 é a coordenada angular da partícula em t_0 , i.e. $\theta(t_0) = \theta_0$.

Nem sempre (ou melhor, ‘quase nunca’) é fácil realizar as integrais formais requeridas pela solução do problema. Mas também é verdade que nem sempre conseguimos simplificar um problema real a uma interação simples como essa, envolvendo apenas dois corpos. Num caso realista, a importância de poder escrever a solução formal de maneiras diferentes é poder contar com vários métodos para buscar a melhor forma de solução numérica. Mostraremos no caso da força gravitacional que existe solução analítica para o movimento.

1.6.2 Constantes decorrentes de condições iniciais e leis de conservação

São necessárias em princípio 12 constantes arbitrárias para determinar as trajetórias das duas partículas a partir das soluções integrais das Eqs. (1.320) e (1.321), dadas e.g. pelas condições iniciais compostas por 3 componentes espaciais de posição e 3 de momento para cada partícula.

No entanto, por causa da separação do problema em termos do movimento relativo e de centro de massa, temos que 6 dessas constantes se referem ao centro do massa do sistema (e.g. condições iniciais de seus vetores posição e momento), que podem portanto ser ignoradas na descrição do movimento relativo.

Das 6 constantes referentes ao movimento relativo, 1 é fixada pela energia mecânica E e 3 pelo momento angular \vec{L} , 2 das quais correspondem à conservação da direção de \vec{L} e 1 pela conservação de sua magnitude. As 2 constantes faltantes ficam determinadas pelas condições iniciais (r_0, θ_0) acima mencionadas. Na verdade, 1 dessas condições iniciais pode ser enunciada sem referência ao tempo, como a posição inicial $r(\theta_0)$ na trajetória; a segunda constante define uma das posições iniciais no tempo, $r(t_0)$ ou $\theta(t_0)$.

Notemos que 2 é o número de constantes arbitrárias necessárias para determinar o movimento de uma partícula em 1 dimensão e, de fato, a energia mecânica da Eq. (1.319) tem matematicamente a forma de um problema unidimensional. Podemos inferir disso que as *leis de conservação* juntamente com a *simetria* de isotropia da força central nos permitem entender o problema do movimento relativo de dois corpos no espaço tridimensional como *matematicamente equivalente* ao problema de um corpo movendo-se em uma dimensão com energia potencial dada pela Eq. (1.318).

A mensagem aqui é bem geral e nos diz o seguinte: simetrias reduzem a dimensão efetiva do problema. Mais do que isso, podemos inverter nosso argumento para concluir que as simetrias *ditam* a dimensão do problema, e fixam as formas possíveis de evolução temporal. De fato, as leis de Newton advêm da percepção de uma simetria no movimento de um sistema isolado, a conservação do momento total, e são construídas em torno dela (notemos: foi justamente essa simetria que nos permitiu separar o movimento relativo do movimento do centro de massa, e portanto também ela contribuiu para a simplificação do problema matemático!). Queremos com isso dizer que hoje as simetrias são reconhecidas como algo central na física, e sua existência (ou eventual quebra em algumas situações) é que *ditam como as leis devem ser*. Em outras palavras, criamos as leis para refletir simetrias observadas nos sistemas físicos.

Assim, todas as características simplificadoras acima ocorrem como propriedades comuns a todos os campos de forças centrais conservativos, em razão da simetria de isotropia intrínseca a esse tipo de força, não sendo exclusividade do campo de forças gravitacional. No caso específico do problema de dois corpos, o fato de apenas 2 constantes relativas a condições iniciais serem necessárias implica que podemos determinar, em princípio, *todos os formatos de trajetórias* em função apenas das constantes do movimento E e L . As 2 condições iniciais servem apenas para *posicionar* a partícula de interesse na trajetória já determinada pelas grandezas conservadas no movimento.

O mesmo não ocorre quando mais corpos estão envolvidos na interação. O caso seguinte mais simples de três corpos requer 18 constantes (6 por partícula) para determinar suas trajetórias. Como vimos, 6 delas não guardam interesse por se referirem ao movimento do centro de massa, e 4 são fixadas pelas constantes de movimento E e \vec{L} . Ficam faltando ainda 8 constantes, sem as quais não é possível determinar curvas tridimensionais seguidas pelas partículas.

Uma maneira de aumentar o número de constantes do movimento nesse tipo de problema é procurar soluções específicas possuidoras elas mesmas de *simetrias*, e com essa estratégia é possível determinar as trajetórias em algumas situações particulares. Outra estratégia consiste em considerar casos limites em que uma das partículas tem efeito desprezível sobre as demais por possuir massa relativa muito pequena (como se fosse uma ‘massa de prova’), o que efetivamente reduz o problema para aquele de duas partículas. Por exemplo, esse é o caso de interesse prático no tratamento das órbitas de satélites. O movimento do corpo de prova ‘sonda’ uma função energia potencial com contribuições dos dois corpos principais sem perturbá-los (e.g. Terra e Lua) e, eventualmente, de termos inerciais no sistema em rotação com os demais corpos. Os chamados ‘pontos de Lagrange’ de um sistema de dois corpos em interação gravitacional são deduzidos por considerações desse tipo.

1.6.3 Características gerais das trajetórias

Por fim, devem surgir naturalmente perguntas a respeito das características gerais das trajetórias num campo de força central. Por exemplo: que tipo de dependência radial da força produz órbitas estáveis? Ou: o que é necessário para se obter órbitas fechadas? Essas perguntas podem ser respondidas considerando apenas a forma global da energia do sistema.

A primeira pergunta encontra resposta na análise da Eq. (1.319). Órbitas ligadas estáveis são obtidas apenas em regiões de energia potencial mínima, de acordo com a Eq. (1.282), i.e. em torno de posições radiais em que $U_{ef}(r)$ assume valor extremo com curvatura positiva. A condição sobre um extremo de U_{ef} fornece sempre as posições radiais das órbitas circulares,

$$\left. \frac{d}{dr} U_{ef}(r) \right|_{r_0} = -\left. \frac{L^2}{\mu r^3} \right|_{r_0} + \left. \frac{d}{dr} U(r) \right|_{r_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d}{dr} U(r) \right|_{r_0} = \frac{L^2}{\mu r_0^3} \equiv -F_0 > 0, \quad (1.322)$$

já que a partícula nessa condição está restrita a se mover com $r = r_0 = cte$.

Como $F(r) = -\frac{d}{dr} U(r)$, a condição acima implica que a força deve ser necessariamente *atrativa* para existirem órbitas circulares, $F(r_0) = F_0 < 0$. A condição adicional de curvatura positiva impõe

$$\left. \frac{d^2}{dr^2} U_{ef}(r) \right|_{r_0} = \left. \frac{3L^2}{\mu r^4} \right|_{r_0} + \left. \frac{d^2}{dr^2} U(r) \right|_{r_0} > 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d^2}{dr^2} U(r) \right|_{r_0} > -\frac{3L^2}{\mu r_0^4} = \frac{3}{r_0} F_0, \quad (1.323)$$

que pode ser reescrita como

$$-\left. \frac{d}{dr} F(r) \right|_{r_0} > 3 \frac{F}{r} \Big|_{r_0}. \quad (1.324)$$

Tendo em vista a possibilidade de expansão da força em série de potências de r na região de mínimo, é natural considerar uma forma específica (mas bastante útil) para $F(r)$ como uma lei de potência,

$$F(r) = -kr^n, \quad k > 0, \quad (1.325)$$

caso em que a condição de estabilidade da Eq.(1.324) fornece após cálculo direto

$$n > -3. \quad (1.326)$$

Esse resultado indica que forças centrais atrativas com dependência radial *pura*⁷⁴ r^{-3} ou mais lenta não são capazes de formar na energia potencial efetiva o poço energético necessário para ligar as duas partículas.

⁷⁴Forças produzidas como *somas* de termos desse tipo, tal como a energia potencial de atração entre moléculas, não se incluem nessa dedução, e portanto podem eventualmente produzir estados ligados.

Sobre órbitas fechadas na interação de dois corpos, é possível mostrar que apenas dois tipos de dependência radial as produzem para qualquer tamanho de desvio da órbita circular (teorema de Bertrand). São elas $F \propto r^{-2}$ e $F \propto r$, i.e. forças do tipo gravitacional (ou de Coulomb) e força restauradora linear. Veremos isso explicitamente no caso da força gravitacional (próxima seção) fazendo a determinação completa das trajetórias.

Já o caso do potencial quadrático não representa de fato um campo de forças físico em todo o espaço, pois nenhuma interação pode aumentar infinitamente com a distância, sendo mais correto dizer que forças desse tipo produzem trajetórias fechadas em toda a região do espaço *em que valem como aproximação* da energia potencial exata (mas não necessariamente além disso). Concluimos então que, de todos os campos de força centrais em forma de lei de potência e capazes de representar a expressão exata para a interação entre dois corpos em todo o espaço, segue do teorema de Bertrand que apenas aqueles do tipo gravitacional, com dependência r^{-2} , sempre produzem órbitas fechadas para corpos ligados. Portanto, se Newton soubesse disso à época, poderia usar apenas o fato de serem as órbitas planetárias fechadas para provar que a força gravitacional depende efetivamente do inverso do quadrado da distância⁷⁵.

1.7 Interação gravitacional entre duas partículas

O problema da interação gravitacional entre dois corpos foi historicamente um dos grandes sucessos da teoria newtoniana para o movimento. Newton não só unificou a força de gravidade percebida na superfície da Terra àquela capaz de produzir os movimentos observados dos planetas então conhecidos: ele de fato deduziu com sua mecânica os formatos observados por Kepler para as órbitas planetárias!

Vamos nesta seção resolver esse problema por ser interessante para a compreensão de como se dá o movimento no sistema solar e também por permitir o uso de técnicas associadas à energia num caso em que elas de fato facilitam o tratamento matemático.

1.7.1 Energia potencial efetiva

Começamos pela prescrição da Eq. (1.307) para substituir o movimento de dois corpos pelo problema equivalente de uma *única* partícula ‘efetiva’, possibilidade já vislumbrada na Eq. (1.192) especificamente para força gravitacional. O problema gravitacional equivalente trata de uma partícula com massa reduzida μ localizada na posição relativa $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; o centro de forças se localiza na origem do sistema de coordenadas relativas como se viesse de outra partícula com massa total $M = m_1 + m_2$ que lá permanece fixa. A equação

⁷⁵Mas acontece que as órbitas não são estritamente fechadas! Apesar de o Sol ser de longe a influência dominante no movimento dos planetas, perturbações produzidas por eles mesmos uns sobre os outros fazem com que as órbitas sejam ‘quase’ fechadas, mas não exatamente (o que já poderia servir para delimitar o valor máximo ϵ no expoente da força gravitacional suposta como $r^{-2+\epsilon}$). Esse fato já era conhecido por Kepler na observação do planeta Mercúrio, cujo periélio (o ponto da órbita planetária mais próximo ao Sol) se move lentamente ao longo do tempo. E já que falamos nisso, Newton tentou explicar o efeito com base em perturbações dos planetas mais próximos e não conseguiu: de fato, efeitos relativísticos devidos à grande massa do Sol contribuem com metade da anomalia observada (a explicação da precessão do periélio de Mercúrio seria um dos primeiros testes experimentais importantes da relatividade geral).

de movimento se escreve

$$\mu \frac{d}{dt} \vec{r} = -G \frac{\mu M}{r^2} \hat{r}, \quad (1.327)$$

em que vale $m_1 m_2 = \mu M$. A energia potencial associada ao campo de forças é

$$U_g(r) = -G \frac{\mu M}{r}. \quad (1.328)$$

Vimos na Seção 1.6 como a conservação do momento angular nos permite simplificar o tratamento desse tipo de problema pela introdução do termo centrífugo na energia potencial [Eq. (1.318)]. Com isso, a energia potencial efetiva $U_{ef}(r)$ para a interação gravitacional assume a forma

$$U_{ef}(r) = U_c(r) + U_g(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r}. \quad (1.329)$$

A energia mecânica da partícula μ se escreve

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{ef}(r). \quad (1.330)$$

A energia potencial efetiva possui a forma geral ilustrada na Fig. 1.38 (curva preta). Ela resulta da soma do termo de energia potencial gravitacional U_g (curva azul), negativa, com dependência r^{-1} , ao termo centrífugo U_c (curva vermelha), positivo, com dependência r^{-2} . O primeiro, atrativo, domina em grandes distâncias, enquanto o segundo, repulsivo, em pequenas.

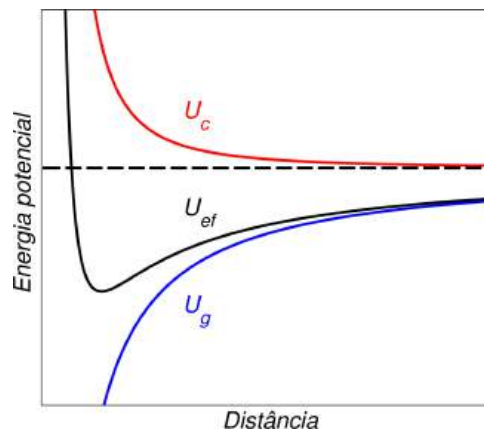


Figura 1.38: Formato das energias potenciais centrífuga U_c [Eq. 1.317], gravitacional U_g [Eq. 1.328] e efetiva U_{ef} [Eq. 1.329] como funções da distância entre as duas partículas em interação.

O importante a notar aqui é que os dois termos se baseiam em constantes *independentes* do movimento, e portanto podem assumir quaisquer valores relativos fisicamente possíveis: a magnitude do termo gravitacional depende da massa total M como parâmetro independente; já o termo centrífugo conta com o momento angular L como grandeza independente.

Não é claro que a soma deles produza $U_{ef}(r)$ possuidora de uma forma genérica ‘padrão’ como ilustra a Fig. 1.38. De fato, poderíamos imaginar que $U_{ef}(r)$ pudesse se modificar bastante conforme alterássemos M ou L para valores extremos; entretanto, esse não é o caso (a figura está correta!). Para mostrar isso de maneira convincente, vamos colocar $U_{ef}(r)$ num formato que revela serem necessários apenas *fatores de escala* para distinguir diferentes combinações de magnitudes relativas entre a interação gravitacional (controlada por M)

e a energia potencial centrífuga (controlada por L). Renomeamos primeiramente os produtos de grandezas aparecendo nos numeradores da Eq. (1.329) como novas constantes α_c e α_g (escolhidas arbitrariamente com o intuito de simplificar a notação e avançar no tratamento do problema),

$$U_{ef} = \frac{\alpha_c}{r^2} - \frac{\alpha_g}{r}, \quad \text{em que} \quad \alpha_c = \frac{L^2}{2\mu} \geq 0 \quad \text{e} \quad \alpha_g = G\mu M > 0. \quad (1.331)$$

Logo veremos que existem constantes mais ‘naturais’ a serem adotadas.

A soma dos termos centrífugo e gravitacional da energia potencial cria uma região em que as dependências radiais se equilibram para formar estados ligados. Esse ponto especial é o raio r_0 em que a energia potencial efetiva assume seu valor mínimo, dado por

$$\left. \frac{d}{dr} U_{ef}(r) \right|_{r_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \frac{2\alpha_c}{\alpha_g}. \quad (1.332)$$

A mínima energia vale

$$U_{ef}(r_0) = -U_0 = -\frac{\alpha_g^2}{4\alpha_c}. \quad (1.333)$$

Esses dois números representam escalas típicas do sistema, em termos das quais podemos tentar reescrever $U_{ef}(r)$. Colocamos U_0 em evidência na Eq. (1.329) para obter

$$U_{ef}(r) = U_0 \left(\frac{1}{U_0} \frac{\alpha_c}{r^2} - \frac{1}{U_0} \frac{\alpha_g}{r} \right). \quad (1.334)$$

Usamos então as expressões para as escalas típicas U_0 [Eq. (1.333)] e r_0 [Eq. (1.332)] para eliminarmos α_c e α_g , dessa forma expressando U_{ef} em termos da coordenada *adimensional* de distância r' , ou seja,

$$U_{ef}(r) = U_0 \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2}{r'} \right), \quad \text{em que} \quad r' = \frac{r}{r_0}. \quad (1.335)$$

Com isso, U_{ef} fica escrita em termos de sua escala privilegiada U_0 de energia e a posição da partícula fica medida relativamente à posição r_0 do mínimo de energia, escalas ‘naturais’ do sistema.

Essa expressão adimensional para a energia potencial efetiva estabelece que o *formato da curva* $U_{ef}(r)$ vale para *quaisquer* dois corpos em interação gravitacional isolada. Logo, a Eq. (1.335) condensa em si todas as possibilidades de movimento: mudar as massas das partículas ou o momento angular do sistema não altera o formato qualitativo da curva de energia potencial efetiva e, portanto, os tipos de movimentos que podem ocorrer nesse sistema. Em particular, a *existência* de um mínimo da energia e o *signal* de sua concavidade são garantidos independentemente dos parâmetros particulares do problema (L , μ e M). Caso se queira tornar a expressão específica para dois corpos sob estudo, basta escrever explicitamente os valores numéricos das escalas U_0 e r_0 .

Assim, a Eq. (1.335) descreve a forma geral do movimento de quaisquer dois corpos em interação gravitacional. Particularizá-la para dois corpos sob estudo significa dar a *escala* correta nos eixos da energia e da posição⁷⁶. Investigamos a seguir os diferentes tipos de trajetória decorrentes dessa interação.

⁷⁶Notemos que existe um caso particular patológico, aquele em que $L = 0$, pois então a contribuição centrífuga deixa de existir ($U_c = 0$), e por isso $r_0 \rightarrow 0$ (causando problemas matemáticos em nossa normalização de r por r_0 na expressão adimensional). Na verdade, a situação se torna bem simples nesse caso, tornando desnecessário o uso da Eq. (1.335). Esse caso será melhor discutido posteriormente.

1.7.2 Órbita circular

Notemos primeiramente que, na descrição da dinâmica em termos de forças, determinamos o raio r_{circ} da órbita circular impondo para a força gravitacional o papel de força centrípeta,

$$\begin{aligned} F_{centripeta}(r_{circ}) = F_g(r_{circ}) &\Rightarrow \mu\omega^2 r_{circ} = \frac{G\mu M}{r_{circ}} \\ &\Rightarrow r_{circ} = \frac{L^2}{G\mu^2 M}, \end{aligned} \quad (1.336)$$

em que se utilizou a identidade $\omega = L/(\mu r_{circ}^2)$ válida para a órbita circular. Esse raio é precisamente r_0 no qual U_{ef} atinge seu valor mínimo, pois a Eq. (1.332) nos revela que

$$r_0 = \frac{2\alpha_c}{\alpha_g} = \frac{L^2}{G\mu^2 M} = r_{circ}. \quad (1.337)$$

De fato, a expressão genérica da Eq. (1.335) já nos indicava isso, pois a órbita para a qual $r' = 1$, i.e. $r = r_0$, permanece fixa a uma distância constante do centro de forças, sendo portanto uma órbita circular. O gráfico da energia nos mostra que essa órbita corresponde à energia mínima $U(r_0) = -U_0$ de interação para L e M fixos, cujo valor explícito é

$$U_0 = \frac{\alpha_g^2}{4\alpha_c} = \frac{G^2\mu^3 M^2}{2L^2}. \quad (1.338)$$

Formas mais ‘amigáveis’ para U_0 são

$$U_0 = \frac{G\mu M}{2r_0} = \frac{L^2}{2\mu r_0^2}. \quad (1.339)$$

A energia U_0 representa a *profundidade* do poço de potencial, i.e. a quantidade de energia que deve ser fornecida às partículas para ‘libertá-las’ da interação (i.e. apartá-las a uma distância infinita). O poço se torna mais profundo com o aumento da massa total das partículas. E a massa reduzida também tem efeito relevante: como μ pode assumir qualquer valor entre a menor massa do sistema (para $m_1 \ll m_2$) e metade da massa média (para $m_1 \approx m_2$), a energia de interação se maximiza na situação em que as massas são similares. O papel do momento angular é tornar a interação mais forte conforme sua magnitude decresce, o que pode ser entendido lembrando-se de que a energia potencial centrífuga funciona como uma repulsão efetiva cujo efeito cresce com o aumento da magnitude de L .

1.7.3 Pequenas oscilações em torno da órbita circular

A órbita circular é a trajetória obtida no ponto de mínima energia de U_{ef} . Conforme vimos na Seção 1.5.4, aumentar ligeiramente a energia do sistema a partir desse ponto deve produzir *pequenas oscilações* na coordenada radial.

A frequência ω_r da oscilação radial é calculada, segundo a Eq. (1.301), pela curvatura da energia potencial em torno do ponto de equilíbrio, que assume nessa região a forma aproximada $U_{ef}(r') \approx \frac{\mu\omega_r^2}{2}r^2$. Cálculo explícito utilizando a Eq. (1.335) fornece para a frequência radial de pequenas oscilações a expressão

$$\omega_r^2 = \frac{1}{\mu} \frac{d^2}{dr^2} U_{ef}(r) = \frac{1}{\mu r_0^2} \frac{d^2}{dr'^2} U_{ef}(r') = \frac{2U_0}{\mu r_0^2} = \left(\frac{L}{\mu r_0^2} \right)^2 \Rightarrow \omega_r = \frac{L}{\mu r_0^2}. \quad (1.340)$$

Assim, a posição radial perturbada se torna

$$r(t) \approx r_0 + A \cos(\omega_r t), \quad (1.341)$$

em que $A \ll r_0$ é a pequena amplitude de oscilação. Já a posição angular como função do tempo é determinada pelo uso da Eq. (1.314), que fornece a equação diferencial

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \approx \frac{L}{\mu r_0^2} \left(1 - \frac{2A}{r_0} \cos(\omega_r t) \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{2A}{r_0} \cos(\omega_r t) \right). \quad (1.342)$$

Interessante a se notar nessa expressão é o valor não perturbado da velocidade angular $\dot{\theta}$. Para $A = 0$, vê-se que

$$\dot{\theta} \approx \omega_0 = \frac{L}{\mu r_0^2}, \quad (1.343)$$

ou seja, $\omega_0 = \omega_r$! O fato de coincidirem a frequência angular ω_0 da órbita e a frequência ω_r das pequenas oscilações radiais mostra que as frequências associadas às posições radial $r(t)$ e angular $\theta(t)$ são *comensuráveis* (no caso, na relação 1:1), resultando em trajetórias *fechadas* para a partícula μ sob perturbação. De fato, isso significa que a posição (r, θ) da partícula no plano de órbita retorna ao *mesmo ponto* após 1 período orbital, i.e. $r(t + T_0) = r(t)$ e $\theta(t + T_0) = \theta(t)$, em que $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi/\omega_r$, para qualquer valor de t .

Integrando a Eq. (1.342) no tempo, obtemos a trajetória da partícula μ em forma paramétrica,

$$r(t) \approx r_0 + A \cos(\omega t), \quad (1.344)$$

$$\theta(t) \approx \omega t - \frac{2A}{r_0} \sin(\omega t), \quad (1.345)$$

em que definimos $\omega := \omega_0 = \omega_r$ para simplificar a notação.

Veremos em breve que a trajetória ‘perturbada’ das Eqs. (1.344) e (1.345) na verdade é a representação paramétrica exata de uma *ellipse*, embora sua pequena excentricidade a torne quase circular. Tal situação descreve bem as trajetórias da maioria dos planetas do sistema solar. Na verdade, as trajetórias de duas partículas em interação gravitacional são fechadas mesmo para grandes amplitudes de perturbação a partir da trajetória circular, uma consequência da dependência r^{-2} da força de gravidade.

1.7.4 Sistema ligado

Estados com energia $E > -U_0$ são limitados espacialmente por *dois* valores de distância radial em que ocorre inflexão da trajetória (Fig. 1.38). A trajetória radial deve ser, portanto, periódica⁷⁷.

As distâncias r_{min} e r_{max} de inflexão são determinadas pela condição $E = U(r_{min,max})$, pois nesses pontos a energia cinética radial é nula. Usando a Eq. (1.335), obtemos nos pontos de inflexão uma equação quadrática na variável $1/r'$, pois

$$E = U_0 \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2}{r'} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'} \right)^2 - \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{E'}{2} = 0, \quad (1.346)$$

⁷⁷Façamos todavia a ressalva de que esse fato tomado isoladamente não implica que a trajetória seja *fechada* (i.e. que a partícula volte ao mesmo *ponto* do espaço com o mesmo momento): como ocorre num plano (duas dimensões), a trajetória fechada requer que a posição angular θ também se repita, em sincronia com a posição radial, após números inteiros de inflexões de ambas. Assim, para ser fechada, uma trajetória precisa ser periódica tanto em r quanto em θ com períodos *comensuráveis*.

em que E' é a energia mecânica E ‘em unidades’ de U_0 , uma quantidade adimensional. As soluções são

$$\frac{1}{r'_{min}} = 1 + \sqrt{1 + E'} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r'_{max}} = 1 - \sqrt{1 + E'}. \quad (1.347)$$

Essas expressões já nos indicam como devem ser as trajetórias para os diversos parâmetros de energia E e momento angular L da partícula. A trajetória circular ocorre para $E' = -1$ (i.e. $E = -U_0$), caso em que se obtém o raio adimensional de órbita $r'_{min} = r'_{max} = 1$ (i.e. $r_{min} = r_{max} = r_0$). Notemos que as soluções só fazem sentido com a restrição $E' > -1$ (i.e. $E > -U_0$), como esperado. Além disso, se $E' \rightarrow 0$, temos para uma das soluções $r'_{max} \rightarrow \infty$, significando que as partículas se afastam até o infinito nesse limite. A outra solução se torna $r'_{min} = 1/2$ (i.e. $r_{min} = r_0/2$) nesse caso.

1.7.5 Sistema livre

O valor $E' = E = 0$ delimita os sistemas ligados ($E < 0$) dos livres ($E > 0$). Um par de partículas com essa energia de interação viaja do ‘infinito’ até a máxima aproximação, dada por metade do raio da órbita circular possuidora do mesmo momento angular, e se afasta ao ‘infinito’ assintoticamente, lá ‘chegando’ com energia cinética nula.

Para $E' > 0$, as partículas atingem distância mínima $r_{min} < r_0/2$ em certo momento de suas histórias e se afastam para sempre posteriormente. A distância mínima a que chegam é dada pela expressão de r'_{min} acima, e vale explicitamente

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \sqrt{1 + E'}}. \quad (1.348)$$

Para uma configuração fixa de massas e momento angular, o aumento da energia faz com que as partículas atinjam distância mínima de separação cada vez menor, variando com o inverso de $\approx \sqrt{E}$ para altas energias.

O valor de r_{min} tende a zero no caso patológico em que $L \rightarrow 0$, pois r_0 também depende de L [Eq. (1.337)], implicando em energia de interação infinitamente negativa. Fisicamente, $L \rightarrow 0$ descreve uma colisão frontal, em que de fato a distância entre as partículas pode ser feita tão pequena quanto se queira. Nesse limite, vale

$$r_{min} \approx \frac{L^2}{G\mu^2 M} \quad \text{para } L \rightarrow 0, \quad (1.349)$$

e a distância mínima entre as partículas deixa de depender da energia em primeira ordem. Na prática, $r_{min} \rightarrow 0$ significa que nossa aproximação de partículas pontuais *deixa de valer* quando r_{min} se torna comparável ao *tamanho* das partículas (que portanto deixam de ser partículas!). Nessas distâncias, a energia potencial efetiva passa a depender da *geometria* dos corpos extensos em interação: as divergências aparentes se resolvem naturalmente, pois a dependência r^{-1} deixa de ser uma boa aproximação para U_g a essas distâncias (pense no exemplo do anel de massa da Fig. 1.19).

1.7.6 Equação de movimento

As trajetórias correspondentes às possíveis configurações do sistema de dois corpos podem ser determinadas diretamente a partir das expressões para as duas grandezas conservadas: momento angular [Eq. (1.314)]

e energia mecânica [Eq. (1.330)]. Juntas, essas expressões formam um sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem. Na Eq. (1.330) para a energia mecânica, a única derivada temporal aparece na forma \dot{r} , e, como a energia potencial efetiva depende apenas de r , podemos isolar \dot{r} para escrever, com o auxílio da Eq. (1.329),

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U_{ef}(r) \right)}. \quad (1.350)$$

Essa equação pode ser reescrita como

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{G\mu M}{r} \right)}} \quad (1.351)$$

e integrada diretamente para fornecer a posição radial como função do tempo, $r(t)$. Uma vez obtida essa função, a Eq. (1.314) nos permite obter a posição angular como função do tempo, $\theta(t)$, pela integral de

$$d\theta = \frac{L}{\mu r^2(t)} dt. \quad (1.352)$$

Esse procedimento resolve o problema formal de encontrar a trajetória em formato paramétrico, i.e. através de $r(t)$ e $\theta(t)$, com o tempo como parâmetro.

1.7.7 Equação da trajetória

Em vez de seguir o procedimento acima, é possível determinar diretamente a trajetória $r(\theta)$ no espaço, sem a necessidade de menção ao tempo. Basta juntarmos as Eqs. (1.351) e (1.352) de forma a eliminar o tempo. De fato, a Eq. (1.352) permite relacionar derivadas temporais a derivadas angulares, pois⁷⁸

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2(t)} \frac{d}{d\theta}. \quad (1.354)$$

Com isso, podemos reescrever a Eq. (1.350) como

$$\frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - U_{ef}(r) \right)}, \quad (1.355)$$

para obtermos por integração direta a trajetória $r(\theta)$ da partícula,

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu}{L^2} \left(E - U_{ef}(r) \right)}}, \quad (1.356)$$

em que mantivemos como indefinida a integral em dr por conveniência. Para evitarmos ‘carregar’ muitas constantes durante as contas, é conveniente utilizarmos a expressão adimensional da Eq. (1.335) para $U_{ef}(r)$,

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2\mu U_0}{L^2} \left(\frac{E}{U_0} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + 2 \frac{r_0}{r} \right)}}. \quad (1.357)$$

⁷⁸Para se convencer de que essa expressão vale, considere a derivada temporal de uma função f qualquer de θ . Calculariamos

$$\frac{d}{dt} f(\theta) = \frac{df}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \stackrel{\text{Eq. (1.352)}}{=} \left(\frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\theta} \right) f. \quad (1.353)$$

Fazemos então a troca de variáveis $r' = r/r_0$, do que decorre $dr = r_0 dr'$. Usando as expressões para r_0 e U_0 , dadas respectivamente pelas Eqs. (1.337) e (1.338), é fácil verificar que $2\mu U_0/L^2 = 1/r_0^2$. A integral se torna

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{E' - \frac{1}{r'^2} + \frac{2}{r'}}}, \quad (1.358)$$

em que $E' = E/U_0$ é a energia mecânica relativa a U_0 .

A troca de variáveis que nos permite realizar a integral da Eq. (1.358) não é óbvia à primeira vista. Mas a Eq. (1.347), pela forma como explicita as soluções para os pontos de retorno da trajetória, nos sugere tentar a variável $u' = 1/r'$. Fazemos então essa troca de variáveis, com o que $du' = -dr'/r'^2$, para obtermos

$$\theta - \theta_0 = - \int \frac{du'}{\sqrt{E' - u'^2 + 2u'}}. \quad (1.359)$$

Essa integral se resolve completando os quadrados no denominador e utilizando uma função harmônica em nova troca de variáveis. O primeiro passo fornece

$$- \int \frac{du'}{\sqrt{E' - u'^2 + 2u'}} = - \int \frac{du'}{\sqrt{1 + E' - (u' - 1)^2}} = - \frac{1}{\sqrt{1 + E'}} \int \frac{du'}{\sqrt{1 - \left(\frac{u' - 1}{\sqrt{1 + E'}}\right)^2}}. \quad (1.360)$$

O segundo passo requer a troca de variáveis $(u' - 1)/\sqrt{1 + E'} = \cos \phi$, do que segue $du' = -\sqrt{1 + E'} \sin \phi d\phi$, e a integral fornece finalmente a trajetória

$$\theta = \theta_0 + \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + E'}} \left(\frac{1}{r'} - 1 \right) \right], \quad (1.361)$$

em que a constante de integração da integral indefinida foi absorvida em θ_0 . Essa expressão pode ser escrita de maneira mais familiar invertendo-a,

$$\frac{1}{r'} = 1 + \sqrt{1 + E'} \cos(\theta - \theta_0), \quad (1.362)$$

na qual fica claro o significado de θ_0 como um ponto de inflexão da posição radial: $1/r'$ atinge seu valor máximo para $\theta = \theta_0$, e seu valor mínimo para $\theta = \theta_0 + \pi$. O inverso vale para r' , e por isso θ_0 corresponde à posição angular em que as partículas se encontram em máxima aproximação, enquanto $\theta_0 + \pi$ fornece em princípio a posição angular de máxima distância. Novamente, a solução só faz sentido se $E' \geq -1$.

1.7.8 Soluções para as trajetórias

As curvas de trajetória descritas pela Eq. (1.362) podem na verdade assumir formatos distintos dependendo dos parâmetros físicos da interação. Esse fato fica claro analisando-se o comportamento da amplitude ε do cosseno, pelo uso da qual a Eq. (1.362) assume a forma simplificada

$$\frac{1}{r'} = 1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0), \quad \text{em que } \varepsilon = \sqrt{1 + E'}. \quad (1.363)$$

Encontramos os seguintes cenários na faixa permitida ($-1 < E' < \infty$) para a energia mecânica:

- $E' = -1$: no mínimo da energia, a amplitude do cosseno se anula, $\varepsilon = 0$, e a distância entre as partículas é constante, $r' = 1$, ou seja $r = r_0$. Temos a trajetória circular.

- $-1 < E' < 0$: nesse intervalo, vemos que as partículas formam um sistema ligado, movimentando-se numa região relativa restrita do espaço. A amplitude ε do cosseno varia entre os valores $0 < \varepsilon < 1$, de forma que r' oscila entre dois valores extremos ocorrendo nas posições angulares $\theta = \theta_0$ e $\theta = \theta_0 + \pi$.
- $E' = 0$: esse valor de energia representa o limite entre estados ligados e livres. A amplitude do cosseno assume um valor mínimo bem definido, $\varepsilon = 1$, no ponto de máxima aproximação, $\theta = \theta_0$. Entretanto, a distância máxima entre as partículas tende ao infinito, pois $1/r' \rightarrow 0$ para $\theta = \theta_0 + \pi$.
- $E' > 0$: nesse caso, a posição angular $\theta = \theta_0 + \pi$, que corresponderia em outros casos à máxima distância entre as partículas, deixa de fazer sentido, pois $\varepsilon > 1$, implicando em valores não físicos $1/r' < 0$ para um intervalo de posições angulares. Em vez disso, é preciso agora considerar as *duas* posições angulares $\theta_{\pm} = \theta_0 \pm \Delta\theta$ em que $1/r' \rightarrow 0$, sendo que ângulos $|\theta - \theta_0| \geq \Delta\theta$ não são visitados (notemos que no caso anterior, $E' = 0$, teríamos o limite dessa situação, para o qual $\Delta\theta = \pi$). Todavia, a posição de máxima aproximação ainda continua a fazer sentido.

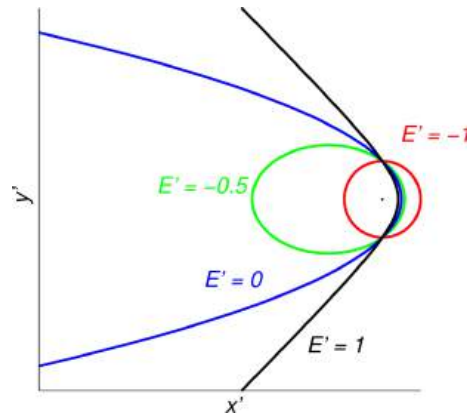


Figura 1.39: Trajetórias da partícula μ para diferentes valores do parâmetro E' (energia mecânica normalizada à energia mínima do poço de potencial). Vemos aparecerem as quatro seções cônicas: circunferência ($E' = 1$), elipse ($E' = -0,5$), parábola ($E' = 0$) e hipérbole ($E' = 1$).

Podemos avançar além da análise qualitativa notando que todos os formatos possíveis de curvas descritas pela Eq. (1.362) são *seções cônicas*, i.e. cortes de um cone. São elas: circunferências, elipses, parábolas e hipérboles.

Para ver isso, mudamos as variáveis de posição de coordenadas cilíndricas para cartesianas no plano da órbita. Escolhemos o ponto de máxima aproximação θ_0 sobre o eixo cartesiano x' , i.e. $\theta_0 = 0$, para escrevermos a transformação de coordenadas

$$x' = r' \cos \theta \quad \text{e} \quad y' = r' \sin \theta. \quad (1.364)$$

Reescrevendo a Eq. (1.362) na forma

$$r'(1 + \varepsilon \cos \theta) = 1, \quad (1.365)$$

temos em coordenadas cartesianas a seguinte expressão para a curva da trajetória:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} + \varepsilon x' = 1, \quad (1.366)$$

ou seja,

$$(1 - \varepsilon^2)x'^2 + y'^2 + 2\varepsilon x' = 1. \quad (1.367)$$

Caso algum coeficiente acima seja nulo, essa expressão descreve circunferências ou parábolas. Ela pode ser ainda reescrita completando quadrados em x' , para assumir a forma

$$\frac{\left(x' - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{y'^2}{1-\varepsilon^2} = 1. \quad (1.368)$$

A depender do sinal do termo $1 - \varepsilon^2$, essa expressão descreve elipses ou hipérbolas.

1.7.9 Trajetórias elípticas

A elipse é o lugar geométrico dos pontos (x', y') que satisfazem a equação

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \quad (1.369)$$

Os parâmetros a' e b' recebem os nomes de semi-eixos maior e menor, respectivamente, supondo $a' > b'$ (notemos que estamos tratando de posições adimensionais por enquanto). Os focos da elipse se localizam nos pontos $x' = \pm c'$, em que $c'^2 = a'^2 - b'^2$. A excentricidade da elipse fornece o desvio relativo de sua forma com relação à circunferência, sendo dada pela quantidade c'/a' .

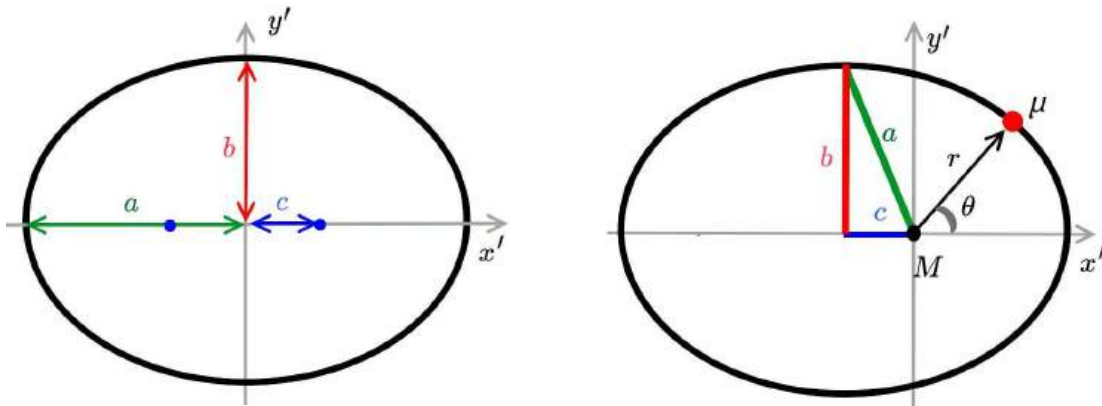


Figura 1.40: Esquerda: Parâmetros geométricos da elipse. Direita: Trajetória elíptica da partícula μ e parâmetros da órbita.

A trajetória descrita pela curva da Eq. (1.368) é uma elipse se $\varepsilon < 1$, pois nesse caso os denominadores de x' e y' são positivos como requer a Eq. (1.369). Esse fato em si prova que as trajetórias de partículas ligadas num campo gravitacional são sempre fechadas no referencial de centro de massa.

Identificamos por inspeção da Eq. (1.368) os parâmetros da elipse como

$$a' = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \quad \text{e} \quad b' = \sqrt{a'} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (1.370)$$

que nos fornecem o parâmetro de posição do foco como

$$c' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}. \quad (1.371)$$

Disso segue que a curva adimensional da Eq. (1.368) é uma elipse deslocada no eixo x' precisamente pela distância c' entre seu centro e seu foco. Em outras palavras, a elipse da Eq. (1.368) possui um dos focos sobre

a origem do sistema de coordenadas, em vez de seu centro como assumido pela forma padrão da Eq. (1.369). Portanto, a massa M de nosso problema de dois corpos, localizada no centro do sistema de coordenadas, encontra-se sempre sobre um dos focos da elipse. Para $0 < \varepsilon < 1$, a Eq. (1.362) é a representação de uma elipse em coordenadas cilíndricas com origem sobre um dos focos (e não no centro, como estamos acostumados).

Segue disso que, no limite em que uma das massas do par em interação é muito maior do que a outra (e.g. $m_1 \ll m_2$), o sistema de dois corpos se comporta aproximadamente como se a maior massa estivesse fixa no foco de uma elipse, e a massa menor a orbitasse seguindo a trajetória da Eq. (1.368). Nesse limite, obtemos a primeira lei de Kepler para os planetas do sistema solar, no qual vale com grande precisão que $M \approx M_{\odot} \gg m$ (m é a massa de qualquer planeta), implicando também que apenas o Sol determina a órbita de cada planeta (i.e. interações gravitacionais entre planetas são desprezíveis).

Além disso, a excentricidade da órbita é dada precisamente pelo parâmetro ε , a amplitude do cosseno na Eq. (1.368), pois $c/a = \varepsilon$, e assim

$$\varepsilon = \sqrt{1 + E'}, \quad 0 \leq E' < 1. \quad (1.372)$$

Portanto, *todos* os parâmetros geométricos da elipse adimensional [Eqs. (1.370) e (1.371)] são determinados pela quantidade física E' , a energia da partícula em unidades de U_0 . Observemos que essa quantidade adimensional depende tanto da energia mecânica E quanto da magnitude do momento angular L (pois U_0 depende de L).

Em termos das grandezas físicas E e L , a excentricidade vale

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{E}{U_0}} = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{G^2 \mu^3 M^2}}. \quad (1.373)$$

Ela assume valor nulo para energia mecânica igual ao valor mínimo, $E = -U_0$, correspondendo a uma órbita circular ($a' = b' = 1$ e $c' = 0$), como esperado. Substituindo sua expressão na Eq. (1.370), obtemos para o semi-eixo maior da elipse adimensional

$$a' = \frac{G^2 \mu^3 M^2}{2L^2 E} = \frac{G\mu M}{2r_0 E}, \quad (1.374)$$

fornecendo para o semi-eixo maior da elipse no espaço real a expressão

$$a = r_0 a' = \frac{G\mu M}{2E}. \quad (1.375)$$

Assim, *o semi-eixo maior da órbita elíptica depende apenas da energia mecânica E e das massas envolvidas, sendo portanto independente de L* . Em outras palavras, órbitas diferentes possuindo mesmo semi-eixo maior a contêm a mesma energia. Uma vez fixando-se a energia, a Eq. (1.373) mostra que *o momento angular fornece a excentricidade da elipse*.

Esses fatos podem ser utilizados para escrever as constantes do movimento E e L de uma órbita elíptica qualquer como função de seus parâmetros geométricos, quantidades em princípio facilmente medidas pela observação prolongada do corpo em órbita. Da Eq. (1.375) segue diretamente

$$E = -\frac{G\mu M}{2a}. \quad (1.376)$$

Para o momento angular e a excentricidade da órbita, a expressão acima permite escrever a Eq. (1.373) como

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{L^2}{G\mu^2 M} \frac{1}{a}} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{a}}. \quad (1.377)$$

A interpretação dessa equação é a seguinte. Para energia fixa, i.e. semi-eixo maior a fixo, a excentricidade depende do valor de r_0 , o raio da órbita circular *correspondente* ao momento angular escolhido⁷⁹.

Essa expressão faz sentido apenas para r_0 no intervalo $0 \leq r_0 \leq a$. No caso extremo $r_0 = 0$, os corpos em interação se aproximam até colidirem, pois $L = 0$, e a elipse se degenera num segmento de reta, com $\varepsilon = 1$. No outro extremo, $r_0 = a$, o semi-eixo maior se torna o próprio raio da circunferência orbital, significando que o valor *máximo* de momento angular permitido (para energia fixa) é aquele que torna a órbita *circular*⁸⁰. Valores intermediários de L produzem excentricidade na órbita sem afetar seu ‘tamanho típico’ (semi-eixo maior). Isolando L na Eq. (1.377), obtemos seu valor em termos dos parâmetros geométricos a e ε ,

$$L = \sqrt{G\mu^2 M a (1 - \varepsilon^2)}. \quad (1.378)$$

Portanto, a energia ‘regula’ a *escala espacial* da órbita ligada, fornecendo a distância máxima entre as partículas (como seria intuitivo), enquanto o momento angular determina o *formato* da órbita para energia fixa (Fig. 1.41). Momento angular nulo descreve uma colisão frontal sobre uma linha, enquanto seu valor máximo (para energia fixa) implica em órbita circular. Valores intermediários fornecem trajetórias elípticas para a massa μ . As elipses se tornam ‘mais circulares’ para valores crescentes de L ou, equivalentemente, mais ‘achatadas’ para valores decrescentes de L . A massa M se encontra sempre sobre um dos focos da elipse.

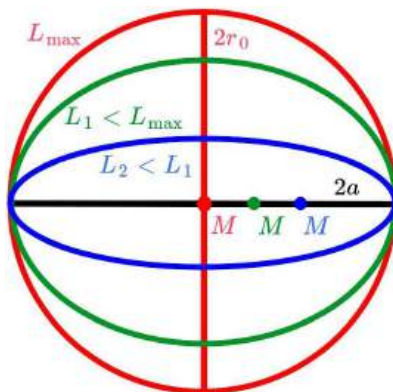


Figura 1.41: Formatos de trajetórias para valor fixo de energia mecânica (que regula o ‘tamanho’ da órbita) e diferentes valores do momento angular L . Momento angular máximo produz a órbita circular. A massa M em torno da qual μ se move permanece sempre fixa ao foco da elipse.

As constantes típicas de escala no espaço r_0 e de energia U_0 se escrevem em termos dos parâmetros

⁷⁹Não se confunda aqui! Observemos que a existência do parâmetro r_0 não significa que a partícula realize órbita circular: r_0 é apenas uma distância relacionada univocamente a L pela Eq. (1.337), i.e. outra forma de se referir a L . De fato, o momento angular não fixa sozinho nenhum dos parâmetros geométricos da órbita elíptica, ao contrário da energia. O único parâmetro relacionado univocamente a L é o raio da órbita circular, que só seria o raio da órbita real caso ela fosse ... circular.

⁸⁰Assim, a órbita circular se caracteriza como sendo o estado de mínima energia para momento angular fixo ou de máximo momento angular para energia fixa.

geométricos da órbita elíptica como

$$r_0 = a(1 - \varepsilon^2) \quad \text{e} \quad U_0 = \frac{G\mu M}{2a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (1.379)$$

De maneira análoga, de acordo com a Eq. (1.365), as distâncias de maior e menor aproximação entre os corpos em interação, denominadas respectivamente *periastro* e *apoastro*⁸¹, são

$$r_{min} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon) \quad \text{e} \quad r_{max} = \frac{r_0}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon), \quad (1.380)$$

e correspondem às posições radiais de inflexão da trajetória encontradas na Eq. (1.347) por considerações puramente energéticas.

O período das órbitas pode ser deduzido a partir da Eq. (1.352) notando-se que $\frac{1}{2}r^2 d\theta = dA$ é o elemento diferencial de área A da elipse em coordenadas cilíndricas. Integrando-se os dois lados dessa equação em um período T da órbita, obtemos

$$\int_0^T dt = \frac{2\mu}{L} \int_0^A dA' \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\mu}{L} A. \quad (1.381)$$

A área da elipse é $A = \pi ab$. Empregando a Eq. (1.370), obtemos $A = \pi r_0^2 / (1 - \varepsilon)^{3/2}$. Juntamente com a Eq. (1.378) para L e a Eq. (1.379) para r_0 , chegamos ao resultado

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad (1.382)$$

que é (quase) a terceira lei de Kepler.

Na verdade, Kepler enunciou sua lei na forma ligeiramente diferente $T^2/a^3 = C$, com a constante C igual para todos os planetas. A Eq. (1.382) estabelece que a constante não é exatamente a mesma, pois é a massa *total* $M = m + M_\odot$ do par planeta–Sol (e não apenas M_\odot) que determina a razão T^2/a^3 . O enunciado de Kepler de sua terceira lei é, assim como no caso de sua primeira lei, consistente com a aproximação de que a massa solar possui contribuição totalmente dominante em M . Caso as massas dos planetas não fossem desprezíveis face à massa solar, Kepler teria mais trabalho para encontrar esse padrão já pouco óbvio no movimento dos planetas.

O levantamento observacional das trajetórias de corpos celestes é ainda hoje uma ferramenta muito utilizada na astrofísica. A evidência mais clara de que há um buraco negro no centro de nossa galáxia vem desse tipo de análise. Veja [a página na internet](#) do *Galactic Center Group*, Universidade da Califórnia em Los Angeles (UCLA), para estudo científico sobre as trajetórias de estrelas brilhantes localizadas nas proximidades ao centro da Via Láctea. Do ponto de vista da Terra, a região ilustrada se encontra na constelação de sagitário. O ajuste de curvas aos círculos (medidas individuais de posições estelares) fornece várias trajetórias elípticas, cada qual associada à projeção de uma órbita estelar em nossa linha de visada. E embora todas possuam o mesmo ponto como foco, nada parece se localizar lá, como esperado de um buraco negro que faça jus ao nome⁸². Com base nos dados obtidos, o buraco negro da Galáxia possui 5 milhões de

⁸¹É comum referirem-se a esses mesmos pontos como periélio e afélio para um corpo em órbita do Sol, e perigeu e apogeu para um corpo orbitando a Terra.

⁸²Na verdade, o buraco negro, apesar de não emitir luz por si só, faz com que a matéria que o circunda (que se acelera brutalmente em suas imediações) emita radiação eletromagnética. A forte emissão de raios X foi a primeira evidência indireta de que ‘Sagittarius A’ seria um desses objetos.

massas solares e habita uma região esférica com raio aproximado de 1 UA (a ‘unidade astronômica’ é o raio da órbita terrestre)⁸³. É interessante notar que, apesar de localizadas numa região relativamente compacta do espaço, todas essas estrelas massivas parecem possuir como órbitas elipses independentes, tal como no problema de dois corpos, um testemunho claro de que a massa do buraco negro deve ser mesmo brutal a ponto de dominar todas as interações. Uma dessas estrelas em particular já completou sua primeira órbita ao longo dos últimos 20 anos de observações, permitindo testar a relatividade geral em novos regimes.

1.7.10 Trajetórias parabólicas

Parábolas são obtidas no caso pontual em que o coeficiente do termo quadrático em x' se anula na Eq. (1.367), para $\varepsilon = 1$. A trajetória da Eq. (1.367) fornece

$$x' + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}y'^2, \quad (1.383)$$

uma parábola com eixo de simetria x' . Essa situação corresponde a $E = 0$, segundo a Eq. (1.373). A aproximação máxima entre as partículas ocorre para $y' = 0$, caso em que a distância entre elas é $r' = 1/2$, i.e. $r = r_0/2$, como havíamos mostrado na Eq. (1.348).

A expressão ‘padrão’ de uma parábola com eixo de simetria dado por x' e com vértice na origem do sistema de coordenadas é

$$4\alpha x' = y'^2, \quad (1.384)$$

em que α é a distância entre o vértice e o foco da parábola. Comparando essa forma à Eq. (1.383), vemos que $\alpha = 1/2$ e que o vértice da parábola se encontra deslocado precisamente de α da origem: mais uma vez, temos que a origem do sistema de coordenadas se encontra sobre o *foco* da curva. Lembrando que na origem se encontra a massa M fictícia, temos que também no caso da trajetória parabólica a massa M se localiza sobre o foco da cônica. Portanto, a Eq. (1.365) descreve uma parábola em coordenadas cilíndricas com origem sobre seu foco.

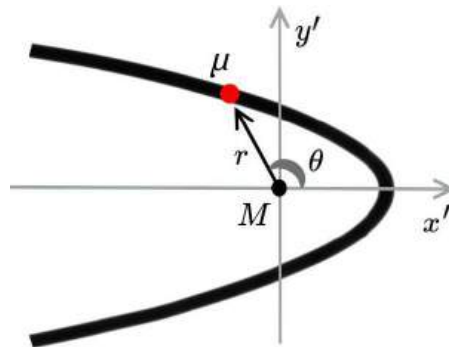


Figura 1.42: Trajetória parabólica e parâmetros relevantes de posicionamento da massa μ .

Notemos que a parábola é uma curva ilimitada, e visita todos os valores de θ . De fato, a expressão para a trajetória [Eq. (1.365)] nos mostra que $\theta \rightarrow \pi$ para $r \rightarrow \infty$, de forma que a partícula μ de aproxima arbitrariamente do eixo x no infinito. Essa curva fornece o caso mais simples de integração das equações

⁸³O raio clássico de um buraco negro é obtido impondo-se que a velocidade de escape em sua ‘superfície’ seja a própria velocidade da luz, fornecendo $r_s = 2GM/c^2$ (que é por coincidência o valor correto para o raio de Schwarzschild). O objeto de Sagittarius A está na iminência de não poder ser explicado de outra forma, já que obtemos em seu caso $r_s \approx 0,1$ UA.

de movimento no tempo [Eqs.(1.351) e (1.352)]. Podemos usar a equação da trajetória [Eq. (1.365)] na Eq. (1.352) para escrever

$$t = \frac{\mu r_0^2}{L} \int \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2}. \quad (1.385)$$

Essa integral não é tão simples de se realizar para qualquer valor de ε , requerendo o uso de truques espertos⁸⁴. Para $\varepsilon = 1$, no entanto, a integral se torna uma função trigonométrica,

$$t = \frac{\mu r_0^2}{4L} \int_0^\theta \sec^4 \theta' d\theta', \quad (1.386)$$

realizada pela troca de variáveis $q = \tan(\theta/2)$. Seu resultado fornece

$$t = \frac{\mu r_0^2}{2L} \left(\tan(\theta/2) + \frac{1}{3} \tan^3(\theta/2) \right). \quad (1.387)$$

Vemos dessa relação que a partícula μ se aproxima pela posição angular $\theta \rightarrow -\pi$ em $t \rightarrow -\infty$, atinge o periastro em $\theta = 0$ no instante $t = 0$, e retorna a $\theta \rightarrow \pi$ em $t \rightarrow \infty$. Inverter essa equação para obter a função $\theta(t)$ requer resolver equação cúbica em $\tan(\theta/2)$, uma tarefa tediosa mas factível. Uma vez obtida $\theta(t)$, a função radial $r(t)$ é encontrada por substituição direta de $\theta(t)$ na Eq. (1.365).

Apesar de se tratar matematicamente de curva obtida apenas em um *ponto* da região de parâmetros, a parábola acaba sendo na prática a trajetória obtida para $E \approx 0$. Em física, valores pontuais muitas vezes não fazem sentido quando outros fatores realistas sempre presentes (como ruído térmico ou perturbações por outras interações) são incluídos no problema. O mais correto é dizer que órbitas na região $E \approx 0$ são sempre indistinguíveis (dentro de uma região determinada pela precisão de medida) entre elipses, uma parábola ou hipérbolas, e portanto podem ser bem descritas por uma parábola sem perda de significado. O mesmo comentário vale para a órbita circular (obtida no ponto $E = -U_0$), que sempre será indistinguível de uma elipse com excentricidade menor do que a precisão experimental.

1.7.11 Trajetórias hiperbólicas

Hipérbolas são descritas pela expressão padrão

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \quad (1.388)$$

A nomenclatura dos parâmetros segue aquela utilizada para elipses, com a diferença de que, como a distância c' do foco à origem do sistema de coordenadas é maior do que o semi-eixo maior a' , vale para a hipérbole a relação $c'^2 = a'^2 + b'^2$. Também se define a excentricidade $c'/a' > 1$.

Por inspeção visual, a trajetória da Eq. (1.368) descreve uma hipérbole no plano de órbita se $\varepsilon > 1$. Identificamos então para os semi-eixos adimensionais as relações

$$a' = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \quad \text{e} \quad b' = \sqrt{a'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (1.389)$$

A posição adimensional do foco é

$$c' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}. \quad (1.390)$$

⁸⁴E.g. no caso da trajetória elíptica, utiliza-se o artifício geométrico de uma projeção da elipse num círculo para realizar a integral na variável angular obscura chamada hiperbolicamente de “anomalia excêntrica”.

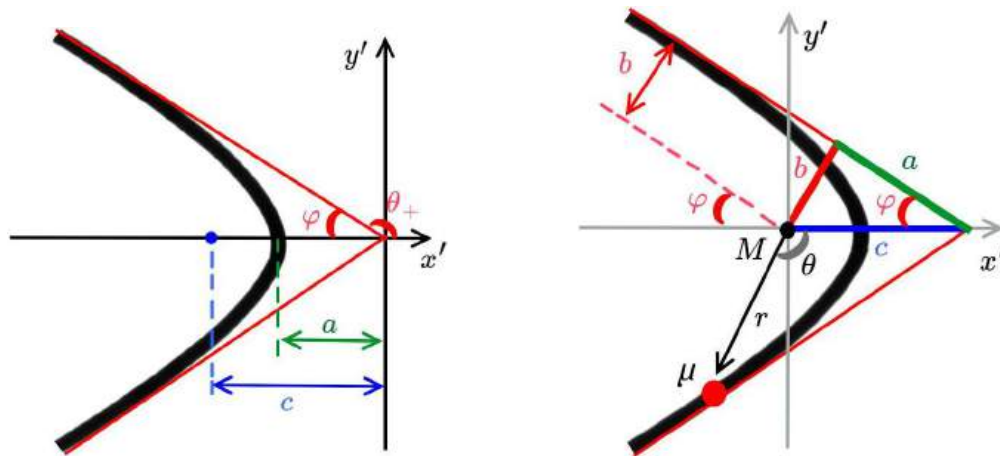


Figura 1.43: Esquerda: Parâmetros geométricos da hipérbole. Direita: Trajetória hiperbólica com indicação dos parâmetros de posicionamento da partícula μ .

A excentricidade continua a ser dada pelo parâmetro ε , valendo $c/a = \varepsilon = \sqrt{1 + E'}$ (com $E' > 1$) e explicitamente escrita na Eq.(1.373). Vemos que a quantidade física E' também fixa todos os parâmetros geométricos adimensionais da curva hiperbólica.

A hipérbole da Eq. (1.368) se encontra deslocada da origem. A Eq. (1.390) estabelece esse deslocamento como igual a c' sobre o eixo x' . Dessa forma, o centro do sistema de coordenadas é ocupado por um dos focos da hipérbole, tal qual nos casos das curvas elíptica e parabólica. A partícula de massa M continua, portanto, a ocupar o foco da curva cônica. A Eq. (1.362) representa para $\varepsilon > 1$ uma hipérbole em coordenadas cilíndricas com origem sobre seu foco.

Ao contrário das demais curvas estudadas até aqui, a expressão da Eq. (1.368) para a trajetória $r(\theta)$ prevê no caso da curva hiperbólica uma região de posições angulares não visitadas pela partícula, para as quais valores não físicos $1/r(\theta) < 0$ seriam obtidos. As posições angulares máxima θ_+ e mínima θ_- permitidas são determinadas pela condição limítrofe $1/r(\theta) = 0$. Tem-se $r(\theta) \rightarrow \infty$ nesses ângulos, significando que a trajetória da partícula μ se aproxima assintoticamente de uma reta para cada um deles. Essas retas são por isso chamadas *assíntotas* da hipérbole. Fisicamente, as assíntotas representam as trajetórias retilíneas limites seguidas por μ quando a interação ‘cessa’ por estarem as partículas ‘infinitamente’ distantes. Suas posições angulares são obtidas através da relação

$$1 + \varepsilon \cos \theta_{\pm} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_{\pm} = -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (1.391)$$

O valor negativo da função cosseno indica apenas que $|\theta_{\pm}| > \pi/2$. As soluções são $\theta_{\pm} = \pm \arccos(1/\varepsilon)$. É conveniente nesse caso utilizar o ângulo $\varphi = \pi - \theta_+$ como referência. Notemos que a simetria $\varphi = \theta_+ = -\theta_-$ ocorre por conta de um artifício da escolha de eixos ordenados: o eixo x' é sempre escolhido como o eixo de simetria da interação.

A interpretação física dos parâmetros geométricos da trajetória hiperbólica se torna mais simples se analisarmos o quadro geral da interação. Energia mecânica positiva ($E' > 0$ ou $E > 0$) significa que a partícula de massa μ possui energia cinética não nula $K_{\infty} > 0$ mesmo ‘fora’ da região de interação (em $r \rightarrow \infty$), e que toda a sua energia se encontra em forma cinética nessa situação, i.e.

$$E = K_{\infty} = \mu v_{\infty}^2/2, \quad (1.392)$$

pois $U_{ef}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Caso não houvesse interação, a velocidade inicial \vec{v}_∞ faria a partícula (livre!) simplesmente seguir por todo o espaço a trajetória retilínea dada por uma das *assíntotas* da hipérbole. Como na verdade há interação, a partícula *chega* à região de interação por uma assíntota, sofre o efeito da força atrativa, desvia sua trajetória e, como possui energia suficiente para escapar novamente da região de interação, *volta* ao infinito pela outra assíntota. Portanto, a característica física da interação de se tornar infinitamente débil a uma distância infinita implica pela primeira lei de Newton que a curva de trajetória tenda necessariamente a uma reta nesse limite, i.e. a trajetória *precisa* possuir duas assíntotas.

Assim, a Eq. (1.391) mostra que a excentricidade como parâmetro geométrico representa fisicamente a *variação da direção* do vetor velocidade na interação como um todo. Segundo nossa escolha $\hat{z} = \vec{L}/L$, a partícula ‘chega’ à região de interação pela assíntota com inclinação $-\varphi$. A trajetória então se curva nessa região e a partícula finalmente escapa pela assíntota φ de volta ao infinito. A magnitude de seu momento angular, constante do movimento, é facilmente calculada utilizando uma das trajetórias retilíneas assintóticas como

$$L = \mu v_\infty b, \quad (1.393)$$

em que b é chamado *parâmetro de impacto* da interação, e representa a distância mínima a que as partículas chegariam caso não houvesse interação. A geometria da hipérbole (ver figura) nos permite identificar o parâmetro de impacto como sendo dado precisamente pelo semi-eixo menor $b = r_0 b'$ da Eq. (1.388). O triângulo retângulo que se forma nos permite escrever

$$b = c \sin \varphi_+ = a \tan \varphi, \quad (1.394)$$

fornecendo para o momento angular da Eq. (1.393) a expressão

$$L = \mu v_\infty a \tan \varphi. \quad (1.395)$$

Notemos além disso que tanto v_∞ quanto o parâmetro a só dependem da energia E , pois

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \quad (1.396)$$

e, usando a Eq. (1.373) para escrever $E' = \varepsilon^2 - 1$, temos que da relação $a' = 1/E'$ [Eq. (1.389)] decorre

$$a = r_0 a' = \frac{r_0}{E'} = \frac{r_0 U_0}{E} = \frac{G\mu M}{2E}. \quad (1.397)$$

Assim como para a curva elíptica, o semi-eixo maior da hipérbole depende apenas da energia mecânica. Substituindo esses resultados na Eq. (1.395) para eliminar sua dependência na velocidade, obtemos

$$L = \frac{G\mu^{3/2}M}{\sqrt{2E}} \tan \varphi. \quad (1.398)$$

As Eqs. (1.397) e (1.398) fornecem E e L em termos de parâmetros geométricos da trajetória.

Portanto, no caso da trajetória hiperbólica, a energia mecânica é determinada pela energia cinética da partícula no infinito, i.e. ‘antes da interação’; já o momento angular, dado pela parâmetro de impacto da colisão (para energia fixa), determina univocamente as posições angulares das trajetórias assintóticas (tanto anterior quanto posterior à colisão), ou seja, o ângulo de abertura $2\varphi = \theta_+ - \theta_-$ da hipérbole.

Vemos no caso limite em que $L \rightarrow \infty$, situação em que a distância mínima entre as partículas é ‘muito grande’ (pois $b \rightarrow \infty$), temos $\varepsilon \rightarrow 1$ e $\theta_+ \rightarrow \pi/2$, de forma que o desvio da trajetória é muito pequeno e a hipérbole tende a uma reta. O mesmo ocorre para $E \rightarrow \infty$, pois nesse caso o momento angular aumenta conjuntamente. No extremo oposto, $L \rightarrow 0$ descreve uma colisão frontal entre as partículas, independentemente da energia inicial, caso em que a interação passa a depender da distribuição de massa se a região sondada pela colisão se torna tão pequena a ponto de ser comparável com as dimensões das partículas (vistas então como corpos extensos).

1.8 Espalhamento de Rutherford

No início do século XX, Ernest Rutherford realizou experimentos de colisão bombardeando uma folha muito fina de ouro com partículas eletricamente carregadas, as chamadas ‘partículas alfa’, hoje entendidas como núcleos de hélio. Seu objetivo era investigar a distribuição de carga dentro da matéria. Rutherford concebeu analisar como um feixe de partículas seria ‘espalhado’ no espaço pela folha de material. A situação deveria ser intuitivamente similar a um jato de água incidindo sobre uma parede, com a expectativa de que as gotas de água espalhadas revelassem algo sobre a parede.

Em princípio, por ser a folha um alvo muito fino, esperava-se que as partículas alfa a ‘rompessem’ e a atravessassem sendo pouco desviadas. Caso assim ocorresse, as partículas alfa espalhadas poderiam apresentar uma distribuição bastante complexa no espaço. Mas o observado por Rutherford foi algo então inesperado: embora a maior parte das partículas alfa simplesmente passasse pela folha sem ser perturbada, como esperado (pelo motivo errado!), aquelas que eram de fato espalhadas emergiam em todos os ângulos possíveis, inclusive em ângulos retroespalhados. Rutherford comparou seu espanto com relação à retroreflexão das partículas alfa a dar um tiro de canhão em um lenço de papel e observar a bala ricochetear!

Apesar de anti-intuitivo, o resultado é relativamente simples de interpretar. Para retroespalhar partículas alfa, é preciso que o material a formar a folha esteja distribuído de forma bastante não uniforme, concentrado em ‘núcleos’ de carga com massa muito maior do que a massa de uma partícula alfa. Isso nos leva a reinterpretar a transmissão sem desvio de grande parte das partículas alfa como consequência da existência de muitos espaços vazios entre esses núcleos. Como a matéria é neutra em nível macroscópico, cada um desses núcleos de massa precisa ser ‘blindado’ por uma nuvem de cargas opostas que precisa estar distribuída de forma tal a não influir na colisão.

Além dessa análise qualitativa, Rutherford investigou a distribuição angular de partículas espalhadas e utilizou o modelo mais simplista imaginável para descrevê-la: uma única carga pontual espalhando outra (aproximação de interação de dois corpos!).

Notemos que várias hipóteses ingênuas se escondem aí. Primeiramente, supõe-se que cada partícula alfa seja espalhada por um único núcleo do material, e que sua interação comece a ocorrer apenas no instante em que a ‘nuvem de blindagem’ de carga seja ultrapassada (lembremos: a matéria é neutra em nível macroscópico!). De fato, para conseguir tratar o problema da forma mais simples possível, é preciso que essa nuvem seja ‘rarefeita’ e esteja no ‘infinito’, i.e. seja muito maior do que as dimensões em que ocorre a interação, de forma que a partícula alfa lá chegue sem ser muito perturbada por outras influências eletromagnéticas (a primeira indicação de que a dimensão do átomo é determinada pela eletrosfera). Isso

inclui supor adicionalmente que a interação não envolve campos magnéticos na região microscópica de interação, e que as partículas sofrem aceleração relativamente pequena, ou emitiriam radiação na colisão, perdendo dessa forma energia mecânica.

Se *todas* essas hipóteses simplificadores valerem, então a partícula alfa deve interagir com o núcleo da mesma forma que um cometa é ‘espalhado’ pelo Sol, já que a força de interação, suposta coulombiana, segue a mesma dependência radial da força gravitacional. É possível nesse caso (bem, e talvez apenas nesse caso!) calcular analiticamente o número de partículas espalhadas em cada posição angular e comparar ao resultado medido no experimento. Rutherford verificou ótimo acordo com os dados, validando seu conjunto ‘simplista’ de hipóteses e com isso desvendando a estrutura atômica da matéria.

1.8.1 Espalhamento por campo de forças coulombiano

Para tratar a força de Coulomb entre duas partículas com cargas elétricas q_1 e q_2 , procede utilizar todos os passos do tratamento da força gravitacional, uma vez que valem ainda as leis de conservação do momento angular e da energia mecânica. Vale também a substituição matemática do problema de dois corpos pelo de um corpo com massa μ sob ação de campo de forças emanando do centro do sistema de coordenadas relativas $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

No experimento de colisão de Rutherford, uma partícula permanece em repouso e a outra possui energia cinética inicial, implicando em energia mecânica positiva, $E > 0$. As trajetórias são, portanto, hipérbolas. Para obter a conexão entre seus parâmetros geométricos e as grandezas físicas E e L controladas em princípio pelo experimentador, basta utilizar os resultados obtidos até aqui com a troca de constantes $\alpha_g = G\mu M \rightarrow \alpha_q = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$. A energia potencial efetiva se torna

$$U_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.399)$$

de forma que os parâmetros novos de escala das Eqs. (1.337) e (1.338) são

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu^2 \alpha_q} \quad \text{e} \quad U_0 = \frac{\alpha_q}{2r_0}. \quad (1.400)$$

Como vimos, todos os parâmetros geométricos da curva adimensional a fornecerem a trajetória são determinados pela energia mecânica relativa a U_0 , que assume a expressão

$$E' = \frac{E}{U_0} = \frac{2r_0 E}{\alpha_q} > 0. \quad (1.401)$$

A hipérbole adimensional do espalhamento de Rutherford obedece a equação

$$\frac{1}{r} = 1 + \varepsilon \cos(\theta), \quad \text{com} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + E'} > 1. \quad (1.402)$$

Seus demais parâmetros geométricos são dados pelas Eqs. (1.389) e (1.390). Embora essa já seja essencialmente a solução do espalhamento de Rutherford, é preciso neste ponto descrever a trajetória em termos de parâmetros favorecidos pelo experimento. Aí se esconde a maior parte do trabalho.

1.8.2 Parâmetros de trajetória acessíveis no experimento de Rutherford

Existem diversos tipos possíveis de experimentos de colisão, e portanto uma infinidade de formas de se considerar a Eq. (1.402) para fornecer quantidades medidas. Vamos nos ater aqui ao experimento clássico realizado por Rutherford (i.e. por seus estudantes!).

Nesse experimento, um feixe de partículas incide sobre o alvo de ouro e o resultado de medida é o número de partículas alfa espalhadas em certo ângulo a partir do alvo. Em outras palavras, um fluxo uniforme conhecido de partículas incidentes sobre o alvo produz, como efeito da interação, um fluxo de partículas com certa distribuição angular centrada no alvo, que é então medida. Em particular, note que não é possível acessar a trajetória de cada partícula alfa individual, nem saber onde se localizam os átomos na folha de ouro.

As suposições simplificadoras comentadas anteriormente permitem pensar na bagunça de colisões concomitantes como *equivalente* a inúmeras colisões independente entre um único núcleo e uma única partícula alfa. Realizar todas as colisões independentes de uma vez é como determinar a *distribuição de probabilidade* de que uma partícula entrando na região de interação com certa energia seja defletida de uma certa quantidade. Nosso objetivo passa a ser então determinar essa *densidade de probabilidade angular* utilizando a interação de Coulomb como força espalhadora. Por isso simplificamos nossas contas pela consideração de apenas uma colisão.

Primeiramente, a energia mecânica E com que as partículas alfa chegam à região de interação é fixada pela magnitude da velocidade v_∞ no feixe, suposta uniforme e controlável pelo experimentador⁸⁵,

$$E = \frac{1}{2}\mu v_\infty^2. \quad (1.403)$$

Essa energia fornece o semi-eixo maior a da hipérbole como vimos anteriormente, pois

$$a' = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{1}{E'} \quad \Rightarrow \quad a = r_0 a' = \frac{r_0 U_0}{E} = \frac{\alpha_q}{2E}, \quad (1.404)$$

em que utilizamos a Eq. (1.389) para a e o resultado da Eq. (1.400) na última passagem.

Já as direções das assíntotas das colisões, dadas pela direção de \vec{v}_∞ , são na verdade todas iguais e fixadas pela direção do feixe⁸⁶. A distinção principal entre trajetórias de diferentes partículas no feixe é o parâmetro de impacto b com relação ao núcleo alvo, um parâmetro fora do controle do experimentador e que determina diretamente o momento angular da colisão,

$$L = \mu v_\infty b = \sqrt{2\mu E} b. \quad (1.405)$$

O experimento de Rutherford é realizado de forma que as partículas alfa sempre incidem por uma assíntota horizontal, independentemente de seu momento angular, e portanto requer que descrevamos as hipérbolas com assíntotas ‘alinhadas’. Ao contrário de nossa solução anterior para a hipérbole adimensional,

⁸⁵Num experimento, as partículas seguem distribuição de velocidades com certo desvio padrão em torno de um valor mais provável tipicamente após várias etapas de ‘filtros’ de velocidade. Essa distribuição precisa ser conhecida e levada em conta para a interpretação correta dos dados.

⁸⁶Supomos que as partículas alfa, apesar de carregadas eletricamente, não se desviam substancialmente de suas trajetórias retilíneas e paralelas devido a interações entre si durante o voo, i.e. o feixe é assumido perfeitamente colimado.

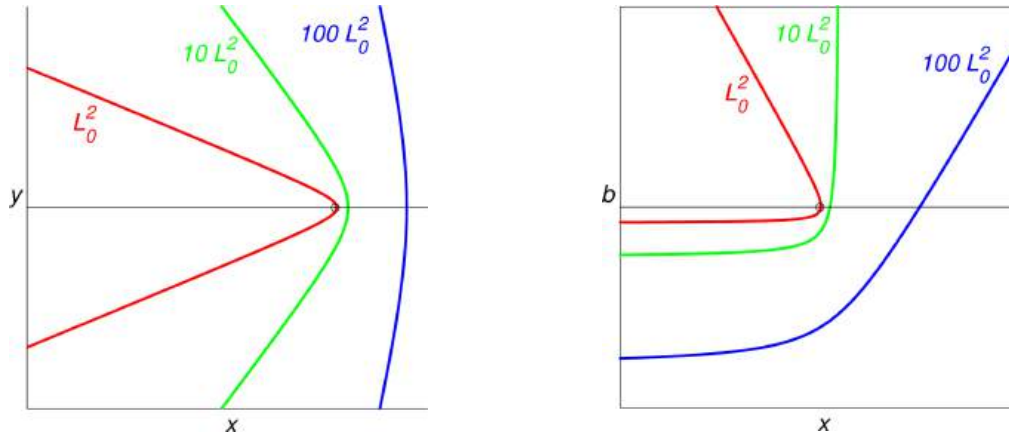


Figura 1.44: Trajetórias de espalhamento para valores diferentes de momento angular. Esquerda: Curvas hiperbólicas conforme deduzidas no tratamento do campo gravitacional. Direita: Mesmas curvas mostradas à esquerda reorientadas para que as assíntotas pelas quais incidem as partículas alfa se encontrem alinhadas como num feixe. O círculo preto indica a posição do núcleo do átomo de ouro (foco comum a todas as hipérboles). A nuvem eletrônica pode ser imaginada como ocupando as bordas da figura, região em que as curvas hiperbólicas seguem já suas assíntotas.

que utilizava x' convenientemente definido como o eixo de simetria da curva, nesse novo contexto é mais apropriado escolher o eixo x' como a direção de propagação do feixe de partículas alfa incidentes.

A Fig. 1.44 (esquerda) ilustra algumas trajetórias hiperbólicas com diferentes valores de momento angular conforme descritas no sistema de coordenadas utilizado no tratamento da força gravitacional. A posição do foco é marcada por um círculo, e permanece a mesma para todas as curvas por representar o centro de espalhamento. As assíntotas se encontram desalinhadas.

Alinhar todas elas para que representem a direção do feixe incidente requer simplesmente girar cada qual pelo ângulo de abertura φ da hipérbole. De acordo com a Eq. (1.394), esse ângulo vale

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{2E}{\alpha_q} b, \quad (1.406)$$

em que foi utilizada a Eq. (1.404). A Fig. 1.44 à direita mostra as mesmas hipérboles do gráfico à esquerda após serem giradas pelo ângulo φ correspondente. Como esperado intuitivamente, partículas com menor parâmetro de impacto (menor momento angular) se aproximam mais do alvo e por isso são mais desviadas.

Tendo colocado a solução da trajetória em termos das grandezas fisicamente relevantes E e b para a colisão, devemos agora extrair dela a grandeza mensurável como resultado do experimento, o ângulo ψ de espalhamento. De acordo com a geometria da situação experimental (Fig. 1.45), o ângulo ψ se relaciona à abertura angular φ da hipérbole segundo

$$\psi = \pi - 2\varphi \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\alpha_q}{2E} \tan \left(\frac{\pi - \psi}{2} \right) = \frac{\alpha_q}{2E} \cotan \left(\frac{\psi}{2} \right). \quad (1.407)$$

Essa expressão relaciona o parâmetro de impacto b (inacessível de forma direta no experimento) e a energia E da partícula incidente ao ângulo de espalhamento ψ medido após a interação. Ela representa uma maneira indireta de se medir o parâmetro de impacto se o alvo for pequeno e o observarmos de uma longa distância (mais aproximações!), pois nesse caso ψ se relaciona de maneira unívoca a b .

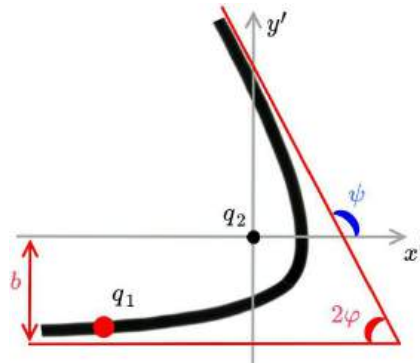


Figura 1.45: Relação entre o ângulo de espalhamento medido ψ e a trajetória hiperbólica seguida pela partícula alfa. Assume-se que a massa do núcleo de ouro seja muito maior do que a massa da partícula alfa.

Para que ψ seja aproximadamente o mesmo tanto no sistema de referências de coordenadas relativas \vec{r} (utilizado para simplificar o tratamento matemático do problema) quanto no referencial do laboratório, é preciso que $m_1 \ll m_2$, de forma que a partícula de maior massa permaneça praticamente em repouso no foco da hipérbole, hipótese válida no experimento de Rutherford. O mesmo pode não valer em outros experimentos de colisão, caso em que se faz necessário considerar o problema não só no referencial mais apropriado ao cálculo matemático, mas transformá-lo àquele que simplifique a interpretação dos dados experimentais.

1.8.3 Seção de choque de Rutherford

Finalmente, resta apenas *mais um* parâmetro experimental comumente definido na física das colisões, e que de fato é a grandeza a ser medida diretamente no experimento: a *seção de choque* σ da colisão.

A seção de choque representa a área efetiva do alvo, e pode ser entendida de forma intuitiva como a área que um anteparo ‘sólido’ teria se espalhasse o mesmo número de partículas que o alvo sob estudo nas mesmas condições. A seção de choque é dada pela razão entre o número de partículas espalhadas e o fluxo de partículas incidentes, a chamada *intensidade* I do feixe (i.e. número de partículas incidentes por unidade de tempo e de área). Supomos a seguir que I seja controlada e fixada pelo experimentador como uniforme no plano de incidência⁸⁷. A serventia da seção de choque é poder multiplicar I por σ para obter o número N de partículas espalhadas por unidade de tempo.

A quantidade medida diretamente no experimento é o número de partículas N emergentes em certo ângulo ψ em certo intervalo de tempo. Como vimos, a seção de choque fornece esse número, que deve ser

⁸⁷Essa suposição também é claramente falsa num experimento realista, pois para que fosse verdadeira o feixe precisaria se estender ao infinito em sua dimensão transversal à direção de propagação. Na realidade, o perfil de intensidade como função da posição nesse plano transversal precisa ser caracterizado e considerado na análise de dados.

dependente do ângulo⁸⁸, de forma que $\sigma = \sigma(\psi)$. A expressão a conectar essas quantidades é

$$N(\psi) = I\sigma(\psi)d\Omega. \quad (1.408)$$

em que

$$d\Omega = 2\pi \sin \psi d\psi \quad (1.409)$$

é o ângulo sólido⁸⁹ correspondente à abertura angular $d\psi$ na posição ψ . Podemos entender a Eq. (1.408) como o produto de duas quantidades: $d\Omega$ representa a cobertura angular de observação com relação a uma esfera (cobertura total), e o produto $I\sigma(\psi)$ fornece o número de partículas em cada valor pontual de ψ .

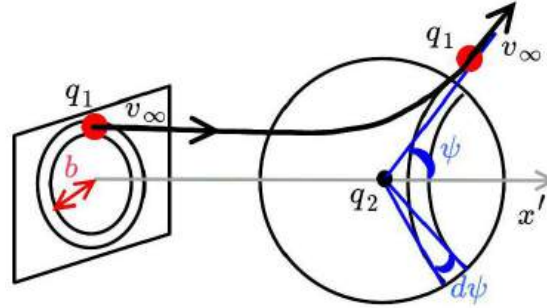


Figura 1.46: Geometria do espalhamento de Rutherford. O experimento revela como resultado o número de partículas espalhadas (por intervalo angular e por tempo) como função de ψ .

Mas o número de partículas espalhadas no ângulo ψ deve ser igual ao número de partículas incidentes com o parâmetro de impacto b correspondente (i.e. tudo que entra tem de sair!), dado simplesmente pela intensidade do feixe multiplicada pela área incidente. Pela geometria da colisão, ilustrada na Fig. 1.46, a área relevante é determinada pela região em torno da circunferência com raio igual a b no plano transversal ao feixe, $dA = 2\pi b db$, de forma que o número de partículas incidentes é

$$N = IdA = 2\pi Ib db. \quad (1.410)$$

Igualando as Eqs. (1.408) e (1.410) como consequência da conservação do número de partículas, temos que

$$2\pi Ib db = 2\pi I \sin \psi \sigma(\psi) d\psi, \quad \Rightarrow \sigma(\psi) = \frac{b}{\sin \psi} \frac{db}{d\psi}. \quad (1.411)$$

em que b e ψ precisam se conectar através da Eq. (1.407) para que a conservação possa ser aplicada. Notemos que a Eq. (1.411) é uma propriedade meramente *geométrica* da colisão, desde que azimutalmente simétrica⁹⁰.

⁸⁸Pode parecer estranho à primeira vista que a ‘área equivalente’ do alvo possa depender do ângulo. Mas se trata de uma situação com análogo clássico bastante simples: considere um disco fino sendo atingido por um feixe de partículas. Dependendo da direção de incidência, muitas partículas atingirão o disco, como é o caso da incidência normal, ou pouquíssimas partículas o farão, como ocorre na incidência a 90 graus da normal. A seção de choque condensa essa informação ‘geométrica’ sobre um alvo que, ao contrário do disco, não é ‘sólido’, mas se caracteriza por um campo de forças contínuo no espaço (o disco seria nesse caso representado por uma região descontínua de interação repulsiva, i.e. uma energia potencial dada pela função delta de Dirac numa superfície).

⁸⁹Como vimos anteriormente, o ângulo sólido representa a fração da área (multiplicada por 4π) de uma esfera coberta pela abertura angular considerada, e representa a generalização bidimensional de um ângulo ‘comum’. No caso ‘comum’, um ângulo é definido como a razão entre o comprimento de arco por ele subtendido e a distância radial a que o arco se encontra; de maneira análoga, o ângulo sólido é obtido dividindo-se a área da superfície esférica subtendida pelo raio da casca ao quadrado (e.g. o ângulo sólido de abertura de uma esfera visto de seu centro é 4π).

⁹⁰Podemos nesse caso entender a colisão como um mapa do plano de entrada numa esfera de saída. A região de interação atua

Determinar a seção de choque do espalhamento de Rutherford requer agora apenas utilizar a Eq. (1.407), uma propriedade da forma da interação saída de nosso modelo simplificado para a colisão. Fazendo a derivada da Eq. (1.407) e substituindo o resultado na Eq. (1.411), temos finalmente

$$\sigma(\psi) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\psi/2)}, \quad (1.412)$$

revelando a dependência $\sigma(\psi) \propto \sin^{-4}(\psi/2)$.

A seção de choque de Rutherford possui mínimo no ângulo $\psi = \pi$, para o qual a partícula espalhada retorna exatamente sobre o feixe, e aumenta dramaticamente para ângulos pequenos, com $\approx 1/\psi^4$. Essa divergência em $\psi = 0$ é simples de ser compreendida. Ângulo nulo corresponde à colisão frontal perfeita, para a qual não pode haver transmissão de partículas em nosso modelo de centro espalhador pontual. A seção de choque vai a infinito como artefato de que o número de partículas espalhadas tende a zero nesse ângulo. Na verdade, nosso modelo de partícula pontual no foco da hipérbole deixa de valer nesse caso, e o formato de $\sigma(\psi \approx 0)$ medido no experimento deve prover informação sobre as dimensões típicas das partículas em colisão⁹¹.

Notemos, por fim, que nossa dedução considera um centro espalhador atrativo, e não repulsivo, como deveria ser. De fato, a seção de choque depende do *quadrado* da constante α_q da força, sendo, portanto, curiosamente insensível a seu sinal! Por esse motivo, Rutherford não seria capaz de determinar com esse experimento a carga do núcleo de ouro, se de mesmo sinal ou oposta à carga das partículas alfa. Tudo o que varia entre um caso e outro é a posição do foco da hipérbole em cada colisão, algo impossível de detetar no experimento de Rutherford por conta de seu caráter estatístico, no qual a trajetória de uma única colisão não é acessível experimentalmente.

como uma ‘deformação’ geométrica das trajetórias, que sem ela seriam retilíneas tal qual no feixe incidente. Supor que isso seja verdade é também uma hipótese simplificadora. Uma interação genérica poderia em princípio ter muitos centros espalhadores atuantes ao mesmo tempo, caso em que se perderia a simetria azimutal e com ela a relação monotônica entre b e ψ . É essencial a suposição de centro espalhador único no modelo de Rutherford.

⁹¹Isto é, supondo que haja resolução experimental para tanto, já que exatamente nesse ângulo todas as partículas não interagentes do feixe (i.e. aquelas que passam longe de qualquer núcleo espalhador) atingem o detetor! O sinal, produzido por um número muito pequeno de partículas nessa região, se torna mascarado pelo enorme brilho do feixe, que faz o papel de ruído nesse caso.

Capítulo 2

Mecânica lagrangiana

Vimos no último capítulo como o conceito de ‘energia’ pode nos levar a uma nova compreensão das leis mecânicas. Pois bem, na época em que a mecânica era desenvolvida, lá pelo séc. XVII, havia vários princípios gerais como esse competindo pela primazia na descrição de sistemas mecânicos. Dentre os principais estão, obviamente, o princípio de conservação da energia (‘força viva’) que se inicia com Huygens e Leibniz, o princípio de conservação de momento, centro da teoria newtoniana, e o princípio de ‘mínima ação’, proposto por Maupertuis e desenvolvido à sua maturidade por Euler. Lagrange foi quem unificou todas essas ideias e levou a mecânica a um novo grau de coesão com a publicação de *Mécanique Analytique* em 1788.

A base do tratamento de Lagrange se inicia com o princípio de ‘trabalho virtual nulo’, sistematizado por d’Alembert em seu *Traité de Dynamique* em 1743 (o qual desenvolve melhor ideias propostas anteriormente por James Bernoulli). Lagrange reformula esse princípio para uni-lo ao contexto do cálculo das variações inventado por Euler, no caminho desenvolvendo técnicas matemáticas bastante poderosas – das quais se destaca a invenção dos multiplicadores de Lagrange – para lidar com sistemas mecânicos mais complexos.

Um tipo de complexidade matemática comumente encontrada no movimento de corpos e resolvida pela mecânica lagrangiana é a inclusão de *restrições* na região visitada pelo sistema mecânico no espaço. Tais *vínculos* são imposições ao movimento que resultam em seu aspecto último de forças cuja atuação é conhecida antes por seu *efeito* do que pela forma fundamental de seu campo. Por exemplo, uma partícula confinada a se mover sobre a superfície de uma mesa sofre a ação de forças de vínculo cujo efeito é limitar seu movimento ao plano horizontal. É possível nesse caso simples reconhecer a força de vínculo como produzida pela normal de coesão da mesa, ‘auto-regulada’ em cada ponto do material para se opor exatamente à força peso da partícula; no entanto, deixa de ser óbvio o formato das forças de vínculo em situações mais complexas.

De fato, tentar resolver as equações de movimento de Newton sem o uso de um método operacional mais adequado torna delicado mesmo o simples problema de tratar formalmente um corpo rígido que, como sabemos intuitivamente, possui um número fixo e pequeno de graus de liberdade *independentes*, apesar de composto por uma infinidade de partículas. A formulação lagrangiana da mecânica estabelece como descrever formalmente esse tipo de sistema (e de maneira eficiente!), pelo uso de *coordenadas generalizadas*.

Essas coordenadas formam um espaço multidimensional abstrato, o *espaço de configurações lagrangiano*, no qual a trajetória do sistema como um todo (em contraposição à trajetória de cada uma de suas partículas

no espaço euclidiano¹, como na descrição newtoniana) desenha uma única curva. O princípio variacional de Lagrange e Euler nos permite encontrar essa curva utilizando como requisito uma propriedade *global* da mesma, enunciada no *princípio de Hamilton*, como veremos.

A mecânica lagrangiana é uma forma totalmente nova de enunciar o movimento. Seu maior mérito é duplo: por um lado, introduzir novos métodos matemáticos poderosos para sua análise; por outro, estabelecer algumas das bases conceituais que dariam origem à mecânica hamiltoniana, essa sim uma visão coesa e cheia de simetrias caleidoscópicas que tornam a mecânica um dos pilares da física contemporânea.

2.1 Formulação lagrangiana da mecânica

2.1.1 Princípio de d'Alembert

O formalismo da mecânica sintetizado por Lagrange permite colocar vínculos e coordenadas generalizadas em bases matemáticas sólidas. A ideia é escrever as equações de movimento sob uma perspectiva *variacional*, em que o problema dinâmico se torne essencialmente estático. A vantagem mais óbvia de assim proceder será a inclusão de forças de vínculo de maneira simples: estas, sem aparecerem explicitamente nas equações, mantém ‘automaticamente’ as restrições ao movimento, reduzindo de maneira natural o número de graus de liberdade considerados na descrição do sistema.

A formulação lagrangiana da mecânica parte do princípio de d'Alembert de *trabalhos virtuais nulos*. Sua ideia consiste em considerar como variações ‘virtuais’ $\delta\vec{r}_i$ nas posições das partículas, i.e. variações hipotéticas na *configuração* instantânea do sistema, alterariam quantidades relacionadas à sua energia, como veremos. Em certo sentido, queremos determinar como o sistema se comporta nas ‘vizinhanças’ de sua configuração instantânea para entender qual das rotas possíveis a natureza escolhe na evolução temporal.

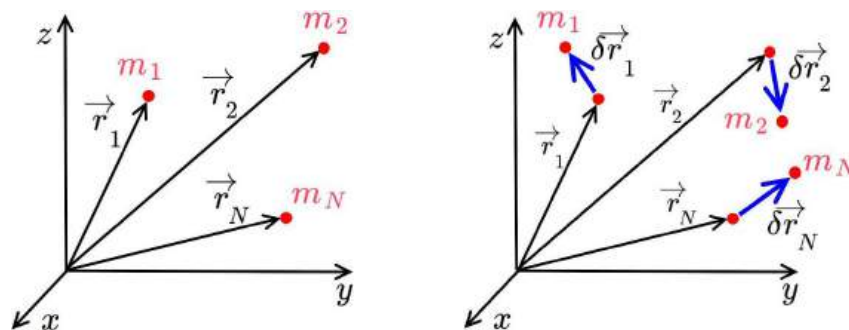


Figura 2.1: Esquerda: A mecânica newtoniana descreve um sistema mecânico através do conjunto de posições $\{\vec{r}_i(t)\}$ de todas as suas partículas. Direita: O princípio de d'Alembert considera como o sistema mecânico responde a uma mudança ‘virtual’ (i.e. hipotética) de configuração representada pelo conjunto de vetores infinitesimais $\{\delta\vec{r}_i(t)\}$.

Por um lado, uma mudança de configuração implicaria na realização de trabalho (virtual) associado às forças agindo sobre o sistema: i.e. aquele que *seria realizado* pelas forças externas caso a configuração do

¹Para evitar confusão entre espaços matemáticos abstratos e o espaço euclidiano que habitamos (chamado também de uma ‘variedade topológica’, i.e. um espaço topológico que segue localmente a geometria euclidiana), vamos nos referir a este último como o ‘Espaço’ (com letra maiúscula).

sistema fosse variada infinitesimalmente por deslocamentos $\delta\vec{r}_i$. Ele vale

$$dW = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (2.1)$$

A segunda face da moeda se refere ao trabalho (virtual) ‘sofrido’ pelo sistema, na forma de variação de energia cinética,

$$dK = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \delta\vec{r}_i. \quad (2.2)$$

O princípio de D’Alembert reza que *na trajetória efetivamente seguida pelo sistema* deve valer a identidade

$$dW - dK = 0. \quad (2.3)$$

Utilizando as Eqs. (2.1) e (2.2), vemos que essa condição implica na relação

$$\sum_i \left(\vec{F}_i - \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0, \quad (2.4)$$

algo claramente equivalente à formulação de Newton da dinâmica, já que, na trajetória física, temos pela segunda lei que $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$. Assim, a Eq. (2.4) nos fornece uma maneira de encontrar as variações $\delta\vec{r}_i$ escolhidas pela natureza – i.e. efetivamente seguidas pelo sistema em sua evolução temporal – partindo de um princípio variacional estático *equivalente* às leis de Newton para a dinâmica.

Uma consequência interessante dessa nova forma de enunciar a dinâmica é o fato de que forças de vínculo que não realizam trabalho podem ser desconsideradas do problema. De fato, se vale $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ para as forças \vec{f}_i de vínculo (‘vínculos passivos’), então a Eq. (2.4) passa a se referir apenas às demais forças $\vec{F}_i = \vec{F}_i - \vec{f}_i$. Essa situação, apesar de particular, possui aplicabilidade abrangente, e por isso nos restringimos a ela neste curso. Notemos, no entanto, que a mesma simplificação não pode ser adotada na descrição newtoniana do movimento, pois são as forças totais \vec{F}_i a agirem sobre cada partícula do sistema (mesmo aquelas cujo efeito é apenas manter um vínculo) que entram na segunda lei de Newton, não havendo distinção formal possível entre vínculos e as demais forças.

2.1.2 Inclusão de vínculos no movimento

No exemplo mencionado na introdução – uma partícula movendo-se sobre uma mesa –, observemos como é possível, uma vez conhecido o efeito da força de vínculo sobre o movimento – restringi-lo ao plano da mesa –, evitar falar das interações fundamentais que a produzem. Essa é a ideia dos vínculos. Se pararmos para pensar no assunto, concluiremos que ‘força normal’ efetivamente quer dizer: ‘alguma força que mantém a partícula movimentando-se sobre o plano da mesa, seja lá qual for a forma do campo de forças capaz de fazer isso (ele não nos interessa porque já conhecemos seu efeito sobre aquilo que nos interessa, o movimento)’.

Ao contrário do caso simples mencionado acima, em geral não é fácil divisar a dependência da força de vínculo nas variáveis do problema, mas apenas o vínculo em si. Por exemplo, um carrinho preso a uma montanha russa sofre ação dos trilhos na medida exata para manter-se sobre os mesmos. Seria complicado nesse caso ter de escrever uma expressão para força normal dependente da posição e da velocidade do carrinho para que o mesmo se mantivesse sempre sobre o trilho: parece mais fácil saber impor de alguma forma a *equação* que descreve a curva do trilho, conhecida previamente, como a região do Espaço *permitida*

para o movimento (todo o resto do Espaço fica proibido para ele). O formalismo lagrangiano resolve esse problema.

Vínculos são representados matematicamente por relações impostas às coordenadas da partícula. Quando podem ser escritos como uma função g nula das coordenadas, i.e.

$$g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0, \quad (2.5)$$

recebem o nome de *holonômicos*, e, caso contrário, de *não-holonômicos*. O exemplo do carrinho na montanha russa trilho é holonômico, caso em que $g(\{\vec{r}_i\}) = 0$ é a própria equação da curva desenhada pelo trilho no Espaço. No exemplo do corpo rígido, a imposição holonômica estabelece que todas as distâncias relativas $|\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}|$ entre suas partículas são constantes $c_{ii'}$, e as equações de vínculos se escrevem como um sistema, cada qual impondo a um par de partículas a condição $g(\vec{r}_i, \vec{r}_{i'}) = |\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}| - c_{ii'} = 0$.

Exemplos de vínculos não-holonômicos são relações que envolvam desigualdades, como uma partícula confinada a se mover ao interior de uma caixa (e.g. sua posição x precisa respeitar relação do tipo $-L/2 < x < L/2$) ou equações diferenciais, como vínculos sobre as velocidades, tal como ocorre no rolamento sem deslizamento de um corpo esférico sobre uma *superfície*. Neste último caso, sabemos que sua *velocidade* angular deve estar conectada à velocidade linear do centro de massa, mas não sabemos necessariamente conectar suas *coordenadas* de posição angular e linear, como requerido por uma condição holonômica².

As equações de vínculo podem ser escritas como um sistema de k equações, e utilizadas para eliminar *graus de liberdade* redundantes à descrição da dinâmica. Um sistema composto por N partículas possui em princípio $3N$ coordenadas espaciais independentes para fixar sua configuração. Vínculos no movimento impõem dependências entre essas coordenadas, tornando apenas $N' = 3N - k$ delas necessárias.

2.1.3 Coordenadas generalizadas e o espaço de configurações lagrangiano

A maneira mais elegante de eliminar variáveis redundantes é criar novas variáveis nas quais os vínculos holonômicos já sejam satisfeitos de forma implícita e automática. Buscamos um conjunto de coordenadas *independentes* que possam ser utilizadas para descrever as posições das N partículas do sistema dentro da região N' -dimensional do espaço de configurações (uma hipersuperfície!) permitida pelos k vínculos.

Denominamos essas novas variáveis de *coordenadas generalizadas* $q_j(t)$, com $j \in \{1, 2, 3, \dots, N'\}$. Os vetores posição \vec{r}_i se escrevem como funções de q_j por uma mudança de coordenadas,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \vec{r}_i(\{q_j\}, t). \quad (2.6)$$

Observemos que \vec{r}_i depende implicitamente do tempo através das novas coordenadas $q_j(t)$, mas pode conter ainda dependência explícita em t nos casos mais complicados em que a transformação entre os dois sistemas é dependente do tempo (e.g. vínculos variáveis no tempo). Em geral, consideraremos aqui apenas casos típicos em que \vec{r}_i não dependem explicitamente do tempo, mas mantemos a possibilidade de dependência explícita por completudeza. Assume-se que sempre existe a transformação inversa para se obter $q_j = q_j(\{\vec{r}_i\}, t)$.

Ao contrário do conjunto $\{\vec{r}_i\}$, as coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ não precisam necessariamente se agrupar em subconjuntos contendo as três componentes espaciais do vetor posição de cada partícula. De fato,

²Ao contrário do rolamento bidimensional, o rolamento sobre uma linha é equivalente a uma condição holonômica.

isso só ocorre quando trocamos de sistema de coordenadas (e.g. cartesianas para esféricas) por conveniência (mesmo que não haja vínculos). Em geral, as coordenadas generalizadas não formam vetores espaciais, e nem precisam ter a dimensão de grandeza espacial por representarem variáveis convenientes quaisquer, tais como ângulos.

Em conjunto, as coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ funcionam como projeções independentes de um ponto num espaço N' -dimensional, o *espaço de configurações lagrangiano*. Seu papel é tornar a dinâmica mais transparente, com o número de coordenadas N' igual ao número de graus de liberdade efetivos $3N - k$ do sistema. A trajetória do sistema mecânico segue uma *curva* nesse espaço parametrizada pelo tempo.

Exemplo: Partícula presa a um anel fixo. Consideremos como exemplo uma partícula restrita a se mover sobre um anel fixo no espaço para ilustrar a discussão acima sobre a inclusão de forças de vínculo e o uso de coordenadas generalizadas.

O movimento da partícula possui efetivamente apenas 1 grau de liberdade, representado de forma simples pela sua posição angular $\theta(t)$ com relação ao centro do anel. A distância da partícula ao centro do anel é fixa e igual a seu raio r_0 (e com essas considerações intuitivas já encontramos o conjunto de coordenadas ‘boas’ do problema!). No entanto, do ponto de vista formal da dinâmica newtoniana, o movimento é tridimensional no espaço cartesiano, requerendo três coordenadas $\{x(t), y(t), z(t)\}$ de posição para sua descrição.

Queremos descrever o movimento da partícula sob ação de alguma força externa $\vec{\mathcal{F}}$. Mas, por sofrer restrição em seu movimento, a partícula sofre também a ação de força de vínculo \vec{f} advinda do contato com o anel. Segundo Newton, a equação de movimento se escreve

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{\mathcal{F}} + \vec{f}. \quad (2.7)$$

Essa equação vetorial guarda em princípio toda a chave para a dinâmica, mas em geral é preciso escrevê-la como equações diferenciais para as *componentes* escalares do vetor posição (são poucos os casos em que conseguimos resolver a equação de movimento em forma vetorial). Se escrita no sistema cartesiano de eixos, a equação acima se expande nas componentes

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \mathcal{F}_x + f_x \\ m\ddot{y} = \mathcal{F}_y + f_y \\ m\ddot{z} = \mathcal{F}_z + f_z \end{cases}, \quad (2.8)$$

claramente algo muito complicado em relação ao que de fato precisa ser feito. Essas equações parecem precisar de 6 constantes arbitrárias dadas pelas condições iniciais, além de envolver a força de vínculo \vec{f} cuja forma não é conhecida. Várias dessas constantes, porém, são fixadas pela própria posição do anel, enquanto as forças de vínculo apenas impõem que as componentes do vetor posição variem em conjunto de forma a seguir o contorno do anel.

De fato, a região do espaço acessível à partícula – o anel – precisa ser definida *a priori*. Por simplicidade, escolhemos nossos eixos ordenados de maneira que o anel se encontre no plano $\mathcal{O}xy$. As equações de vínculo se tornam

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - r_0^2 = 0, \\ g_2(x, y, z) = z = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

nas quais já realizamos parcialmente a filosofia elegante de escrever vínculos na forma $q_j = cte$ (no caso, $z = 0$), o que livra as demais variáveis para serem independentes do vínculo considerado. Mas isso ainda não é o melhor que podemos fazer.

A geometria do vínculo nos sugere escolher, além do plano de movimento, o sistema de coordenadas cilíndricas. O anel fica então representado por uma equação simples nesse plano, dada pela função de vínculo

$$g(r) = r - r_0 = 0. \quad (2.10)$$

Logo, apenas a posição angular da partícula é necessária para descrever seu movimento, como havíamos comentado. A transformação de coordenadas que torna eficiente a descrição do sistema sujeito a vínculos é

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}, \quad (2.11)$$

que são as relações da Eq. (2.6) a unir a *coordenada generalizada* θ às coordenadas cartesianas de \vec{r} . O vínculo $r = r_0$ torna independente apenas a coordenada θ .

Temos a partir desse ponto duas alternativas. A primeira delas, a qual denominaremos ‘newtoniana’, consiste em obrigar a partícula a se mover sobre o anel explicitando todas as forças a agirem sobre ela, um procedimento pouco prático em situações mais complicadas. A equação de movimento [Eq. (2.7)] se escreve em coordenadas cilíndricas como

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \mathcal{F}_r + f_r \\ m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \mathcal{F}_\theta + f_\theta \end{cases}, \quad (2.12)$$

em que usamos $\vec{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_r \hat{r} + \mathcal{F}_\theta \hat{\theta}$ e $\vec{f} = f_r \hat{r} + f_\theta \hat{\theta}$.

E é neste ponto que precisamos utilizar o *efeito* conhecido das forças de vínculo – manter a partícula em trajetória circular independentemente de \mathcal{F}_r – para *impor* sobre as equações a forma de movimento esperada. Para tanto, a força de vínculo precisa manter $\ddot{r} = 0$, sendo, por um lado, tal qual uma força centrípeta com a forma $-mr_0\dot{\theta}^2 \hat{r}$ e, por outro, suficiente para cancelar exatamente a ação da componente radial da força externa de interesse, ou seja,

$$\vec{f} = -mr\dot{\theta}^2 \hat{r} - \mathcal{F}_r \hat{r}. \quad (2.13)$$

A força de vínculo (radial) não realiza trabalho nesse caso, pois o movimento ocorre apenas na direção tangencial $\hat{\theta}$ ao anel. Isso nos fornece as equações de movimento

$$\begin{cases} m\ddot{r} = 0, \\ mr\ddot{\theta} = \mathcal{F}_\theta. \end{cases} \quad (2.14)$$

A primeira equação pode ser integrada com a condição inicial de que $\dot{r} = 0$ (mais uma integração impõe $r(t) = r_0$). Com isso, obtemos a equação de movimento simplificada, como queríamos,

$$mr_0\ddot{\theta} = \mathcal{F}_\theta. \quad (2.15)$$

Em problemas simples como esse, é possível seguir a ação das forças de vínculo para determiná-las detalhadamente como fizemos. Problemas mais complicados, no entanto, requerem um procedimento uniforme e mais geral para lidar com essas situações. Vamos então à segunda alternativa de tratamento.

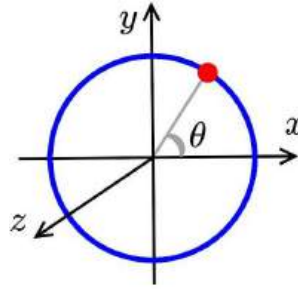


Figura 2.2: Partícula presa a um anel na descrição da Eq. (2.16).

Na mecânica lagrangiana, restringimos a trajetória da partícula pelo uso da equação do anel e a utilizamos para definir diretamente a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos \theta(t), \\ y(t) = r_0 \sin \theta(t), \\ z(t) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Como os vínculos já são aí impostos automaticamente, substituímos essas relações nas equações de movimento da Eq. (2.8) *ignorando* a força \vec{f} de vínculo, e obtemos por substituição direta

$$\begin{cases} mr_0 \ddot{\theta} \cos \theta = -\mathcal{F}_x \\ mr_0 \ddot{\theta} \sin \theta = -\mathcal{F}_y \end{cases}, \quad (2.17)$$

que são essencialmente a Eq. (2.15) se decompuermos a força externa em versores cilíndricos.

Na verdade, este procedimento é o que adotaríamos (de forma inconsciente) se nos fosse colocado o problema em questão. De fato, as forças de vínculo se perdem nele, e nem precisam ser mencionadas³. O formalismo lagrangiano se propõe a reconhecer essa situação e a oferecer formas de sistematizar esse tipo de raciocínio sem que seja necessário fazer tantas considerações pontuais e específicas a cada problema.

2.1.4 Equações de Lagrange para o movimento

O enunciado do princípio de D'Alembert expresso na forma da Eq. (2.4) guarda semelhança excessiva com a expressão newtoniana da segunda lei, obscurecendo seu potencial de prover uma formulação totalmente nova da mecânica. Lagrange mostrou como reformular a Eq. (2.4), escrita em termos de forças e deslocamentos virtuais, como uma condição para a energia do sistema ou, mais precisamente, para uma combinação especial de suas energias cinética e potencial, a *função lagrangiana*.

É interessante utilizarmos desde o início em nossa dedução as ferramentas matemáticas tornadas disponíveis na formulação lagrangiana. Restringimos as variações virtuais na configuração do sistema para que sejam compatíveis com os vínculos assumidos *a priori*. Isso nos permite reduzir a dimensão do problema matemático pelo uso de coordenadas generalizadas que eliminem os graus de liberdade redundantes. O caminho a seguir é então reescrever o princípio de D'Alembert em termos das novas variáveis independentes $\{q_j(t)\}$, o que fazemos usando as equações de transformação da Eq. (2.6), e nelas impor variações $\{\delta q_j(t)\}$ compatíveis com os vínculos *por construção*.

³Veremos como recuperar as forças de vínculo no formalismo lagrangiano, pelo uso dos multiplicadores de Lagrange.

Notemos primeiramente que desenvolver a mecânica a partir da Eq. (2.4) nos permite considerar de maneira simples forças de vínculo que não executem trabalho ('vínculos passivos'), i.e. cuja ação total seja ortogonal à aceleração da partícula e, portanto, não forneça energia ao sistema. Podemos utilizar esse fato para escrever a força total agindo sobre cada partícula como a composição de duas partes, uma que englobe as forças externas de interesse $\vec{\mathcal{F}}_i$ e outra contendo as forças de vínculo \vec{f}_i , i.e. $\vec{F}_i = \vec{\mathcal{F}}_i + \vec{f}_i$, tal que a Eq. (2.4) possa ser escrita

$$\sum_i \left(\vec{\mathcal{F}}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad \text{pois} \quad \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.18)$$

Ao contrário do que ocorre no formalismo newtoniano, na mecânica lagrangiana as forças de vínculo efetivamente 'somem' da formulação do problema! Vamos nos restringir nestas notas a essa situação⁴.

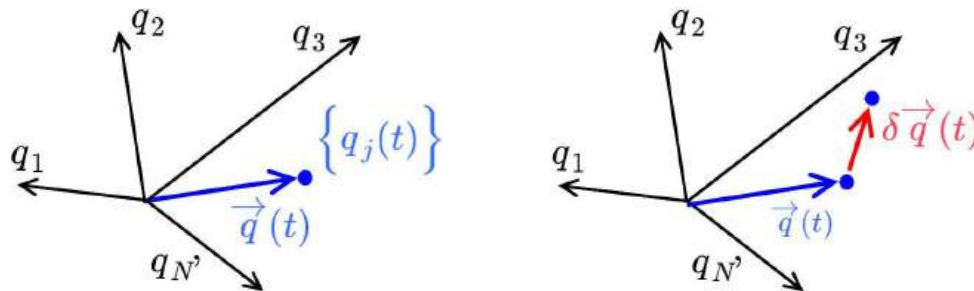


Figura 2.3: Esquerda: Na mecânica lagrangiana, o conjunto de coordenadas $\vec{q} := \{q_j(t)\}$ representa a configuração do sistema mecânico *como um todo* num espaço abstrato N' -dimensional, substituindo a visão mais direta (e crua) do formalismo newtoniano (Fig. 2.1). Direita: Nesse espaço, o princípio de D'Alembert pode ser escrito em termos de um único vetor variação $\delta \vec{q} := \{\delta q_j(t)\}$.

Enunciar a Eq. (2.18) em termos do conjunto de coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ requer realizarmos a troca de variáveis na derivada temporal $\ddot{\vec{r}}_i$ e também no deslocamento virtual $\delta \vec{r}_i$. A primeira se faz pela regra da cadeia da derivação, um passo que será muito utilizado daqui em diante. Utilizamos a identidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t), t) &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{d}{dt} q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \frac{d}{dt} q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{d}{dt} q_k + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}}_i &= \vec{v}_i = \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Já os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_i$ no Espaço se relacionam a seus correspondentes δq_j no espaço de configurações pela primeira ordem da expansão em série de Taylor, visto que são infinitesimais, i.e.

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (2.20)$$

Com essas considerações, passamos à análise do princípio de D'Alembert nas novas variáveis.

O primeiro termo da Eq. (2.18) corresponde ao trabalho infinitesimal realizado pelas forças $\vec{\mathcal{F}}_i$ e, usando

⁴A mesma dedução apresentada aqui se aplica ao caso em que as forças de vínculo podem fornecer energia à partícula, como ocorre e.g. para vínculos variáveis no tempo.

a Eq. (2.20), vale⁵

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left(\sum_i \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^{N'} Q_j \delta q_j, \quad \text{em que} \quad Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.21)$$

Essa expressão nos impele a definir de maneira natural a *força generalizada* Q_j como o equivalente de uma força agindo no espaço de coordenadas generalizadas.

Observemos que as forças generalizadas Q_j não precisam possuir dimensão de força newtoniana (consequência direta do fato de que as coordenadas q_j não precisam ter dimensão de Espaço). Apenas o produto $Q_j \delta q_j$ precisa possuir dimensão de energia, por corresponder a um trabalho (e.g. q_j pode representar uma posição angular e Q_j , um torque, de forma que seu produto possua a dimensão correta: ou coisas mais complicadas!).

Para forças advindas de um campo conservativo, podemos ainda descrevê-las em termos de uma função energia potencial $U = U(\{\vec{r}_i\})$ na forma $\vec{\mathcal{F}}_i = -\vec{\nabla}_i U$, com o que a Eq. (2.21) nos fornece

$$Q_j = - \sum_i \vec{\nabla}_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.22)$$

Mas esse somatório representa a regra da cadeia aplicada ao caso de troca de variáveis $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\})$ na energia potencial, pois se fizermos $U = U(\{\vec{r}_i(\{q_j\})\}) = U(\{q_j\})$ temos

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (2.23)$$

Assim, a componente j da força generalizada da Eq. (2.22) se escreve

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j}, \quad (2.24)$$

assumindo portanto a expressão esperada intuitivamente para uma ‘força’, dada pela derivada parcial da energia potencial com relação à coordenada relevante. Essa força generalizada advém, no entanto, da variação da energia potencial traduzida ao espaço de configurações lagrangiano, mais abstrato e N' -dimensional. Concluimos, assim, o tratamento do primeiro termo da Eq. (2.18), com o resultado

$$\sum_{i=1}^N \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = - \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.25)$$

Resta-nos então tratar do segundo termo da Eq. (2.18), advindo diretamente da derivada temporal do momento, $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i$. Por se referir à variação do momento das partículas, esse termo deve ter relação com a energia cinética [recordemos a dedução da Eq. (1.261)]. Com o uso da Eq. (2.20), obtemos

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.26)$$

Podemos diminuir a ordem da derivada e fazer aparecer o vetor velocidade (com o intuito de conectar a expressão à energia cinética do sistema) completando a derivada temporal,

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right]. \quad (2.27)$$

⁵Lembrando que os somatórios em i se referem à soma em todas as partículas N (i.e. N vetores espaciais ou $3N$ coordenadas espaciais), enquanto aqueles em j se referem à soma em todas N' coordenadas generalizadas independentes.

No segundo termo do membro direito, podemos trocar a ordem das derivadas para escrever

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}. \quad (2.28)$$

Já o primeiro termo requer analisarmos com atenção a Eq. (2.19). De fato, de acordo com essa expressão, podemos entender a Eq. (2.28) como uma função vetorial $\vec{v}_i = \vec{G}$ do tipo

$$\vec{G}(\{\dot{q}_j\}, t) = \sum_{j=1}^{N'} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i. \quad (2.29)$$

Se entendermos essa expressão como a regra da cadeia da derivada, a dependência de \vec{G} nas velocidades generalizadas \dot{q}_j fica determinada de forma explícita pelo somatório. Se encararmos $\{\dot{q}_j\}$ como argumentos de G independentes⁶ de q_j , então é evidente que a derivada parcial buscada na Eq. (2.28) se calcula da mesma forma que

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{G}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}; \quad (2.30)$$

a derivada $\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$ da Eq. (2.19) fornece, portanto, a identidade

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.31)$$

ou seja, dito de maneira coloquial, podemos ‘cancelar ou incluir os pontos em cima e em baixo’.

Usando as identidades dadas pelas Eqs. (2.28) e (2.31), eliminamos na Eq. (2.27) as posições q_j em favor das velocidades \dot{q}_j para levá-la à forma

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right] = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{m_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{m_i}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_j} \right], \quad (2.32)$$

em que na última passagem completamos as derivadas nos dois termos (i.e. $\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i^2}{\partial q_j}$). Os somatórios resultantes se referem à energia cinética $K = \sum_i m_i v_i^2/2$ do sistema, e nos permitem simplificar a expressão para

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}. \quad (2.33)$$

Substituindo esse resultado na Eq. (2.26), finalizamos a edição do segundo termo da Eq. (2.18) com a expressão

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (2.34)$$

Nossas manipulações dos primeiro e segundo termos da Eq. (2.18), dadas pelas Eqs. (2.25) e (2.34), os conectam de maneira bem sucedida à energia. Substituímos então esses resultados de volta na Eq. (2.18) para enunciar o princípio de D’Alembert como uma condição sobre as energias cinética e potencial do sistema, na forma

$$\sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (K - U)}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0, \quad (2.35)$$

expressão que reúne de uma só vez as variações virtuais de todas as coordenadas generalizadas numa única condição. Além disso, ela simplifica o princípio para uma soma de quantidades escalares.

⁶O formalismo lagrangiano encara q_j e \dot{q}_j como argumentos *independentes* da função lagrangiana.

Na verdade, as variações δq_j se referem a coordenadas generalizadas *independentes*, valendo portanto que a variação virtual em uma delas não pode afetar nenhuma das outras: a soma de termos incapazes de se influenciarem mutuamente só pode ser nula se cada um deles se anular. Desacoplamos assim os termos do somatório da Eq. (2.35) considerando um sistema de N' equações, uma para cada coordenada generalizada q_j , pela imposição

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(K - U)}{\partial q_j} = 0, \quad \forall j. \quad (2.36)$$

É preciso nesse ponto analisar a *forma* da expressão, algo que faremos bastante nas maneiras lagrangiana e hamiltoniana de pensar a mecânica⁷. Esteticamente falando, é insatisfatório que uma equação de movimento fundamental como essa possa se referir a duas quantidades distintas na dinâmica: seu primeiro termo opera apenas na energia cinética, enquanto o segundo, na quantidade $K - U$.

Para tornar mais simétrica e elegante a expressão matemática da Eq. (2.36), o caminho mais simples é, como sempre, fazer-lhe um ‘puxadinho’ a fim de mudar sua forma sem lhe alterar o significado. Notamos que a energia cinética é de fato função dos argumentos $\{q_j\}$ e $\{\dot{q}_j\}$, mas que a energia potencial é muitas vezes suposta como função apenas das coordenadas de posição, ou seja,

$$K = K(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \quad \text{e} \quad U = U(\{q_j\}). \quad (2.37)$$

Se o modelo de força em questão for mesmo desse tipo, então podemos acrescentar impunemente a função U no primeiro termo da Eq. (2.36), já que valerá $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$ nesse caso. Portanto, para campos de força dependentes apenas das posições (e não das velocidades), o princípio de D’Alembert equivale a um sistema de equações diferenciais, uma para cada coordenada generalizada independente, nestas notas chamadas de *equações de Lagrange*,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad \forall j. \quad (2.38)$$

em que a *função lagrangiana* se define como⁸

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = K(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) - U(\{q_j\}). \quad (2.39)$$

Essa definição sempre vale para o tratamento de sistemas mecânicos, deduzida como foi a partir das leis de Newton no formato de D’Alembert.

A segunda maneira de proceder para reescrever a Eq. (2.36) na forma elegante da Eq. (2.38) consiste em determinar o que precisaria ser mudado em nossa dedução (e onde) para que chegássemos a ela⁹. Essa solução, de maior abrangência, é construída redefinindo-se a energia potencial para contemplar também *termos dependentes da velocidade*. É simples mostrar que generalizar a Eq. (2.24) para a forma

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \quad (2.40)$$

⁷Um dos princípios informais da física é a busca por expressões fundamentais elegantes: se a expressão encontrada não tiver essa propriedade, provavelmente está errada ou não é fundamental.

⁸É comum encontrar o símbolo ‘ \mathcal{L} ’ sendo utilizado para denotar a densidade lagrangiana em sistemas contínuos, e não a função lagrangiana, como aqui fazemos. Vamos ignorar essa aparente ‘convenção’, uma vez que utilizar a letra ‘ L ’ para a função lagrangiana criaria confusão com o momento angular (denotado por esta letra) em diversos contextos encontrados nestas notas. A mesma confusão não acontece com a densidade lagrangiana, até porque só utilizamos essa função brevemente no tratamento do limite contínuo de oscilações acopladas.

⁹Nessa maneira de ver, a deselegância discreta da Eq. (2.36) nos impele a concluir que algo deve faltar-lhe: e buscá-lo.

é suficiente para expressar o princípio de D'Alembert como na Eq. (2.38), i.e. em termos da função lagrangiana, que nesse caso se escreve

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = K(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) - U(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}). \quad (2.41)$$

Apesar de possível, esse cenário não seria mais do que mera curiosidade matemática caso não houvesse pelo menos um campo de forças notório que seguisse o formato da Eq. (2.40); e, de fato, há: a força de Lorentz pode ser escrita em termos de uma energia potencial dependente da velocidade exatamente como na Eq. (2.40), conforme veremos.

Observemos com maior atenção a forma e a origem dos termos da equação de Lagrange. O primeiro termo advém da derivada temporal da energia cinética, e portanto se refere à *atualização do estado* da partícula: tem relação com a variação temporal da quantidade $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, que faz então as vezes de momento – o momento generalizado *canonicamente conjugado* à coordenada q_j . Já o segundo termo da Eq. (2.38) tem origem na energia potencial do campo de forças externo, representando assim a *fonte* ou *causa* do movimento. O fato interessante a notar aqui é que ambos os termos (definição do momento generalizado e de fontes do movimento) são determinados por uma *única função da configuração do sistema mecânico*: a lagrangiana¹⁰. Essa síntese formal do movimento se torna ainda mais profunda no formalismo hamiltoniano da mecânica.

Um último ponto digno de nota é a maneira como as equações de Lagrange tornam coordenadas q_j e velocidades \dot{q}_j argumentos *independentes* da função lagrangiana (notemos como os termos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ desempenham papéis independentes nas equações de movimento). No entanto, essas mesmas quantidades, vistas não como parâmetros físicos, mas como funções $q_j(t)$ e $\dot{q}_j(t)$ do tempo, não são de fato independentes no sentido de que conhecer uma revela a outra, i.e. toda a informação relevante sobre o movimento já se encontra na função $q(t)$ ou $\dot{q}(t)$. De fato, esse aspecto das equações de Lagrange apenas reflete o fato *físico* de que posições e velocidades desempenham papéis diferentes no movimento: cada qual se refere a uma das duas formas de energia mecânica disponíveis, cinética (velocidades) ou potencial (coordenadas). E por isso precisamos de duas constantes (posição e velocidade iniciais) por dimensão j do espaço de configurações para deduzirmos o futuro ou o passado de um sistema mecânico. Apesar dessas indicações sutis em favor da independência dessas quantidades, resta ainda no formalismo lagrangiano a ‘estranheza’ de que as velocidades não pertencem ao espaço de configurações. Essa assimetria formal (mas pouco física, como dissemos) entre posições e velocidades é também remediada no formalismo hamiltoniano.

A equações de Lagrange [Eq. (2.38)] representam as equações fundamentais da mecânica no formalismo lagrangiano, reunidas num sistema de N' equações diferenciais para a função lagrangiana (uma para cada coordenada generalizada independente). Assim como a segunda lei newtoniana, as equações de Lagrange nos fornecem as condições *locais*, i.e. diferenciais, a serem satisfeitas por cada arco infinitesimal da curva (N' -dimensional) de trajetória seguida pelo sistema no espaço de configurações nas coordenadas $\{q_j\}$.

Embora a formulação local de Lagrange (i.e. em termos de uma equação diferencial) para a dinâmica não nos forneça muitas pistas do motivo físico último por trás do princípio de D'Alembert (que ainda tem como base conceitual as leis de Newton), o tipo de equação diferencial encontrado fornece na verdade a porta de entrada para formularmos a mecânica em termos de um princípio variacional se nos colocarmos a pergunta

¹⁰Observemos que, ao contrário disso, no formalismo newtoniano o momento $\vec{p}_i = m\vec{v}_i$ de uma partícula é sempre definido da mesma forma e de maneira independente da lei dinâmica $\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$ que permite atualizá-lo.

natural: mas que diabos produz uma equação com essa forma? E aqui começamos a nos desvencilhar conceitualmente de Newton para vermos a brincadeira começar a se tornar bem mais interessante.

2.1.5 Aplicação básica do formalismo lagrangiano

O programa da mecânica para encontrar as equações do movimento de um sistema de partículas sob ação de um campo de forças conservativo e eventualmente sujeito a vínculos que não realizam trabalho passa a ser, no formalismo lagrangiano, o seguinte:

1. Primeiramente, definir a lagrangiana do sistema, uma função das coordenadas generalizadas $\{q_j\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, em princípio independentes, que descrevem qualquer configuração instantânea do sistema físico nesse espaço abstrato. Essas coordenadas se relacionam aos vetores espaciais de posição das N partículas do sistema através de transformações de coordenadas $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\{q_j\})$, $i = 1, 2, \dots, N$, e são comumente parametrizadas por um único parâmetro, o tempo t . A lagrangiana é definida como

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = K(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) - U(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t), \quad (2.42)$$

em que K e U são as energias cinética e potencial do sistema de partículas, respectivamente. Em especial, a energia potencial admite campos de forças dependentes da velocidade se definirmos a força generalizada como

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.43)$$

A escolha das coordenadas generalizadas segue em geral de considerações de simetrias do sistema.

2. O segundo passo consiste em incluir diretamente na lagrangiana eventuais restrições ao movimento. Isso pode ser feito nos casos mais simples pela escolha de sistema de coordenadas apropriado, tal que uma ou mais coordenadas sejam já de início constantes, ou então que sejam relacionadas por funções simples. Vínculos holonômicos desse tipo permitem a eliminação de um número k de coordenadas em favor de outras, diminuindo a dimensão do espaço de configurações de $3N$ coordenadas espaciais para $N' = 3N - k$ coordenadas generalizadas *independentes* no contexto do sistema tratado.

Podem ocorrer, no entanto, vínculos impostos por equações relacionando as derivadas de coordenadas, de maneira que as variações funcionais $\delta q_j(t)$ não sejam mais independentes. Introduziremos a técnica dos multiplicadores de Lagrange para tratar desses casos. Finalmente, vínculos podem assumir quaisquer formas funcionais imagináveis, inclusive variáveis no tempo. O importante em todos os casos é encontrar alguma maneira de incluí-los na função lagrangiana.

3. Finalmente, utilizamos o fato de que a função lagrangiana é o integrando da ação, o funcional que precisa ser estacionário quando calculado sobre a trajetória física do sistema no espaço de configurações. Encontrar a trajetória requer então impor à função lagrangiana que satisfaça o sistema de N' equações de Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (2.44)$$

Essas equações são equivalentes às equações newtonianas do movimento no caso de sistemas conservativos sujeitos a vínculos passivos, com a facilidade de já permitirem a inclusão de alguns tipos de vínculos e tratarem do conjunto mínimo de coordenadas necessárias (igual ao número de graus de liberdade

do sistema no espaço de configurações). Além disso, algumas delas são integráveis de forma simples, como veremos abaixo, efetivamente reduzindo ainda mais a dimensão do espaço de configurações. A forma acima da equação de Lagrange sempre assume coordenadas generalizadas *independentes*!

Vejamos a seguir como o formalismo lagrangiano ilumina certos aspectos já estudados da mecânica, tais como leis de conservação, e como entendê-lo em termos de um princípio variacional.

Exemplo revisitado: Partícula presa a um anel fixo. Voltamos ao problema da Fig. 2.2 para deduzir a equação de movimento segundo o procedimento da mecânica lagrangiana. Em primeiro lugar, supomos que a força \vec{F} de interesse esteja associada a energia potencial $U(\vec{r})$. A lagrangiana da partícula se escreve

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}), \quad (2.45)$$

e seu movimento no espaço deve seguir a restrição $|\vec{r}| = r_0$ imposta pelo anel fixo.

Assim como no caso da equação newtoniana de movimento, escrita inicialmente em forma vetorial mas transformada em um sistema de equações para as componentes vetoriais em sistema de coordenadas apropriado, aqui também é preciso escolher um sistema de coordenadas para escrever as equações de movimento. Notemos que, independentemente dessa escolha, a lagrangiana não muda de valor e as equações de movimento se encontram sempre pela forma genérica da Eq. (2.38), uma vez que nossa dedução não inclui hipóteses restritivas desse tipo.

Conforme comentado anteriormente, a equação de vínculo da Eq. (2.10) nos impele a escolher a coordenada generalizada θ definida pela Eq. (2.11), pois o vínculo torna constante uma das coordenadas cilíndricas. A lagrangiana assume a forma explícita

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - U(r, \theta). \quad (2.46)$$

Podemos incluir o vínculo diretamente na função lagrangiana, fazendo simplesmente $r = r_0$. Temos nesse caso uma escolha de variáveis $\{q_j\}$ que elimina de maneira direta uma dimensão do problema. Aplicamos nesse caso a Eq. (2.38) para a única variável do problema, i.e. $q_j = \theta$, e obtemos a Eq. (2.15).

Outra forma de incluir os mesmos vínculos seria escrever a lagrangiana nas coordenadas cartesianas,

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(x, y), \quad (2.47)$$

e calcular formalmente a troca de variáveis pela transformação da Eq. (2.11), de onde obtemos

$$\dot{x} = -r_0\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{e} \quad \dot{y} = r_0\dot{\theta} \cos \theta. \quad (2.48)$$

As duas maneiras de calcular nos levam à lagrangiana *restrita ao anel* como

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\theta}^2 - U_0(\theta), \quad (2.49)$$

em que $U_0(\theta) = U(r_0, \theta)$ independe de r . A equação de movimento é, segundo a Eq. (2.38),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr_0^2\ddot{\theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (2.50)$$

Essa equação nos fornece o resultado esperado dado pela Eq. (2.15), visto que $\mathcal{F}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$ em coordenadas cilíndricas. Notemos que a força generalizada $Q_\theta = -\frac{\partial U}{\partial \theta}$ corresponde aqui ao torque associado à coordenada generalizada θ , e portanto não possui dimensão de força: de fato, $Q_\theta = r_0 \mathcal{F}_\theta$, relação que pode também ser encontrada pelo uso da definição de Q na Eq. (2.21) e derivando a transformação de coordenadas da Eq. (2.11).

Exemplo: Sistema de massas e roldana. Vimos na Seção 1.3.2 um sistema sujeito a forças de vínculo, a ‘máquina de Atwood’ (Fig. 1.6). O formalismo lagrangiano é especialmente adaptado para resolver esse tipo de problema de maneira simples. Escrevemos primeiramente a lagrangiana do sistema pela definição,

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) := K - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 - m_1 g z_1 - m_2 g z_2. \quad (2.51)$$

A corda inextensível com comprimento ℓ impõe uma condição de vínculo sobre as coordenadas das duas massas. Encontrando-se a roldana na altura h , os pedaços de corda unindo a roldana às massas possuem comprimentos $h - z_1$ e $h - z_2$, de forma que a função de vínculo se expressa como

$$g(z_1, z_2) = \ell - (h - z_1) - (h - z_2) = 0. \quad (2.52)$$

Segue dessa função que $z_2 = 2h - \ell - z_1$ e $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$, permitindo eliminar uma das coordenadas de posição já na lagrangiana, que assume a forma simplificada

$$\mathcal{L}(z_1, \dot{z}_1) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}_1^2 - (m_1 - m_2) g z_1 - m_2 g (2h - \ell). \quad (2.53)$$

A equação de movimento na única coordenada restante nos fornece imediatamente o resultado anterior,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} = -(m_1 - m_2) g - (m_1 + m_2) \ddot{z}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (2.54)$$

Note como a força de vínculo permanece ‘oculta’ pelo formalismo, o que é vantajoso para quem busca apenas entender a dinâmica da partícula.

Exemplo: Partícula presa a um anel em rotação uniforme. Consideremos o exemplo da partícula presa ao anel com a condição adicional de que o mesmo se mantenha em rotação uniforme imposta por um agente externo, conforme ilustrado pela Fig. 2.4, e que o sistema se encontre orientado verticalmente no campo gravitacional uniforme terrestre.

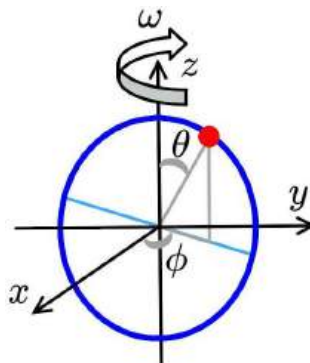


Figura 2.4: Partícula presa a um anel girante.

Em coordenadas cartesianas, a lagrangiana da partícula se escreve como

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (2.55)$$

Mas a posição da partícula precisa pertencer ao anel em rotação, cuja equação pode ser escrita como

$$(x \cos \phi + y \sin \phi)^2 + z^2 = r_0^2, \quad (2.56)$$

em que ϕ é o ângulo entre o plano do anel e o eixo x . É esse ângulo que varia no tempo pela imposição externa $\dot{\phi} = \omega t$. Essa equação serve como restrição holonômica dependente do tempo, nesse caso escrita como

$$g(x, y, z, t) = (x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t))^2 + z^2 - r_0^2 = 0. \quad (2.57)$$

O anel restringe o movimento da partícula a uma curva unidimensional que se encontra sobre uma esfera. A forma mais simples de parametrizar sua posição é utilizando coordenadas esféricas,

$$\begin{cases} x(\theta) = r_0 \cos \phi \sin \theta \\ y(\theta) = r_0 \sin \phi \sin \theta \\ z(\theta) = r_0 \cos \theta \end{cases}. \quad (2.58)$$

Essa parametrização já impõe automaticamente as restrições ao movimento. As velocidades cartesianas seguem as equações com vínculos inclusos

$$\begin{cases} \dot{x}(\theta) = r_0(-\omega \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta) \\ \dot{y}(\theta) = r_0(\omega \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta) \\ \dot{z}(\theta) = -r_0 \dot{\theta} \sin \theta \end{cases}, \quad (2.59)$$

em que usamos a condição $\phi = \omega t$. Substituindo essas relações em \mathcal{L} , obtemos

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}mr_0^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) - mgr_0 \cos \theta. \quad (2.60)$$

Note como o formalismo lagrangiano tornou o problema tridimensional com vínculos um problema unidimensional sem vínculos explícitos em \mathcal{L} . Novamente, a partícula só pode se mover sobre uma curva, e portanto a lagrangiana possui apenas 1 grau de liberdade, como esperado. As forças de vínculo, apesar de dependerem do tempo, atuam sempre ortogonalmente à direção de movimento e por isso não realizam trabalho, tornando a lagrangiana independente do tempo e o movimento conservativo.

A equação de movimento é obtida pela aplicação da equação de Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr_0^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta + mgr_0 \sin \theta - mr_0^2 \ddot{\theta} = 0, \quad (2.61)$$

que pode ser reescrita como

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r_0} \left(\frac{r_0 \omega^2}{2g} \sin 2\theta + \sin \theta \right). \quad (2.62)$$

Essa equação pode ser estudada para obter comportamentos limites ou pontos de equilíbrio estável e instável. Por exemplo, no limite em que $\omega = 0$, ela se torna a equação de um pêndulo simples, e a partícula se comporta como um oscilador harmônico para $\theta \approx \pi$ (notemos que $\theta = 0$ corresponde ao ponto $z = r_0$ por conta da escolha de parametrização, sendo a posição de equilíbrio estável em $z = -r_0$ descrita pelo ângulo $\theta = \pi$).

Por analogia com a Eq. (2.39), podemos interpretar o termo dependente de θ na lagrangiana da Eq. (2.60) como a energia potencial efetiva do sistema¹¹,

$$U_{ef}(\theta) = \underbrace{-\frac{1}{2}mr_0^2\omega^2 \sin^2\theta}_{U_c(\theta)} + \underbrace{mgr_0 \cos\theta}_{U_g(\theta)}, \quad (2.63)$$

e a partir desta estudar propriedades globais do movimento. Assim como a conservação do momento angular introduz na interação gravitacional entre dois corpos um termo centrífugo na energia potencial efetiva, aqui as forças de vínculo produzem um termo de energia efetiva $U_c(\theta)$ relacionado à rotação forçada do anel (um termo ‘centrípeto’, por assim dizer) que deve ser somado à energia potencial gravitacional $U_g(r)$ usual.

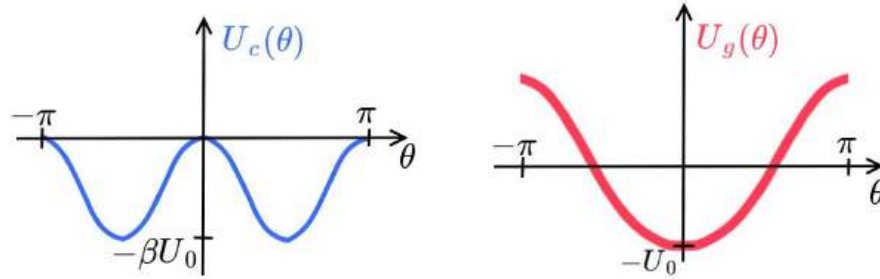


Figura 2.5: Termos parciais da energia potencial efetiva $U_{ef}(\theta) = U_c(\theta) + U_g(\theta)$ associada ao movimento de uma partícula presa a um anel girante. Esquerda: Energia potencial centrípeta, $U_c(\theta)$. Direita: Energia potencial gravitacional, $U_g(\theta)$.

O formato de $U_{ef}(\theta)$ nos sugere trocar de coordenadas generalizadas (algo que sempre podemos fazer no tratamento lagrangiano) para que seu mínimo não recaia sobre um ponto de descontinuidade de θ . O problema é que $0 \leq \theta \leq \pi$ nas coordenadas esféricas originalmente escolhidas, e por isso o mínimo de $U_g(\theta)$ ocorre em $\theta = 0$, tornando desagradável o cálculo da derivada nesse ponto. Fazemos por isso $\theta \rightarrow \theta - \pi$ e dobramos seu intervalo para $-\pi \leq \theta \leq \pi$ a fim de melhor descrevermos pontos em torno do mínimo de energia¹². A energia potencial efetiva se denota na forma simplificada

$$U_{ef}(\theta) = -U_0 (\cos\theta + \beta \sin^2\theta), \quad (2.64)$$

em que $U_0 = mgr_0$ é a constante da energia potencial associada à contribuição gravitacional e $\beta = r_0\omega^2/(2g)$ sintetiza a importância relativa da rotação na dinâmica. Com a redefinição de θ , a posição de equilíbrio estável na ausência de rotação passa a ser $\theta = 0$.

As energias parciais $U_c(\theta)$ e $U_g(\theta)$ são ilustradas na Fig. 2.5. A energia potencial $U_{ef}(\theta)$ resultante da soma desses termos tenderá a um ou outro de acordo com o valor de β . Para baixas velocidades de rotação ($\beta \approx 0$), o termo $U_g(\theta)$ domina e a partícula se comporta essencialmente como um pêndulo, oscilando em torno do único mínimo de energia existente. O vínculo introduzido pelo anel é equivalente ao produzido pelo fio de um pêndulo simples. No limite oposto, $\beta \rightarrow \infty$, a energia potencial passa a apresentar *dois pontos de mínimo*, localizados em $\theta \rightarrow \pm\pi/2$. Essa situação ocorre quando a atuação das forças de vínculo do anel se resume ao papel de força centrípeta: a partícula ‘gruda’ na parede. A transição entre esses dois regimes

¹¹O fato de podermos mesmo proceder dessa maneira será melhor justificado quando tratarmos da função h , uma função que fornece a energia mecânica de sistemas descritos por lagrangianas independentes do tempo.

¹²Esse detalhe desagradável surge por conta da parametrização das coordenadas esféricas. Ao passar pelo ponto $\theta = \pi$, a partícula normalmente ‘salta’ de π em sua coordenada ϕ . No entanto, uma vez eliminada a coordenada ϕ da descrição do problema, podemos redefinir θ para descrever nosso sistema de forma mais conveniente.

ocorre para certo valor crítico de β no qual a curvatura do potencial se torna nula em $\theta = 0$, produzindo um ponto de equilíbrio estável até quarta ordem. Valores de β maiores do que o crítico produzem energia potencial com dois mínimos simetricamente localizados com relação à posição $\theta = 0$, e a região efetivamente habitada pela partícula passa a depender não só de sua energia mecânica, mas das condições iniciais do movimento.

2.2 Trajetória como curva extremal e o princípio de Hamilton

A trajetória de uma partícula pode ser calculada de forma conceitualmente diferente do que vínhamos fazendo até agora. As leis de Newton e as equações de Lagrange oferecem uma formulação calculável das regras que permitem descrever como uma partícula viaja entre pontos do espaço *infinitesimalmente* próximos, em especial sob a ação de agentes externos (forças). Essa forma de entender o movimento segue um princípio *diferencial*, i.e. *local*, no sentido de que a trajetória seguida pela partícula deve ser construída pela sucessão de passos infinitesimais de acordo com as regras newtonianas ou lagrangianas a partir de certa configuração conhecida do sistema.

A forma complementar de pensar define a trajetória da partícula (ou mesmo do sistema como um todo no espaço de configurações) como a curva que atinge certo ‘objetivo’ ou propriedade *global* ao unir pontos diferentes do Espaço. Princípios extremais causam fascínio tanto pela capacidade que possuem de unificar postulados aparentemente não relacionados quanto por parecerem dar uma ilusão de propósito à natureza. Talvez o exemplo mais conhecido de um princípio desse tipo seja aquele enunciado por Fermat ao unificar a descrição dos fenômenos óticos de reflexão e refração postulando que raios de luz viajam entre dois pontos de forma a minimizar o tempo de percurso¹³.

Princípios extremais foram introduzidos na mecânica por Maupertuis¹⁴ na década de 1740, e posteriormente sistematizados de maneira formal por Euler quando da invenção do cálculo das variações. Lagrange aplicou o cálculo variacional de Euler à mecânica para entender de maneira totalmente nova o princípio de D’Alembert, dessa forma unificando e criando vários elementos matemáticos essenciais da mecânica como

¹³A pergunta natural que surge é a seguinte: como a luz ‘sabe’, desde o momento em que deixa um certo ponto do espaço, que precisa ‘fazer a curva lá na frente’ (seja num espelho ou na interface entre dois meios com índices de refração diferentes) para chegar no menor tempo possível ao ponto final? Bem, ela não sabe. O fato de que o princípio global de minimização do tempo é equivalente à forma diferencial das leis de propagação da luz (equações de Maxwell) mostra que o tempo de viagem é minimizado mesmo em percursos infinitesimais. Em outras palavras, para economizar tempo no percurso todo, a luz não desperdiça tempo em nenhum pedacinho (mesmo diferencial) dele. A ilusão de ‘propósito’ antecipado ocorre por nossa culpa, ao fixarmos os pontos inicial e final da trajetória, fazendo parecer que o raio de luz já parte desde o início com a direção apropriada para chegar diligentemente ao ponto final escolhido. Na verdade, a maneira correta de pensar está mais para a evolução natural do que para o animismo: ao fixarmos dois pontos do trajeto, estamos pré- e pós-selecionando de todo o conjunto de possibilidades uma única delas. De fato, o tempo de percurso seria minimizado para quaisquer pontos inicial e final escolhidos: se a luz não chegasse ao ponto escolhido, chegaria a algum outro ponto também minimizando o tempo de percurso.

¹⁴Maupertuis se opunha à previsão de Fermat de que a velocidade da luz seria inversamente proporcional ao índice de refração do meio, um resultado que ameaçava o modelo corpuscular newtoniano para a luz e favorecia o modelo ondulatório de Huygens. Por isso, Maupertuis propôs uma quantidade rival, a ação, dada pelo produto entre a velocidade e a distância percorrida pela partícula de luz, que implicava na conclusão contrária quando tornada estacionária (i.e. velocidade da luz proporcional ao índice de refração). Apesar de não se aplicar à ótica, como hoje sabemos, o princípio de Maupertuis funciona no contexto da mecânica, embora a aplicação original de Maupertuis seja por vezes obscura ou até mesmo contraditória segundo alguns autores (Lawrence Sklar, “Philosophy and the Foundations of Dynamics”, Cambridge University Press, 2013).

conhecemos hoje.

2.2.1 Cálculo variacional

O cálculo das variações foi criado por Euler e publicado em 1744 em seu trabalho *Methodus inveniendi curvas lineas*. Lagrange o formulou em termos mais coesos e abrangentes por volta de 1750, suplantando a dedução original de Euler e colocando o cálculo variacional na linguagem em que o conhecemos hoje.

O cálculo variacional é uma espécie de generalização do cálculo diferencial para mais dimensões. Assim como funções podem ser tornadas estacionárias em torno de pontos num espaço unidimensional, *funcionais* podem ser extremizados em torno de uma região bidimensional do espaço, i.e. uma curva. Encontrar o formato da curva capaz de tornar um funcional estacionário é o problema central do cálculo das variações.

Funcional

Uma função conecta um conjunto de pontos, seu domínio, a outro conjunto de pontos, sua imagem. E quando usamos a palavra ‘função’ em geral queremos dizer implicitamente que esses ‘pontos’ são na verdade números, um conjunto ordenado de objetos com certas propriedades familiares. Um funcional generaliza o conceito de função ao possuir como domínio um *conjunto de funções*, mas continuar tendo como imagem um conjunto de números. Assim, um funcional conecta funções a números, sendo portanto uma espécie de ‘função de funções’.

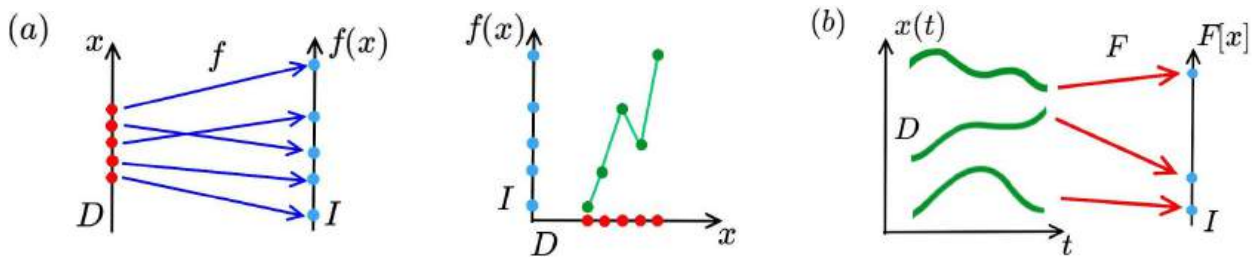


Figura 2.6: (a) Funções conectam números num domínio D a números na imagem I (esquerda), o que é usualmente representado num gráfico em duas dimensões (direita). (b) Funcionais associam a cada função um número, e por isso dependem essencialmente dos formatos de curvas.

Estamos familiarizados no caso de funções ao conceito de *variação*: quando um dos argumentos da função varia infinitesimalmente no entorno de um ponto do domínio, o valor da função varia proporcionalmente na imagem, sendo a constante de proporcionalidade a *derivada* da função na região daquele ponto. Escreveríamos essa relação utilizando a regra da cadeia da derivação ou, equivalentemente, a expansão em série de Taylor até primeira ordem na variação, na forma

$$df(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{\{x'_j\}} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{\{x'_j\}} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \Big|_{\{x'_j\}} dx_N, \quad (2.65)$$

em que $\{x'_j\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_N\}$ (com $j = 1, 2, \dots, N$) é o ponto em torno do qual se avalia a função em seu domínio N -dimensional. Vínhamos denotando esse tipo de relação na forma compacta

$$df(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\{x'_j\}} dx_j. \quad (2.66)$$

Um funcional leva essa relação ao limite contínuo. Imaginemos que os diversos valores x_j expressos acima fossem na verdade não argumentos independentes da função f , mas calculáveis eles mesmos como parte de uma função parametrizada pela variável t_j na forma

$$x_j = x(t_j), \quad \text{em que } t_j = j \, dt. \quad (2.67)$$

A variável (discreta) t_j faz o papel de *domínio* de x , e com isso o argumento de f (que se torna um funcional F) vira uma função de t_j . O intervalo $\Delta t = Ndt$ representa o comprimento do domínio de $x(t)$.

Para transformar formalmente f num funcional F , precisamos realizar a transição para o limite contínuo da variável de parametrização, fazendo $t_j \rightarrow t$. Nesse caso, $F[x(t)]$ passa a ter um ‘contínuo de argumentos’ como domínio, a função $x(t)$.

No cálculo das variações, estamos interessados em entender como o funcional F varia se a função $x(t)$ for perturbada por uma função infinitesimal $\delta x(t)$, ou seja, se seu formato for variado infinitesimalmente. Para tanto, precisamos generalizar a Eq. (2.66) ao limite contínuo. A variação dx_j de cada argumento discreto dá então lugar a $\delta x(t_j)$: a variação passa a ser também uma função de t_j . Já a somatória no índice j passa a se referir à variável de parametrização t_j . Nessa nova notação, escrevemos

$$df(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_{\{x'_j\}} dx_j \quad \rightarrow \quad dF[\{x(t_j)\}] = \sum_{j=1}^N \left. \frac{\delta F}{\delta x(t_j)} \right|_{\{x'(t_j)\}} \delta x(t_j), \quad (2.68)$$

em que $dF[\{x(t_j)\}]$ é a variação do funcional. O limite contínuo se faz tornando a somatória uma integral, em que $N \rightarrow \infty$ com $\Delta t = cte$ (i.e. $dt \rightarrow 0$), normalmente seguindo a prescrição

$$\sum_j g(t_j) \frac{\Delta t}{N} \quad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \quad \int_0^{\Delta t} g(t) dt, \quad (2.69)$$

em que g é uma função qualquer de t . Vemos dessa prescrição ser preciso incluir dt na somatória da Eq. (2.68), já que a somatória no índice j se refere no limite contínuo a uma integral na variável de parametrização t . Fazemos isso na ‘força bruta’, multiplicando e dividindo a expressão por dt para escrevê-la na forma

$$dF[\{x(t_j)\}] = \sum_{j=1}^N \left(\left. \frac{1}{dt} \frac{\delta F}{\delta x(t_j)} \right|_{\{x'(t_j)\}} \right) \delta x(t_j) dt. \quad (2.70)$$

Aplicamos finalmente a regra da Eq. (2.69) para escrever

$$dF[x(t)] = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left. \frac{\delta F}{\delta x} \right|_{x'(t)} \delta x(t) dt. \quad (2.71)$$

em que $\frac{\delta F}{\delta x}$ é a *derivada funcional*. Assim, a sensibilidade do funcional a uma função variação δx em seu domínio produz uma resposta que precisa ser integrada em todo o domínio.

Exemplo: Funcional integral. Os funcionais que encontraremos neste curso seguem a forma integral. Um exemplo simples dessa situação seria o funcional

$$F[x] = \int_{-1}^1 x(t) dt, \quad (2.72)$$

representando a *área* sob a curva $x(t)$ entre os pontos $-1 \leq t \leq 1$. Por exemplo, se $x(t) = t$, teríamos por integração direta a resposta $F[x] = 0$; por outro lado, se $x(t) = 3x^2$, obteríamos para o funcional o

valor $F[x] = 2$. Vemos daí claramente que a imagem de um funcional continua sendo dada por números, assim como no caso de funções usuais; no entanto, o valor do funcional depende do *formato* das funções em seu domínio. De fato, o exemplo da Eq. (2.72) fornece o resultado nulo para qualquer função ímpar como argumento.

Exemplo: Delta de Dirac. A função delta de Dirac pode ser entendida como um funcional bem simples,

$$F_{t_0}[x] = x(t_0). \quad (2.73)$$

Esse funcional retorna o valor no ponto t_0 da função x em seu argumento, o mesmo que faria a integral do produto de $x(t)$ com a função $\delta(t - t_0)$.

Exemplo: Derivada funcional. A conexão entre a variação δx na imagem e dF no domínio do funcional segue a definição da Eq. (2.71). Mas a ideia é similar ao que conhecemos de funções. Tomemos como exemplo

$$F[x] = \int_0^1 x^2(t) dt. \quad (2.74)$$

O novo valor de F após incluirmos uma função perturbação $\delta x(t)$ em seu argumento se calcula como

$$F[x + \delta x] = \int_0^1 [x(t) + \delta x(t)]^2 dt = \int_0^1 x^2(t) dt + \int_0^1 2x(t)\delta x(t) dt, \quad (2.75)$$

em que ignoramos um termo de segunda ordem em $\delta x(t)$ por se tratar implicitamente, como no caso da derivada de uma função usual, do limite no qual supomos de alguma forma que $\delta x(t) \rightarrow 0$. Disso vemos que

$$F[x + \delta x] = F[x] + \int_0^1 2x(t)\delta x(t) dt \quad \Rightarrow \quad dF := F[x + \delta x] - F[x] = \int_0^1 2x(t)\delta x(t) dt. \quad (2.76)$$

Comparando essa relação à Eq. (2.71), reconhecemos a derivada funcional como

$$\frac{\delta F}{\delta x} = 2x(t), \quad (2.77)$$

de fato uma expressão remanescente do que seria obtido caso x fosse o argumento de uma função usual.

Estacionariedade de um funcional: Equação de Euler-Lagrange

O cálculo das variações se ocupa de determinar como um funcional varia como consequência da *variação dos formatos* das funções de que depende. Na mecânica lagrangiana, em geral estamos interessados em determinar a função cujo formato torna *estacionário* um funcional integral. Vamos tratar desse assunto a partir do caso particular de interesse para facilitar sua compreensão: consideremos o funcional integral

$$F[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt, \quad (2.78)$$

em que f envolve implicitamente as funções¹⁵ $x(t)$ e $\dot{x}(t)$, e pode depender também explicitamente da variável livre t . Uma maneira explícita de variar a função $x(t)$ usa a expressão

$$x(t, \alpha) = x'(t) + \alpha\eta(t), \quad (2.79)$$

¹⁵Observemos que f , apesar de poder ser considerada um funcional por depender da função do tempo $x(t)$, é aqui melhor entendida como uma função usual de x , \dot{x} e t , seus argumentos independentes. O fato de que a variável x pode ser parametrizada

em que $x'(t)$ representa a função ‘inicial’ variada pela soma da função arbitrária $\eta(t)$. O parâmetro independente α regula o quanto de $\eta(t)$ ‘misturamos’ na função original $x'(t)$, de forma que a variação efetiva vale $\delta x(t, \alpha) = \alpha \eta(t)$. A utilidade dessa forma de parametrização consiste em separar a variação $\delta x(t, \alpha)$ em dois pedaços: por um lado, fixamos o formato específico da variação, representado por $\eta(t)$; por outro, escolhemos através do parâmetro α de quanto queremos efetivamente variar a função original.

No contexto da mecânica, o problema recorrente de que tratamos no cálculo das variações se resume ao seguinte: desejamos encontrar a função $x'(t)$ que torne o funcional F estacionário (i.e. máximo ou mínimo) por pequenas variações $\delta x = \alpha \eta(t)$, para qualquer função *arbitrária* $\eta(t)$ bem comportada que mantenha a função $x'(t)$ inalterada nos limites de integração. Supomos então que $\eta(t)$ respeite as condições de contorno

$$\begin{cases} x(t_1, \alpha) = x'(t_1) \\ x(t_2, \alpha) = x'(t_2) \end{cases} \Rightarrow \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0, \quad (2.80)$$

i.e. queremos (pela natureza de nossos problemas de interesse) impor os valores de $x'(t)$ nos pontos inicial e final de integração.

Agora vemos que separar o formato da função variação $\eta(t)$ do parâmetro de variação α equivale a utilizar o ‘truque’ de tornar F efetivamente uma *função* de α . Isso nos permite escrever a condição de estacionariedade de F como a conhecemos, através de uma derivada comum,

$$\left. \frac{dF}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (2.81)$$

A única diferença com relação à extremização de uma função comum é que α serve para adicionar implicitamente uma função arbitrária qualquer $\eta(t)$ à função $x'(t)$ que buscamos. Utilizamos a regra da cadeia da derivada na Eq. (2.78) para escrever

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{d\alpha} \right) dt, \quad (2.82)$$

Empregamos a Eq. (2.79) para calcular as derivadas com relação a α e obter diretamente

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \eta + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} \right) dt. \quad (2.83)$$

Mas a variação $\dot{\eta}$ que aparece no segundo termo do integrando segue como consequência da própria variação η a afetar o primeiro termo: essas duas variações não são independentes. Podemos então integrar o segundo termo por partes para escrever essa expressão dependente unicamente da variação imposta η , na forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \dot{\eta} dt = \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \eta dt. \quad (2.84)$$

Mas o primeiro termo do membro direito se anula por conta das condições de contorno impostas sobre $\eta(t)$ pela Eq. (2.80). Substituindo esse resultado na Eq. (2.83), obtemos

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt. \quad (2.85)$$

por t deve ser visto na mecânica como uma ‘troca de variáveis’ usada com o propósito de facilitar as contas. Isso porque, na mecânica lagrangiana, x é uma variável independente cujo significado físico é a posição do sistema no espaço de configurações (de fato, uma grandeza independente de qualquer outra, mas que também pode ser parametrizada pelo tempo). Além disso, podemos argumentar que seria simples colocar f totalmente em termos de t , tornando-a uma função sem sombra de dúvidas, pela substituição das relações (uma vez encontradas!) para $x(t)$ e sua derivada $\dot{x}(t)$. A função $f(t)$ seria nesse caso apenas uma maneira rápida de escrever alguma relação mais extensa envolvendo $x(t)$, $\dot{x}(t)$ e t . O mesmo não vale para o funcional F , que depende crucialmente do *formato* das funções $x(t)$ para ser calculado (e da escolha de pontos t_1 e t_2), mas *não depende* de t .

Temos agora o resultado que buscávamos: conseguimos expressar a variação do funcional F em termos da variação $\eta(t)$ da curva $x'(t)$. Essa integral só pode se anular para qualquer função variação $\eta(t)$ se o que multiplica esta função for identicamente nulo¹⁶ (i.e. nulo para todo valor de t). Disso resulta a *equação de Euler-Lagrange*, a relação fundamental do cálculo das variações,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (2.86)$$

Essa relação nos fornece uma equação diferencial para $x'(t)$ (que passaremos a chamar de $x(t)$ simplesmente, removendo a linha), a função que torna o funcional integral F estacionário (i.e. extremo).

A Eq. (2.86) poderia ser obtida de forma mais abstrata considerando diretamente a variação $\delta x(t)$, sem a necessidade de utilizar a parametrização da Eq. (2.79), já que

$$dF = \delta \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dt. \quad (2.87)$$

Notando que a variação $\delta \dot{x}$ se origina da variação δx (i.e. não são independentes), podemos escrever

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x \quad (2.88)$$

para integrar por partes o último termo da Eq. (2.87) e obter

$$dF \Big|_{x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt = 0. \quad (2.89)$$

O fato de que $\delta x(t)$ é uma função arbitrária leva novamente à equação de Euler-Lagrange [Eq. (2.86)].

Exemplo: Problema da braquistócrona. Um problema antigo de cálculo das variações na mecânica consiste em encontrar a curva que minimize o tempo de trajeto de uma partícula (inicialmente em repouso) entre dois pontos no espaço sob ação do campo gravitacional terrestre: a solução do problema é chamada ‘curva braquistócrona’, que significa em tradução livre do grego ‘a curva de tempo mínimo’.

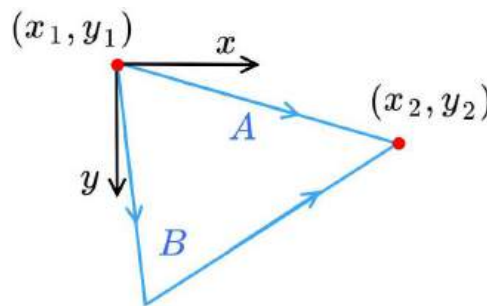


Figura 2.7: Uma partícula se desloca entre dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) no Espaço. Qual é o formato da curva que permite minimizar o tempo de percurso? Por um lado, a curva A minimiza a distância entre os pontos; por outro, a curva B permite à partícula atingir maior velocidade. A curva braquistócrona é a solução ótima desse problema.

Minimizar o tempo de trajeto depende essencialmente de dois fatores: do comprimento da curva (quanto menor, melhor), e da velocidade da partícula (quanto maior, melhor). Ocorre que esses dois ingredientes

¹⁶ Comparação com a Eq. (2.71) revela que a condição de estacionariedade de F se resume a impor como identicamente nula a derivada funcional $\frac{\delta F}{\delta x}$, como seria de se esperar.

competem entre si. Por um lado, a curva de menor comprimento a ligar os dois pontos é um segmento de reta (curva A da Fig. 2.7); no entanto, a reta (tal como um plano inclinado) não apresenta um ganho de velocidade muito favorável (pensemos no caso em que os dois pontos se encontram na mesma altura do solo!). Por outro lado, a curva que maximiza o ganho de velocidade é uma queda livre seguida por alguma curva que desvie a partícula até a posição final (e.g. curva B da Fig. 2.7); mas essa situação tem o problema de aumentar de maneira desfavorável o comprimento do percurso. A curva braquistócrona deve seguir um formato intermediário, que permita à partícula ganhar bastante velocidade no início de seu trajeto (e.g. sendo quase vertical) mas que a desvie horizontalmente para atingir o ponto final num percurso curto.

Encontrar a braquistócrona requer formular o tempo T de percurso como um funcional integral da curva de trajetória, cujo formato pode ser determinado pelo uso da equação de Euler-Lagrange. Escolhemos por simplicidade o ponto de partida (x_1, y_1) da partícula como a origem do sistema de coordenadas, i.e. $(x_1, y_1) = (0, 0)$, e denotamos seu ponto de chegada como $(x_2, y_2) = (X, Y)$. O campo de forças conservativo nos permite encontrar a magnitude da velocidade v da partícula em função apenas de sua posição y , sem a necessidade de conhecermos de antemão a curva traçada. Tomamos a energia mecânica da partícula como nula, i.e. $E = 0$, e sua energia potencial de interação como¹⁷ $U = -mgy$. A conservação de energia nos fornece a velocidade

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}. \quad (2.90)$$

Já cada arco infinitesimal da curva (tangente ao vetor velocidade) tem comprimento

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad (2.91)$$

de forma que o comprimento total da curva é $\ell = \int ds$. Com isso, o tempo total T tomado pela partícula para percorrer a curva é dado pela soma dos tempos $dt = ds/v$ de percurso de cada arco infinitesimal, ou seja,

$$T = \int_{(0,0)}^{(X,Y)} \frac{ds}{v}. \quad (2.92)$$

Queremos encontrar a curva $y(x)$ (ou $s = (x, y)$, em forma paramétrica) que minimize T .

Substituímos as expressões para v [Eq. (2.90)] e ds [Eq. (2.91)] na Eq. (2.92) para colocar a integral na forma

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{(0,0)}^{(X,Y)} \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{(dx)^2 + dy^2} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^X \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad (2.93)$$

em que denotamos $y' = \frac{dy}{dx}$. Essa equação possui a forma da Eq. (2.78). Para encontrar a função $y(x)$ que torna o funcional T estacionário, o integrando da Eq. (2.93), reconhecido como

$$f(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}, \quad (2.94)$$

precisa satisfazer a equação de Euler-Lagrange [Eq. (2.86)]. Dessa imposição segue a equação diferencial procurada para $y(x)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (2.95)$$

¹⁷A escolha do sentido positivo do eixo y como 'para baixo' visa evitar ficar carregando um sinal negativo por aí, já que o movimento certamente se restringe a $y < 0$ (ou seja, a partícula partindo do repouso não pode atingir pontos mais altos do que sua posição inicial).

Não é difícil perceber que diferenciar a função da Eq. (2.94) conforme prescreve a equação de Euler-Lagrange fornece uma equação diferencial aproximadamente monstruosa nesse caso¹⁸. Obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{3/2}} - \frac{d}{dy} \left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \right) = 0, \quad (2.96)$$

algo tão assustador que nos motiva a procurar rota alternativa de solução.

Podemos de fato contornar a Eq. (2.96) reformulando o problema matemático. Tomamos a coordenada y como variável independente para buscar a curva de trajetória escrita na forma $x(y)$ (notemos que do ponto de vista da equação da curva tanto faz qual das duas variáveis é independente). A Eq. (2.93) fica

$$T[x(y)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^Y \frac{1}{\sqrt{y}} \sqrt{1+(x')^2} dy, \quad (2.97)$$

em que denotamos $x' = \frac{dx}{dy}$. Seu integrando se torna a função

$$f(x', y) = \sqrt{\frac{1+(x')^2}{y}}, \quad (2.98)$$

que não depende da função $x(y)$! A equação de Euler-Lagrange se torna simplesmente

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = a = cte. \quad (2.99)$$

Realizando a derivada em x' da Eq. (2.98), e manipulando a equação para isolar x' , obtemos

$$x' = a \frac{y}{\sqrt{y-a^2y^2}} \quad \Rightarrow \quad \int dx = a \int \frac{y}{\sqrt{y-a^2y^2}} dy. \quad (2.100)$$

Essa integral pode ser resolvida completando-se o quadrado no denominador. Esse procedimento sugere a troca de variáveis

$$y = \frac{1}{2a^2}(1 - \cos \theta), \quad (2.101)$$

com a qual a integral se torna

$$x = \frac{1}{2a^2} \int (1 - \cos \theta) d\theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2a^2} (\theta - \sin \theta). \quad (2.102)$$

A curva encontrada se escreve, portanto, em forma paramétrica, como

$$\begin{cases} x = b(\theta - \sin \theta) \\ y = b(1 - \cos \theta) \end{cases}, \quad (2.103)$$

em que $b = 1/(2a^2)$ é uma constante. Resta ajustar a constante b para que a curva passe pelo ponto final da trajetória (notemos que o ponto inicial já pertence à mesma, correspondendo a $\theta = 0$).

Essa solução nos mostra que a coordenada y da partícula é obtida pela projeção da posição de um ponto que se movimenta sobre uma circunferência (e deslocada de b). Já a coordenada x é dada não apenas pela projeção ortogonal análoga (também deslocada de b), mas por um deslocamento da circunferência. É

¹⁸Na verdade, podemos simplificar de uma vez por todas a forma da equação de Euler-Lagrange para torná-la mais apropriada aos casos em que $f(y, y', x)$ não faz menção explícita à variável independente x , como veremos na forma de Beltrami.

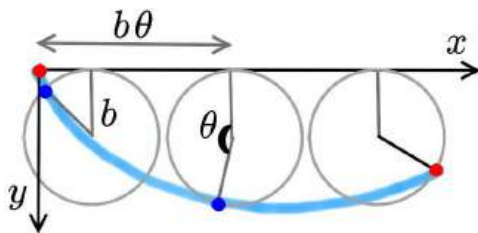


Figura 2.8: A cicloide é a curva desenhada por uma partícula presa ao aro de uma roda que gira sem deslizar.

como se a fizéssemos rodar sem deslizar sobre o eixo x e seguíssemos a posição de um ponto fixo sobre a circunferência.

A curva constituída dessa maneira recebe o nome de *cicloide*, a curva seguida por um ponto pertencente a uma roda girando sem deslizamento sobre uma linha (Fig. 2.8). A constante b é o raio da roda, cujo centro se localiza na posição $(b\theta, b)$. A ‘roda virtual’ desliza tocando o eixo x e θ descreve o ângulo entre a vertical y e o raio unindo a partícula ao centro da roda. A cicloide da Eq. (2.103) já passa pela origem no ponto $(0, 0)$, bastando resolver uma equação transcendental para encontrar b que lhe faça visitar o ponto (X, Y) . Portanto, a curva braquistócrona é uma cicloide.

Exemplo: Catenária. Outro exemplo notório de aplicação do cálculo variacional consiste em determinar o formato assumido por uma corda inextensível suspensa entre dois pontos no espaço. O problema se resume a encontrar o formato capaz de minimizar sua energia potencial gravitacional. No caso mais simples, tratado aqui, o comprimento da corda *não é tomado como fixo*¹⁹. Poderíamos implementar esse problema prendendo uma ponta da corda ao teto (ponto 1) e passar a outra por uma polia (ponto 2); minimizamos a energia regulando seu comprimento entre esses dois pontos.

O compromisso agora se dá entre dois fatores que contribuem para a energia potencial: a massa da corda, função de seu comprimento, e a altura de cada pedaço da corda. Por um lado, esticar a corda entre os dois pontos minimiza seu comprimento, dessa forma diminuindo sua massa total e com isso sua energia potencial; essa estratégia, no entanto, não pode ser ótima, por requerer elevar toda a massa da corda à máxima altura disponível. Por outro lado, deixar a corda bastante solta até quase encostar no chão deve minimizar a altura de cada pedaço, diminuindo com isso a energia potencial; o custo, entretanto, é aumentar seu comprimento e, com isso, sua massa²⁰. A *catenária* é a curva que resolve esse conflito de maneira ótima.

Calculemos primeiramente a quantidade a ser minimizada, a energia potencial da corda. Ela se constrói pela soma das contribuições advindas de cada pedaço infinitesimal ds , cada qual possuindo massa $dm = \mu ds$ e energia potencial

$$dU = \mu g y ds, \quad (2.104)$$

em que escolhemos o eixo y na direção vertical apontando para baixo por simplicidade. A energia potencial

¹⁹Essa restrição adicionaria um vínculo ao problema, requerendo o uso de multiplicadores de Lagrange.

²⁰Notemos que se a distância horizontal entre os dois pontos for muito grande a solução ótima é simplesmente levar a corda verticalmente de cada ponto até o chão, uma curva não diferenciável. Vamos tratar aqui do caso mais interessante em que a corda pode ser colocada tão alta quanto se queira para que isso não ocorra.

total é o funcional a ser minimizado entre os pontos $(x_1, y_1) = (0, 0)$ e $(x_2, y_2) = (X, Y)$ de fixação da corda,

$$U[y(x)] = g\mu \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} y \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dx = g\mu \int_0^X y \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad (2.105)$$

de onde reconhecemos a função do integrando como

$$f(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}. \quad (2.106)$$

Novamente, a dependência dessa função tanto em y quanto em y' torna desnecessariamente complicada a aplicação da equação de Euler-Lagrange na forma da Eq. (2.86). Trocamos a variável independente para y , dessa maneira descrevendo a curva como $x(y)$, para reescrever o funcional da energia potencial como

$$U[x(y)] = g\mu \int_0^Y y \sqrt{1 + x'^2} dy. \quad (2.107)$$

A função do integrando deixa de depender explicitamente de $x(y)$, pois

$$f(x', y) = y \sqrt{1 + x'^2}, \quad (2.108)$$

facilitando a aplicação da equação de Euler-Lagrange, que prescreve a condição

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = a = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{yx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = a. \quad (2.109)$$

Essa equação diferencial pode ser reorganizada isolando-se x'^2 para se obter a integral

$$\int dx = \int \frac{a dy}{\sqrt{y^2 - a^2}}, \quad (2.110)$$

resolvida pela troca de variáveis $y/a = \cosh z$, resultando na curva

$$y = a \cosh \frac{x - b}{a}, \quad (2.111)$$

em que b é a constante de integração. As constantes a e b são determinadas pela imposição de que a curva visite os dois pontos de fixação da corda. A catenária é essencialmente um cosseno hiperbólico.

Forma de Beltrami para a equação de Euler-Lagrange

Tivemos repetidas vezes de mudar de variável livre nos exemplos tratados para simplificar a aplicação da equação de Euler-Lagrange. O motivo foi a dependência dos integrandos dos funcionais tanto na função da curva de trajetória quanto em sua derivada.

Em ambos os casos, no entanto, o integrando não dependia da *variável independente*, o que também representa uma simetria. De fato, a equação de Euler-Lagrange pode ser colocada em outra forma de maneira a tornar sua aplicação mais simples no caso de funções que não mostrem dependência explícita na variável livre. Voltamos aqui à notação utilizada na discussão seguindo a Eq. (2.78) no início desta Seção, em que a variável livre é denotada por t .

A derivada total de f com relação ao parâmetro livre t pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} f(x, \dot{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (2.112)$$

Consideremos a quantidade

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \ddot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \dot{x} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}. \quad (2.113)$$

Eliminando o termo $\ddot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ pelo uso da Eq. (2.112), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} f - \frac{\partial f}{\partial t} - \dot{x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right). \quad (2.114)$$

Os dois últimos termos se anulam para que f satisfaça a equação de Euler-Lagrange. Obtemos com isso a forma alternativa da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left(f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (2.115)$$

descoberta por Beltrami em 1868. Nos casos em que f não depende da variável livre (i.e. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$), essa equação torna desnecessário o cálculo da derivada total com relação a ela, pois vale então a relação

$$\frac{d}{dt} \left(f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad f - \dot{x} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = cte. \quad (2.116)$$

Por exemplo, essa forma alternativa da equação de Euler-Lagrange produz de maneira direta no problema da braquistócrona a mesma equação diferencial da Eq. (2.100) quando x é tomada como variável livre [Eq. (2.95)]. O mesmo vale para o problema da catenária.

2.2.2 Princípio de Hamilton

É chegada a hora de nos questionarmos porque estamos falando de cálculo variacional. Bem, o motivo é simples: quando encontramos equações diferenciais com a mesma forma em diferentes contextos, concluímos que existe uma analogia entre os efeitos físicos descritos. O fato de que as equações de Lagrange da Eq. (2.38) possuem *a mesma forma* da equação de Euler-Lagrange da Eq. (2.86) indica haver alguma extremização acontecendo na trajetória física seguida pela partícula.

Como a função na qual se aplica a equação de Euler-Lagrange é o integrando do funcional a ser tornado estacionário, segue por analogia que a função na qual se aplicam as equações de Lagrange, a lagrangiana, deve ser o integrando de algum funcional integral que a natureza curte extremizar, a que chamamos *ação*. A integral de ação é definida como

$$S[\{q_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt. \quad (2.117)$$

A dedução lagrangiana dessas ideias se resume a aplicar ao contexto da mecânica os conceitos aprendidos do cálculo das variações para verificar e entender como as equações de Lagrange podem ser deduzidas também através de um princípio variacional. Devemos requerer que a ação seja estacionária: a função lagrangiana deve satisfazer, portanto, a equação de Euler-Lagrange. Todavia, por ser a lagrangiana uma função de muitas funções q_j do mesmo parâmetro livre t , a equação de Euler-Lagrange precisa ser generalizada para o espaço de configurações $\{q_j(t)\}$, o qual possui N' graus de liberdade.

Calculamos a variação da ação no espaço de configurações N' -dimensional utilizando o método dividido por Lagrange para tornar mais simples o cálculo variacional de Euler. Consideramos um conjunto de

variações independentes $\{\delta q_j(t)\}$ e arbitrárias, uma para cada coordenada generalizada, bem comportadas (contínuas e diferenciáveis até segunda ordem) e que satisfaçam as condições de contorno $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0, \forall j$. Cada variação $\delta q_j(t)$ afeta a lagrangiana de forma independente e prescrita pela Eq. (2.87), i.e.

$$dS = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \quad (2.118)$$

Também aqui as variações $\delta \dot{q}_j(t)$ ocorrem como consequência das variações $\delta q_j(t)$, e por isso podemos escrever $\delta \dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} \delta q_j(t)$ para integrar por partes os termos envolvendo $\delta \dot{q}_j(t)$ e obter

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right|_{t_1}^{t_2} - \int \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j dt. \quad (2.119)$$

O primeiro termo do membro direito se anula por causa das condições $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Substituindo esse resultado na Eq. (2.118), obtemos a condição de estacionariedade da ação

$$dS = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt := 0. \quad (2.120)$$

Como as variações $\delta q_j(t)$ são independentes umas das outras e arbitrárias, essa integral só pode se anular se cada um dos termos da soma em j se anular identicamente. Obtemos com isso as equações de Lagrange para a mecânica,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (2.121)$$

Um aspecto muito interessante dessa dedução é o fato de que as equações de movimento de Lagrange devem manter *a mesma forma* para *qualquer escolha* de coordenadas generalizadas, uma vez que nenhuma suposição sobre o significado das coordenadas $\{q_j\}$ (além de sua independência) foi feita. A manutenção da forma das equações fundamentais é uma das características mais importantes do método lagrangiano do ponto de vista do formalismo da mecânica, e será postulada por Hamilton como princípio guiador na escolha das transformações fisicamente permitidas na teoria (transformações canônicas). Quando transportada ao eletromagnetismo, essa propriedade será tomada como consequência do princípio da relatividade.

A possibilidade de deduzir as *equações de movimento* de sistemas mecânicos²¹ em termos de um princípio variacional nos leva naturalmente a tentar reexpressar aquilo que antecede as equações – ou seja, as leis do movimento! – através de um *novo postulado*.

O *princípio de Hamilton* estabelece que a *evolução de um sistema físico entre dois instantes de tempo fixos segue a trajetória no espaço de configurações que torna estacionária a integral de ação* [Eq. (2.117)]. Ele substitui as leis de Newton quando aplicado ao contexto específico da mecânica clássica, embora admita validade em outros campos da física por ser mais fundamental. Tal qual as leis de Newton, esse princípio nos oferece a maneira operacional de obter as equações de movimento.

Na mecânica clássica, o ‘espaço de configurações’ está sempre ligado (por uma transformação de coordenadas) ao espaço tridimensional euclidiano, embora possa ser entendido de maneira abstrata como o espaço de configurações N' -dimensional lagrangiano no tratamento matemático; por ‘evolução’ entendemos o movimento no tempo de cada partícula do sistema; além disso, nesse contexto a função lagrangiana pode sempre ser definida como a diferença entre as energias cinética e potencial do sistema, i.e. $\mathcal{L} = K - V$ (embora, como veremos no contexto da mecânica hamiltoniana, essa escolha não seja única).

²¹Lembre-mos apenas de que fizemos isso no contexto particular de um sistema conservativo e sujeito a vínculos que não realizam trabalho em conjunto.

Estacionariedade do funcional de ação: maximização ou minimização?

O princípio de Hamilton requer apenas a extremização da integral de ação, nada impondo sobre a ‘curvatura’ dessa integral no entorno da trajetória estacionária. Surge então a questão natural: pequenas mudanças na trajetória aumentam o valor da integral de ação, caso em que a trajetória física seria uma ‘curva de mínimo’, ou o contrário ocorre? Vejamos a seguir como a curvatura da integral de ação pode ter qualquer sinal no espaço de configurações lagrangiano, indicando que essa quantidade não possui significado físico.

Tomemos como exemplo o oscilador harmônico unidimensional, descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (2.122)$$

e cuja trajetória física tem como solução²² $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

Para analisar a curvatura da integral de ação, a expandimos dessa vez em torno da trajetória física até segunda ordem na função de variação $\delta x(t)$. Denotamos a expansão como²³

$$S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \delta S[x(t)] + \delta^2 S[x(t)] + \dots \quad (2.125)$$

O primeiro termo, como veremos na formulação hamiltoniana da mecânica, é a função principal de Hamilton (no caso, calculada entre os instantes t_1 e t_2), que permite criar analogia perfeita entre a mecânica e as frentes de onda na ótica geométrica. O termo de variação fornece, como vimos, a identidade

$$\delta S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \delta x dt. \quad (2.126)$$

Encontramos as equações de movimento impondo a nulidade desse integrando, que pode ser identificado como a derivada funcional $\frac{\delta S}{\delta x}$ da integral de ação.

Para determinarmos se a trajetória física produz um máximo ou um mínimo na integral de ação, calculemos a variação de segunda ordem $\delta^2 S$ fazendo a variação da variação de primeira ordem. Escrevemos

$$\delta^2 S[x(t)] = \delta \int_{t_1}^{t_2} F(x, \dot{x}, \ddot{x}) \delta x dt \quad \text{em que } F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}. \quad (2.127)$$

²²A lagrangiana como função do tempo assume nesse caso a forma

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 \cos(2\omega t + 2\phi). \quad (2.123)$$

O valor da função lagrangiana varia no tempo ainda que a mesma não dependa explicitamente dele. No entanto, isso é em geral irrelevante. A função lagrangiana só tem utilidade quando tomada como função das coordenadas q_j e das velocidades \dot{q}_j (e, quando for o caso, do tempo explicitamente): sua serventia exclusiva é fornecer as equações de movimento pelo uso do princípio de Hamilton. O mesmo não vale para a função hamiltoniana que, como veremos, pode ser uma quantidade conservada e muitas vezes possuidora de significado físico claro (a energia mecânica do sistema).

²³A expansão de um funcional se dá pela prescrição

$$S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \int \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) dt + \iint \frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} \delta x(t) \delta x(t') dt dt' + \dots, \quad (2.124)$$

em que os integrandos são derivadas funcionais de $S[x(t)]$. É simples entender essas expressões se interpretarmos o funcional como um campo vetorial contínuo, caso em que o argumento $x(t)$ deve ser entendido como um vetor nesse espaço de dimensão infinita.

Cálculo direto no caso do oscilador harmônico nos fornece explicitamente

$$F(x, \ddot{x}) = -m\omega^2 x - m\ddot{x}, \quad (2.128)$$

cujos valores são nulos na trajetória física. Seu comportamento no entorno é calculado aplicando uma segunda etapa de variação em F , da forma

$$\delta F(x, \ddot{x}) := F(x + \delta x, \ddot{x} + \delta \ddot{x}) - F(x, \ddot{x}) = -m\omega^2 \delta x - m\delta \ddot{x}. \quad (2.129)$$

Essa expressão pode ser levada à forma padrão da derivada funcional fazendo uso da identidade $\delta x(t) = \int \delta x(t') \delta(t' - t) dt'$, da qual se obtém

$$\delta F(x, \ddot{x}) = \int \frac{\delta F}{\delta x} \delta x dt, \quad \text{com} \quad \frac{\delta F}{\delta x} = -m\omega^2 \delta(t' - t) - m\delta \ddot{\delta}(t' - t), \quad (2.130)$$

ou seja, $\frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} = -m\omega^2 \delta(t' - t) - m\delta \ddot{\delta}(t' - t)$. Assim,

$$\delta^2 S = \int \int \frac{\delta^2 S}{\delta x(t) \delta x(t')} \delta x(t) \delta x(t') dt dt' = -m \int (\omega^2 \delta x^2(t) + \delta \ddot{x}(t) \delta x(t)) dt. \quad (2.131)$$

A função $\delta x(t)$ é arbitrária no que concerne a estacionariedade de $S[x(t)]$. Como vemos, o mesmo não vale, no entanto, para $\delta^2 S$. Essa quantidade depende da função $\delta x(t)$ escolhida, podendo ser tanto positiva quanto negativa a depender do sinal do termo $\delta \ddot{x}(t) \delta x(t)$ no caso do oscilador harmônico.

No caso geral, a variação de segunda ordem de $S[\{q_j(t)\}]$ contém termos cruzados em $\delta q_j(t)$ e $\delta q_{j'}(t)$ ou suas derivadas temporais. Seu valor envolve a integral de produtos das funções de variação em diferentes tempos, e portanto pode mesmo possuir qualquer valor. Disso fica claro que a matriz de curvaturas $\frac{\delta^2 S[\{q_j(t)\}]}{\delta q_j(t) \delta q_{j'}(t')}$ não possui relevância no espaço de configurações lagrangiano. Apenas a condição de estacionariedade da integral de ação possui consequências físicas.

Significado físico do princípio de Hamilton

Pois bem, entendemos como o princípio de trabalho virtual nulo de D'Alembert pode ser reescrito em termos de equações diferenciais para uma nova função, a lagrangiana, e como estas podem ser entendidas em termos da estacionariedade de um novo funcional, a ação. São conexões interessantes, e parecem estar indo a algum lugar, mas: e daí? É salutar nos perguntarmos nesse ponto: o que *significa* fisicamente a estacionariedade da ação, i.e. o que estamos colocando de ingrediente físico na teoria ao impor sobre o sistema essa condição?

Infelizmente, a resposta não é clara no contexto da mecânica lagrangiana, e de fato só começa a despontar com o advento da mecânica quântica. Podemos dizer por enquanto que o princípio de Hamilton tem o poder de sintetizar vários procedimentos, e colocar as equações de movimento em formato independente das coordenadas do problema: avanços de *forma*. Observemos como o formalismo lagrangiano centraliza na integral de ação, e por consequência na função lagrangiana, toda a 'responsabilidade' sobre a dinâmica do sistema. Essa nova forma de pensar cria pela primeira vez um *formalismo* propriamente dito para a mecânica, i.e. um arcabouço formal de passos bem definidos para a proposição e compreensão de situações físicas gerais, rigoroso e limpo do ponto de vista matemático.

Em outras palavras, o princípio de Hamilton nos informa como tratar a lagrangiana para encontrar a evolução temporal do sistema, mas não determina a partir de considerações fundamentais nem sua forma nem o que significam as quantidades basilares (e.g. inércia, energia, espaço ou tempo) a construí-la. Mas não devemos menosprezar esse feito. A consequência mais impactante de se possuir um formalismo coeso é poder transportá-lo a *outros contextos da física* e por seu uso aprender mais sobre seu significado²⁴. Podemos dizer que a mecânica esbarra através do princípio de Hamilton em algo tão fundamental e novo que é ironicamente incapaz de compreendê-lo com seus conceitos tão rudimentares. É preciso evoluir primeiro na compreensão de como ocorrem interações e como se dá a dinâmica em nível mais fundamental para interpretá-lo. A mecânica hamiltoniana e sua analogia com a ótica geométrica dá as próximas pistas desse belo quebra-cabeças.

2.3 Leis de conservação e simetrias de transformação

2.3.1 Primeiras integrais

Analisemos a seguir as equações de movimento, um sistema de N' equações diferenciais de segunda ordem e independentes, cada qual referente a uma coordenada generalizada. Resolver a trajetória é equivalente a realizar $2N'$ integrais e escolher $2N'$ constantes de integração (condições iniciais ou equivalente).

Algumas dessas integrais podem assumir formas simples por conta de *simetrias* do sistema, muitas vezes evidentes em sua lagrangiana. Como vimos no tratamento da interação entre dois corpos num campo de forças central, simetrias ajudam a diminuir a dimensão do problema matemático, fato incorporado de maneira natural na formulação lagrangiana da mecânica.

As equações de Lagrange podem ser escritas como o par de equações diferenciais de primeira ordem

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \quad \text{e} \quad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad (2.132)$$

em que p_j é denominado *momento generalizado* ou *momento canônico*. No caso particular de uso de coordenadas cartesianas e energia potencial independente da velocidade, essas equações fornecem em conjunto as leis de Newton, pois a primeira equação se torna $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = m\dot{q}_j$, como esperado para a definição newtoniana do momento, e a segunda, $\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} = F_j$, o enunciado da segunda lei²⁵.

Finalmente, notemos que o momento canônico do formalismo lagrangiano não corresponde necessariamente ao momento linear newtoniano, uma vez que depende da derivada da lagrangiana (dimensão de energia) com relação à coordenada generalizada q_j correspondente, que não precisa, como sabemos, ter dimensão de espaço. Por exemplo, se q_j representa uma posição angular, então p_j representa o momento angular associado à rotação nessa coordenada. O importante é que o produto da coordenada q_j por seu momento canonicamente conjugado p_j possua dimensão de ação.

²⁴Por exemplo, as equações de movimento do campo eletromagnético (equações de Maxwell) também podem ser deduzidas através de uma função lagrangiana pelo uso do princípio de Hamilton, como veremos.

²⁵Observemos, no entanto, que no quesito *forma* a Eq. (2.132) nos diz algo bastante diferente das equações newtonianas. Ambas colocam a lagrangiana no centro da dinâmica: é a lagrangiana que ‘regula’ o que ocorre com as coordenadas dinâmicas p_j e \dot{p}_j . Existe também um certo grau de simetria nessas equações, pois é a derivada parcial da lagrangiana com relação à coordenada conjugada q_j que fornece a evolução temporal de p_j . Essas características gerais são levadas a um novo nível de simetria no formalismo hamiltoniano.

Equações do movimento escritas nessa forma nos permitem resolver a dinâmica por partes em situações especiais. O caso mais simples de equação do movimento ocorre quando a coordenada generalizada q_j em questão *não aparece* na lagrangiana, i.e.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (2.133)$$

caso em que é chamada *cíclica*. A equação de Lagrange [Eq. (2.44)] para essa coordenada fornece

$$\frac{d}{dt} p_j = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j(t) = cte, \quad (2.134)$$

o que pode ser entendido como a *conservação* do momento conjugado p_j . Equações de movimento desse tipo, que possuem a forma simples de uma equação diferencial de primeira ordem e que por isso podem ser integradas diretamente para prover a solução buscada sem maiores considerações, são chamadas de *primeiras integrais*. Elas possuem a forma genérica

$$f(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = cte. \quad (2.135)$$

Encontrar primeiras integrais num sistema nem sempre é tarefa fácil, embora seja sempre recompensadora por diminuir a dimensão do problema matemático. A boa notícia é que algumas delas aparecem automaticamente como consequência de simetrias do sistema.

Um sistema é considerado *integrável* quando conseguimos escrever em princípio todas as suas equações do movimento como integrais. Isso só pode ocorrer se houver um número apropriado de simetrias, ou primeiras integrais, capaz de permitir a eliminação de quantia suficiente de graus de liberdade em favor de constantes do movimento.

Um exemplo claro de integrabilidade consiste numa partícula movendo-se em uma dimensão do espaço e sujeita apenas à ação de força conservativa. Nesse caso, são necessárias em princípio 2 constantes arbitrárias para fixar a trajetória da partícula no espaço de configurações. A energia, constante do movimento, permite escrever uma equação diferencial de primeira ordem na posição, como fizemos na Eq. (1.283), para se tornar uma dessas constantes, restando então apenas 1 constante arbitrária, no caso relacionando tempo à posição inicial (constante de integração).

Em geral, o espaço de configurações de um sistema de N partículas sujeito a k vínculos admite $N' = 3N - k$ coordenadas generalizadas independentes. Para que seja integrável, i.e. para poder ser escrito apenas em termos de equações diferenciais de primeira ordem, são necessárias N' primeiras integrais, que requererão N' constantes de integração arbitrárias (tipicamente, condições iniciais). Para que, mais do que isso, a trajetória do sistema colapse a uma curva unidimensional nesse espaço apenas pelo uso de primeiras integrais, é necessário que existam $2N' - 1$ primeiras integrais, caso em que o sistema é, além de integrável, totalmente determinado pelas constantes de movimento. A única constante arbitrária restante nesse caso serve para relacionar algum ponto da curva a um instante de tempo (sua parametrização), i.e. determinar onde ‘começa’ a curva. Como vimos, o problema de dois corpos em interação gravitacional é desse tipo.

2.3.2 Teorema de Noether

Emily Noether enunciou em 1918 um dos teoremas mais belos e fundamentais da física²⁶. Ela mostrou que a cada coordenada cíclica, ligada como vimos à conservação de algum momento generalizado, decorre também uma *simetria* do sistema físico (i.e. invariância por transformação).

De fato, uma *transformação* infinitesimal dq_j na coordenada generalizada q_j implica numa variação $d_j\mathcal{L}$ na lagrangiana de acordo com a forma como \mathcal{L} depende de q_j , ou seja,

$$d_j\mathcal{L} := \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_j + dq_j, \dots, q_n) - \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j. \quad (2.136)$$

Assim como a derivada temporal do momento conjugado p_j , a variação da lagrangiana *também se anula* caso a coordenada q_j seja cíclica. Dizemos nesse caso que \mathcal{L} é *invariante* por transformações de q_j : se \mathcal{L} não depende de q_j , então podemos transformar q_j à vontade sem alterar a lagrangiana do sistema. Podemos ainda manipular essa expressão notando pela regra da cadeia da derivação que

$$d_j\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j = \sum_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) dq_j = \sum_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i \mathcal{L} dq_j. \quad (2.137)$$

Em linguagem mais abstrata, dizemos que a lagrangiana sofre a atuação de um *operador diferencial* cada vez que uma transformação infinitesimal é realizada nas coordenadas de que depende, na forma

$$\frac{\partial}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i. \quad (2.138)$$

A Eq. (2.137) é resultado da aplicação desse operador, o *gerador* da transformação, na lagrangiana. Para tratar o tipo específico de transformação, é preciso discriminar a expressão para $\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$, como faremos em breve.

Em essência, o teorema de Noether se baseia no fato de que o termo $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j}$ é responsável não apenas pela dinâmica de \dot{p}_j , como apontado pela Eq. (2.132), mas também está ligado à quantidade $\sum_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \vec{\nabla}_i \mathcal{L}$ que fornece a ‘sensibilidade’ de \mathcal{L} à transformação infinitesimal dq_j . Podemos concluir que primeiras integrais advêm de leis de conservação, por suas vezes decorrentes de simetrias do sistema. Em outras palavras, a invariância da lagrangiana por uma transformação (simetria) aparece nas equações de movimento na forma de uma quantidade conservada, produzindo uma primeira integral para reduzir já de início em 1 grau de liberdade o problema a ser resolvido.

2.3.3 Simetria de translação e conservação do momento linear

Vamos ilustrar primeiramente o teorema de Noether no caso mais simples possível. Consideremos a lagrangiana escrita em coordenadas cartesianas descrevendo uma partícula sob influência de energia potencial dependente apenas das coordenadas espaciais,

$$\mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z). \quad (2.139)$$

²⁶“Invariante Variationsprobleme”, Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse 235-257 (1918). Tradução para o inglês disponível [aqui](#).

No formalismo newtoniano da mecânica, a condição para que haja conservação de qualquer componente do momento linear é a ausência de força na direção dessa componente. Suponhamos por concretude que se trate da direção x . Segue das equações de Newton que

$$p_x = cte \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_x = F_x = 0, \quad (2.140)$$

ou seja, a energia potencial é constante na coordenada x ,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad U = U(y, z). \quad (2.141)$$

Isso se reflete também na lagrangiana do sistema como independência da coordenada x , pois

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad (2.142)$$

visto que a energia cinética em coordenadas cartesianas só depende de \dot{x} . No que concerne à simetria, essa relação revela que a lagrangiana deve ser invariante por translações em x , pois

$$d_x \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \mathcal{L}(x + dx, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} dx = 0. \quad (2.143)$$

A mesma situação se torna mais clara e menos artificial no formalismo lagrangiano. O teorema de Noether nos indica começar pelo último passo acima para estabelecer a *simetria translacional* da lagrangiana. Esse tipo de simetria significa que o local exato onde o sistema físico se encontra não afeta sua dinâmica, ou seja, a mesma dinâmica aconteceria em qualquer parte do universo.

Podemos descrever qualquer transformação $d_j \mathcal{L}$ da lagrangiana por um infinitésimo dq_j na coordenada generalizada q_j pela Eq. (2.137). Especificamente, uma translação espacial infinitesimal é aquela que desloca de um vetor constante $d\vec{r}$ o vetor posição da partícula, isto é,

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}, \quad \text{com } d\vec{r} = \hat{n} dr, \quad (2.144)$$

sendo \hat{n} o versor que fornece a direção do deslocamento. Em termos de coordenadas generalizadas, queremos condensar em apenas uma delas (q_j) essa transformação, caso em que a variação do vetor é devida à dq_j por hipótese, valendo

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j. \quad (2.145)$$

Comparando a forma genérica da Eq. (2.144) para a translação à expressão geral de correção de primeira ordem $d\vec{r}$ dada pela Eq. (2.145), temos que $dr = dq_j$ e a transformação de translação pode ser descrita pela relação

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \hat{n}. \quad (2.146)$$

Assim, a Eq. (2.137) se escreve para a translação como

$$d_j \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} dq_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L}, \quad (2.147)$$

Dizemos que o operador diferencial $\frac{\partial}{\partial q_j} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla}$ é o gerador de translações no espaço²⁷.

²⁷Observemos que esse operador pode atuar em qualquer função de q_j para transladá-la. De fato, cada componente escalar da Eq. (2.145) seria escrita como e.g. $dx = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} x dq_j$.

Por outro lado, usando a equação de Lagrange, temos que esse mesmo operador, quando atuando *especificamente* na lagrangiana, produz a dinâmica,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \dot{p}_j. \quad (2.148)$$

O momento canônico nesse caso é dado por

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_j} \stackrel{\text{Eq. (2.31)}}{=} m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \stackrel{\text{Eq. (2.146)}}{=} \hat{n} \cdot \vec{p}, \quad (2.149)$$

em que $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$ é o momento linear da partícula. Assim, o momento canônico é a componente do momento newtoniano na direção de translação \hat{n} .

Essa relação pode ser combinada à Eq. (2.147) para sintetizar o papel duplo de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}$ na expressão

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} = \hat{n} \cdot \dot{\vec{p}}. \quad (2.150)$$

O membro esquerdo simboliza a dependência da lagrangiana na *posição* cartesiana q_j . O membro central se refere à forma como \mathcal{L} se modifica pela *translação* do sistema físico no espaço. O membro direito fornece o *momento linear* newtoniano da partícula. Conforme percebido por Noether, essas três quantidades são intimamente conectadas pelo formalismo lagrangiano.

Juntando tudo isso, podemos concluir que a propriedade matemática da lagrangiana em não depender da coordenada cartesiana q_j , i.e.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (2.151)$$

se traduz ao mesmo tempo e de forma indissociável em: (i) o sistema possuir simetria de translação na direção \hat{n} [Eq. (2.147)] e (ii) a componente $\hat{n} \cdot \vec{p}$ do momento linear da partícula na direção \hat{n} de translação ser uma grandeza conservada do movimento [Eq. (2.149)].

Disso decorre que um sistema dito homogêneo, ou seja, no qual a posição do sistema no espaço não tem efeito sobre a dinâmica, ou, ainda, com simetria completa de translação espacial, deve ter seu vetor momento linear \vec{p} conservado. O espaço newtoniano, visto como o palco onde ocorre a dinâmica, é em si considerado homogêneo, do que decorre a conservação do momento total (i.e. do centro de massa) para qualquer sistema isolado. O teorema de Noether revela então que as leis de Newton seguem como consequência dessa simetria fundamental do universo: o local exato onde acontece a física de um sistema fechado é irrelevante. Sistemas desse tipo possuem pelo menos 3 primeiras integrais.

2.3.4 Simetria de rotação e conservação do momento angular

A segunda operação importante para a mudança de coordenadas espaciais é a rotação. Um sistema com simetria de rotação se comporta da mesma forma independentemente de sua *orientação* no espaço.

Tratamos rotações escolhendo um versor \hat{n} como eixo e uma coordenada generalizada para denotar o ângulo de rotação em torno desse eixo. O vetor posição \vec{r} de uma partícula se transforma de acordo com

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}, \quad \text{com } d\vec{r} = \vec{n} \times \vec{r} d\theta. \quad (2.152)$$

Para que essa transformação se realize pela variação de apenas uma coordenada generalizada q_j , devemos ter $d\theta = dq_j$. Além disso, por inspeção das Eqs. (2.145) e (2.152), vemos que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \hat{n} \times \vec{r}. \quad (2.153)$$

Com isso, a transformação da lagrangiana se dá, de acordo com a Eq.(2.147), por

$$d_j \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j = (\hat{n} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L} dq_j = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \mathcal{L}) dq_j \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \mathcal{L}). \quad (2.154)$$

O gerador de rotações é o operador diferencial $\hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})$.

Já o momento canônico p_j , definido pela Eq. (2.148), se torna

$$p_j = m \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \stackrel{\text{Eq.(2.153)}}{\downarrow} m \dot{\vec{r}} \cdot (\hat{n} \times \vec{r}) = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = \hat{n} \cdot \vec{L}, \quad (2.155)$$

em que $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular da partícula. O momento p_j canonicamente conjugado à coordenada de variação angular q_j é dado pela componente do momento angular newtoniano na direção do eixo de rotação \hat{n} , um resultado muito interessante!

A relação que resume o papel duplo do operador $\frac{\partial}{\partial q_j}$ nesse caso é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \mathcal{L}) = \hat{n} \cdot \dot{\vec{L}}. \quad (2.156)$$

Novamente, aparecem nessa equação três aspectos conceituais distintos conectados: à esquerda, a forma como a lagrangiana depende da coordenada generalizada *angular*; no centro, a variação do sistema físico pela *rotação* em torno do eixo \hat{n} ; e, à direita, a dinâmica da componente do *momento angular* paralela ao eixo de rotação \hat{n} .

Se a lagrangiana não depende da coordenada angular q_j , então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0. \quad (2.157)$$

O sistema físico possui então simetria de rotação em torno do eixo \hat{n} e o momento canônico p_j , i.e. a componente do momento angular \vec{L} na direção \hat{n} , é conservado. Essa simetria indica que a física do problema não depende de sua *orientação* espacial.

Um sistema invariante por rotação em torno de qualquer eixo é chamado isotrópico. Sistemas isotrópicos mantêm seu vetor momento angular \vec{L} como constante do movimento, possuindo portanto pelo menos 3 primeiras integrais. O espaço newtoniano é considerado isotrópico, e por isso qualquer sistema isolado tem seu momento angular conservado.

Na verdade, hoje sabemos que a distribuição da matéria no universo apresenta desvios da isotropia. A matéria se concentra em estruturas filamentosas que circundam enormes bolhas de vazio (vistas da Terra como as posições angulares dos superaglomerados de galáxias). Em particular, a Terra se encontra no superaglomerado de Laniakea²⁸. Esse fato poderia em princípio se refletir como uma quebra local de isotropia

²⁸R. Brent Tully *et al.*, Nature **513**, 71 (2014). [Vídeo disponível aqui](#).

do espaço, já que sua geometria depende da distribuição de matéria segundo a relatividade geral. Apesar disso, não foram ainda observados efeitos de quebra da conservação do momento angular associados à distribuição inhomogênea de matéria no universo. Outros efeitos em geral se tornam mais importantes antes desse, de forma que a inhomogeneidade do espaço em si deve ser considerada desprezível.

2.3.5 Invariância temporal e conservação da energia

A última simetria básica de que tratamos está ligada à conservação da energia. Trata-se da invariância da lagrangiana por deslocamentos no tempo. Queremos dizer com isso que o instante em que o sistema assume certa configuração não influencia a dinâmica subsequente, ocorrendo esta da mesma forma a partir daquele instante, qualquer que seja o valor absoluto da variável tempo.

Essa simetria é conceitualmente diferente das demais por não envolver uma coordenada do sistema no espaço de configurações, mas a variável de parametrização chamada ‘tempo’. Essa simetria requer entender o efeito da dependência temporal explícita da lagrangiana sobre a dinâmica. A transformação da lagrangiana por uma translação no tempo se escreve

$$d_t \mathcal{L} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} dt. \quad (2.158)$$

Consideremos então a derivada temporal total da lagrangiana,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{d}{dt} q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.159)$$

Segundo a equação de Lagrange para a dinâmica, vale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.160)$$

com o que a Eq. (2.159) fornece

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.161)$$

Com isso, obtemos que a dependência temporal explícita de \mathcal{L} tem o efeito

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} \right) = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (2.162)$$

em que usamos a definição do momento conjugado. Portanto, se \mathcal{L} não depende do tempo, conserva-se a quantidade²⁹

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte. \quad (2.163)$$

Para entender o significado físico de h , precisamos olhar em maior detalhe a somatória em $p_j \dot{q}_j$. No caso usual de energia potencial dependente apenas das coordenadas q_j , o momento generalizado tem a forma

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.164)$$

²⁹Essa mesma equação decorre da forma de Beltrami [Eq. (2.116)] para a equação de Euler-Lagrange.

Mas vale para a energia cinética a expressão

$$K = \frac{1}{2}m \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right) = \frac{1}{2}m \sum_{j',j''} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j'}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j''}} \dot{q}_{j'} \dot{q}_{j''}, \quad (2.165)$$

em que usamos a Eq. (2.19) com $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0$ (pois supomos $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$). A derivada parcial dessa expressão, conforme requerida pela Eq. (2.164), fornece

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2}m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \sum_{j'} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{1}{2}m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \sum_{j''} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j''}} \dot{q}_{j''} = m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \sum_{j'} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'}. \quad (2.166)$$

A somatória em $p_j \dot{q}_j$ da Eq. (2.163) então se simplifica para

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = \sum_{j,j'} m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_{j'}} \dot{q}_j \dot{q}_{j'} = 2K. \quad (2.167)$$

A Eq. (2.163) fornece finalmente o resultado

$$h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = 2K - \mathcal{L} = K + U = E, \quad \left(\text{se } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right) \quad (2.168)$$

mostrando que a função h corresponde à *energia* do sistema para interação conservativa independente da velocidade, sendo uma constante do movimento se a lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Caso U dependa da velocidade, é preciso reinterpretar o sentido de h ; no entanto, essa função continuará fornecendo uma constante do movimento desde que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$.

Na verdade, o formalismo lagrangiano permite a inclusão de outras formas de energia associadas a campos e graus de liberdade internos das partículas, revelando a profundidade do teorema de Noether: a conservação da energia está associada à invariância temporal da lagrangiana completa (i.e. não apenas mecânica). Esses outros tipos de objetos físicos e interações apresentarão outras simetrias, tais como conjugação de carga elétrica e inversão temporal, indicando a existência de leis de conservação correspondentes.

Comentário: Vínculos e leis de conservação. O teorema de Noether conectando leis de conservação a simetrias do sistema pode ser generalizado também para o caso em que forças de vínculo atuam sobre o sistema. É possível mostrar que leis de conservação associadas a uma coordenada cíclica continuam válidas caso essa coordenada também esteja ausente das equações de vínculo. O mesmo vale para a conservação da energia, certamente garantida no caso em que as equações de vínculo independem do tempo.

Exemplo revisitado: Partícula presa a um anel em rotação uniforme. Outra forma de entender o exemplo da Fig. 2.4 utiliza o fato de que a lagrangiana permanece independente do tempo, i.e. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, apesar de incluir vínculos dependentes do tempo, confirmando que as forças de vínculo não realizam trabalho. Como, além disso, a energia potencial não depende da velocidade, temos que a função h deve corresponder à energia do sistema e ser uma primeira integral, mostrando que o problema (unidimensional) é integrável.

Segundo a definição da Eq. (2.163), a energia vale

$$h(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}mr_0^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mr_0^2 \omega^2 \sin^2 \theta + mgr_0 \cos \theta = E. \quad (2.169)$$

A solução alternativa da Eq. (2.62) é dada pela integral

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{mr_0^2} + \omega^2 \sin^2 \theta - \frac{2g}{r_0} \cos \theta}}. \quad (2.170)$$

Alternativamente a isso tudo, vemos na forma de $h(\theta, \dot{\theta})$ que o termo em $\dot{\theta}$ faz as vezes de energia cinética, enquanto os termos dependentes de θ podem ser formalmente entendidos como uma energia potencial efetiva,

$$U_{ef} = mgr_0 \left(\cos \theta - \frac{r_0 \omega^2}{2g} \sin^2 \theta \right). \quad (2.171)$$

Essa lei de conservação nos permite, portanto, entender propriedades gerais do movimento utilizando as técnicas da Seção 1.5.4. O primeiro termo de U_{ef} corresponde à energia potencial de um pêndulo simples e o segundo, à energia potencial efetiva criada pelo vínculo de rotação do anel; ou seja, o vínculo tem nesse caso efeito *equivalente* à adição de um termo na energia potencial da partícula.

Estudando a estabilidade do sistema, vemos da segunda derivada de U_{ef} que a posição angular $\theta = \pi$ se torna instável para o valor crítico $\omega^2 > \omega_c^2 = g/r_0$. Portanto, ocorrem dois regimes distintos de movimento. Para baixos valores da velocidade angular de rotação, i.e. $\omega < \omega_c$, a partícula oscila em torno de $\theta = \pi$ com frequência dada pela curvatura da energia potencial U_{ef} nesse ponto; para valores angular mais altas, i.e. $\omega > \omega_c$, o termo de energia associado ao vínculo passa a ser dominante, e a partícula pode oscilar em torno de dois pontos de equilíbrio simetricamente localizados com relação a $\theta = \pi$ a depender do valor de sua energia mecânica. Esses dois pontos se afastam maximamente, tendendo a $\theta = \pm\pi/2$, para $\omega \gg \omega_c$.

2.3.6 Campo de forças central revisitado

Voltemos ao problema de dois corpos em interação gravitacional para analisá-lo em termos de primeiras integrais e simetrias existentes na lagrangiana. As duas partículas em interação possuem massas m_1 e m_2 , e posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . A lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + \frac{\alpha_g}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (2.172)$$

em que $\alpha_g = Gm_1m_2$.

Queremos encontrar simetrias de \mathcal{L} , e por isso devemos tentar manipulá-la para colocá-la em termos de suas coordenadas ‘naturais’, i.e. aquelas que a tornam mais simples possível. Essa tarefa em geral não é simples, mas em nosso problema específico a energia potencial nos sugere definir a coordenada de posição

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (2.173)$$

de forma a se tornar dependente de uma única coordenada. Isso já simplificaria nosso problema se não fosse a expressão para a energia cinética, que se torna simples (i.e. uma soma de termos independentes) nas coordenadas originais \vec{r}_1 e \vec{r}_2 .

Se vamos mesmo usar o vetor posição relativa \vec{r} para simplificar a expressão da energia potencial, precisamos encontrar um segundo vetor que também desacople a energia cinética em dois termos, ou estaremos simplificando uma coisa às custas de complicar outra. E aqui utilizamos em nosso auxílio uma das simetrias

da lagrangiana: por se tratar de um sistema isolado de partículas, a posição específica que ocupa no espaço não pode influenciar a dinâmica. Disso decorre pelo teorema de Noether que o momento total $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ do sistema deve ser uma grandeza conservada, e portanto a posição \vec{R} da qual é conjugado se desacopla das demais. Como percebido por Newton, \vec{R} é a posição do centro de massa do sistema, sendo portanto conveniente escolhê-la para completar nosso sistema de coordenadas³⁰,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad (2.174)$$

em que denotamos a massa total do sistema por $M = m_1 + m_2$. Começamos então manipulando \mathcal{L} pela transformação de coordenadas

$$\begin{cases} \vec{r}_1(\vec{R}, \vec{r}) = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}, \\ \vec{r}_2(\vec{R}, \vec{r}) = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}, \end{cases} \quad (2.175)$$

relações essas obtidas pela inversão das Eqs. (2.173) e (2.174). A lagrangiana assume a forma mais simples

$$\mathcal{L}(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha_g}{r}, \quad (2.176)$$

em que $\mu = m_1 m_2 / M$ é a massa reduzida. Essa lagrangiana pode ser separada em duas, na forma

$$\mathcal{L}(\vec{R}, \vec{r}, \dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) = \mathcal{L}_M(\vec{R}, \dot{\vec{R}}) + \mathcal{L}_\mu(\vec{r}, \dot{\vec{r}}). \quad (2.177)$$

Agora \mathcal{L}_M se refere apenas às coordenadas do centro de massa e \mathcal{L}_μ contém apenas referências às posições relativas entre as partículas. A separação do problema de dois corpos em 2 problemas de 1 corpo reduz a dimensão do espaço de configurações de 6 dimensões a duas vezes 3 dimensões (i.e. as coordenadas de um problema não influenciam o outro).

Movimento do centro de massa

O movimento do centro de massa é dado pela lagrangiana da partícula livre, escrita em coordenadas cartesianas como

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} M (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2), \quad (2.178)$$

em que $\vec{R}(t) = X(t)\hat{X} + Y(t)\hat{Y} + Z(t)\hat{Z}$. Por não depender de nenhuma das coordenadas, existem 3 primeiras integrais associadas ao vetor momento desse sistema. As equações de Lagrange fornecem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_x = cte \\ P_y = cte \\ P_z = cte \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_0 = cte. \quad (2.179)$$

Os momentos canônicos valem

$$\left. \begin{array}{l} P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = M \dot{X} \\ P_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} = M \dot{Y} \\ P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Z}} = M \dot{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \vec{P}_0, \quad (2.180)$$

³⁰Se, por exemplo, tivéssemos escolhido essa outra coordenada como a posição média $\vec{R}' = (r_1 + r_2)/2$ das partículas, a energia cinética não se desacoplaría nas coordenadas \vec{r} e \vec{R}' , restando um termo cruzado proporcional a $\vec{r} \cdot \dot{\vec{R}}'$.

e determinam a posição do centro de massa (como notado anteriormente) em qualquer instante de tempo se fornecermos 3 constantes de integração, e.g. na forma de um vetor posição inicial $\vec{R}(0) = \vec{R}_0$,

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \frac{\vec{P}_0}{M} t. \quad (2.181)$$

Isso nos fornece a solução geral para o movimento do centro de massa.

Notemos que a lagrangiana \mathcal{L}_M é também isotrópica, pois independe de direção espacial, de forma que 3 primeiras integrais adicionais estão disponíveis por conta da conservação do momento angular. Além disso, a ausência de dependência explícita no tempo garante mais 1 primeira integral relativa à conservação de energia. É fácil notar, no entanto, que todas as 7 primeiras integrais se relacionam entre si, não sendo independentes. De fato, o momento angular é escrito como $\vec{L}_0 = \vec{R}_0 \times \vec{P}_0$ e a energia vale $E_0 = P_0^2/(2M)$, sendo portanto equivalentes às primeiras integrais obtidas pela conservação do momento na Eq. (2.179).

Movimento relativo

A parte interessante do movimento ocorre pela lagrangiana \mathcal{L}_μ , definida como

$$\mathcal{L}_\mu(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha_g}{r}. \quad (2.182)$$

Ela depende das três coordenadas cartesianas, como pode ser visto se escrevermos \mathcal{L}_μ na forma

$$\mathcal{L}_\mu(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\alpha_g}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (2.183)$$

Translações espaciais, portanto, certamente afetam seu valor³¹, e nenhuma componente do momento linear pode ser constante do movimento.

Mas uma característica interessante de \mathcal{L}_μ é o fato de só depender de módulos de vetores. Operações que preservam módulos, como rotações, não podem afetar a lagrangiana, de onde vemos que ela é isotrópica³². Portanto, o teorema de Noether nos mostra que o momento angular \vec{L} é uma grandeza conservada pela dinâmica descrita por \mathcal{L}_μ . A constância da direção do momento angular mantém o movimento para sempre sobre um mesmo plano contendo a origem do sistema de coordenadas. Assim, se o sistema começa girando de certa forma, a dinâmica manterá esse seu estado inicial próprio de rotação. Isso significa que podemos fixar a direção $\hat{L} = \hat{z}$ como o eixo privilegiado em torno do qual o movimento (desde que compatível com a preservação da magnitude L do momento angular) pode ocorrer.

Escrevamos então a lagrangiana em coordenadas cilíndricas, conforme sugerido pela energia potencial e pela conservação do momento angular,

$$\mathcal{L}_\mu(r, \dot{r}, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha_g}{r}. \quad (2.185)$$

³¹De fato, se utilizarmos o operador de translação espacial $\hat{n} \cdot \vec{\nabla}$ da Eq. (2.147), temos que

$$\hat{n} \cdot \nabla \mathcal{L}_\mu = \alpha_g \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\alpha_g \hat{n} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \neq 0, \quad \forall \hat{n},$$

de forma que não existe uma direção \hat{n} em que obteríamos invariância de \mathcal{L}_μ por translação.

³²Cálculo explícito utilizando o operador de rotação $\hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})$ da Eq. (2.154) mostra que

$$\hat{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \mathcal{L}_\mu) = -\alpha_g \hat{n} \cdot (\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = 0, \quad \forall \hat{n}. \quad (2.184)$$

A energia cinética passa a mostrar dependência nas coordenadas r e θ (e não apenas em suas derivadas temporais, como ocorre no sistema cartesiano) por conta da *curvatura* do sistema de coordenadas cilíndricas.

Empregamos agora a equação de Lagrange para a coordenada ϕ , que nos fornece a primeira integral

$$\mu r^2 \dot{\phi} = L = cte. \quad (2.186)$$

Essa equação fixa a forma como rotações podem ocorrer de maneira consistente com a conservação da magnitude de \vec{L} , permitindo a eliminação de mais um grau de liberdade do problema ($\dot{\phi}$ fica determinado em termos da constante do movimento L e da coordenada r).

Observemos, no entanto, que essa eliminação *não pode ser realizada diretamente na lagrangiana*, pois $\dot{\phi}$ depende de r , e isso incluiria uma *dependência explícita* e artificial entre as coordenadas em \mathcal{L} . O problema formal que isso geraria seria impedir o uso da equação de Lagrange para r , deduzida supondo *coordenadas independentes* na lagrangiana! Assim, salvo em caso de coordenadas ou momentos *constantes*, é preciso primeiro escrever todas as equações de Lagrange para só depois manipulá-las.

A última simetria básica de nosso sistema é a invariância com relação à escolha de origem do tempo, implicando na conservação da função h , em nosso caso igual à energia do sistema. A função h é também uma primeira integral do problema, escrita segundo sua definição [Eq. (2.168)] como

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - \frac{\alpha_g}{r} \stackrel{\text{Eq. (2.186)}}{\downarrow} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha_g}{r} = E. \quad (2.187)$$

Como vimos, essa lei de conservação torna o problema unidimensional, e de fato integrável. Isolando \dot{r} , a solução do movimento envolve a integral

$$t = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha_g}{r}}}, \quad (2.188)$$

como vimos na Seção 1.7.

Assim, o problema de dois corpos em interação gravitacional conta com um número de primeiras integrais suficiente para resolver o movimento de forma fechada, sendo desnecessário considerar a equação de Lagrange para a coordenada r . Esta forneceria a equação diferencial redundante³³

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \mu r \dot{\phi}^2 - \frac{\alpha_g}{r^2} - \mu \ddot{r} \stackrel{\text{Eq. (2.186)}}{\downarrow} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha_g}{r^2} - \mu \ddot{r} = 0. \quad (2.191)$$

³³Ilustremos que utilizar a Eq. (2.186) para eliminar $\dot{\phi}$ diretamente na lagrangiana, por não fazer sentido, daria uma equação incorreta para o movimento. Teríamos nesse caso a lagrangiana equivocada

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\alpha_g}{r}, \quad (2.189)$$

cuja equação de movimento para a coordenada r seria

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{r}} = -\frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{\alpha_g}{r^2} - \mu \ddot{r} = 0. \quad (2.190)$$

O sinal no termo alterado pelo uso da expressão para $\dot{\phi}$ está errado (o momento angular produz nesse caso um termo atrativo na energia potencial efetiva!).

Tal como fizemos na Seção 1.7, encontrar os possíveis formatos de trajetórias $r(\theta)$ envolve eliminar o tempo dessas equações diferenciais pelo uso da Eq. (2.186) escrita na forma

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{d}{d\phi}. \quad (2.192)$$

A Eq. (2.188) para a energia se torna a Eq. (1.356), resolvida na Seção 1.7. Já a Eq. (2.191) de movimento assume a forma

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{L^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha_g}{r^2} = 0. \quad (2.193)$$

A integração das Eqs. (2.186) e (2.188) requer duas constantes arbitrárias, e.g. $\phi(0)$ e $r(0)$. Ao adicionarmos às constantes de movimento o vetor de Laplace-Runge-Lenz, conservado como consequência da dependência $1/r$ da energia de interação, apenas uma constante de integração permanece arbitrária, aquela a relacionar algum ponto da trajetória ao tempo. A trajetória do problema de dois corpos em interação gravitacional fica determinada, portanto, apenas por constantes do movimento.

2.4 Tratamento geral de vínculos no movimento

Vínculos restringem a trajetória da partícula no espaço de configurações lagrangiano. A forma como lidamos com vínculos até agora se resumiu a impô-los já na lagrangiana do sistema, pela eliminação direta de coordenadas dependentes através de equações de vínculo. Essa maneira de proceder nos garante que a lagrangiana faça menção apenas a coordenadas independentes num espaço de menor dimensão que o original, justificando o uso do princípio variacional para a obtenção das equações de Lagrange. Nesse caso, as forças de vínculo ficam ocultas pelo formalismo e jamais aparecem de forma direta. O método funciona da melhor forma possível quando conseguimos encontrar coordenadas nas quais os vínculos assumem a forma $q_j = cte$.

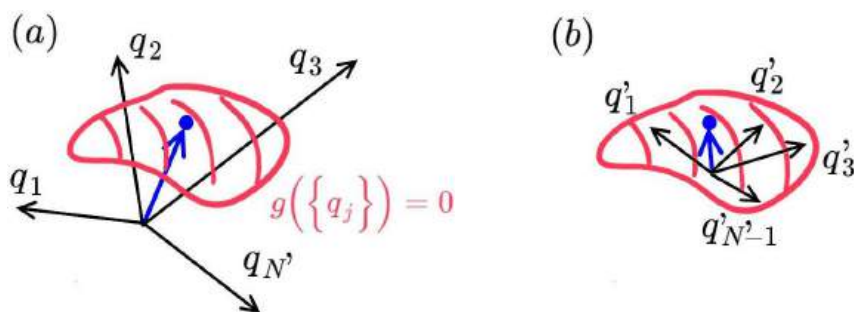


Figura 2.9: (a) Cada função de vínculo holonômico restringe o movimento do sistema mecânico a uma superfície no espaço de configurações lagrangiano. (b) O uso de uma função de vínculo diretamente na lagrangiana (como vínhamos fazendo até aqui) permite criar um novo espaço de configurações de menor dimensão.

Essa forma de proceder, no entanto, não permite a determinação das forças de vínculo, algo que pode ser necessário em alguns tipos de problema. O procedimento mais geral para a imposição de vínculos holonômicos no movimento, conforme veremos a seguir, utiliza as equações de vínculo em forma diferencial, pelo uso de multiplicadores de Lagrange, efetivamente incluindo no formalismo forças generalizadas de vínculo que podem também ser determinadas como parte do problema mecânico. Trabalhamos nesse caso no espaço original, porém respeitando relações fornecida pelas equações de vínculo. A ideia é que os q_j

permaneçam independentes do ponto de vista formal, embora estejam restritos a pertencerem a superfícies específicas do espaço de configurações.

2.4.1 Equações de movimento e multiplicadores de Lagrange

Multiplicadores de Lagrange

A ideia geral dos vínculos é restringir as formas de variação da função de cuja integral o funcional depende. Na visão pictórica da Fig. 2.9(a), cada função de vínculo produz uma superfície que restringe a configuração do sistema e suas variações. A título de exemplo, consideremos o funcional da Eq. (2.78) generalizado para depender de duas funções,

$$F[x(t), y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} f(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) dt. \quad (2.194)$$

Caso x e y possam ser variadas pelas funções δx e δy de forma independente, então sabemos que o funcional se torna estacionário se a função f satisfizer as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (2.195)$$

Suponhamos agora que essas variações não sejam independentes, mas conectadas por uma equação de vínculo holonômico na forma $g(x, y) = 0$. Isso significa que as funções de variação se relacionam mutuamente pela equação de vínculo, pois

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} \delta x + \frac{\partial g}{\partial y} \delta y = 0, \quad (2.196)$$

deixando de ser independentes. Nessa forma diferencial, o vínculo relaciona as funções de variação às *derivadas parciais* da função g em cada ponto (x, y) , i.e. ao *gradiente* dessa função no espaço de configurações.

Uma forma de proceder para incluir essas condições adicionais sobre as variações δx e δy consiste em retornar ao último passo da dedução das equações de Euler-Lagrange, escrevendo a condição de estacionariedade do funcional como

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \delta y \right] dt = 0, \quad (2.197)$$

e utilizar a Eq. (2.196) para eliminar uma das variações. Escolhemos δy como a variação dependente para reescrever a Eq. (2.196) como

$$\delta y = -\frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \delta x. \quad (2.198)$$

Substituindo essa relação na Eq. (2.197) obtemos

$$\delta F = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \right] \delta x dt = 0. \quad (2.199)$$

Como a variação δx é arbitrária, podemos utilizar o argumento de que o termo a multiplicá-la precisa ser identicamente nulo, i.e.

$$\frac{1}{\partial g / \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{\partial g / \partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right). \quad (2.200)$$

Como cada membro dessa equação depende das funções $x(t)$ e $y(t)$, em princípio diferentes, a igualdade entre eles nos indica serem ambos a mesma função $-\lambda(t)$,

$$\frac{1}{\partial g/\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{1}{\partial g/\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = -\lambda(t). \quad (2.201)$$

Com isso, podemos dizer que a inclusão de vínculos modificam as equações de Euler-Lagrange para

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0. \quad (2.202)$$

A função $\lambda(t)$ é chamada *multiplicador de Lagrange*, e representa uma função adicional a ser determinada na resolução do problema mecânico (o que é possível pois a equação de vínculo fornece uma equação adicional às equações de Euler-Lagrange). Seu papel é vincular a equação de Euler-Lagrange original da Eq. (2.195) à função de vínculo em forma diferencial (i.e. o gradiente dessa função), criando a liberdade necessária para permitir variações relativas entre δx e δy a menos do fator multiplicativo que representa.

Equações de Lagrange com vínculos

Vamos generalizar as equações de Euler-Lagrange para o caso de um sistema N' -dimensional de coordenadas generalizadas q_j aplicando o método variacional. A integral de ação [Eq. (2.197)] mantém a mesma forma, i.e.

$$S[\{q_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt, \quad (2.203)$$

mas a função de vínculo holonômico impõe uma condição adicional às variações δq_j , pois

$$g(\{q_j\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (2.204)$$

A estacionariedade da ação requer, como vimos,

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt, \quad (2.205)$$

na qual uma das variações não é independente das demais por conta da Eq. (2.204). Podemos isolar a variação $\delta q_{N'}$ pela relação

$$\delta q_{N'} = -\frac{1}{\partial g/\partial q_{N'}} \sum_{j=1}^{N'-1} \frac{\partial g}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.206)$$

para eliminá-la da Eq. (2.205),

$$\begin{aligned} dS &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{N'-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{N'}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{N'}} \right) \frac{1}{\partial g/\partial q_{N'}} \sum_{j=1}^{N'-1} \frac{\partial g}{\partial q_j} \delta q_j \right] dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N'-1} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{N'}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{N'}} \right) \frac{\partial g/\partial q_j}{\partial g/\partial q_{N'}} \right] \delta q_j dt = 0. \end{aligned} \quad (2.207)$$

Sendo as variações δq_j todas independentes, requeremos a anulação dos integrandos, obtendo $N' - 1$ equações na forma

$$\frac{1}{\partial g/\partial q_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{1}{\partial g/\partial q_{N'}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{N'}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{N'}} \right) = -\lambda, \quad (2.208)$$

uma para cada coordenada generalizada q_j . Notemos que todas as equações j fazem referência à mesma equação de Euler-Lagrange para a coordenada $q_{N'}$, de forma que essas equações são também todas iguais ao mesmo multiplicador de Lagrange λ . O sistema de equações de Lagrange modificadas se torna, portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \lambda \frac{\partial g}{\partial q_j} = 0. \quad (2.209)$$

Esse sistema nos fornece N' equações, às quais adicionamos a equação de vínculo para obter o total de $N' + 1$ equações necessário à resolução do problema. Como a trajetória possui N' coordenadas generalizadas a serem determinadas como função do tempo e a função $\lambda(t)$ é agora também parte do problema, precisamos de fato das $N' + 1$ equações para resolver o movimento.

Quando mais equações de vínculo são adicionadas, devemos proceder de forma similar adicionando termos à Eq. (2.209), com cada equação de vínculo introduzindo 1 multiplicador de Lagrange adicional. Para k equações de vínculo g_l , com $l = 1, 2, \dots, k$, o sistema de equações a ser resolvido se torna

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j} = 0, \\ g_l(\{q_j\}, t) = 0. \end{cases} \quad (2.210)$$

Juntas, essas equações formam um sistema determinado pelas N' equações de Lagrange modificadas e pelas k equações de vínculo. O número de equações é, portanto, suficiente para determinar as N' coordenadas generalizadas $q_j(t)$ e os k multiplicadores de Lagrange $\lambda_l(t)$. No caso mais simples e comum em que as funções de vínculo não dependem do tempo, os multiplicadores de Lagrange se tornam constantes $\lambda_l(t) = \lambda_l$.

Funcional modificado para inclusão de vínculos

O sistema de equações modificadas por vínculos obtido na Eq. (2.210) pode ser diretamente deduzido a partir do funcional modificado

$$S[\{q_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) + \sum_l \lambda_l g_l(\{q_j\}) \right) dt. \quad (2.211)$$

Notemos que essa modificação não introduz mudanças na integral de ação, uma vez que as funções g_j são nulas. O termo $\sum_l \lambda_l g_l(\{q_j\})$ tem o papel de vincular as variações δq_j umas às outras através dos gradientes das funções de vínculo ao mesmo tempo em que permite tratá-las como independentes no cálculo de estacionariedade da integral de ação.

A variação do funcional fornece

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) + \sum_l \left(\lambda_l \sum_j \frac{\partial g_l}{\partial q_j} \delta q_j + g_l \delta \lambda_l \right) \right] dt, \quad (2.212)$$

em que assumimos o caso geral em que $\lambda_l = \lambda_l(t)$ para definir sua função variação correspondente $\delta \lambda_l(t)$. Realizando a tradicional integração por partes no termo $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$ e agrupando termos que multiplicam a mesma variação, impomos a estacionariedade do funcional de ação através da relação usual

$$dS = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_l \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \sum_l g_l \delta \lambda_l \right] dt = 0. \quad (2.213)$$

A arbitrariedade das funções de variação $\delta\lambda_l(t)$ fornece de volta as equações de vínculo $g(\{q_j\}) = 0$. Além disso, tomando como independentes as variações δq_j nas coordenadas generalizadas, encontramos o sistema de equações da Eq. (2.210).

Assim, introduzir a modificação da Eq. (2.211) no integrando da ação e considerar as coordenadas como independentes é matematicamente equivalente a seguir cuidadosamente as variáveis dependentes para eliminá-las com o uso das equações de vínculo como fizemos na Eq. (2.206). A diferença entre os dois métodos é, novamente, apenas de forma. Tratar o problema pelo uso da Eq. (2.211), ou, equivalentemente, pelo uso direto do sistema de equações dado pela Eq. (2.210) é, tal como dita a ‘filosofia’ da mecânica lagrangiana, automático: uma vez deduzida a ‘receita’ mais simples, o formalismo pode ser aplicado sem grandes percalços e com alcance bem geral para se obter as equações diferenciais da trajetória do sistema. O trabalho ‘cerebral’ fica então reservado para entender a física do movimento em si, e não a matemática de como obter suas equações, por ser esta tornada por construção bastante robusta e genérica.

2.4.2 Determinação das forças de vínculo

Na dedução da equação de Lagrange a partir do princípio de D’Alembert [Eq. (2.36)], supusemos que as forças generalizadas Q_j pudessem ser deduzidas a partir de uma função energia potencial. No entanto, no caso geral é possível separar Q_j em duas componentes, uma conservativa e outra não-conservativa: a primeira se integra à função lagrangiana, enquanto a última se mantém na equação de Lagrange para levá-la à forma mais geral

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad (2.214)$$

em que renomeamos Q_j como a parte exclusivamente não conservativa³⁴ da força generalizada a afetar a coordenada q_j .

A comparação entre essa expressão e a Eq. (2.210) nos permite identificar os termos de vínculo com a força generalizada

$$Q_j = - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{l=1}^k \lambda_l g_l. \quad (2.215)$$

Vemos que, do ponto de vista matemático, remover os vínculos e incluir essas forças nas equações de Lagrange resultaria no mesmo problema físico; portanto, as *forças generalizadas de vínculo* são de fato calculadas através da Eq. (2.215). Assim, as equações de vínculo fornecem, por derivação com respeito à variável generalizada correspondente, a força generalizada a atuar sobre aquela variável: é como se a função $\sum_l \lambda_l g_l$ fizesse o papel de ‘energia potencial’ associada a *todos* os vínculos!

Notemos que o sinal da função de vínculo é arbitrário, uma vez que $g_l(\{q_j\}) = -g_l(\{q_j\}) = 0$ produz os mesmos vínculos. Como consequência, o sinal de cada multiplicador de Lagrange λ_l é também arbitrário e, por isso, o sinal da força de vínculo precisa ser determinado com base em considerações físicas do problema. A força generalizada de vínculo se escreve como

$$Q_j = \pm \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j}. \quad (2.216)$$

³⁴Esse mesmo tratamento pode ser empregado para incluir forças dissipativas no sistema.

Em suma, o formalismo de inclusão de vínculos através de multiplicadores de Lagrange nos permite calcular as forças de vínculo explicitamente, em vez de ocultá-las na lagrangiana. Podemos agora escolher entre duas vias possíveis: ‘esconder’ as forças de vínculo já na lagrangiana, pelo uso das funções de vínculo para eliminar coordenadas dependentes, como vínhamos fazendo até aqui, ou, como ilustramos agora, utilizar os multiplicadores de Lagrange para determinar, além do movimento, também as forças de vínculo.

Exemplo revisitado: Sistema de massas e roldana. Retornemos mais uma vez à máquina de Atwood revisitada na Seção 2.1.5. Em nosso tratamento anterior desse sistema (pág. 159), escolhemos eliminar a coordenada dependente z_2 diretamente na lagrangiana para escrever apenas 1 equação de movimento para a coordenada z_1 . Façamos aqui o caminho mais geral de obter todas as equações do sistema conforme prescrito pela Eq. (2.210).

A lagrangiana do sistema é

$$\mathcal{L}(z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2) = K - U = \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 - m_1gz_1 - m_2gz_2, \quad (2.217)$$

sujeita a uma única equação de vínculo,

$$g(z_1, z_2) = \ell - 2h + z_1 + z_2 = 0. \quad (2.218)$$

Usando a Eq. (2.210), obtemos o sistema de três equações

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z_1} = -m_1g - m_1\ddot{z}_1 + \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z_2} = -m_2g - m_2\ddot{z}_2 + \lambda = 0, \\ g(z_1, z_2) = \ell - 2h + z_1 + z_2 = 0. \end{cases} \quad (2.219)$$

cuja solução se torna simples pelo uso da função de vínculo, que nos fornece $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$. Substituindo essa relação nas equações de Lagrange, obtemos

$$\begin{cases} -m_1g - m_1\ddot{z}_1 + \lambda = 0, \\ -m_2g + m_2\ddot{z}_1 + \lambda = 0. \end{cases} \quad (2.220)$$

A soma e a subtração dessas equações (após multiplicarmos a primeira por m_2 e a segunda, por m_1) fornecem, respectivamente,

$$\begin{cases} -2m_1m_2g + (m_1 + m_2)\lambda = 0, \\ 2m_1m_2\ddot{z}_1 + (m_1 - m_2)\lambda = 0. \end{cases} \quad (2.221)$$

Da primeira equação, obtemos o valor da força de vínculo (no caso, a tração na corda) e, da segunda, a equação de movimento, resultando em

$$Q = \lambda \frac{\partial g}{\partial z_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z_2} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 2\mu g \quad \text{e} \quad \ddot{z}_1 = -\frac{m_1 - m_2}{2m_1m_2}\lambda = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g. \quad (2.222)$$

Essas soluções haviam sido obtidas nas Eqs. (1.23) e (1.24) usando o tratamento newtoniano. Notemos que a física do problema nos impele a escolher o sinal positivo para a força de vínculo Q (as partículas são puxadas para cima, na direção positiva do eixo ordenado).

Exemplo revisitado: Partícula presa a um anel fixo. Consideramos no exemplo da Fig. 2.2 uma partícula presa a um anel fixo para comparar os tratamentos de forças de vínculo nos formalismos newtoniano e lagrangiano.

No caso lagrangiano, conseguimos eliminar qualquer menção a essas forças para resolver o movimento da partícula num espaço de configurações restrito. Já no caso newtoniano, fizemos uma série de considerações intrincadas para determinar de início as forças de vínculo e com elas obrigar a partícula a seguir a curva determinada pelo anel. Vejamos agora como essas forças podem ser determinadas também no formalismo lagrangiano, caso sejam de interesse, pelo uso da técnica dos multiplicadores de Lagrange.

Como vimos anteriormente, a lagrangiana do sistema e a equação de vínculo são

$$\begin{cases} \mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r, \theta), \\ g(r) = r - r_0 = 0. \end{cases} \quad (2.223)$$

Aplicando a Eq. (2.210), obtemos um sistema de três equações,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - m\ddot{r} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \theta} - m\ddot{\theta} = 0, \\ g(r) = r - r_0 = 0. \end{cases} \quad (2.224)$$

A função de vínculo impõe $\dot{r} = 0$, com o que a primeira equação fornece diretamente a força de vínculo capaz de manter a partícula presa ao anel fixo,

$$Q_r = \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = -mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (2.225)$$

Como já havíamos determinado na Eq. (2.13), a força de vínculo precisa desempenhar o papel de força centrípeta (primeiro termo do membro direito da equação acima) e também se opor exatamente à componente radial da força externa, o que nos permite escolher o sinal de Q_r . A equação restante em $\ddot{\theta}$ fornece o movimento da partícula obtido anteriormente.

Exemplo revisitado: Partícula presa a um anel em rotação uniforme. Um caso mais complicado de se determinar as forças de vínculo sem o uso de multiplicadores de Lagrange (embora factível) ocorre no exemplo da Fig. 2.4. Vamos determinar essas forças pelo uso dessa técnica.

A lagrangiana da partícula escrita em coordenadas esféricas tem a forma

$$\mathcal{L}(r, \theta, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - mgr \cos \theta, \quad (2.226)$$

dessa vez sujeita a duas equações de vínculo,

$$g_1(r) = r - r_0 = 0 \quad \text{e} \quad g_2(\phi, t) = \phi - \omega t = 0. \quad (2.227)$$

O sistema de equações a ser resolvido, de acordo com a Eq. (2.210), se torna

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial r} = mr \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + mr \dot{\theta}^2 - m\ddot{r} - mg \cos \theta + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \phi} = -\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \theta} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) + mgr \sin \theta = 0, \\ g_1(r) = r - r_0 = 0, \\ g_2(\phi, t) = \phi - \omega t = 0. \end{array} \right. \quad (2.228)$$

Apenas a terceira equação diz respeito à dinâmica da coordenada generalizada relevante para o movimento, $\theta(t)$. As demais equações fornecem as forças generalizadas de vínculo

$$Q_r = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial r} = \lambda_1 = -mr_0(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mg \cos \theta, \quad (2.229)$$

$$Q_\phi = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \phi} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \phi} = \lambda_2 = mr_0^2 \omega \sin(2\theta) \dot{\theta}. \quad (2.230)$$

A força radial de vínculo $Q_r = \lambda_1$ agora desempenha o papel de força centrípeta para os dois movimentos angulares, em θ e em ϕ , além de compensar a componente radial da força de gravidade no referencial centrado no anel (último termo). Já o torque de vínculo $Q_\phi = \lambda_2$ é criado para anular efeito análogo à força de Coriolis [Eq. (1.229)] conforme seria chamada no referencial não inercial em rotação com o anel.

Exemplo: Deslizamento sobre um cilindro. Uma utilidade de se conhecer as forças de vínculo consiste em determinar seus limites de validade. Consideremos uma partícula com massa m solta sobre a superfície de um cilindro com raio r_0 e fixo no Espaço com eixo na direção horizontal. O movimento ocorre sem atrito, de forma que a partícula escorrega até se desprender da superfície cilíndrica. Queremos determinar a posição em que ocorre o desprendimento.

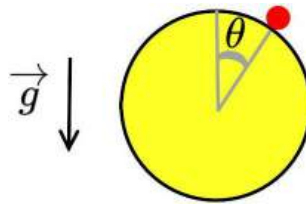


Figura 2.10: Jibóia que engoliu um elefante [Se você achou essa legenda perfeitamente normal, é possível que você não esteja seguindo bem o texto; aconselha-se fortemente começar tudo de novo].

A geometria do problema nos indica escrever a lagrangiana da partícula em coordenadas cilíndricas, escolhendo o eixo z coincidente ao eixo do cilindro, de forma que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgr \cos \theta, \quad (2.231)$$

sendo θ a posição angular da partícula medida com relação ao eixo vertical. A condição de vínculo, ao menos enquanto valer, se escreve como

$$g(r) = r - r_0 = 0, \quad (2.232)$$

obrigando a posição radial da partícula a coincidir com o raio do cilindro. O sistema de equações a descrever o movimento é

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta - m\ddot{r} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = mgr \sin \theta - \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = -m\ddot{z} = 0, \\ g(r) = r - r_0 = 0. \end{cases} \quad (2.233)$$

Conforme esperado, o momento da coordenada z é conservado, tendo solução direta a partir dessa primeira integral. Com o uso da função de vínculo, as demais equações de movimento fornecem

$$\begin{cases} mr_0\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda = 0 \\ mgr_0 \sin \theta - mr_0^2\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (2.234)$$

Como nosso interesse se restringe a determinar a força de vínculo λ , precisamos eliminar $\dot{\theta}^2$ na primeira equação. Isso pode ser realizado utilizando-se a segunda equação. Multiplicando-a por $\dot{\theta}$, obtemos

$$mgr_0\dot{\theta} \sin \theta - mr_0^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgr_0 \frac{d}{dt}(-\cos \theta) - mr_0^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = -\frac{2g}{r_0} \cos \theta + A, \quad (2.235)$$

em que A é a constante de integração utilizada para fazer valer a condição inicial³⁵.

Para uma partícula solta a partir do repouso no ponto mais alto da superfície cilíndrica, i.e. ($\theta = 0$ se $\dot{\theta} = 0$), a constante de integração vale $A = 2g/r_0$. Com isso, obtemos para a força de vínculo \vec{f} a expressão

$$\lambda = mg(3 \cos \theta - 2) \quad \Rightarrow \quad \vec{f}(\theta) = mg(3 \cos \theta - 2) \hat{r}. \quad (2.237)$$

Vemos dessa expressão que a força de vínculo troca de sinal de acordo com a posição angular. Ela assume o valor inicial $\vec{f}(\theta = 0) = mg\hat{r}$ no topo do cilindro, indicando que a força de coesão do material (repulsiva) é regulada para balancear exatamente a força gravitacional. Para a posição angular no lado oposto do cilindro (ponto mais baixo), teríamos $f(\theta = \pi) = -5mg\hat{r}$, indicando que a força capaz de manter o vínculo teria de ser *atrativa* para compensar a atração gravitacional e ainda fazer as vezes de força centrípeta (notemos que a partícula tem velocidade não nula nesse ponto).

Na verdade, nossa descrição do problema é um tanto artificial, pois apenas forças de vínculo repulsivas fazem sentido físico em nosso caso. O vínculo imposto se torna inapropriado a partir da posição angular θ_0 em que $f(\theta_0) = 0$, que em nosso caso vale $\theta_0 = \arccos(2/3) \approx 0,84 \approx 48^\circ$. De fato, o problema completo que carregasse a imposição de força de vínculo repulsiva como desejamos seria não-holonômico, pois então teríamos

$$g(r) = r - r_0 > 0, \quad (2.238)$$

³⁵ Outra forma de eliminar $\dot{\theta}^2$ é utilizar a conservação da função h do sistema, pois a lagrangiana e o vínculo independem explicitamente do tempo. Obtemos nesse caso

$$h(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgr \cos \theta = E. \quad (2.236)$$

Utilizando a primeira integral $\dot{z} = v_z = cte$ e a equação de vínculo ($\dot{r} = 0$), temos que $E = \frac{1}{2}mr_0^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + mgr_0 \cos \theta$, a partir da qual obtemos a mesma expressão da Eq. (2.235) se identificarmos $A = (E - \frac{1}{2}mv_z^2)/(mr_0^2)$.

e não contaria com um procedimento padrão de resolução. Por isso, é comum nesses casos utilizarmos o vínculo holonômico na região em que faz sentido, para resolvermos o movimento com o uso das ferramentas estabelecidas, e trocar de problema assim que o vínculo deixa de valer. No problema em questão, o movimento da partícula após soltar-se do cilindro segue a lagrangiana da Eq. (2.231) sem vínculos e com a condição inicial dada pelo estado da partícula no instante em que se descola do cilindro, i.e. $(r, \theta, z) = (r_0, \theta_0, z_0)$.

Para qualquer outra posição angular de soltura θ_s da partícula a partir do repouso, a constante A assume o valor $A = mg \cos \theta_s$. Substituindo esse resultado na expressão para a força de vínculo, obtemos $\lambda = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_s)$. O ângulo θ_s limite em que a partícula já se destaca do cilindro mesmo estando em repouso é encontrado impondo-se $\theta = \theta_s$ para $\lambda = 0$ nessa expressão, de onde obtemos $\theta = \pi/2$, que é o resultado esperado. Assim, a partícula se solta do cilindro sempre em ângulos $\theta < \pi/2$.

2.4.3 Vínculos semi-holonômicos

Um tipo de movimento bastante utilizado para modelar sistemas físicos consiste no rolamento sem deslizamento. A condição de vínculo restringe nesse caso as velocidades generalizadas, e não as coordenadas, dando origem na situação mais geral a vínculos não holonômicos. Em alguns casos, no entanto, é possível integrar a equação de vínculo, tornando-o efetivamente holonômico. Consideremos uma relação de vínculo dependente das velocidades generalizadas,

$$\sum_j A_j \dot{q}_j + B = 0. \quad (2.239)$$

No caso específico em que os coeficientes podem ser obtidos pela diferenciação de uma função $g(\{q_j\})$, na forma

$$A_j = \frac{\partial g}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad B_j = \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (2.240)$$

podemos reescrever a equação de vínculo como

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{d}{dt} g = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\{q_j\}, t) - cte = 0, \quad (2.241)$$

que representa, na verdade, um vínculo holonômico. De fato, multiplicar essa equação por dt nos permite escrever a equação de vínculo na forma alternativa

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial g}{\partial t} dt = 0, \quad (2.242)$$

que nada mais é do que a forma diferencial de um vínculo holonômico [Eq. 2.204]. Dessa maneira, é equivalente escrever as equações de movimento sujeitas a vínculo como o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j} = 0 \\ \sum_j \frac{\partial g_l}{\partial q_j} dq_j = 0 \end{cases} \quad (2.243)$$

para o caso mais comum em que o vínculo não depende explicitamente do tempo.

Exemplo: Anel sobre plano inclinado. Ilustremos o uso de vínculos semi-holonômicos através de um exemplo. Consideremos um bloco com massa M em formato de cunha disposto sobre uma superfície horizontal (o chão) na qual pode se mover sem atrito. Um anel com massa m , raio r_0 e momento de inércia I , colocado sobre a face do bloco inclinada por ângulo α , pode rolar sem deslizar sobre essa superfície.

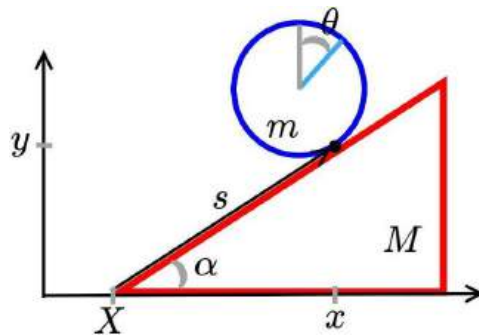


Figura 2.11: Anel em rolamento sobre bloco.

O movimento do sistema é descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L}(y, \dot{x}, \dot{y}, \dot{X}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgy, \quad (2.244)$$

em que (x, y) é a posição em que o anel toca o bloco e X (não há movimento do bloco no eixo Y), a posição da ponta do bloco. A posição angular θ representa a orientação do anel, dada e.g. pelo ângulo entre a vertical e um raio vetor de referência estendendo-se do centro do anel até sua borda.

Várias dessas coordenadas são relacionadas por condições de vínculo. A posição cartesiana X do bloco sobre o chão e a posição s do anel relativa ao bloco sobre sua superfície inclinada são as únicas coordenadas independentes, já que determinam a orientação θ do anel e sua posição (x, y) através dos vínculos, dados por

$$\begin{cases} x = X + s \cos \alpha \\ y = s \sin \alpha \\ ds = r_0 d\theta \end{cases}. \quad (2.245)$$

Assim, as funções de vínculo nos indicam primeiramente trabalhar em termos das coordenadas generalizadas (X, s, θ) pela eliminação das coordenadas cartesianas (x, y) do anel. Com essa mudança de coordenadas, a lagrangiana se torna

$$\mathcal{L}(s, \dot{s}, \dot{X}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(m + M)\dot{X}^2 + m \cos \alpha \dot{s}\dot{X} + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mg \sin \alpha s, \quad (2.246)$$

em que a última condição de vínculo, relativa ao rolamento sem deslizamento, possui a forma diferencial da Eq. (2.242). Podemos utilizar então o sistema de equações da Eq. (2.243) para descrever o movimento das partículas, obtendo

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial s} = -mg \sin \alpha - m\ddot{s} - m \cos \alpha \ddot{X} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial X} = -\frac{d}{dt} \left((m + M)\dot{X} + m \cos \alpha \dot{s} \right) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} = -I\ddot{\theta} - \lambda r_0 = 0, \\ \frac{\partial g}{\partial s} ds + \frac{\partial g}{\partial \theta} d\theta = ds - r_0 d\theta = 0, \end{cases} \quad (2.247)$$

em que os valores das derivadas parciais $\partial g/\partial q_j$ usados nas equações de Lagrange foram determinados por inspeção direta da equação de vínculo em forma diferencial, i.e. $\partial g/\partial s = 1$ e $\partial g/\partial \theta = -r_0$.

A segunda equação, uma primeira integral decorrente do caráter cíclico da coordenada X tanto na lagrangiana quanto na equação de vínculo, nos permite identificar o momento canônico p_X como constante do movimento,

$$p_X = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = (m + M)\dot{X} + m \cos \alpha \dot{s} = cte. \quad (2.248)$$

Notemos como esse momento generalizado em nada se assemelha ao momento newtoniano (por causa dos vínculos), apesar de se referir à coordenada cartesiana X . Já a equação de vínculo escrita na forma $\ddot{\theta} = \ddot{s}/r_0$ nos permite isolar a força de vínculo na terceira equação como $Q_s = \frac{\partial g}{\partial s} \lambda = \lambda = -I\ddot{s}/r_0^2$ para substituí-la na primeira e obter

$$\left(1 + \frac{I}{mr_0^2}\right) \ddot{s} + \cos \alpha \ddot{X} = -g \sin \alpha. \quad (2.249)$$

A Eq. (2.248) para o momento canônico nos permite escrever

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) \ddot{X} + \cos \alpha \ddot{s} = 0 \quad (2.250)$$

para transformar a Eq. (2.249) numa equação diferencial para apenas uma coordenada. Escolhemos eliminar \ddot{s} para obter

$$\ddot{X} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \left(1 + \frac{I}{mr_0^2}\right) - \cos^2 \alpha} g. \quad (2.251)$$

Alternativamente, eliminando \ddot{X} obtemos

$$\ddot{s} = -\frac{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \sin \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \left(1 + \frac{I}{mr_0^2}\right) - \cos^2 \alpha} g. \quad (2.252)$$

Essas soluções estabelecem que os movimentos ocorrem com acelerações constantes, inclusive o movimento angular do anel pela relação $\ddot{\theta} = \ddot{s}/r_0$. O valor de \ddot{s} representa a aceleração relativa entre o anel e o bloco, e por isso determina diretamente a força de vínculo dada por $\lambda = -I\ddot{s}/r_0^2$. Já \ddot{X} nos fornece a aceleração do bloco com relação ao chão. A aceleração horizontal do anel com relação ao chão é encontrada pela Eq. (2.245) como

$$\ddot{x} = \ddot{X} + \ddot{s} \cos \alpha = -\frac{M}{m} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\left(1 + \frac{M}{m}\right) \left(1 + \frac{I}{mr_0^2}\right) - \cos^2 \alpha} g = -\frac{M}{m} \ddot{X}, \quad (2.253)$$

um resultado também esperado pela conservação do momento linear do sistema como um todo, já que (pela terceira lei de Newton) a mesma força deve atuar nas duas partículas em contato, causando-lhes acelerações opostas e com magnitudes relacionadas pela razão entre suas massas. O efeito da rotação do anel é diminuir a aceleração linear ‘disponível’ a seu centro de massa, por levar parte da energia.

Neste exemplo, poderíamos ter eliminado também a coordenada θ diretamente da lagrangiana pelo uso da função de vínculo $\ddot{\theta} = \ddot{s}/r_0$, tornando mais direto encontrar as equações de movimento. O uso dos multiplicadores de Lagrange nesse caso serviu apenas para determinarmos a força de vínculo.

2.5 Palavras finais sobre o formalismo lagrangiano

A formulação lagrangiana da mecânica permite tratar sistemas mecânicos com ferramentas matemáticas mais poderosas. No nível elementar deste curso, duas delas se destacam de forma especial: coordenadas generalizadas e introdução de vínculos no movimento.

As coordenadas generalizadas permitem fazer o que já fazíamos antes, mas de forma melhor. De fato, com o intuito de simplificar a descrição matemática, estamos treinados a escolher o sistema de coordenadas (em geral, cartesiano, cilíndrico ou esférico) de acordo com a geometria da situação física. As coordenadas generalizadas tornam esse conceito mais abrangente ao introduzirem a possibilidade de utilizarmos (além de dicas geométricas) qualquer parametrização ‘pedida’ pela lagrangiana e pelos vínculos.

Claro que, formalmente falando, a parametrização conveniente das coordenadas espaciais pode sempre ser feita já nas equações de Newton, sem a necessidade de se utilizar o formalismo lagrangiano. O preço a pagar, no entanto, pode ser a obtenção de equações difíceis de se tratar, visto que o formalismo newtoniano sempre se inicia pelo uso de vetores no Espaço. O formalismo lagrangiano torna possível o uso prático de coordenadas generalizadas por seguir sempre a mesma prescrição para a obtenção das equações de movimento: as equações de Lagrange assumem a *mesma forma* independentemente da escolha de coordenadas.

É preciso neste ponto comentar que o uso de coordenadas generalizadas, por mapearem o Espaço em espaços matemáticos mais ou menos arbitrários, toca em questões de *topologia* destes, outra forma ainda de se entender propriedades gerais do movimento. Por exemplo, esse tipo de formalismo é utilizado na programação de sistemas robóticos, sujeitos como são a formas específicas de movimento restritas pelo desenho de seus componentes e por obstáculos no ambiente³⁶.

Já os vínculos servem para restringir o movimento do sistema a uma região do espaço de configurações, restrição essa em geral causada por alguma parte do sistema cujo efeito sobre o movimento é melhor conhecido do que a forma exata do mecanismo (força ou interação) por trás do efeito. Vínculos podem assumir em princípio qualquer forma, e por serem tão gerais não existe um tratamento matemático padrão para cobrir todas as possibilidades. Neste curso, tratamos apenas do caso particular (embora de grande alcance) de vínculos que não realizam trabalho virtual e que sejam holonômicos (ou equivalentes), i.e. que imponham relações precisas entre as coordenadas do espaço de configurações.

Vínculos holonômicos estão intimamente ligados à escolha das coordenadas generalizadas, podendo ser incluídos diretamente na lagrangiana para eliminar coordenadas dependentes: ficam, nesse caso, totalmente ocultos no tratamento matemático. No caso mais geral, são introduzidos pelos multiplicadores de Lagrange, que permitem tratar o problema sujeito a vínculos como se suas coordenadas fossem independentes (e.g. como na situação sem vínculos), mas sujeitas à ação de forças extras que precisam ser incluídas nas equações de Lagrange. Essas forças, ‘codificadas’ nas equações de vínculo e nos multiplicadores de Lagrange associados, são as forças generalizadas de vínculo, também determinadas pelo formalismo.

Do ponto de vista matemático, as equações de Lagrange para o movimento obtidas através do princípio de trabalho virtual nulo de D’Alembert possuem a mesma forma da equação de Euler-Lagrange para o cálculo das variações. Vimos que essa associação nos leva a definir o funcional estacionário da mecânica

³⁶Veja e.g. o livro “Planning algorithms”, de Steven M. LaValle (disponível online em <http://planning.cs.uiuc.edu>).

como a ação, a integral definida da função lagrangiana. As equações de Lagrange para o movimento podem ser então deduzidas por princípio totalmente independente, pela extremização da ação. Novamente, é preciso não perder de vista que a roupagem variacional da mecânica vale no contexto em que as forças de vínculo não realizam trabalho e são holonômicas, restrição válida no tratamento de interações fundamentais.

No entanto, a estacionariedade da ação nada traz de novo com relação ao princípio de D'Alembert no contexto da mecânica newtoniana, consistindo apenas em forma alternativa 'curiosa' de se obter as equações de movimento. Isso se dá porque não existe interpretação conceitual clara dentro da mecânica clássica para a estacionariedade da ação, tendo a mesma de ser interpretada como um postulado.

Hoje sabemos ser essa condição uma primeira indicação muito sutil do comportamento ondulatório da matéria em nível fundamental. De fato, a equivalência (desvendada no formalismo hamiltoniano) entre a mecânica e a ótica geométrica como teorias para partículas (de matéria ou de luz) já aponta a possibilidade de extensão fundamental da mecânica a uma teoria ondulatória (em analogia com o eletromagnetismo de Maxwell) para se justificar fisicamente a estacionariedade da ação. Esse lapso conceitual só seria totalmente remediado com a invenção da mecânica quântica, e em particular tornado até mesmo intuitivo pela formulação de integrais de caminho de Feynman³⁷.

Por fim, é preciso mencionar que existe ainda toda uma área de pesquisa dedicada ao tratamento de vínculos não holonômicos, caso em que sutilezas emergem sobre a equivalência entre o princípio de D'Alembert de trabalho virtual nulo e o princípio variacional de Euler-Lagrange para a estacionariedade da ação. Em qualquer contexto, o princípio de D'Alembert de balancear trabalhos virtuais sempre fornece as equações corretas de movimento, mesmo para o caso de movimentos altamente anti-intuitivos sob vínculos não holonômicos (tal como uma bola de golfe retornando do buraco). Já os requisitos do movimento implicados pelo princípio variacional encontram aplicações em teoria de controle ótimo³⁸. Como vemos, os caminhos físicos e matemáticos abertos pelo formalismo lagrangiano da mecânica são muito ricos, com repercussões ainda hoje objetos de pesquisa na física e na matemática.

³⁷No método de Feynman, associamos a cada partícula um 'relógio interno' (uma fase) e supomos que a partícula percorra ao mesmo tempo *todos* os caminhos possíveis para chegar de um ponto A a um ponto B . A marcação do ponteiro de relógio associada a cada caminho fornece um vetor, interpretado como uma amplitude de probabilidade. Para calcular a probabilidade total de que a partícula chegue ao ponto B , somamos vetorialmente todos os ponteiros. A *interferência* resultante entre todos esses caminhos faz com que apenas uma região de caminhos com *fase estacionária* (i.e. ação estacionária) contribuam de maneira relevante para a viagem da partícula: essas são as trajetórias clássicas! O mais interessante é que as consequências dinâmicas da 'fase interna' da partícula já aparecem na mecânica clássica (embora isso só fique claro em retrospecto!), descritas pela função principal de Hamilton. Mais detalhes em "QED: A estranha teoria da luz e da matéria", de R. P. Feynman.

³⁸Veja, por exemplo, o livro "Nonholonomic mechanics and control", de A. M. Bloch *et al.*.

Capítulo 3

Mecânica dos corpos rígidos

O corpo rígido é a idealização de um sólido *indeformável*. Após tratarmos corpos como partículas pontuais, i.e. com dimensões que possam ser ignoradas na descrição do movimento, o corpo rígido é a primeira ‘correção’ desse modelo para tratar corpos com tamanhos relevantes para a dinâmica¹. Além disso, os conceitos ligados ao tratamento da dinâmica dos corpos rígidos ideais também encontram utilidade para entender em sua essência o movimento de objetos deformáveis modelados pela junção de sólidos²

Um corpo extenso rígido é modelado como um sistema de partículas cujas distâncias relativas são todas fixas. Sua lagrangiana é, em princípio,

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_i\}, \{\dot{\vec{r}}_i\}) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\{\vec{r}_i\}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

em que denotamos, como antes, $\dot{\vec{r}}_i^2 = \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$. Apesar de se referir a N vetores de posição, o que poderia indicar a existência de $3N$ graus de liberdade, a *coesão* do corpo torna quase todos interdependentes³. Existem em princípio $\mathcal{O}(N^2)$ equações de vínculo, muitas das quais contendo informação redundante, do tipo

$$g(\vec{r}_i, \vec{r}_{i'}) = |\vec{r}_i - \vec{r}_{i'}| - r_{ii'} = 0, \quad i \neq i', \quad (3.2)$$

em que $r_{ii'} = cte > 0$ é a distância entre as partículas i e i' .

Para determinar quantas coordenadas são realmente necessárias à descrição do movimento de um corpo rígido, consideremos o que ocorre ao se escolher uma das partículas como referência para o movimento das demais. Tomemos o vetor posição \vec{r}_1 de uma partícula qualquer, rotulada como ‘1’, como coordenadas independentes na lagrangiana (i.e. três coordenadas escalares). Como o corpo não pode se esticar ou se comprimir, pois todas as distâncias r_{1i} relativas à partícula 1 são constantes (pois existem N vínculos $|\vec{r}_1 - \vec{r}_i| = r_{1i}$ relacionados a essa partícula), sua posição restringe cada uma das demais a se mover sobre uma *casca esférica* com raio r_{1i} centrada em \vec{r}_1 . Além disso, todas essas esferas também devem se encontrar rigidamente acopladas umas às outras, de forma que seus movimentos não sejam independentes. Assim, *o movimento do corpo rígido com relação ao ponto \vec{r}_1 se restringe a rotações no Espaço*.

¹A próxima etapa de detalhamento consideraria pequenas deformações elásticas do sólido, implicando e.g. em vibrações de pequena amplitude e propagação de ondas no mesmo.

²Um exemplo curioso disso é um gato que contorce o corpo e [cai sempre de pé](#) para além do corpo contorcidamente.

³Observemos como o formalismo lagrangiano é especialmente útil no tratamento conceitual do corpo rígido. Ele nos permite separar as interações influenciando cada partícula do sistema em dois grupos: forças externas ao corpo, responsáveis pela dinâmica que iremos estudar neste capítulo, e forças internas ao mesmo, cujo efeito é justamente manter a coesão do corpo.

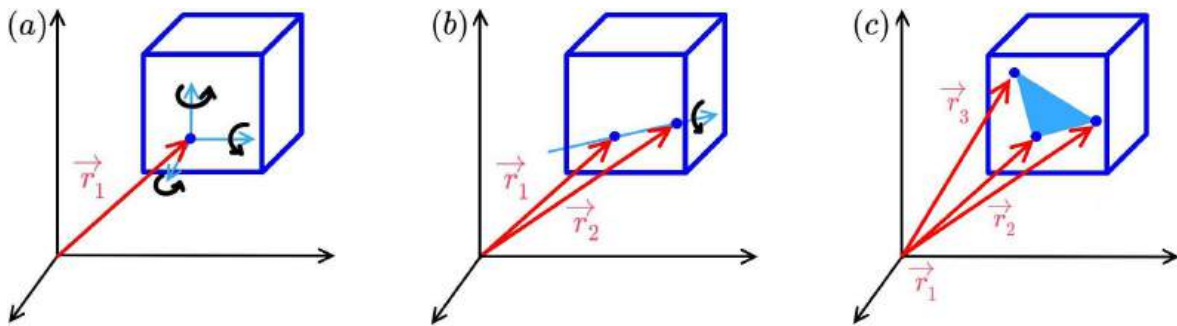


Figura 3.1: (a) Fixar a posição de um ponto \vec{r}_1 de referência no corpo rígido deixa as posições de suas demais partículas indeterminadas por rotações tridimensionais. (b) Adicionar um ponto \vec{r}_2 à descrição diminui a indeterminação dos demais por uma rotação em torno do eixo a unir \vec{r}_1 e \vec{r}_2 . (c) Três pontos não colineares fixam as posições de todos os demais pontos pertencentes ao corpo rígido.

Na tentativa de descrever o movimento de rotação do corpo com relação à posição da partícula 1, consideremos adicionar mais uma partícula como independente na lagrangiana, a partícula 2 com vetor posição \vec{r}_2 . Apesar de aparentemente incluir 3 novas coordenadas na lagrangiana, uma delas pode ser eliminada pela equação de vínculo relacionando sua posição relativamente à partícula 1, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r_{12}$, de forma que na verdade apenas 2 novas coordenadas são introduzidas com esse vetor. Podemos pensar nessas coordenadas como sendo as *posições angulares* da partícula 2 em sua respectiva casca esférica. Com essa adição, todas as demais partículas precisam se encontrar à distância constante também da partícula 2 (segundo as $N - 1$ equações de vínculo $|\vec{r}_2 - \vec{r}_i| = r_{2i}$, com $i \neq 1$). De fato, o segmento de reta unindo as partículas 1 e 2 forma um *eixo* em torno do qual rotações ainda são possíveis, embora em apenas duas dimensões do espaço, restringindo cada uma das partículas a ser mover sobre uma *circunferência* (ou anel) centrada nesse eixo. Novamente, esses anéis se encontram por suas vezes rigidamente fixos uns aos outros.

Para eliminar esse último grau de liberdade, escolhemos uma terceira partícula com vetor posição \vec{r}_3 (com o cuidado de que \vec{r}_3 não se encontre exatamente sobre o eixo unindo as partículas 1 e 2!), de forma a fornecer sua posição angular em seu respectivo anel. Isso inclui 1 coordenada que fixa automaticamente as posições angulares de *todas* as demais partículas (pelas $N - 2$ equações $|\vec{r}_3 - \vec{r}_i| = r_{3i}$, com $i \neq 1, 2$).

Assim, a configuração do corpo rígido necessita de 3 coordenadas espaciais para fornecer a *localização* de 1 partícula do corpo, tomada como referência, e 3 coordenadas angulares adicionais para determinar a *orientação* do corpo no espaço, totalizando 6 graus de liberdade, ou, equivalentemente, habitando um espaço de configurações lagrangiano com 6 dimensões.

Podemos tornar essas coordenadas mais abstratas, não necessariamente coincidentes com partículas reais do corpo. O *ponto de referência* nem mesmo precisa pertencer ao corpo, mas apenas *seguir-lo* em seu movimento pelo espaço a um distância fixa. Para a escolha desse ponto, veremos que duas possibilidades se mostrarão mais convenientes para o tratamento matemático do movimento: para um corpo com algum ponto imóvel especial em torno do qual ocorre uma *rotação pura*, este deve ser escolhido; para um corpo rígido em movimento arbitrário no Espaço, a escolha simplificadora se torna seu centro de massa, pois é em torno dele que certamente apenas rotações puras podem ocorrer.

Da mesma forma, os *eixos de referência* para as coordenadas angulares não precisam passar por partículas

reais do corpo, mas apenas estarem *fixos* com relação a elas. A escolha conveniente dos eixos fixos ao corpo rígido se faz, como veremos, de forma a simplificar o cálculo de sua inércia a rotações. A configuração do corpo rígido é descrita pela *posição da origem e orientação angular* de um sistema de eixos *presos a ele* com relação a um sistema de eixos *fixos ao laboratório*.

Em conclusão, na descrição matemática do movimento do corpo rígido, efetivamente o substituímos por um sistema de eixos capaz de mudar de orientação (por rotações) e de origem (por translações ou rotações). As regras matemáticas a reger o movimento da origem são aquelas já conhecidas por nós: esse ponto se move como se fosse uma partícula pontual possuidora da mesma massa do corpo rígido. Apenas as *rotações* do sistema de eixos acoplados ao corpo rígido apresentarão nova fenomenologia, sendo por isso o objeto de nosso enfoque.

3.1 Corpo rígido em duas dimensões do espaço

Um caso particular de movimento de corpos rígidos já estudado ao longo do curso de graduação em física consiste no movimento *bidimensional* de suas partículas. Quando o sistema de partículas, ainda que tridimensional, só admite movimentos que ocorrem de maneira equivalente em planos paralelos entre si (i.e. qualquer plano de escolha perfaz exatamente o mesmo problema físico, tal como e.g. um cilindro girando em torno de seu eixo), a descrição de corpos rígidos se torna simplificada. Focamos aqui primeiramente nesse caso particular mais simples para recordar algumas ideias importantes para a dinâmica dos corpos rígidos.

3.1.1 Momento de inércia

Na situação especial de movimento em um plano, a rotação do corpo rígido ocorre em torno de um único eixo *ortogonal* a esse plano. Seguindo a prescrição discutida na introdução, escolhemos um ponto \vec{R} fixo ao corpo como referência para descrever no referencial de laboratório a posição \vec{r}'_i de uma partícula i qualquer pertencente ao corpo como

$$\vec{r}'_i = \vec{R} + \vec{r}_i, \quad (3.3)$$

em que \vec{r}_i é a posição da partícula *relativa* ao ponto \vec{R} de referência. Manteremos ao longo deste capítulo a convenção de enfeitar com apóstrofes as quantidades medidas no referencial de laboratório.

O termo de energia cinética da lagrangiana do corpo rígido [Eq. (3.1)] se escreve

$$K' = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i)^2 = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.4)$$

em que realizamos a soma em i no primeiro termo para escrever $\sum_i m_i = M$, sendo M a massa do corpo rígido. Em princípio, essa expressão se simplifica se escolhermos \vec{R} como o centro de massa do corpo, pois nesse caso os vetores \vec{r}_i se tornam posições *relativas ao centro de massa*, valendo $\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ (i.e. o momento total das partículas é, por construção, nulo no referencial de centro de massa). A energia cinética então se *desacopla* em dois termos independentes,

$$K' = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2. \quad (3.5)$$

O primeiro diz respeito à energia cinética do corpo como se o mesmo fosse substituído por uma partícula pontual com massa M , e que pode ser tanto translacional quanto rotacional. Já sabemos tratar a dinâmica dessa ‘partícula’ com o formalismo lagrangiano, de forma que esse termo não traz nova fenomenologia. O segundo termo se refere apenas a velocidades *relativas* entre as partículas do corpo rígido, produzidas (por conta da coesão do corpo) como efeito único de uma *rotação*. Podemos então escrevê-las como [Eq. (1.221)]

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (3.6)$$

em que $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular, cuja direção $\hat{\omega}$ fornece o eixo de rotação, e cuja magnitude fornece a taxa de variação temporal da posição angular.

No caso mais simples de movimento bidimensional, em que podemos definir $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, o eixo de rotação possui direção constante e sempre ortogonal a \vec{r}_i , de forma que

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_i = r_i \omega \hat{z} \times \hat{r}_i = r_i \omega \hat{\theta} \quad \Rightarrow \quad (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = r_i^2 \omega^2, \quad (3.7)$$

e a parte da energia cinética devida exclusivamente à rotação se escreve

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2. \quad (3.8)$$

Essa expressão é em geral interpretada como o produto de dois termos: um deles dependente apenas da *distribuição de massa* do corpo e outro, da frequência angular de rotação, uma característica da *distribuição de velocidades* no corpo, ou seja,

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad \text{em que } I = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2. \quad (3.9)$$

Na verdade, sabemos que essas expressões valem mesmo para corpos não planares desde que a rotação ocorra com relação a algum *eixo de simetria* do corpo. Veremos em breve como estender essa formulação simples da energia ao movimento tridimensional e o que queremos dizer exatamente com ‘eixo de simetria’.

3.1.2 Teorema dos eixos paralelos

Sabemos que, mesmo no caso bidimensional, o momento de inércia I depende do ponto de referência utilizado para se definir os vetores de posição. No caso acima, empregamos o centro de massa como origem com o objetivo de separar a energia cinética em dois termos independentes. No entanto, isso não é necessário se o movimento do corpo for apenas uma rotação, ainda que em torno de um ponto diferente do centro de massa.

Seria conveniente nesse cenário escolher o ponto \vec{R} como a interseção entre o eixo de rotação e o plano onde ocorre o movimento. Teríamos então encontrado outro valor I' para o momento de inércia. Suponhamos que a lagrangiana da Eq. (3.1) utilize como origem para os vetores \vec{r}'_i o novo vetor \vec{R} em torno do qual ocorre a rotação. Nesse caso, vale diretamente para o vetor \vec{r}'_i a relação

$$\dot{\vec{r}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i \quad (3.10)$$

e a energia cinética da Eq. (3.1) se escreve como

$$K'_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I' \omega^2, \quad \text{em que } I' = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i'^2. \quad (3.11)$$

Os momentos de inércia I e I' definidos com relação a origens diferentes podem ser comparados notando-se que a rotação descrita pela Eq. (3.10) implica, usando a decomposição da Eq. (3.3), em

$$\dot{\vec{r}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'_i = \vec{\omega} \times (\vec{R} + \vec{r}_i) = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.12)$$

em que a última igualdade determina que $\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, i.e. o centro de massa segue a mesma rotação $\vec{\omega}$. Como a energia cinética do centro de massa advém apenas de rotação nesse caso, podemos substituir $\dot{\vec{R}}$ na Eq. (3.5) para obter a resposta buscada,

$$I = MR^2 + I'. \quad (3.13)$$

Essa relação, a versão restrita ao movimento bidimensional do *teorema de eixos paralelos*, permite entender o efeito de uma mudança de origem sobre o momento de inércia como a composição de dois termos: o primeiro, o momento de inércia MR^2 do centro de massa do corpo com relação à origem do sistema de coordenadas; o segundo, o momento de inércia I do corpo conforme calculado no referencial de seu centro de massa. Em particular, a Eq. (3.13) estabelece que a inércia de um corpo rígido à rotação bidimensional é *mínima* para rotações em torno de seu centro de massa.

Assim, em essência, o movimento bidimensional de rotação de corpos rígidos, i.e. aquele para o qual os vetores velocidade se encontram todos no mesmo plano, se descreve por um termo de inércia que envolve não apenas a massa do corpo, mas sua *distribuição* ao longo do plano (por isso a escolha de origem do sistema de coordenadas afeta sempre o momento de inércia), e um termo de velocidade angular associado à taxa temporal com que a rotação ocorre.

Exemplo: Rotação de uma esfera em torno de um eixo tangente à sua superfície. No caso de uma distribuição contínua de massa, o momento de inércia se calcula pela integral

$$I = \int_M \rho^2 dm, \quad (3.14)$$

em que ρ é a distância do elemento de massa ao eixo de rotação.

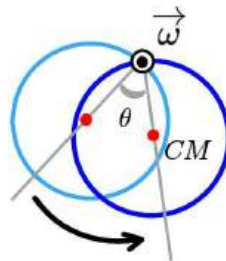


Figura 3.2: Esfera rotacionada em torno de um eixo tangente à sua superfície.

Para um esfera com massa M uniformemente distribuída (i.e. densidade de massa $\mu = M/V$, em que $V = \frac{4}{3}\pi r_0^3$), seu centro de massa coincide com seu centro geométrico. O cálculo do momento de inércia com relação a um eixo tangente à superfície da esfera pode ser realizado em duas etapas, pelo uso do teorema de eixos paralelos, uma vez que o cálculo do momento de inércia no referencial do centro de massa é bastante direto e simples pelo uso da Eq. (3.14).

Escolhemos o eixo z do sistema de coordenadas como paralelo ao eixo de rotação, e sua origem sobre o centro da esfera. A distância ρ entre cada elemento de massa $dm = \mu r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ e o eixo de rotação vale

$\rho = r \sin \theta$. A integral a ser calculada é

$$I' = \mu \int_0^{r_0} r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{2}{5} M r_0^2. \quad (3.15)$$

Para transportar esse resultado ao eixo de rotação tangente à esfera, em nosso caso escolhido como paralelo ao eixo z , basta utilizar a Eq. (3.13) para obter

$$I = M r_0^2 + I' = \frac{7}{5} M r_0^2. \quad (3.16)$$

É comum nesses casos definirmos o *raio de giração* ρ_r do corpo rígido como a distância a que uma partícula pontual com a mesma massa teria de se encontrar do eixo para fornecer igual momento de inércia. Obtemos o raio de giração forçando o momento de inércia a ser escrito como

$$I = M \rho_r^2. \quad (3.17)$$

No caso da esfera considerada acima, temos $\rho_r = \sqrt{\frac{7}{5}} r_0$. Assim, para efeitos de inércia a rotações, a massa da esfera poderia ser concentrada numa partícula situada à distância ρ_r do eixo e a mesma dinâmica seguiria.

3.1.3 Momento angular

O momento angular de um corpo rígido é dado pela soma vetorial dos momentos angulares de todas as partículas do sistema, seguindo a expressão familiar

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i, \quad (3.18)$$

em que \vec{p}'_i é o momento linear da partícula i no referencial de laboratório.

O momento angular também depende da escolha de origem do sistema de coordenadas. Utilizando a decomposição da Eq. (3.3) para \vec{r}'_i , o momento angular se escreve

$$\vec{L}' = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i) = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{R} \times \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.19)$$

em que $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$ é o momento linear total do corpo rígido. Escolher \vec{R} como a posição do centro de massa simplifica também essa expressão, pois nesse caso apenas o primeiro e o último termos permanecem não nulos,

$$\vec{L}' = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i. \quad (3.20)$$

Novamente, a coesão do corpo rígido restringe $\dot{\vec{r}}_i$ a uma rotação, representada no caso bidimensional pelo vetor $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ ortogonal ao plano de movimento. Usando a Eq. (3.6), obtemos

$$\vec{L}' = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega} = \vec{R} \times \vec{P} + I \vec{\omega}. \quad (3.21)$$

Assim, o momento angular também pode ser entendido como a soma de dois termos, um deles dado pelo momento angular de uma partícula com massa M na posição do centro de massa, e outro, *relativo* ao centro de massa, proporcional ao momento de inércia do corpo multiplicado pela velocidade angular,

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (3.22)$$

Notemos que \vec{L} é sempre *paralelo* a $\vec{\omega}$ no movimento bidimensional, algo que deixa de valer no caso tridimensional. Sua magnitude é o produto de dois termos, um deles característico do corpo rígido, o momento de inércia (i.e. a ‘inércia a rotações’), e outro referente ao padrão de velocidades *relativas* entre os elementos infinitesimais de massa que formam o corpo.

Para o caso especial em que o centro de massa também realiza a *mesma* rotação $\vec{\omega}$ (i.e. $\vec{P} = M\vec{R} \times \vec{\omega}$), obtemos o momento de inércia I' da Eq. (3.13) decorrente do teorema de eixos paralelos para o movimento bidimensional.

3.1.4 Torque e equação de movimento

A segunda lei de Newton aplicada ao movimento de rotação fornece, como sabemos, a equação fundamental de movimento

$$\vec{\tau}' = \frac{d}{dt}\vec{L}'. \quad (3.23)$$

O torque $\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}'_i$ é a grandeza responsável pela variação temporal do vetor momento angular. Assim como as demais grandezas consideradas até agora, o torque também depende da escolha de origem para o sistema de coordenadas. Escolhendo novamente \vec{R} como a posição do centro de massa, a Eq. (3.23) se escreve

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \frac{d}{dt}\vec{p}'_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times m_i \frac{d}{dt}(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i) = \vec{R} \times \frac{d}{dt}\vec{P} + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i), \quad (3.24)$$

em que na última igualdade dois termos nulos foram dispensados. O último termo representa o torque $\vec{\tau}$ com relação ao centro de massa,

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i) + \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_i). \quad (3.25)$$

No movimento bidimensional, o último termo se anula, pois $\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_i \propto \hat{r}_i$. Além disso, o vetor velocidade angular possui direção fixa nesse caso, de maneira que o torque só pode alterar sua magnitude, i.e. $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\hat{z}$. A expressão acima se simplifica para

$$\vec{\tau} = \sum_i m_i r_i \hat{r}_i \times (\dot{\omega}\hat{z} \times r_i \hat{r}_i) = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\omega}\hat{z} = I\dot{\omega}\hat{z}. \quad (3.26)$$

O torque com relação ao centro de massa é sempre *paralelo* a \vec{L} no movimento em duas dimensões.

No contexto da lagrangiana da Eq. (3.1), torques se encontram embutidos na energia potencial U , advinda de interações entre o corpo rígido e outros objetos físicos⁴, i.e.

$$U(\{\vec{r}'_i\}) = \sum_i U(\vec{r}'_i). \quad (3.27)$$

O torque produzido por esse campo de forças se determina pela segunda lei de Newton,

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}'_i = - \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{\nabla}U(\vec{r}'_i). \quad (3.28)$$

Tendo em vista nossos resultados para a energia cinética e o momento angular, nos quais vimos ser possível simplificar suas expressões pela escolha do centro de massa como origem privilegiada, também aqui cabe a

⁴As interações internas entre as partículas do corpo rígido produzem as equações de vínculo.

mesma tentativa por questão de consistência. Afinal, caso a *energia potencial* também admita o mesmo tipo de simplificação, teremos separado a lagrangiana do sistema numa soma de duas lagrangianas independentes, simplificando a resolução do problema.

Obtemos no caso geral, pelo uso da Eq. (3.3), a relação

$$\vec{\tau}' = -\vec{R} \times \vec{F} - \sum_i \vec{r}_i \times \vec{\nabla}U(\vec{r}_i'), \quad (3.29)$$

que de fato separa o torque em duas parcelas. O primeiro termo se refere ao torque produzido pela força total $\vec{F} = \sum_i \vec{\nabla}U(\vec{r}_i')$ agindo sobre o corpo rígido como se fosse aplicada unicamente sobre uma partícula com massa M localizada no centro de massa, como queríamos. O segundo termo é sensível a *variações* da força entre as partículas do sistema ('forças de maré'). Os efeitos dessas forças são, por um lado, comprimir ou esgarçar o corpo – o que não é possível por hipótese para um corpo rígido ideal – e, por outro, *produzir rotações*: é este último efeito que nos interessa.

Para avançarmos além disso, é preciso conhecer a função energia potencial U . Por exemplo, no caso do campo gravitacional uniforme da superfície da Terra, a ação (única) da gravidade sobre o corpo rígido não produz forças diferenciais, já que a força peso age como se fosse aplicada no centro de massa sem produzir torque com relação a esse ponto. O mesmo deixa de valer caso adicionemos alguma outra força ao sistema, por exemplo fixando o corpo rígido por um ponto.

Exemplo: Pêndulo físico. O campo uniforme terrestre pode produzir torque num sistema sujeito a vínculos. Consideremos uma esfera com massa m uniformemente distribuída e raio r_0 colada ao teto de uma sala de forma a permanecer suspensa por força de contato. Perturbações no ambiente levam a esfera a oscilar ligeiramente como um pêndulo, mantendo em repouso (em primeira ordem no deslocamento angular) o ponto de contato entre sua superfície e o teto. Gostaríamos de determinar a frequência das pequenas oscilações.

A esfera se move rigidamente por uma rotação pura em torno do ponto de contato com o teto, sugerindo-nos escolher esse ponto permanentemente em repouso como a origem do sistema de coordenadas. Obtivemos na Eq. (3.16) o momento de inércia da esfera para rotações nessa configuração como $I = \frac{7}{2}mr_0^2$.

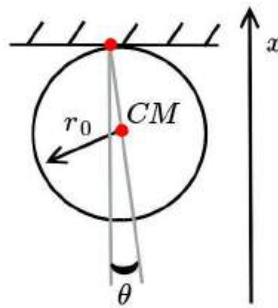


Figura 3.3: Esfera presa ao teto por um ponto.

A lagrangiana do sistema é composta pelo termo de energia cinética obtido na Eq. (3.9) e pela energia potencial gravitacional,

$$\mathcal{L}(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgx, \quad (3.30)$$

em que x é a posição vertical do centro de massa da esfera e θ seu ângulo de deslocamento (Fig. 3.3). Essas duas coordenadas não são independentes, mas se relacionam pela condição de vínculo

$$x = -r_0 \cos \theta \approx -r_0 \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right), \quad (3.31)$$

em que já utilizamos a aproximação de pequenas oscilações. Substituindo essa relação na lagrangiana para eliminar x como coordenada dependente, obtemos

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgr_0\theta^2 + mgr_0. \quad (3.32)$$

A equação de Lagrange para o movimento fornece

$$I\ddot{\theta} + mgr_0\theta = 0, \quad (3.33)$$

a bem conhecida equação diferencial do oscilador harmônico, com solução $\theta(t) = A \cos(\omega t)$, em que a frequência angular de oscilação é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr_0}{I}} = \sqrt{\frac{5g}{7r_0}}. \quad (3.34)$$

Assim, o corpo rígido oscila de forma idêntica a um pêndulo ideal com comprimento $\ell = I/(mr_0) = 7r_0/5$. Notemos que esse comprimento não coincide com o valor do raio de giração ρ_0 calculado na Eq. (3.17).

3.2 Corpo rígido em três dimensões do espaço

A generalização do movimento bidimensional requer considerar cuidadosamente como rotações e momento angular se relacionam no espaço. O comportamento tridimensional pode parecer anti-intuitivo se nos basearmos numa extensão demasiado simplória do movimento bidimensional.

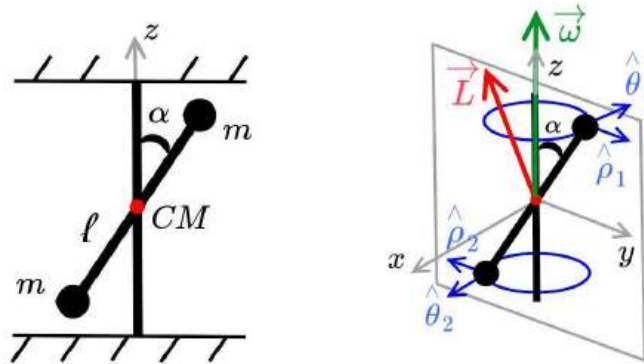


Figura 3.4: Esquerda: Representação esquemática de um halteres. Direita: Eixos ordenados e versores utilizados na descrição de rotações do halteres.

Consideremos a título de ilustração um halteres formado por duas massas m iguais presas por uma barra de massa desprezível, de forma que toda a sua massa se encontre concentrada em ‘partículas’ dispostas nas extremidades (Fig. 3.4, esquerda). O corpo rígido é colocado para girar com velocidade angular constante $\vec{\omega}$ em torno de um eixo passando por seu centro de massa (localizado no ponto médio da barra, a uma distância ℓ de cada massa) e perfazendo um ângulo α com a direção longitudinal da barra. O movimento nesse caso não ocorre apenas sobre um plano, mas precisa ser considerado como tridimensional.

Escolhemos primeiramente o eixo z sobre o eixo de rotação para escrever $\vec{\omega}_z = \omega_z \hat{z}$. Além disso, colocamos, para simplificar as expressões, a origem do sistema de coordenadas sobre o centro de massa do sistema. Utilizamos coordenadas e versores cilíndricos (radial $\hat{\rho}$ e tangencial $\hat{\theta}$), conforme ilustrados na Fig. 3.4 (direita). As posições das partículas a formarem o halteres são

$$\vec{r}_1 = r_z \hat{\rho}_1 + h_z \hat{z} \quad \text{e} \quad \vec{r}_2 = r_z \hat{\rho}_2 - h_z \hat{z}, \quad (3.35)$$

em que as constantes são o raio $r_z = \ell \sin \alpha$ da circunferência descrita por cada partícula no espaço, e a posição no eixo z do plano dessa circunferência, $h_z = \ell \cos \alpha$. O versor radial $\hat{\rho}_1 = \hat{\rho}(\theta_1) = \cos \theta_1 \hat{x} + \sin \theta_1 \hat{y}$ é calculado na posição angular θ_1 da partícula 1, valendo relação análoga para a partícula 2, $\hat{\rho}_2 = \hat{\rho}(\theta_2)$. Como a geometria do halteres implica em $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, vale $\hat{\rho}_2 = -\hat{\rho}_1$ (e também $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$). A rotação do corpo rígido produz os momentos lineares

$$\vec{p}_1 = m\omega_z r_z \hat{\theta}_1 \quad \text{e} \quad \vec{p}_2 = m\omega_z r_z \hat{\theta}_2, \quad (3.36)$$

em que os versores são calculados, como antes, nas posições das partículas, i.e. $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(\theta_1) = -\sin \theta_1 \hat{x} + \cos \theta_1 \hat{y}$ e $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}(\theta_2) = -\hat{\theta}_1$. Como $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, o corpo rígido possui momento linear nulo.

O curioso de tal arranjo é a direção do momento angular do corpo rígido. Cálculo direto revela que

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m\omega_z r_z (-h_z \hat{\rho}_1 + h_z \hat{z}) + m\omega_z r_z (h_z \hat{\rho}_2 + r_z \hat{z}) \\ &= 2m\omega_z r_z (-h_z \hat{\rho}_1 + h_z \hat{z}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

ou seja, ao contrário do caso bidimensional, o momento angular *não* é paralelo a $\vec{\omega}_z$! De fato, podemos decompô-lo em duas componentes,

$$\vec{L} = L_\rho \hat{\rho} + L_z \hat{z}, \quad \text{em que} \quad \begin{cases} L_\rho = -2m\omega_z r_z h_z \\ L_z = 2m\omega_z r_z^2 \end{cases}. \quad (3.38)$$

A Fig. 3.4 ilustra a direção do momento angular.

Gostaríamos, todavia, de manter a *forma* conceitualmente simples da expressão para o momento angular em duas dimensões [Eq. (3.22)], dada pelo produto entre o momento de inércia, visto como uma propriedade geométrica do corpo (i.e. sua distribuição de massa), e o padrão de velocidades de rotação interno ao corpo. Essa ideia nos motiva a expressar as componentes do momento angular como

$$\begin{cases} L_\rho = I_{\rho(z)} \omega_z & \text{com} & I_{\rho(z)} = -2mr_z h_z, \\ L_z = I_{z(z)} \omega_z & \text{com} & I_{z(z)} = 2mr_z^2, \end{cases}, \quad (3.39)$$

em que as quantidades $I_{\rho(z)}$ e $I_{z(z)}$ ainda representam a inércia do corpo, porém especificamente para rotações em torno do eixo z . A grandeza $I_{z(z)}$ segue a forma usual do momento de inércia, e poderia ter sido encontrada se fizéssemos a tradução ingênua do caso bidimensional para a situação em questão.

A novidade reside na quantidade $I_{\rho(z)}$. Essa grandeza representa a inércia do corpo rígido na direção $\hat{\rho}$ a movimentos de rotação em torno do eixo \hat{z} . Esse termo cruzado entre eixos surge da geometria do corpo rígido, cujo formato espacial ‘cria’, a partir rotações em torno do eixo z , momento angular nos demais eixos⁵. Ou seja, existe certa ‘incompatibilidade’ entre a direção favorecida pelo vetor velocidade angular

⁵Seu sinal negativo apenas indica que o sentido do momento angular criado por rotações no sentido anti-horário em torno do eixo z seria gerado por uma rotação em sentido horário em torno do eixo ρ .

$\vec{\omega}_z$ (a direção z) e a geometria do halteres, que ‘prefere’ rotações em torno da barra (na direção \vec{r}_1), ou ortogonais a ela (e.g. eixo \hat{x}). De fato, o movimento do corpo rígido seria efetivamente *bidimensional* caso a rotação ocorresse em torno de qualquer um dos eixos favorecidos pela forma geométrica do halteres. Veremos que esses eixos correspondem aos *eixos principais de inércia* do corpo rígido, e que os termos cruzados, cujo efeito é ‘conectar’ rotação e momento angular entre eixos, são os *produtos de inércia*, tornados todos nulos no referencial dos eixos principais.

Suponhamos agora que o mesmo halteres, na configuração como desenhada na Fig. 3.4 (esquerda), sofra rotação apenas em torno do eixo \hat{y} , descrita pelo vetor $\vec{\omega}_y = \omega_y \hat{y}$ paralelo ao plano do papel e portanto perfazendo ângulo $\pi/2 - \alpha$ com o eixo do halteres. Nesse caso, a circunferência descrita por cada partícula teria raio $r_y = \ell \cos \alpha$ e estaria localizada no plano $z = h_y = \ell \sin \alpha$. Seguindo o mesmo tipo de raciocínio, descobriríamos a seguinte resposta do corpo rígido à rotação em torno do eixo y :

$$\vec{L} = L_{\rho_y} \hat{\rho}_y + L_y \hat{y}, \quad \text{em que} \quad \begin{cases} L_{\rho_y} = I_{\rho_y(y)} \omega_y, & \text{com } I_{\rho_y(y)} = -2mr_y h_y, \\ L_y = I_{y(y)} \omega_y, & \text{com } I_{y(y)} = 2mr_y^2, \end{cases}, \quad (3.40)$$

em que $\hat{\rho}_y$ é o versor radial em coordenadas cilíndricas utilizando o eixo y como eixo de simetria. Já para rotações em torno do eixo x (ortogonal ao plano do papel na Fig. 3.4, esquerda), dadas pelo vetor $\vec{\omega}_x = \omega_x \hat{x}$, obteríamos

$$\vec{L} = L_{\rho_x} \hat{\rho}_x + L_x \hat{x}, \quad \text{em que} \quad \begin{cases} L_{\rho_x} = I_{\rho_x(y)} \omega_x, & \text{com } I_{\rho_x(y)} = 0, \\ L_x = I_{x(x)} \omega_x, & \text{com } I_{x(x)} = 2mr_x^2, \end{cases}, \quad (3.41)$$

com $r_x = \ell$ sendo o raio da circunferência desenhada por ambas as massas.

Notemos que nos cálculos acima foi necessário escolher uma *orientação* específica para o corpo rígido a fim de obter sua inércia a cada possibilidade de rotação. Por exemplo, caso girássemos o corpo rígido em torno do eixo z por um ângulo $\pi/4$ para só então calcular sua inércia com relação aos eixos x e y definidos anteriormente, teríamos obtido respostas trocadas, i.e. os momentos de inércia que calculamos acima para rotação em torno do eixo x se tornariam relativos ao eixo y , e vice-versa. Isso não é nenhuma surpresa, pois já sabemos do caso bidimensional que o momento de inércia depende da escolha do sistema de referências.

Com isso, vemos que no caso tridimensional não apenas a origem do sistema de coordenadas modifica o valor do momento de inércia, mas também a *orientação* dos eixos ordenados. Daí a importância de se trabalhar com eixos *fixos* ao corpo rígido (de forma que todas as nossas definições sobre o momento de inércia se tornem *independentes* da orientação do corpo rígido), e considerar *esses eixos* se movimentando no tempo com relação ao sistema de coordenadas do laboratório. Mantemos com isso a inércia do corpo constante. O preço a se pagar é precisar decompor com cuidado o vetor velocidade angular entre os sistemas de coordenadas do corpo rígido e do laboratório. Veremos isso em maior detalhe adiante.

Por fim, notamos que uma rotação instantânea em torno de um eixo qualquer do espaço pode ser descrita pela composição das três rotações acima. Como consideramos o efeito de uma rotação para o corpo como desenhado na configuração da figura, imaginamos agora os eixos fixos ao corpo para estabelecer os momentos de inércia cruzados (relativos à direção $\hat{\rho}$) como correspondentes na verdade às direções: \hat{y} na Eq. (3.40) e

\hat{x} na Eq. (3.41). Os resultados das Eqs. (3.39)–(3.41) podem ser coligidos como

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_x : \quad \vec{L} &= (I_{x(x)}\hat{x} + I_{y(x)}\hat{y} + I_{z(x)}\hat{z})\omega_x, & \text{com} & \begin{cases} I_{x(x)} = 2mr_x^2 \\ I_{y(y)} = 0 \\ I_{z(z)} = 0 \end{cases} \\ \vec{\omega}_y : \quad \vec{L} &= (I_{x(y)}\hat{x} + I_{y(y)}\hat{y} + I_{z(y)}\hat{z})\omega_y, & \text{com} & \begin{cases} I_{x(y)} = 0 \\ I_{y(y)} = 2mr_y^2 \\ I_{z(y)} = -2mr_y h_y \end{cases} \\ \vec{\omega}_z : \quad \vec{L} &= (I_{x(z)}\hat{x} + I_{y(z)}\hat{y} + I_{z(z)}\hat{z})\omega_z, & \text{com} & \begin{cases} I_{x(z)} = 0 \\ I_{y(z)} = -2mr_z h_z \\ I_{z(z)} = 2mr_z^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.42)$$

As relações acima permitem determinar a inércia do corpo a uma rotação qualquer $\vec{\omega} = \omega_x\hat{x} + \omega_y\hat{y} + \omega_z\hat{z}$, bastando somar as expressões correspondentes. Explicitamente, o momento angular produzido seria

$$\vec{L} = (I_{x(x)}\omega_x + I_{x(y)}\omega_y + I_{x(z)}\omega_z)\hat{x} + (I_{y(x)}\omega_x + I_{y(y)}\omega_y + I_{y(z)}\omega_z)\hat{y} + (I_{z(x)}\omega_x + I_{z(y)}\omega_y + I_{z(z)}\omega_z)\hat{z}. \quad (3.43)$$

O tipo de objeto matemático que reúne os momentos de inércia cruzados tal como e.g. $I_{x(z)}$ é um *tensor*. Estudamos a seguir suas propriedades para melhorar tanto a notação quanto a forma de tratar a inércia de corpos rígidos a rotações.

3.2.1 Notação e digressões

Na passagem do movimento bidimensional para o tridimensional, vimos que a orientação do corpo rígido com relação ao eixo de rotação pode induzir momento angular em torno de outros eixos. O objeto que relaciona através da Eq. (3.43) a resposta de cada eixo do corpo rígido (em forma de momento angular gerado em torno daquele eixo) a rotações impostas sobre qualquer eixo é o *tensor de inércia*.

Já temos uma ideia de como calcular esse objeto e (mais ou menos) como utilizá-lo na dinâmica. Resta ainda entender o que é exatamente o tensor de inércia, em que ‘entender’ significa saber como ele se comporta (como diz o ditado, “se tem a aparência de um pato, anda como um pato e grasna como um pato, então é um pato”). Antes de explorar o contexto em que ocorre o movimento de um corpo rígido, se faz conveniente trabalhar um pouco para melhorar a notação, tendo em vista o grande número de termos e somas que aparecem em expressões como a Eq. (3.43). Uma boa notação tem o mérito de tornar a colocação do problema clara e enxuta, ajudando-nos a operar a matemática e até mesmo a conectar ideias.

A primeira modificação que utilizaremos quando conveniente consiste em denotar as componentes de vetores espaciais por índices numéricos⁶ $\alpha = 1, 2, 3$ no lugar das letras x, y, z , a fim de facilitar a notação de somatórios,

$$(x, y, z) \rightarrow (x^1, x^2, x^3) \equiv x^\alpha. \quad (3.44)$$

A mesma mudança será aplicada aos versores espaciais, na forma

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \rightarrow (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \equiv \hat{x}_\alpha. \quad (3.45)$$

⁶Quando mais de um índice for necessário, utilizaremos outras letras gregas, tais como β e γ .

Por exemplo, o vetor velocidade angular se escreve, com essa notação,

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z} \quad \rightarrow \quad \vec{\omega} = \omega^1 \hat{x}_1 + \omega^2 \hat{x}_2 + \omega^3 \hat{x}_3 = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha} \hat{x}_{\alpha}. \quad (3.46)$$

A escolha de posicionamento dos índices, se superior ou inferior, visa reconhecer que as componentes numéricas de um vetor e seus versores são ‘patos’ ligeiramente diferentes. Para ilustrar esse ponto, consideremos uma transformação de rotação agindo sobre um vetor. Uma rotação pode ser vista de duas formas diferentes: na forma ‘ativa’, um vetor gira porque suas componentes são modificadas enquanto os versores no qual se escrevem suas componentes se mantêm inalterados; já na forma ‘passiva’, um vetor gira em certo referencial como efeito aparente dos versores de referência estarem girando (notemos que esta última interpretação foi utilizada para descrever o movimento de uma partícula num referencial não inercial girante). A única diferença entre essas duas formas de se entender o efeito de uma mesma rotação é o sentido de variação do vetor: a rotação ativa gira o vetor em sentido *oposto* ao da rotação passiva. Ou seja, uma mesma rotação pode tanto ser descrita como movimento em sentido anti-horário dos *versores* de referência quanto pelo giro em sentido horário de suas *componentes*. Chamamos *covariantes* as quantidades que giram junto com os versores (índice em baixo), e *contravariantes* aquelas a girarem ‘contra’ os mesmos (índice em cima)⁷.

Com essa notação, as expressões da Eq. (3.43) se escrevem

$$\begin{aligned} \vec{\omega} = \omega^1 \hat{x}_1 : \quad \vec{L} &= (I_1^1 \hat{x}_1 + I_1^2 \hat{x}_2 + I_1^3 \hat{x}_3) \omega^1 = \sum_{\alpha} I_1^{\alpha} \omega^1 \hat{x}_{\alpha}, \\ \vec{\omega} = \omega^2 \hat{x}_2 : \quad \vec{L} &= (I_2^1 \hat{x}_1 + I_2^2 \hat{x}_2 + I_2^3 \hat{x}_3) \omega^2 = \sum_{\alpha} I_2^{\alpha} \omega^2 \hat{x}_{\alpha}, \\ \vec{\omega} = \omega^3 \hat{x}_3 : \quad \vec{L} &= (I_3^1 \hat{x}_1 + I_3^2 \hat{x}_2 + I_3^3 \hat{x}_3) \omega^3 = \sum_{\alpha} I_3^{\alpha} \omega^3 \hat{x}_{\alpha}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

em que mantivemos na parte inferior os índices que antes se encontravam entre parênteses, na forma e.g. $I_{x(y)} \rightarrow I_2^1$. O índice superior se refere à direção em que é produzido o momento angular e o inferior, ao eixo de rotação (embora, como veremos, a simetria do tensor de inércia torne irrelevante essa convenção).

⁷ Por exemplo, a variação infinitesimal de uma função escalar $U(\vec{r})$ no espaço é calculada como

$$dU(\vec{r}) = dx \frac{\partial}{\partial x} U + dy \frac{\partial}{\partial y} U + dz \frac{\partial}{\partial z} U \stackrel{\text{notação}}{\equiv} dx^1 \frac{\partial U}{\partial x^1} + dx^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} + dx^3 \frac{\partial U}{\partial x^3}, \quad (3.47)$$

ou seja, é o produto escalar de dois vetores, o gradiente e o diferencial de distância, com componentes espaciais

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad \text{e} \quad d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3). \quad (3.48)$$

Sob uma mudança de coordenadas $x^{\alpha} = x^{\alpha}(y^1, y^2, y^3)$, com transformação inversa $y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^1, x^2, x^3)$, a regra da cadeia nos fornece, para cada componente α do gradiente, a transformação

$$(\vec{\nabla} U)_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} U = \frac{\partial U}{\partial y^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial U}{\partial y^2} \frac{\partial y^2}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial U}{\partial y^3} \frac{\partial y^3}{\partial x^{\alpha}} = \sum_{\beta} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\beta}} U. \quad (3.49)$$

De maneira análoga, a componente α do vetor diferencial de distância se transforma como

$$dx^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^3} dy^3 = \sum_{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\beta}} dy^{\beta}. \quad (3.50)$$

As duas transformações acima podem ser entendidas como

$$\nabla_{\alpha} = \sum_{\beta} A_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial y^{\beta}} \quad \text{e} \quad dx^{\alpha} = \sum_{\beta} B_{\beta}^{\alpha} dy^{\beta}, \quad (3.51)$$

em que A_{α}^{β} e B_{β}^{α} são coeficientes (no caso, $A_{\alpha}^{\beta} = (B_{\beta}^{\alpha})^{-1}$). O que importa aqui é apenas notar que esses coeficientes são (em princípio) *diferentes*. No caso em questão, as componentes do gradiente (vetor covariante) se transformam de forma inversa àsquelas do vetor diferencial de distância (vetor contravariante) por uma mudança de coordenadas.

Além disso, é comum utilizar-se a convenção de Einstein para simplificar a notação de somatórios, na qual índices repetidos indicam a soma sob todos os valores daquele índice. Com essa modificação final na notação, e.g. a primeira expressão Eq. (3.52) fica escrita da maneira compacta,

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} I_1^{\alpha} \omega^1 \hat{x}_{\alpha} \quad \rightarrow \quad \vec{L} = I_1^{\alpha} \omega^1 \hat{x}_{\alpha}. \quad (3.53)$$

O índice de soma (no caso, α) é chamado de ‘índice mudo’, e pode mudar de nome impunemente, tal qual uma variável de integração. A notação de Einstein nos permite escrever a Eq. (3.43) para o momento angular produzido por qualquer rotação $\vec{\omega}$ de forma bastante sintética,

$$\vec{\omega} = \omega^{\alpha} \hat{x}_{\alpha} : \quad \vec{L} = L^{\alpha} \hat{x}_{\alpha} = I_{\beta}^{\alpha} \omega^{\beta} \hat{x}_{\alpha}, \quad (3.54)$$

ou seja, cada componente do momento angular é dada pela somatória $L^{\alpha} = I_{\beta}^{\alpha} \omega^{\beta}$.

Vetor

Antes de se generalizar qualquer coisa, é preciso entendê-la bem. Um tensor é uma espécie de generalização de um vetor. Cabe aqui uma breve digressão sobre o que entendemos por vetores espaciais e vetores em geral para dirimir quaisquer dúvidas sobre o assunto.

De forma precisa e crua, um vetor é um membro de um espaço vetorial, i.e. um conjunto de objetos possuidor (o conjunto, não os objetos) de certas propriedades tão razoáveis que nem pensamos nelas⁸. Um espaço vetorial \mathcal{V} é construído sobre um corpo (em nosso caso, o corpo \mathbb{R} dos números reais), e admite as operações de soma (linear) e de produto (associativo) entre seus ‘objetos membros’. Um vetor é, portanto, um objeto abstrato pertencente a um clube específico: um *ponto* num espaço vetorial.

Para a identificação desse ponto, i.e. para nos referirmos ao vetor, utilizamos uma *representação*, construída como *componentes* com relação a uma *base*. Embora as componentes do vetor dependam da base escolhida, a ideia é que o ponto apontado no espaço vetorial pela representação deve permanecer inalterado. Assim, mudar a base deve modificar as componentes de forma tal que o vetor apontado seja o mesmo objeto para qualquer escolha de representação. A distinção entre objeto e representação pode parecer por vezes sutil, mas é de fundamental importância para a vida inteligente na Terra, ainda que ameaçada de extinção.

Coordenadas x^{α} e versores \hat{x}_{α} podem ser usadas para representar qualquer vetor do espaço vetorial que utilizamos para representar grandezas físicas no Espaço⁹. Mas algo similar vale para espaços mais abstratos. Por exemplo, vimos que as funções seno e cosseno servem como vetores de base para representar funções periódicas em série de Fourier. Ao escrevermos, por exemplo, uma função $f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) + c \sin(2\omega x)$, em que a, b, c são constantes reais e ω é uma constante escolhida para que essas funções satisfaçam as condições de contorno no intervalo Δx em que são definidas, utilizamos os vetores de base $(\cos(\omega x), \sin(\omega x), \sin(2\omega x))$ para dizer que o vetor $f(x)$, membro do espaço vetorial de funções periódicas bem comportadas, possui componentes (a, b, c) . Notemos que o mesmo trio de números (a, b, c)

⁸Um espaço vetorial se define por possuir operações fechadas (i.e. o resultado da operação pertence ao espaço) de soma entre seus membros e de produto por um escalar (o corpo sobre o qual é construído, geralmente números reais ou complexos). Além disso, essas operações precisam ser associativas e distributivas, e possuir o elemento neutro.

⁹Mantemos neste capítulo a convenção de escrever ‘Espaço’ (assim, com letra maiúscula) quando nos referirmos ao espaço real euclidiano em que habitamos. A ideia é evitar conflito com ‘espaço’ no sentido de lugar matemático.



Figura 3.5: Representação óbvia de um cachimbo: quem duvidaria de que isso é um cachimbo? Mas não é. Tente preenchê-lo com fumo (caso seja maior de 18 anos), acendê-lo (em local seguro), tragá-lo (acho que não precisa chegar a tanto). Pois é, se convenceu? [Crédito: Los Angeles County Museum of Art; imagem extraída da Wikipedia]

poderia ser utilizado em outro contexto para representar um ponto no Espaço com versores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, o que causaria uma confusão danada. Disso vemos que componentes só fazem sentido em conjunto com a base, no caso $(\cos(\omega x), \sin(\omega x), \sin(2\omega x))$, sendo dois lados indissociáveis da representação de um vetor¹⁰.

No caso de vetores no Espaço, a representação de um vetor \vec{r} envolve escolher uma base de versores \hat{x}_α de referência, indicando as direções orientadas no Espaço, e componentes x^α a fornecerem cada projeção de \vec{r} no respectivo versor de base. Se escolhermos outra base de versores \hat{y}_α , suas componentes y^α precisam ser tais que o *mesmo vetor* é apontado pelas duas representações, ou seja (somadas subentendidas!),

$$\vec{r} = x^\alpha \hat{x}_\alpha = y^\alpha \hat{y}_\alpha. \quad (3.55)$$

Assim, se soubermos designar os versores da base antiga na base nova,

$$\hat{x}_\alpha = B_\alpha^\beta \hat{y}_\beta, \quad (3.56)$$

podemos escrever o vetor \vec{r} como

$$\vec{r} = x^\alpha \hat{x}_\alpha = x^\alpha B_\alpha^\beta \hat{y}_\beta, \quad (3.57)$$

de forma que, comparando as Eqs. (3.55) e (3.57), identificamos suas componentes na nova base a partir da antiga,

$$y^\beta = B_\alpha^\beta x^\alpha. \quad (3.58)$$

Notemos que a única diferença entre as transformações para versores [Eq. (3.56)] e para componentes [Eq. (3.58)] é o índice no qual ocorre a soma em B_α^β . No primeiro caso, por se tratar de quantidade contravariante, somamos no índice superior; no segundo, por ser grandeza covariante, pelo inferior.

Estamos acostumados a organizar os números B_α^β como elementos de uma matriz \mathbf{B} (e lá vem mais uma representação!), caso em que as componentes de cada vetor são representadas por uma matriz coluna. Em

¹⁰De fato, a notação tensorial $\vec{v} = x^\alpha \hat{x}_\alpha$ até mesmo encoraja essa visão mais ‘simétrica’. Na verdade, a assimetria entre ‘vetor’ e ‘escalar’ basicamente desaparece se entendermos o conjunto de números x^α como representando um ponto v^* no *espaço dual* \mathcal{V}^* . Assim, os dois espaços, \mathcal{V} e seu dual \mathcal{V}^* , formam juntos um conjunto de nomes, i.e. uma representação (conceitualmente simétrica) para o vetor \vec{v} no qual estamos interessados. A notação tensorial nos permite dispensar os ‘chapéus’ para escrever $v = x^\alpha x_\alpha$, ficando subentendidos os caracteres de x_α como ‘vetor’ e de x^α como ‘escalar’. Vamos, no entanto, manter aqui o acento circunflexo para nos referirmos aos versores espaciais, preferindo portanto a interpretação assimétrica, dado que não necessitamos de toda a generalidade oferecida pela notação.

representação matricial, a Eq. (3.58) se escreve

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1^1 & B_2^1 & B_3^1 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_3^2 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{ou } Y = \mathbf{B} \cdot X. \quad (3.59)$$

Veremos mais adiante a representação matricial em detalhe.

Tensor

Da mesma forma que um vetor é um objeto pertencente a um espaço vetorial, um tensor é definido como algo que pertence a um *espaço tensorial*, um tipo de espaço obtido pelo *produto tensorial* de espaços vetoriais. O produto tensorial é talvez a forma mais simples e intuitiva de se ‘expandir’ um espaço vetorial (fazendo-lhe um ‘puxadinho’, por assim dizer).

Consideremos o exemplo anterior das funções seno e cosseno como vetores de base para a expansão de funções periódicas em série de Fourier. Consideremos por concretude apenas três vetores de base: 1 , $\cos(\omega x)$ e $\cos(2\omega x)$. O subespaço \mathcal{V}_1 tornado disponível por esses vetores consiste nas funções de uma variável que podem ser escritas na forma $f(x_1) = a_1 + b_1 \cos(\omega x_1) + c_1 \cos(2\omega x_1)$, em que as constantes (a_1, b_1, c_1) são ‘coordenadas’, definidas no corpo dos números reais, que permitem apontar a função f com relação à base escolhida. Dizemos que o espaço é *gerado* pelos vetores $\{1, \cos(\omega x_1), \cos(2\omega x_1)\}$.

Para expandir esse espaço de forma a comportar funções de duas variáveis, criamos um novo espaço vetorial \mathcal{V}_{12} a partir do produto tensorial dos espaços \mathcal{V}_1 e \mathcal{V}_2 , denotado por $\mathcal{V}_{12} = \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$. Tomemos \mathcal{V}_2 como o espaço vetorial gerado pelas funções $\{1, \sin(\omega x_2)\}$, escritas como $g(x_2) = a_2 + b_2 \sin(\omega x_2)$. O produto tensorial envolve multiplicar os vetores de base dos espaços diferentes de *todas as formas possíveis* para criar a base produto. Assim, o espaço produto \mathcal{V}_{12} é gerado pelos vetores de base $\{1, \cos(\omega x_1), \cos(2\omega x_1), \sin(\omega x_2), \cos(\omega x_1) \sin(\omega x_2), \cos(2\omega x_1) \sin(\omega x_2)\}$. Podemos agora descrever qualquer função que exista nos dois espaços vetoriais, como e.g. $h(x_1, x_2) = a_h + b_h \sin(\omega x_2) + c_h \cos(\omega x_1) \sin(\omega x_2)$, usando essa base.

A dimensão do espaço produto tensorial é dada pelo produto das dimensões dos espaços vetoriais que o formam. Notemos que o espaço tensorial é ele mesmo um espaço vetorial, embora construído sobre vetores produto. De fato, poderíamos escrever os vetores de base do exemplo acima como funções e.g. $v(x_1, x_2) = \cos(\omega x_1) \sin(\omega x_2)$, e ninguém perceberia que se originam de produtos de funções de base de espaços de menor dimensão. Assim, todo tensor, por ser membro de um espaço vetorial, é também um vetor. Da mesma forma, por possuir a mesma estrutura, um vetor também é um tensor, embora produzido de forma trivial pelo produto tensorial de seu espaço com o espaço da unidade. Para evitar confusão, classificamos os tensores pelo número de espaços que entram no produto tensorial. Aquilo a que nos referimos comumente como ‘vetor’ é na verdade um tensor de ordem 1, enquanto o espaço \mathcal{V}_{12} de nosso exemplo seria um tensor de ordem 2. Um tensor de ordem 0 é um escalar. Além disso, é comum nos referirmos apenas às componentes do tensor como ‘o tensor’ (ignorando a base a que se referem), exatamente da mesma forma confusa como fazemos com vetores. Isso nos leva a distinguir entre tensores formados pelo produto de espaços covariantes, denotados por $\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}$, e contravariantes, denotados como $\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma}$. É possível também construir espaços tensoriais mistos como produtos de espaços covariantes e contravariantes, como em e.g. $\mathcal{T}_{\beta\gamma}^{\alpha}$. Vamos aqui sempre nos referir coloquialmente a um ‘tensor de primeira ordem’ como um ‘vetor’, e por ‘tensor’ vamos querer dizer ‘tensor de segunda ordem’. Jamais chamaremos novamente um escalar pela alcunha ‘tensor de ordem zero’.

Assim, um tensor é objeto abstrato existente dentro do espaço tensorial: um ponto nesse espaço. Da mesma maneira como no caso dos vetores, precisamos definir uma base para representá-los. Como a receita que fornecemos para se construir um espaço tensorial envolve justamente o produto tensorial dos vetores de base dos espaços vetoriais sobre os quais o construímos, já temos a base. No caso de vetores no espaço real, a base é o produto tensorial dos versores espaciais, $\hat{x}_\alpha \otimes \hat{x}_\beta$, em que simplesmente copiamos o mesmo espaço vetorial para criar o espaço produto. Um tensor (contravariante) é representado como

$$\mathcal{T} = X^{\alpha\beta} \hat{x}_\alpha \otimes \hat{x}_\beta. \quad (3.60)$$

Novamente, por ser um ponto no espaço tensorial abstrato, o tensor \mathcal{T} independe da representação escolhida. Poderíamos ter utilizado outra base \hat{y}_j para designá-lo, caso em que teríamos

$$\mathcal{T} = Y^{\alpha\beta} \hat{y}_\alpha \otimes \hat{y}_\beta. \quad (3.61)$$

O importante aqui é saber transformar o tensor entre bases, o que é feito utilizando a transformação de base para os *vetores* que dão origem ao espaço produto. Valendo a Eq. (3.56), podemos escrever a Eq. (3.60) na nova base como

$$\mathcal{T} = X^{\alpha\beta} B_\alpha^\gamma B_\beta^\delta \hat{y}_\gamma \otimes \hat{y}_\delta, \quad (3.62)$$

de onde reconhecemos, por comparação direta entre as Eqs. (3.60) e (3.62), a transformação das componentes do tensor (ou ‘o tensor’ em si, na nomenclatura confusa usual) entre bases diferentes,

$$Y^{\gamma\delta} = B_\alpha^\gamma B_\beta^\delta X^{\alpha\beta}. \quad (3.63)$$

Notemos que a ordem dos fatores é irrelevante, pois a expressão envolve apenas multiplicação de números reais e somas. Alguns autores utilizam essa equação de transformação para *definir* um tensor, algo que se transforma ‘duas vezes como um vetor’, o que significa tomar a abordagem de definir um objeto de acordo com a forma como se comporta, como em “um passarinho é algo que faz piu-piu”. Por achar essa abordagem um pouco abstrata em nosso contexto específico, embora a mesma seja louvável pelo pragmatismo em diversos outros contextos, escolhemos aqui descrever o tensor por sua origem, como em “um passarinho é algo que evoluiu a partir de um dinossauro”, dado que em nosso contexto o objeto anterior ao tensor não é tão discrepante do mesmo como no exemplo cenozoico. Existe ainda outra forma de se definir um tensor como um funcional linear agindo no espaço vetorial, i.e. uma espécie de função que recebe um vetor (em nosso caso, $\vec{\omega}$) e cospe como resultado um outro vetor (em nosso caso, \vec{L}). E talvez existam outras ainda.

Voltamos aqui ao ponto de distinção entre vetores covariantes e contravariantes para declarar que iremos abandoná-lo por completo neste capítulo, uma vez que não se faz necessário no espaço euclidiano, no qual a distância ds entre quaisquer pontos vizinhos (i.e. a *métrica* do espaço¹¹) não distingue entre direções espaciais, i.e.

$$ds^2 = dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2, \quad (3.64)$$

em que na última passagem usamos o fato euclidiano de que $x^\alpha = x_\alpha$. Esse tipo de distinção é fundamental em métricas não euclidianas, tal como consideradas na relatividade especial (métrica de Minkowski) entre coordenadas de tempo e de espaço e, de forma ainda mais ‘criativa’, na relatividade geral.

¹¹Vimos na nota de rodapé da pág. 215 a forma como as componentes do diferencial de distância se transformam por uma mudança de coordenadas. Os coeficientes $A_j^{j'}$ lá definidos têm relação com a métrica do espaço. No espaço euclidiano, distâncias não podem depender de referencial, e portanto temos necessariamente que as transformações envolvidas não mudam a relação entre comprimentos, caso em que vetores covariantes e contravariantes se comportam da mesma forma por transformações de referencial. O mesmo não vale na relatividade, pois o intervalo invariante envolve tanto a distância no espaço quanto no tempo.

3.2.2 Tensor de inércia e momento angular em três dimensões

Agora que conhecemos tensores a ponto de não mais temê-los, retornemos ao tratamento do tensor de inércia no caso tridimensional. Voltamos aqui a utilizar a notação vetorial usual para considerar o momento angular \vec{L} de um corpo rígido genérico, obtido (da maneira usual) pela soma dos momentos angulares parciais de cada partícula. Vamos denotar por apóstrofos quantidades descritas nos versores de base fixos ao laboratório,

$$\vec{L}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}'_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.65)$$

Os momentos \vec{p}'_i decorrem em geral de dois tipos de movimento, uma translação e uma rotação, complicando a interpretação dessa equação. Utilizamos a decomposição da Eq. (3.3) para separar explicitamente esses dois tipos de movimento. A posição \vec{R} passa a representar um ponto especial do sistema – o centro de massa ou o centro de rotações (a depender do contexto) – e as posições \vec{r}_i ficam definidas com relação a esse ponto para que possam variar apenas por rotações centradas nele,

$$\vec{r}'_i = \vec{R} + \vec{r}_i. \quad (3.66)$$

Conforme vimos anteriormente, \vec{R} localiza o centro de massa do corpo rígido (i.e. $\sum_i m_i \vec{r}'_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}'_i = 0$), cujo movimento no espaço é tratado como faríamos para uma partícula pontual. No caso em que uma parte do corpo rígido permanece em repouso no referencial de laboratório ($\dot{\vec{R}} = 0$), é conveniente escolher simplesmente $\vec{R} = 0$ (i.e. $\vec{r}'_i = \vec{r}_i$), não sendo necessária a decomposição da Eq. (3.66) por ser o movimento completo já descrito por uma rotação pura¹². Com essa construção, os vetores posição \vec{r}_i , por causa da condição de coesão do corpo, só podem evoluir por uma *mesma* rotação instantânea $\vec{\omega}$,

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \quad (3.67)$$

O momento de cada partícula se escreve então

$$\vec{p}'_i = m_i \dot{\vec{r}}'_i = M \dot{\vec{R}} + m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (3.68)$$

de onde segue para o momento angular do corpo a expressão

$$\vec{L}' = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times \left(m_i \dot{\vec{R}} + m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i \right) = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \quad (3.69)$$

em que apenas termos não nulos foram considerados. O primeiro termo do membro direito é o momento angular do centro de massa, que para efeitos de dinâmica pode ser considerado como uma partícula pontual com massa M , um problema que já sabemos resolver. O termo novo, consequência da extensão macroscópica do corpo rígido e relacionado apenas a rotações, pode ser reescrito como

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (r_i^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_i), \quad (3.70)$$

em que usamos a identidade vetorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$.

¹²Assim, o importante na decomposição da Eq. (3.66) é conseguir separar o movimento de reorientação do corpo rígido devido a uma rotação pura (codificado em \vec{r}_i) do movimento mais geral que pode acometer o ponto \vec{R} de referência (e que pode eventualmente ser também uma rotação pura – ou até a mesma rotação pura, caso em que se faz conveniente calcular o momento de inércia diretamente nos sistema \vec{r}').

Gostaríamos de escrever essa expressão como uma relação entre os vetores \vec{L} e $\vec{\omega}$ mediada pelo tensor de inércia, na forma da Eq. (3.22). Para tanto, é conveniente utilizar a notação tensorial para manipular a Eq. (3.70). Para evitar confusão desnecessária entre o índice i de soma em partículas e os índices gregos da notação tensorial de componentes, consideramos primeiramente as componentes do momento angular de uma única partícula (omitindo seu índice i), na forma

$$\vec{l} = m (r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}) \quad \stackrel{\text{Einstein}}{\Rightarrow} \quad l^\alpha = m (\omega^\alpha x^\gamma x^\gamma - x^\alpha x^\beta \omega^\beta), \quad (3.71)$$

em que introduzimos a notação de Einstein de somas implícitas.

Para agruparmos os termos em ω^α a fim de obtermos a forma elegante da Eq. (3.22), usamos o ‘truque’ de escrever $\omega^\alpha = \sum_\beta \delta^{\alpha\beta} \omega^\beta$, em que $\delta^{\alpha\beta}$ é o *delta de Kronecker* (um tensor misto!),

$$\delta^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (3.72)$$

Empregando o truque mencionado e reorganizando os somatórios da Eq. (3.71), obtemos

$$l^\alpha = m (\delta^{\alpha\beta} \omega^\beta x^\gamma x^\gamma - x^\alpha x^\beta \omega^\beta) = m (\delta^{\alpha\beta} x^\gamma x^\gamma - x^\alpha x^\beta) \omega^\beta = m \sum_\beta \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_\gamma (x^\gamma)^2 - x^\alpha x^\beta \right) \omega^\beta, \quad (3.73)$$

em que escrevemos os somatórios explicitamente na última passagem, abandonando as facilidades da notação de Einstein, e usamos a identidade euclidiana $x^\alpha = x_\alpha$ (a qual adotaremos daqui em diante).

Reintroduzimos por fim o somatório em todas as partículas i e identificamos o termo multiplicando ω^α como as componentes do tensor de inércia¹³,

$$L^\alpha = \sum_\beta I^{\alpha\beta} \omega^\beta, \quad \text{em que } I^{\alpha\beta} = \sum_i m_i \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_\gamma (x_i^\gamma)^2 - x_i^\alpha x_i^\beta \right). \quad (3.74)$$

Algumas propriedades do tensor de inércia se tornam evidentes a partir da Eq. (3.74). Em primeiro lugar, ele é um tensor *simétrico*, i.e. a troca de índices $\alpha \leftrightarrow \beta$ não altera suas componentes, $I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha}$. Além disso, apenas os termos diagonais ($\alpha = \beta$), os *momentos de inércia*, envolvem quadrados de componentes do vetor posição de cada partícula, sendo os termos fora da diagonal ($\alpha \neq \beta$), os *produtos de inércia*, dados por produtos das componentes espaciais distintas dos vetores posição.

Os termos diagonais do tensor de inércia representam aquilo que teríamos obtido no caso bidimensional. Apesar de estarem escritos de forma um tanto ‘rebuscada’ ou ‘obscura’ por conta da delta de Kronecker, a verdade é que esses termos fazem simplesmente referência à distância ρ_i da partícula i ao eixo de rotação considerado. Por exemplo, o termo diagonal I^{11} , que também poderia ser denotado como I^{xx} , tem a forma

$$I^{11} = \sum_i m_i ((x_i^2)^2 + (x_i^3)^2) = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i \rho_i^2. \quad (3.75)$$

¹³É comum nos referirmos a $I^{\alpha\beta}$ como o tensor de inércia em si, assim como designarmos o vetor por suas componentes, o que é impreciso, mas perdoável, dado que frisar constantemente a distinção entre representação e objeto representado não é prático. Supomos que o leitor saiba neste ponto que o cachimbo da pintura de Magritte não é o cachimbo da pintura de Magritte, mas a representação de um cachimbo a olhos humanos, assim como a figura da pág. 217 não é a pintura de Magritte, que se encontra em algum museu famoso ou no porão de algum bilionário, mas apenas uma representação da mesma (de forma precisa, teríamos de nos referir ao dito cujo como a representação de um cachimbo ilustrada pela representação à pág. 217 do quadro de autoria de um homem representado pelo nome próprio ‘Magritte’, claramente algo pouco prático). Uma boa representação matemática é, assim como aquela do cachimbo, unívoca, remetendo apenas ao objeto representado e a nada mais, fazendo-nos até mesmo esquecer de forma benéfica a distinção entre um e outro.

já que a posição $x^1 = x$ da partícula é irrelevante para rotações em torno do eixo x . Os termos não diagonais são gerados por uma espécie de média cruzada $\sum_i m_i x_i^\alpha x_i^\beta$, ou seja, por uma *correlação* na distribuição de massa do corpo. Assim, rotações em torno de um eixo produzem momento angular em outro como efeito de uma correlação não-nula entre as posições das partículas entre duas direções do Espaço¹⁴.

3.2.3 Tensor de inércia no limite contínuo

A massa de um corpo rígido comumente se distribui de forma que não existe precisão do ponto de vista macroscópico para localizar cada partícula que o compõe. Nesse caso, o efeito da discretização da matéria se torna desprezível na descrição do movimento, sendo válido tomar o limite contínuo da distribuição de massa para o cálculo do tensor de inércia. Fisicamente, assumimos que cada elemento de massa dm , composto por um número muito grande de partículas pontuais com massas infinitesimais, possui ele mesmo massa muito menor do que a massa do corpo rígido ($dm \ll m$), caso em que podemos utilizar propriedades médias para descrevê-lo como

$$dm(\vec{r}) = \mu(\vec{r})dV, \quad (3.76)$$

em que μ é a densidade do corpo rígido na posição \vec{r} . Nesse limite, o tensor de inércia da Eq. (3.74) se calcula trocando-se o somatório em m_i por uma integral em dm , na forma

$$I^{\alpha\beta} = \int \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (x^{\gamma})^2 - x^{\alpha} x^{\beta} \right) dm. \quad (3.77)$$

Comumente utilizamos nesse caso a Eq. (3.76) para eliminar dm em favor da densidade local do material de que é feito o corpo, denotada por $\rho(\vec{r}) = \rho(\{x^{\alpha}\})$, uma quantidade tabelada para diversas substâncias e ligas conhecidas. Escrevemos a Eq. (3.77) na forma alternativa

$$I^{\alpha\beta} = \int \rho(\{x^{\alpha}\}) \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (x^{\gamma})^2 - x^{\alpha} x^{\beta} \right) dV. \quad (3.78)$$

Caso o corpo possa ser aproximado por algo bidimensional ou até mesmo linear no contexto físico de interesse, torna-se conveniente escrever dm na Eq. (3.77) como $dm = \mu(\{x^{\alpha}\})dA$ ou $dm = \lambda(\{x^{\alpha}\})dl$, respectivamente, em que dA é um diferencial de área e dl , de comprimento.

3.2.4 Representação matricial do tensor de inércia

Outra representação interessante para o tensor de inércia se faz em termos de matrizes. A vantagem de seu uso consiste em trazer à nossa disposição toda a estrutura estabelecida da álgebra de matrizes, em especial conexões entre propriedades e forma de operar.

Definimos então uma matriz \mathbf{I} para representar o tensor de inércia, denominada *matriz de inércia*, tal que a relação da Eq. (3.74) seja satisfeita. Definindo juntamente matrizes coluna para representar as

¹⁴Existir uma correlação significa que até certo ponto é possível inferir a distribuição de matéria de um eixo sabendo como se distribui no outro. Para uma correlação perfeita, basta saber uma das distribuições para inferir totalmente a outra. Uma correlação nula indicaria distribuições de matéria independentes: é nesse sentido que iremos definir os eixos principais do corpo rígido.

componentes dos vetores \vec{L} e $\vec{\omega}$, denotadas respectivamente por \mathbf{L} e $\mathbf{\Omega}$, a Eq. (3.43) se torna, em forma matricial,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\mathbf{\Omega}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} L^1 \\ L^2 \\ L^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Notemos que o produto escalar entre dois vetores é calculado na representação matricial como

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}' \equiv \mathbf{\Omega}^T \mathbf{\Omega}' = \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega'^1 \\ \omega'^2 \\ \omega'^3 \end{pmatrix} = \omega^1 \omega'^1 + \omega^2 \omega'^2 + \omega^3 \omega'^3, \quad (3.80)$$

ou seja, é preciso *transpor* a matriz relativa ao vetor que realiza a multiplicação pela esquerda, tornando sua representação uma matriz linha.

Já podemos escrever a forma explícita da matriz \mathbf{I} para o caso do halteres tratado anteriormente. Usando os resultados da Eq. (3.42), temos

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2mr_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2mr_y^2 & -2mr_y h_y \\ 0 & -2mr_z h_z & 2mr_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\ell^2 \cos^2 \alpha & -2m\ell^2 \cos \alpha \sin \alpha \\ 0 & -2m\ell^2 \cos \alpha \sin \alpha & 2m\ell^2 \sin^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

em que utilizamos na segunda igualdade as expressões explícitas para r_x, r_y, h_y, r_z e h_z .

A representação matricial do tensor de inércia torna visualmente clara sua propriedade de simetria (i.e. $I^{\alpha\beta} = I^{\beta\alpha}$), denotada matricialmente por $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$. Como vimos, essa propriedade é geral e vale para todo corpo rígido com qualquer escolha de eixos. Ela implica que existem apenas 6 termos independentes na matriz de inércia, e não 9 como seria aparente a partir da Eq. (3.79). Os elementos diagonais se denominam simplesmente *momentos de inércia*, enquanto os elementos fora da diagonal recebem os nomes de *produtos de inércia*. Por serem componentes do tensor de inércia, os elementos da matriz de inércia estão intrinsecamente acoplados ao sistema de eixos de referência (origem e direção) no qual são definidos, e portanto seus valores mudam pela escolha de referencial tais como as componentes de um vetor.

Uma característica notável do tensor de inércia de nosso exemplo na Eq. (3.81) é a ausência de produtos de inércia entre o eixo x e os demais. Isso significa que, com essa escolha de eixos fixos para o halteres, não é possível produzir momento angular na direção \hat{x} através de rotações em outras direções. A direção \hat{x} é, por assim dizer, independente das demais. Notemos que, de fato, nossa escolha de eixos ‘balanceia’ a distribuição de massa para rotações em torno do eixo x , tornando-a simétrica. Essas características tornam x um *eixo principal de inércia* do halteres. Isso nos motiva a buscar novos eixos y' e z' capazes de fazer o mesmo nas demais direções do espaço, i.e. desacoplá-las pelo ‘balanço’ das massas.

Exemplo: Tensor de inércia de um cubo para rotações centradas em um vértice. Consideremos um cubo que possa girar por eixos coincidentes com suas arestas. Escolhemos portanto o sistema de referência fixo ao corpo com origem num vértice e eixos coincidentes com as três arestas ortogonais do cubo. Isso nos permite integrar facilmente a Eq. (3.78) para determinar os elementos da matriz de inércia do cubo. Os momentos de inércia (elementos diagonais da matriz de inércia) devem possuir todos a mesma expressão por conta da simetria do cubo, i.e. não deve surtir qualquer efeito escolher outra aresta do cubo para calculá-los.

Segundo a Eq. (3.78), temos

$$I_{11} = \mu \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell dx dy dz (y^2 + z^2), \quad I^{22} = \mu \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell dx dy dz (x^2 + z^2), \quad \text{e} \quad I^{33} = \mu \int_0^\ell \int_0^\ell \int_0^\ell dx dy dz (x^2 + y^2), \quad (3.82)$$

em que usamos a notação usual $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ e o comprimento ℓ para as arestas do cubo. Essas expressões revelam explicitamente a igualdade prevista entre os momentos de inércia, pois as integrais acima diferem apenas nos ‘nomes’ das variáveis de integração, sendo portanto a mesma integral. O resultado da integração fornece

$$I^{11} = \mu \int_0^\ell dz \int_0^\ell dy (y^2 + z^2) \int_0^\ell dx = \mu \ell \int_0^\ell dz \left(\frac{1}{3} \ell^3 + z^2 \ell \right) = \frac{2}{3} \mu \ell^5 = \frac{2}{3} m \ell^2, \quad (3.83)$$

em que usamos $m = \mu \ell^3$ na última igualdade. Vale para os demais momentos $I^{11} = I^{22} = I^{33}$.

Os produtos de inércia (elementos não diagonais da matriz de inércia) apresentam o mesmo tipo de simetria por troca de eixos, o que pode ser facilmente verificado como fizemos para os momentos de inércia. Cálculo direto utilizando a Eq. (3.78) fornece

$$I^{12} = -\mu \int_0^\ell dx \int_0^\ell dy xy \int_0^\ell dz = -\frac{1}{4} \mu \ell^5 = -\frac{1}{4} m \ell^2. \quad (3.84)$$

Vale pela simetria que os elementos independentes são $I^{12} = I^{23} = I^{31}$. A matriz de inércia [Eq. (3.79)] se escreve explicitamente

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} m \ell^2 & -\frac{1}{4} m \ell^2 & -\frac{1}{4} m \ell^2 \\ -\frac{1}{4} m \ell^2 & \frac{2}{3} m \ell^2 & -\frac{1}{4} m \ell^2 \\ -\frac{1}{4} m \ell^2 & -\frac{1}{4} m \ell^2 & \frac{2}{3} m \ell^2 \end{pmatrix} = m \ell^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \quad (3.85)$$

Como dissemos, essa forma específica para a matriz de inércia depende da maneira como os versores de base são escolhidos. Vejamos como obter propriedades gerais dessa matriz.

3.2.5 Eixos principais de inércia

A motivação principal para se mapear vetores e tensores em outros objetos (e.g. matrizes) reside em facilitar a manipulação das relações matemáticas entre eles. Nada mais natural do que, na busca por possíveis representações, privilegiarmos aquelas com maior potencial de simplificar o problema matemático.

No caso do tensor de inércia, somos livres para escolher qualquer sistema de eixos fixos ao corpo. E a melhor escolha é aquela a tornar os eixos espaciais independentes uns dos outros quanto a rotações. Para essa escolha especial de eixos, chamados de *eixos principais de inércia* do corpo, a matriz do tensor de inércia se torna *diagonal*. No entanto, descobrir os eixos principais de um corpo apenas pela análise visual de sua geometria não é factível no caso geral. Além de assimetrias sempre presentes num corpo rígido real (e.g. um asteróide), sua distribuição de massa pode apresentar inomogeneidades (e.g. por causa de materiais diferentes). É preciso desenvolver algum procedimento capaz de lidar com esses casos mais realistas.

A forma padrão de se determinar os eixos principais de inércia consiste primeiramente em escolher um sistema de eixos baseado em alguma simetria aparente do corpo para se calcular a matriz do tensor de inércia

nesses eixos. Por mais que seja escolhida cuidadosamente, essa matriz conterá provavelmente acoplamentos entre todos os eixos, i.e. os produtos de inércia serão não nulos. Mas, apesar de não assumir forma simples, toda a informação buscada estará nela. Os eixos principais do corpo podem ser determinados a partir de propriedades dessa matriz, como faremos agora. No passo final, podemos *redefinir* os eixos de referência fixos ao corpo rígido para coincidirem com seus eixos principais e dessa forma simplificar a descrição de sua dinâmica.

Um eixo principal de inércia é definido como aquele em torno do qual rotações produzem vetor momento angular paralelo ao vetor velocidade angular. Matematicamente, queremos encontrar os eixos de rotação que tornem escalar a relação tensorial da Eq. (3.74), i.e.

$$L^\alpha = \sum_{\beta} I^{\alpha\beta} \omega^\beta := \mathcal{I} \omega^\alpha, \quad (3.86)$$

em que \mathcal{I} é o *momento principal de inércia* para rotações em torno do eixo apontado por $\vec{\omega} = \omega \hat{\omega}$. A equação acima fica escrita de forma clara em notação matricial, caso em que podemos entendê-la como

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} := \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathcal{I} \mathbf{1}) \boldsymbol{\Omega} := 0, \quad (3.87)$$

em que o símbolo $\mathbf{1}$ representa a matriz identidade. Essa expressão consiste num problema de *autovalores*, no qual se busca determinar os autovalores \mathcal{I} e os autovetores $\boldsymbol{\Omega}$ correspondentes da matriz \mathbf{I} . Dado o significado físico dessas matrizes, queremos determinar as direções $\hat{\omega}$ que, quando multiplicadas pelo tensor de inércia, forneçam um vetor \vec{L} apontando na mesma direção, i.e. diferindo apenas pelo produto por um escalar \mathcal{I} a ser também determinado. Esse escalar é uma propriedade intrínseca do corpo, sua inércia a rotações, e depende da *direção* do espaço em torno da qual se rotaciona o corpo rígido.

Utilizando as formas explícitas das matrizes dadas pela Eq. (3.79), a Eq. (3.87) se escreve

$$\begin{pmatrix} I^{11} - \mathcal{I} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} - \mathcal{I} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} - \mathcal{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.88)$$

Essa expressão consiste de um sistema de equações linear e homogêneo, para o qual só há solução não trivial se o determinante da matriz que multiplica a matriz $\boldsymbol{\Omega}$ for nulo. Essa condição nos permite determinar os momentos principais de inércia (i.e. os autovalores de \mathbf{I}) como as raízes de um polinômio em \mathcal{I} encontradas a partir do determinante

$$|\mathbf{I} - \mathcal{I} \mathbf{1}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} I^{11} - \mathcal{I} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} - \mathcal{I} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} - \mathcal{I} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.89)$$

Por ser cúbico, esse polinômio admite três soluções. Vamos denotá-las por \mathcal{I}_a , \mathcal{I}_b e \mathcal{I}_c . Existem, portanto, três soluções para a equação de autovalores, sendo que a cada autovalor corresponde um autovetor,

$$\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_a = \mathcal{I}_a \boldsymbol{\Omega}_a, \quad \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_b = \mathcal{I}_b \boldsymbol{\Omega}_b, \quad \text{e} \quad \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}_c = \mathcal{I}_c \boldsymbol{\Omega}_c. \quad (3.90)$$

É consequência de ser a matriz de inércia real e simétrica que todos os seus autovalores são reais¹⁵. Além

¹⁵Consideremos a equação de autovalores $\mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega}$. Multipliquemos por $\boldsymbol{\Omega}^T$ pela esquerda, para reescrever essa equação como $\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$. Mas poderíamos ter escrito a equação de autovalores como $\mathbf{I}^* \boldsymbol{\Omega}^* = \mathcal{I}^* \boldsymbol{\Omega}^*$ para obter $(\boldsymbol{\Omega}^*)^T \mathbf{I}^* \boldsymbol{\Omega}^* = \mathcal{I}^* (\boldsymbol{\Omega}^*)^T \boldsymbol{\Omega}^*$. Como todas as matrizes envolvidas são reais, i.e. $\mathbf{I} = \mathbf{I}^*$ e $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^*$, segue que esta última relação pode ser escrita como $\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega} = \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega}^T \boldsymbol{\Omega}$. Comparando esta equação à primeira, vemos que necessariamente deve valer $\mathcal{I} = \mathcal{I}^*$, ou seja, as três raízes do polinômio de terceiro grau são reais.

disso, seus autovetores são *ortogonais* entre si e formam uma base no Espaço¹⁶. Devemos, portanto, associar a cada momento principal de inércia \mathcal{I}_s , em que $s \in \{a, b, c\}$, uma direção ortogonal do Espaço relativa ao eixo de rotação $\hat{\omega}_s$ correspondente. Essas direções se denominam *eixos principais de inércia*, e formam o sistema de eixos de referência privilegiado por geometria e distribuição de massa do corpo.

De fato, nesse sistema de eixos a matriz de inércia se torna *diagonal*. Para ver isso, notemos que e.g. a primeira solução da equação de autovalores [Eq. (3.90)] se escreve explicitamente como

$$\begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a^1 \\ \omega_a^2 \\ \omega_a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_a \omega_a^1 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^2 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^3 \end{pmatrix}. \quad (3.91)$$

Podemos usar esse fato para juntar as três soluções da Eq. (3.90), justapondo as colunas correspondentes aos autovetores para formar uma matriz quadrada, na forma

$$\begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a^1 & \omega_b^1 & \omega_c^1 \\ \omega_a^2 & \omega_b^2 & \omega_c^2 \\ \omega_a^3 & \omega_b^3 & \omega_c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_a \omega_a^1 & \mathcal{I}_b \omega_b^1 & \mathcal{I}_c \omega_c^1 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^2 & \mathcal{I}_b \omega_b^2 & \mathcal{I}_c \omega_c^2 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^3 & \mathcal{I}_b \omega_b^3 & \mathcal{I}_c \omega_c^3 \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Usamos agora o fato de que os autovetores são ortogonais entre si, i.e.

$$\vec{\omega}_s \cdot \vec{\omega}_{s'} = \delta_{ss'} \rightarrow \mathbf{\Omega}_s^T \mathbf{\Omega}_{s'} = \begin{pmatrix} \omega_s^1 & \omega_s^2 & \omega_s^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{s'}^1 \\ \omega_{s'}^2 \\ \omega_{s'}^3 \end{pmatrix} = \delta_{ss'}, \quad (3.93)$$

para notar que a matriz produzida pela justaposição dos autovetores, à qual denotamos \mathbf{M} , possui a propriedade

$$\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_a^1 & \omega_a^2 & \omega_a^3 \\ \omega_b^1 & \omega_b^2 & \omega_b^3 \\ \omega_c^1 & \omega_c^2 & \omega_c^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a^1 & \omega_b^1 & \omega_c^1 \\ \omega_a^2 & \omega_b^2 & \omega_c^2 \\ \omega_a^3 & \omega_b^3 & \omega_c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad (3.94)$$

decorrente de suas colunas representarem as componentes de vetores ortogonais entre si. Matrizes com essa propriedade são por isso chamadas *ortogonais*. Como a matriz que produz a identidade pela multiplicação com a matriz \mathbf{M} é a matriz *inversa* de \mathbf{M} , denotada por \mathbf{M}^{-1} , ou seja, $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{1}$, segue que matrizes ortogonais se definem pela propriedade de que suas inversas são iguais a suas transpostas, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$. Essa forma bastante conveniente de se calcular a inversa é uma característica incomum para matrizes. Finalmente, utilizando essa propriedade, multiplicamos a Eq. (3.92) pela esquerda por \mathbf{M}^{-1} para obter

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \omega_a^1 & \omega_a^2 & \omega_a^3 \\ \omega_b^1 & \omega_b^2 & \omega_b^3 \\ \omega_c^1 & \omega_c^2 & \omega_c^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{I}_a \omega_a^1 & \mathcal{I}_b \omega_b^1 & \mathcal{I}_c \omega_c^1 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^2 & \mathcal{I}_b \omega_b^2 & \mathcal{I}_c \omega_c^2 \\ \mathcal{I}_a \omega_a^3 & \mathcal{I}_b \omega_b^3 & \mathcal{I}_c \omega_c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_a & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_b & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_c \end{pmatrix} = \text{diag}(\mathcal{I}_a, \mathcal{I}_b, \mathcal{I}_c). \quad (3.95)$$

¹⁶Consideremos duas soluções da equação de autovalores, denotadas como $\mathbf{I} \mathbf{\Omega}_a = \mathcal{I}_a \mathbf{\Omega}_a$ e $\mathbf{I} \mathbf{\Omega}_b = \mathcal{I}_b \mathbf{\Omega}_b$. Multipliquemos a primeira por $\mathbf{\Omega}_b^T$ pela esquerda, para obter $\mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{I} \mathbf{\Omega}_a = \mathcal{I}_a \mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{\Omega}_a$. Mas, transpondo a equação de autovalores para \mathcal{I}_b , vale que $\mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{I}^T = \mathcal{I}_b \mathbf{\Omega}_b^T$, do que segue, substituindo na equação anterior, $\mathcal{I}_b \mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{\Omega}_a = \mathcal{I}_a \mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{\Omega}_a$, ou seja, $(\mathcal{I}_b - \mathcal{I}_a) \mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{\Omega}_a = 0$. Na situação em que os autovalores da matriz \mathbf{I} são diferentes, essa equação só pode ser satisfeita se $\mathbf{\Omega}_b^T \mathbf{\Omega}_a = \vec{\omega}_a \cdot \vec{\omega}_b = 0$. Assim, autovetores correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais. No caso em que ocorre de haver autovalores iguais (degenerados), ainda é possível mostrar que os autovetores geram um espaço de dimensão igual ao número de autovalores (ainda que a correspondência entre autovetores e autovalores seja arbitrária nesse caso).

Esse tipo de transformação matricial nada mais é do que uma mudança de base aplicada ao tensor de inércia (como veremos a seguir, por rotação dos versores de referência). Podemos reescrevê-la na forma compacta

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{M} = \mathbf{I}', \quad \text{com } \mathbf{I}' = \text{diag}(\mathcal{I}_a, \mathcal{I}_b, \mathcal{I}_c). \quad (3.96)$$

As duas matrizes acima, \mathbf{I} e \mathbf{I}' , contêm essencialmente a mesma informação física, porém representadas em trios diferentes de versores de base (de fato, são ambas representações matriciais válidas do *mesmo* tensor de inércia). Por isso se denomina esse tipo de transformação de *transformação de similaridade*.

A matriz \mathbf{I}' consiste na representação mais simples do tensor de inércia, uma matriz diagonal em que cada elemento representa um momento principal de inércia. A matriz \mathbf{M} de autovetores de \mathbf{I} fornece a *transformação de eixos* (como veremos, uma rotação) capaz de levar o sistema de eixos escolhido originalmente no sistema de eixos principais privilegiado pelo corpo rígido. Podemos utilizar essa mesma transformação de similaridade na Eq. (3.87), pela introdução da unidade $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbb{1}$ em local estratégico,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\mathbb{1}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{I}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Omega} \quad (3.97)$$

Multiplicando essa equação pela esquerda por \mathbf{M}^{-1} , obtemos

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L} = (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{M}) (\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Omega}), \quad (3.98)$$

que pode ser entendida como

$$\mathbf{L}' = \mathbf{I}'\boldsymbol{\Omega}', \quad (3.99)$$

em que $\mathbf{L}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}$, $\mathbf{I}' = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{M}$, e $\boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\Omega}$ são as quantidades transformadas para a base dos eixos principais do corpo rígido. Com isso, vemos que a Eq. (3.99) é, assim como a Eq. (3.87), a representação matricial da Eq. (3.74), porém escrita na base escolhida para satisfazer a Eq. (3.86) de autovalores. Nos eixos principais, temos a expressão simples

$$\vec{L}' = \mathcal{I}_a\omega_x\hat{x} + \mathcal{I}_b\omega_y\hat{y} + \mathcal{I}_c\omega_z\hat{z}, \quad (3.100)$$

da qual fica claro que \vec{L}' e $\vec{\omega}'$ não são em geral paralelos para rotações no caso tridimensional (já que cada componente de $\vec{\omega}'$ é em princípio multiplicada por grandezas de magnitudes diferentes para gerar \vec{L}').

Para que ocorra a situação especial em que $\vec{L}' \parallel \vec{\omega}'$, é necessário que (i) todos os momentos principais de inércia sejam iguais, i.e. $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_b = \mathcal{I}_c$, e então qualquer sistema ortogonal serve como eixos principais (pois a matriz de inércia é proporcional à identidade e rotações não lhe podem afetar), caso em que o corpo rígido é chamado de *pião esférico*; ou (ii) dois momentos principais sejam degenerados, e.g. $\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_b \neq \mathcal{I}_c$, e o vetor velocidade angular seja paralelo ao plano ortogonal ao eixo principal $\hat{\omega}_c$ (notemos que quaisquer dois eixos ortogonais pertencentes a esse plano servem como eixos principais do corpo); ou (iii) o vetor velocidade angular seja paralelo a um dos eixos principais do corpo rígido, i.e. $\vec{\omega}' \propto \hat{\omega}_s$, sendo portanto um autovetor da matriz de inércia (observemos, no entanto, que o movimento sob influência de torques externos muito provavelmente fará com que essa situação seja transitória; esse caso particular só pode persistir no tempo, portanto, para corpos rígidos livres).

Essa forma de transformação já havia sido estabelecida para as componentes de vetores pela Eq. (3.59), e para as componentes de tensores pela Eq. (3.63). Reconhecemos, com isso, a matriz genérica \mathbf{B} de transformação então utilizada como sendo nesse caso precisamente a matriz \mathbf{M}^{-1} . A transformação de

similaridade que utilizamos para diagonalizar a matriz de inércia na Eq. (3.98) nada mais é do que a *representação matricial* da mesma mudança de bases genérica, porém aplicada às componentes de um tensor, dada pela Eq. (3.63).

Vemos que a representação matricial do tensor de inércia nos permite estabelecer pelo uso de propriedades bem conhecidas de matrizes (ortogonalidade, autovetores e autovalores) que todo corpo rígido admite *três eixos* ortogonais mutuamente independentes como eixos principais de inércia, qualquer que seja a complexidade de seu formato geométrico, e que esses eixos podem ser encontrados e utilizados como um sistema de referência mais conveniente pela transformação encontrada. Veremos mais adiante que essa transformação, por enquanto apenas matemática, corresponde fisicamente a uma *rotação* no Espaço.

Exemplo: Eixos principais de inércia do cubo. A matriz de inércia da Eq. (3.85) contém toda a informação relevante para a descrição de rotações sobre a distribuição de matéria do cubo. Apesar de ter sido calculada numa base que tornasse simples a integração da Eq. (3.78), podemos determinar a partir dela tanto os momentos principais de inércia quanto a base de eixos em que aparecem. Para tal, é preciso resolver a Eq. (3.88) de autovalores e autovetores.

Consideramos primeiramente a Eq. (3.88) para determinar os momentos principais de inércia do cubo, nesse caso escrita como

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 - \mathcal{I} & -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{2}{3}m\ell^2 - \mathcal{I} & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{2}{3}m\ell^2 - \mathcal{I} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.101)$$

A simetria dessa matriz torna conveniente utilizar operações elementares de manipulação de matrizes para simplificar o cálculo do determinante. Uma dessas operações a manter constante o determinante consiste em somar múltiplos de uma linha da matriz à outra linha. Realizamos duas dessas operações, subtraindo a primeira linha da segunda e da terceira, para forçarmos o aparecimento de zeros na matriz. Obtemos

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 - \mathcal{I} & -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{11}{12}m\ell^2 + \mathcal{I} & \frac{11}{12}m\ell^2 - \mathcal{I} & 0 \\ -\frac{11}{12}m\ell^2 + \mathcal{I} & 0 & \frac{11}{12}m\ell^2 - \mathcal{I} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.102)$$

Outra operação elementar que não altera o valor do determinante consiste em fatorar constantes das linhas para multiplicá-las por fora da matriz. Colocamos em evidência o fator $\mathcal{I} - \frac{11}{12}m\ell^2$ das segunda e terceira linhas para obter

$$\left(\mathcal{I} - \frac{11}{12}m\ell^2\right)^2 \begin{vmatrix} \frac{2}{3}m\ell^2 - \mathcal{I} & -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.103)$$

Cálculo direto do determinante acima fornece a equação de terceiro grau já fatorada,

$$\left(\mathcal{I} - \frac{11}{12}m\ell^2\right)^2 \left(\mathcal{I} - \frac{1}{6}\right) = 0, \quad (3.104)$$

que possui as raízes

$$\mathcal{I}_a = \frac{1}{6}m\ell^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_b = \mathcal{I}_c = \frac{11}{12}m\ell^2. \quad (3.105)$$

Com esses valores já podemos escrever, pelo uso do resultado geral da Eq. (3.96), a matriz de inércia em formato diagonal (mesmo que não conheçamos ainda a matriz \mathbf{M} que realiza a transformação), como

$$\mathbf{I}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}m\ell^2 \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

Essa forma da matriz de inércia é obtida quando os eixos principais do corpo rígido (seja lá quais forem!) são tomados como sistema de referência.

Esses valores para os momentos principais de inércia revelam que \mathcal{I}_a corresponde a um eixo principal em torno do qual a massa do corpo *se concentra* mais proximamente do que nas outras direções. O fato de serem \mathcal{I}_b e \mathcal{I}_c iguais indica *simetria* na distribuição de massa no plano ortogonal ao eixo correspondente a \mathcal{I}_a .

As direções dos eixos principais (que nos fornecem também a matriz \mathbf{M}) são encontradas substituindo-se cada solução \mathcal{I}_s na Eq. (3.88). Para o momento principal \mathcal{I}_a , essa equação fornece

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{2}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{2}m\ell^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a^1 \\ \omega_a^2 \\ \omega_a^3 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.107)$$

Fatorando o termo $\frac{1}{4}m\ell^2$, esse sistema de equações se torna

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a^1 \\ \omega_a^2 \\ \omega_a^3 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.108)$$

Isolando ω_a^3 na primeira equação, obtemos $\omega_a^3 = 2\omega_a^1 - \omega_a^2$. Substituindo essa relação na segunda equação, obtemos $\omega_a^1 = \omega_a^2$, do que segue a solução geral do sistema como

$$\omega_a^1 = \omega_a^2 = \omega_a^3 \quad \Rightarrow \quad \hat{\omega}_a = \sqrt{\frac{1}{3}}(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}). \quad (3.109)$$

Notemos que uma das equações do sistema da Eq. (3.108) é redundante, consequência de ser nulo o determinante da matriz de coeficientes. Em geral, a solução desse tipo de problema fornece apenas dois escalares – razões entre componentes –, fixando somente a *direção* do autovetor no espaço. O módulo desse vetor é irrelevante, e por isso seguimos a convenção de normalizá-lo incluindo o fator $1/\sqrt{3}$ na solução da Eq. (3.109). De fato, qualquer vetor $\vec{\omega}$, independentemente de sua magnitude, deve produzir momento angular paralelo a si: o autovetor correspondente a cada momento principal de inércia fornece apenas a *direção* do eixo principal.

A direção apontada por $\hat{\omega}_a$ em nosso exemplo se refere à diagonal do cubo. Vemos intuitivamente que, de todos os eixos possíveis passando por um vértice do cubo, esse parece ser de fato aquele que torna a distribuição de massa maximamente simétrica e concentrada próxima ao eixo, justificando o valor relativamente baixo do momento principal de inércia \mathcal{I}_a .

Sem precisar resolver as demais equações de autovetores, podemos dizer que os autovetores $\hat{\omega}_b$ e $\hat{\omega}_c$ definem o plano ortogonal à direção de $\hat{\omega}_a$ (pois o conjunto de autovetores forma um sistema ortogonal)

passando pelo vértice de referência do cubo. No entanto, como os autovalores correspondentes são degenerados, i.e. $\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_c$, nenhuma característica do corpo (no que diz respeito a sua inércia a rotações) é capaz de nos ajudar a escolher fisicamente como ‘principais’ duas direção ortogonais específicas nesse plano.

Podemos adotar, portanto, dois eixos quaisquer no plano ortogonal a $\hat{\omega}_a$ para completar o sistema de referência fixo ao corpo rígido. Uma escolha simples seria $\hat{\omega}_b = (\hat{x} - \hat{y})/\sqrt{2}$ (para obtê-lo, buscamos um vetor no plano $\mathcal{O}xy$, i.e. com componente z nula para simplificar contas, ortogonal a $\hat{\omega}_a$) e $\hat{\omega}_c = (\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z})/\sqrt{6}$ (construído para ser ortogonal tanto a $\hat{\omega}_a$ quanto a $\hat{\omega}_b$). É direto verificar que esses vetores satisfazem a Eq. (3.90) e que a matriz \mathbf{M} construída a partir deles segundo a prescrição da Eq. (3.95) de fato diagonaliza o tensor de inércia.

A simetria do momento de inércia no plano ortogonal a $\hat{\omega}_a$ pode parecer anti-intuitiva, visto que o cubo não possui simetria de rotação em torno do eixo principal $\hat{\omega}_a$; no entanto, está matematicamente correta. É preciso lembrar que o tensor de inércia condensa em apenas 6 constantes toda a informação sobre a inércia direcional do corpo. Portanto, existem várias geometrias e distribuições de matéria que fornecem *a mesma* matriz de inércia. Podemos olhar o problema por outro ângulo para dizer que qualquer corpo rígido, por mais insólito que seja, pode ser substituído por um elipsoide equivalente no que concerne à sua inércia a rotações, de forma que considerações de simetria podem não indicar sozinhas a forma do tensor de inércia. Equivalentemente, existe uma infinidade de corpos altamente assimétricos possuidores da mesma matriz de inércia de um elipsoide – um corpo com simetria de rotação em três eixos.

3.2.6 Teorema dos eixos paralelos em três dimensões

Consideremos um movimento de rotação puro do corpo rígido. Ocorre por vezes de o ponto fixo pelas rotações não coincidir com a origem do sistema de coordenadas no qual se conhece a matriz de inércia. De fato, essa origem é comumente escolhida com base em considerações de geometria do corpo, ou de facilidade de cálculo, ou mesmo tomada como o centro de massa por ser esse um ponto intrínseco do corpo.

Conforme vimos para a situação particular de movimento bidimensional (Seção. 3.1.2), é possível nesses casos ‘transportar’ o momento de inércia entre esses pontos usando o teorema de eixos paralelos. Consideramos aqui a generalização desse teorema para *três dimensões*. Para reduzir o problema à sua essência, mantemos os eixos de referência do corpo com a mesma orientação espacial para determinar a matriz de inércia por uma translação de origem do sistema. Caso uma rotação de eixos precise ser também incluída por motivos diversos, a mesma pode ser tratada como um problema independente, de forma que a troca de sistema de referência pode sempre ser realizada em duas etapas: uma translação de origem, coberta pelo teorema de eixos paralelos, e uma rotação, a qual veremos corresponder à transformação da Eq. (3.63).

Mantemos a decomposição da Eq. (3.66) para o vetor posição de cada partícula infinitesimal do corpo rígido como a soma de dois termos, um relacionado à posição \vec{R} do centro de massa do sistema e outro medido com respeito à origem do referencial fixo ao corpo rígido (o centro de massa), descrito por \vec{r}_i . Isso implica para o momento angular \vec{L} a decomposição da Eq. (3.69). Queremos tratar o caso específico em que o movimento consiste numa rotação pura, de forma que vale para \vec{R} a mesma evolução temporal da Eq. (3.67),

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (3.110)$$

i.e. o centro de massa do sistema gira com relação à origem do sistema de laboratório da mesma forma que qualquer outro ponto do corpo rígido gira com relação ao centro de massa. Substituindo essa relação na Eq. (3.69), obtemos

$$\vec{L}' = M\vec{R} \times (\omega \times \vec{R}) + \vec{L}, \quad (3.111)$$

em que \vec{L} é o momento angular calculado com relação aos eixos fixos ao corpo, calculado pela Eq. (3.74) e cuja matriz de inércia associada assumimos conhecida.

Utilizamos aqui o mesmo raciocínio empregado naquelas deduções para escrever, primeiramente,

$$\vec{L}_R = M\vec{R} \times (\omega \times \vec{R}) = \left(R^2 \vec{\omega} - (\vec{R} \cdot \vec{\omega}) \vec{R} \right) \quad \Rightarrow \quad L_R^\alpha = M \left(\omega^\alpha \sum_\gamma X^\gamma X^\gamma - X^\alpha \sum_\beta X^\beta \omega^\beta \right) \quad (3.112)$$

e em seguida usarmos a identidade $\omega^\alpha = \sum_\beta \delta^{\alpha\beta} \omega^\beta$ para escrevermos

$$L_R^\alpha = \sum_\beta J^{\alpha\beta} \omega^\beta, \quad \text{em que} \quad J^{\alpha\beta} = M \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_\gamma (X^\gamma)^2 - X^\alpha X^\beta \right). \quad (3.113)$$

Juntando esse resultado à Eq. (3.74), obtemos para o momento angular relativo à nova origem a expressão

$$L'^\alpha = \sum_\beta \left(J^{\alpha\beta} + I^{\alpha\beta} \right) \omega^\beta. \quad (3.114)$$

O termo que multiplica ω^β é um novo tensor de inércia, visto que se origina de uma soma de tensores¹⁷. Podemos identificá-lo, portanto, como o tensor de inércia $I'^{\alpha\beta}$ relativo à nova origem, do que concluímos

$$L'^\alpha = \sum_\beta I'^{\alpha\beta} \omega^\beta, \quad \text{em que} \quad I'^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + I^{\alpha\beta}. \quad (3.115)$$

Assim, uma mudança de origem produz novo tensor de inércia dado pela soma dos tensores de inércia (i) do corpo rígido relativo a seu centro de massa e (ii) de uma partícula imaginária com massa M localizada no centro de massa do corpo rígido. Esse resultado generaliza aquele para o caso bidimensional e se reduz a ele no caso limite de uma rotação em torno de um eixo principal de inércia do corpo.

Em representação matricial, a Eq. (3.115) para a variação do momento de inércia por um deslocamento de origem assume a forma

$$\mathbf{I}' = \mathbf{J} + \mathbf{I}, \quad (3.116)$$

em que as matrizes acima são as representações $\mathbf{I}' \equiv I'^{\alpha\beta}$ do tensor de inércia relativo à nova origem, $\mathbf{J} \equiv J^{\alpha\beta}$ para a partícula equivalente e $\mathbf{I} \equiv I^{\alpha\beta}$ para o tensor de inércia calculado no centro de massa do corpo rígido.

Exemplo: Matriz de inércia de um cubo relativa a seu centro de massa. A Eq. (3.115) pode ser utilizada em sentido reverso para ‘transladar’ para o centro de massa o ponto de referência em relação ao qual é definida a matriz de inércia.

¹⁷Lembremos que o espaço tensorial do qual os tensores de inércia fazem parte é também um espaço vetorial, de forma que a soma de tensores produz um novo tensor no mesmo espaço. Se esse argumento não o(a) convence, notemos que a Eq. (3.110) em conjunto com a Eq. (3.67) implicam que também \vec{r}' segue uma rotação pura, i.e. $\vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, de onde se encontra, seguindo manipulações similares, a relação $L'^\alpha = \sum_\beta I'^{\alpha\beta} \omega^\beta$. Comparação direta com a Eq. (3.114) leva ao resultado da Eq. (3.115).

Encontramos anteriormente a matriz de inércia da Eq. (3.85) para o cubo rotacionando em torno de um vértice. Para obter a matriz de inércia conforme vista no referencial do centro de massa (mas mantendo as mesmas orientações para os eixos de referência), utilizamos a Eq. (3.116) ‘ao contrário’ para escrever

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' - \mathbf{J}, \quad (3.117)$$

em que matriz de inércia \mathbf{I}' segue a expressão da Eq. (3.85). Resta-nos obter a matriz de inércia \mathbf{J} adicionada pelo deslocamento de origem.

No sistema de coordenadas então utilizado, o centro de massa do cubo se encontra na posição

$$\vec{R} = \frac{\ell}{2}\hat{x} + \frac{\ell}{2}\hat{y} + \frac{\ell}{2}\hat{z}, \quad \Rightarrow (X^1, X^2, X^3) = \frac{\ell}{2}(1, 1, 1). \quad (3.118)$$

O cálculo das componentes de \mathbf{J} é bastante simples por se referir a uma partícula pontual, dispensando integrações. Além disso, a igualdade das componentes de \vec{R} torna todos os elementos diagonais da matriz iguais, o mesmo valendo para os não diagonais. Obtemos para os elementos diagonais

$$J^{11} = m((X^2)^2 + (X^3)^2) = \frac{1}{2}m\ell^2 = J^{22} = J^{33}, \quad (3.119)$$

e para os não diagonais

$$J^{12} = -m(X^1X^2) = -\frac{1}{4}m\ell^2 = J^{23} = J^{13}. \quad (3.120)$$

A matriz \mathbf{J} assume a forma explícita

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{2}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 \\ -\frac{1}{4}m\ell^2 & -\frac{1}{4}m\ell^2 & \frac{1}{2}m\ell^2 \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

Seguindo a prescrição da Eq. (3.117), subtraímos da matriz de inércia \mathbf{I}' relativa a uma aresta do cubo [Eq. (3.85)] a matriz \mathbf{J} para obter a matriz de inércia \mathbf{I} relativa ao referencial do centro de massa,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}m\ell^2 \end{pmatrix}. \quad (3.122)$$

A característica mais marcante dessa matriz é o fato de ser diagonal, i.e. ela já se encontra escrita na base dos eixos principais do cubo. Isso significa que os eixos de referência utilizados se tornam eixos principais quando deslocados para o centro de massa. Na verdade, outra característica marcante dessa matriz é a igualdade de seus três autovalores. Como vimos anteriormente, esse tipo de simetria implica que os autovetores do subespaço correspondente aos autovalores degenerados não se associam a autovalores específicos. Como o espaço degenerado possui dimensão três, a mesma dimensão do espaço total, qualquer trio ortogonal de direções no espaço serve como autovetores dessa matriz. De fato, \mathcal{I} é múltipla da matriz identidade, caso em que a equação de autovalores [Eq. (3.88)] é satisfeita trivialmente. Portanto, a matriz com todos os autovalores degenerados é sempre diagonal, pois não se pode modificar por transformações de similaridade.

Notemos que parte desse resultado já era esperada. Quando diagonalizamos na Eq. (3.106) a matriz de inércia do cubo relativa à uma aresta do mesmo, obtivemos como resultado o momento principal de inércia $\mathcal{I}_a = \frac{1}{6}m\ell^2$ e seu eixo principal na direção $\hat{\omega}_a = (1, 1, 1)$, ou seja, passando pelo centro de massa. Isso nos indica que ao menos um dos autovalores de \mathbf{I} teria de ser igual a \mathcal{I}_a . O que pode parecer surpreendente é

que nada menos do que *todos* os autovalores são iguais a \mathcal{I}_a , mostrando que a matriz de inércia do cubo possui simetria completa por rotações (apesar de não possuir o cubo simetria de rotação): um cubo poderia ser substituído por uma esfera sob o ponto de vista de sua inércia a rotações!

Finalmente, notemos que esse mesmo resultado poderia ser obtido com outra escolha de eixos de referência fixos ao cubo. Obtivemos na Eq. (3.106) a matriz de inércia na base dos eixos principais pela transformação de similaridade. Nesse sistema de eixos, o centro de massa se encontra na posição

$$\vec{R} = \frac{\sqrt{2}\ell}{2}\hat{x}, \quad \Rightarrow (X^1, X^2, X^3) = \frac{\sqrt{3}\ell}{2}(1, 0, 0). \quad (3.123)$$

Façamos então o deslocamento de origem. Os elementos diagonais de \mathbf{J} são, nesse caso,

$$J^{11} = m((X^2)^2 + (X^3)^2) = 0, \quad e \quad J^{22} = m((X^1)^2 + (X^3)^2) = \frac{3}{4}m\ell^2 = J^{33}, \quad (3.124)$$

e todos os seus elementos não diagonais são nulos. Seguindo a regra da Eq. (3.117), subtraímos \mathbf{J} da matriz \mathbf{I}' da Eq. (3.106) para obter

$$\mathbf{I} = \text{diag}\left(\frac{1}{6}m\ell^2, \frac{11}{12}m\ell^2, \frac{11}{12}m\ell^2\right) - \text{diag}\left(0, \frac{3}{4}m\ell^2, \frac{3}{4}m\ell^2\right) = \text{diag}\left(\frac{1}{6}m\ell^2, \frac{1}{6}m\ell^2, \frac{1}{6}m\ell^2\right), \quad (3.125)$$

o mesmo resultado da Eq. (3.122), como deveria ser. Em ambos os casos, mantivemos os eixos paralelos durante a transformação de origem. A diferença entre eles foi a realização de uma rotação de eixos antes dessa operação no primeiro caso.

3.2.7 Energia cinética de rotação

A energia cinética do corpo rígido, escrita como

$$K' = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i'^2, \quad (3.126)$$

também se simplifica ao utilizarmos a separação do movimento em duas partes, $\vec{r}_i' = \vec{R} + \vec{r}_i$ [Eq. (3.66)], uma das quais só admite rotações, $\vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ [Eq. (3.67)], e a outra apontando o centro de massa \vec{R} . Temos

$$K' = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2. \quad (3.127)$$

O segundo termo é nulo por serem as posições \vec{r}_i referenciadas ao centro de massa ($\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$). Dos dois termos restantes, o primeiro se refere à energia cinética do corpo rígido como se o mesmo fosse substituído por uma partícula com massa M localizada no centro de massa. O problema do movimento de partículas pontuais já foi abordado em detalhe no curso e portanto sabemos resolvê-lo. O último termo é aquele em que estamos interessados, por se referir à *orientação* do corpo rígido no espaço. Utilizamos a restrição de que \vec{r}_i só admite movimento puro de rotação para escrever esse termo como

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2) \quad (3.128)$$

em que empregamos a identidade vetorial $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

A notação tensorial se torna conveniente nesse caso para executar os cálculos de maneira mais sucinta. A Eq. (3.128) se escreve

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_{\alpha, \gamma} \omega^\alpha \omega^\alpha r_i^\gamma r_i^\gamma - \sum_{\alpha, \beta} \omega^\alpha r_i^\alpha \omega^\beta r_i^\beta \right) \quad (3.129)$$

Utilizamos então a identidade $\omega^\alpha = \sum_\beta \delta^{\alpha\beta} \omega^\beta$ para fatorar $\omega^\alpha \omega^\beta$ da expressão e com isso fazer aparecer o tensor de inércia,

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\sum_{\alpha, \beta, \gamma} \delta^{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta r_i^\gamma r_i^\gamma - \sum_{\alpha, \beta} \omega^\alpha \omega^\beta r_i^\alpha r_i^\beta \right) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left[\sum_i m_i \left(\delta^{\alpha\beta} \sum_\gamma r_i^\gamma r_i^\gamma - r_i^\alpha r_i^\beta \right) \right] \omega^\alpha \omega^\beta. \quad (3.130)$$

Reconhecendo o termo entre colchetes como $I^{\alpha\beta}$, obtemos para a energia cinética de rotação a expressão

$$K = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} I^{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta. \quad (3.131)$$

Essa equação envolve dois somatórios, um em cada índice do tensor de inércia. Em representação matricial, isso significa que um dos vetores $\vec{\omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}$ se torna a matriz linha $\vec{\omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}^T$, na forma

$$K = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{11} & I^{12} & I^{13} \\ I^{21} & I^{22} & I^{23} \\ I^{31} & I^{32} & I^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}. \quad (3.132)$$

Mas essa equação envolve muitos termos quando escrita em qualquer base de eixos. A fim de diagonalizar a matriz de inércia, incluímos a matriz identidade escrita na forma conveniente $\mathbf{1} = \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1}$ em locais estratégicos dessa equação, realizando a mudança de base

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{1} \mathbf{1} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\Omega})^T (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{M}) (\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega}'^T \mathbf{I}' \boldsymbol{\Omega}', \quad (3.133)$$

em que usamos a propriedade da transposição $\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{M}^T = (\mathbf{M} \boldsymbol{\Omega})^T$ e a ortogonalidade de \mathbf{M} , i.e. $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1}$.

O produto de matrizes da Eq. (3.133) na base diagonal fornece para a energia cinética uma expressão simples, remanescente do caso bidimensional,

$$K = \frac{1}{2} (\mathcal{I}_a \omega_a^2 + \mathcal{I}_b \omega_b^2 + \mathcal{I}_c \omega_c^2), \quad (3.134)$$

em que as componentes ω_s ($s \in \{x, y, z\}$) da velocidade angular seguem a definição

$$\vec{\omega} = \omega_a \hat{\omega}_a + \omega_b \hat{\omega}_b + \omega_c \hat{\omega}_c, \quad (3.135)$$

i.e. a decomposição da velocidade angular nos eixos principais de inércia $\{\hat{\omega}_a, \hat{\omega}_b, \hat{\omega}_c\}$ discutida na Seção 3.2.5.

É possível ainda empregar a relação $L^\alpha = \sum_\beta I^{\alpha\beta} \omega^\beta$ entre tensor de inércia e momento angular [Eq. (3.74)] para escrever a Eq. (3.131) na forma

$$K = \frac{1}{2} \sum_\alpha L^\alpha \omega^\alpha. \quad (3.136)$$

A expressão matricial para K em termos do momento angular se torna

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}'^T \mathbf{L}', \quad (3.137)$$

expressão válida em qualquer base por envolver um produto escalar. Em notação vetorial, ela se torna

$$K = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega}, \quad (3.138)$$

de maneira que apenas a componente do momento angular paralela à velocidade angular contribui para a energia cinética do corpo rígido.

3.3 Rotações

Todos sabemos intuitivamente o que são rotações. Mas, para descrevê-las matematicamente, é preciso sistematizar suas propriedades essenciais e traduzi-las em objetos abstratos que sigam as mesmas regras. Existem muitas formas de se fazer isso, e todas passam (novamente) pela abstração de entender as propriedades gerais desses objetos matemáticos para finalmente lhes dividir *representação* apropriada capaz de nos auxiliar na resolução de problemas físicos (nosso objetivo último!) da maneira mais direta possível¹⁸. Uma boa representação deve se tornar tão intuitiva (após o uso frequente) quanto realizar uma rotação no mundo real (que, se pensarmos bem, só é intuitiva porque a usamos frequentemente!).

A característica essencial das rotações é manter intactos os *ângulos* entre direções quaisquer do Espaço, o que implica preservar também comprimentos (e.g. módulos de vetores e distâncias entre pontos). Assim, a representação matemática das rotações deve ser capaz de levar um sistema de eixos \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} num novo sistema \hat{x}' , \hat{y}' e \hat{z}' igualmente bom (i.e. ortonormal e dextrogiro). Suponhamos que uma operação com essas características desejáveis seja realizada. Podemos então escrever cada versor novo na base dos versores antigos de forma única, e vice-versa, uma vez que os dois sistemas de referência são bases boas,

$$\begin{cases} \hat{x}' = a_{x(x)}\hat{x} + a_{y(x)}\hat{y} + a_{z(x)}\hat{z} \\ \hat{y}' = a_{x(y)}\hat{x} + a_{y(y)}\hat{y} + a_{z(y)}\hat{z} \\ \hat{z}' = a_{x(z)}\hat{x} + a_{y(z)}\hat{y} + a_{z(z)}\hat{z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \hat{x} = b_{x(x)}\hat{x}' + b_{y(x)}\hat{y}' + b_{z(x)}\hat{z}' \\ \hat{y} = b_{x(y)}\hat{x}' + b_{y(y)}\hat{y}' + b_{z(y)}\hat{z}' \\ \hat{z} = b_{x(z)}\hat{x}' + b_{y(z)}\hat{y}' + b_{z(z)}\hat{z}' \end{cases}. \quad (3.139)$$

O sistema de equações à esquerda representa a troca de base antiga para nova, valendo o oposto para as equações à direita. Os 9 coeficientes de cada decomposição (e.g. $a_{s(s')}$, em que $s, s' \in \{x, y, z\}$) são as *projeções* de cada versor na base girada, dados pelas relações $a_{s(s')} = \hat{s} \cdot \hat{s}' = \cos \theta_{ss'}$, em que $\theta_{ss'}$ é o ângulo entre os versores \hat{s} e \hat{s}' . Esse tipo de restrição já nos permite relacionar os coeficientes $a_{s(s')}$ e $b_{s(s')}$, o que faremos mais adiante.

Determinar as decomposições dos versores de base é suficiente para poder transformar qualquer vetor \vec{v} entre os dois sistemas, uma vez que, usando a Eq. (3.139) para eliminar os versores antigos em favor dos novos, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} & (3.140) \\ &= v_x(b_{x(x)}\hat{x}' + b_{y(x)}\hat{y}' + b_{z(x)}\hat{z}') + v_y(b_{x(y)}\hat{x}' + b_{y(y)}\hat{y}' + b_{z(y)}\hat{z}') + v_z(b_{x(z)}\hat{x}' + b_{y(z)}\hat{y}' + b_{z(z)}\hat{z}') \\ &= (b_{x(x)}v_x + b_{x(y)}v_y + b_{x(z)}v_z)\hat{x}' + (b_{y(x)}v_x + b_{y(y)}v_y + b_{y(z)}v_z)\hat{y}' + (b_{z(x)}v_x + b_{z(y)}v_y + b_{z(z)}v_z)\hat{z}' \\ &= v'_x\hat{x}' + v'_y\hat{y}' + v'_z\hat{z}', \end{aligned}$$

de onde identificamos a operação de mudança de base atuando nas *componentes* do vetor \vec{v} como

$$\begin{cases} v'_x = b_{x(x)}v_x + b_{x(y)}v_y + b_{x(z)}v_z, \\ v'_y = b_{y(x)}v_x + b_{y(y)}v_y + b_{y(z)}v_z, \\ v'_z = b_{z(x)}v_x + b_{z(y)}v_y + b_{z(z)}v_z. \end{cases} \quad (3.141)$$

De maneira completamente análoga, conhecer as componentes do vetor \vec{v} na base nova como

$$\vec{v}' = v'_x\hat{x}' + v'_y\hat{y}' + v'_z\hat{z}' \quad (3.142)$$

¹⁸Neste curso, ‘boa matemática’ é aquela que condensa ideias físicas de maneira simples e intuitiva, atuando como uma ferramenta versátil para traduzi-las em forma precisa. No limite da perfeição, a matemática desaparece da percepção tal como nossa linguagem falada (exceto pela língua alemã), permitindo-nos focar antes na ideia a ser comunicada do que na forma de articular palavras e frases.

permite obter suas componentes na base antiga pelo uso da Eq. (3.139), fornecendo

$$\begin{cases} v'_x = a_{x(x)}v_x + a_{x(y)}v_y + a_{x(z)}v_z, \\ v'_y = a_{y(x)}v_x + a_{y(y)}v_y + a_{y(z)}v_z, \\ v'_z = a_{z(x)}v_x + a_{z(y)}v_y + a_{z(z)}v_z. \end{cases} \quad (3.143)$$

Vamos nos focar aqui na maneira de transformar *componentes* de vetores (espaço contravariante), em contraposição a transformar *versores*, por ser essa a forma mais comum de tratamento das rotações.

Para representar uma operação de rotação, os coeficientes da transformação precisam preservar ângulos. A imposição de ortogonalidade entre os novos versores implica para os coeficientes $a_{s(s')}$ nas seguintes restrições:

$$\begin{cases} \hat{x}' \cdot \hat{y}' = a_{x(x)}a_{x(y)} + a_{y(x)}a_{y(y)} + a_{z(x)}a_{z(y)} = 0, \\ \hat{y}' \cdot \hat{z}' = a_{x(y)}a_{x(z)} + a_{y(y)}a_{y(z)} + a_{z(y)}a_{z(z)} = 0, \\ \hat{z}' \cdot \hat{x}' = a_{x(z)}a_{x(x)} + a_{y(z)}a_{y(x)} + a_{z(z)}a_{z(x)} = 0. \end{cases} \quad (3.144)$$

Por fim, a restrição de preservação de comprimentos impõe três condições adicionais sobre os coeficientes, pois os versores girados precisam se manter com módulo unitário,

$$\begin{cases} \hat{x}' \cdot \hat{x}' = a_{x(x)}^2 + a_{y(x)}^2 + a_{z(x)}^2 = 1, \\ \hat{y}' \cdot \hat{y}' = a_{x(y)}^2 + a_{y(y)}^2 + a_{z(y)}^2 = 1, \\ \hat{z}' \cdot \hat{z}' = a_{x(z)}^2 + a_{y(z)}^2 + a_{z(z)}^2 = 1. \end{cases} \quad (3.145)$$

Todas essas equações nos permitem eliminar 6 dos 9 coeficientes iniciais, restando apenas 3 deles como parâmetros independentes. Relações totalmente análogas valem para os coeficientes $b_{s(s')}$.

Outra característica conhecida de uma rotação é a forma intuitiva de parametrizá-la. Toda rotação ocorre em torno de um eixo, i.e. uma direção do espaço, e por um certo ângulo. Essas duas características são descritas por três parâmetros: 2 ângulos para identificar a direção do eixo de rotação e 1 ângulo de rotação, perfazendo os três parâmetros livres comentados acima. Em especial, um vetor paralelo ao eixo de rotação não se altera pela aplicação da mesma, sendo um *autovetor* da operação (com autovalor 1). Buscaremos escrever os 3 parâmetros livres em termos de um eixo e de um ângulo de rotação assim que encontrarmos uma representação matemática para as rotações.

3.3.1 Representação matricial das rotações

Uma forma conveniente de representar rotações faz uso das operações matriciais para obter automaticamente as regras necessárias. As características desejadas de preservação de ângulos e comprimentos ficam então automaticamente 'forjadas' em *propriedades* do grupo de matrizes capaz de representar rotações no espaço tridimensional.

Utilizamos a mesma prescrição anterior para representar vetores como matrizes coluna e a partir dela determinamos como construir as matrizes de coeficientes $a_{s(s')}$ ou $b_{s(s')}$ para que obtenhamos as equações corretas de transformação. Para a mudança de base nova para antiga, a Eq. (3.143) se escreve, em representação matricial,

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{V}', \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x(x)} & a_{x(y)} & a_{x(z)} \\ a_{y(x)} & a_{y(y)} & a_{y(z)} \\ a_{z(x)} & a_{z(y)} & a_{z(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

A matriz \mathbf{B} de coeficientes $b_{s(s')}$ para a transformação inversa (da base antiga para a base nova) se constrói a partir da Eq. (3.141) de forma análoga,

$$\mathbf{V}' = \mathbf{B}\mathbf{V}, \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{x(x)} & b_{x(y)} & b_{x(z)} \\ b_{y(x)} & b_{y(y)} & b_{y(z)} \\ b_{z(x)} & b_{z(y)} & b_{z(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (3.147)$$

Vejamos então como os requisitos de preservação de ângulos [Eq. (3.144)] e de distâncias [Eq. (3.145)] se traduzem em *propriedades* das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de rotação.

Primeiramente, notemos que cada relação da Eq. (3.144) se refere a duas linhas da matriz \mathbf{A} e se assemelha a um produto escalar entre vetores, imposto nulo nesse caso. Por exemplo, a primeira equação tem a forma de um produto entre os vetores com componentes $\vec{u}_x = (a_{x(x)}, a_{y(x)}, a_{z(x)})$ e $\vec{u}_y = (a_{x(y)}, a_{y(y)}, a_{z(y)})$, de maneira que pode ser entendida como uma condição de *ortogonalidade* entre a primeira e a segunda linha da matriz. A terceira linha, por sua vez, corresponderia às componentes do vetor $\vec{u}_z = (a_{x(z)}, a_{y(z)}, a_{z(z)})$, também ortogonal aos demais. Vimos esse processo de construção de uma matriz no contexto de diagonalização do tensor de inércia [Eq. (3.94)]: as matrizes assim formadas são *ortogonais*. Portanto, a condição de preservação de ângulos imposta pela Eq. (3.144) estabelece que toda matriz 3×3 real capaz de representar uma rotação deve ser ortogonal. Notemos que \mathbf{B} também é ortogonal, pois representa a inversa de uma rotação, que também é uma rotação, porém por ângulo oposto em torno do mesmo eixo.

Essa propriedade da matriz, conforme vimos anteriormente, implica que sua inversa é dada por sua transposta, i.e. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$. Isso nos permite estabelecer a matriz \mathbf{B} para a transformação inversa [Eq. (3.147)] como a matriz transposta de \mathbf{A} . De fato, utilizando as transformações de base em sequência para retornar à base original, temos,

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{Eq. (3.146)}}{\underset{=}{\downarrow}} \mathbf{A}\mathbf{V}' \stackrel{\text{Eq. (3.147)}}{\underset{=}{\downarrow}} \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{V}, \quad (3.148)$$

o que só vale se $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{1}$, i.e. $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, relação que se reduz a $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ por conta da ortogonalidade de \mathbf{A} .

A segunda condição a ser imposta, a preservação de magnitudes [Eq. (3.145)], se reflete no valor do *determinante* de \mathbf{A} , fixo como igual a 1, o que pode ser demonstrado escrevendo-se explicitamente a expressão para o determinante e utilizando o fato de que a transformação mantém tanto o tamanho dos versores quanto a base como dextrógira¹⁹. Matrizes com essa propriedade são chamadas *especiais*.

Matrizes *ortogonais especiais* formam um *grupo*. Um grupo consiste num conjunto de objetos munidos de um produto associativo fechado (i.e. o produto de elementos produz um novo objeto também elemento do grupo) e do elemento inverso para todo objeto membro. Para matrizes 3×3 , esse grupo recebe o nome de $\text{SO}(3)$, em que a denominação advém dos acrônimos ‘S’ para ‘*special*’ e ‘O’ para ‘*orthogonal*’. Assim, matrizes em $\text{SO}(3)$ formarem um grupo significa que a multiplicação de matrizes em $\text{SO}(3)$ produz apenas matrizes pertencentes a $\text{SO}(3)$, e toda matriz em $\text{SO}(3)$ possui uma inversa em $\text{SO}(3)$. Do ponto de vista físico, isso é esperado, posto que a composição de duas rotações pode ser sempre descrita por uma única rotação, e desfazer uma rotação requer simplesmente realizá-la em sentido oposto em torno do mesmo eixo.

Mas como escolher a *parametrização* dessas matrizes com relação às transformações físicas desejadas, ou seja, como relacionar seus elementos ao ângulo e à direção do eixo de rotação? Podemos nos guiar pelo

¹⁹Se a transformação preservasse comprimentos e levasse uma base dextrógira em levógira, seu determinante seria -1 .

que conhecemos de rotações em duas dimensões. Uma rotação do sistema de coordenadas no plano $\mathcal{O}xy$ em torno do eixo z é descrita pela transformação de componentes vetoriais²⁰

$$\begin{cases} v_x = \cos \phi_z v'_x + \sin \phi_z v'_y \\ v_y = -\sin \phi_z v'_x + \cos \phi_z v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}, \quad (3.149)$$

em que ϕ_z é o ângulo de rotação. A operação inversa, capaz de anular o efeito da transformação acima, é também uma rotação, porém em sentido oposto, i.e. pelo ângulo $-\phi_z$. Em forma matricial, a Eq. (3.149) envolve a matriz de rotação \mathbf{A}_z em torno do eixo z pela expressão

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_z(\phi_z)\mathbf{V}', \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_z & \sin \phi_z & 0 \\ -\sin \phi_z & \cos \phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}. \quad (3.150)$$

O ângulo de rotação é nesse caso o único parâmetro livre, pois a direção do eixo de rotação já se encontra codificada no *posicionamento* dos elementos da matriz.

A mesma regra de transformação vale para uma rotação em torno de qualquer eixo ordenado, bastando permutar os índices dessa expressão e, portanto, mudar o posicionamento dos coeficientes na matriz. Para rotações em torno do eixo x pelo ângulo ϕ_x , as componentes vetoriais afetadas residem no plano $\mathcal{O}yz$,

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_x(\phi_x)\mathbf{V}', \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_x & \sin \phi_x \\ 0 & -\sin \phi_x & \cos \phi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

Finalmente, para uma rotação em torno do eixo y pelo ângulo ϕ_y , temos a transformação

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_y(\phi_y)\mathbf{V}', \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi_y & 0 & -\sin \phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi_y & 0 & \cos \phi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

O sinal dos elementos não diagonais dessa última operação precisa ser trocado para manter a mesma convenção de sentido para as rotações. Para realizarmos a permutação de eixos corretamente, basta imaginarmos o eixo de rotação ‘visto de cima’ para reconhecer a escolha consistente de sinal entre as matrizes.

As matrizes \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y e \mathbf{A}_z permitem realizar três tipos distintos de rotação finita. No entanto, compô-las para produzir uma rotação genérica em torno de qualquer eixo não é tarefa tão direta quanto pode parecer. O motivo dessa dificuldade é o fato de que o resultado de uma composição de rotações por eixos distintos depende da *ordem* em que as operações são feitas. É simples confirmar a veracidade dessa afirmação tomando como exemplo a composição de duas rotações simples: uma rotação pelo ângulo $\pi/2$ em torno do eixo x , representada pela matriz $\mathbf{A}_x(\pi/2)$, seguida de uma rotação pelo mesmo ângulo em torno do eixo z , correspondente à matriz $\mathbf{A}_z(\pi/2)$. A operação composta modifica o vetor \vec{v} de acordo com

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_z(\pi/2)\mathbf{A}_x(\pi/2)\mathbf{V}' := \mathbf{C}\mathbf{V}', \quad (3.153)$$

²⁰As matrizes que representam rotações em 2 dimensões são também ortogonais e possuem determinante igual a 1, sendo apenas menores em dimensão. Seu grupo recebe o nome de $\text{SO}(2)$.

de forma que pode ser descrita por uma única operação equivalente \mathbf{C} , dada por

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}_x(\pi/2)\mathbf{A}_y(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.154)$$

Realizar essas mesmas operações na ordem inversa produz a matriz \mathbf{C}' dada por

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}_y(\pi/2)\mathbf{A}_x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.155)$$

Embora ambas as matrizes sejam ortogonais e possuam determinante igual a 1, sendo portanto rotações válidas²¹, *não são a mesma rotação*, pois $\mathbf{C} \neq \mathbf{C}'$. A diferença entre essas matrizes recebe o nome de *comutador*, denotado por colchetes e calculado na forma

$$[\mathbf{A}_x(\pi/2), \mathbf{A}_y(\pi/2)] = \mathbf{A}_x(\pi/2)\mathbf{A}_y(\pi/2) - \mathbf{A}_y(\pi/2)\mathbf{A}_x(\pi/2) = \mathbf{C} - \mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.156)$$

Duas operações podem ser realizadas em qualquer ordem apenas se *comutarem*, i.e. seu tiverem comutador nulo. O comutador nos oferece uma ferramenta simples para testar se a ordem de duas operações físicas é relevante para o efeito obtido. Rotações em torno de eixos diferentes do espaço em geral *não* comutam.

3.3.2 Rotações infinitesimais em três dimensões

É fácil demonstrar que a ordem não é relevante (i.e. o comutador das operações é nulo) para qualquer sequência de rotações em torno de um *mesmo eixo*, i.e. para o movimento bidimensional, caso em que basta somar os ângulos de rotação para obter a operação composta.

Para duas rotações em sequência em torno do mesmo eixo (o bloco básico de construção de uma sequência bidimensional qualquer), temos

$$\mathbf{A}_s(\phi)\mathbf{A}_s(\phi') = \mathbf{A}_s(\phi')\mathbf{A}_s(\phi) = \mathbf{A}_s(\phi + \phi'), \quad (3.157)$$

em que o símbolo s pode assumir os valores $s \in \{x, y, z\}$. Mas somar os ângulos de rotação pode ser entendido como uma soma de *vetores*. Como dissemos anteriormente, sabemos intuitivamente que qualquer rotação pode ser descrita por uma direção no espaço \hat{n} , o eixo de rotação, e um ângulo ϕ_n prescrevendo o quanto se deve girar em torno desse eixo. Esses três parâmetros escalares são comumente reunidos no vetor de rotação

$$\vec{n} = \phi_n \hat{n}. \quad (3.158)$$

Suponhamos que esse vetor represente uma rotação $\mathbf{A}_s(\phi_n)$ em torno de um eixo de referência. Uma segunda rotação \vec{n}' em torno do mesmo eixo seria representada pela matriz $\mathbf{A}_s(\phi'_n)$. Da Eq. (3.157), vemos que o

²¹Para entender o que elas fazem exatamente, basta calcular como atuam sobre os versores de base, tomando $\vec{v} = \hat{s}$, com $s \in \{x, y, z\}$. É direto mostrar que $\mathbf{C}\hat{x} = -\hat{y}$, $\mathbf{C}\hat{y} = -\hat{z}$ e $\mathbf{C}\hat{z} = \hat{x}$, em que $\hat{s} \equiv \hat{s}$ é a representação matricial do versor \hat{s} , enquanto $\mathbf{C}'\hat{x} = -\hat{z}$, $\mathbf{C}'\hat{y} = -\hat{x}$ e $\mathbf{C}'\hat{z} = \hat{y}$. Porém, nada é mais eloquente do que uma demonstração. Pegue dois livros, disponha-os da mesma forma numa mesa, defina eixos fixos no espaço (não no livro!) e gire cada um deles de acordo com uma das sequências de rotações. Os livros devem terminar o processo em orientações diferentes.

ângulo da rotação composta é simplesmente a soma dos ângulos de cada rotação. Como o eixo é o mesmo, podemos descrever a rotação composta pelo vetor

$$\vec{N} = (\phi_n + \phi'_n)\hat{n} = \vec{n} + \vec{n}', \quad (3.159)$$

ou seja, igual à soma dos vetores representando cada rotação parcial. Portanto, rotações em duas dimensões formam um campo vetorial: é possível somá-las e multiplicá-las por escalares (ângulo de rotação), e o resultado será também uma rotação bidimensional pertencente ao mesmo espaço.

A situação é um pouco mais complicada em três dimensões espaciais. Rotações em torno de eixos diferentes em geral não comutam. Isso implica que a composição de rotações em três dimensões não pode ser feita de forma ingênua apenas pela adição dos vetores de rotação (uma vez que a soma de vetores comuta por construção!). Vimos isso claramente no exemplo das Eqs. (3.154) e (3.155). O vetor de rotação da matriz $\mathbf{A}_x(\pi/2)$ é por definição $\vec{n} = \frac{\pi}{2}\hat{x}$, enquanto para a matriz $\mathbf{A}_y(\pi/2)$ temos $\vec{n}' = \frac{\pi}{2}\hat{y}$. Somar ingenuamente esses vetores forneceria $\vec{N} = \frac{\pi}{2}(\hat{x} + \hat{y})$ que, apesar de ser uma rotação válida, claramente não corresponde²² às matrizes \mathbf{C} ou \mathbf{C}' . Assim, rotações em três dimensões não formam um campo vetorial.

Entretanto, devemos nos lembrar de termos sempre realizado impunemente a decomposição do vetor velocidade angular – que no fundo representa uma rotação tridimensional – em direções convenientes do espaço para descrevê-lo como uma *soma vetorial* de velocidades angulares, o que parece em contradição com o que dissemos acima. Como isso é possível? A resposta reside no limite de rotações *infinitesimais*. Para ângulo de rotação $\phi \rightarrow d\phi$, rotações em três dimensões também *comutam*. Isso é fácil de demonstrar. Tomemos as matrizes \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y e \mathbf{A}_z e as escrevamos nesse limite. Temos então $\sin \phi \rightarrow d\phi$ e $\cos \phi \rightarrow 1$ em primeira ordem. As Eqs. (3.150)–(3.152) se tornam

$$\mathbf{A}_x(d\phi_x) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d\phi_x \\ 0 & -d\phi_x & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y(d\phi_y) \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -d\phi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ d\phi_y & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_z(d\phi_z) \approx \begin{pmatrix} 1 & d\phi_z & 0 \\ -d\phi_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.160)$$

Nesse limite, todos os comutadores se anulam até primeira ordem, como pode ser mostrado por cálculo direto, de forma que mesmo rotações tridimensionais podem ser associadas a vetores. Além disso, é fácil checar que essas matrizes são ortogonais e possuem determinante unitário (em primeira ordem). Por isso, vetores como a velocidade angular, definidos em termos de quantidades *diferenciais*, podem ser decompostos sem percalços em vetores de base associados a rotações válidas em torno de eixos de referência.

Isso nos permite tratar rotações diferenciais da maneira ‘ingênua’ para dar o passo fundamental na definição de uma rotação finita em torno de *qualquer* eixo do espaço. Vemos da Eq. (3.160) que uma rotação diferencial em torno de um eixo \hat{s} do sistema de referência pode ser escrita como

$$\hat{n} = \hat{s} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}_s(d\phi) \approx \mathbf{1} + \mathbf{J}_s d\phi, \quad (3.161)$$

²²Notemos que alguns problemas aparecem nessa ‘soma de rotações’. Ainda que o vetor \vec{N} correspondesse a uma das matrizes \mathbf{C} ou \mathbf{C}' , teríamos a situação pouco usual em que a ordem de realização da soma afetaria o resultado, o que não pode ocorrer para um campo vetorial, para o qual a operação de soma deve ser comutativa. Outro problema em potencial é a forma como o módulo de \vec{N} é construído pela soma. Em termos de um versor de direção, esse vetor se escreve $\vec{N} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}$, de forma que o ângulo de rotação seria modificado para $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ como efeito da soma vetorial. Todos esses fatores complicadores teriam de ser levados em conta para se introduzir uma operação de ‘soma de rotações’ que pudesse dar certo.

em que \mathbf{J}_s são matrizes constantes definidas como

$$\mathbf{J}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.162)$$

A vantagem de se escrever a rotação diferencial dessa forma reside em colocar a única dependência do problema na variável $d\phi$, já que as matrizes envolvidas são constantes. Essas matrizes ‘codificam’ a essência das três operações infinitesimais de rotação em torno dos eixos de referência, sendo por isso chamadas de *geradores* do grupo de rotações. Elas são anti-simétricas ($\mathbf{J}_s = -\mathbf{J}_s^T$) e possuem traço nulo. É simples mostrar por cálculo direto que seus comutadores possuem a propriedade cíclica

$$[\mathbf{J}_x, \mathbf{J}_y] = -\mathbf{J}_z, \quad [\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_x] = -\mathbf{J}_y, \quad [\mathbf{J}_y, \mathbf{J}_z] = -\mathbf{J}_x, \quad (3.163)$$

de forma que essas matrizes formam uma *álgebra* fechada por comutação²³.

O caráter vetorial das rotações infinitesimais nos permite *somar* essas rotações básicas para utilizá-las como uma base vetorial em que decompor qualquer vetor $\vec{n} = \phi \hat{n}$ de rotação, dessa forma generalizando a Eq. (3.161) para representar uma rotação infinitesimal em torno do eixo \hat{n} como

$$\hat{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z} : \quad \mathbf{A}_{\hat{n}}(d\phi) \approx \mathbf{1} + (n_x \mathbf{J}_x + n_y \mathbf{J}_y + n_z \mathbf{J}_z) d\phi, \quad (3.164)$$

em que $\hat{n}^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Essa rotação é comumente denotada como

$$\mathbf{A}_{\hat{n}}(d\phi) \approx \mathbf{1} + \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}} d\phi, \quad \text{em que} \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{x} \mathbf{J}_x + \hat{y} \mathbf{J}_y + \hat{z} \mathbf{J}_z. \quad (3.165)$$

A matriz $\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ é facilmente calculada, possuindo a forma explícita

$$\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.166)$$

reminiscente de uma representação matricial do produto vetorial com \hat{n} . De fato, tomando um vetor qualquer \vec{v} e sua representação matricial \mathbf{v} , temos que

$$(\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & n_z & -n_y \\ -n_z & 0 & n_x \\ n_y & -n_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_z v_y - n_y v_z \\ -n_z v_x + n_x v_z \\ n_y v_x - n_x v_y \end{pmatrix} \equiv -\vec{n} \times \vec{v}, \quad (3.167)$$

de maneira que $\hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ é a representação matricial do operador vetorial $-\hat{n} \times \diamond$.

Produzir uma rotação finita a partir de uma rotação infinitesimal requer apenas repetir a mesma operação infinitesimal muitas (infinitas!) vezes. Se queremos girar um vetor \vec{v} qualquer por um ângulo ϕ , podemos dividir o ângulo de rotação em N pedaços iguais $\Delta\phi = \phi/N$ e repetir N vezes a rotação pelo ângulo $\Delta\phi$, na forma

$$\mathbf{A}_{\hat{n}}(\phi) \stackrel{?}{=} \left(\mathbf{1} + \hat{n} \cdot \hat{\mathbf{J}} \frac{\phi}{N} \right)^N. \quad (3.168)$$

²³Com isso queremos dizer que a aplicação do comutador a duas matrizes gera uma terceira com a qual podemos fazer também o comutador para gerar uma quarta, e assim por diante, e todas elas fazem parte do mesmo conjunto. O comutador faz o papel de um *produto*, e as matrizes se comportam como um conjunto fechado de objetos relacionados pelo comutador.

Essa expressão obviamente não representa a rotação intentada se N é um número pequeno, por causa do comutador não nulo entre as rotações básicas. Mas, no limite em que $N \rightarrow \infty$, rotações infinitesimais em torno de eixos diferentes se tornam comutativas, e podemos escrever com segurança

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \frac{\phi}{N} \right)^N = \exp(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi), \quad (3.169)$$

em que utilizamos a exponencial como o limite da expressão acima. A exponencial de uma matriz é definida pelo somatório

$$\exp(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi)^k, \quad (3.170)$$

e é em geral calculada diagonalizando-se a matriz do expoente. Em nosso caso, existe uma forma mais simples de encontrar a matriz $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ se notarmos que a matriz $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ possui a propriedade

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^3 = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}. \quad (3.171)$$

Isso nos permite diminuir os graus das potências de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ para escrever a exponencial como

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi) &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi + \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \phi^2 + \frac{1}{\sqrt{3!}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^3 \phi^3 + \frac{1}{\sqrt{4!}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^4 \phi^4 + \dots \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi + \frac{1}{\sqrt{2!}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \phi^2 - \frac{1}{\sqrt{3!}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \phi^3 - \frac{1}{\sqrt{4!}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \phi^4 + \dots \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \left(\phi - \frac{\phi^3}{\sqrt{3!}} + \frac{\phi^5}{\sqrt{5!}} + \dots \right) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \left(\frac{\phi^2}{\sqrt{2!}} - \frac{\phi^4}{\sqrt{4!}} + \frac{\phi^6}{\sqrt{6!}} + \dots \right) \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k+1)!}} \phi^{2k+1} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{(2k)!}} \phi^{2k} \\ &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}} \sin \phi - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 (\cos \phi - 1), \end{aligned} \quad (3.172)$$

em que na última igualdade reconhecemos os somatórios como as expansões em série das funções seno e cosseno. Esse resultado nos permite parametrizar uma rotação qualquer em função de $\vec{n} = \phi \hat{\mathbf{n}}$ como

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \mathbf{1} + \sin \phi (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}}) + (1 - \cos \phi) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2. \quad (3.173)$$

A forma explícita da matriz $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ fica

$$\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi) = \begin{pmatrix} n_x^2 + \cos \phi (1 - n_x^2) & n_x n_y (1 - \cos \phi) + n_z \sin \phi & n_x n_z (1 - \cos \phi) - n_y \sin \phi \\ n_x n_y (1 - \cos \phi) - n_z \sin \phi & n_y^2 + \cos \phi (1 - n_y^2) & n_y n_z (1 - \cos \phi) + n_x \sin \phi \\ n_x n_z (1 - \cos \phi) + n_y \sin \phi & n_y n_z (1 - \cos \phi) - n_x \sin \phi & n_z^2 + \cos \phi (1 - n_z^2) \end{pmatrix}. \quad (3.174)$$

O traço dessa matriz fornece diretamente o ângulo de rotação, uma vez que

$$\text{Tr}(\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}) = (\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}})^{11} + (\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}})^{22} + (\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}})^{33} = 1 + 2 \cos \phi. \quad (3.175)$$

Já os elementos diagonais permitem obter as componentes do versor $\hat{\mathbf{n}}$. É possível mostrar que o versor $\hat{\mathbf{n}}$ é preservado pela aplicação de $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}$, i.e. a matriz coluna $\mathbf{n} \equiv \hat{\mathbf{n}}$ é autovetor de $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}$ com autovalor 1, $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{n} = \mathbf{n}$, como esperado para o eixo de rotação.

Assim, qualquer matriz em $\text{SO}(3)$ pode ser gerada por um número suficiente de operações infinitesimais envolvendo as três matrizes básicas \mathbf{J}_s (justificando o nome de ‘geradores’ para essas matrizes) e parametrizadas em termos de $\hat{\mathbf{n}}$ e ϕ , interpretados em nosso contexto físico como o eixo de rotação e o ângulo de rotação, respectivamente.

Em posse da Eq. (3.173), é possível analisar a representação matricial de uma rotação finita, escrita como $\mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{v}$, para obter de volta a forma da operação *vetorial* correspondente. Nesse tipo de procedimento, a representação matricial serve apenas para nos ajudar na dedução na forma vetorial da operação. Dos dois termos não triviais da Eq. (3.173), o primeiro se traduz em forma vetorial como $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})\mathbf{v} \equiv -\hat{\mathbf{n}} \times \vec{v}$, de acordo com a Eq. (3.167). O segundo termo fornece, por cálculo direto,

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \mathbf{v} = \begin{pmatrix} n_x^2 - 1 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 - 1 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_x + n_x(n_x v_x + n_y v_y - n_z v_z) \\ -v_y + n_y(n_x v_x + n_y v_y - n_z v_z) \\ -v_z + n_z(n_x v_x + n_y v_y - n_z v_z) \end{pmatrix} \equiv -\vec{v} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{v})\vec{v}. \quad (3.176)$$

Com essas equivalências, a Eq. (3.173) se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)\mathbf{v} &= \mathbf{v} + \sin \phi (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})\mathbf{v} + (1 - \cos \phi)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{J}})^2 \mathbf{v} \\ &\equiv \vec{v} - \sin \phi \hat{\mathbf{n}} \times \vec{v} + (1 - \cos \phi)(-\vec{v} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{v})\vec{v}) \\ &\equiv \cos \phi \vec{v} - \sin \phi \hat{\mathbf{n}} \times \vec{v} + (1 - \cos \phi)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{v})\vec{v}, \end{aligned} \quad (3.177)$$

de maneira que podemos definir o *tensor de rotação* $\mathcal{R}_{\vec{n}}$ de acordo com a relação

$$\vec{v}' = \mathcal{R}_{\vec{n}}(\vec{v}), \quad \text{com} \quad \mathcal{R}_{\vec{n}}(\diamond) = 1 - \sin \phi \hat{\mathbf{n}} \times \diamond + (1 - \cos \phi)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \diamond)\diamond, \quad (3.178)$$

em que o símbolo \diamond indica os locais onde encaixar o vetor \vec{v} . Em representação matricial, vale $\mathcal{R}_{\vec{n}} \equiv \mathbf{A}_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$. Notemos que a mesma operação agindo sobre os eixos dos versores (em contraposição à nossa escolha de operação agindo sobre as componentes do vetor) se obtém pela inversa de $\mathcal{R}_{\vec{n}}$, fazendo $\phi \rightarrow -\phi$.

Temos então a escolha de produzir uma rotação qualquer com apenas 1 operação, como pregam as Eqs. (3.173) e (3.178), ou pela composição de rotações finitas em torno dos eixos de referência. A primeira forma acaba por não ser muito conveniente no tratamento de problemas mecânicos, uma vez que nem sempre é simples encontrar o eixo pelo qual ocorre a rotação finita tomada entre dois instantes de tempo. Já a abordagem de decompor uma rotação única em várias operações elementares possui vantagens. De fato, as três rotações das Eqs. (3.150)–(3.152) podem ser utilizadas em sequência para levar um vetor qualquer em qualquer outro, ou seja, a rotação geral que buscamos pode ser também realizada pelas três operações independentes disponíveis. No entanto, como podemos imaginar, existem *infinitas* maneiras de se fazer isso, o que poderia ser um problema. Felizmente, a formulação física da dinâmica acaba por favorecer formas de se compor rotações para que tenham apelo em termos das coordenadas relevantes do problema. Tal sistematização de sequência de rotações com utilidade na mecânica é obtida pelos ângulos de Euler.

3.3.3 Ângulos de Euler

Uma das formas padrão de se parametrizar uma rotação utilizando as matrizes \mathbf{A}_s considera *três rotações sequenciais* em torno de eixos diferentes do espaço por ângulos conhecidos como ‘ângulos de Euler’. Como essas operações não comutam entre si, é essencial manter a *ordem* em que são prescritas. A aplicação desse esquema de rotação é bastante comum na mecânica e em áreas similares, sendo utilizado principalmente para transformar componentes de vetores entre dois sistemas de coordenadas ortonormais. Como veremos, os ângulos de Euler formam coordenadas generalizadas bastante convenientes para se descrever o movimento de rotação de corpos rígidos.

A convenção de Euler consiste em realizar três rotações em sequência. Consideramos dois sistemas de eixos com mesma origem, um deles representando o sistema de referência fixo no laboratório $\mathcal{O}x'y'z'$, denotado por apóstrofes, e outro fixo ao corpo rígido e no qual sabemos calcular a matriz de inércia, com eixos $\mathcal{O}xyz$. Supomos que os seis eixos se encontrem inicialmente paralelos aos pares e tratamos de determinar a forma de rotacionar o sistema de eixos fixo ao corpo rígido para que o mesmo assumira qualquer orientação possível no espaço. Em suma, nos perguntamos ‘como o corpo rígido pode ter chegado a essa orientação?’. A resposta se dá em termos de três parâmetros escalares capazes de descrever qualquer orientação relativa entre os dois sistemas de eixos, os ângulos de Euler.

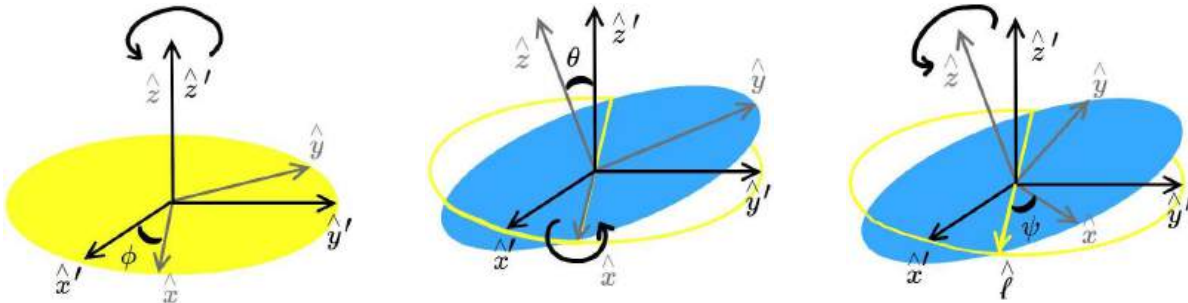


Figura 3.6: Sequência utilizada na convenção de Euler para levar um sistema de eixos em outro sistema orientado arbitrariamente. Esquerda: Rotação em torno do eixo $\hat{z} = \hat{z}'$ pelo ângulo ϕ de Euler. Centro: Rotação em torno do eixo \hat{x}' pelo ângulo θ . Direita: Rotação em torno do eixo \hat{z} pelo ângulo ψ .

A primeira rotação de Euler ocorre por um ângulo denotado como ϕ em torno do eixo \hat{z} comum aos dois sistemas de eixos. A descrição matemática dessa operação utiliza a matriz $\mathbf{A}_z(\phi)$ da Eq. (3.150), na forma

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_z(\phi)\mathbf{V}'. \quad (3.179)$$

A segunda rotação atua sobre esse sistema de eixos girados, dessa vez sobre o eixo \hat{x} transformado, por um ângulo denotado como θ . De fato, a rotação em torno desse eixo não é facilmente descrita no referencial de laboratório, mas possui a forma simples da matriz $\mathbf{A}_x(\theta)$ [Eq. (3.151)] no sistema de eixos criado pela primeira rotação de Euler [Eq. (3.179)], permitindo dessa forma a composição das operações de maneira simples, pelo produto de matrizes

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_x(\theta)\mathbf{A}_z(\phi)\mathbf{V}'. \quad (3.180)$$

Por isso, é importante manter a ordem do produto; caso contrário, o significado da operação muda completamente. Por fim, o terceiro passo do esquema requer produzir uma rotação em torno do eixo \hat{z} do referencial produzido pela transformação da Eq. (3.180) pelo ângulo denotado como ψ . Nesse novo referencial, essa transformação também assume a forma simples da matriz $\mathbf{A}_z(\psi)$, embora não represente, tal como no segundo passo, uma rotação em torno de um eixo pertencente ao sistema de eixos do laboratório. A forma final da transformação de Euler fica

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}_z(\psi)\mathbf{A}_x(\theta)\mathbf{A}_z(\phi)\mathbf{V}', \quad (3.181)$$

que pode ser substituída por uma única rotação equivalente

$$\mathbf{A}_e(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{A}_z(\psi)\mathbf{A}_x(\theta)\mathbf{A}_z(\phi). \quad (3.182)$$

Sua forma explícita é obtida pelo produto de matrizes

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e(\phi, \theta, \psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.183) \end{aligned}$$

Como qualquer rotação encontra representação por alguma matriz \mathbf{A}_e , a Eq. (3.183) deve ser vista como uma forma alternativa de se parametrizar o grupo $\text{SO}(3)$, e portanto totalmente equivalente à Eq. (3.174). De fato, o traço²⁴ de \mathbf{A}_e fornece diretamente o ângulo de rotação [Eq. (3.175)] em termos de ϕ, θ e ψ ; já a direção do eixo de rotação pode ser encontrada determinando-se o autovetor com autovalor 1 da matriz \mathbf{A}_e .

Apesar da forma da matriz \mathbf{A}_e não ser muito elucidativa, e de fato possuidora de menos simetrias do que a parametrização da Eq. (3.174), seu mérito é ser simples quando vista como uma composição de três rotações elementares. Além disso, veremos que os ângulos de Euler descrevem cada qual um tipo de movimento independente (rotação em torno do próprio eixo, precessão e nutação) encontrado comumente na dinâmica de um corpo rígido, sendo portanto uma escolha conveniente de coordenadas generalizadas na formulação lagrangiana do movimento.

Outras representações para rotações

Existem ainda outras formas interessantes de se representar rotações de um vetor espacial em objetos matemáticos. A mais notória no mundo da computação são os quatêrnions, uma generalização dos números complexos para 4 dimensões²⁵. Quatêrnions permitem o cálculo de composições de rotações de forma computacionalmente mais eficiente do que a multiplicação de matrizes em $\text{SO}(3)$, e são por isso empregados em jogos de computador para determinar a perspectiva de cenas imersas num mundo virtual tridimensional²⁶ (e.g. *Tomb Raider*). A álgebra de quatêrnions é equivalente àquela de matrizes unitárias especiais 2×2

²⁴O traço de uma matriz é invariante por mudança de base.

²⁵Um quatêrnion generaliza um número complexo. Se estes podem ser escritos como $z = x + yj$ (em que $j^2 = -1$ é a unidade imaginária e $x, y \in \mathfrak{R}$), um quatêrnion q se constrói fazendo $x \rightarrow a + bi$ e $y \rightarrow c + di$, em que $i^2 = -1$ é uma nova unidade imaginária independente da primeira e $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$. Obtemos

$$q = a + bi + (c + di)j = a + bi + cj + dk, \quad (3.184)$$

em que $k = ij$ é ainda uma terceira unidade imaginária independente das demais. O espaço assim construído possui quatro dimensões (daí o nome ‘quatêrnion’). Os objetos imaginários satisfazem $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ e os produtos cíclicos $ij = k, ki = j$ e $jk = i$. É simples mostrar que trocar a ordem do produto é o mesmo que inverter seu sinal, $ji = -k, ik = -j$ e $kj = -i$. Assim, generalizar os números complexos leva à perda da propriedade *comutativa* para o produto. Essa álgebra, inventada por Hamilton no séc. XIX, permite incluir a propriedade de *divisão* entre vetores de maior dimensão. De fato, a existência do *elemento inverso* para todo membro de um espaço vetorial é uma propriedade especial, satisfeita por apenas três álgebras associativas sobre o corpo dos reais: os números reais em si (1 dimensão), os números complexos (2 dimensões) e os quatêrnions (3 dimensões). Se abrirmos mão também da propriedade de associatividade do produto, é possível ainda criar os octônions (8 dimensões), e a brincadeira acaba por aí (em particular, note que não existe divisão entre vetores no Espaço!).

²⁶O mapa mais comum consiste em tomar a parte imaginária do quatêrnion como as componentes do vetor espacial \vec{v} a ser girado, da forma $q = \vec{v}$, em que se mapeia $\vec{v} \equiv v_x i + v_y j + v_z k$. A matriz de rotação é por sua vez também substituída por um quatêrnion p . Nesse caso, o versor \hat{n} de rotação (com módulo unitário) se torna a parte imaginária do quatêrnion p , e o ângulo de rotação θ , sua parte real, da forma $p = \theta + \vec{n}$, em que $\vec{n} \equiv n_x i + n_y j + n_z k$. O vetor \vec{v}' rodado é $\vec{v}' = pqp^*$, em que $p^* = \theta - \vec{n}$

construídas sobre os números complexos, formadores do grupo $SU(2)$. Estas também servem, portanto, para representar rotações no espaço, sendo utilizadas na mecânica quântica para descrever o momento angular intrínseco, ou *spin*²⁷. Por causa da conexão entre rotação e momento angular (teorema de Noether), na verdade vários dos conceitos aqui abordados são empregados na mecânica quântica, na qual é comum utilizar-se ainda uma outra representação para rotações, em termos de operadores diferenciais.

3.4 Equações de Euler para a dinâmica de corpos rígidos

A dinâmica dos corpos rígidos resulta em geral da composição de dois tipos de movimento: a cinemática de uma *partícula* e a evolução temporal de *orientação* do corpo rígido.

O primeiro tipo de movimento já foi examinado em detalhe em nosso estudo da formulação lagrangiana da mecânica. Resta apenas dizer que a posição dessa ‘partícula’ abstrata contendo toda a massa do corpo rígido pode ser escolhida como qualquer ponto de referência naturalmente fixado pelo problema, dentre os quais se destaca a posição do centro de massa do corpo rígido ou algum ponto mantido em repouso no referencial do laboratório.

Nosso verdadeiro interesse neste capítulo se resume a entender o segundo tipo de movimento, ou seja, como a orientação do corpo rígido varia no tempo. Agora já sabemos que os elementos relevantes dessa dinâmica são os seguintes. Forças externas produzem torque no corpo rígido, cujo efeito é produzir variações em seu momento angular. Todavia, a direção do momento angular em geral não coincide com a direção da velocidade angular, por causa da distribuição de massa do corpo rígido; como é a velocidade angular que fornece o *eixo instantâneo de rotação* em torno do qual o corpo é girado (e não o momento angular), temos que o efeito do torque é mapeado em rotações de maneira um tanto quanto complicada por causa do tensor de inércia, um objeto que acopla *momento angular em um eixo a rotações em torno de outro*. Em geral, é preciso conhecer o momento angular (alterado por torques) para calcular a velocidade angular pelo uso do tensor de inércia para só então determinarmos como as rotações ocorrem.

Além disso, é importante notar que o tensor de inércia muitas vezes privilegia um certo sistema de eixos fixados ao corpo rígido – os eixos principais de inércia –, mas que a dinâmica é observada em outro sistema de eixos, o referencial *inercial* do laboratório. Não é difícil imaginar as dificuldades que esse fato traz: estamos dizendo que é simples conectar momento angular ao eixo de rotação instantâneo no sistema de eixos do corpo rígido... justamente os eixos que estão *girando* no referencial de laboratório! Então a

é o complexo conjugado de p . O fato de que p produz uma rotação está ligado à generalização da identidade de Euler para quatêrnions. Se para números complexos vale $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, para os quatêrnions temos $e^{\vec{n}} = \cos \theta + \vec{n} \sin \theta$, uma identidade equivalente à Eq. (3.173), embora mais simples em forma. Não é difícil entender essa identidade. A multiplicação de um número complexo z por outro de módulo unitário $e^{i\theta}$ produz uma rotação de z no plano complexo pelo ângulo θ . Hamilton tentou encontrar uma estrutura similar em três dimensões, com a ideia de que as complexidades algébricas das rotações pudessem ser sintetizadas na operação simples de multiplicação. Ele só lograria êxito ao buscar generalização em quatro dimensões, com a invenção dos quatêrnions. O quatêrnion unitário $e^{\vec{n}}$ produz uma rotação na parte imaginária do quatêrnion q (3 dimensões), que representa para nós um vetor no espaço cartesiano. A diferença com relação aos números complexos é que a multiplicação ocorre pelos dois lados para que q continue sendo ‘imaginário puro’ (i.e. possa ser mapeado de volta num vetor espacial).

²⁷O elétron, por exemplo, portador de spin 1/2, pode ser representado como um vetor num espaço de duas dimensões ou pela matriz que fornece esse vetor como autovetor. As três unidades imaginárias dos quatêrnions são nesse caso representadas pelas matrizes de Pauli, da forma $i \rightarrow i\sigma_x$, $j \rightarrow i\sigma_y$ e $k \rightarrow i\sigma_z$.

decomposição do próprio momento angular nesse sistema de eixos deve variar no tempo, mesmo que não haja torques agindo sobre o corpo, já que *os eixos em si variam*. A descrição do problema colocado dessa maneira é resolvida pelas equações de Euler. E, depois de resolvê-las no sistema de eixos principais do corpo rígido, precisamos ainda trocar o sistema de eixos para o referencial do laboratório: enfim, uma trabalhadeira danada.

Existe ainda uma maneira alternativa de se tratar esse problema, conforme veremos na sequência. Empregamos nesse caso o formalismo lagrangiano para determinar diretamente a evolução de coordenadas generalizadas convenientes, os ângulos de Euler, para descrever como a orientação do corpo rígido evolui no espaço, e tudo isso sem precisar trocar de eixos. O formalismo lagrangiano estabelece mais uma vez seu poder superior de fogo.

3.4.1 Ângulos de Euler como coordenadas

No tratamento do movimento do corpo rígido, os ângulos de Euler são as coordenadas angulares mais comumente utilizadas para fornecer a orientação dos eixos principais do corpo com relação ao sistema de eixos no laboratório. A matriz de rotação da Eq. (3.183) nos fornece a transformação entre esses dois sistemas de eixos, e portanto dá sentido preciso aos ângulos de Euler como coordenadas.

A atribuição de nomenclatura aos eixos do corpo rígido com relação aos eixos do laboratório é feita da seguinte forma. No referencial do laboratório, definimos a direção *vertical* como \hat{z}' , e o *plano horizontal* como $\mathcal{O}x'y'$. Escolhemos então um dos eixos principais do corpo rígido como \hat{z} (e.g. $\hat{\omega}_c = \hat{z}$) para definir seu ângulo θ com relação à vertical. Os dois eixos principais restantes do corpo rígido definem o plano $\mathcal{O}xy$. Notemos que θ é também o ângulo de inclinação entre esse plano e o horizontal.

A linha de *interseção* entre o plano $\mathcal{O}xy$ do corpo rígido e o plano horizontal recebe o nome de *linha de nodos*, com direção representada pelo versor $\hat{\ell}$ na Fig. 3.7. No sistema de eixos do laboratório, o ângulo entre a linha de nodos e \hat{x}' vale ϕ . No sistema de eixos principais do corpo rígido, o ângulo entre a linha de nodos e \hat{x} (e.g. o eixo principal $\hat{\omega}_a$) é ψ . Isso define as coordenadas de orientação do corpo rígido.

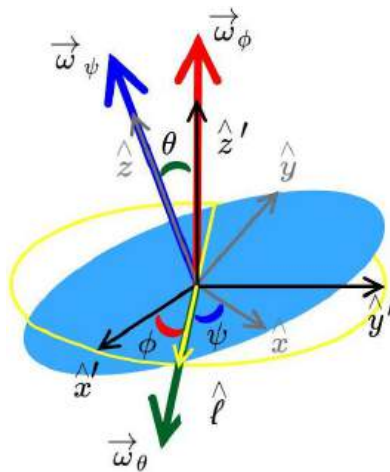


Figura 3.7: Os ângulos de Euler podem ser utilizados como coordenadas generalizadas.

Os ângulos de Euler formam um sistema intuitivo de coordenadas. Os movimentos associados a cada um

desses ângulos são comumente observados na dinâmica de corpos rígidos, e por isso recebem nomes especiais. A separação conceitual em diferentes ‘tipos’ de movimento faz sentido sempre que as velocidades angulares associadas aos ângulos de Euler possuam valores bastante distintos, o que ocorre muitas vezes.

O eixo a que nos referimos como ‘o eixo’ de rotação do corpo rígido em torno de si mesmo (e.g. rotação da Terra) é o eixo \hat{z} . Vamos nos referir a esse movimento como *rotação própria* (‘spin’). A coordenada angular atrelada a rotações em torno desse eixo é ψ , que nos fornece a posição angular do eixo principal \hat{x} com relação à linha de nodos no plano horizontal. Sua velocidade angular $\dot{\psi}$ é usualmente a maior de todas.

O ângulo θ , que fornece a inclinação entre o eixo de rotação própria do corpo e a direção vertical, tem como eixo de rotação a linha de nodos. O movimento a variar essa inclinação recebe o nome de *nutação*. A nutação ocorre comumente a uma velocidade $\dot{\theta}$ bem menor do que a velocidade de rotação própria.

Finalmente, a rotação da linha de nodos no plano horizontal, descrita pelo ângulo ϕ , está associada ao movimento de *precessão* do corpo rígido em torno da direção vertical, sendo sua velocidade $\dot{\phi}$ muitas vezes associada ao movimento mais lento de todos.

Dada uma orientação instantânea (ϕ, θ, ψ) do corpo rígido e um campo de forças externo, estamos interessados em determinar a *rotação instantânea* $\vec{\omega}(t)$ responsável pela variação das coordenadas no tempo. Para tanto, obtemos primeiramente a decomposição do vetor velocidade angular nessas coordenadas.

Os vetores velocidade angular de rotação associados aos ângulos de Euler, denotados como $\vec{\omega}_\phi$, $\vec{\omega}_\theta$ e $\vec{\omega}_\psi$, apontam, respectivamente, os seguintes eixos de rotação: a vertical (\hat{z}'), a linha de nodos (denotada aqui por $\hat{\ell}$) e o eixo de rotação própria (\hat{z}) do corpo rígido, ou seja,

$$\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{z}', \quad \vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} \hat{\ell}, \quad \vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} \hat{z}. \quad (3.185)$$

Para encontrar a decomposição desses vetores nos eixos de laboratório, basta determinar as componentes dos versores fornecendo as direções de seus eixos de rotação. Temos, pela geometria²⁸,

$$\hat{z}' = \hat{z}, \quad \hat{\ell} = \cos \phi \hat{x}' + \sin \phi \hat{y}', \quad \hat{z} = \sin \phi \sin \theta \hat{x}' - \cos \phi \sin \theta \hat{y}' + \cos \theta \hat{z}', \quad (3.186)$$

e, portanto, as taxas de variação dos ângulos de Euler dão origem às velocidades angulares

$$\vec{\omega}_\phi = \dot{\phi} \hat{z}', \quad (3.187)$$

$$\vec{\omega}_\theta = \dot{\theta} (\cos \phi \hat{x}' + \sin \phi \hat{y}'), \quad (3.188)$$

$$\vec{\omega}_\psi = \dot{\psi} (\sin \phi \sin \theta \hat{x}' - \cos \phi \sin \theta \hat{y}' + \cos \theta \hat{z}'). \quad (3.189)$$

O vetor velocidade angular total do corpo rígido escrito no referencial de laboratório é simplesmente a soma desses vetores, dado que estamos no regime de rotações infinitesimais, no qual é legítimo somar e decompor

²⁸É possível deduzir essas mesmas relações utilizando a matriz de rotação \mathbf{A}_e para girar vetores de forma ativa no sistema de coordenadas do laboratório e obter a decomposição dos versores $\hat{\ell}$ e \hat{z} nesse mesmo sistema. Lembremos, no entanto, que a Eq. (3.183) serve para obter as *componentes* de um vetor no sistema do corpo rígido a partir dos valores das componentes no sistema de laboratório (rotação passiva). Para aplicar uma rotação ativa aos versores de base no qual se escreve o vetor, é preciso considerar a inversa de \mathbf{A}_e , dada por $\mathbf{A}_e^{-1}(\phi, \theta, \psi) = \mathbf{A}_e(-\phi, -\theta, -\psi)$. Obtemos o versor $\hat{\ell}$ pela rotação ativa de \hat{x}' pelo ângulo ϕ , i.e. $\hat{\ell} = \mathbf{A}_e^{-1}(\phi, 0, 0)\hat{x}' = \mathbf{A}_e(-\phi, 0, 0)\hat{x}'$, e o versor \hat{z} pela rotação ativa de \hat{z}' de forma genérica, i.e. $\hat{z} = \mathbf{A}_e^{-1}(\phi, \theta, \psi)\hat{z}' = \mathbf{A}_e(-\phi, -\theta, -\psi)\hat{z}'$.

rotações como fazemos com vetores²⁹. Obtemos

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta) \hat{x}' + (\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta) \hat{y}' + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \hat{z}', \quad (3.190)$$

na qual reconhecemos a decomposição de $\vec{\omega}$ no sistema de eixos do laboratório como

$$\omega_{x'} = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta, \quad \omega_{y'} = \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta, \quad \omega_{z'} = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (3.191)$$

Assim, por exemplo, uma rotação em torno do eixo \hat{x}' do laboratório transforma infinitesimalmente os ângulos θ e ψ de Euler (mas não afeta o ângulo ϕ). A importância dessa transformação depende da orientação do corpo rígido dadas por ϕ e θ (mas não do ângulo ψ). Interpretações análogas valem para $\vec{\omega}_{y'}$ e $\vec{\omega}_{z'}$, e podem ser entendidas pela visualização cuidadosa da geometria.

Mas o movimento do corpo rígido é descrito de maneira mais simples em seu sistema de eixos principais de inércia. Por isso se torna mais conveniente, na verdade, escrever o vetor $\vec{\omega}$ nesse referencial para resolver as equações dinâmicas. A troca de referenciais, como vimos, é feita de forma simples em representação matricial. Como $\vec{\omega}$ se encontra parametrizado em termos dos ângulos de Euler, utilizamos diretamente a matriz de rotação da Eq. (3.183) para escrevê-lo no sistema de eixos girados do corpo rígido. Denotamos a representação matricial da velocidade angular no referencial de laboratório por $\vec{\omega} \equiv \mathbf{\Omega}'$ e, analogamente, por $\vec{\omega} \equiv \mathbf{\Omega}$ no referencial fixo ao corpo rígido. Calculamos a troca de bases pelo produto de matrizes³⁰

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{A}_e \mathbf{\Omega}' \quad (3.192)$$

para escrever as representações matriciais nos dois sistemas de eixos como

$$\vec{\omega} \equiv \mathbf{\Omega}' = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \cos \phi \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{A}_e} \vec{\omega} \equiv \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad (3.193)$$

Retornando à notação vetorial, podemos agora escrever as componentes de $\vec{\omega} \equiv \mathbf{\Omega}$ no sistema de eixos principais do corpo rígido,

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \hat{x} + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{y} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{z}. \quad (3.194)$$

Assim, as componentes da velocidade angular nos eixos principais do corpo rígido relacionam-se aos ângulos de Euler através das relações

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}. \quad (3.195)$$

Vemos, por exemplo, que a rotação infinitesimal do corpo rígido em torno de seu eixo principal \hat{z} é uma composição de duas rotações: uma em torno de seu eixo próprio, descrita por $\dot{\phi}$, e outra produzida pela precessão desse eixo em torno da vertical do laboratório, dada por $\dot{\psi}$. A razão entre qual delas se torna mais importante é regulada por sua orientação em θ . Interpretações similares se aplicam às demais rotações. Vamos a seguir fazer uso frequente das equações acima.

²⁹Notemos que transformar a velocidade angular conhecida em termos do trio $(\omega_\phi, \omega_\theta, \omega_\psi)$ para a base de eixos de laboratório $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ requereu utilizar um procedimento ‘manual’, baseado na análise da geometria. Isso se dá pelo fato de que as direções associadas aos eixos de rotação de Euler não formam uma base ortonormal. Por exemplo, o eixo \hat{z} poderia ser levado por rotações até a linha de nodos e com isso ser feito coincidir com $\hat{\ell}$, produzindo o efeito conhecido como ‘travamento de cardan’ (ou *gimbal lock*, em inglês), no qual um grau de liberdade de rotação perde significado por conta da coincidência de eixos (no caso, rotações por θ ou ψ teriam o mesmo efeito). A transformação de um vetor decomposto nas direções dos eixos de Euler precisaria deformar ângulos para ser colocada corretamente na base de laboratório, não sendo, portanto, uma rotação.

³⁰É possível também decompor as velocidades angulares $\vec{\omega}_\phi$, $\vec{\omega}_\theta$ e $\vec{\omega}_\psi$ da Eq. (3.185) diretamente nos eixos principais do corpo rígido usando a geometria, bastando decompor os versores \hat{z}' e $\hat{\ell}$ na base dos versores \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} em vez de proceder como fizemos na Eq. (3.186). Teríamos nesse caso $\hat{z}' = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \cos \psi \hat{y} + \sin \theta \sin \psi \hat{x}$ e $\hat{\ell} = \cos \psi \hat{x} - \sin \psi \hat{y}$.

3.4.2 Equações de Euler para o corpo rígido

Tratemos primeiramente as equações de movimento do corpo rígido no formalismo newtoniano, caso em que são chamadas ‘equações de Euler’³¹. Essas equações não resolvem de fato o *movimento* do corpo rígido propriamente dito, pelo que entenderíamos responder: “como a orientação do corpo rígido varia no tempo?”. A pergunta respondida pelas equações de Euler, na verdade, é: “como evoluem as decomposições dos vetores momento angular e velocidade angular no sistema de eixos principais do corpo rígido?”.

Notemos a forte distinção prática entre essas duas perguntas: as equações de Euler resolvem como as grandezas dinâmicas relevantes variam no tempo conforme percebidas no sistema de eixos *em movimento* com o corpo rígido. Isso significa que, para determinarmos a orientação do corpo rígido no tempo, temos de resolver ainda o problema adicional de escrever a resposta encontrada em termos dos eixos de laboratório, o que faremos posteriormente.

Existem dois cenários mais comuns nesse tipo de movimento, como já vimos anteriormente. No primeiro, o corpo se move pelo Espaço da maneira mais geral possível. Nesse caso, torna-se conveniente medir a posição do corpo rígido tomando como referência seu centro de massa, e escrever o vetor posição \vec{r}_i' de cada partícula i do corpo como

$$\vec{r}_i' = \vec{R} + \vec{r}_i. \quad (3.196)$$

A equação de Newton para o movimento se escreve

$$\vec{F}' = \frac{d}{dt}\vec{p}' = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i). \quad (3.197)$$

Mas, como já vínhamos dizendo, a posição \vec{r}_i de cada partícula medida com relação ao centro de massa só pode variar por uma rotação, por conta da coesão do corpo rígido, de maneira que vale necessariamente

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i. \quad (3.198)$$

Com isso, a Eq. (3.197) se torna

$$\vec{F}' = \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} + \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} + \frac{d}{dt} \left(\vec{\omega} \times \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}}, \quad (3.199)$$

em que usamos $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$, por serem as posições \vec{r}_i medidas com relação ao centro de massa, para eliminar o último termo. Assim, o movimento do corpo rígido através do Espaço se dá como se o mesmo fosse substituído por uma partícula pontual com massa M na posição do centro de massa, uma consequência da construção da Eq. (3.196). Já sabemos resolver esse tipo de movimento em qualquer situação razoável (i.e. translações e rotações com vínculos holonômicos independentes do tempo), de forma que o consideramos conhecido.

A parte ainda a resolver consiste em determinar a evolução temporal da *orientação* do corpo rígido no espaço produzida por forças cujas magnitudes ou direções variem pela extensão do corpo (forças de maré).

³¹Sim, mais uma ‘equação de Euler’! Como se não bastasse a famosa equação de Euler conectando a forma polar dos números complexos às funções trigonométricas (aquela mesma que produziria a mais bela expressão da matemática: “ $e^{i\pi} + 1 = 0$ ”), e a equação de Euler (ou Euler-Lagrange) para a extremização de funcionais, somos aqui mais uma vez obrigados a lidar civilizadamente com a promiscuidade intelectual do Sr. Euler. E quem sabe quantas outras equações ele espalhou pelo mundo sem o devido reconhecimento de paternidade?

A separação do movimento nas duas partes enunciadas pela Eq. (3.196) faz com que um *torque* seja o único efeito dessas forças. Portanto, o problema do movimento que gostaríamos de resolver considera a forma como torques externos produzem rotações no corpo rígido.

O segundo cenário mencionado para o movimento consiste em uma rotação pura em torno de um ponto fixo qualquer no espaço. Esse caso é, na verdade, totalmente equivalente à rotação pura ocorrendo em torno do centro de massa conforme abordada no primeiro cenário³², variando apenas a posição do centro de rotações³³.

Portanto, em essência, o que deduziremos a seguir são as equações de Newton para o movimento do corpo rígido sujeito a uma *rotação pura* tomada em torno de *qualquer* ponto. Obviamente, o centro de rotações deve ser o ponto de referência para o cálculo do tensor de inércia em qualquer caso, por consistência³⁴. Consideremos então o torque agindo sobre o corpo rígido,

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \frac{d}{dt} m_i \vec{p}'_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i) \times \frac{d}{dt} m_i (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i) = \vec{R} \times \frac{d}{dt} M \dot{\vec{R}} + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i, \quad (3.200)$$

em que empregamos novamente $\sum_i m_i \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = 0$ para desconsiderarmos termos nulos. O primeiro termo dessa equação se refere ao movimento da partícula abstrata que habita o centro de massa, o qual já sabemos resolver. Consideremos em detalhe o segundo termo, referente à forma como mudanças de orientação do corpo rígido ocorrem por influência dos torque externos,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_i) \\ &= \sum_i m_i \left(r_i^2 \dot{\vec{\omega}} - (\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{\omega}}) \vec{r}_i + (\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \dot{\vec{r}}_i \right), \end{aligned} \quad (3.201)$$

em que usamos a identidade vetorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$. O terceiro termo do somatório se anula por ser o movimento uma rotação, i.e. a velocidade $\dot{\vec{r}}_i$ se encontra sempre ortogonal à posição \vec{r}_i , como pode ser visto a partir da Eq. (3.198). Utilizamos essa mesma equação para reescrever o último termo do somatório, obtendo

$$\vec{\tau} = \sum_i m_i \left(r_i^2 \dot{\vec{\omega}} - (\vec{r}_i \cdot \dot{\vec{\omega}}) \vec{r}_i - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right). \quad (3.202)$$

É conveniente neste ponto introduzir a notação tensorial para tratar as componentes individuais do vetor $\vec{\tau}$ a fim de reorganizar e reconhecer os termos que aparecerem. Para facilitar a notação, colocamos

³²Para descrever uma rotação pura, podemos formalmente escolher o sistema de coordenadas tal que $\vec{R} = 0$, valendo ainda a Eq. (3.198) que dá base às deduções a seguir.

³³Para entender melhor a classe de movimentos de que estamos tratando, é interessante saber de que casos *não* estamos tratando. Se o movimento geral não puder ser descrito de maneira simples por uma rotação pura ou por uma rotação pura em torno do centro de massa, então temos de pensar mais um pouco. Um exemplo direto de caso mais complicado seria um corpo rígido acoplado à extremidade de uma barra rígida (de massa desprezível e presa à origem pela outra extremidade) por algum ponto \vec{R}' diferente de seu centro de massa. O ponto \vec{R}' do corpo rígido (fixo à barra) pode se mover nesse caso por uma rotação em torno da origem, e o corpo rígido pode se mover por uma rotação em torno desse ponto: mas essas duas rotações influenciam-se mutuamente na dinâmica, pois a Eq. (3.197) só poderia ser levada à forma separável da Eq. (3.199) se $\vec{R} = \vec{R}'$ (o que é suposto não valer nesse exemplo). Pode ser ainda conveniente nessas situações usar a decomposição da Eq. (3.199), já que vale sempre, embora o formalismo lagrangiano seja mais aconselhável como ferramenta para atacar esses casos mais complicados.

³⁴Caso conheçamos a matriz de inércia com origem tomada sobre o centro de massa do corpo rígido, podemos sempre usar o teorema dos eixos paralelos [Eq. (3.115)] para obter a matriz de inércia relativa ao novo centro de rotações.

momentaneamente de lado o somatório em partículas, dessa forma eliminando o índice i para evitar confusão com os índices de componentes. Estamos interessados no vetor

$$\vec{u} = r^2 \dot{\vec{\omega}} - (\vec{r} \cdot \dot{\vec{\omega}}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})(\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (3.203)$$

A componente α de \vec{u} se escreve, em notação tensorial³⁵ (e somas subentendidas),

$$u^\alpha = r^\beta r^\beta \dot{\omega}^\alpha - r^\gamma \dot{\omega}^\gamma r^\alpha - r^\eta \omega^\eta (\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha. \quad (3.204)$$

Tratamos dos primeiros dois termos empregando a já amigável identidade $\dot{\omega}^\alpha = \delta^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma$ para fatorar $\dot{\omega}^\alpha$ do somatório e com isso fazer aí aparecer o tensor de inércia, pois

$$r^\beta r^\beta \dot{\omega}^\alpha - r^\gamma \dot{\omega}^\gamma r^\alpha = r^\beta r^\beta \delta^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma - r^\gamma \dot{\omega}^\gamma r^\alpha = (r^\beta r^\beta \delta^{\alpha\gamma} - r^\gamma r^\alpha) \dot{\omega}^\gamma = I'^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma, \quad (3.205)$$

em que definimos $I'^{\alpha\gamma}$ como a componente do tensor de inércia I_γ^α antes da soma em partículas, i.e.

$$I'^{\alpha\gamma} = \sum_i m_i I_i'^{\alpha\gamma}, \quad \text{com } I_i'^{\gamma\alpha} = \sum_\beta r_i^\beta r_i^\beta \delta^{\alpha\gamma} - r_i^\gamma r_i^\alpha. \quad (3.206)$$

Já o último termo da Eq. (3.204) requer a introdução de nova notação para nos auxiliar no tratamento do produto vetorial. Introduzimos o tensor de permutação $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ (também chamado de tensor de Levi-Civita), que possui as propriedades

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha\beta\gamma \text{ é uma permutação par da sequência '123'} \\ -1, & \text{se } \alpha\beta\gamma \text{ é uma permutação ímpar da sequência '123'} \\ 0, & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}. \quad (3.207)$$

Por exemplo, vemos que $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ se anula caso qualquer índice se repita. Para índices não repetitivos, todas as permutações possíveis de índice fornecem explicitamente $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{312} = \varepsilon^{231} = 1$ e $\varepsilon^{132} = \varepsilon^{213} = \varepsilon^{321} = -1$. Essa propriedade torna a notação do produto vetorial bastante simples, pois

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{r} &= (\omega^2 r^3 - \omega^3 r^2) \hat{x}_1 + (\omega^3 r^1 - \omega^1 r^3) \hat{x}_2 + (\omega^1 r^2 - \omega^2 r^1) \hat{x}_3 \\ &= (\varepsilon^{123} \omega^2 r^3 + \varepsilon^{132} \omega^3 r^2) \hat{x}_1 + (\varepsilon^{231} \omega^3 r^1 + \varepsilon^{213} \omega^1 r^3) \hat{x}_2 + (\varepsilon^{312} \omega^1 r^2 + \varepsilon^{321} \omega^2 r^1) \hat{x}_3 \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta r^\gamma \hat{x}_\alpha, \end{aligned} \quad (3.208)$$

de forma que

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha = \sum_{\beta, \gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta r^\gamma. \quad (3.209)$$

Assim, o último termo da Eq. (3.204) se escreve

$$r^\eta \omega^\eta (\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\eta r^\gamma \omega^\beta \omega^\eta. \quad (3.210)$$

Mas, pela definição do tensor de inércia sem a soma em partículas [Eq. (3.206)], podemos escrever para o produto $r^\eta r^\gamma$ a relação

$$I'^{\eta\gamma} = r^\xi r^\xi \delta^{\eta\gamma} - r^\eta r^\gamma \quad \Rightarrow \quad r^\eta r^\gamma = r^\xi r^\xi \delta^{\eta\gamma} - I'^{\eta\gamma}, \quad (3.211)$$

³⁵Notemos que continuamos ignorando a distinção entre objetos covariantes e contravariantes no espaço euclidiano.

de forma que a Eq. (3.210) fornece

$$r^\eta \omega^\eta (\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(r^\xi r^\xi \delta^{\eta\gamma} - I^{\eta\gamma} \right) \omega^\beta \omega^\eta = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\xi r^\xi \delta^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} I^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta. \quad (3.212)$$

A propriedade do tensor $\delta^{\eta\gamma}$ pode ser usada para eliminar um dos somatórios no primeiro termo, pois $\delta^{\eta\gamma} = 1$ apenas se $\eta = \gamma$. Escolhemos eliminar η em favor de γ para obtermos

$$r^\eta \omega^\eta (\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} r^\xi r^\xi \omega^\beta \omega^\gamma - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} I^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta \quad (3.213)$$

Mas o somatório envolvendo o tensor de Levi-Civita no primeiro termo é o produto vetorial $\vec{\omega} \times \vec{\omega}$ [Eq. (3.209)], portanto nulo, i.e. $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \omega^\gamma = 0$. Com isso, apenas o segundo termo contribui, i.e.

$$r^\eta \omega^\eta (\vec{\omega} \times \vec{r})^\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} I^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta. \quad (3.214)$$

Finalmente, juntando os resultados das Eqs. (3.205) e (3.214), obtemos para a Eq. (3.204) a relação

$$u^\alpha = I^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} I^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta. \quad (3.215)$$

Restauramos então a soma em partículas, fazendo $I^{\alpha\gamma} \rightarrow I^{\alpha\gamma}$, para obter a Eq. (3.202) na forma mais simples

$$\tau^\alpha = I^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} I^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta. \quad (3.216)$$

A Eq. (3.216) já poderia ser escrita em representação matricial utilizando a matriz de inércia no lugar de $I^{\alpha\gamma}$ e as componentes do vetor velocidade angular obtidas no sistema de eixos do laboratório, faltando apenas investigar em detalhe a soma $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta$ para encontrar sua correspondência matricial.

Existe, no entanto, um caminho mais simples. A escolha de eixos de coordenadas é arbitrária do ponto de vista matemático, valendo sempre a Eq. (3.216). O mesmo não pode ser dito do ponto de vista físico, já que o movimento do corpo rígido favorece os eixos principais de inércia no que diz respeito ao acoplamento entre o momento angular e a velocidade angular. Nesse sistema de eixos, o tensor de inércia é diagonal³⁶,

$$I^{\alpha\gamma} = \mathcal{I}_\alpha \delta^{\alpha\gamma}, \quad (3.217)$$

em que \mathcal{I}_α é o momento principal de inércia para rotações em torno do eixo principal α , simplificando a Eq. (3.216) para

$$\tau^\alpha = \mathcal{I}_\alpha \delta^{\alpha\gamma} \dot{\omega}^\gamma + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathcal{I}_\gamma \delta^{\eta\gamma} \omega^\beta \omega^\eta = \mathcal{I}_\alpha \dot{\omega}^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathcal{I}_\gamma \omega^\beta \omega^\gamma \quad (3.218)$$

Nesse sistema de eixos, a componente τ^1 do torque se escreve, por exemplo, como

$$\tau^1 = \mathcal{I}_1 \dot{\omega}^1 + \sum_{j,k} \varepsilon^{1\beta\gamma} \mathcal{I}_\gamma \omega^\beta \omega^\gamma = \mathcal{I}_1 \dot{\omega}^1 + \mathcal{I}_3 \omega^2 \omega^3 - \mathcal{I}_2 \omega^3 \omega^2 = \mathcal{I}_1 \dot{\omega}^1 - (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3) \omega^2 \omega^3. \quad (3.219)$$

Repetindo o mesmo procedimento para todas as componentes, a Eq. (3.218) fornece as *equações de Euler* para o movimento do corpo rígido, escritas na base de seus eixos principais como

$$\tau^\alpha = \mathcal{I}_\beta \dot{\omega}^\beta + \sum_{\beta,\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \mathcal{I}_\gamma \omega^\beta \omega^\gamma \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \tau^1 &= \mathcal{I}_1 \dot{\omega}^1 - (\mathcal{I}_2 - \mathcal{I}_3) \omega^2 \omega^3, \\ \tau^2 &= \mathcal{I}_2 \dot{\omega}^2 - (\mathcal{I}_3 - \mathcal{I}_1) \omega^3 \omega^1, \\ \tau^3 &= \mathcal{I}_3 \dot{\omega}^3 - (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2) \omega^1 \omega^2. \end{cases} \quad (3.220)$$

³⁶Vamos denotar os momentos principais de inércia com índices numéricos \mathcal{I}_α para facilitar a notação. Na verdade, é preciso lembrar que \mathcal{I}_α não representam componentes de um vetor, mas as três quantidades escalares da Eq. (3.90) segundo a correspondência $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_b$ e $\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_c$. Vamos manter esse índice na parte inferior para ajudar na distinção visual.

Para ficar claro o programa de resolução do movimento proposto pelas equações de Euler, analisemos como faríamos para encontrar a orientação subsequente do corpo rígido a partir de uma orientação conhecida. Suponhamos que todas as grandezas dinâmicas relevantes, i.e. torque $\vec{\tau}(t)$, momento angular $\vec{L}(t)$ e velocidade angular $\vec{\omega}(t)$, tenham sido resolvidas de acordo com as equações de Euler (no sistema de eixos principais do corpo rígido!) e que a orientação inicial do corpo rígido seja dada em termos dos ângulos de Euler $\phi(0)$, $\theta(0)$ e $\psi(0)$ (no sistema de eixos do laboratório!).

Inicialmente, decompomos o vetor $\vec{\omega}(0)$ nos eixos de laboratório utilizando os ângulos de Euler conhecidos para a orientação instantânea inicial do corpo rígido. Isso nos permite atualizar os eixos principais do corpo rígido pela rotação infinitesimal $\vec{\omega}(0)$, o que significa encontrar os valores evoluídos temporalmente $\phi(dt)$, $\theta(dt)$ e $\psi(dt)$ para os ângulos de Euler. É precisamente nesses eixos que a equação de Euler fornece a nova rotação instantânea $\vec{\omega}(dt)$. Conhecendo novamente as componentes de $\vec{\omega}(dt)$ no sistema de eixos do corpo rígido por conta da solução das equações de Euler, repetimos o passo de decompor esse vetor nos eixos de laboratório usando os eixos atualizados $\phi(dt)$, $\theta(dt)$ e $\psi(dt)$ para determinar através de uma rotação infinitesimal os novos ângulos de Euler $\phi(2dt)$, $\theta(2dt)$ e $\psi(2dt)$. E assim por diante.

Como vemos, não é correto simplesmente aplicar a solução $\vec{\omega}(t)$ encontrada pelas equações de Euler para ‘girar continuamente’ a orientação inicial do corpo rígido conforme vista no laboratório. É preciso lembrar que $\vec{\omega}(t)$ se refere ao eixo instantâneo de rotação conforme observado no referencial de eixos principais do corpo rígido, eixos estes que se encontram variando no tempo como consequência do *próprio* vetor $\vec{\omega}(t)$.

Por fim, notemos que as equações de Euler acoplam as três componentes da velocidade angular, o que implica em soluções difíceis de serem captadas à primeira vista. Analisemos a seguir alguns casos especiais para criar intuição sobre como as grandezas físicas variam no tempo quando decompostas nos eixos principais do corpo rígido.

3.4.3 Movimento livre do corpo rígido

Na situação em que o corpo rígido se move sem a influência de torques externos (i.e. $\vec{\tau} = 0$), as equações de Euler se tornam

$$\mathcal{I}_x \dot{\omega}_x = (\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z) \omega_y \omega_z, \quad \mathcal{I}_y \dot{\omega}_y = (\mathcal{I}_z - \mathcal{I}_x) \omega_z \omega_x, \quad \mathcal{I}_z \dot{\omega}_z = (\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_y) \omega_x \omega_y. \quad (3.221)$$

formando um sistema *acoplado* de equações diferenciais de primeira ordem. Essas equações descrevem, por exemplo, o movimento de corpos em órbita (relativo aos respectivos centros de massa) sempre que forças de maré puderem ser desprezadas (i.e. campo gravitacional assumido constante na extensão do corpo), tal como ocorre em primeira aproximação para satélites artificiais e planetas do sistema solar.

Por ser nulo o torque, vale no referencial do laboratório que o momento angular \vec{L} é constante no movimento livre. Escolhemos o eixo z' nessa direção por apelo físico³⁷, de forma que

$$\vec{L} = L_0 \hat{z}', \quad \text{com } L_0 = cte. \quad (3.222)$$

³⁷Notemos que a ausência de forças externas, em especial do campo gravitacional da Terra, torna a definição de ‘vertical’ irrelevante nesse contexto. A velocidade angular não fornece necessariamente uma boa direção de referência, uma vez que pode variar [Eq. (3.221)]. Da mesma forma, os eixos principais do corpo também podem girar no espaço. A única direção ‘natural’ dessa situação é dada pelo momento angular, um vetor constante conforme visto no referencial inercial do laboratório.

Vimos na Eq. (3.99), por outro lado, que o mesmo vetor \vec{L} representado na base de eixos do corpo rígido assume, como consequência de ser o tensor de inércia diagonal, a expressão simples

$$\vec{L} = \mathcal{I}_x \omega_x \hat{x} + \mathcal{I}_y \omega_y \hat{y} + \mathcal{I}_z \omega_z \hat{z}. \quad (3.223)$$

O movimento do corpo rígido livre se resume a entender como o momento angular, visto como um vetor constante no laboratório [Eq. (3.222)], se relaciona à rotação $\vec{\omega}$ do corpo [Eq. (3.223)], cuja dinâmica em seu referencial girante se dá pelas equações de Euler livres de torque [Eq. (3.221)]. Com o objetivo de desenvolver intuição, tratemos alguns casos particulares de movimento livre em ordem crescente de complexidade.

Movimento livre com rotação em torno de um eixo principal

No caso mais simples possível, o vetor velocidade angular possui ao menos uma de suas componentes constante, tomada como $\dot{\omega}_z = 0$ por concretude. Para que esse tipo de movimento ocorra, a terceira equação coloca como condição

$$\dot{\omega}_z = 0 \quad \Rightarrow \quad (i) \quad \mathcal{I}_x - \mathcal{I}_y = 0 \quad \text{ou} \quad (ii) \quad \omega_x \omega_y = 0. \quad (3.224)$$

Como os momentos principais de inércia são propriedades intrínsecas do corpo rígido, cujos valores não podemos escolher, só nos resta adotar o caso (ii) como possuidor de validade geral, implicando em $\omega_x = 0$ ou $\omega_y = 0$. As duas possibilidades levam a conclusões similares. Se $\omega_x = 0$, e portanto $\dot{\omega}_x = 0$, a primeira equação implica em $\dot{\omega}_x = 0 \Rightarrow \omega_y \omega_z = 0$, indicando que $\omega_y = 0$ ou $\omega_z = 0$. Adotando novamente o primeiro caso, encontramos o conjunto de soluções autoconsistentes $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ e $\omega_z = \omega_0 = cte$, ou seja, a velocidade angular é paralela a um dos eixos principais.

O mesmo resultado seria obtido para qualquer ω_s (com $s \in \{x, y, z\}$), de forma que, para um corpo rígido genérico, o vetor velocidade angular é constante apenas se estiver *alinhado* a um de seus eixos principais, i.e. $\vec{\omega} = \omega_s \hat{s}$. Vale nesse caso para o vetor velocidade angular a relação $\vec{L} = \mathcal{I}_s \omega_s \hat{s}$. Seguindo a escolha da Eq. (3.222), temos no referencial de laboratório

$$\vec{L} = \mathcal{I}_s \omega_s \hat{z}' = \mathcal{I}_s \omega_s \hat{s} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathcal{I}_s \vec{\omega}. \quad (3.225)$$

Os vetores \vec{L} e $\vec{\omega}$ são paralelos entre si e ao eixo principal \hat{s} em torno do qual gira o corpo rígido.

Perturbação do movimento livre com rotação em torno de um eixo principal

Nosso próximo passo se resume a entender como uma pequena alteração do regime visto acima modifica o movimento do corpo rígido. Supomos que o vetor velocidade angular aponte quase na direção de um eixo principal, mas que se desvie ‘um pouco’ do mesmo. Essa situação se descreve adicionando-se uma pequena perturbação $(\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z)$ à solução $(0, 0, \omega_0)$, com $\delta\omega_s \ll \omega_0$ (sendo esta a definição formal de ‘um pouco’), de maneira que

$$\begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_x \approx \delta\omega_x, \\ \omega_y \approx \delta\omega_y, \\ \omega_z \approx \omega_0 + \delta\omega_z. \end{cases} \quad (3.226)$$

Substituímos esse ‘estado’ do corpo rígido na Eq. (3.221) para obter a forma como o sistema evolui a partir desse ponto. As equações de movimento fornecem

$$\mathcal{I}_x \delta \dot{\omega}_x \approx (\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z) \omega_0 \delta \omega_y, \quad (3.227)$$

$$\mathcal{I}_y \delta \dot{\omega}_y \approx (\mathcal{I}_z - \mathcal{I}_x) \omega_0 \delta \omega_x, \quad (3.228)$$

$$\mathcal{I}_z \delta \dot{\omega}_z \approx 0, \quad (3.229)$$

em que mantivemos apenas termos de primeira ordem nas perturbações. Notemos que esse procedimento deixa de fornecer respostas corretas se $\omega_x \approx \omega_0$ ou $\omega_y \approx \omega_0$, possuindo validade apenas se $\omega_x, \omega_y \ll \omega_0$ para que nossa aproximação valha de maneira autoconsistente.

A Eq. (3.229) nos mostra que a velocidade angular dominante permanece de forma estável no valor inicial escolhido (i.e. não varia em primeira ordem, pois $\omega_z(t) \approx \omega_0 + \delta \dot{\omega}_z dt \approx \omega_0$), qualquer que seja este dentro do limite de validade de nossa aproximação. As demais equações fornecem essencialmente a mesma equação diferencial. Derivamos a Eq. (3.227) mais uma vez com relação ao tempo,

$$\delta \dot{\omega}_y \approx \frac{\mathcal{I}_x}{(\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z) \omega_0} \delta \ddot{\omega}_x, \quad (3.230)$$

e substituímos esse resultado na Eq. (3.228), obtendo

$$\mathcal{I}_y \frac{\mathcal{I}_x}{(\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z) \omega_0} \delta \ddot{\omega}_x \approx (\mathcal{I}_z - \mathcal{I}_x) \omega_0 \delta \omega_x, \quad (3.231)$$

que pode ser reescrita como

$$\delta \ddot{\omega}_x + \beta \delta \omega_x \approx 0, \quad \text{com } \beta = \frac{(\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z)(\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_z)}{\mathcal{I}_x \mathcal{I}_y} \omega_0^2. \quad (3.232)$$

Conhecemos bem essa equação diferencial. A forma de suas soluções depende crucialmente do sinal da constante β .

Se $\beta > 0$, a componente perturbada da velocidade angular *oscila* harmonicamente com frequência β e amplitude δA dada pela perturbação inicial em torno do valor nulo, trocando de sinal periodicamente. Caso $\beta < 0$, a amplitude da perturbação *diverge* exponencialmente no tempo, aumentando até que nossa aproximação perturbativa deixe de valer³⁸. Nesse caso, o importante fisicamente é notar que o eixo perturbado atinge em algum instante velocidade comparável à do eixo inicialmente dominante, uma vez que o obriga a desacelerar, e a energia rotacional deve oscilar entre pelo menos dois eixos do corpo rígido. Em resumo, temos

$$\beta > 0: \quad \omega_x = \delta A \cos(\sqrt{\beta}t) \quad \text{e} \quad \beta < 0: \quad \omega_x = \delta A \exp(\sqrt{|\beta}|t). \quad (3.233)$$

A estabilidade ou instabilidade do movimento está ligada aos valores relativos dos momentos principais de inércia do corpo, sendo determinada pelo sinal do produto $(\mathcal{I}_y - \mathcal{I}_z)(\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_z)$. É simples observar pelo sinal de β que a rotação é

$$\text{estável, se : } \begin{cases} \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_x > \mathcal{I}_z \\ \text{ou} \\ \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_x < \mathcal{I}_z \end{cases}, \quad \text{ou instável, se : } \begin{cases} \mathcal{I}_x > \mathcal{I}_z \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_y < \mathcal{I}_z \\ \text{ou} \\ \mathcal{I}_y > \mathcal{I}_z \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_x < \mathcal{I}_z \end{cases}. \quad (3.234)$$

³⁸Na verdade, há duas soluções exponenciais possíveis, uma crescente e outra decrescente no tempo. Para um condição inicial arbitrária, a função decrescente logo deixa de atuar e perde importância, sendo portanto a parte estável da perturbação. Por isso nos atemos aqui à solução exponencial crescente como mais relevante, por ser ela a causadora de instabilidade de longo prazo do sistema.

A instabilidade se torna mais crítica (i.e. a velocidade angular do eixo instável cresce mais rapidamente) com o aumento da frequência de rotação ω_0 e com a diferença entre os momentos principais de inércia. Caso estes sejam parecidos, a tendência é que a instabilidade diminua, de fato tornando-se desprezível no limite em que dois momentos de inércia se tornam iguais.

Assim, a rotação de um corpo rígido em torno de um único eixo principal é estável se o momento de inércia associado ao eixo é máximo ou mínimo, e instável se ocorrer em torno de seu eixo principal associado ao momento de inércia com valor intermediário³⁹. Apesar de parecer trivial à primeira vista, mesmo a rotação em torno de um único eixo principal do corpo rígido pode apresentar efeitos inesperados. Continuemos nosso caminho por mais intuição considerando o movimento livre de corpos rígidos com condições simplificadores.

Movimento livre de um pião esférico

A geometria mais simples possível envolve um corpo com três momentos principais de inércia idênticos, i.e. $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = \mathcal{I}_z$, também chamado de pião esférico. Notemos que nada há necessariamente de esférico no pião esférico, e muitas vezes nem mesmo algo de simétrico, bastando que seus três momentos principais de inércia, seja lá qual for sua distribuição de massa (mesmo não uniforme), sejam iguais. O cubo usado como exemplo anteriormente, com densidade de massa uniforme e girando em torno de seu centro de massa, é um pião esférico⁴⁰.

As equações de Euler para o movimento livre se tornam desacopladas e homogêneas nesse caso,

$$\dot{\omega}_x = 0, \quad \dot{\omega}_y = 0, \quad \dot{\omega}_z = 0, \quad (3.235)$$

significando que qualquer vetor velocidade angular inicial permanece constante no movimento, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 = cte$. O momento angular se torna paralelo à velocidade angular, pois

$$\vec{L} = \mathcal{I}_x \omega_x \hat{x} + \mathcal{I}_y \omega_y \hat{y} + \mathcal{I}_z \omega_z \hat{z} = \mathcal{I} (\omega_x \hat{x} + \omega_y \hat{y} + \omega_z \hat{z}) = \mathcal{I} \vec{\omega}_0, \quad (3.236)$$

em que $\mathcal{I} := \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = \mathcal{I}_z$. Esse resultado é consistente com o fato de que esse tipo de corpo rígido efetivamente não possui eixos principais, uma vez que qualquer escolha de eixos espaciais diagonaliza seu tensor de inércia. Não havendo direções espaciais favorecidas pelo corpo, a direcionalidade do problema fica definida pelo momento angular.

Movimento livre de um pião simétrico

O pião simétrico representa o caso intermediário entre a simplicidade de um pião esférico e a complexidade de um corpo rígido genérico. Ele se define pela igualdade de dois de seus momentos principais de inércia, tomados aqui por concretude como $\mathcal{I} := \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$. Esse tipo de corpo rígido possui apenas 1 eixo principal

³⁹Segundo a Wikipedia, esse efeito se tornou mais popularmente conhecido na década de 80 com o cosmonauta Vladimir Djanibekov, cuja demonstração pode ser encontrada no [youtube](#). Os americanos obviamente não utilizam esse nome para o efeito, lá conhecido (também segundo a Wikipedia) pelo curioso nome de “teorema da raquete de tênis” (provavelmente em homenagem a Douglas Adams), também demonstrado no [youtube](#) por outro personagem saído da mesma década de seu colega russo. É fácil demonstrar o efeito usando um livro fechado como corpo rígido.

⁴⁰Não é aconselhável tentar convencer seu psiquiatra de que um cubo é um pião esférico para rotações em torno do centro de massa.

‘efetivo’ (i.e. apenas uma direção de fato privilegiada por geometria e distribuição de massa), sendo os dois eixos restantes, associados aos momentos de inércia degenerados \mathcal{I} , de escolha arbitrária desde que residam no plano ortogonal ao eixo principal efetivo. Um cubo com ponto fixo de rotação em torno de um vértice (Seção 3.2.5, pág. 228) é um pião simétrico⁴¹.

As equações de Euler para o pião simétrico se escrevem

$$\mathcal{I}\dot{\omega}_x = (\mathcal{I} - \mathcal{I}_z)\omega_y\omega_z, \quad (3.237)$$

$$\mathcal{I}\dot{\omega}_y = -(\mathcal{I} - \mathcal{I}_z)\omega_x\omega_z, \quad (3.238)$$

$$\mathcal{I}_z\dot{\omega}_z = 0. \quad (3.239)$$

Segue imediatamente da última equação que a componente z da velocidade angular se conserva no movimento, e então podemos escrever $\omega_z = cte$, tomando-a como uma constante do movimento. Com essa solução, as demais equações se tornam

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \omega_0 \omega_y \\ \dot{\omega}_y = -\omega_0 \omega_x \end{cases}, \quad \text{com } \omega_0 = \frac{\mathcal{I} - \mathcal{I}_z}{\mathcal{I}}\omega_z = cte, \quad (3.240)$$

em que ω_0 é também uma constante do movimento. Derivando a primeira equação para obter $\ddot{\omega}_x = \omega_0 \dot{\omega}_y$ e substituindo $\dot{\omega}_y$ na segunda, temos como solução uma oscilação harmônica⁴²,

$$\ddot{\omega}_x + \omega_0^2 \omega_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_x(t) = \Omega \sin(\omega_0 t), \quad (3.241)$$

em que Ω e ω_0 fazem as vezes, respectivamente, de amplitude e frequência dessa oscilação. Empregando esse resultado de volta na Eq. (3.240), obtemos a solução completa

$$\begin{cases} \omega_x = \Omega \sin(\omega_0 t), \\ \omega_y = \Omega \cos(\omega_0 t), \\ \omega_z = \omega_z, \end{cases} \quad \text{i.e. } \vec{\omega}(t) = \Omega \left(\sin(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y} \right) + \omega_z \hat{z}. \quad (3.242)$$

O vetor $\vec{\omega}$ representa a velocidade angular instantânea do corpo rígido projetada em seus eixos principais.

Suas componentes variáveis no tempo são tais que $\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) = \Omega^2 = cte$, ou seja, evoluem como componentes de um vetor com módulo Ω girando em torno da direção \hat{z} . Em termos de versores cilíndricos, escreveríamos

$$\vec{\omega} = \Omega \hat{\rho}(t) + \omega_z \hat{z}, \quad \text{com } \hat{\rho}(t) = \sin(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y}. \quad (3.243)$$

Portanto, o movimento realizado pelo vetor $\vec{\omega}$ decomposto nos eixos do corpo rígido consiste numa *precessão* em torno do eixo principal efetivo \hat{z} com velocidade angular ω_0 . Ao desenhar um cone no espaço em torno de \hat{z} , o ângulo ξ de abertura do cone é constante e dado por $\tan \xi = \Omega/\omega_z$.

Já o momento angular decomposto nesses mesmos eixos vale

$$\vec{L} = \mathcal{I}\Omega \left(\sin(\omega_0 t)\hat{x} + \cos(\omega_0 t)\hat{y} \right) + \mathcal{I}_z\omega_z \hat{z} = L_\rho \hat{\rho}(t) + L_z \hat{z}, \quad \text{em que } \begin{cases} L_\rho = \mathcal{I}\Omega, \\ L_z = \mathcal{I}_z\omega_z. \end{cases} \quad (3.244)$$

⁴¹Nesse caso, os psiquiatras em geral acham natural a ideia de um cubo ser um pião simétrico, provavelmente por entenderem a palavra ‘simétrico’ na interpretação freudiana.

⁴²A solução completa envolve também uma função cosseno, cuja amplitude depende da condição inicial. Tomar, como fazemos, apenas a função seno como solução é equivalente a escolher os eixos espaciais de forma que a componente x da velocidade angular seja máxima no instante inicial. Assim, apenas para simplificar o tratamento matemático, o eixo \hat{z} é escolhido como o eixo principal efetivo do corpo rígido e o eixo \hat{x} , como a direção inicial da componente transversal da velocidade angular (lembramos que os eixos \hat{x} e \hat{y} são completamente arbitrários do ponto de vista da inércia do corpo).

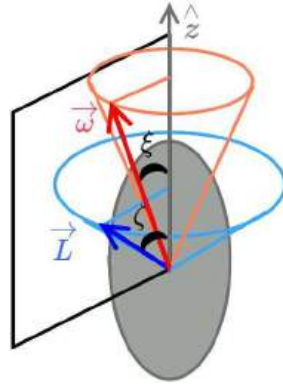


Figura 3.8: Evolução temporal dos vetores $\vec{\omega}$ e \vec{L} quando decompostos nos eixos principais do corpo rígido (solução das equações de Euler).

Ou seja, o momento angular também precessiona em torno do eixo principal \vec{z} com velocidade angular ω_0 . O cone varrido por \vec{L} possui ângulo ζ constante de abertura, dado por $\tan \zeta = L_\rho/L_z = \mathcal{I}\Omega/(\mathcal{I}_z\omega_z)$. Além disso, é simples ver a partir das Eq. (3.243) e (3.244) que $\vec{\omega}$, \vec{L} e \vec{z} pertencem ao mesmo plano, de forma que $\vec{\omega}$ e \vec{L} giram em sincronia em torno de \vec{z} (Fig. 3.8).

Mas como o movimento ocorre nos eixos *fixos no laboratório*? Por ser esse movimento simples, é possível nesse caso entender o movimento do corpo rígido sem a necessidade de se realizar iterativamente a decomposição de $\vec{\omega}(t)$ no referencial de laboratório a cada vez que se atualizam as orientações dos eixos principais do corpo rígido, como notamos anteriormente.

Notemos em vez disso que o momento angular permanece constante e aponta na direção \hat{z}' , i.e. $\vec{L} = L_0\hat{z}'$, seguindo a escolha de eixos da Eq. (3.222). De acordo com a Eq. (3.244), sua magnitude vale

$$L_0 = \sqrt{L_\rho^2 + L_z^2} = \sqrt{(\mathcal{I}\Omega)^2 + (\mathcal{I}_z\omega_z)^2}. \quad (3.245)$$

O eixo \hat{z} do corpo rígido permanece, portanto, a uma inclinação constante ζ relativa à direção \hat{z}' do momento angular, de acordo com a Eq. (3.244). O mesmo vale para a velocidade angular, localizada no mesmo plano com ângulo ξ constante de inclinação com relação ao eixo principal \hat{z} do corpo rígido.

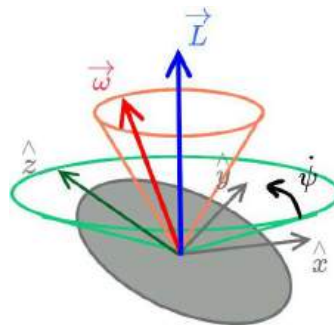


Figura 3.9: Movimento dos eixos principais do corpo rígido e evolução temporal do vetor $\vec{\omega}$ conforme observado no referencial inercial de laboratório.

Em termos da orientação do corpo rígido conforme caracterizada pelos ângulos de Euler, a Fig. 3.7 estabelece o ângulo ζ entre \hat{z} e \hat{z}' como sendo precisamente a coordenada θ de Euler, i.e.

$$\theta(t) = \zeta. \quad (3.246)$$

A evolução das demais coordenadas também pode ser vista a partir da mesma figura, já que o movimento de precessão do momento angular visto nas projeções de \hat{L} nos eixos do corpo rígido só pode ser devido à rotação do corpo em torno de seu eixo \hat{z} . Disso identificamos $\dot{\psi} = \omega_0$. Obtemos também esse resultado igualando a expressão encontrada para $\vec{\omega}$ na Eq. (3.243) à expressão genérica de $\vec{\omega}$ em termos dos ângulos de Euler, dada pela Eq. (3.195),

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\phi} \sin \zeta \sin \psi = \Omega \sin(\omega_0 t), \\ \omega_y = \dot{\phi} \sin \zeta \cos \psi = \Omega \cos(\omega_0 t), \\ \omega_z = \dot{\phi} \cos \zeta + \dot{\psi} = \omega_z, \end{cases} \quad (3.247)$$

em que usamos a solução $\theta = \zeta$ e $\dot{\theta} = 0$ da Eq. (3.246). Tiramos das duas primeiras equações a velocidade angular de rotação própria do corpo rígido,

$$\psi = \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \omega_0. \quad (3.248)$$

Esse resultado implica para a segunda e terceira equações em

$$\begin{cases} \dot{\phi} \sin \zeta = \Omega, \\ \dot{\phi} \cos \zeta = \omega_z - \omega_0. \end{cases} \quad (3.249)$$

Somando os quadrados dessas duas equações, obtemos

$$\dot{\phi} = \sqrt{\Omega^2 + (\omega_z - \omega_0)^2} \stackrel{\text{Eq. (3.240)}}{=} \sqrt{\Omega^2 + \left(1 - \frac{\mathcal{I} - \mathcal{I}_z}{\mathcal{I}}\right)^2 \omega_z^2} = \frac{1}{\mathcal{I}} \sqrt{(\mathcal{I}\Omega)^2 + (\mathcal{I}_z \omega_z)^2} = \frac{L_0}{\mathcal{I}}, \quad (3.250)$$

ou seja $\dot{\phi}$ também é constante, e representa a precessão do eixo \hat{z} do corpo rígido em torno de \vec{L} fixo no laboratório.

Em suma, o movimento do pião simétrico se caracteriza por duas constantes do movimento, que podem ser escolhidas como a magnitude do momento angular total L_0 e sua componente L_z no eixo principal efetivo do corpo rígido⁴³. A descrição do movimento dos eixos principais do corpo rígido se torna simples pelo uso dos ângulos de Euler (ϕ, θ, ψ) como coordenadas generalizadas. Sua evolução temporal segue

$$\dot{\phi} = \frac{L_0}{\mathcal{I}}, \quad \tan \theta = \frac{L_z}{L_0}, \quad \dot{\psi} = \left(1 - \frac{\mathcal{I}_z}{\mathcal{I}}\right) \frac{L_z}{\mathcal{I}}, \quad (3.251)$$

apresentando movimento de precessão ($\dot{\phi}$) e de rotação própria ($\dot{\psi}$) com velocidades angulares constantes. O sentido relativo dessas rotações depende da razão $\alpha = \mathcal{I}_z/\mathcal{I}$ entre os momentos de inércia. Para um corpo com $\alpha < 1$, chamado *prolato*, a precessão ocorre no mesmo sentido da rotação própria (anti-horário). No caso de um corpo *oblato*, para o qual $\beta > 1$, a precessão e rotação própria ocorrem em sentidos opostos⁴⁴. O ângulo de inclinação do eixo principal efetivo \hat{z} com relação ao momento angular permanece constante durante todo o movimento. Um observador fixo ao corpo rígido veria objetos ao redor moverem-se pela superposição de dois movimentos periódicos (rotação própria e precessão), embora a composição desses movimentos só seja em si periódica se suas frequências forem comensuráveis.

⁴³Outras escolhas equivalentes de constantes do movimento são o ângulo de inclinação θ do corpo rígido, sua velocidade angular de precessão $\dot{\phi}$ ou de rotação própria ω_0 etc.

⁴⁴Veja uma simulação do movimento do pião simétrico [nesta página](#).

Movimento livre no caso geral

As características gerais do movimento livre de um corpo rígido qualquer podem ser entendidas utilizando-se leis de conservação, numa construção geométrica devida à Poincaré.

Como vimos, o momento angular e a energia cinética [Eq. (3.134)] seguem expressões simples para rotações decompostas nos eixos principais do corpo rígido. Em especial, a magnitude L do momento angular é uma constante para o movimento livre. Essas duas quantidades impõem para as componentes da velocidade angular nos eixos do corpo rígido as condições

$$2K = \mathcal{I}_x \omega_x^2 + \mathcal{I}_y \omega_y^2 + \mathcal{I}_z \omega_z^2, \quad (3.252)$$

$$L^2 = \mathcal{I}_x^2 \omega_x^2 + \mathcal{I}_y^2 \omega_y^2 + \mathcal{I}_z^2 \omega_z^2. \quad (3.253)$$

Se imaginarmos o trio $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ como coordenadas no ‘espaço de configurações’ dos vetores $\vec{\omega}$, então essas equações restringem os vetores que podem ser solução do problema a habitarem ao mesmo tempo as superfícies de dois elipsoides, seguindo portanto a curva obtida pela *interseção* deles. Essas curvas são fechadas e formam trajetórias periódicas no sistema de eixos do corpo rígido.

No referencial de laboratório, no qual o vetor momento angular é constante, a energia cinética fornece

$$2K = \vec{L} \cdot \vec{\omega}, \quad (3.254)$$

implicando que o vetor $\vec{\omega}$ possui projeção constante no momento angular. Geometricamente, se os dois vetores forem colocados sobre a mesma origem, isso significa que a extremidade do vetor $\vec{\omega}$ existe sobre um plano perpendicular a \vec{L} . O ponto efetivamente apontado por $\vec{\omega}$ no plano se encontra sobre a curva criada pela interseção entre esse plano e o elipsoide da Eq. (3.252).

Na verdade, o plano da Eq. (3.254) é tangente ao elipsoide, tocando-o em apenas um ponto, fato tornado aparente reescrevendo-se a Eq. (3.254) como

$$\vec{L} = \frac{\partial 2K}{\partial \omega_x} \hat{x} + \frac{\partial 2K}{\partial \omega_y} \hat{y} + \frac{\partial 2K}{\partial \omega_z} \hat{z} = 2\nabla_{\omega} K. \quad (3.255)$$

Como o elipsoide da Eq. (3.252) é uma curva em que $2K = cte$, segue que \vec{L} , dado por seu gradiente, precisa ser normal ao elipsoide, ou seja, o plano da Eq. (3.254) é tangente a ele. A curva desenhada no plano não precisa ser fechada, podendo assumir formas bastante complexas.

Com essa construção geométrica, o movimento do corpo rígido livre se resume ao movimento de um elipsoide [Eq. (3.252)], com eixos principais dados pelos eixos do corpo rígido, rolando sobre um plano [Eq. (3.254)] de maneira tal que a curva desenhada sobre o elipsoide é dada por sua interseção com um segundo elipsoide [Eq. (3.253)].

Um exemplo desse tipo de movimento complexo foi observado no asteroide Toutatis (asteroide 4179) pelo radar do centro Goldstone para comunicações espaciais da Nasa enquanto aquele passava relativamente próximo à Terra (~ 10 vezes a distância Terra-Lua), em 1992 (Veja a reconstrução do momento angular de Toutatis [nesta página na internet](#)). Ao contrário da grande maioria dos asteroides, o momento angular de Toutatis (seta violeta da figura) não se encontra alinhado⁴⁵ a um eixo principal (linhas verde, rosa e azul),

⁴⁵Forças de maré tendem a sincronizar a rotação e a translação de corpos celestes, impondo perdas diferentes a tipos distintos

assim como a velocidade angular (seta amarela). Como consequência, um observador na superfície desse asteroide jamais veria a trajetória aparente de uma estrela se repetir no céu, nem teria a percepção de um polo norte ou sul celeste como temos na superfície da Terra.

Movimento livre composto: Gato em queda livre

Apesar de bastante elementar, o formalismo desenvolvido até aqui nos permite entender o movimento geral de corpos rígidos mais complicados. Um exemplo disso é o famoso gato que sempre cai de pé, mesmo sendo solto a partir do repouso completo. A pergunta natural que nos fazemos nesse caso é: como pode o gato girar seu corpo mesmo possuindo momento angular nulo?

A resposta está na composição de momentos angulares parciais de um corpo composto. Se o gato não possui momento angular inicial, então ele só pode induzir rotações mudando sua forma geométrica. A rotação relativa entre as partes do corpo do gato decorre então da manutenção do momento angular total nulo. Curiosamente, a maneira como o gato induz rotação é também aquela a minimizar o gasto de energia (caso em que se torna um problema de controle). Uma ameba se move num meio viscoso seguindo princípios análogos (i.e. movimento gerado por deformação).



Figura 3.10: Queda livre de um gato, em fotomontagem do séc. XIX.

O modelo mais elementar capaz de captar a essência do movimento de um gato em queda livre (modelo de Kane-Scher) considera ser seu corpo formado por dois cilindros conectados por um ponto, localizado sobre sua coluna vertebral, que pode girar mas não se torcer (ou o gato só seria capaz de realizar o truque uma vez em sua breve vida). O gato é erguido de barriga para cima por alguém que segura suas patas, tendo assim suas costas arqueadas na configuração corporal inicial. Na etapa mais importante do processo, o gato que acaba de ser solto reorienta seu corpo no Espaço ‘rebolando’ em torno do ponto de junção em sua coluna, induzindo dessa maneira a rotação que leva sua barriga para baixo. Já na configuração desejada pelo gato, que é essencialmente a configuração inicial girada de π por um eixo longitudinal a seu corpo, o gato posiciona suas pernas para baixo de forma a se preparar para o contato com o chão. O modelo nos revela que esse bicho deve possuir (i) uma coluna vertebral bastante flexível e (ii) músculos muito potentes para executar essa manobra.

O movimento de reorientação do corpo do gato envolve induzir rotações nos dois cilindros conectados que modelam seu corpo. O gato contrai sequencialmente os músculos unindo as partes anterior e posterior de seu corpo (como se estivesse ‘rebolando’). Isso produz os vetores momento angular \vec{L}_{back} e \vec{L}_{front} ilustrados na

de movimento. Por isso, por exemplo, a Lua possui período de rotação própria igual ao período de translação em torno da Terra. O mesmo efeito ocorre ao longo de bilhões de anos nos asteroides do sistema solar, dissipando os modos de rotação com maior atrito: no longo prazo, restam apenas movimentos em torno de eixos principais. Toutatis é uma exceção a isso por conta de sua velocidade angular de rotação especialmente baixa, o que torna efeitos dissipativos mais lentos do que a média dos demais asteroides. O estado de rotação de Toutatis representa de maneira mais fidedigna a rotação típica esperada de um asteroide logo após sua formação, na qual estão envolvidas muitas colisões que tendem a produzir movimentos bastante complexos.

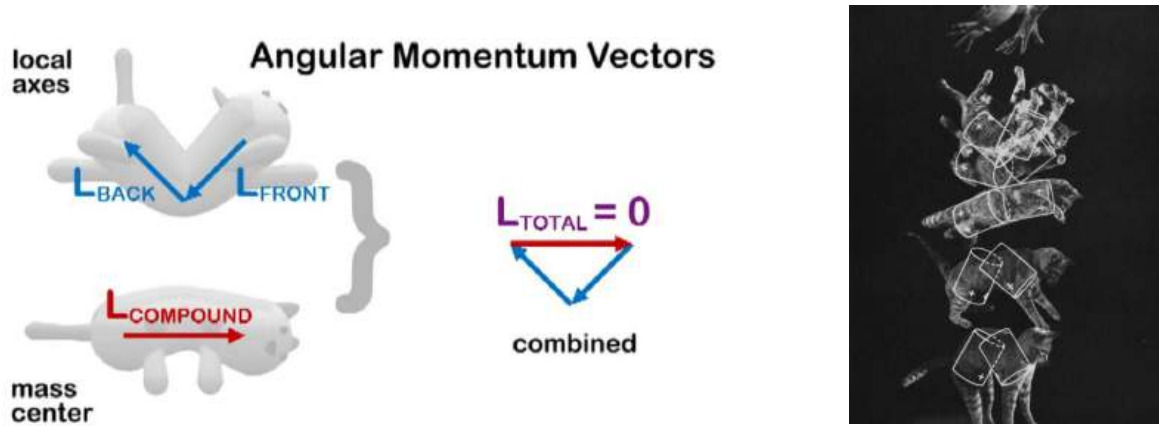


Figura 3.11: Esquerda: Componentes parciais de momento angular produzidas por um gato no movimento de reorientação de seu corpo. Figura retirada [deste vídeo](#). Direita: Etapas do movimento do gato e sua correspondência no modelo de Kane-Scher (1969).

Fig. 3.11. Mas o momento angular total de seu corpo é nulo por construção, o que induz a criação do vetor momento angular $\vec{L}_{\text{compound}}$ da figura, responsável por reorientar o corpo do gato da configuração inicial ‘de barriga para cima’ para a configuração final desejada ‘de barriga para baixo’. Observemos como as rotações ocorrem aproximadamente em torno de eixos principais do corpo do gato ou de partes dele, tornando simples compreender as rotações induzidas pelos momentos angulares produzidos (pois são paralelos).

Conhecendo o mecanismo por trás da queda de um gato, torna-se possível desenvolver configurações de arremesso (e.g. fornecer-lhe momento angular inicial) que tornem impossível ao gato cair de pé (um tema de pesquisa com grande potencial de ser agraciado com o prêmio IgNobel).

3.4.4 Orientação temporal do corpo rígido na formulação de Euler

A formulação de Euler para o movimento do corpo rígido encontra a dificuldade operacional de se relacionar a solução do movimento, obtida relativamente aos eixos principais do corpo uma vez encontrado $\vec{\omega}(t)$ [Eq. (3.220)], à evolução de sua orientação no espaço em termos das coordenadas de Euler (ϕ, θ, ψ) para seus eixos principais. Em outras palavras, como conectar o vetor velocidade angular – variável no tempo e determinado apenas quando projetado nos eixos girantes do corpo rígido – à evolução temporal da orientação do corpo rígido? Coloquemos o problema geral em perspectiva.

Por ser um vetor objeto definido independentemente da escolha de representação, a relação entre sua descrição nos eixos fixos ao laboratório e nos eixos fixos ao corpo rígido difere precisamente na escolha de qual parte da representação vetorial é variável no tempo: se suas componentes ou seus versores de base.

Vamos denotar nesta seção componentes e versores vistos no referencial do laboratório como y^α e \hat{y}_α ; quando decompostos nos eixos principais do corpo rígido, vamos denotar essas mesmas quantidades por x^α e \hat{x}_α . A posição \vec{r} de um elemento infinitesimal do corpo rígido se escreve, nos dois referenciais, como⁴⁶

$$\vec{r}(t) = y^\alpha(t)\hat{y}_\alpha = x^\alpha\hat{x}_\alpha(t). \quad (3.256)$$

⁴⁶Utilizamos aqui a convenção de Einstein de entender índices repetidos como somatórios sobre todos os valores dos índices.

Observemos como nos eixos fixos do laboratório (referencial inercial), apenas as componentes do vetor posição variam, i.e. $y^\alpha = y^\alpha(t)$ e $\hat{y}_\alpha = cte$; já quando decompostas nos eixos do corpo rígido, as componentes permanecem fixas (motivo pelo qual o tensor de inércia é constante!) e são os versores que variam, i.e. $x^\alpha = cte$ e $\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha(t)$.

A operação a traduzir as componentes entre os dois referenciais é uma rotação, escrita em termos de um tensor R_β^α dependente dos ângulos de Euler⁴⁷, i.e. $R_\beta^\alpha = R_\beta^\alpha(\phi, \theta, \psi)$. De acordo com a Eq. (3.181), uma rotação se realiza como

$$x^\alpha = R_\beta^\alpha(t)y^\beta(t), \quad \text{ou } y^\alpha(t) = (R_\beta^\alpha(t))^{-1}x^\beta = R_\alpha^\beta(t)x^\beta, \quad (3.257)$$

pois $(R_\beta^\alpha)^{-1} = R_\alpha^\beta$, de forma que a dependência temporal da configuração do corpo rígido se encontra, podemos pensar, na própria *matriz de transformação*. Nessa interpretação, a dinâmica se reduz a encontrar a matriz de rotação capaz de levar em qualquer instante t os eixos do laboratório nos eixos fixos ao corpo rígido. Ela reúne, por assim dizer, o efeito ‘integrado’ de todas as rotações infinitesimais realizadas sobre os eixos fixos ao corpo rígido até o instante t .

Faz-se necessário, então, determinar a forma como os versores fixos ao corpo rígido evoluem. Para isso, notemos que a operação de rotação agindo sobre os versores se dá pela inversa da rotação agindo sobre as componentes, uma vez que, pela propriedade de ortogonalidade de R_β^α , vale $R_\gamma^\alpha R_\beta^\gamma = \delta^{\alpha\beta}$, e podemos escrever

$$\vec{r}(t) = y^\alpha(t)\hat{y}_\alpha = y^\alpha(t)\delta_\alpha^\beta\hat{y}_\beta = y^\alpha(t)R_\alpha^\gamma(t)R_\gamma^\beta(t)\hat{y}_\beta = x^\gamma\hat{x}_\gamma(t), \quad (3.258)$$

da qual identificamos

$$\hat{x}_\gamma(t) = R_\gamma^\beta(t)\hat{y}_\beta, \quad (3.259)$$

ou seja, a soma ocorre dessa vez no índice superior. A variação temporal desses versores ocorre de acordo com

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_\alpha(t) = \frac{d}{dt}\left(R_\alpha^\beta(t)\right)\hat{y}_\beta, \quad (3.260)$$

relação que pode ser colocada de volta no referencial do corpo rígido pelo uso da transformação inversa da Eq. (3.259), i.e. $\hat{y}_\beta = R_\gamma^\beta(t)\hat{x}_\gamma(t)$,

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_\alpha(t) = \frac{d}{dt}\left(R_\alpha^\beta(t)\right)R_\gamma^\beta(t)\hat{x}_\gamma(t) := \omega_{\alpha\gamma}(t)\hat{x}_\gamma(t), \quad \text{em que } \omega_{\alpha\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\left(R_\alpha^\beta(t)\right)R_\gamma^\beta(t). \quad (3.261)$$

A evolução temporal que buscamos está codificada na matriz $\omega_{\alpha\gamma}$. Essa matriz é anti-simétrica, i.e. $\omega_{\alpha\gamma} = -\omega_{\beta\gamma}$, uma vez que

$$R_\gamma^\alpha R_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(R_\gamma^\alpha\right)R_\beta^\gamma + R_\gamma^\alpha\frac{d}{dt}\left(R_\beta^\gamma\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{\gamma\alpha} + \omega_{\alpha\gamma} = 0. \quad (3.262)$$

Disso segue que todos os elementos diagonais de $\omega_{\alpha\gamma}$ são nulos, e que apenas 3 parâmetros independentes fora da diagonal são necessários para definir esse tensor. Isso nos permite escrevê-lo como um tensor com um único índice, i.e. um vetor, com o auxílio do tensor de permutação $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ (que é totalmente antissimétrico), na forma

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma}. \quad (3.263)$$

⁴⁷A representação matricial desse tensor corresponde à matriz $\mathbf{A}_e(\phi, \theta, \psi)$ da Eq. (3.183)

É fácil ver que $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{23}$, $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{31}$ e $\omega_3 = \frac{1}{2}\omega_{12}$. O tensor de permutação possui propriedades úteis e simples que nos permitem inverter essa relação. Multiplicando os dois lados da equação por $\varepsilon_{\alpha\eta\xi}$ e somando no índice i , obtemos

$$\varepsilon_{\alpha\eta\xi}\omega_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\eta\xi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\delta_\eta^\beta\delta_\xi^\gamma - \delta_\eta^\gamma\delta_\xi^\beta)\omega_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\omega_{\eta\xi} + \omega_{\xi\eta}) = \omega_{\eta\xi}, \quad (3.264)$$

ou, renomeando índices,

$$\omega_{\alpha\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_\beta. \quad (3.265)$$

Substituindo essa forma simplificada para o tensor $\omega_{\alpha\gamma}$ na Eq. (3.261), obtemos

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_\alpha(t) = \omega_{\alpha\gamma}(t)\hat{x}_\gamma(t) = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\omega_\alpha(t)\hat{x}_\gamma(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{x}_\alpha = \vec{\omega}(t) \times \hat{x}_\alpha(t), \quad (3.266)$$

ou seja, ω_α são precisamente as componentes do vetor velocidade angular nos eixos do corpo rígido, encontradas em princípio como solução das equações de Euler. Portanto, uma vez determinado $\vec{\omega}(t)$, a evolução da orientação do corpo rígido no espaço é dada, de acordo com a Eq. (3.261), pela equação diferencial

$$\omega_{\alpha\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\left(R_\alpha^\beta(t)\right)R_\gamma^\beta(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(R_\alpha^\beta(t)\right) = \omega_{\alpha\gamma}(t)R_\beta^\gamma(t), \quad (3.267)$$

em que a matriz $\omega_{\alpha\gamma}(t)$ é construída a partir de $\vec{\omega}(t)$ segundo a Eq. (3.265). Em representação matricial, a solução para $\mathbf{R}(t) \equiv R_\beta^\alpha(t)$ envolve a exponencial da matriz correspondente a $\omega_{\alpha\gamma}(t)$, em cujo cálculo é importante manter a ordem temporal na série, pois essas matrizes não comutam em tempos diferentes.

Essas considerações tornam o movimento do corpo rígido em princípio completamente solúvel pelo método de Euler. O roteiro se resume a (i) obter as componentes de $\vec{\omega}(t)$ nos eixos do corpo rígido através das equações de Euler [Eq. (3.220)] e (ii) aplicá-las para determinar a matriz de rotação $R_j^k(t)$ capaz de fornecer a orientação instantânea do corpo rígido conforme codificada nos ângulos de Euler [Eq. (3.267)].

3.5 Formulação lagrangiana da dinâmica dos corpos rígidos

A formulação lagrangiana para o movimento do corpo rígido traz a vantagem de considerar desde o início a evolução das coordenadas generalizadas tomadas como os ângulos de Euler, prescindindo da transformação entre referenciais para descrever a dinâmica no laboratório. O sistema de eixos fixos ao corpo rígido ainda se faz útil para simplificar a expressão da energia cinética, porém não se torna mais necessário resolver as equações de movimento em seu referencial.

Escrevamos primeiramente a lagrangiana do corpo rígido. Em termos de $\vec{\omega}$ decomposto no sistema de eixos principais do corpo rígido, a energia cinética se escreve

$$K = \frac{1}{2}\mathcal{I}_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega_z^2. \quad (3.268)$$

Mas, segundo a Eq. (3.195), as componentes de ω_s se relacionam aos ângulos de Euler segundo as expressões

$$\omega_x = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \quad \omega_y = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \quad \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad (3.269)$$

o que nos permite escrever, por substituição direta, a energia cinética como função das coordenadas generalizadas (ϕ, θ, ψ) ,

$$K = \frac{1}{2}\mathcal{I}_x(\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_y(\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2. \quad (3.270)$$

Sendo a energia potencial do sistema $U(\phi, \theta, \psi)$, a lagrangiana se escreve como

$$\mathcal{L}(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}\mathcal{I}_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega_z^2 - U(\phi, \theta, \psi), \quad (3.271)$$

com velocidades angulares dadas pela Eq. (3.269).

3.5.1 Obtenção das equações de Euler a partir das equações de Lagrange

As equações de movimento obtidas a partir da lagrangiana da Eq. (3.271) possuem, no caso geral, forma um tanto complicada. Uma delas, porém, deve corresponder a uma das equações de Euler para o corpo rígido [Eq. (3.220)], visto que a coordenada generalizada ψ se refere, ao contrário das demais, a rotações em torno de um eixo principal do corpo (o eixo escolhido como \hat{z}).

A equação de Lagrange para essa coordenada, dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = 0, \quad (3.272)$$

fornece resultado bem simples se notarmos a partir da Eq. (3.269) as identidades

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_y \quad \text{e} \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = -\omega_x, \quad (3.273)$$

que nos permitem escrever a equação de Lagrange para a coordenada $\psi(t)$ na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= \mathcal{I}_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \psi} + \mathcal{I}_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \psi} + \mathcal{I}_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \psi} - \frac{\partial U}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\mathcal{I}_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\psi}} \right) \\ &= \mathcal{I}_x \omega_x \omega_y - \mathcal{I}_y \omega_y \omega_x - \frac{\partial U}{\partial \psi} - \mathcal{I}_z \frac{d}{dt} \omega_z. \end{aligned} \quad (3.274)$$

Reconhecendo $-\partial U/\partial \psi = \tau_z$ como o torque externo associado ao ângulo ψ , obtemos a equação de Lagrange

$$\mathcal{I}_z \dot{\omega}_z - (\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_y) \omega_x \omega_y = \tau_z, \quad (3.275)$$

que possui a mesma forma da equação de Euler correspondente.

As demais equações de Lagrange não fornecem equações de Euler pelo fato de que as coordenadas ϕ e θ não correspondem a rotações em torno de eixos principais do corpo rígido. Essas outras equações podem ser encontradas a partir da Eq. (3.275) por simples permutação de eixos, uma vez que é arbitrária a escolha de que eixo principal é escolhido como \hat{z} .

3.5.2 Primeiras integrais

A análise da função energia cinética nos permite obter *insight* geral sobre algumas características do movimento de corpos rígidos. De fato, a propriedade mais chamativa da Eq. (3.270) é sua independência com relação à coordenada ϕ . Isso significa que, caso a energia potencial também não dependa de ϕ (i.e. se U possuir simetria de rotação em torno da vertical, independentemente portanto da orientação da linha de nodos $\hat{\ell}$), temos imediatamente uma primeira integral associada ao momento generalizado $p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$, já que a coordenada ϕ é cíclica,

$$\dot{p}_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\phi = \text{cte}. \quad (3.276)$$

Cálculo direto usando a Eq. (3.271) leva nesse caso à lei de conservação

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{I}_x \omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial \dot{\phi}} + \mathcal{I}_y \omega_y \frac{\partial \omega_y}{\partial \dot{\phi}} + \mathcal{I}_z \omega_z \frac{\partial \omega_z}{\partial \dot{\phi}}, \quad (3.277)$$

que também pode ser escrita, pelo uso da Eq. (3.269), como

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mathcal{I}_x \omega_x \sin \theta \sin \psi + \mathcal{I}_y \omega_y \sin \theta \cos \psi + \mathcal{I}_z \omega_z \cos \theta. \quad (3.278)$$

Notemos que, como o momento angular decomposto nos eixos principais do corpo rígido se escreve $\vec{L} = \mathcal{I}_x \omega_x \hat{x} + \mathcal{I}_y \omega_y \hat{y} + \mathcal{I}_z \omega_z \hat{z}$, a transformação para os eixos do referencial de laboratório, pelo uso da matriz \mathbf{A}_e^T [Eq. (3.183)], i.e. $\mathbf{L}' = \mathbf{A}_e^T \mathbf{L}$, nos fornece para a componente vertical $L_{z'}$ do momento angular a expressão⁴⁸

$$L_{z'} = \mathcal{I}_x \omega_x \sin \theta \sin \psi + \mathcal{I}_y \omega_y \sin \theta \cos \psi + \mathcal{I}_z \omega_z \cos \theta, \quad (3.279)$$

de forma que podemos identificar fisicamente o momento generalizado p_ϕ como o momento angular para rotações em torno da vertical definida no laboratório, i.e. $p_\phi = L_{z'}$.

Podemos ainda escrever a Eq. (3.277) explicitamente em termos dos ângulos de Euler utilizando a Eq. (3.269), obtendo

$$p_\phi = L_{z'} = \dot{\phi} [(\mathcal{I}_x \sin^2 \psi + \mathcal{I}_y \cos^2 \psi) \sin^2 \theta + \mathcal{I}_z \cos^2 \theta] + \dot{\theta} (\mathcal{I}_x - \mathcal{I}_y) \sin \theta \cos \psi \sin \psi + \dot{\psi} \mathcal{I}_z \cos \theta. \quad (3.280)$$

Essa expressão se simplifica em casos especiais (e.g. pião simétrico com $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$). Nos demais casos, os momentos angulares associados a rotações em torno dos demais ângulos de Euler (θ e ψ) contam com termos ‘centrífugos’ na energia potencial efetiva causados pela dependência da energia cinética nessas coordenadas.

A segunda característica interessante dessa lagrangiana (ou melhor, da energia cinética), é a forma como se dá sua dependência na coordenada ψ . Notemos que os termos cruzados dos quadrados ω_x^2 e ω_y^2 [Veja novamente a Eq. (3.269)] são opostos, de maneira que, ao somar esses quadrados, obtemos

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 = 2(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2), \quad (3.281)$$

ou seja, a dependência em ψ desaparece, o que tornaria cíclica essa coordenada se pudéssemos somar esses termos desse jeito e se a energia potencial também não dependesse desse ângulo. Isso nos motiva a definir $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}_y = \mathcal{I} + \Delta \mathcal{I}$ (i.e. $\Delta \mathcal{I} := \mathcal{I}_y - \mathcal{I}_x$) para escrever a energia cinética como

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega_x^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{I} + \Delta \mathcal{I}) \omega_y^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_z \omega_z^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{I} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{I} \omega_y^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_z \omega_z^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{I} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \Delta \mathcal{I} (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I}_z (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \end{aligned} \quad (3.282)$$

da qual vemos ser a dependência em ψ toda dada pela diferença $\Delta \mathcal{I}$ entre os momentos principais de inércia nas direções ortogonais a \hat{z} .

⁴⁸Notemos que essa expressão pode também ser escrita como $L_{z'} = \sin \theta (L_x \sin \psi + L_y \cos \psi) + L_z \cos \theta$, sendo portanto a componente vertical do momento angular dada pela combinação de projeções das componentes (i) L_z no eixo principal efetivo do corpo rígido e (ii) $L_\rho := L_x \sin \psi + L_y \cos \psi$ na direção perpendicular à linha de nodos no plano $\mathcal{O}xy$.

Para um pião simétrico ($\Delta\mathcal{I} = 0$), portanto, o momento generalizado $p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}$ (igual, como vimos, ao momento angular associado ao eixo principal z , i.e. $p_\psi = L_z$), também é conservado caso a energia potencial não dependa da orientação ψ do corpo rígido em seu movimento de rotação própria. Temos nesse caso

$$p_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \mathcal{I}_z(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \stackrel{\text{Eq. (3.269)}}{=} \mathcal{I}_z\omega_z = L_z, \quad (3.283)$$

de forma que também a componente da velocidade angular ω_z (uma composição da rotação própria $\dot{\psi}$ e da precessão $\dot{\phi}$ vista no referencial do corpo rígido) é constante.

Por fim, para sistemas conservativos vale ainda a conservação da energia mecânica E , calculada como

$$\begin{aligned} E = h(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_x}\omega_x + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_y}\omega_y + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_z}\omega_z - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{I}_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega_z^2 + U(\phi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (3.284)$$

Em várias situações, momentos eventualmente conservados (e.g. p_ϕ ou p_ψ) podem ser utilizados para eliminar coordenadas da lagrangiana, diminuindo a dimensionalidade do problema matemático, como já bem sabemos.

3.5.3 Pião de brinquedo

Um exemplo bem conhecido de corpo rígido em rotação é o pião de brinquedo. O pião é em geral arremessado ao chão ao mesmo tempo em que um barbante preso a ele se desenrola para lhe fornecer movimento de rotação própria. Ao atingir o chão, a ponta do pião o sustenta, sendo fina com o intuito de minimizar o atrito de contato com o chão. Num pião real, seu centro de massa se movimenta como resultado do atrito, e seu momento angular se perde gradativamente até parar. No entanto, é possível observar em instantes intermediários, entre o breve transiente que se segue à aterrissagem e os momentos finais de desaceleração do pião, um tipo de movimento relativamente simples, no qual a ponta do pião permanece praticamente em repouso com relação ao solo e o momento angular é modificado apenas pelo torque da força peso atuando sobre seu centro de massa. É desse caso altamente particular (simplificado e com atrito desprezível) que tratamos aqui⁴⁹.

O movimento do pião se restringe então a uma rotação pura em torno do ponto de contato com o solo, tomado como origem comum de nossos sistemas de coordenadas (tanto do laboratório quanto fixo ao corpo rígido). Os momentos principais de inércia relevantes nesse caso devem ser calculados com relação a essa origem. Por hipótese, assumimos o caso típico de um pião construído para possuir apenas um eixo principal efetivo de inércia (pião simétrico), tomado como o eixo \hat{z} , com momento de inércia correspondente \mathcal{I}_z , e dois momentos principais de inércia degenerados, $\mathcal{I} := \mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$, relativos ao plano ortogonal à direção \hat{z} . Como os eixos nesse plano não seguem direções preferenciais impostas pelo corpo rígido, escolhemos o eixo \hat{x} como aquele apontado pela velocidade angular transversa no instante inicial, de forma que, por convenção, $\vec{\omega}(0) = \omega_x(0)\hat{x} + \omega_z(0)\hat{z}$ define a nomenclatura dos eixos principais no plano $\mathcal{O}xy$.

⁴⁹Fica como desafio ao(à) leitor(a) considerar outras etapas do movimento!



Figura 3.12: Depois de participarem da invenção da mecânica quântica, Wolfgang Pauli (esquerda) e Niels Bohr (direita) reúnem-se para enfrentarem o próximo desafio intelectual: entender o spin de um pião de brinquedo.

Lagrangiana e primeiras integrais

O sistema de eixos do laboratório é escolhido, como antes, tal que a vertical local corresponda à direção \hat{z}' . A energia potencial do pião, assumido com densidade uniforme de massa, é dada simplesmente por

$$U = \int gz' dm = mgl \cos \theta, \quad (3.285)$$

em que $\ell \cos \theta = \int z' dm$ é a coordenada z' do centro de massa no referencial de laboratório, já escrita em função da distância ℓ do centro de massa à ponta do pião. Assim, assumimos que seu centro de massa se encontra sobre o único eixo principal bem definido do corpo (aqui chamado de ‘eixo efetivo’).

Como $\Delta\mathcal{I} = 0$ para o pião simétrico, usamos a Eq. (3.282) para a energia cinética, obtendo a lagrangiana

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z \omega_z^2 - mgl \cos \theta. \quad (3.286)$$

As coordenadas cíclicas ϕ e ψ criam, como vimos, duas projeções conservadas do momento angular, $p_\phi = L_{z'}$ [Eq. (3.280)] e $p_\psi = L_z$ [Eq. (3.283)], ou seja, a componente vertical $L_{z'}$ do momento angular (conforme vista no laboratório) e a componente L_z do momento angular projetada no eixo principal efetivo do corpo rígido,

$$L_{z'} = (\mathcal{I} \sin^2 \theta + \mathcal{I}_z \cos^2 \theta) \dot{\phi} + \mathcal{I}_z \cos \theta \dot{\psi}, \quad (3.287)$$

$$L_z = \mathcal{I}_z (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}). \quad (3.288)$$

Fisicamente, os movimentos de precessão $\dot{\phi}$ e rotação própria $\dot{\psi}$ são determinados por essas primeiras integrais. Em particular, vemos a partir da Eq. (3.288), assim como já visto na Eq. (3.283), que no referencial de corpo rígido também a velocidade angular $\omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}$ [Eq. (3.269)] precisa se conservar, pois

$$L_z = \mathcal{I}_z (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \mathcal{I}_z \omega_z = cte \quad \Rightarrow \quad \omega_z = \frac{L_z}{\mathcal{I}_z} = cte, \quad (3.289)$$

de forma que o termo $\mathcal{I}_z \omega_z^2 = \frac{L_z^2}{2\mathcal{I}_z}$ da energia cinética é também uma constante. Isso elimina $\dot{\psi}$ da lagrangiana, uma vez que esta pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mathcal{I}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{L_z^2}{2\mathcal{I}_z} - mgl \cos \theta. \quad (3.290)$$

Mas as Eqs. (3.287) e (3.288) estabelecem que os ângulos de Euler ϕ e ψ devem variar conjuntamente de maneira a manterem constantes $L_{z'}$ e L_z . Podemos então utilizá-las para escrever $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ como funções das quantidades conservadas $L_{z'}$ e L_z e da coordenada θ . De fato, a Eq. (3.287) pode ser escrita, pelo uso da Eq. (3.288), como $L_{z'} = \mathcal{I}\dot{\phi}\sin^2\theta + L_z\cos\theta$; isolando $\dot{\phi}$ e utilizando o resultado de volta na Eq. (3.288) para isolar $\dot{\psi}$, obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{L_{z'} - L_z \cos \theta}{\mathcal{I} \sin^2 \theta}, \quad (3.291)$$

$$\dot{\psi} = \omega_z - \dot{\phi} \cos \theta = \frac{L_z}{\mathcal{I}_z} - \frac{L_{z'} - L_z \cos \theta}{\mathcal{I} \sin^2 \theta} \cos \theta. \quad (3.292)$$

Essas equações já são as soluções procuradas para as coordenadas $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ como funções de $\theta(t)$, podendo ser em princípio integradas formalmente no tempo para se obter $\phi(t)$ e $\psi(t)$ uma vez determinado $\theta(t)$. Além disso, a Eq. (3.291) serve para eliminar $\dot{\phi}$ da lagrangiana, tornando-a unidimensional,

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2 + \frac{(L_{z'} - L_z \cos \theta)^2}{2\mathcal{I} \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta, \quad (3.293)$$

em que o termo constante $L_z^2/(2\mathcal{I}_z)$ foi ignorado por ser irrelevante para a dinâmica. O primeiro termo se refere à energia cinética e os demais, a uma energia potencial efetiva, por se tratar de um sistema com lagrangiana independente do tempo.

Para ver isso mais facilmente, calculemos a expressão para a energia E como constante do movimento [Eq. (3.284)] usando as demais grandezas conservadas para obter

$$\begin{aligned} E = h(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &= \frac{1}{2}\mathcal{I}(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\mathcal{I}_z\omega_z^2 + mgl \cos \theta \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2 + \frac{(L_{z'} - L_z \cos \theta)^2}{2\mathcal{I} \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.294)$$

Segue daí que a energia potencial efetiva $U_e(\theta)$ é dada por

$$U_e(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{(L_{z'} - L_z \cos \theta)^2}{2\mathcal{I} \sin^2 \theta}. \quad (3.295)$$

O primeiro termo se refere à energia potencial do centro de massa do pião. É o segundo termo que aparece como consequência da conservação das componentes L_z e $L_{z'}$ do momento angular e que determina o comportamento particular do pião de brinquedo.

Solução estacionária e pequenas oscilações

É neste ponto interessante considerarmos calmamente as equações disponíveis. As Eqs. (3.291) e (3.292) determinam como os movimentos de precessão e de rotação própria ‘compartilham’ as componentes conservadas L_z e $L_{z'}$ do momento angular. Já a energia potencial [Eq. (3.295)] nos informa que o movimento se dá pela influência de dois efeitos: por um lado, um termo centrífugo devido à conservação de L_z e $L_{z'}$; por outro, o campo gravitacional.

Sabemos, num dos limites, que um pião inicialmente parado (i.e. $L_z = L_{z'} = 0$) deve apenas ... cair. Claramente, não é esse nosso caso de interesse. Queremos, na verdade, considerar a situação oposta, em que o termo de energia cinética domine a dinâmica, sendo o termo de energia potencial gravitacional uma

influência menor no movimento, i.e. associada a uma escala de tempo mais lenta. De fato, no outro caso extremo, em que a energia cinética é infinitamente maior do que a energia potencial gravitacional, devemos obter como resultado o movimento de um pião simétrico livre visto anteriormente. Tratemos desse caso como aproximação de ordem zero para o movimento.

Para simplificar expressões, usamos a relação geral entre L_z e $L_{z'}$ válida para qualquer pião simétrico, i.e.

$$L_{z'} = (L_x \sin \psi + L_y \cos \psi) \sin \theta + L_z \cos \theta = L_\rho \sin \theta + L_z \cos \theta, \quad (3.296)$$

em que L_ρ é a componente do momento angular na direção ortogonal à linha de nodos $\hat{\ell}$ no plano $\mathcal{O}xy$ do corpo rígido,

$$L_\rho(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} (L_{z'} - L_z \cos \theta). \quad (3.297)$$

Como L_z e $L_{z'}$ são constantes do movimento, L_ρ varia com a posição angular θ do pião assim como as demais coordenadas. Em termos dessa variável, a Eq. (3.291) se escreve simplesmente

$$\dot{\phi} = \frac{L_\rho(\theta)}{\mathcal{I} \sin \theta}, \quad (3.298)$$

e a energia potencial se torna

$$U_e(\theta) = \frac{L_\rho^2(\theta)}{2\mathcal{I}} + mgl \cos \theta. \quad (3.299)$$

O movimento do pião em θ é determinado pelo formato da energia potencial. O comportamento do termo cinético em θ depende crucialmente da razão $L_{z'}/L_z$. Seus pontos de mínimo são obtidos pela relação usual

$$\frac{dU_e}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mathcal{I}} L_\rho \frac{dL_\rho}{d\theta} - mgl \sin \theta = 0. \quad (3.300)$$

Com o uso da Eq. (3.297), obtemos por cálculo direto

$$\begin{aligned} \frac{dU_e}{d\theta} &= \frac{1}{\mathcal{I} \sin \theta} (L_{z'} - L_z \cos \theta) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L_{z'}}{\sin \theta} - \frac{L_z \cos \theta}{\sin \theta} \right) - mgl \sin \theta \\ &= \frac{1}{\mathcal{I} \sin \theta} (L_{z'} - L_z \cos \theta) \left(-\frac{L_{z'}}{\sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{L_z \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{L_z \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) - mgl \sin \theta \\ &= \frac{1}{\mathcal{I} \sin \theta} (L_{z'} - L_z \cos \theta) \left(L_z - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} L_\rho \right) - mgl \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (3.301)$$

Caso não houvesse o termo gravitacional, a energia potencial teria como pontos de estacionariedade as posições angulares $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ tais que

$$(i) \quad L_{z'} - L_z \cos \theta_1 = 0 \quad \text{e} \quad (ii) \quad L_z - \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} L_\rho = 0. \quad (3.302)$$

Vamos supor que o efeito do termo gravitacional seja apenas uma correção sobre esses pontos. Obtemos então duas soluções de ordem zero,

$$(i) \quad \cos \theta_1 = \frac{L_{z'}}{L_z} \quad \text{e} \quad (ii) \quad \cos \theta_2 = \frac{L_z}{L_{z'}}, \quad (3.303)$$

que, como podemos ver, são mutuamente excludentes.

O movimento em torno de cada um desses mínimos de energia é constante em θ . Para o momento angular L_ρ , as soluções estacionárias (i) e (ii) fornecem

$$(i) \quad L_\rho(\theta_1) = 0 \quad \text{e} \quad (ii) \quad L_\rho(\theta_2) = L_{z'} \sin \theta_2 = L_{z'} \sqrt{1 - \left(\frac{L_z}{L_{z'}} \right)^2}. \quad (3.304)$$

Essas duas situações podem ser entendidas geometricamente como triângulos retângulos com lados dados por $L_{z'}$, L_z e L_ρ , conforme ilustrado na Fig. 3.13. No caso (i), o ângulo entre $L_{z'}$ e L_z é θ_1 e a hipotenusa do triângulo é L_z (L_ρ não entra no triângulo). Em (ii), $L_{z'}$ é a hipotenusa e θ_2 , o ângulo entre $L_{z'}$ e L_z , sendo L_ρ o cateto oposto a esse ângulo.

Essas duas situações fornecem para os ângulos de precessão e rotação própria [Eqs. (3.298) e (3.292)] as soluções correspondentes

$$(i) \begin{cases} \theta = \theta_1 = \arccos\left(\frac{L_{z'}}{L_z}\right), \\ \dot{\phi} = 0, \\ \dot{\psi} = \omega_z, \end{cases} \quad \text{e} \quad (ii) \begin{cases} \theta = \theta_2 = \arccos\left(\frac{L_z}{L_{z'}}\right), \\ \dot{\phi} = \frac{L_{z'}}{\mathcal{I}}, \\ \dot{\psi} = \omega_z \left(1 - \frac{\mathcal{I}_z}{\mathcal{I}}\right). \end{cases} \quad (3.305)$$

Notemos que essas duas possibilidades de solução foram obtidas *ignorando-se* o termo gravitacional: ou seja, descrevem simplesmente o movimento do pião livre no formalismo lagrangiano!

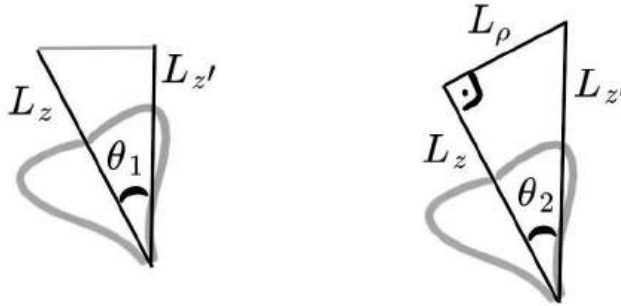


Figura 3.13: Esquerda: Solução estacionária (i), com $L_z > L_{z'}$. Direita: Solução estacionária (ii), com $L_z < L_{z'}$.

De fato, a primeira solução descreve um corpo rígido girando em torno de seu eixo principal de inércia efetivo (pág. 255), situação na qual momento angular e velocidade angular são paralelos. Não há precessão e, a menos de sua rotação própria, o corpo permanece com orientação (ϕ_1, θ_1) constante no espaço. O fato de $L_{z'}$ ser diferente de L_z se deve apenas a uma escolha ‘ruim’ para o referencial de laboratório – o mais conveniente teria sido definir a direção z coincidente com z' , em vez de ‘para cima’ (notemos que $L_{z'}$ é mera projeção de L_z nesse caso). A segunda solução descreve o movimento mais geral de um pião simétrico livre (pág. 258), no qual a precessão e a rotação própria ocorrem com velocidades angulares constantes e o ângulo de inclinação θ_2 entre momento angular e velocidade angular permanece constante durante o movimento.

Consideremos agora a correção no movimento produzida pelo campo gravitacional em torno de uma das soluções estacionárias. Para escolher a mais apropriada no tratamento que se segue, notemos que a solução (i) só vale se as constantes do movimento satisfizerem $L_{z'} < L_z$, enquanto a solução (ii) vale apenas na situação oposta, em que $L_{z'} > L_z$. Dessas, provavelmente a primeira é aquela obtida no jogo de pião. Isso porque a forma como a brincadeira ocorre envolve atirar o pião ao chão dando-lhe momento angular de rotação em torno de seu eixo próprio, ou seja, tentando maximizar L_z . No entanto, ao atingir o chão, a configuração inicial para L_z e $L_{z'}$ passa a depender do ângulo θ_0 em que o sistema real se acomoda, de maneira que $L_{z'}$ surge a partir de L_z , por transferência de momento angular através do atrito ou simplesmente por causa da inclinação inicial com que o pião toca o chão. Supomos então que a solução mais realista no jogo de pião deva satisfazer $L_z > L_{z'}$. Assim, é razoável supor que o mínimo de energia (i) seja aquele que buscamos para descrever o pião real.

Assumimos θ_1 como aproximação de ordem zero para a coordenada $\theta(t)$ e impomos a perturbação $\theta(t) = \theta_1 + \delta\theta(t)$ (com $\delta\theta \ll \theta_1$) para entender o efeito do campo gravitacional. Supomos nesse caso que a dinâmica seja dominada pela energia cinética. Cálculo direto a partir da Eq. (3.297) revela

$$L_\rho(\theta_1 + \delta\theta) \approx L_z \delta\theta, \quad (3.306)$$

de forma que a condição de estacionariedade da energia potencial [Eq. (3.295)] se escreve

$$\begin{aligned} \frac{dU_e}{d\theta} &= \frac{1}{\mathcal{I}} L_\rho \frac{dL_\rho}{d\theta} - mgl \sin \theta \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{I}} L_\rho L_z - mgl \sin \theta \\ &\approx \frac{1}{\mathcal{I}} \frac{1}{\sin \theta} (L_{z'} - L_z \cos \theta) L_z - mgl \sin \theta \\ &\approx \frac{\gamma}{\sin \theta} \left(\frac{L_{z'}}{L_z} - \cos \theta - \sin^2 \theta \right), \quad \text{com } \gamma = \frac{L_z^2}{\mathcal{I}} \frac{1}{mgl}. \end{aligned} \quad (3.307)$$

A constante γ representa a energia típica de rotação relativa à escala da energia potencial gravitacional. Igualando essa equação a zero, a condição de estacionariedade se torna, após manipulações simples,

$$\cos^2 \theta - \gamma \cos \theta + \gamma \frac{L_{z'}}{L_z} - 1 = 0, \quad (3.308)$$

cujas raízes são

$$\cos \theta'_1 = \frac{\gamma}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 L_{z'}}{\gamma L_z} + \frac{4}{\gamma^2}} \right). \quad (3.309)$$

Queremos apenas a solução no limite em que $\gamma \gg 1$, caso em que podemos aproximar essa expressão para

$$\cos \theta'_1 \approx \frac{\gamma}{2} \left(1 \pm 1 \mp \frac{2 L_{z'}}{\gamma L_z} \pm \frac{2}{\gamma^2} \right) \Rightarrow \begin{cases} (\cos \theta'_1)_+ = \gamma - \frac{L_{z'}}{L_z} + \frac{1}{\gamma}, \\ (\cos \theta'_1)_- = \frac{L_{z'}}{L_z} - \frac{1}{\gamma}. \end{cases} \quad (3.310)$$

Apenas a segunda solução guarda significado físico em nossa situação, pois se reduz corretamente à solução (i) da Eq. (3.303) no limite buscado ($\gamma \rightarrow \infty$), da qual obtemos

$$\cos \theta'_1 = \cos(\theta'_1 + \delta\theta) \approx \frac{L_{z'}}{L_z} - \frac{\mathcal{I}}{L_z^2} mgl \approx \cos \theta_1 - \frac{\mathcal{I}}{L_z^2} mgl \Rightarrow \delta\theta = \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{\mathcal{I}}{L_z^2} mgl. \quad (3.311)$$

Com isso, a correção em L_ρ se torna

$$L_\rho = L_z \delta\theta \approx \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{\mathcal{I}}{L_z} mgl. \quad (3.312)$$

O movimento passa a apresentar precessão com velocidade angular

$$\dot{\phi} \approx \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \frac{mgl}{L_z}. \quad (3.313)$$

Portanto, o pião de brinquedo tipicamente precessiona por causa do torque gravitacional com relação a seu ponto de apoio no chão. Se retirássemos essa força, ele se comportaria simplesmente como um corpo rígido girando em torno de seu eixo principal.

Movimento geral

Todos os tipos de movimento analisados até aqui ocorrem no ponto de estacionariedade em θ , i.e. no mínimo local da energia potencial. Em geral, o ângulo θ pode variar no tempo, num movimento chamado de *nutação*. Na situação em que $L_z > L_{z'}$, a energia potencial da Eq. (3.295) assume a forma

$$U_e(\theta) = \left(\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \frac{L_z^2}{2\mathcal{I}} + mgl \cos \theta$$

$$= \frac{L_z^2}{2\mathcal{I}} \left[\left(\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + \alpha \cos \theta \right], \quad \text{em que } \alpha = \frac{mgl}{L_z^2/(2\mathcal{I})}. \quad (3.314)$$

Para movimento dominado pela energia cinética, temos $\alpha \approx 0$.

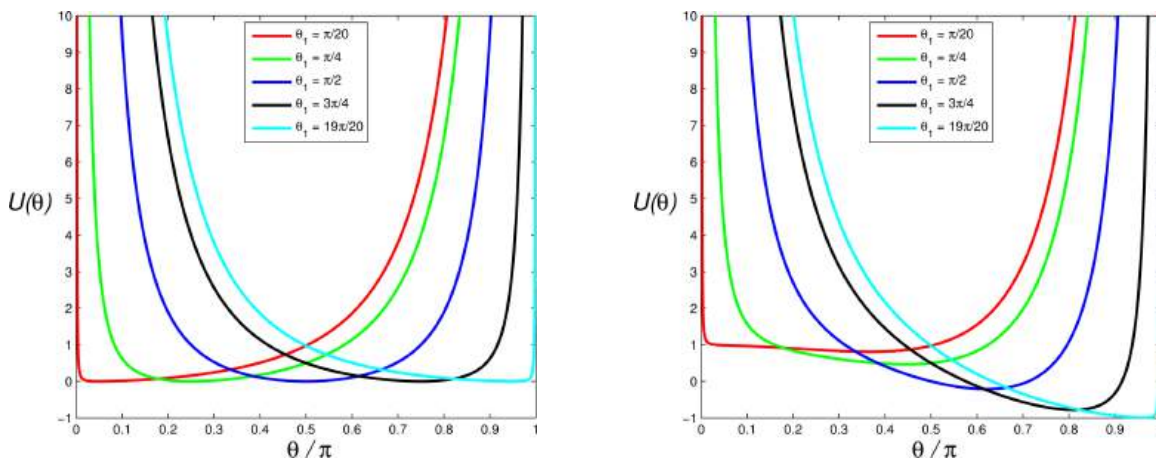


Figura 3.14: Energia potencial efetiva $U_e(\theta)$ do pião [Eq. (3.314)], em unidades de $L_z^2/(2\mathcal{I})$. À esquerda, o termo gravitacional é assumido desprezível; à direita, o termo gravitacional é tomado como igual ao termo cinético, i.e. $mgl = L_z^2/(2\mathcal{I})$.

A Fig. 3.14 ilustra a forma de $U_e(\theta)$ para diversos valores do ângulo⁵⁰ θ_1 . Vemos à esquerda que as posições extremas $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ são ‘proibidas’ no sentido de que a energia potencial diverge nesses pontos. Vemos também que $U_e(\theta)$ é simétrica em torno do ângulo $\theta = \pi/2$. Esse fato não é muito relevante para um pião, pois este só pode visitar posições angulares no intervalo $0 < \theta < \pi/2$ (i.e. precisa ficar ‘em pé!’), mas seria percebido pelo volante de um giroscópio.

O efeito do termo gravitacional pode ser visto no gráfico à direita na mesma figura. Esse termo tende a deformar $U_e(\theta)$ no sentido de atrair o pião para baixo, como seria esperado intuitivamente (de fato, no limite $\alpha \rightarrow \infty$, o termo centrífugo se torna desprezível e recuperamos a queda livre de um pião sem rotação). Notemos como a deformação da energia potencial é suficiente para eliminar quase todos os pontos de equilíbrio estável na região $0 < \theta < \pi/2$ em que o pião fica de pé. Isso significa que é mesmo preciso produzir rotação inicial alta o suficiente para que existam soluções estáveis com o pião em pé (i.e. para que as curvas se pareçam mais com o quadro à esquerda), o que ratifica *a posteriori* e de forma autoconsistente nossa suposição de que a dinâmica de um pião de brinquedo precisa ser dominada pela energia cinética de rotação.

⁵⁰Notemos que θ_1 representa o mínimo apenas do termo ‘centrífugo’ da energia, e que portanto não representa o mínimo da energia $U_e(\theta)$ total no caso em que o termo gravitacional deixa de ser desprezível (i.e. θ_1 é apenas uma parametrização interessante no caso geral).

A depender das constantes do movimento L_z e $L_{z'}$, o efeito da nutação $\theta(t)$ sobre a dinâmica dos demais ângulos de Euler pode ser vários. Por exemplo, pode ocorrer de a amplitude desse movimento, dada pelas condições iniciais do problema, ser grande o suficiente para produzir movimento *retrógrado* do pião na coordenada ϕ (i.e. $\dot{\phi} < 0$ para algum intervalo em θ). Com efeito, a velocidade de precessão $\dot{\phi}$ pode ser escrita como

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{\mathcal{I} \sin^2 \theta} (\cos \theta_1 - \cos \theta), \quad (3.315)$$

de forma que pode haver troca de sinal de acordo com o valor de $\theta(t)$. Esse e vários outros efeitos curiosos podem ocorrer dependendo da região de parâmetros em que ocorre o movimento do pião, servindo esse exemplo para ilustrar as complexidades envolvidas no movimento mesmo de corpos rígidos simples como o pião de brinquedo. Você saberia dizer que efeitos novos seriam ainda introduzidos caso abrissemos mão da simetria?

Capítulo 4

Oscilações acopladas

O oscilador harmônico é o modelo mecânico mais simples a descrever fenômenos oscilatórios, tal como e.g. as características básicas de ressonâncias. Para tornar esse modelo mais abrangente, o passo seguinte de refinamento considera um *sistema* de osciladores harmônicos em interação uns com os outros.

Osciladores acoplados permitem compreender características ainda mais gerais de fenômenos oscilatórios, e de fato transcendem a mecânica: desde modelos simplificados para a interação entre átomos e luz até o formalismo de quasi-partículas da mecânica quântica, os rudimentos de todas essas fenomenologias mais avançadas encontra fortes analogias na mecânica de osciladores harmônicos acoplados.

Dado o alcance desse modelo, seria fútil tentar ilustrar todos os efeitos dele decorrentes. Vamos nos limitar aqui a primeiramente introduzir o formalismo básico utilizado para tratar esses sistemas e, quando couber, apresentar alguns efeitos importantes, sem no entanto exaurir toda a física que se abre à nossa compreensão. Essa postura vai ao encontro de nosso objetivo de apresentar o curso de Mecânica Clássica não como um conjunto de ideias fechado à parte, mas como uma das portas de entrada para muitos outros temas interessantes da física.

4.1 Par de osciladores idênticos acoplados

Consideremos o sistema mais simples possível capaz de produzir oscilações acopladas: dois osciladores mecânicos iguais, inicialmente independentes, cada qual consistindo de uma partícula com massa m e uma mola ideal (i.e. com massa e atrito desprezíveis para a dinâmica) com constante elástica k .

Para osciladores harmônicos independentes, a frequência ‘própria’ ou ‘livre’ de cada um é dada por $\omega = \sqrt{k/m}$. Vamos aqui usar notação que dê mais ênfase à frequência ω como parâmetro determinante para a descrição do oscilador, escrevendo $k = m\omega^2$. A lagrangiana de cada oscilador livre é

$$\mathcal{L}_j(x_j, \dot{x}_j) = \frac{1}{2}m\dot{x}_j^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_j^2, \quad (4.1)$$

em que o índice $j = 1, 2$ denota a partícula 1 ou 2 e x_j representa o deslocamento dessa partícula a partir da posição de equilíbrio (i.e. sua posição de repouso com a mola relaxada), tomada como $x_j = 0$ por

simplicidade. O movimento livre de cada partícula se resume a uma oscilação harmônica no tempo,

$$x_j(t) = A_j \cos(\omega t + \phi_j), \quad (4.2)$$

em que A_j é a amplitude e ϕ_j a fase da oscilação, ambas determinadas e.g. pelas condições iniciais do movimento. A energia mecânica de cada oscilador se alterna entre formas cinética K_j e potencial U_j ,

$$K_j(t) = \frac{1}{2}mA_j^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_j) \quad \text{e} \quad U_j(t) = \frac{1}{2}mA_j^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_j), \quad (4.3)$$

de forma que no total seja constante, pois

$$E_j := K_j(t) + U_j(t) = \frac{1}{2}mA_j^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_j) + \frac{1}{2}mA_j^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi_j) = \frac{1}{2}mA_j^2\omega^2 = cte. \quad (4.4)$$

É interessante notar que, em média (no tempo), a energia se distribui igualmente nas duas formas, pois

$$\langle K_j(t) \rangle_\tau = \langle U_j(t) \rangle_\tau = \frac{1}{4}mA_j^2\omega^2 = \frac{1}{2}E_j, \quad (4.5)$$

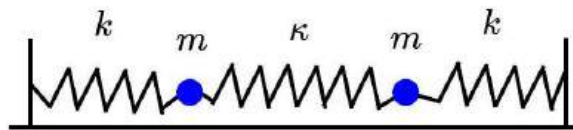
em que definimos a média de uma função $f(t)$ em 1 período $\tau = 2\pi/\omega$ do oscilador como

$$\langle f(t) \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t') dt' \quad (4.6)$$

e usamos $\langle \cos^2(\omega t + \varphi_j) \rangle_\tau = \langle \sin^2(\omega t + \varphi_j) \rangle_\tau = 1/2$.

4.1.1 Tratamento ingênuo

A situação se torna interessante ao introduzirmos *acoplamento* entre as duas massas pelo uso de uma terceira mola com constante elástica κ . Consideramos κ ‘sintonizável’ de acordo com nossa vontade para melhor entendermos seu efeito.



Consideremos por simplicidade que o comprimento ℓ dessa mola quando relaxada seja idêntico¹ à distância entre as posições de equilíbrio das partículas (i.e. a mola se encontra relaxada se $x_1 = x_2$). Isso produz entre as partículas a energia potencial de interação $U_I(x_1, x_2)$,

$$U_I(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2. \quad (4.7)$$

A lagrangiana do sistema de osciladores acoplados é dada então pela soma das lagrangianas de cada oscilador livre e, crucialmente, pela introdução do termo de interação, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) - U_I(x_1, x_2) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 - \frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

¹Desde que as posições de equilíbrio sejam escolhidas como origens dos deslocamentos das partículas, é irrelevante para o movimento se as molas se encontram distendidas, comprimidas ou relaxadas.

Essa lagrangiana fornece as duas equações de movimento

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = 0 \Rightarrow -m\omega^2 x_1 - \kappa(x_1 - x_2) - m\ddot{x}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = 0 \Rightarrow -m\omega^2 x_2 + \kappa(x_1 - x_2) - m\ddot{x}_2 = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

que formam um *sistema acoplado* de equações diferenciais. Podemos reescrevê-lo da maneira

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + m\omega^2 x_1 = -\kappa(x_1 - x_2), \\ m\ddot{x}_2 + m\omega^2 x_2 = \kappa(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (4.10)$$

Os termos dos membros esquerdos representam as equações de movimento livre dos osciladores, e os termos da direita representam forças externas agindo sobre cada um deles. Como esperado, o acoplamento tem como efeito produzir uma força no oscilador 1 que tende a empurrá-lo no sentido negativo de x_1 sempre que $x_1 > x_2$ (mola de acoplamento comprimida), e vice-versa. Como consequência, o oscilador 2 deve sentir na mesma situação uma força de reação de igual magnitude atuando no sentido oposto.

Analogamente à oscilação livre, as equações de movimento requerem que as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam funções proporcionais a derivadas segundas delas mesmas, e portanto ainda devem ser funções senoidais. A diferença é que no caso acoplado a proporcionalidade com a derivada segunda deve ser satisfeita não por cada função $x_j(t)$, mas pela *combinação* correta de ambas. A forma matemática mais simples e direta de se buscar soluções senoidais é trocar as equações reais por complexas,

$$\begin{cases} m\ddot{z}_1 + (m\omega^2 + \kappa)z_1 - \kappa z_2 = 0, \\ m\ddot{z}_2 + (m\omega^2 + \kappa)z_2 - \kappa z_1 = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

e buscar soluções complexas $z_1(t)$ e $z_2(t)$ tais que

$$x_j(t) = \text{Re}\{z_j(t)\}. \quad (4.12)$$

Isso nos permite trabalhar apenas com funções exponenciais no plano complexo, abreviando o cálculo de derivadas. As soluções esperadas são do tipo

$$z_1(t) = v_1 e^{i\lambda_1 t}, \quad \text{e} \quad z_2(t) = v_2 e^{i\lambda_2 t}, \quad (4.13)$$

em que v_j e λ_j são constantes² a serem escolhidas para que as equações de movimento sejam satisfeitas. Substituição direta na Eq. (4.11) nos leva a

$$\begin{cases} (-m\lambda_1^2 + m\omega^2 + \kappa)v_1 e^{i\lambda_1 t} - \kappa v_2 e^{i\lambda_2 t} = 0, \\ -\kappa v_1 e^{i\lambda_1 t} + (-m\lambda_2^2 + m\omega^2 + \kappa)v_2 e^{i\lambda_2 t} = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Vemos daí que a variação temporal dessas equações só pode ser eliminada caso as duas partículas oscilem com frequências iguais, i.e.

$$\lambda_1 = \lambda_2 := \lambda. \quad (4.15)$$

²Buscamos por simplicidade a solução supondo constantes reais; caso descobramos em algum momento da dedução não ser possível encontrar solução com essa restrição, podemos tentar constantes complexas ou mesmo outra forma de solução. De fato, a desvantagem de se tentar soluções ‘chutadas’ (*Ansatz*) é o risco de não funcionarem.

Façamos por ora essa restrição, e se encontrarmos soluções tudo estará consistente (caso contrário, teremos de rever nossa solução-chute). As equações de movimento se tornam

$$\begin{cases} (-m\lambda^2 + m\omega^2 + \kappa)v_1 - \kappa v_2 = 0, \\ -\kappa v_1 + (-m\lambda^2 + m\omega^2 + \kappa)v_2 = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

de onde verificamos que nos resta apenas resolver um par de equações lineares acopladas para os coeficientes complexos para chegarmos à solução. Nosso chute se revela promissor.

Frequências normais de vibração. A primeira coisa a se notar do sistema da Eq. (4.16) é que ele sempre admite a solução trivial $v_1 = v_2 = 0$, na qual obviamente não estamos interessados. No entanto, é possível reduzir essas duas equações a uma só eliminando-se v_1 ou v_2 em qualquer uma delas pelo uso da outra. Por exemplo, isolando-se v_2 na primeira equação, obtemos

$$v_2 = \frac{(-m\lambda^2 + m\omega^2 + \kappa)}{\kappa} v_1. \quad (4.17)$$

Substituindo esse resultado na segunda equação do sistema, obtemos a condição

$$\left[\left(-\lambda^2 + \omega^2 + \frac{\kappa}{m} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{m^2} \right] v_1 = 0. \quad (4.18)$$

Existe, portanto, uma forma de se evitar a solução trivial, que consiste em impor como nulo o termo multiplicando v_1 . Esse termo pode ainda ser fatorado da forma

$$\left(-\lambda^2 + \omega^2 + \frac{\kappa}{m} \right)^2 - \frac{\kappa^2}{m^2} = \left(-\lambda^2 + \omega^2 \right) \left(-\lambda^2 + \omega^2 + 2\frac{\kappa}{m} \right) := 0. \quad (4.19)$$

Essa expressão nos permite determinar λ para estabelecer a existência de *dois conjuntos* de soluções oscilatórias com frequências, dadas por

$$\lambda = \omega \quad \text{ou} \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 + \frac{2\kappa}{m}}. \quad (4.20)$$

A fim de simplificar a notação, faz-se conveniente neste estágio definir a *frequência de acoplamento*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}, \quad (4.21)$$

que efetivamente denota, assim como κ , a magnitude do acoplamento. Denotamos com isso as duas frequências possíveis de vibração como

$$\Omega_1 = \omega \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}. \quad (4.22)$$

Essas frequências representam vibrações *coletivas* do sistema de osciladores acoplados, como veremos, e são por isso chamadas de *frequências normais de vibração*. Note que elas se reduzem às frequências próprias de oscilação das partículas caso não haja acoplamento, i.e. $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega$ se $\kappa = 0$, como esperado.

Modos normais de vibração. Agora que sabemos serem duas frequências de vibração possíveis, vejamos como se movem as partículas 1 e 2 nesses dois regimes de oscilação. A fim de uniformizar a notação, usamos a definição da Eq. (4.21) para eliminar κ em favor de ω_0 nas equações de movimento. O sistema de equações da Eq. (4.16) se reescreve da forma equivalente

$$\begin{cases} \left(-\lambda^2 + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right)v_1 - \frac{\omega_0^2}{2}v_2 = 0, \\ -\frac{\omega_0^2}{2}v_1 + \left(-\lambda^2 + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right)v_2 = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Vejamos o que esse sistema de equações fornece para cada uma das duas possibilidades para λ fornecidas pela Eq. (4.20). É preciso primeiramente incluir um novo índice nas constantes v_j para distinguir os dois tipos de solução com frequências distintas. Para tanto, escolhemos escrevê-las como

$$v_j \rightarrow v_{j,\Omega_{j'}}, \quad (4.24)$$

em que o índice $j = 1, 2$ denota, como anteriormente, a partícula, e o índice $j' = 1, 2$ passa a indicar a frequência normal de vibração. Denotemos as soluções complexas com frequência normal $\lambda = \Omega_1$ para as partículas 1 e 2 como

$$z_{1,\Omega_1}(t) = v_{1,\Omega_1} e^{i\Omega_1 t} \quad \text{e} \quad z_{2,\Omega_1}(t) = v_{2,\Omega_1} e^{i\Omega_1 t}. \quad (4.25)$$

Usando $\lambda = \Omega_1 = \omega$ no sistema da Eq. (4.23), obtemos a mesma condição a partir de ambas as equações,

$$v_{1,\Omega_1} - v_{2,\Omega_1} = 0, \quad (4.26)$$

que fixa as *amplitudes relativas* entre os osciladores. Assim, as amplitudes v_{j,Ω_1} ficam determinadas a menos de uma constante global arbitrária a afetar ambas.

De fato, veremos que sempre ocorre de a cada frequência Ω_j permitida pelas equações do movimento corresponderem relações análogas à Eq. (4.26) para determinar a maneira particular como as partículas oscilam relativamente umas às outras. Além disso, uma dessas equações é sempre redundante, e a solução para as amplitudes relativas fica sempre determinada a menos de uma constante global. Cada forma de oscilar das partículas é chamada de *modo normal* de oscilação do sistema acoplado.

Relações como a Eq. (4.26) deixam livre apenas uma única constante arbitrária por modo de oscilação. É nesse caso comum convencionar-se uma segunda condição a ser satisfeita por esses coeficientes a fim de determiná-los sem dubiedade, tais como $|v_{1,\Omega_1}| + |v_{2,\Omega_1}| = 1$ ou $|v_{1,\Omega_1}|^2 + |v_{2,\Omega_1}|^2 = 1$. Não vamos nos preocupar com isso no momento, no entanto, e escolher a constante mais simples possível,

$$v_{1,\Omega_1} = v_{2,\Omega_1} := 1, \quad (4.27)$$

para obter as soluções do sistema de equações complexas como

$$\lambda = \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_{1,\Omega_1}(t) = e^{i\Omega_1 t} \\ z_{2,\Omega_1}(t) = e^{i\Omega_1 t} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Essas soluções para as duas partículas estão associadas entre si, não sendo permitido mudar a constante na frente de uma sem mudar a constante na frente da outra, ou violaríamos a condição da Eq. (4.27). No

entanto, é permitido modificar essas constantes arbitrárias de forma conjunta, o que é fundamental para se obter os deslocamentos reais das partículas e ajustá-los às condições iniciais do movimento. Devemos considerar nesse caso as soluções

$$x_{j,\Omega_1}(t) = \text{Re}\{\tilde{A}_{\Omega_1} z_{j,\Omega_1}(t)\}, \quad (4.29)$$

em que podemos escrever a constante complexa arbitrária \tilde{A}_{Ω_1} em termos de constantes reais de duas formas úteis,

$$\tilde{A}_{\Omega_1} = A_{\Omega_1} e^{i\phi_{\Omega_1}} \quad \text{ou} \quad \tilde{A}_{\Omega_1} = C_{\Omega_1} - iS_{\Omega_1}. \quad (4.30)$$

A primeira forma leva à expressão para os deslocamentos em termos da amplitude e fase, que precisam ser comuns às oscilações das duas partículas de acordo com a condição da Eq. (4.26),

$$\lambda = \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,\Omega_1}(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) \\ x_{2,\Omega_1}(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) \end{cases}. \quad (4.31)$$

A segunda forma favorece a decomposição do deslocamento em funções cosseno e seno,

$$\lambda = \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,\Omega_1}(t) = C_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t) + S_{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) \\ x_{2,\Omega_1}(t) = C_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t) + S_{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) \end{cases}. \quad (4.32)$$

A escolha por uma ou outra forma leva em conta apenas a facilidade na imposição de condições iniciais.

O perfil espacial de deslocamentos das partículas no segundo modo de vibração é obtido de maneira análoga. Denotemos o segundo conjunto de soluções, com frequência de vibração Ω_2 , por

$$z_{1,\Omega_2}(t) = v_{1,\Omega_2} e^{i\Omega_2 t} \quad \text{e} \quad z_{2,\Omega_2}(t) = v_{2,\Omega_2} e^{i\Omega_2 t}. \quad (4.33)$$

O sistema de equações da Eq. (4.23) fornece no caso $\lambda = \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}$ a condição

$$v_{1,\Omega_2} + v_{2,\Omega_2} = 0. \quad (4.34)$$

Escrevemos então a relação mais simples possível capaz de satisfazê-la,

$$v_{1,\Omega_2} = -v_{2,\Omega_2} := 1, \quad (4.35)$$

para obter as soluções complexas

$$\lambda = \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z_{1,\Omega_2}(t) = e^{i\Omega_2 t} \\ z_{2,\Omega_2}(t) = -e^{i\Omega_2 t} \end{cases}. \quad (4.36)$$

Seguem daí as soluções para os deslocamentos das partículas, $x_{j,\Omega_2}(t) = \text{Re}\{\tilde{A}_{\Omega_2} z_{j,\Omega_2}(t)\}$, como

$$\lambda = \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,\Omega_2}(t) = A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}) \\ x_{2,\Omega_2}(t) = A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2} + \pi) \end{cases}, \quad (4.37)$$

em que escolhemos dar conta do sinal negativo no deslocamento x_{2,Ω_2} pela inclusão de uma fase π no cosseno, a fim de manter a consistência desse tipo de notação como uma amplitude positiva multiplicada pela função cosseno. A segunda maneira de se denotar essa solução é

$$\lambda = \Omega_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{1,\Omega_2}(t) = C_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t) + S_{\Omega_2} \sin(\Omega_2 t) \\ x_{2,\Omega_2}(t) = -C_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t) - S_{\Omega_2} \sin(\Omega_2 t) \end{cases}, \quad (4.38)$$

em que a constante complexa arbitrária \tilde{A}_{Ω_2} para o modo Ω_2 se escreve em cada caso como

$$\tilde{A}_{\Omega_2} = A_{\Omega_2} e^{i\phi_{\Omega_2}} \quad \text{ou} \quad \tilde{A}_{\Omega_2} = C_{\Omega_2} - iS_{\Omega_2}. \quad (4.39)$$

Solução geral. A solução mais geral do movimento envolve a excitação concomitante dos dois modos de vibração independentes. Para cada partícula, vale a superposição das oscilações nas duas frequências. A solução geral se escreve como a combinação linear das soluções da Eq. (4.48),

$$x_j(t) = x_{j,\Omega_1}(t) + x_{j,\Omega_2}(t). \quad (4.40)$$

Explicitamente, temos a solução geral

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) + A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}), \\ x_2(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) - A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}), \end{cases} \quad (4.41)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{cases} x_{1,\Omega_1}(t) = C_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t) + S_{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) + C_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t) + S_{\Omega_2} \sin(\Omega_2 t), \\ x_{2,\Omega_1}(t) = C_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t) + S_{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) - C_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t) - S_{\Omega_2} \sin(\Omega_2 t). \end{cases} \quad (4.42)$$

O movimento resultante é reminescente de um *batimento* entre os dois deslocamentos com frequências diferentes. Apesar de o movimento ser claramente periódico se apenas 1 modo normal é excitado (i.e. $A_{\Omega_1} = 0$ ou $A_{\Omega_2} = 0$), o movimento mais geral apenas será periódico se as frequências normais Ω_1 e Ω_2 forem comensuráveis.

Exemplo de condição inicial: partícula 1 em movimento e partícula 2 parada. É interessante analisar esse resultado para o movimento no caso particular em que apenas um dos osciladores se encontra excitado no instante inicial, e observar como o acoplamento distribui a energia entre os osciladores ao longo do tempo.

Suponhamos que a partícula 1 seja solta a partir da posição $x_1(0) = A$ em repouso ($\dot{x}_1(0) = 0$), encontrando-se a partícula 2 em repouso em sua posição de equilíbrio, i.e. $x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$. Para esse tipo de condição inicial, é mais conveniente utilizar as soluções em termos de componentes cosseno e seno como fornecido pela Eq. (4.42). Impondo as condições iniciais,

$$\begin{cases} x_1(0) = C_{\Omega_1} + C_{\Omega_2} := A \\ x_2(0) = C_{\Omega_1} - C_{\Omega_2} := 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(0) = \Omega_1 S_{\Omega_1} + \Omega_2 S_{\Omega_2} := 0 \\ \dot{x}_2(0) = \Omega_1 S_{\Omega_1} - \Omega_2 S_{\Omega_2} := 0 \end{cases}, \quad (4.43)$$

obtemos

$$C_{\Omega_1} = C_{\Omega_2} = \frac{A}{2} \quad \text{e} \quad S_{\Omega_1} = S_{\Omega_2} = 0, \quad (4.44)$$

com o que os deslocamentos das partículas se escrevem

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A}{2} \cos(\Omega_1 t) + \frac{A}{2} \cos(\Omega_2 t), \\ x_2(t) = \frac{A}{2} \cos(\Omega_1 t) - \frac{A}{2} \cos(\Omega_2 t). \end{cases} \quad (4.45)$$

Para cada partícula, o deslocamento resulta da superposição de dois movimentos oscilatórios com frequências distintas. A *interferência* entre essas amplitudes implicam no fenômeno de batimento entre os modos de vibração. Para ver isso, basta entender $\bar{\Omega}$ como a subtração de duas frequências e $\Delta\Omega$ como a soma das mesmas, ou seja,

$$\bar{\Omega} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} \quad \text{e} \quad \Delta\Omega = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}, \quad (4.46)$$

e reescrever a Eq. (4.45) na forma

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\Delta\Omega t) \cos(\bar{\Omega}t), \\ x_2(t) = A \sin(\Delta\Omega t) \sin(\bar{\Omega}t). \end{cases} \quad (4.47)$$

As quantidades $\bar{\Omega}$ e $\Delta\Omega$ são chamadas de frequências de portadora e de batimento, respectivamente. As oscilações apresentam ‘amplitudes dependentes do tempo’ para as funções seno e cosseno, sendo que a partícula 2 oscila em quadratura (i.e. com fase relativa $\pi/2$) com relação à partícula 1.

Efeitos físicos do movimento acoplado. Neste ponto é salutar fazermos uma pausa nas contas para contemplar o significado físico das soluções obtidas. Em resumo, existem dois modos de vibração possíveis para o sistema de partículas. Esse modos podem ser rotulados por suas respectivas frequências de vibração, e cada qual envolve duas constantes para ajuste das condições iniciais do movimento. Os deslocamentos das partículas em cada modo são

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \omega : & \begin{cases} x_{1,\Omega_1}(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) \\ x_{2,\Omega_1}(t) = A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) \end{cases} \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2} : & \begin{cases} x_{1,\Omega_2}(t) = A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}) \\ x_{2,\Omega_2}(t) = A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.48)$$

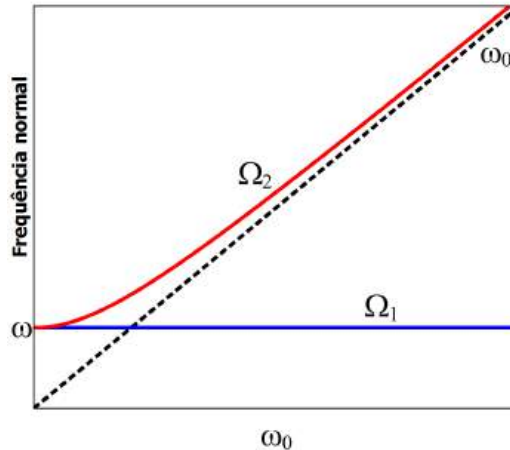


Figura 4.1: Frequências normais de vibração Ω_1 e Ω_2 como funções do acoplamento ω_0 entre as partículas. A frequência normal Ω_1 , mais baixa, mantém-se constante no valor livre ω para as frequências livres de oscilação das partículas. Já a frequência normal Ω_2 desvia-se quadraticamente em ω_0 do valor não acoplado, tendendo à frequência de acoplamento ω_0 no limite em que esta domina a dinâmica.

Analisemos o modo Ω_1 . Sua frequência normal se mantém sempre igual a ω , independentemente da magnitude do acoplamento, o que parece uma propriedade bastante curiosa: as duas partículas oscilam como se não estivessem acopladas, ao menos no que diz respeito a suas frequências de oscilação.

O motivo disso é revelado pelo padrão de movimento. Na verdade, as duas partículas precisam oscilar em fase, ou seja, com deslocamentos idênticos em qualquer instante de tempo, $x_{1,\Omega_1}(t) = x_{2,\Omega_1}(t)$, de forma

que não há movimento *relativo* entre elas. Essa propriedade do modo Ω_1 implica na nulidade da energia potencial de interação $U_I(x_1, x_2)$, pois

$$U_I(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2 = 0, \quad (4.49)$$

de forma que a mola de acoplamento permanece sempre na mesma configuração! É por esse motivo que a frequência normal Ω_1 independe do acoplamento ω_0 e permanece sempre igual à frequência livre ω . O sistema vibratório de osciladores idênticos encontra uma forma de se mover ‘como se fossem independentes’: o efeito do acoplamento nesse caso se reduz meramente à *sincronização* da fase dos osciladores, sem mudar qualquer outra propriedade física de seus movimentos³.

Por conta dessas propriedades, esse modo de vibração é chamado de *modo de centro de massa*. É uma característica genérica de sistemas acoplados que o modo de mais baixa frequência se comporta dessa forma, produzindo movimento máximo do centro de massa.

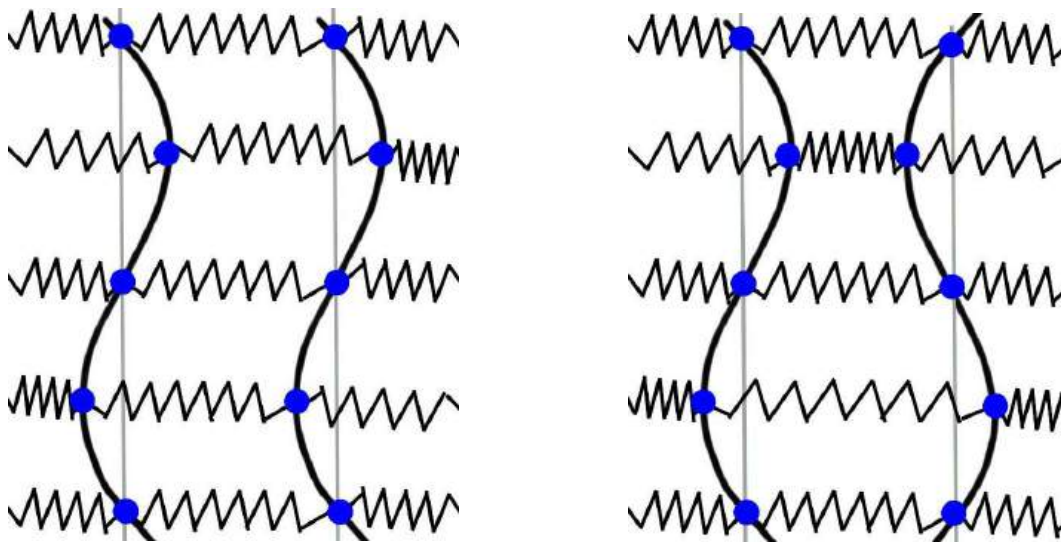


Figura 4.2: Modos normais de vibração para osciladores idênticos acoplados. O tempo varia na direção vertical da figura. Os deslocamentos das partículas são representados pelas curvas contínuas ao fundo. À esquerda, vemos o modo de centro de massa, no qual a mola de acoplamento não muda de comprimento. Vemos à direita o modo de chacoalhamento, que utiliza maximamente a mola de acoplamento.

Passemos à análise do modo Ω_2 . Sua frequência própria parte da frequência livre ω para acoplamento nulo e cresce monotonicamente com ω_0 , satisfazendo sempre $\Omega_2 \geq \omega$. No limite de acoplamento ‘fraco’, em que a mola de acoplamento se faz muito menos rígida do que as molas atuando em apenas uma das partículas oscilantes (i.e. $\omega_0 \ll \omega$), a frequência normal Ω_2 se comporta como

$$\omega_0 \ll \omega \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 \approx \omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \quad (4.50)$$

de forma que Ω_2 se afasta de ω quadraticamente em ω_0 . Esse ‘desvio’ da frequência de oscilação causado

³Uma das técnicas utilizadas para se sincronizar lasers diferentes se baseia justamente em acoplar fracamente esses osciladores. Ocorre que um feixe laser, apesar de possuir fase bem definida com relação a ele mesmo em outra posição, em geral possui fase absoluta mal definida; por isso, dois lasers diferentes em geral não possuem fase relativa bem definida e não são capazes de produzir sinais estáveis de interferência.

pelo acoplamento é um efeito bastante típico de sistemas acoplados⁴. No limite oposto, em que $\omega_0 \gg \omega$, o acoplamento domina a dinâmica. Se ω se torna desprezível face a ω_0 , a frequência normal passa a acompanhar a frequência de acoplamento,

$$\omega_0 \ll \omega \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 \approx \omega_0. \quad (4.51)$$

Segundo a Eq. (4.48), o modo Ω_2 está associado a partículas oscilando em *oposição de fase*, e a mola de acoplamento é maximamente requisitada. Além disso, o centro de massa do sistema permanece em repouso.

Podemos então entender o limite da Eq. (4.51) facilmente. Caso a mola de acoplamento se torne muito mais rígida do que as demais, o sistema pode ser entendido como composto apenas pelas duas partículas presas às extremidades da mola de acoplamento, uma vez que as demais molas podem ser ignoradas por terem efeito desprezível no movimento. Sabemos da Seção 1.3.10 que esse problema (um par de partículas interagindo por uma força central) é equivalente ao problema de uma única partícula com massa igual à massa reduzida $\mu = m/2$ sob ação da mesma força nas coordenadas relativas [Eq. (1.192)]. Do ponto de vista do centro de massa, a frequência de oscilação deve ser, portanto, $\sqrt{\kappa/\mu}$, que de fato é igual a ω_0 , conforme definido na Eq. (4.21).

Esse modo de vibração é chamado de *modo de chacoalhamento*, por envolver a forma mais ‘violenta’ de oscilação coletiva.

Além de causar um afastamento entre as frequências de oscilação do sistema, o acoplamento tem o papel de redistribuir a energia mecânica entre as partículas caso ela seja desigual. Consideremos a situação da Eq. (4.47) em que apenas uma das partículas é colocada para oscilar inicialmente, enquanto a outra permanece parada em sua posição de repouso.

No limite em que o acoplamento é pequeno com relação à frequência livre dos osciladores, i.e. $\omega_0 \ll \omega$, podemos empregar a Eq. (4.50) para aproximar, até a menor ordem possível de correção, as frequências de portadora e de batimento por

$$\omega_0 \ll \omega \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{\Omega} \approx \omega \\ \Delta\Omega \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega} \end{cases}, \quad (4.52)$$

fornecendo finalmente a solução aproximada para acoplamento fraco,

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx A \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega} t\right) \cos(\omega t) \\ x_2(t) &\approx A \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega} t\right) \sin(\omega t) \end{aligned}, \quad \text{para } \omega_0 \ll \omega. \quad (4.53)$$

Nesse cenário, o movimento segue duas escalas de tempo distintas. Na escala rápida, dada pelo inverso de ω , vemos a oscilação de uma partícula praticamente como ocorreria sem acoplamento. Na escala lenta, a amplitude dessa oscilação varia no intervalo típico de tempo dado pelo inverso da frequência de batimento $\tau = 2\pi/\Delta\Omega$.

O movimento se inicia todo concentrado na partícula 1, que oscila como se não existisse a partícula 2, parada. Lentamente (i.e. no tempo de algumas oscilações), o acoplamento faz com que a amplitude do

⁴No tipo de interação fundamental entre átomos e luz (cuja consideração motivou a construção da mecânica quântica por Heisenberg), o acoplamento entre esses dois osciladores (a luz, um oscilador eletromagnético; o átomo, um dipolo elétrico oscilante) produz desvios nas frequências de vibração atômicas, no efeito chamado de *lightshift*.

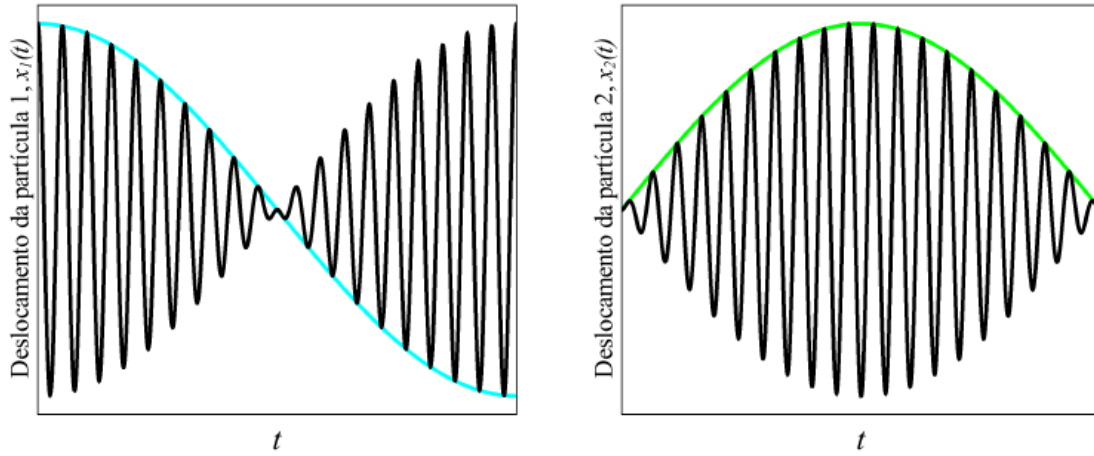


Figura 4.3: Deslocamentos das partículas 1 e 2 no tempo para $\Delta\Omega \ll \bar{\Omega}$. A interferência entre os dois modos oscilantes produz efeito de batimento nos deslocamentos das partículas. Energia é transferida da partícula 1 para a partícula 2 na escala de tempo $\sim 1/\Delta\Omega$, enquanto as oscilações continuam ocorrendo com frequência livre $\bar{\Omega} \approx \omega$.

movimento da partícula 1 vá diminuindo e a partícula 2 comece a oscilar com pequena amplitude. De fato, para tempos δt curtos com relação a τ , as soluções podem ser escritas como

$$\begin{aligned} x_1(\delta t \ll \tau) &\approx A \left(1 - \frac{(2\pi\delta t)^2}{\tau^2} \right) \cos(\omega\delta t), \\ x_2(\delta t \ll \tau) &\approx A \frac{2\pi\delta t}{\tau} \sin(\omega\delta t), \end{aligned} \quad (4.54)$$

de onde vemos que a amplitude da oscilação da partícula 1 decresce quadraticamente no tempo, enquanto a amplitude da partícula 2 cresce linearmente. Energia se transfere da partícula 1 para a partícula 2.

Crucialmente, a Eq. (4.53) nos mostra que a amplitude de oscilação da partícula 2 continua aumentando até que a situação inicial se *inverte* no instante $t = \tau/4$, quando então a partícula 2 se move com amplitude máxima e a partícula 1 permanece praticamente imóvel. Temos para instantes $t = \tau + \delta t$ a expressão aproximada

$$\begin{aligned} x_1(t \approx \tau/4) &\approx A \frac{2\pi\delta t}{\tau} \cos(\omega\delta t + \theta), \\ x_2(t \approx \tau/4) &\approx A \left(1 - \frac{(2\pi\delta t)^2}{\tau^2} \right) \sin(\omega t + \theta). \end{aligned} \quad (4.55)$$

A fase $\theta = \omega\tau$ advém do fato de não serem $\Delta\Omega$ e $\bar{\Omega}$ necessariamente múltiplas uma da outra. Nesse instante, a energia mecânica é totalmente transferida da partícula 1 para a partícula 2. A evolução posterior do sistema leva ao efeito inverso do que discutimos, e a partícula 2 passa a transferir energia de volta à partícula 1, e o ciclo se reinicia.

A magnitude do acoplamento não altera a forma dos modos normais, mas pode ser vista pelo intervalo de tempo τ de transferência total de energia entre os osciladores. Quanto maior o acoplamento, menor o valor de τ , e vice-versa. Para acoplamento tendendo a zero, as partículas se comportam cada vez mais como se fossem sistemas isolados.

Esse fenômeno de troca de energia entre os osciladores é bastante comum em diversos sistemas físicos acoplados fracamente, quando a energia vai fluindo lentamente de uma parte inicialmente excitada para as

demais. De fato, o que estamos vendo aqui é o modelo mais simples possível para se começar a entender o fenômeno irreversível de *perda* de energia mecânica. Não é difícil imaginar que acoplar a partícula 2 a outra partícula, ou mesmo acoplar a partícula 1 a várias partículas simultaneamente, deve produzir um fluxo de energia da partícula 1 para as demais sem, no entanto, haver o retorno da energia à partícula 1: a energia deve se espalhar no sistema, sem volta.

Na verdade, é possível provar que todo sistema mecânico possui um tempo de recorrência em que retorna à condição inicial (teorema de Poincaré), significando que a energia deveria, em princípio, sempre retornar para a partícula de onde partiu; na realidade, o tamanho do sistema (e sua integrabilidade) influencia diretamente o tempo de recorrência, tornando-o tão grande que pode ser maior do que a idade do universo, i.e. infinito para todos os propósitos práticos. Cria-se então uma irreversibilidade efetiva do sistema e um sentido preferencial para o fluxo de energia com extensões simples desse modelo.

Modos normais de vibração como objetos físicos. Os dois tipos de soluções normais encontradas requerem combinações específicas dos deslocamentos das partículas. A solução da Eq. (4.26) envolve a combinação simétrica de deslocamentos, enquanto a Eq. (4.34) exige sua combinação antissimétrica.

Esse tipo de solução nos sugere considerar desde o início, já nas equações de movimento, essas mesmas combinações lineares das funções de deslocamento, pela introdução de novas funções. Apenas reescrevemos abaixo a Eq. (4.11) eliminando κ pelo uso da Eq. (4.21) para uniformizar a notação:

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 + \left(\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) z_1 - \frac{\omega_0^2}{2} z_2 = 0, \\ \ddot{z}_2 + \left(\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) z_2 - \frac{\omega_0^2}{2} z_1 = 0. \end{cases} \quad (4.56)$$

Partimos então desse ponto para considerarmos a troca de variáveis

$$z_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2) \quad \text{e} \quad z_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2). \quad (4.57)$$

e seu efeito no sistema da Eq. (4.56). A soma de suas equações e, abaixo, a subtração das mesmas fornecem

$$\begin{cases} \ddot{z}_+ + \left(\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) z_+ - \frac{\omega_0^2}{2} z_+ = 0 \\ \ddot{z}_- + \left(\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) z_- + \frac{\omega_0^2}{2} z_- = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{z}_+ + \omega^2 z_+ = 0 \\ \ddot{z}_- + (\omega^2 + \omega_0^2) z_- = 0 \end{cases}, \quad (4.58)$$

ou seja, as equações se desacoplam nas funções $z_{\pm}(t)$, tornando o sistema um conjunto de equações diferenciais totalmente independentes! As soluções da Eq. (4.58) tornam-se óbvias,

$$z_+(t) = e^{i\Omega_+ t} \quad \text{e} \quad z_-(t) = e^{i\Omega_- t}, \quad (4.59)$$

em que identificamos as duas frequências já conhecidas de vibração

$$\Omega_+ = \Omega_1 \quad \text{e} \quad \Omega_- = \Omega_2. \quad (4.60)$$

Deslocamentos reais de partículas se dão pelas funções *coletivas* desacopladas $x_{\pm}(t) = \text{Re}\{\tilde{A}_{\pm} z_{\pm}(t)\}$,

$$x_+(t) = A_+ \cos(\Omega_+ t + \phi_+) \quad \text{e} \quad x_-(t) = A_- \cos(\Omega_- t + \phi_-), \quad (4.61)$$

em que definimos as amplitudes complexas $\tilde{A}_\pm = A_\pm e^{i\phi_\pm}$ em termos de constantes reais. As funções $x_\pm(t)$ não se referem ao movimento de uma partícula, mas já de início a um *padrão* de movimento para duas partículas.

Primeiramente, notemos que não faz muito sentido tomar a combinação linear de $x_+(t)$ e $x_-(t)$ para se obter uma ‘solução geral’ para alguma coisa, como é de praxe. Afinal, não se trata aqui de duas soluções independentes de uma mesma equação, mas de soluções de equações independentes, sem qualquer relação uma com a outra. A pergunta que se faz é: se conseguimos escrever equações de movimento para cada um dos modos de vibração, podemos atribuir-lhes status de ‘objeto físico’ em si, tal como pensamos numa partícula?

A primeira evidência de que a resposta é ‘sim’ aparece pela possibilidade de escrevermos uma lagrangiana para cada modo de vibração. De fato, as equações de movimento só puderam ser tornadas independentes nas variáveis coletivas porque essa separação já devia ser possível no nível da lagrangiana. Analisemos então a forma da lagrangiana da Eq. (4.8) quando se substituem os deslocamentos $x_j(t)$ das partículas em favor das coordenadas *coletivas* $x_\pm(t)$. Tomando já sua parte real, a transformação inversa da Eq. (4.57) é⁵

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ + x_-) \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-). \quad (4.62)$$

Assim, a lagrangiana do sistema se reescreve nessas coordenadas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_+, x_-, \dot{x}_+, \dot{x}_-) &= \frac{1}{4}m(\dot{x}_+ + \dot{x}_-)^2 + \frac{1}{4}m(\dot{x}_+ - \dot{x}_-)^2 - \frac{1}{4}m\omega^2(x_+ + x_-)^2 - \frac{1}{4}m\omega^2(x_+ - x_-)^2 - \frac{1}{4}\kappa x_-^2 \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}_+^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_-^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_+^2 - \frac{1}{2}m(\omega^2 + \omega_0)x_-^2 \\ &= \mathcal{L}_+(x_+, \dot{x}_+) + \mathcal{L}_-(x_-, \dot{x}_-), \end{aligned} \quad (4.63)$$

ou seja, como a *soma* de duas lagrangianas independentes,

$$\mathcal{L}_+(x_+, \dot{x}_+) = \frac{1}{2}m\dot{x}_+^2 - \frac{1}{2}m\Omega_+^2 x_+^2, \quad (4.64)$$

$$\mathcal{L}_-(x_-, \dot{x}_-) = \frac{1}{2}m\dot{x}_-^2 - \frac{1}{2}m\Omega_-^2 x_-^2. \quad (4.65)$$

Se um objeto mecânico possui uma lagrangiana para descrevê-lo, é porque ele provavelmente possui relevância física como ‘algo em si’. Afinal, a lagrangiana contém a descrição completa de qualquer sistema mecânico. As lagrangianas acima estabelecem os modos normais de vibração simétrico (\mathcal{L}_+) e antissimétrico (\mathcal{L}_-) como osciladores físicos independentes do ponto de vista da dinâmica, ainda que só possam existir de forma deslocalizada no Espaço⁶ sobre o ‘substrato’ de um coletivo de partículas.

Do ponto de vista físico mais profundo, com a formulação desacoplada das vibrações surge a situação em que um par de partículas, concretamente formadas por massas e molas, ‘criam’ através do acoplamento entre elas dois ‘super-osciladores’ independentes, que não são nem uma partícula nem a outra, mas existem como combinações específicas de movimentos das duas⁷. A independência das lagrangianas \mathcal{L}_\pm nos indica

⁵Os fatores $1/\sqrt{2}$ que aqui aparecem são consequência das constantes de proporcionalidade escolhidas na Eq. (4.57). Eles permitem obter uma forma mais ‘simétrica’ para a transformação e sua inversa, pois ambas apresentam o mesmo fator. Caso tivéssemos eliminado a constante de proporcionalidade da Eq. (4.57), a Eq. (4.62) para sua inversa apresentaria um fator $1/2$.

⁶Vamos grafar a palavra ‘espaço’ com inicial maiúscula para nos referirmos ao espaço tridimensional euclidiano que habitamos.

⁷A situação é, ‘forçando um pouco a barra’, análoga ao que ocorre com pessoas em interação social: a dinâmica de um grupo é diferente da simples soma de dinâmicas de cada indivíduo, pois cada pessoa modifica seu comportamento, ainda que não perceba (e ainda que não queira), para produzir algo que só é possível em interação com o grupo. Pode ser nesse caso conveniente definir o ‘grupo’ como o ‘objeto em si’ a ser tratado, esquecendo-se de que em nível fundamental consiste de pessoas em interação. As partículas fazem algo parecido, embora de forma infinitamente mais simples de entender.

que a descrição física mais simples do movimento favorece chamar de ‘osciladores’ não as partículas, como seria de praxe à primeira vista, mas os próprios ‘super-osciladores’ que são os modos normais de vibração, ainda que sejam entidades um pouco mais abstratas.

Essa interpretação do sistema mecânico em termos de ‘super-osciladores’ ou, em terminologia mais própria, *modos de vibração*, é bastante utilizada em mecânica quântica mais avançada para se obter a quantização da energia de sistemas acoplados. Quasi-partículas⁸, tal como o fóton, nada mais são do que excitações de modos de vibração de algum objeto físico subjacente (no caso do fóton, esse objeto é o campo eletromagnético). Em particular, a quantização da energia de modos de vibração de osciladores mecânicos leva à criação de quasi-partículas chamadas ‘fônons’, vibrações de uma rede de partículas acopladas (ondas sonoras) como ocorre e.g. em sólidos. É possível pela superposição de excitações concomitantes em modos diferentes obter quasi-partículas localizadas no Espaço, dando origem a pacotes de onda bem localizados com várias propriedades próprias de partículas materiais. Na verdade, em teoria quântica de campos, mesmo as coisas a que chamamos classicamente de ‘partículas’ passam a ser, de fato, excitações de campos deslocalizados no espaço (campo do elétron, campo do múon etc) decompostos em termos de modos normais, fazendo parecer (corretamente) tratar-se de mera ilusão a existência de partículas. Nessas teorias, partículas podem ser criadas ou aniquiladas, e apenas os campos permanecem como entidades físicas fundamentais.

Concluimos da equivalência entre as lagrangianas das Eqs. (4.8) e (4.63) que o sistema de dois osciladores materiais pode tanto ser descrito com foco em *partículas* oscilantes acopladas, por coordenadas $x_j(t)$, como em termos de *modos* de vibração independentes representados por coordenadas coletivas $x_{\pm}(t)$. A escolha por uma dessas visões é motivada apenas por qual formulação se torna mais simples de ser resolvida em determinado contexto, já que podemos trocar entre formulações uma vez encontrada a solução.

Caso precisemos considerar o movimento de cada partícula individual a partir da solução em termos de modos normais, é necessário utilizar a transformação da Eq. (4.62) para eliminar as funções coletivas em favor dos deslocamentos $x_j(t)$, como se fosse uma ‘troca de base modal’. Obtemos então por outra via a mesma solução geral obtida anteriormente,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}A_+ \cos(\Omega_+t + \phi_+) + \frac{1}{2}A_- \cos(\Omega_-t + \phi_-), \quad (4.66)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{2}A_+ \cos(\Omega_+t + \phi_+) - \frac{1}{2}A_- \cos(\Omega_-t + \phi_-). \quad (4.67)$$

Comparando esse resultado àquele da Eq. (4.41), vemos que as constantes determinadas pelas condições iniciais se relacionam como $A_{\Omega_1} = A_+/2$ e $A_{\Omega_2} = A_-/2$.

4.1.2 Tratamento matricial

O sistema de dois osciladores idênticos acoplados nos permite ilustrar os efeitos mais básicos do acoplamento, em especial o surgimento de modos coletivos de vibração. Façamos agora um pequeno incremento em nosso modelo pelo tratamento de dois osciladores distintos. Esse sistema nos permitirá entender os rudimentos de efeitos observados em inúmeros sistemas físicos mais avançados, tais como aspectos básicos da interação entre átomos e luz. É curioso mesmo notar que existem hoje áreas de pesquisa inteiras dedicadas

⁸O prefixo *quasi* vem do latim e significa ‘como se fosse’.

apenas ao estudo de osciladores acoplados em situações interessantes!⁹

Vamos aplicar nesta seção um formalismo matemático mais compacto para lidar com esse tipo de sistema, o que nos permitirá dominar o ferramental necessário para tratar um número arbitrário de osciladores acoplados.

Existem duas possibilidades elementares de tornarmos distintos os osciladores mecânicos considerados anteriormente: ou eles diferem em suas massas e/ou em suas molas. Vamos escolher osciladores diferindo em suas frequências próprias por efeito apenas da elasticidade de suas molas, mantendo a mesma inércia ao movimento para ambas as partículas¹⁰, i.e. $m_1 = m_2 := m$. O motivo de nossa escolha é o fato de que a massa influencia não só a frequência de oscilação, mas também a inércia do oscilador a influências externas quaisquer, enquanto a elasticidade da mola muda apenas sua frequência livre. Esperamos com isso produzir uma fenomenologia de oscilações acopladas que vá à essência da interação entre osciladores diferentes sem a inclusão de complicações adicionais.

A lagrangiana do sistema difere daquela apresentada na Eq. (4.8) apenas pelas frequências próprias dos osciladores individuais, tomadas agora como ω_1 e ω_2 . Sua forma é

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}m\omega_1^2 x_1^2 - \frac{1}{2}m\omega_2^2 x_2^2 - \frac{1}{2}\kappa(x_1 - x_2)^2. \quad (4.68)$$

Essa lagrangiana fornece as equações de movimento

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = 0 & \Rightarrow m\omega_1^2 x_1 + \kappa(x_1 - x_2) + m\ddot{x}_1 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = 0 & \Rightarrow m\omega_2^2 x_2 - \kappa(x_1 - x_2) + m\ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Uma maneira conveniente de lidar com esse tipo de sistema de equações acopladas é representá-la em forma matricial. Organizamos os deslocamentos das partículas na matriz coluna

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

para escrever a Eq. (4.69) na forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = 0, \quad (4.71)$$

em que \mathbf{M} e \mathbf{K} são matrizes constantes definidas como

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} m\omega_1^2 + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & m\omega_2^2 + \kappa \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Buscamos uma solução oscilatória para $\mathbf{X}(t)$. A maneira mais conveniente de se resolver esse tipo de equação é substituí-la por uma equação matricial complexa equivalente, da forma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K}\mathbf{Z} = 0, \quad \text{com} \quad \mathbf{Z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

⁹De fato, o Prêmio Nobel de Física de 2012 foi atribuído aos avanços experimentais na manipulação de sistemas desse tipo no regime quântico.

¹⁰Se você achar interessante, é um exercício simples escrever as equações de movimento no caso mais geral possível para perceber que o efeito de massas diferentes é equivalente a se ter uma constante de acoplamento efetivamente distinta para os osciladores. Ocorrerá que o mais massivo tenderá a ser menos afetado pelo acoplamento.

tal que a solução procurada para os deslocamentos das partículas seja dada por

$$\mathbf{X}(t) = \text{Re}\{\mathbf{Z}(t)\}. \quad (4.74)$$

Como anteriormente, precisamos supor uma solução em que ambas as partículas oscilem com a mesma frequência Ω , ou seja,

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{v}e^{i\Omega t}, \quad \text{em que } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

da qual segue

$$\ddot{\mathbf{Z}}(t) = -\Omega^2\mathbf{Z}(t). \quad (4.76)$$

A equação de movimento [Eq. (4.73)] dá lugar então a uma equação matricial para matrizes reais constantes,

$$(-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{v} = 0. \quad (4.77)$$

A solução do movimento requer determinarmos as frequências normais de vibração Ω e as matrizes \mathbf{v} de coeficientes associadas.

Estamos interessados nas soluções não triviais dessa equação, existentes caso a matriz $-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ não possua inversa (se possuir, a solução é a trivial, pois então $\mathbf{v} = (-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$). A condição para que uma matriz não seja inversível é ser nulo seu determinante. Assim, as frequências Ω possíveis devem ser tais que

$$|-\Omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0. \quad (4.78)$$

Explicitamente, temos

$$\begin{vmatrix} m(-\Omega^2 + \omega_1^2) + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & m(-\Omega^2 + \omega_2^2) + \kappa \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \left(\Omega^2 - \omega_1^2 - \frac{\kappa}{m}\right) \left(\Omega^2 - \omega_2^2 - \frac{\kappa}{m}\right) - \frac{\kappa^2}{m^2} = 0 \quad (4.79)$$

Vemos daí que ainda faz sentido manter a definição de κ da Eq. (4.21) para simplificar a forma das expressões, e por isso passamos a utilizá-la a partir deste ponto¹¹. A Eq. (4.79) requer determinarmos as raízes do polinômio

$$\left(\Omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\Omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\right) + \omega_1^2\omega_2^2 - \frac{\omega_0^4}{4} = 0, \quad (4.80)$$

cujas soluções são

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4}. \quad (4.81)$$

No caso mais simples em que o acoplamento é estritamente nulo, obtemos as frequências livres de oscilação das partículas, i.e. $\Omega_+ = \omega_1$ e $\Omega_- = \omega_2$ se $\omega_0 = 0$, como esperado.

¹¹Na verdade, a ideia por trás da definição da Eq. (4.21) continua sendo natural mesmo no caso de partículas com massas diferentes, caso em que deve ser atualizada para $\omega_0 = \sqrt{\kappa/\mu}$.

Modos normais de vibração. Com as soluções da Eq. (4.81) para as frequências normais de vibração, retornamos à Eq. (4.77) para determinarmos a forma como as partículas devem se mover uma com relação à outra em cada modo normal. As equações matriciais que precisamos resolver são

$$(-\Omega_{\pm}^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{v} = 0. \quad (4.82)$$

Explicitamente, temos

$$\begin{pmatrix} -\Omega_{\pm}^2 + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & -\Omega_{\pm}^2 + \omega_2^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,\Omega_{\pm}} \\ v_{2,\Omega_{\pm}} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.83)$$

em que os coeficientes v_{j,Ω_+} e v_{j,Ω_-} possuem um índice adicional com relação à definição da Eq. (4.75) a fim de denotar a que frequência normal correspondem.

Substituindo nessa relação os valores de Ω_{\pm} dados pela Eq. (4.81), obtemos para a Eq. (4.83) a expressão

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,\Omega_{\pm}} \\ v_{2,\Omega_{\pm}} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.84)$$

que nos fornecem a condição

$$\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \right) v_{1,\Omega_{\pm}} = \frac{\omega_0^2}{2} v_{2,\Omega_{\pm}} \quad (4.85)$$

Construímos as soluções escolhendo as constantes $v_{j,\Omega_{\pm}}$ mais simples possíveis para obter

$$\mathbf{v}_{\Omega_+} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{2} \\ \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\Omega_-} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{2} \\ \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Essas matrizes de coeficientes são definidas a menos de constantes globais arbitrárias.

Com isso, as funções complexas descrevendo os modos de vibração evoluem como

$$\mathbf{Z}_{\Omega_+}(t) = \mathbf{v}_{\Omega_+} e^{i\Omega_+ t} \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}_{\Omega_-}(t) = \mathbf{v}_{\Omega_-} e^{i\Omega_- t}. \quad (4.87)$$

Seguem daí os deslocamentos das partículas produzidos pelos modos de vibração,

$$\mathbf{X}_{\Omega_{\pm}}(t) = \text{Re}\{\tilde{A}_{\Omega_{\pm}} \mathbf{Z}_{\pm}(t)\}, \quad \text{com} \quad \tilde{A}_{\Omega_{\pm}} := A_{\Omega_{\pm}} e^{i\phi_{\Omega_{\pm}}} = C_{\Omega_{\pm}} - iS_{\Omega_{\pm}}, \quad (4.88)$$

em que definimos as amplitudes complexas $\tilde{A}_{\Omega_{\pm}}$ em funções de quantidades reais para podermos ajustar as soluções às condições iniciais. Os dois padrões de deslocamentos possíveis se tornam, portanto,

$$\mathbf{X}_{\Omega_+}(t) = A_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \cos(\Omega_+ t + \phi_{\Omega_+}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_{\Omega_-}(t) = A_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \cos(\Omega_- t + \phi_{\Omega_-}), \quad (4.89)$$

ou, escritos de forma equivalente,

$$\mathbf{X}_{\Omega_+}(t) = C_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \cos(\Omega_+ t) + S_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \sin(\Omega_+ t) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_{\Omega_-}(t) = C_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \cos(\Omega_- t) + S_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \sin(\Omega_- t). \quad (4.90)$$

Solução geral em representação matricial. Como os dois modos de vibração fornecem soluções independentes para o movimento das partículas, a solução mais geral possível envolve a combinação linear das duas soluções da Eq. (4.88),

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{\Omega_+}(t) + \mathbf{X}_{\Omega_-}(t), \quad (4.91)$$

que pode ser escrita explicitamente utilizando a forma da Eq. (4.89),

$$\mathbf{X}(t) = A_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \cos(\Omega_+ t + \phi_{\Omega_+}) + A_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \cos(\Omega_- t + \phi_{\Omega_-}) \quad (4.92)$$

ou da Eq. (4.90),

$$\mathbf{X}(t) = C_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \cos(\Omega_+ t) + S_{\Omega_+} \mathbf{v}_{\Omega_+} \sin(\Omega_+ t) + C_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \cos(\Omega_- t) + S_{\Omega_-} \mathbf{v}_{\Omega_-} \sin(\Omega_- t). \quad (4.93)$$

Por exemplo, a solução da Eq. (4.92) se escreve explicitamente como

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} A_{\Omega_+} \frac{\omega_0^2}{2} \cos(\Omega_+ t + \phi_{\Omega_+}) + A_{\Omega_-} \frac{\omega_0^2}{2} \cos(\Omega_- t + \phi_{\Omega_-}) \\ A_{\Omega_+} \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \right) \cos(\Omega_+ t + \phi_{\Omega_+}) + A_{\Omega_-} \left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4} \right) \cos(\Omega_- t + \phi_{\Omega_-}) \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Mais efeitos físicos do movimento acoplado. O acoplamento de dois osciladores diferentes nos permite entender outros fenômenos decorrentes da interação entre eles. Consideremos a situação em que dois osciladores muito diferentes tornam-se controladamente acoplados, seja pela variação do acoplamento ω_0 , seja pela sintonização da frequência livre de um deles (e.g. ω_2). Gostaríamos de entender como as frequências normais e os padrões de vibração se comportam conforme no espaço de parâmetros físicos do problema.

É conveniente aqui definir a diferença $\Delta\omega$ entre as frequências livres de oscilação, ou *dessintonia* entre os osciladores, pelas relações

$$\omega_1 := \omega + \Delta\omega \quad \text{e} \quad \omega_2 := \omega, \quad (4.95)$$

em que introduzimos a frequência $\omega \approx \omega_1, \omega_2$ para simplificar termos em que $\Delta\omega$ puder ser desprezado. Além disso, em sistemas físicos típicos, as frequências livres dos osciladores independentes são muito maiores do que as demais, e dominam a dinâmica para tempos curtos, ou seja, temos

$$\Delta\omega, \omega_0 \ll \omega_1, \omega_2 \approx \omega. \quad (4.96)$$

Vamos assumir essa aproximação em todas as deduções a seguir. Fisicamente, ela corresponde ao limite em que os osciladores possuem bom fator de qualidade (i.e. oscilam muitas vezes antes que qualquer outra coisa possa ocorrer), caso em que é possível estudar claramente o efeito da dessintonia e do acoplamento sobre o movimento por ocorrerem em escalas de tempo muito longas quando comparadas aos períodos típicos de oscilação. Podemos com isso simplificar alguns termos, da forma

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 \approx 2(\omega^2 + \omega\Delta\omega) \quad \text{e} \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = (\omega_1 + \omega_2)(\omega_1 - \omega_2) \approx 2\omega\Delta\omega, \quad (4.97)$$

para simplificar a expressão das frequências normais de vibração [Eq. (4.81)] por

$$\Omega_{\pm}^2 \approx \omega^2 + \omega\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{2} \pm \sqrt{(\omega\Delta\omega)^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2}. \quad (4.98)$$

Essa expressão nos mostra que efeitos de acoplamento e dessintonia sobre as frequências normais podem ocorrer em qualquer região de parâmetros entre dois cenários limites, a serem estudados a seguir, a depender de qual dos dois termos se torna desprezível no argumento da raiz quadrada acima.

No primeiro cenário, para acoplamento pequeno, i.e. $\omega_0^2 \ll \omega\Delta\omega$, os termos em ω_0 da raiz quadrada na Eq. (4.98) são desprezados para obtermos

$$\Omega_{\pm}^2 \approx \omega^2 + \omega\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{2} \pm \omega\Delta\omega \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\pm} \approx \omega + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right) \omega\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{4\omega}. \quad (4.99)$$

As frequências normais são, nesse limite,

$$\omega_0^2 \ll \omega\Delta\omega \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Omega_+ \approx \omega_1 + \frac{\omega_0^2}{4\omega}, \\ \Omega_- \approx \omega_2 + \frac{\omega_0^2}{4\omega}. \end{cases} \quad (4.100)$$

Assim, para pequenos acoplamentos, elas partem de seus valores livres ω_j para se desviarem juntas e de forma quadrática na frequência de acoplamento ω_0 . Portanto, a dessintonia entre Ω_{\pm} é mantida igual ao valor não perturbado, pois $\Omega_+ - \Omega_- = \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Para entender como se comportam os deslocamentos das partículas em cada modo normal, é conveniente fatorar $(\omega_1^2 - \omega_2^2)/2$ nas duas soluções da Eq. (4.86) para expandir a raiz quadrada em primeira ordem. Obtemos os modos aproximados

$$\mathbf{v}_{\Omega_+} \approx \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ -\frac{\omega_0^4}{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\omega_0^2}{4\omega\Delta\omega} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\Omega_-} \approx \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \\ 1 + \frac{\omega_0^4}{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{4\omega\Delta\omega} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.101)$$

em que simplificamos as matrizes mantendo apenas termos até ordem quadrática em ω_0 e usamos o fato de que fatores multiplicativos, desde que atuando em cada matriz como um todo, são arbitrários. Ao contrário do que vimos para osciladores estritamente idênticos, nesse caso o padrão dos modos de vibração *varia* com a magnitude do acoplamento e com a dessintonia.

Primeiramente, notemos que essa solução se reduz às oscilações livres para acoplamento estritamente nulo, como esperado, pois então

$$\omega_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\Omega_+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\Omega_-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.102)$$

de forma que os modos normais colapsam cada qual ao movimento individual de uma das partículas¹².

¹²Essa é uma diferença qualitativa com relação ao caso de osciladores idênticos estudado anteriormente: naquela situação, os modos normais eram sempre dados pelas combinações simétrica e antissimétrica dos deslocamentos de partículas, independentemente do acoplamento (i.e. inclusive para acoplamento nulo). É salutar nos perguntarmos em que de fundamental diferem esses dois sistemas. A resposta a essa aparente contradição já se evidencia na matemática: a Eq. (4.23) não é confiável para $\omega_0 = 0$, pois nesse caso nos oferece uma relação inconclusiva do tipo $0 = 0$. Fisicamente, isso pode ser devido ao fato de que os termos daquela equação não incluem todos os fatores físicos relevantes. De fato, não levamos em conta a dissipação no movimento das partículas, e por isso a afirmação de que os osciladores são idênticos não possui interpretação física clara; afinal, ‘idênticos’ deveria significar algo como ‘indistinguíveis’ com relação a alguma escala típica que fornecesse a precisão de cada frequência. Essa escala é dada pela dissipação, caso em que a pergunta deve ser reformulada para se tornar mais precisa: como se comportam os modos normais quando a dessintonia entre os osciladores é muito menor do que a dissipação? Para responder a essa pergunta, não há alternativa que não seja tratar o problema completo, incluindo dissipação.

Além disso, vemos já aparecerem as fases relativas esperadas entre os movimentos oscilatórios das partículas. No caso dos osciladores idênticos vistos anteriormente, a frequência normal mais baixa está associada ao modo simétrico (modo de centro de massa), enquanto a mais alta, ao modo antissimétrico (modo de chacoalhamento). Da mesma forma, vemos na Eq. (4.101) que a partícula com frequência de oscilação mais alta (ω_1) dá origem ao modo de vibração (Ω_+) no qual a partícula menos excitada oscila em oposição de fase (início do modo antissimétrico). O modo simétrico, por sua vez, é sugerido pela matriz \mathbf{v}_{Ω_+} , cujo modo normal (Ω_-) envolve no limite de pequeno acoplamento grande excitação da partícula 2 e uma pequena contribuição da partícula 1 oscilando em fase. Em ambos os casos, a amplitude de oscilação da partícula menos excitada de cada modo aumenta quadraticamente com a frequência de acoplamento ω_0 .

No segundo cenário limite, temos o acoplamento dominando completamente a dinâmica, $\omega\Delta\omega \ll \omega_0^2$. Podemos então desprezar o primeiro termo da raiz quadrada na Eq. (4.98) para obter

$$\Omega_{\pm}^2 \approx \omega^2 + \omega\Delta\omega + \frac{\omega_0^2}{2} \pm \frac{\omega_0^2}{2} \Rightarrow \Omega_{\pm} \approx \omega + \frac{\Delta\omega}{2} + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right) \frac{\omega_0^2}{2\omega}. \quad (4.103)$$

As frequências normais se tornam

$$\omega_0^2 \gg \omega\Delta\omega \Rightarrow \begin{cases} \Omega_+ \approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2\omega}, \\ \Omega_- \approx \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \end{cases} \quad (4.104)$$

Para acoplamentos muito fortes, a frequência mais alta (Ω_+) se desvia para valores ainda maiores, limitada apenas pela frequência de acoplamento, enquanto a menor delas tende ao valor médio entre as frequências livres. Como consequência, ocorre um ‘afastamento’ das frequências dos modos normais pela quantidade $\Omega_+ - \Omega_- \approx \omega_0^2/(2\omega) \gg \Delta\Omega$. O afastamento de frequências é um fenômeno bastante geral a ocorrer em osciladores acoplados em diversos outros contextos, sendo uma maneira estabelecida de se demonstrar experimentalmente que o sistema se encontra em regime de acoplamento forte.

Para o tratamento dos modos normais nesse limite, torna-se conveniente extrair o fator $\omega_0^2/2$ das matrizes para ignorar um dos termos no argumento da raiz quadrada da Eq. (4.86). Obtemos

$$\mathbf{v}_{\Omega_+} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + \frac{2\omega\Delta\omega}{\omega_0^2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\Omega_-} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \frac{2\omega\Delta\omega}{\omega_0^2} \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Nesse caso, os deslocamentos associados aos modos normais se aproximam do padrão observado para os osciladores idênticos: o modo com frequência mais alta (Ω_+) se torna arbitrariamente próximo do modo antissimétrico com o aumento do acoplamento, o mesmo valendo para o modo de mais baixa frequência (Ω_-) com relação ao modo simétrico.

Portanto, os padrões de deslocamentos associados aos modos normais de vibração se modificam com o aumento do acoplamento, dirigindo-se de forma suave desde a excitação de uma única partícula, para acoplamento muito pequeno, até a excitação simétrica ou antissimétrica das partículas, para acoplamento muito grande.

Para observar esses efeitos no laboratório, uma forma bastante utilizada de se verificar a presença de acoplamento forte em sistemas físicos se faz pela variação controlada da frequência livre de *um dos osciladores*; em muitos casos, pode ser mais fácil sintonizar as frequências livres do que variar o acoplamento.

Consideramos então o problema de como as frequências normais de oscilação se comportam quando as frequências livres dos osciladores são escaneadas para que entrem em *ressonância*¹³. Ocorre nessa situação o fenômeno a que chamamos de ‘anticruzamento’ de frequências, um efeito muito conhecido em sistemas quânticos fortemente acoplados¹⁴.

Supomos aqui sermos capazes de variar a frequência $\omega_1 = \omega + \Delta\omega$ de oscilação livre da partícula 1 pela manipulação direta da dessintonia $\Delta\omega$, enquanto a partícula 2 se mantém oscilando com a mesma frequência livre $\omega_2 = \omega$. O acoplamento ω_0 entre as partículas é mantido constante durante o processo.

É preciso nesse caso analisar a Eq. (4.98) sem realizarmos maiores aproximações, visto que $\Delta\omega$ precisa ser variado desde valores muito grandes com relação ao acoplamento até a magnitude nula. O resultado é apresentado na Fig. (4.4).

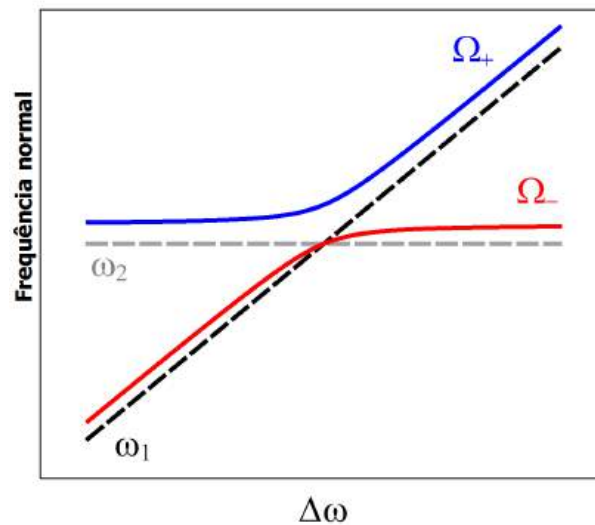


Figura 4.4: Anticruzamento de frequências. Sem acoplamento, as frequências livres ω_1 e ω_2 seguiriam as linhas tracejadas preta e cinza (respectivamente) como funções da dessintonia $\Delta\omega$, e se cruzariam em $\Delta\omega = 0$. O acoplamento produz frequências normais que se comportam assintoticamente como frequências livres para $|\Delta\omega| \rightarrow \infty$, mas que evitam o cruzamento na região $\Delta\omega \approx 0$.

Para grandes dessintonias, os osciladores, apesar de fortemente acoplados, não sofrem efeito mútuo perceptível do acoplamento, e acabam por se comportar como se fossem livres, uma vez que se encontram fora de ressonância. Isso pode ser visto no comportamento limite mostrado pela Eq. (4.100), na qual $\Delta\omega \gg \omega_0$: se a dessintonia é muito grande, então o termo de correção em ω_0^2 nessa mesma equação pode ser

¹³Notemos que a ressonância nesse caso segue um contexto bastante diferente daquele obtido forçando-se um oscilador harmônico simples com uma força externa periódica. Naquele caso, é tácita a idealização de que o agente da força pode ceder quantidade arbitrariamente grande de energia ao oscilador mecânico sem sentir qualquer efeito de esgotamento em sua própria fonte de energia. No caso dos osciladores acoplados, a ressonância ocorre de forma mútua, e um oscilador não é capaz de forçar o outro por muito tempo, pois logo toda a sua energia lhe é tomada, apenas para lhe ser devolvida instantes depois. Por isso, o acoplamento forte produz efeitos de natureza distinta daqueles obtidos numa ressonância mais simples: ao afetar o sistema oscilatório de forma tão profunda, torna seu comportamento acoplado completamente diferente do desacoplado.

¹⁴Na mecânica clássica, a energia do oscilador depende apenas da amplitude de oscilação. Já em sistemas microscópicos, a necessidade de quantização descoberta por Max Planck faz com que a energia passe a ser proporcional à frequência do oscilador, uma mudança de paradigma pontuada claramente por Albert Einstein na explicação do efeito fotoelétrico. Portanto, o acoplamento entre osciladores quânticos leva em geral a mudanças na *energia* do sistema.

desprezado e as frequências normais tendem às frequências livres em ordem zero de correção, i.e. $\Omega_+ \approx \omega_1$ e $\Omega_- \approx \omega_2$.

A região crítica onde ocorre o anticruzamento se localiza precisamente no ponto onde ocorreria a ressonância entre as partículas, em $\Delta\omega \approx 0$. Caso não houvesse acoplamento, encontraríamos a situação em que as frequências livres dos osciladores se ‘cruzariam’ nesse ponto, pois $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$. No entanto, o acoplamento não permite que as frequências normais de vibração se encontrem, segundo a Eq. (4.100), e seus valores se afastam mutuamente no entorno da ressonância pela magnitude $\sim \omega_0^2$ do acoplamento. É esse ‘cruzamento evitado’ das frequências normais de vibração, consequência do acoplamento forte entre os osciladores livres, a que se chama ‘anticruzamento’. A observação de um anticruzamento é clara evidência de que os osciladores se encontram no regime de acoplamento forte.

Um efeito curioso decorrente do anticruzamento é a possibilidade de transferência total de energia entre os osciladores pela variação lenta da dessintonia. Consideremos a situação em que apenas a partícula 1 oscila inicialmente e a partícula 2 se encontra muito longe de ressonância, com dessintonia negativa $\Delta\omega \ll -\omega_0^2/\omega$. No gráfico da Fig. (4.4), o sistema nessa situação se encontraria sobre a curva vermelha, em sua região extrema à esquerda. O modo excitado é $\Omega_+ \approx \omega_1$, que agora faz as vezes de modo de menor frequência por conta da dessintonia negativa. Se aumentarmos ‘adiabaticamente’ a frequência da partícula 1, i.e. de forma muito mais lenta do que a escala temporal típica de oscilação do sistema, o modo de vibração excitado deve continuar a ser aquele com frequência Ω_+ , apesar de seu padrão de movimento variar lentamente no tempo, até que na ressonância as duas partículas trocam energia freneticamente. A manutenção do incremento lento de $\Delta\omega$ obriga a energia de oscilação a permanecer no modo Ω_+ , uma vez que os modos continuam a ser independentes e, portanto, proibidos de trocarem energia. No entanto, com a passagem pela ressonância, o modo Ω_+ passa a ser o modo de maior frequência, pois $\Delta\omega > 0$, de forma que é nesse caso a partícula 2 que oscila com maior amplitude. O aumento da dessintonia leva o sistema à situação em que as partículas se encontram novamente longe de ressonância, cessando a troca de energia entre elas: a partícula excitada termina sendo a partícula 2, e o sistema termina na extrema direita da curva vermelha da Fig. (4.4). Com isso, a transição adiabática do sistema através da ressonância o obriga a seguir uma das curvas da Fig. (4.4), determinada pela partícula inicialmente em movimento; com a troca de sinal da dessintonia, o modo excitado permanece o mesmo enquanto se troca a partícula em movimento, e a energia acaba por ser transferida entre as partículas uma vez concluído o cruzamento da ressonância¹⁵.

4.2 Problema geral das oscilações acopladas

Tratamos nesta seção do problema geral de vibrações em sistemas físicos com um número arbitrário de partículas em interação. Consideramos a situação em que existe uma configuração estável do sistema em torno da qual ocorrem as oscilações. Além disso, os movimentos devem possuir amplitudes suficientemente pequenas para que cada partícula não consiga explorar localidades muito distantes de sua vizinhança e mantenha aproximadamente constante sua interação com as demais.

¹⁵Em sistemas atômicos, essa forma de excitar o átomo do nível fundamental para seu nível excitado é chamada de ‘passagem adiabática’. Essa técnica também é utilizada em sistemas de eletrodinâmica quântica em cavidades para se realizar a transferência eficiente de população atômica entre níveis de energia.

4.2.1 Lagrangiana

A dinâmica de um sistema composto por N partículas é determinada pela soma K das energias cinéticas individuais e pela energia de interação U entre todas as partículas. A lagrangiana resultante é uma função de $3N$ coordenadas espaciais \vec{r}_j , com $j = 1, 2, \dots, N$, e suas derivadas temporais $\dot{\vec{r}}_j$, e se escreve

$$\mathcal{L}(\{\vec{r}_j\}, \{\dot{\vec{r}}_j\}) = K(\{\dot{\vec{r}}_j\}) - U(\{\vec{r}_j\}). \quad (4.106)$$

Essa expressão estabelece tacitamente que consideraremos a lagrangiana sem dependência temporal explícita (i.e. sistema fechado) e energia potencial dependente apenas das posições das partículas¹⁶.

Aproximação da energia potencial. A energia potencial de interação depende da *configuração global* do sistema. Se a imaginarmos, conforme percebida por uma das partículas, como um ‘terreno em relevo’ (embora ele se estenda em muito mais do que três dimensões!), isso significa que o formato instantâneo desse terreno depende de onde se encontram *todas* as demais partículas. De maneira equivalente, a variação da posição dessa única partícula afeta o relevo sentido por todas as demais. Assim, no cenário mais geral possível, o movimento de cada partícula altera constantemente o relevo do terreno sentido por cada uma das demais, o que se reflete no movimento dessa mesma partícula no instante seguinte, e assim por diante: torna-se difícil ou mesmo impossível encontrar solução fechada para o problema.

Por isso, entender o movimento mais simples possível requer aproximações. Queremos a situação em que o relevo do terreno não varie drasticamente durante o movimento, mas, pelo contrário, seja praticamente constante. A configuração em que isso ocorre é aquela em que cada partícula se encontra muito próxima de um mínimo local de seu terreno, e se restringe a movimentar-se em suas vizinhanças. Temos nesse caso uma solução autoconsistente em que (i) existe a configuração estável e (ii) as mudanças criadas por cada partícula sobre a energia potencial sentida por todas as demais pode ser descrita como uma correção quadrática em seus deslocamentos (dando origem a movimentos harmônicos).

Os termos fundamentais da energia potencial a fornecerem movimentos acoplados são produtos de coordenadas de duas partículas. De fato, como vimos nos exemplos considerando dois osciladores acoplados, a energia potencial da Eq. (4.49) pode ser escrita como

$$U_I(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\kappa x_1^2 + \frac{1}{2}\kappa x_2^2 - \kappa x_1 x_2. \quad (4.107)$$

Os primeiro e segundo termos simplesmente se somam às energias potencias de cada partícula do tipo $\kappa x_j^2/2$, fornecendo uma primeira correção à frequência de oscilação livre devida ao acoplamento. Ou seja, esses termos não são capazes de modificar o padrão do movimento e, portanto, criar os modos normais. O termo essencial é então o último, $\frac{1}{2}\kappa x_1 x_2$, pois é ele que produz o acoplamento entre as equações do movimento e transforma a dinâmica acoplada em algo qualitativamente diferente da dinâmica livre.

Para um sistema com $i = 1, 2, \dots, N$ partículas, vale nesse regime de quase equilíbrio ainda o acoplamento aos *pares*, pois termos cúbicos nas coordenadas podem ser por hipótese desprezados. Isso se dá porque

¹⁶Fica com isso excluída de nosso formalismo a interação das partículas com campos magnéticos (externos ou induzidos por elas mesmas). É possível ainda, no entanto, tratar a dinâmica de partículas interagindo através de campos elétricos, desde que os movimentos das partículas carregadas envolvidas seja lento o suficiente para que a dinâmica seja dominada por campos elétricos estáticos em primeira ordem nas posições das partículas.

podemos nesse caso expandir a energia potencial até mais baixa ordem nas posições de todas as partículas da forma

$$U(\{q_j\}) \approx \sum_{j,j'=1}^{\mathcal{N}} K_{jj'} q_j q_{j'}, \quad \text{com } K_{jj'} := \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_{j'}} \Big|_{\{q_j=0\}}. \quad (4.108)$$

Passamos aqui já à notação em termos de coordenadas generalizadas $q_j = q_j(\{\vec{r}_j\})$, em que o índice $j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ denota cada um dos \mathcal{N} graus de liberdade do sistema. Ignoramos na expressão acima o termo constante da energia potencial, por ser arbitrário, e consideramos a correção de primeira ordem nula por estar o sistema próximo ao equilíbrio ($\partial U / \partial q_j = 0, \forall j$). Além disso, definimos por conveniência a configuração de equilíbrio do sistema como a posição nula para todas as coordenadas generalizadas, i.e.

$$\text{Configuração de equilíbrio} \Rightarrow \{q_j = 0\}. \quad (4.109)$$

Assim, a coordenadas generalizada q_j já mede o deslocamento a partir do equilíbrio.

Notemos que a energia potencial da Eq. (4.108) pode ser escrita de maneira equivalente como a soma de termos relativos a partículas individuais e termos cruzados de acoplamento,

$$U(\{q_j\}) \approx \sum_j \frac{1}{2} K_j q_j^2 + \sum_{j \neq j'} K_{jj'} q_j q_{j'}, \quad \text{com } K_j := 2K_{jj} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j^2} \Big|_{\{q_j=0\}}. \quad (4.110)$$

Exemplo: Armadilha de íons. O aprisionamento de partículas individuais pode ser levado ao extremo em que alguns *átomos* são confinados por um potencial elétrico externo. Uma das maneiras de se fazer isso é ionizar os átomos (tornando-os íons), para que interajam mais fortemente com o campo, e produzir um potencial elétrico efetivo de armadilhamento¹⁷.

Consideremos o movimento unidimensional de duas partículas com cargas elétricas Q idênticas sob ação de um mesmo potencial elétrico externo com a forma¹⁸

$$V(x) = \frac{k}{2Q} x^2, \quad (4.111)$$

em que $k > 0$ é uma constante conhecida a fornecer a curvatura do potencial. A energia potencial de interação elétrica entre as partículas é repulsiva em todo o espaço,

$$U_I(x_1, x_2) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x_2 - x_1|}. \quad (4.112)$$

Assim, a energia potencial total do sistema fica (escolhendo sem perda de generalidade $x_2 > x_1$ para retirarmos o módulo do denominador)

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x_2 - x_1}. \quad (4.113)$$

¹⁷Você talvez tenha percebido que não é possível aprisionar uma partícula carregada nas três direções do espaço ao mesmo tempo, uma vez que o campo elétrico de aprisionamento (i.e. aquele produzido por eletrodos externos dispostos em algum lugar do espaço e com alguma geometria específica) na região em que intentamos colocar a carga deve possuir fluxo nulo por qualquer superfície fechada imaginária aí disposta, segundo as equações de Maxwell. Portanto, esse potencial efetivo precisa ser criado por campos elétricos oscilantes. Esse esquema de armadilha foi criado por Wolfgang Paul, pelo qual levou para casa o que o prêmio Nobel de física de 1989.

¹⁸Eletrodos hiperbólicos produzem as condições de contorno capazes de produzir o potencial quadrático entre eletrodos.

Estamos interessados nas oscilações do sistema em torno de sua configuração de equilíbrio. As coordenadas x_1 e x_2 , por serem tomadas em relação ao mínimo do potencial externo, não representam os deslocamentos das partículas a partir de suas respectivas posições de equilíbrio se levarmos em conta também a repulsão mútua. Vamos então determinar essas posições para redefinir as coordenadas como deslocamentos a partir do equilíbrio. As condições de equilíbrio nas duas coordenadas fornecem

$$(i) \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad kx_1 + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} = 0, \quad (4.114)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad kx_2 - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} = 0. \quad (4.115)$$

A soma dessas duas equações estabelece que $x_1 + x_2 = 0$ (as partículas se posicionam simetricamente em torno do mínimo do potencial externo), enquanto da subtração obtemos

$$k(x_1 - x_2) + \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x_2 - x_1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^{1/3} := x_{\text{eq}}. \quad (4.116)$$

A fim de simplificar a expressão para a energia potencial, redefinimos as coordenadas de acordo com a transformação

$$x_1 \rightarrow -x_{\text{eq}} + x_1 \quad \text{e} \quad x_2 \rightarrow x_{\text{eq}} + x_2. \quad (4.117)$$

A energia potencial se torna

$$U(x_1, x_2) \rightarrow \frac{k}{2} x_1^2 - kx_{\text{eq}}x_1 + \frac{k}{2} x_2^2 + kx_{\text{eq}}x_2 + 4kx_{\text{eq}}^3 \frac{1}{x_2 - x_1 + 2x_{\text{eq}}}, \quad (4.118)$$

em que usamos $Q^2/(4\pi\epsilon_0) = 4kx_{\text{eq}}^3$ e termos constantes foram desconsiderados. O limite de pequenas oscilações requer expandirmos essa expressão até *segunda ordem* em x_1 e x_2 , o que implica diretamente na condição

$$x_1, x_2 \ll x_{\text{eq}} \quad (4.119)$$

para definir o que chamamos de ‘pequenas’ amplitudes. Apenas o último termo da energia potencial requer expansão, da forma

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} \Big|_{x=0} - \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{2}{(1+x)^3} \Big|_{x=0} x^2 + \mathcal{O}(x^3) \approx 1 - x + x^2, \quad (4.120)$$

o que nos impele a tratá-lo como

$$4kx_{\text{eq}}^3 \frac{1}{x_2 - x_1 - 2x_{\text{eq}}} = 2kx_{\text{eq}}^2 \frac{1}{1 + \frac{x_2 - x_1}{2x_{\text{eq}}}} \approx 2kx_{\text{eq}}^2 \left(1 - \frac{x_2 - x_1}{2x_{\text{eq}}} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{4x_{\text{eq}}^2} \right). \quad (4.121)$$

Ignorando novamente termos constantes, a energia potencial fornece

$$U(x_1, x_2) \approx \frac{k}{2} x_1^2 + \frac{k}{2} x_2^2 + k(x_2 - x_1)^2 = \frac{3k}{2} x_1^2 + \frac{3k}{2} x_2^2 - kx_1x_2. \quad (4.122)$$

Notemos que os termos lineares em x_1 e x_2 se cancelam mutuamente, como esperado para o mínimo da energia¹⁹. A energia depende da distância relativa entre as partículas, como se uma mola ideal as conectasse, e portanto já sabemos resolver esse problema. O acoplamento se dá pelo termo bilinear $-2kx_1x_2$. Além disso, a curvatura da energia potencial sentida localmente por cada partícula aumenta para $3k$ como consequência de não estarem mais no mínimo do potencial externo e também por conta da interação mútua.

¹⁹A repulsão entre as partículas carregadas as empurra para locais mais altos do potencial externo de forma que os termos lineares se cancelem exatamente na configuração de mínima energia. De fato, foi isso que impusemos ao exigir a condição $\partial U/\partial x_1 = \partial U/\partial x_2 = 0$.

Aproximação da energia cinética. Em coordenadas cartesianas, a energia cinética total do sistema se escreve como uma soma de termos individuais e independentes, cada um relativo a uma partícula do sistema,

$$K(\{\dot{\vec{r}}_i\}) = \sum_i \frac{1}{2} M_i \dot{\vec{r}}_i^2. \quad (4.123)$$

Apesar dessa forma em princípio independente entre partículas, termos de acoplamento podem surgir pelo uso de coordenadas generalizadas ou pelos vínculos entre as partículas, pois a troca para coordenadas mais convenientes leva em geral a algo como

$$\frac{d}{dt} \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (4.124)$$

A energia cinética em termos de coordenadas generalizadas se torna

$$K(\{\dot{\vec{r}}_i\}) = \sum_{j,j'} f_{jj'}(\{q_j\}) \dot{q}_j \dot{q}_{j'}, \quad \text{com } f_{jj'}(\{q_j\}) := \sum_i \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{j'}}. \quad (4.125)$$

Para que a energia cinética seja compatível com a expansão utilizada para a energia potencial, apenas termos até segunda ordem em dq_j devem ser mantidos em sua expressão. Mas o produto $\dot{q}_j \dot{q}_{j'}$ das velocidades generalizadas já é um termo desse tipo, restando então avaliar as funções $f_{jj'}(\{q_j\})$ no ponto de equilíbrio do sistema como se fossem constantes (ordem zero), i.e. sem a necessidade de expandi-las em série. Com essa aproximação, a energia cinética se torna

$$K(\{\dot{\vec{r}}_i\}) \approx \sum_{j,j'} M_{jj'} \dot{q}_j \dot{q}_{j'}, \quad \text{com } M_{jj'} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{j'}} \right) \Big|_{\{q_j=0\}}. \quad (4.126)$$

Separando os termos de partículas individuais, a energia cinética pode ainda ser escrita da forma

$$K(\{\dot{\vec{r}}_i\}) = \sum_j \frac{1}{2} M_j \dot{q}_j^2 + \sum_{j \neq j'} M_{jj'} \dot{q}_j \dot{q}_{j'}, \quad \text{com } M_j = 2M_{jj} = \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)^2 \Big|_{\{q_j=0\}}. \quad (4.127)$$

Exemplo: Pêndulo duplo. O pêndulo duplo é um sistema mecânico conceitualmente simples cujo comportamento geral pode ser bastante complicado (caótico). Nesse sistema, a distância da partícula 1 ao ponto de suspensão é mantida fixa pelo comprimento ℓ de uma haste ideal a suportá-la, o mesmo valendo para a distância entre as partículas 1 e 2 por conta da segunda haste a conectá-las, suposta de mesmo comprimento ℓ . No limite de pequenas oscilações em que estamos interessados, a energia cinética desse sistema apresenta o tipo de acoplamento mencionado acima: o vínculo a conectar os movimentos das duas partícula produz um termo de acoplamento na energia cinética.

Os vínculos impostos sobre o movimento das partículas favorecem o uso de coordenadas cilíndricas. Isso nos motiva a escolher como coordenadas generalizadas os ângulos θ_1 e θ_2 entre as hastes e a direção vertical. A conexão com coordenadas cartesianas já nos fornece os vínculos do movimento, escritos como:

$$\text{partícula 1: } \begin{cases} x_1 = \ell \sin \theta_1 \\ y_1 = -\ell \cos \theta_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{partícula 2: } \begin{cases} x_2 = \ell(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ y_2 = -\ell(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{cases}. \quad (4.128)$$

As velocidades das partículas valem, portanto,

$$\text{partícula 1: } \begin{cases} \dot{x}_1 = \ell \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ y_1 = \ell \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{partícula 2: } \begin{cases} x_2 = \ell(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \\ y_2 = \ell(\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \end{cases}. \quad (4.129)$$

Essas relações nos levam às expressões para as energias cinéticas:

$$K_1 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_1^2, \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m\ell^2 \left[(\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}m\ell^2 \left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \right), \end{aligned} \quad (4.131)$$

em que assumimos partículas com mesma massa m . A partícula 1 comporta-se como se fosse livre, mas a partícula 2 traz consigo o termo de acoplamento $2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$.

A aproximação de pequenas oscilações requer considerarmos na energia cinética apenas termos até segunda ordem em $d\theta_j$. O termo de acoplamento $2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ já é desse tipo se tomarmos a aproximação de ordem zero do cosseno, pois

$$2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2. \quad (4.132)$$

A energia cinética do sistema assume a forma aproximada

$$K(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = m\ell^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_2^2 + m\ell^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2. \quad (4.133)$$

O termo de acoplamento aparece por conta da composição de velocidades entre as partículas.

4.2.2 Formulação matricial das equações de movimento

O problema do movimento acoplado próximo ao equilíbrio produz em geral um sistema homogêneo de (muitas) equações diferenciais acopladas. E uma boa técnica matemática para resolvê-las eficientemente utiliza o que conhecemos de operações com matrizes, incluindo-se aí algoritmos otimizados para lidar com esses objetos (cálculo de determinantes, autovalores, autovetores etc).

Essa formulação do problema envolve traduzir as equações de Lagrange para a forma matricial. As expressões para as energias potencial e cinética das Eqs. (4.110) e (4.127) fornecem, até segunda ordem nos deslocamentos das partículas, a lagrangiana quadrática

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \approx \sum_j \left(\frac{1}{2}M_j\dot{q}_j^2 - \frac{1}{2}K_jq_j^2 \right) + \sum_{j \neq j'} (M_{jj'}\dot{q}_j\dot{q}_{j'} - K_{jj'}q_jq_{j'}). \quad (4.134)$$

O primeiro somatório reúne o que seriam todas as lagrangianas das partículas individuais caso estivessem desacopladas, cada qual um oscilador livre; o segundo somatório envolve os acoplamentos entre partículas.

A equação de movimento para a coordenada q_j fornece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_j\ddot{q}_j + k_jq_j + \sum_{j \neq j'} (M_{jj'}\ddot{q}_{j'} + K_{jj'}q_{j'}) = 0. \quad (4.135)$$

Todas as equações disponíveis formam um sistema acoplado. Para sintetizar esse sistema na forma de uma única equação matricial, construímos uma matriz coluna para reunir os deslocamentos q_j e matrizes quadradas com os coeficientes das energias potencial e cinética, da forma

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_{\mathcal{N}}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1\mathcal{N}} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2\mathcal{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{\mathcal{N}1} & M_{\mathcal{N}2} & \dots & M_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1\mathcal{N}} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2\mathcal{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{\mathcal{N}1} & K_{\mathcal{N}2} & \dots & K_{\mathcal{N}\mathcal{N}} \end{pmatrix}, \quad (4.136)$$

tal que possamos escrevê-lo como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0. \quad (4.137)$$

Notemos que as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} são reais e simétricas²⁰. Nessa representação, as energias potencial e cinética equivalentes às Eqs. (4.110) e (4.127) obedecem as expressões

$$U = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad \text{e} \quad K = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4.138)$$

Procuramos soluções para os deslocamentos das partículas como funções harmônicas com mesma frequência. Para facilitar a resolução, substituímos a Eq. (4.137) por uma equação equivalente para a matriz coluna de funções complexas tal que $\mathbf{q}(t) = \text{Re}\{\mathbf{z}(t)\}$,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = 0, \quad \text{com} \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{\mathcal{N}}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.139)$$

Supomos exponenciais complexas com coeficientes reais v_j como solução, da forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} e^{i\Omega t} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{\mathcal{N}} \end{pmatrix} e^{i\Omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{z}} = -\Omega^2 \mathbf{z}. \quad (4.140)$$

Com isso, a Eq. (4.139) se torna um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes,

$$(-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{v} = 0. \quad (4.141)$$

Esse sistema possui solução não trivial apenas se a matriz $-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}$ for singular, o que impõe a nulidade do determinante dessa matriz como condição sobre as frequências normais de oscilação,

$$|-\Omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0. \quad (4.142)$$

O determinante nos fornece um polinômio característico de grau igual ao número de equações, igual por sua vez ao número de coordenadas generalizadas. Existem, portanto, \mathcal{N} frequências normais no sistema, e por isso podemos utilizar o mesmo índice j das coordenadas generalizadas para rotular as frequências normais de vibração como Ω_j . Substituindo cada uma dessas soluções na Eq. (4.141), determinamos as matrizes \mathbf{v}_j que definem os padrões de movimento associados aos modos normais de vibração.

4.2.3 Problema de autovalores e autovetores

As soluções Ω_j e \mathbf{v}_j para o movimento são quase nunca obtidas de forma analítica (mesmo porque as raízes de polinômios com grau maior do que 4 só podem ser encontradas por métodos numéricos iterativos).

²⁰A simetria da matriz \mathbf{K} decorre de ser irrelevante a ordem das derivadas parciais na Eq. (4.108). Já a matriz \mathbf{M} é simétrica por causa da propriedade comutativa do produto escalar na Eq. (4.125).

Mas podemos desvendar as propriedades gerais dessas soluções notando que a Eq. (4.141) consiste de um problema de autovalores e autovetores para matrizes assimétricas, o que pode ser visto colocando-a na forma

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{M}\mathbf{v}_j. \quad (4.143)$$

Essa equação não se reduz ao problema ‘comum’ de autovalores no caso geral porque envolve matrizes em seus dois membros. Uma tentativa de se obter o problema ‘comum’ consistiria em multiplicar a Eq. (4.143) pela esquerda por \mathbf{M}^{-1} , que também é uma matriz simétrica, para obter $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$. No entanto, o produto $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ das duas matrizes simétricas não resulta ele mesmo numa matriz simétrica, salvo no caso particular em que as matrizes comutam²¹.

A diferença mais concreta entre o problema aqui considerado (para a matriz assimétrica $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$) e o problema ‘comum’ (para matrizes simétricas reais) é o fato de não podermos sempre atribuir propriedades de ortogonalidade e completeza para a base de autovetores neste caso. No entanto, as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} possuem uma propriedade importante: ambas são positivas definidas (i.e. todos os seus autovalores são positivos), implicando que a matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ é também positiva definida. Vamos a seguir determinar algumas propriedades gerais dos autovalores λ_j e autovetores \mathbf{v}_j com base na forma da Eq. (4.143) e nas propriedades de simetria e positividade das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} . No entanto, independentemente das propriedades exatas de autovalores e autovetores, resolver a Eq. (4.143) nos fornece a solução do movimento, e é sempre possível resolvê-la, ainda que na ‘força bruta’ (numericamente).

O primeiro fato relevante estabelece os autovalores λ_j como reais. Para ver isso, basta considerar a Eq. (4.143) e sua hermitiana conjugada,

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{M}\mathbf{v}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{K} = \lambda_j^*\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{M}, \quad (4.144)$$

em que usamos as propriedades $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\dagger$ e $\mathbf{K} = \mathbf{K}^\dagger$. Multiplicando a primeira equação por \mathbf{v}_j^\dagger pela esquerda e a segunda por \mathbf{v}_j pela direita,

$$\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{M}\mathbf{v}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j^*\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{M}\mathbf{v}_j, \quad (4.145)$$

obtemos equações idênticas a não ser pela conjugação do autovalor, que portanto precisa ser uma operação sem efeito para que as duas equações sejam verdadeiras, do que decorre $\lambda_j = \lambda_j^*$.

Além disso, a Eq. (4.138) estabelece que os dois membros dessas igualdades precisam fornecer as energias cinética K_{Ω_j} e potencial U_{Ω_j} alocadas no modo de vibração \mathbf{v}_j , pois

$$\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j^\dagger\mathbf{M}\mathbf{v}_j \quad \Rightarrow \quad K_{\Omega_j} = \lambda_j U_{\Omega_j}. \quad (4.146)$$

Primeiramente, essa equação estabelece que os autovetores podem sempre ser escolhidos reais: como suas partes imaginárias não produzem efeito algum, podemos por simplicidade escolhê-las todas nulas, justificando assim o que vínhamos fazendo até aqui. Notemos que a parte imaginária de \mathbf{v}_j teria o efeito de *defasar* as partículas em oscilação. Assim, a existência de um conjunto de autovetores \mathbf{v}_j reais implica fisicamente que os modos normais de vibração se constituem de oscilações com todas as partículas *em fase ou em oposição de fase*, mas não com fases relativas arbitrárias²².

²¹O que ocorre por exemplo se a matriz \mathbf{M} for múltipla da unidade, como no caso de empregarmos coordenadas cartesianas e considerarmos partículas com massas iguais.

²²Note que isso é uma propriedade dos *modos normais*! O movimento em geral pode ocorrer com partículas com fases relativas arbitrárias, caso em que *mais de um* modo será excitado.

Finalmente, como as energias K_{Ω_j} e U_{Ω_j} assumem sempre valores positivos²³, os dois membros da Eq. (4.146) precisam ter o mesmo sinal para que valha a igualdade. Isso implica que os autovalores λ_j precisam ser *positivos*. Nossa análise nos leva à conclusão $\lambda_j = \Omega^2 > 0$. Fisicamente, isso significa que as frequências normais não possuem parte imaginária e as oscilações ocorrem sem perda de energia.

Podemos ainda analisar a ortogonalidade dos autovetores \mathbf{v}_j . Consideremos para tanto duas soluções da Eq. (4.143),

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{M}\mathbf{v}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{K}\mathbf{v}_{j'} = \lambda_{j'}\mathbf{M}\mathbf{v}_{j'}. \quad (4.147)$$

Multiplicando a primeira pela esquerda por $\mathbf{v}_{j'}^T$, obtemos

$$\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j. \quad (4.148)$$

Mas a transposta da segunda equação, i.e. $\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{K} = \lambda_{j'}\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}$ (em que usamos as propriedades de simetria de \mathbf{K} e \mathbf{M}), nos permite escrever

$$\lambda_{j'}\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j \quad \Rightarrow \quad (\lambda_{j'} - \lambda_j)\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j = 0. \quad (4.149)$$

Para modos com frequências normais não degeneradas, essa equação nos diz que é possível entender os autovetores \mathbf{v}_j como ortogonais em certo sentido, pois

$$\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j = 0, \quad j \neq j'. \quad (4.150)$$

Essa relação também nos indica como normalizá-los de forma conveniente. Escolhemos a normalização

$$\mathbf{v}_{j'}^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j = 1, \quad j = j'. \quad (4.151)$$

Podemos então construir uma matriz de autovetores juntando as Eqs. (4.150) e (4.151) em uma só equação matricial. Se organizarmos os autovetores como colunas de uma nova matriz quadrada \mathbf{V} , da forma

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_N \end{pmatrix}, \quad (4.152)$$

essas duas equações se resumem a

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{1}, \quad (4.153)$$

parecida com uma condição de ortogonalidade para a matriz \mathbf{V} , mas não exatamente, por conta da matriz \mathbf{M} que aparece na equação (nos casos específicos em que a matriz \mathbf{M} for múltipla da unidade, obtemos de fato \mathbf{V} ortogonal, i.e. $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$). A transformação acima, pela qual a matriz \mathbf{V} e sua transposta diagonalizam \mathbf{M} , é chamada *transformação de congruência*.

O mesmo procedimento de síntese de equações pode ser utilizado para escrever em apenas uma relação todas as \mathcal{N} proposições da Eq. (4.143). É preciso nesse caso definir a matriz diagonal

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\mathcal{N}}\}, \quad (4.154)$$

para escrever a Eq. (4.143) em uma única equação matricial,

$$\mathbf{K}\mathbf{V} = \mathbf{M}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}. \quad (4.155)$$

²³A energia cinética é claramente sempre positiva. Já a energia potencial poderia assumir valores absolutos negativos, a depender de uma constante arbitrária. Mas o que importa aqui é seu valor com relação ao ponto de equilíbrio estável, i.e. seu mínimo, claramente algo positivo, já que constantes não desempenham qualquer papel na lagrangiana. Em nosso caso, escolhemos para a energia potencial uma expressão sempre positiva bastante simples [Eq. (4.108)].

Utilizando o resultado da Eq. (4.153), obtemos nesse caso

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \quad (4.156)$$

da qual concluímos que \mathbf{V} também diagonaliza \mathbf{K} pela mesma transformação de congruência, dessa vez resultando na matriz de autovalores.

Mas a matriz \mathbf{V} não é formada por autovetores ortogonais como estamos acostumados. Para obtermos tal matriz, é preciso transformar a Eq. (4.153) num produto de apenas duas matrizes. Isso é possível utilizando uma das maneiras de se calcular a ‘raiz quadrada’ da matriz \mathbf{M} (decomposição de Cholesky), uma vez que essa matriz é positiva definida, da forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}, \quad (4.157)$$

em que \mathbf{S} é uma matriz triangular superior, i.e. uma matriz possuindo todos os elementos abaixo da diagonal nulos. Com isso, a Eq. (4.153) se torna

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{V}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{V} = (\mathbf{S} \mathbf{V})^T \mathbf{S} \mathbf{V} := \mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{1}, \quad \text{com } \mathbf{W} := \mathbf{S} \mathbf{V}. \quad (4.158)$$

A matriz \mathbf{W} possui a propriedade de ortogonalidade buscada e, como tal, podemos entender suas colunas como os elementos de uma base de vetores ortogonais \mathbf{w}_j . Utilizamos a relação $\mathbf{V} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W}$ na Eq. (4.156) para reescrevê-la como

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}. \quad (4.159)$$

Definindo a matriz real simétrica $\tilde{\mathbf{K}}$, obtida pela transformação de congruência de \mathbf{K} por \mathbf{S}^{-1} ,

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{S}^{-1})^T \mathbf{K} \mathbf{S}^{-1}, \quad (4.160)$$

obtemos a equação

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{W} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}, \quad (4.161)$$

que pode ser entendida como uma forma sintética de representar o seguinte problema (‘comum’) de autovalores e autovetores:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{w}_j = \lambda_j \mathbf{w}_j. \quad (4.162)$$

Cada autovetor \mathbf{w}_j está associado ao mesmo autovalor $\lambda_j = \Omega_j^2$ determinado a partir da Eq. (4.142), com a diferença de que o conjunto \mathbf{w}_j forma uma base ortonormal no espaço de possibilidades do movimento.

Isso nos mostra que a operação física produzida pela matriz \mathbf{V} não se resume a uma rotação, como seria no caso do problema ‘comum’ de autovetores e autovalores, pois

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W}, \quad (4.163)$$

sendo mais geral. De fato, essa equação nos mostra que a matriz \mathbf{V} é formada pela composição de uma rotação (matriz ortogonal \mathbf{W}) com outra operação de transformação de coordenadas, que não precisa preservar tamanhos e ângulos, representada pela matriz triangular superior \mathbf{S} . Essa última operação tem o papel de ajustar as amplitudes relativas entre as partículas para que ocorra a diagonalização conjunta de \mathbf{M} e \mathbf{K} , embora neste momento ainda não esteja claro para o autor destas notas se o tipo de operação realizada pela matriz \mathbf{S} possui algum nome simples (talvez um reescalonamento?).

Concluimos, assim, que a solução do problema do movimento acoplado utiliza as frequências normais Ω_j como autovalores e as matrizes de amplitudes \mathbf{v}_j como autovetores do problema de matriz assimétrica da Eq. (4.141). Esses autovetores, quando coligidos numa só matriz segundo a prescrição da Eq. (4.152), diagonalizam tanto \mathbf{M} quanto \mathbf{K} por uma transformação de congruência; no primeiro caso, \mathbf{M} é diagonalizada à matriz unidade, assemelhando-se portanto a Eq. (4.153) a uma relação peculiar de ortogonalidade entre os autovetores \mathbf{v}_j ; no caso da matriz \mathbf{K} , sua diagonalização faz um paralelo com a mudança de base que vimos no tratamento da matriz de inércia, embora isso não seja bem assim dado que a transformação não é de similaridade, i.e. a matriz \mathbf{V} não é sempre ortogonal e, portanto, não representa uma simples rotação no espaço de parâmetros.

4.2.4 Solução geral

A solução do movimento acoplado formulado em termos de funções complexas [Eq. (4.139)] envolve as frequências normais e autovetores encontrados pelo uso da Eq. (4.141), o que na maioria das situações práticas é realizado numericamente. Cada uma das soluções independentes se escreve como

$$\mathbf{Z}_{\Omega_j}(t) = \mathbf{v}_{\Omega_j} e^{i\Omega_j t}. \quad (4.164)$$

Os deslocamentos das partículas na solução específica $\mathbf{Z}_{\Omega_j}(t)$ se calculam como

$$\mathbf{q}_{\Omega_j}(t) = \text{Re}\{\tilde{A}_{\Omega_j} \mathbf{Z}_{\Omega_j}(t)\}, \quad (4.165)$$

e correspondem a um modo normal de vibração com amplitude A_{Ω_j} e fase ϕ_{Ω_j} de oscilação, posto que $\tilde{A}_{\Omega_j} = A_{\Omega_j} e^{i\phi_{\Omega_j}}$. Em termos dessas constantes reais, determinadas e.g. pelas condições iniciais, cada modo de vibração se caracteriza pelos deslocamentos

$$\mathbf{q}_{\Omega_j}(t) = A_{\Omega_j} \mathbf{v}_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \phi_{\Omega_j}). \quad (4.166)$$

A solução geral do movimento envolve a superposição de todas as soluções independentes, ou seja,

$$\mathbf{q}(t) = \sum_j \mathbf{q}_{\Omega_j}(t) = \sum_j A_{\Omega_j} \mathbf{v}_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \phi_{\Omega_j}). \quad (4.167)$$

Assim, o movimento de cada partícula se resume à interferência entre \mathcal{N} oscilações independentes superpostas, cada qual com sua amplitude e fase próprias. Em especial, o sistema admite apenas um conjunto discreto de frequências de oscilação bem definidas.

4.2.5 Coordenadas normais

Resolver o problema do movimento acoplado no limite de pequenas oscilações se resume a determinar os autovalores e autovetores da Eq. (4.143). Em particular, os autovetores \mathbf{v}_{Ω_j} são tais que, quando reunidos na matriz \mathbf{V} seguindo a prescrição da Eq. (4.152), nos permitem diagonalizar concomitantemente as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} [Eqs. (4.153) e (4.156)].

Mas essas matrizes foram construídas para representar as energias cinética e potencial do sistema: diagonalizá-las por uma única transformação é equivalente a tornar a lagrangiana *separável* em vários objetos independentes: esses objetos são os modos normais; as coordenadas generalizadas a descrevê-los, as *coordenadas normais*.

Separação da lagrangiana em objetos independentes

Isso nos motiva a escrever também a solução geral do movimento, dada pela Eq. (4.167), para torná-la sintética pelo uso de \mathbf{V} , já que essa matriz faz tanta coisa interessante. Para entender o somatório que aparece nessa equação como um produto de matrizes, definimos a matriz coluna de deslocamentos $\eta_j(t)$ como

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{pmatrix} A_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t + \phi_{\Omega_1}) \\ A_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t + \phi_{\Omega_2}) \\ \vdots \\ A_{\Omega_N} \cos(\Omega_N t + \phi_{\Omega_N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{pmatrix}, \quad \text{i.e. } \eta_j(t) = A_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \phi_{\Omega_j}). \quad (4.168)$$

A matriz $\boldsymbol{\eta}(t)$ assim construída nos permite reescrever a Eq. (4.167) em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,\Omega_1} & v_{1,\Omega_2} & \cdots & v_{1,\Omega_N} \\ v_{2,\Omega_1} & v_{2,\Omega_2} & \cdots & v_{2,\Omega_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{N,\Omega_1} & v_{N,\Omega_2} & \cdots & v_{N,\Omega_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{pmatrix}, \quad (4.169)$$

ou seja, ela pode ser entendida simplesmente como uma *transformação de coordenadas* mediada pela matriz \mathbf{V} de autovetores, da forma

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}(t). \quad (4.170)$$

As novas coordenadas $\eta(t)$ recebem o nome de *coordenadas normais* do sistema. Essa mudança de coordenadas surge naturalmente da solução das equações do movimento. De fato, podemos dizer que ela é *quase toda* a solução do problema, pois boa parte do esforço de resolução consiste em determinar a matriz \mathbf{V} que realiza a transformação entre as coordenadas generalizadas e as coordenadas normais,

$$q_j = q_j(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N) \quad \xleftrightarrow{\mathbf{V}} \quad \eta_j = \eta_j(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (4.171)$$

Podemos agora voltar ao início de tudo para ver o que ocorreria se tivéssemos já desde aquele ponto escolhido (por inspiração divina?) as coordenadas normais na formulação da lagrangiana. Juntamos o que fizemos até aqui para escrever a lagrangiana aproximada da Eq. (4.134) em forma matricial, pelo uso da Eq. (4.138) para as energias cinéticas e potencial, como

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}. \quad (4.172)$$

A troca de coordenadas da Eq. (4.170) nos fornece

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.173)$$

Mas a matriz \mathbf{V} possui as propriedades especiais de diagonalização das Eqs. (4.153) e (4.156), que nos permitem simplificar a lagrangiana para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) &= \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \dot{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\eta} \\ &= \sum_j (\dot{\eta}_j^2 + \Omega_j^2 \eta_j^2) = \sum_j \mathcal{L}_j(\eta_j, \dot{\eta}_j), \quad \text{com } \mathcal{L}_j(\eta_j, \dot{\eta}_j) = \dot{\eta}_j^2 + \Omega_j^2 \eta_j^2. \end{aligned} \quad (4.174)$$

Esse resultado generaliza a Eq. (4.63) obtida no contexto de apenas dois osciladores acoplados. Ele estabelece que todo sistema de osciladores acoplados ideais pode ser entendido, no limite de pequenas oscilações, como um conjunto de objetos físicos independentes entre si (modos normais) descritos pelas coordenadas normais η_j . As equações de movimento fornecem essencialmente a transformação que nos permite levar as coordenadas generalizadas q_j , supostas de maior conveniência para a *formulação* do problema, naquelas que simplificam a *solução* do movimento, as coordenadas normais η_j . De fato, lembrando que a Eq. (4.168) define as coordenadas η_j e nos fornece simultaneamente a solução do movimento, as coordenadas $\eta_j(t)$ evoluem de forma simples, cada qual como um oscilador harmônico livre,

$$\eta_j(t) = A_{\Omega_j} \cos(\Omega_j t + \phi_{\Omega_j}), \quad (4.175)$$

o que é compatível como solução da lagrangiana $\mathcal{L}_j(\eta_j, \dot{\eta}_j)$ para o modo normal Ω_j definida na Eq. (4.174).

A física do problema nos indica também porque a equação central do movimento [Eq. (4.143)] não poderia mesmo se reduzir ao problema ‘normal’ de autovalores e autovetores de uma matriz simétrica. Caso fosse assim, a matriz \mathbf{V} seria necessariamente ortogonal, restringindo-se portanto a realizar rotações no espaço de configurações das coordenadas generalizadas²⁴. A transformação da Eq. (4.170) é mais geral do que isso, permitindo qualquer forma de combinação de deslocamentos de partículas capaz de levar as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} para a base diagonal dos modos normais.

Assim, a solução do problema de osciladores acoplados não se resume a uma mudança de base como entendemos para os vetores no Espaço, descrita por uma rotação ou translação, mas à composição de dois efeitos físicos a afetarem o sistema de partículas: inércia e acoplamentos. A transformação da Eq. (4.170) encontra cada padrão coletivo de movimento dentro do qual essas duas influências se balanceiam. De fato, é simples argumentar que seguir os deslocamentos de partículas individuais não deve ser a melhor estratégia para entender o movimento, pois a energia presente em uma partícula tende a se distribuir entre todas aquelas com as quais se acopla. A melhor coordenada deve ser algo deslocalizado, tal que o deslocamento de partículas afetem-se uns aos outros de forma fechada, sem vazamento de energia para outras formas de oscilação. O padrão de um modo normal é, de certa forma, retroalimentado por ele mesmo no tempo, sendo, portanto, estável (e.g. partícula 1 empurra a partícula 2 que empurra a partícula 3 que empurra de volta a partícula 1 de um tanto precisamente correto para que o ciclo se feche e a cobra morda o rabo; o número de cobras deslocalizadas engolindo o rabo, a que chamamos de modos, é igual ao número de partículas).

Finalmente, a propriedade de diagonalização da matriz \mathbf{V} sobre a matriz \mathbf{M} , por se assemelhar a uma relação de ortogonalidade para os autovetores \mathbf{v}_{Ω_j} , nos permite obter facilmente a transformação inversa da Eq. (4.170). A diferença para uma relação de ortogonalidade ‘comum’ é a necessidade de se multiplicar também pela matriz \mathbf{M} pela esquerda para fazermos uso da Eq. (4.153), da forma

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \boldsymbol{\eta}(t) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}(t). \quad (4.176)$$

Essa relação nos fornece as amplitudes A_{Ω_j} e fases ϕ_{Ω_j} dos modos excitados se conhecermos os deslocamentos $q_j(t)$ de todas as partículas. Além disso, podemos também obter de forma quase automatizada as constantes advindas de condições iniciais. Consideremos condições iniciais típicas do tipo $\{q_j(0) = \alpha_j, \dot{q}_j(0) = \beta_j\}$,

²⁴As rotações ocorreriam num espaço vetorial em que o deslocamento de cada partícula serviria como vetor de base, sendo a dimensão do espaço igual ao número de partículas. Esse espaço abstrato com N dimensões não deve ser confundido com o Espaço, uma vez que os deslocamentos estão restritos a ocorrerem em três dimensões do Mesmo.

fornecida nas coordenadas de deslocamentos de partículas. Juntamo-las nas matrizes

$$\mathbf{q}(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}. \quad (4.177)$$

A relação da Eq. (4.176) nos permite transformar essas condições iniciais para as partículas diretamente em imposições sobre as amplitudes dos modos normais, pois vale para o instante inicial que

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0). \quad (4.178)$$

Para facilitar a aplicação dessa relação no tipo considerado de condição inicial, torna-se conveniente escrever a Eq. (4.168) na forma

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_N(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\Omega_1} \cos(\Omega_1 t) \\ C_{\Omega_2} \cos(\Omega_2 t) \\ \vdots \\ C_{\Omega_N} \cos(\Omega_N t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{\Omega_1} \sin(\Omega_1 t) \\ S_{\Omega_2} \sin(\Omega_2 t) \\ \vdots \\ S_{\Omega_N} \sin(\Omega_N t) \end{pmatrix}. \quad (4.179)$$

Com isso, as constantes C_{Ω_j} e S_{Ω_j} são dadas por

$$\begin{pmatrix} C_{\Omega_1} \\ C_{\Omega_2} \\ \vdots \\ C_{\Omega_N} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Omega_1 S_{\Omega_1} \\ \Omega_2 S_{\Omega_2} \\ \vdots \\ \Omega_N S_{\Omega_N} \end{pmatrix} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}, \quad (4.180)$$

transferindo assim as condições iniciais sobre partículas para condições iniciais sobre os modos.

4.2.6 Padrão geral de movimento dos modos normais de vibração

Além de apresentarem fenômenos bastante característicos, tais como interferência e deslocamentos de frequência, as oscilações acopladas produzem padrões específicos de movimento que se repetem em vários contextos físicos. Vamos analisar a forma genérica desses padrões tomando como exemplo um sistema formado por um número maior de partículas.

Consideremos o sistema da Fig. 4.5, composto por 5 partículas idênticas (massa m) acopladas entre si e à parede por molas também idênticas (constante elástica $k = m\omega^2$), numa cadeia linear. Vamos tratar desta vez de oscilações transversais das partículas, no lugar das oscilações longitudinais vistas até aqui, a fim de ilustrar outro tipo de movimento de vibração²⁵.

A cadeia linear produz interação apenas entre partículas vizinhas, por ser de curto alcance (força de contato). A energia potencial de interação entre as partículas assume forma em princípio complicada, mesmo se as molas são assumidas ideais, pois a distensão de cada mola acopla entre si os deslocamentos nas direções x (longitudinal) e y (transversal) do par de partículas vizinhas. No entanto, a energia potencial se

²⁵Vibrações transversais em geral requerem que o meio possua algum tipo de estrutura, i.e. deve existir alguma direção espacial privilegiada pelo acoplamento. A tensão na mola cria essa direção especial.

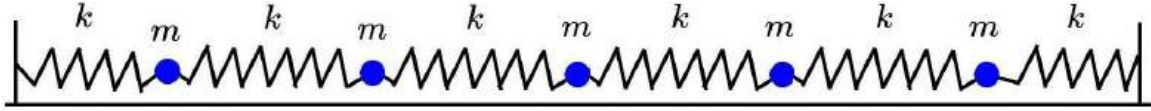


Figura 4.5: Sistema de 5 partículas idênticas acopladas em cadeia linear.

separa em termos independentes para cada direção do Espaço no limite de pequenas oscilações. Na direção transversal, temos para o sistema

$$\begin{aligned} U(\{y_j\}) &= \frac{1}{2}m\omega^2 y_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (y_2 - y_3)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (y_3 - y_4)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 (y_4 - y_5)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 y_5^2 \\ &= \sum_{j=1}^5 m\omega^2 y_j^2 - \sum_{j=1}^4 m\omega^2 y_j y_{j+1}. \end{aligned} \quad (4.181)$$

A lagrangiana do movimento transversal se escreve, então,

$$\mathcal{L}(y_1, \dots, y_5, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_5) = \sum_{j=1}^5 \frac{1}{2} m \dot{y}_j^2 - \sum_{j=1}^5 m\omega^2 y_j^2 + \sum_{j=1}^4 m\omega^2 y_j y_{j+1}. \quad (4.182)$$

Seguindo o mesmo procedimento utilizado inúmeras vezes nestas notas, escrevemos as equações de movimento e supomos soluções do tipo $y_j(t) = \text{Re}\{z_j(t)\}$, com $z_j(t) = v_j e^{i\Omega t}$. Consideramos então equações diferenciais equivalentes nas variáveis complexas $z(t)$. Encontramos como resultado o sistema de equações

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\omega^2 y_1 - \omega^2 y_2 = 0 \\ \ddot{y}_2 + 2\omega^2 y_2 - \omega^2 (y_1 + y_3) = 0 \\ \ddot{y}_3 + 2\omega^2 y_3 - \omega^2 (y_2 + y_4) = 0 \\ \ddot{y}_4 + 2\omega^2 y_4 - \omega^2 (y_3 + y_5) = 0 \\ \ddot{y}_5 + 2\omega^2 y_5 - \omega^2 y_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\Omega^2 + 2\omega^2)v_1 - \omega^2 v_2 = 0 \\ (-\Omega^2 + 2\omega^2)v_2 - \omega^2 (v_1 + v_3) = 0 \\ (-\Omega^2 + 2\omega^2)v_3 - \omega^2 (v_2 + v_4) = 0 \\ (-\Omega^2 + 2\omega^2)v_4 - \omega^2 (v_3 + v_5) = 0 \\ (-\Omega^2 + 2\omega^2)v_5 - \omega^2 v_4 = 0 \end{cases}. \quad (4.183)$$

É conveniente dividir todas as equações por $-\omega^2$ para trabalharmos com a variável adimensional $\xi = \Omega^2/\omega^2 - 2$, i.e.

$$\Omega = \sqrt{2 + \xi} \omega, \quad (4.184)$$

e reescrever o sistema na forma matricial

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = 0, \quad \text{com } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \xi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \end{pmatrix}. \quad (4.185)$$

A matriz \mathbf{M} de amplitudes possui uma simetria interessante com relação à partícula central. Se somarmos ou subtraímos a primeira e a última equações, obtemos

$$\xi(v_1 \pm v_5) + (v_2 \pm v_4) = 0, \quad (4.186)$$

que possui a mesma forma da primeira equação ($\xi v_1 + v_2 = 0$) e da última ($\xi v_5 + v_4 = 0$). Concluimos disso que a combinação de amplitudes $v_1 \pm v_5$ satisfaz a mesma equação para v_1 ou v_5 tomados individualmente, do que segue $v_1 = \pm v_5$. O mesmo vale para v_2 e v_4 , implicando em $v_2 = \pm v_4$. Essas relações apenas refletem a simetria que existe na cadeia linear: o padrão de movimento das partículas (em um modo normal!) pode ser ‘espelhado’ em torno da partícula central sem se alterar.

A existência de soluções não triviais para \mathbf{v} impõe que ξ seja raiz do determinante de \mathbf{M} . Este se calcula através das matrizes de cofatores usadas iterativamente,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}) &= \xi \begin{vmatrix} \xi & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \xi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \xi \end{vmatrix} = \xi \left(\xi \begin{vmatrix} \xi & 1 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} \xi & 1 & 0 \\ 1 & \xi & 1 \\ 0 & 1 & \xi \end{vmatrix} \\ &= \xi[\xi^2(\xi^2 - 2) - \xi^2 + 1] - \xi(\xi^2 - 2) \\ &= \xi[\xi^2(\xi^2 - 2) - \xi^2 + 1 - (\xi^2 - 2)] \\ &= \xi[(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2) - (\xi^2 - 1)] \\ &= \xi(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 3), \end{aligned} \quad (4.187)$$

tendo sido nosso objetivo chegar a uma forma fatorada para o determinante (em contraposição a escrever o polinômio de quinto grau como uma soma de monômios, o que não seria muito útil para obtermos soluções analíticas). Portanto, as raízes são, em ordem crescente,

$$\xi_1 = -\sqrt{3}, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_4 = 1, \quad \xi_5 = \sqrt{3}. \quad (4.188)$$

A cada uma corresponde frequência normal Ω_j de vibração, dada pela Eq. (4.184), e um padrão de movimento \mathbf{v}_{Ω_j} , determinado pelo uso do valor numérico de ξ_j na Eq. (4.185).

Começemos determinando o padrão \mathbf{v}_{Ω_1} , correspondente à frequência mais baixa de vibração. Substituição direta na Eq. (4.185) fornece

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,\Omega_1} \\ v_{2,\Omega_1} \\ v_{3,\Omega_1} \\ v_{4,\Omega_1} \\ v_{5,\Omega_1} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.189)$$

Da primeira linha tiramos a relação $\sqrt{3}v_{1,\Omega_1} = v_{2,\Omega_1}$, que se satisfaz com a escolha $v_{1,\Omega_1} = 1$ e $v_{2,\Omega_1} = \sqrt{3}$. Substituindo esses valores na segunda equação, obtemos $v_{3,\Omega_1} = 2$. A terceira equação nos dá o sinal apropriado para v_{4,Ω_1} (uma vez que seu módulo fica definido por v_{2,Ω_1}) com a solução $v_{4,\Omega_1} = \sqrt{3}$. A última equação fornece $v_{5,\Omega_1} = 1$. O modo de vibração com frequência Ω_1 fica com o padrão

$$\mathbf{v}_{\Omega_1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^T. \quad (4.190)$$

Todas as partículas se movem no mesmo sentido, embora com amplitudes diferentes.

Repetindo o mesmo procedimento para os demais modos, e escolhendo $v_{1,\Omega_j} = 1$ como a amplitude de referência²⁶, obtemos os autovetores

$$\mathbf{v}_{\Omega_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\Omega_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\Omega_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\Omega_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\Omega_5} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 2 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.191)$$

²⁶Outra possibilidade consiste em normalizar os autovetores, como fizemos na Eq. (4.151). É aconselhável normalizar os autovetores antes de reuni-los na matriz \mathbf{V} para produzir transformações de coordenadas da forma mais clara e simples possível, evitando dessa maneira complicações desnecessárias.

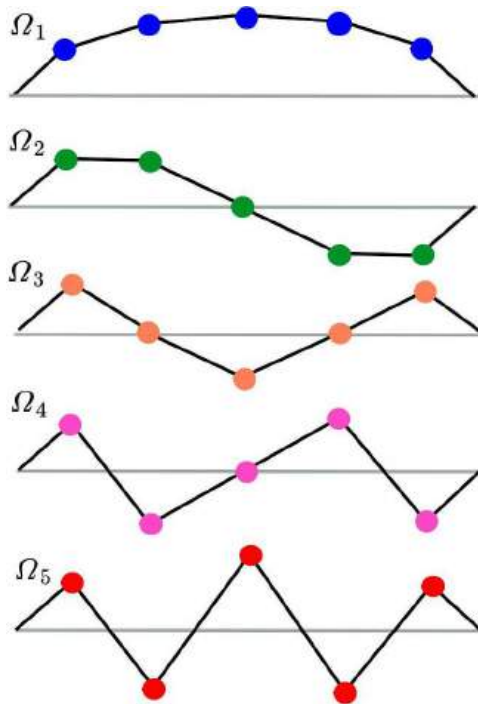


Figura 4.6: Modos normais de vibração para uma cadeia linear de 5 partículas idênticas. A frequência normal cresce de cima para baixo da figura, i.e. $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_5$. Com o objetivo de facilitar a visualização do padrão formado pelas amplitudes relativas de oscilação das partículas, as figuras mostram o instante de maior deslocamento da cadeia.

As frequências normais são obtidas através da Eq. (4.184),

$$\Omega_1 \approx 0,52 \omega, \quad \Omega_2 = \omega, \quad \Omega_3 \approx 1,4 \omega, \quad \Omega_4 \approx 1,7 \omega, \quad \Omega_5 \approx 1,9 \omega. \quad (4.192)$$

Embora todos esses números não queiram em si dizer muita coisa, o importante aqui é notar o *padrão* geral formado pelas amplitudes dos deslocamentos de partículas nos diferentes modos normais mostrados na Fig. 4.6, ordenados como estão em ordem crescente de frequência ao lermos a figura de cima para baixo. Sabemos que a interpretação em termos de modos privilegia o comportamento coletivo do sistema, o que nos indica entender o índice j dos elementos v_{j,Ω_j} como um *rótulo de posição* na cadeia de partículas, sendo o valor de v_{j,Ω_j} uma espécie de ‘função’ de j para cada modo Ω_j .

Nessa forma de ver, cada modo se assemelha a uma *onda estacionária* existente sobre um substrato de partículas. Seus nós ocorrem em partículas para as quais $v_{j,\Omega_j} = 0$, i.e. ficam paradas durante a oscilação, como no caso da partícula 3 no modo Ω_2 , para as partículas 2 e 4 no modo Ω_3 , e para a partícula 3 no modo Ω_4 . Além disso, os deslocamentos de partículas vizinhas aos nós sofrem troca de sinal relativo. Existem também ‘nós virtuais’, i.e. locais em que existe apenas troca de sinal entre os deslocamentos de partículas vizinhas, como se houvesse um nó entre elas. Esse efeito ocorre mais proeminentemente no modo Ω_5 , no qual ocorrem 4 trocas de sinal consecutivas sem que nenhuma partícula permaneça em repouso durante a oscilação. Se contarmos nós reais e virtuais simplesmente como ‘nós’, o padrão revelado pela Fig. 4.6 é o seguinte: o número de nós do modo Ω_j é igual a $j - 1$. Assim, o modo de mais baixa frequência, que poderia ser chamado de modo fundamental de vibração, não possui nós; o modo com frequência imediatamente acima deste possui 1 nó, e assim por diante (talvez exista uma prova formal disso).

4.3 Sistema acoplado com perdas: efeitos da dissipação

O tratamento das oscilações acopladas realizado até aqui considerou desprezíveis efeitos de perda de energia do sistema para o mundo externo. Vamos nesta seção analisar o efeito de atrito mecânico sobre as partículas. Seguiremos o exemplo de dois osciladores com frequências livres distintas da Seção 4.1.2.

Existem várias possibilidades de modelagem da força de atrito, a depender do meio em que o sistema mecânico está imerso. Consideremos o modelo mecânico mais elementar de uma força viscosa agindo sobre partículas em baixas velocidades, da forma

$$\vec{F}_b = -b\dot{\vec{r}}, \quad b > 0. \quad (4.193)$$

Forças dissipativas são incluídas de maneira fenomenológica na mecânica, e por isso é indiferente adicioná-la à lagrangiana ou diretamente às equações de movimento. Escolhemos aqui esta última possibilidade, por considerá-la mais simples. Além disso, é preciso considerar fisicamente como a dissipação afeta o sistema.

A dissipação pode ocorrer essencialmente de duas formas extremas diferentes: atuando sobre partículas individuais ou sobre modos individuais. Como a dissipação em geral é produzida por acoplamentos com partes do ambiente que não controlamos, a escolha entre essas duas possibilidades depende de se conhecer minimamente a origem física da dissipação. Por exemplo, se as partículas se movem com baixa velocidade num meio viscoso, todas sofrerão o efeito da força da Eq. (4.193) de forma independente, e o modelo de dissipação envolve incluir em cada equação de movimento a ação da força \vec{F}_b . A situação pode ser mais complicada que isso se as partículas sofrem cada qual efeito diferente da viscosidade (e.g. por possuírem diversos tamanhos ou rugosidades superficiais), caso em que as constantes b devem depender da partícula.

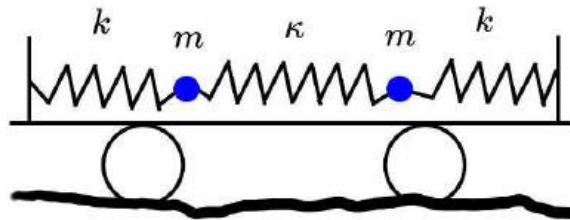


Figura 4.7: Exemplo de mecanismo dissipativo dependente do modo normal de oscilação. O modo de centro de massa sofre efeito indireto da dissipação que age sobre o carrinho quando em movimento; o modo de chacoalhamento oscila sem se acoplar a esse mecanismo de dissipação.

No outro cenário, com dissipação dependente do modo de vibração, mencionamos como exemplo o sistema mecânico da Fig. (4.7), no qual uma força de atrito atua sobre o carrinho sempre que este se move sobre uma superfície irregular. Essa força se acopla ao movimento oscilatório das partículas de acordo com o modo de vibração excitado. Quando as partículas oscilam no modo de centro de massa, seu momento total também oscila no tempo, produzindo forças de reação que tendem a mover o carrinho, dissipando energia. Já o modo de chacoalhamento, por possuir momento total nulo, oscila sem induzir movimento no carrinho, e portanto não se acopla a esse mecanismo dissipativo²⁷. Precisamos nesse caso transformar as equações de

²⁷Para uma condição inicial genérica, apenas o modo de chacoalhamento deve permanecer excitado após um tempo longo, pois a amplitude do modo de centro de massa deve decair mais rapidamente. O modo de chacoalhamento é, de certa forma, ‘selecionado’ pelo ambiente. Mecanismos de perda como esse são evocados para explicar como o mundo clássico como conhecemos pode

movimento para as coordenadas normais e nelas incluir a ação da força dissipativa, que na situação mais simples será $F_\eta = -b\dot{\eta}_j$.

Tratamos aqui do modelo de dissipação envolvendo duas partículas acopladas movendo-se num mesmo meio viscoso. Supomos suas massas iguais, mas frequências livres diferentes. Nosso intuito é entender como o movimento deve ser afetado no cenário dissipativo mais simples possível. Modificamos então o sistema da Eq. (4.69) para

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \gamma\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - x_2) = 0, \\ \ddot{x}_2 + \gamma\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.194)$$

em que $\gamma = b/m$.

Seguimos o mesmo procedimento utilizado anteriormente para resolver esse sistema de equações diferenciais. Empregamos primeiramente o artifício matemático de substituir as coordenadas $x_j(t)$ por funções complexas $z_j(t)$ cuja parte real representa os deslocamentos das partículas e então buscamos soluções do tipo

$$z_j(t) = v_j e^{i\lambda t}. \quad (4.195)$$

Supomos ainda v_j real num primeiro momento. As constantes λ_j , no entanto, devem se tornar complexas para causar decaimento das vibrações (ao menos isso é o que esperamos!),

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i. \quad (4.196)$$

A parte real λ_r deve fornecer as frequências normais no limite em que a dissipação se torna desprezível. O decaimento esperado deve aparecer em sua parte imaginária λ_i . Com o ‘chute educado’ da Eq. (4.195), eliminamos o tempo das equações diferenciais complexas e obtemos o sistema de equações com coeficientes constantes para as amplitudes v_j ,

$$\begin{cases} \left(-\lambda^2 + i\gamma\lambda + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \right) v_1 - \frac{\omega_0^2}{2} v_2 = 0, \\ -\frac{\omega_0^2}{2} v_1 + \left(-\lambda^2 + i\gamma\lambda + \omega_2^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \right) v_2 = 0. \end{cases} \quad (4.197)$$

Nesse ponto, é importante dizer que no problema geral com dissipação não é possível diagonalizar conjuntamente \mathbf{M} , \mathbf{K} e a matriz $\mathbf{\Gamma}$ de dissipação construída a partir dos γ_j , pois o sistema de equações do movimento se torna essencialmente

$$(-\lambda^2 \mathbf{M} + i\lambda \mathbf{\Gamma} + \mathbf{K}) \mathbf{z}(t) = 0, \quad \text{com } \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (4.198)$$

Ainda que conhecêssemos os modos normais do problema sem dissipação, na forma da matriz \mathbf{V} , poderíamos no máximo modificar esse sistema escrevendo-o na base de modos normais $\mathbf{z} = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}$, com o que obteríamos

$$\mathbf{V}^T (-\lambda^2 \mathbf{M} + i\lambda \mathbf{\Gamma} + \mathbf{K}) \mathbf{V} \boldsymbol{\eta}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda^2 \mathbf{1} + i\lambda \mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{V} + \mathbf{\Lambda}) \boldsymbol{\eta}(t) = 0, \quad (4.199)$$

surgir das superposições de estados permitidas pela mecânica quântica. O modelo de descoerência conhecido como ‘darwinismo quântico’, proposto por Wojcek Zurek, representa o paradigma atual para o mecanismo de emergência da classicalidade a partir de um mundo fundamentalmente quântico.

em que usamos as propriedades de diagonalização da matriz \mathbf{V} quando atuando sobre \mathbf{M} e \mathbf{K} por congruência. O termo novo $\mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}$ pode produzir acoplamento entre as equações de movimento para os modos normais, invalidando todo o nosso propósito em privilegiá-las. Por exemplo, para γ_1 e γ_2 quaisquer, e considerando os modos normais (normalizados) de centro de massa e chacoalhamento válidos nesse sistema se $\omega_0 \gg \omega \Delta\omega$, teríamos

$$\mathbf{V}^T \mathbf{\Gamma} \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \\ \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.200)$$

Essa matriz possui termos não diagonais que acoplam as equações de movimento das coordenadas normais, salvo no caso especial tratado aqui, em que $\gamma_1 = \gamma_2$. De qualquer forma, a solução numérica é sempre possível para se investigarem casos específicos de interesse.

Em nosso caso restrito, cujo intuito é apenas ilustrar como a dissipação afeta o sistema acoplado de forma geral, as partículas possuem mesma massa e sofrem ação da mesma força dissipativa viscosa (i.e. as matrizes \mathbf{M} e $\mathbf{\Gamma}$ são múltiplas da unidade). É então ainda possível tratar o sistema de equações na força bruta. Escrevendo explicitamente λ em termos de suas partes real λ_r e imaginária λ_i , a existência de solução não trivial requer a nulidade do determinante da matriz de coeficientes, i.e.

$$\begin{vmatrix} -\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - 2i\lambda_r\lambda_i + i\gamma\lambda_r - \gamma\lambda_i + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & -\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - 2i\lambda_r\lambda_i + i\gamma\lambda_r - \gamma\lambda_i + \omega_2^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad (4.201)$$

da qual obtemos o polinômio complexo

$$\left(-\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2} + i\lambda_r(-2\lambda_i + \gamma) \right) \left(-\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \omega_2^2 + \frac{\omega_0^2}{2} + i\lambda_r(-2\lambda_i + \gamma) \right) - \left(\frac{\omega_0^2}{2} \right)^2 = 0. \quad (4.202)$$

Essa equação envolve o produto de dois números complexos, que podemos denominar

$$w_j := -\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \omega_j^2 + \frac{\omega_0^2}{2} + i\lambda_r(-2\lambda_i + \gamma), \quad (4.203)$$

subtraídos de um número real, da forma

$$w_1 w_2 - \left(\frac{\omega_0^2}{2} \right)^2 = 0. \quad (4.204)$$

Para que a igualdade seja satisfeita, o produto $w_1 w_2$ precisa ser real. Escrevendo esses números complexos em representação polar, i.e. $w_j = |w_j| \exp(i\theta_j)$, a Eq. (4.204) se traduz na condição $\theta_1 = -\theta_2$. Como essas fases são definidas como $\theta_j = \arctan(\text{Im}\{w_j\}/\text{Re}\{w_j\})$, temos na verdade a condição

$$\frac{\text{Im}\{w_1\}}{\text{Re}\{w_1\}} = -\frac{\text{Im}\{w_2\}}{\text{Re}\{w_2\}} \Rightarrow \frac{\lambda_r(-2\lambda_i + \gamma)}{-\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2}} = -\frac{\lambda_r(-2\lambda_i + \gamma)}{-\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \omega_2^2 + \frac{\omega_0^2}{2}}, \quad (4.205)$$

que se reduz a

$$\Rightarrow \left(-\lambda_r^2 + \lambda_i^2 - \gamma\lambda_i + \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} \right) (-2\lambda_i + \gamma)\lambda_r = 0. \quad (4.206)$$

Das possibilidades de solução dessa equação, podemos escolher o caso $-2\lambda_i + \gamma = 0$ e posteriormente analisar sua consistência. Obtemos

$$\lambda_i = \frac{\gamma}{2}, \quad (4.207)$$

de forma que w_1 e w_2 são reais separadamente. Com isso, o polinômio característico se simplifica para

$$\left(-\lambda_r^2 + \frac{\gamma^2}{2} + \omega_1^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) \left(-\lambda_r^2 + \frac{\gamma^2}{2} + \omega_2^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right) - \left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 = 0 \quad (4.208)$$

e assim possui a mesma forma da Eq. (4.79). Podemos então obter as frequências normais $\lambda_r := \Omega'$ fazendo simplesmente $\omega_j^2 \rightarrow \omega_j^2 + \gamma^2/2$ na solução da Eq. (4.81). Obtemos²⁸

$$\Omega_{\pm}^{\prime 2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_0^4}. \quad (4.209)$$

A única modificação introduzida pela dissipação consiste num desvio de frequência pela quantidade $\gamma^2/2$, o que torna nossa solução compatível com o caso conhecido de um oscilador livre com atrito (i.e. $\omega_0 = 0$).

A partir deste ponto, é simples mostrar que a equação de autovetores continua exatamente a mesma obtida na Eq. (4.84), de maneira que o padrão de movimento das partículas nos modos normais não se altera pela dissipação nesse sistema²⁹. As soluções dissipativas para o movimento dos modos normais se torna

$$\mathbf{X}_{\Omega'_+}(t) = A_{\Omega'_+} \mathbf{v}_{\Omega'_+} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega'_+ t + \phi_{\Omega'_+}) \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_{\Omega'_-}(t) = A_{\Omega'_-} \mathbf{v}_{\Omega'_-} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega'_- t + \phi_{\Omega'_-}), \quad (4.210)$$

em que as matrizes de amplitudes são dadas pela Eq. (4.86).

A solução geral do movimento se modifica para

$$\mathbf{X}(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(A_{\Omega'_+} \mathbf{v}_{\Omega'_+} \cos(\Omega'_+ t + \phi_{\Omega'_+}) + A_{\Omega'_-} \mathbf{v}_{\Omega'_-} \cos(\Omega'_- t + \phi_{\Omega'_-}) \right). \quad (4.211)$$

Em termos das coordenadas normais, a evolução é simplesmente

$$\eta_{\pm} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\Omega'_{\pm} t + \phi_{\Omega'_{\pm}}). \quad (4.212)$$

O fato de que os modos normais não se alteram em nosso modelo nos permite verificar porque as equações de movimento admitem solução no caso tratado.

Em conclusão, a amplitude do movimento oscilatório decai exponencialmente no tempo como efeito da dissipação. O decaimento é bastante simples se as duas partículas são afetadas igualmente pela dissipação, agindo da mesma forma também nos diferentes modos de vibração. Além disso, a dissipação produz um desvio nas frequências normais, análogo ao que ocorreria para osciladores livres.

4.4 Sistema acoplado forçado: ressonâncias

Um tipo comum de problema envolve tentar desvendar a estrutura interna do sistema acoplado, i.e. como as partículas se acoplam entre si e com que magnitude, estudando a resposta do sistema a perturbações externas. Num sistema mecânico, essa resposta pode ser simplesmente a observação direta dos deslocamentos das partículas no tempo; no entanto, em sistemas nos quais é difícil ‘ver o que tem dentro’, tal como em

²⁸Esses valores de λ_r implicam que o primeiro fator da Eq. (4.206) não se anula, sendo nossa solução, portanto, consistente.

²⁹De forma geral, as equações de movimento com dissipação mantêm os padrões dos modos normais (i.e. se separam nas coordenadas normais) sempre que a matriz $\mathbf{\Gamma}$ for múltipla da identidade, pois então comuta com a matriz de transformação \mathbf{V} , i.e. $\mathbf{\Gamma V} = \mathbf{V \Gamma}$.

circuitos elétricos ou mesmo no estudo da estrutura de partículas subatômicas, outras formas de resposta podem ser estudadas, como e.g. a absorção de potência quando um agente externo força o sistema.

No cenário típico de que tratamos agora, uma força externa harmônica controlável é aplicada a uma parte do sistema, com a forma

$$F_{ext}(t) = F \cos(\omega_f t). \quad (4.213)$$

Consideramos por simplicidade um par acoplado de osciladores idênticos, porém com essa força externa adicional agindo sobre uma das partículas, e vamos analisar o movimento resultante. Supomos também dissipação diferente nas duas partículas para mostrar a ocorrência de outros efeitos físicos interessantes. Utilizamos as equações de movimento da Eq. (4.194), com $\omega_1 = \omega_2 := \omega$, e nelas introduzimos diretamente a força externa, obtendo

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \gamma_1 \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - x_2) = \frac{F}{m} \cos(\omega_f t), \\ \ddot{x}_2 + \gamma_2 \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \frac{\omega_0^2}{2}(x_1 - x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.214)$$

As soluções do sistema homogêneo obtidas na seção anterior continuam válidas nesse caso. A diferença aqui é o surgimento de uma solução particular que, como sabemos, precisa possuir a mesma frequência da força externa. Utilizamos novamente funções complexas $z_j(t) = e^{i\omega_f t}$, tais que $x_j(t) = \text{Re}\{z_j(t)\}$, para nos auxiliar no tratamento do sistema de equações. Buscamos soluções da forma

$$z_j(t) = c_j e^{i\omega_f t}, \quad (4.215)$$

em que c_j precisam ser números complexos, dado que esperamos encontrar uma amplitude e uma fase de resposta para cada oscilador. Substituindo esse ‘chute educado’ nas equações de movimento, conseguimos cancelar a dependência temporal da força para obter um sistema não homogêneo de equações com coeficientes constantes,

$$\begin{cases} \left(-\omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right)c_1 - \frac{\omega_0^2}{2}c_2 = \frac{F}{m}, \\ -\frac{\omega_0^2}{2}c_1 + \left(-\omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2}\right)c_2 = 0. \end{cases} \quad (4.216)$$

É possível resolver esse sistema pelo procedimento simples de isolar c_1 ou c_2 em uma das equações e utilizar seu valor na outra para determinar as amplitudes isoladamente, por conta de seu tamanho reduzido. No caso de maior número de partículas e de forças presentes, pode ser conveniente utilizar a regra de Cramers para resolver o sistema.

O procedimento de Cramers consiste em calcular a solução de cada amplitude c_j como a razão entre dois determinantes: no quociente, vai o determinante da matriz de coeficientes do sistema de equações; no numerador, entra o determinante da matriz obtida substituindo-se a coluna j pela matriz coluna formada pelos termos inhomogêneos. Em nosso caso, isso forneceria diretamente as soluções

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{F}{m} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ 0 & -\omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & -\omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} -\omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} & \frac{F}{m} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} & -\frac{\omega_0^2}{2} \\ -\frac{\omega_0^2}{2} & -\omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \end{vmatrix}}. \quad (4.217)$$

O determinante do denominador é o mesmo cujas raízes utilizamos para encontrar as frequências normais Ω_j de vibração. Por isso, se ignorarmos a dissipação, obteremos amplitudes c_j divergindo sempre que $\omega_f = \Omega_j$. A dissipação torna a solução física ao impedir a ocorrência dessas divergências, sendo portanto sua inclusão quase sempre essencial em situações com osciladores forçados³⁰.

Embora o valor absoluto mínimo do denominador (proporcional a algum γ) continue ocorrendo para $\omega_f = \Omega_j$, a frequência de ressonância pode diferir desse valor por conta dos termos no numerador, que podem também depender de Ω_j . Para o caso de dissipação muito pequena ($\gamma \ll \Omega_j, \omega_0^2$), esse desvio acaba sendo quase sempre desprezível (quadrático em γ , como vimos anteriormente); o efeito da dissipação se resume nesse caso a fornecer a escala da função de resposta dos osciladores, i.e. larguras e máximos.

As soluções explícitas se tornam

$$c_1 = \frac{F}{m} \frac{\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \frac{\omega_0^2}{2}}{(\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \frac{\omega_0^2}{2})(\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \frac{\omega_0^2}{2}) - \frac{\omega_0^4}{4}}, \quad (4.218)$$

$$c_2 = \frac{F\omega_0^2}{2m} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f + \frac{\omega_0^2}{2})(\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_2\omega_f + \frac{\omega_0^2}{2}) - \frac{\omega_0^4}{4}}. \quad (4.219)$$

Comparando essas amplitudes de resposta ao caso de um oscilador livre forçado, notamos que aparece o produto de 2 termos típicos de ressonância nos denominadores, em vez de apenas 1 como naquele caso. Isso pode ser visto fazendo-se $\omega_0 = 0$ para obter a resposta do oscilador livre forçado,

$$c_1 = \frac{F}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_f^2 + i\gamma_1\omega_f} \quad \text{e} \quad c_2 = 0. \quad (4.220)$$

Nesse caso elementar, a amplitude de $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$ consiste de um pico lorentziano de ressonância centrado na frequência livre ω do oscilador, e sua fase θ_1 apresenta comportamento dispersivo nessa mesma região,

$$|c_1|^2 = \frac{F^2}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_f^2)^2 + \gamma_1^2\omega_f^2} \quad \tan \theta_1 = -\frac{\gamma_1\omega_f}{\omega^2 - \omega_f^2}. \quad (4.221)$$

Já as expressões gerais para c_1 e c_2 envolvem a excitação concomitante de duas ressonâncias coletivas, e por isso possuem forma mais complicada. Como exemplo de um fenômeno curioso que pode ocorrer nesse tipo de sistema, consideremos a situação em que um dos osciladores sofre efeito dissipativo muito menor do que o outro, i.e. $\gamma_2 \ll \gamma_1$. Supomos também por interesse físico o limite de bons osciladores, no qual as frequências livres dominam a dinâmica para tempos curtos, i.e. $\omega \gg \omega_0, \gamma_j$.

Investiguemos então como a força externa fornece energia às partículas conforme sua frequência ω_f é variada em torno de ω . A Fig. 4.8 ilustra o perfil de ressonância do sistema acoplado [Eq. (4.219)]. A amplitude de oscilação da partícula forçada (partícula 1) aparece no quadro da esquerda, na curva contínua. Esta deve ser comparada à curva tracejada no mesmo quadro, obtida para um oscilador livre nas mesmas condições da partícula 1 [Eq. (4.221)].

³⁰Pode parecer contraditório termos imposto a nulidade do determinante também no caso dissipativo da Eq. (4.197) e dizer que, apesar disso, na Eq. (4.217) as perdas impedem que os denominadores se anulem. De fato, o determinante só pôde se anular na Eq. (4.197) para parâmetro λ complexo, tendo sido a parte imaginária de λ criada justamente para eliminar a parte imaginária da equação de movimento causada pela dissipação. No caso da Eq. (4.217), a frequência da força externa (i.e. o parâmetro que faz as vezes de λ) é sempre real, e portanto não pode anular o determinante do denominador.

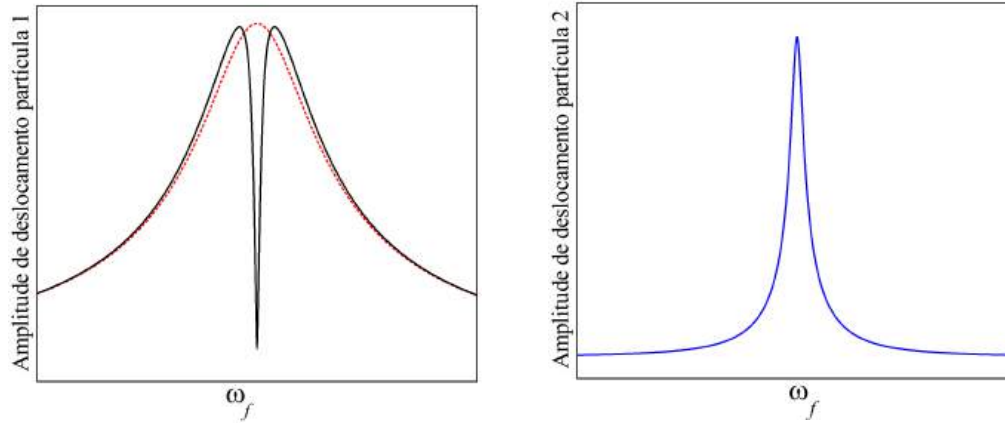


Figura 4.8: Ilustração das amplitudes de oscilação das partículas 1 (esquerda) e 2 (direita) como função da frequência ω_f da força externa. A frequência livre ω das partículas se encontra no centro dos quadros. Os valores utilizados para as grandezas (todos relativos a ω) foram: $\gamma_1/\omega = 10^{-2}$, $\gamma_2/\omega = 10^{-4}$ e $\omega_0/\omega = 5,5 \times 10^{-2}$. As figuras ilustram o intervalo $0,98\omega < \omega_f < 1,02\omega$.

A característica mais chamativa da curva contínua é o ‘buraco’ localizado exatamente naquela que seria a frequência de ressonância no caso desacoplado. Isso nos indica que a partícula forçada quase *não absorve* energia da força externa na ressonância exata, um resultado antiintuitivo. Podemos nos perguntar então aonde vai parar essa energia, e a resposta é dada pela curva à direita, na qual se ilustra a amplitude de movimento da partícula 2: seu perfil explica exatamente o ‘buraco’ observado na resposta da partícula 1, indicando que nessas condições a energia do agente externo é transferida com grande eficiência para a partícula 2 de forma indireta através pelo acoplamento.

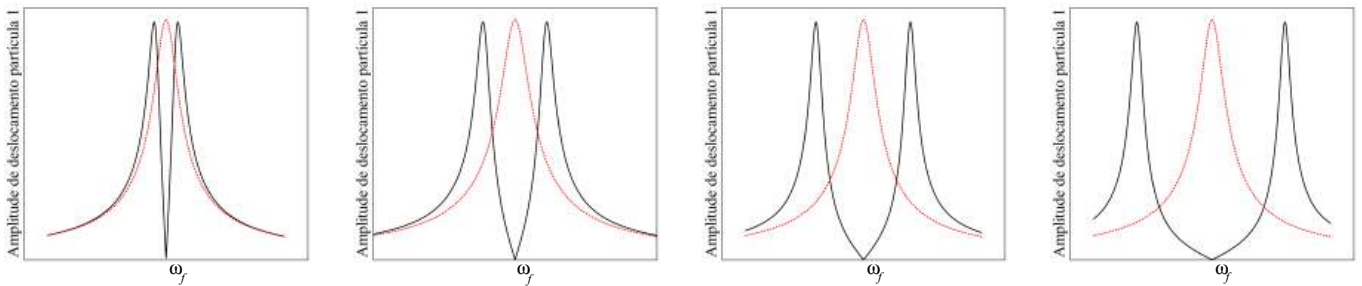


Figura 4.9: Amplitude da oscilação da partícula 1 como função da frequência ω_f da força externa para valores crescentes de acoplamento, da esquerda para a direita (curvas contínuas). O pico de ressonância se divide em dois, um fenômeno típico de acoplamento forte entre osciladores. Os valores utilizados de acoplamento são, da esquerda para a direita, (a) $\omega_0/\omega = 1,0 \times 10^{-1}$, (b) $\omega_0/\omega = 1,5 \times 10^{-1}$, (c) $\omega_0/\omega = 2,0 \times 10^{-1}$, (d) $\omega_0/\omega = 2,5 \times 10^{-1}$. A curva pontilhada representa a ressonância de uma partícula livre para comparação.

Esse efeito de acúmulo de energia na partícula acoplada pode ser entendido como consequência da condição $\gamma_2 \ll \gamma_1$. Como a partícula 2 é um oscilador com qualidade muito maior do que a partícula 1, ela armazena por mais tempo qualquer quantidade de energia que chegue a ela. No estado estacionário, a amplitude da oscilação que a partícula 2 induz na partícula 1 interfere destrutivamente com a amplitude imposta pela força externa, fazendo com que apenas a energia flua do agente externo para a partícula 2 de forma estável, onde se dissipa.

A Fig. 4.9 ilustra como o perfil de ressonância da partícula 1 se modifica conforme se aumenta o acoplamento com a partícula 2 (curva contínua). A resposta de um oscilador livre aparece como referência comparativa na curva tracejada de cada quadro. Observamos o pico de ressonância se *dividir em dois*, num fenômeno típico na observação de acoplamento forte entre osciladores.

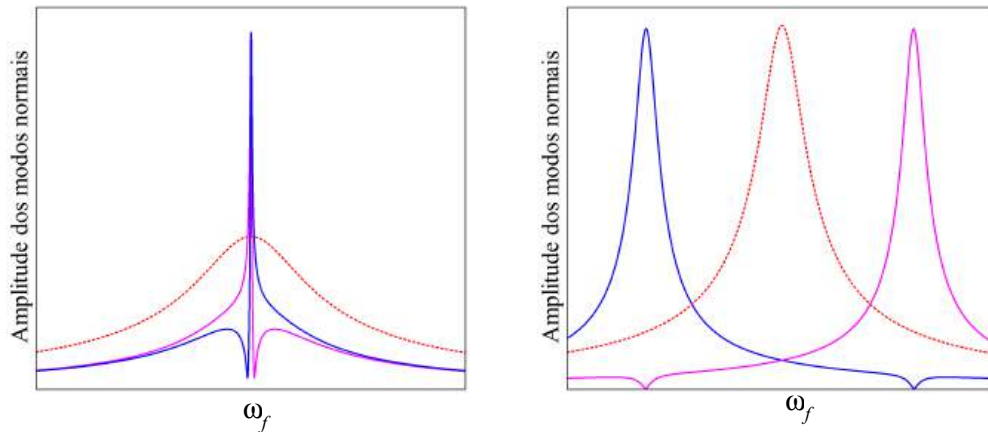


Figura 4.10: Amplitude da oscilação dos modos normais como função da frequência ω_f da força externa para valores crescentes de acoplamento (curvas contínuas). No quadro à esquerda, o acoplamento fraco ($\omega_0/\omega = 2,5 \times 10^{-2}$) coloca a resposta da partícula 1 na condição de absorção inibida ilustrada na Fig. 4.8. À direita, observamos a excitação dos modos na situação de desdobramento do pico de ressonância devido ao acoplamento forte ($\omega_0/\omega = 2,0 \times 10^{-1}$). A curva tracejada representa o perfil de ressonância de um oscilador livre para referência.

O efeito físico por trás do desdobramento do pico de ressonância se torna claro na ilustração da Fig. 4.10. Nela se consideram as amplitudes de oscilação dos modos normais nas situações de acoplamento fraco da Fig. 4.8 (esquerda) e de acoplamento forte (direita). Para acoplamento fraco, os modos normais não representam uma boa base para a descrição do fenômeno, pois são excitados de maneira misturada. De fato, a Fig. 4.10 é muito mais clara em mostrar que são as partículas que se excitam em regiões distintas de frequência da força externa. Já o quadro à direita mostra a situação oposta, na qual a base de modos normais revela que cada novo pico proveniente do desdobramento advém da excitação de um único modo normal de oscilação por vez. Conforme esperado intuitivamente, o acoplamento forte favorece a base de modos normais para a descrição simples de efeitos físicos³¹.

4.5 Partículas vs. Modos: a ‘dualidade onda-partícula’ na mecânica clássica

A formulação lagrangiana das interações num sistema mecânico nos levou a descrever sua evolução temporal através de uma nova família de coordenadas envolvendo combinações de deslocamentos de todas as partículas do sistema, as coordenadas normais. Embora a descrição do movimento se torne matematicamente

³¹Todos esses efeitos são bem conhecidos em sistemas atômicos em interação com luz. O ‘buraco’ no perfil de absorção do átomo correspondente à Fig. 4.8 é chamado de ‘transparência induzida’ por laser. Já o desdobramento da ressonância atômica análogo à Fig. 4.9 é conhecido como dubleto de Autler-Townes. Esses exemplos de efeitos óticos coerentes em osciladores atômicos e sua analogia com sistemas mecânicos podem ser encontrados no artigo Am. J. Phys. **70**, 37 (2002).

mais simples nessas coordenadas, sua relevância física pode parecer restrita à primeira vista, ou até mesmo inexistente para os mais pragmáticos, já que as partículas se mantêm como o foco de nossa descrição.

O oposto ocorre, na verdade: se pensarmos melhor, veremos que os modos normais representam uma estrutura cujas propriedades (ondulatórias) *emergem* da mecânica lagrangiana, ou seja, são deduzidas a partir da teoria. Já a ideia de ‘partícula’ se baseia em propriedades introduzidas de maneira fenomenológica para objetos que, dentro da teoria, escondem um mundo de coisas que não sabemos. De fato, com ‘partícula’ queremos dizer simplesmente ‘algo que possui massa, posição e momento’ por definição: além de não conseguirmos deduzir essas características a partir do formalismo, uma vez que são introduzidas ‘à mão’, outras propriedades físicas desse ‘algo’ permanecem irrelevantes para sua descrição mecânica³². Já os modos aparecem como objetos naturais do problema: existe total clareza sobre como esses padrões de movimento surgem e evoluem no tempo (como ondas!), ainda que tenham de existir sobre as coisas mal definidas chamadas ‘partículas’.

A naturalidade com que os modos surgem no formalismo nos leva a pensar se não seria possível produzir excitações desses objetos ondulatórios que apresentassem *propriedades de partículas*. Se assim for, então a fronteira conceitual entre partículas e ondas seria borrada a tal ponto que partículas poderiam ser vistas, na verdade, como ondas existentes sobre o substrato de outra coisa mais fundamental. Teríamos talvez uma visão mais clara do que são e de como obter suas propriedades emergindo naturalmente do formalismo. No nível elementar deste curso, a propriedade mais chamativa de uma partícula (além da massa, entendida como inércia a forças³³) seria sua localização precisa no espaço. Colocamos assim a pergunta: é possível que a excitação de modos produza ondas (excitações dos modos) localizadas no espaço?

A resposta é: sim! O motivo vem do fato de modos admitirem o princípio da superposição, uma consequência direta da linearidade das equações de movimento no limite de pequenas oscilações. Ilustramos essa situação na Fig. 4.11, na qual consideramos uma cadeia de 10 partículas acopladas. A condição inicial aparece no quadro mais à esquerda, e envolve deslocamento das 2 primeiras partículas da cadeia, numa tentativa de criar uma excitação dos modos normais localizada no espaço. Os quadros subsequentes tratam os deslocamentos transversais das partículas em instantes posteriores: a *excitação* se move pela cadeia mantendo-se razoavelmente bem localizada, e possui até mesmo velocidade própria! As propriedades mecânicas dessa excitação localizada, como e.g. o momento que carrega, emergem automaticamente do formalismo³⁴.

Não é difícil imaginar o limite em que o número de partículas se torna tão grande e as distâncias entre elas tão pequenas que não se faz mais possível distingui-las individualmente. As excitações ondulatórias a ‘viajarem’ por elas ainda continuarão sendo possíveis, mesmo nesse limite. Levando esse raciocínio ao

³²Dito em outras palavras, a descrição do movimento pode ser realizada considerando apenas essas grandezas. Outras podem ser incluídas para facilitar o tratamento de certos sistemas (como corpos rígidos ou fluidos), mas a descrição da matéria como um agregado de partículas sempre funciona, mesmo que apenas como ponto de partida para tratamentos mais elaborados.

³³Para criar um análogo de massa para ondas, teríamos de pensar primeiro no que queremos dizer com isso, definindo muito bem o que seriam os análogos de forças (e.g. coisas que alterassem localmente a velocidade de propagação de pacotes de ondas).

³⁴Utilizamos a condição inicial $\mathbf{q}(0) = (0,95 \sqrt{1 - 0,95} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ e calculamos sua evolução realizando a mudança de coordenadas de partículas para modos normais através da relação $\boldsymbol{\eta}(0) = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{q}(0)$, da qual segue $\boldsymbol{\eta}(t) = \cos(\boldsymbol{\Lambda} t) \boldsymbol{\eta}(0)$. Para desenhar a Fig. 4.11, voltamos à base de partículas pela transformação inversa $\mathbf{q}(t) = \mathbf{V} \boldsymbol{\eta}(t)$. O tipo de excitação localizada obtido, caracterizado por poucas partículas se deslocando a cada instante, em geral envolve um número grande de modos de oscilação excitados, e por isso é chamada de *pacote de ondas*. De fato, essa propriedade tem relação com a propriedade da transformada de Fourier segundo a qual o espectro de frequências varia inversamente com a largura da função.

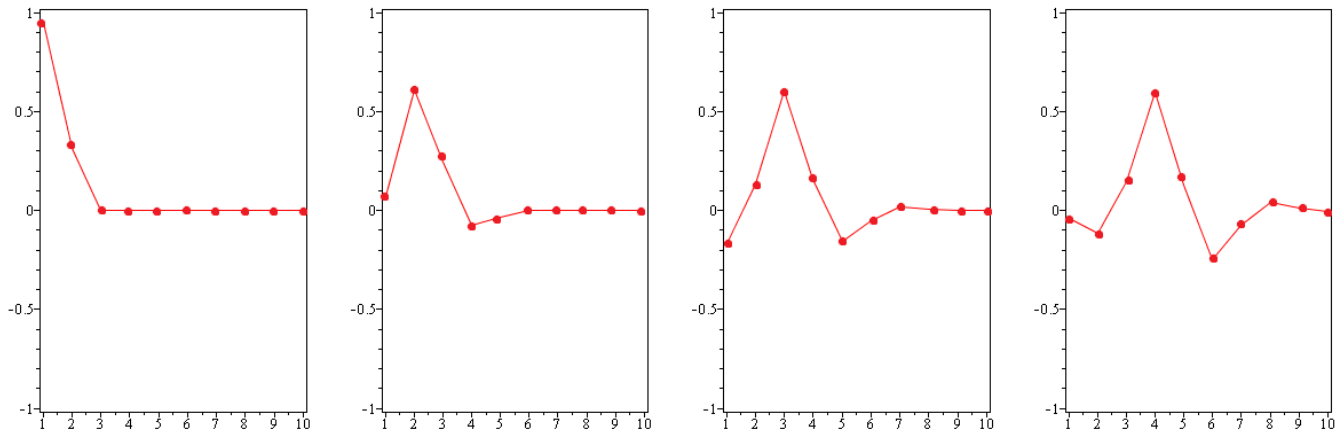


Figura 4.11: Oscilação de uma cadeia composta de 10 partículas idênticas. Da esquerda para a direita, cada quadro mostra os deslocamentos das partículas num instante de tempo subsequente.

extremo, podemos nos perguntar quão localizadas no espaço podem ser essas excitações coletivas de modos normais: é possível fazê-las tão localizadas que pareçam efetivamente *partículas* a um observador externo, embora fundamentalmente não sejam, no sentido de que possam parecer para todos os efeitos práticos como objetos pontuais se movendo pelo Espaço segundo as leis de Newton?

A resposta a essa pergunta está no centro do princípio de incerteza da mecânica quântica como primeiramente percebido por seus criadores: se partículas possuem propriedades *compatíveis* com a possibilidade de serem na verdade pacotes de ondas se propagando como excitações de alguma coisa, sua descrição deve necessitar de uma ‘mecânica ondulatória’. Esse pensamento foi de fato desenvolvido por Schrödinger ao inventar sua equação baseada em analogias com a mecânica clássica e o eletromagnetismo para as ondas de luz. Mas o que seria o substrato no qual essas ondas se movem? Bem, para responder a isso é preciso tratar de teorias de campo.

Hoje sabemos que as ‘partículas’ mais elementares possíveis (i.e. indivisíveis, tais como o elétron e o neutrino), possuem propriedades ondulatórias que advêm de serem elas mesmas precisamente o tipo de objeto de que trata a Fig. 4.11: modos de excitação de *campos* que permeiam o espaço (e.g. o campo do elétron, ou o campo do neutrino). O campo do elétron, por exemplo, a depender das condições do problema, pode possuir como números quânticos bons o vetor de onda, a frequência de oscilação e o spin, que são então usados como ‘rótulos’ para nomear os diferentes modos. Um elétron nada mais é do que uma excitação elementar de um desses campos que permeiam o Espaço. As propriedades cinéticas do elétron são determinadas em nível fundamental pelas características de seu campo e por acoplamentos com outros campos³⁵. Um campo é descrito por uma função, ou um conjunto de funções, atribuída a cada ponto do Espaço.

As coordenadas normais $\eta_j(t)$ podem ser entendidas como um campo caso o índice j de partícula passe a ser interpretado como uma posição no Espaço (igual à posição de equilíbrio da partícula a que se refere), tornando-se no limite contínuo $\eta_j(t) = \eta(j, t) \rightarrow \eta(x, t)$. Associamos assim a cada ponto do espaço uma função escalar a representar os deslocamentos do equilíbrio para um contínuo de matéria. Veremos um

³⁵Por exemplo, a massa do elétron e de todas as partículas fundamentais surgem do acoplamento com o campo de Higgs. Sem o mecanismo de Higgs para a ‘criação de massa’ por acoplamento com outra coisa, não seria possível coadunar as simetrias observadas nas interações entre partículas elementares ao fato experimental de que possuem massa.

pouco desse formalismo na próxima seção.

O tratamento de sistemas acoplados nesse formato abre espaço para separarmos conceitualmente as propriedades do campo (em nosso caso concreto, o deslocamento de partículas mecânicas do equilíbrio) daquelas associadas a seu substrato (o Espaço). Esse formalismo nos permite então generalizar facilmente o substrato das excitações como sendo o *próprio espaço-tempo* da relatividade³⁶: teorias de campo relativísticas são aquelas construídas para campos existentes sobre um substrato quadridimensional cujos rótulos (três dimensões de Espaço e uma de tempo) obedecem às leis de transformação de Lorentz para observadores em referenciais inerciais diferentes³⁷. As propriedades do campo em si podem emanar de quantidades tratadas classicamente, como o campo mecânico de deslocamentos mencionado anteriormente ou o campo eletromagnético de Maxwell, e então temos uma teoria clássica de campos, ou seguir regras mais complicadas que envolvam operadores e suas relações algébricas, como ocorre em teoria quântica de campos, nas quais as partículas, vistas como excitações de campos cravados no espaço-tempo, podem ser criadas ou aniquiladas quando esses campos se acoplam uns aos outros.

4.6 Oscilações em sistemas contínuos: ondas

A transição de sistemas discretos para contínuos requer algumas revisões conceituais em como descrever as oscilações. Nosso interesse no limite contínuo é duplo: por um lado, essa generalização nos permitirá entender o surgimento de ondas nos meios materiais; por outro, o formalismo a ser desenvolvido para atacar esse tipo de problema conterà a forma de uma teoria de campo na visão lagrangiana.

É conveniente considerarmos o modelo da cadeia linear de partículas acopladas por molas (Fig. 4.5) no limite em que o número N de partículas tende ao infinito. Por clareza de notação, vamos rotular cada partícula por sua posição de equilíbrio x_j ao longo da cadeia linear, e seu deslocamento a partir do equilíbrio³⁸ como $u_j(t)$.

4.6.1 Limite contínuo

Para chegarmos nessa situação, podemos fazer a massa de cada partícula tender ao infinitésimo $m_j = dm$ e o espaçamento entre elas ir a zero como dx de forma que a densidade linear de massa μ permaneça constante ou seja lentamente variável no índice j (para que faça sentido definir uma densidade local), tal como ocorre num material típico, i.e.

$$\lim_{\substack{dm \rightarrow 0 \\ dx \rightarrow 0}} \frac{dm}{dx} = \mu \quad \Rightarrow \quad dm = \mu dx. \quad (4.222)$$

A energia cinética desse sistema é composta por uma soma de termos infinitesimais,

$$K(\{\dot{x}_j\}) = \sum_j \frac{1}{2} dm \dot{u}_j^2. \quad (4.223)$$

³⁶Essa foi a grande dificuldade intelectual associada a se abrir mão do éter no eletromagnetismo.

³⁷Há de se mencionar que existem modelos teóricos que consideram ainda maior número de dimensões de Espaço, tal como aqueles envolvendo supercordas, mas que (ainda?) não possuem suporte experimental.

³⁸Caso o deslocamento seja puramente transversal, a coordenada $u_j(t)$ faz as vezes do que chamamos anteriormente de $y_j(t)$, e a posição da partícula é $\vec{r}(t) = x_j \hat{x} + y_j(t) \hat{y}$. Para deslocamento longitudinal, x_j deve ser entendida como a posição de equilíbrio em torno da qual ocorre a oscilação, e a posição da partícula na cadeia varia no tempo como $x_j(t) = x_j + u_j(t)$.

Usamos a Eq. (4.222) para escrevê-la em termos da quantidade constante μ ,

$$K(\{\dot{x}_j\}) = \sum_j \frac{1}{2} \mu \dot{u}_j^2 dx, \quad (4.224)$$

o que nos permite tomar $dx \rightarrow 0$ para obter o limite contínuo. A soma no índice discreto j se torna uma integral na variável de posição x_j das partículas, a que podemos chamar simplesmente x . Da mesma forma, os deslocamentos discretos $u_j(t)$ se tornam uma função $u(x, t)$ da posição da partícula. Obtemos no limite contínuo

$$K\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_\ell \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)^2 dx, \quad (4.225)$$

sendo a integral calculada em todo o comprimento ℓ da cadeia.

Raciocínio semelhante se aplica à energia potencial. Para a cadeia linear com interação de contato, esta se escreve

$$U(\{x_j\}) = \sum_j \frac{1}{2} k (u_{j+1} - u_j)^2. \quad (4.226)$$

Queremos fazer o limite em que as molas conectando as partículas se tornem infinitesimais em tamanho.

Existem sutilezas aqui. Essa expressão para a energia potencial só vale no limite de pequenas oscilações, no qual a deformação de cada mola precisa ocorrer no regime de resposta linear. Mesmo para materiais bastante elásticos³⁹, isso quase sempre é obtido se o tamanho relaxado da mola for muito maior do que as deformações sofridas. No caso de vibrações transversais, o tamanho da mola ds com deslocamentos é

$$ds = \sqrt{dx^2 + (u_{j+1} - u_j)^2} = \left(1 + \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{dx^2}\right) dx. \quad (4.227)$$

Requerer pequenas oscilações significa $ds \approx dx$, ou seja, $(u_{j+1} - u_j)/dx \ll 1$. No limite contínuo, essa quantidade se torna a derivada de $u(x)$. Podemos então estabelecer que a condição de pequenas oscilações se traduz, no limite contínuo, como

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{dx} \ll 1 \quad \xrightarrow{dx \rightarrow 0} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \ll 1. \quad (4.228)$$

Condição semelhante vale para o caso de deslocamentos longitudinais.

A segunda sutileza se refere a como entender a constante elástica k no limite em que o tamanho da mola se torna infinitesimal. Notemos que nesse caso não temos mais acesso ao que faz cada mola, mas apenas a seu efeito macroscópico combinado sobre o material. É como se estivéssemos somando os efeitos de todas as molas infinitesimais para determinar como uma mola equivalente agiria entre dois pontos distantes do material. A elasticidade da mola equivalente é a soma das elasticidades das molas infinitesimais, portanto proporcional ao número de molas conectadas. Para uma distância macroscópica s entre dois pontos do material, a constante elástica do limite contínuo deve ser tal que

$$k = \mathcal{Y}s, \quad (4.229)$$

em que \mathcal{Y} é o *módulo de Young*⁴⁰. Como essa expressão deve valer ainda na escala infinitesimal ($s \rightarrow dx$), devemos substituir k na Eq. (4.226) usando o módulo de Young Y , como

$$k = \mathcal{Y}dx. \quad (4.230)$$

³⁹Com exceção de materiais extraordinários como a teria de aranha, que pode se deformar até o dobro de seu tamanho original antes de se romper, na grande maioria dos materiais o regime de resposta linear coincide com o regime de pequenas deformações.

⁴⁰Essa definição da constante \mathcal{Y} visa estar de acordo com a lei fenomenológica que dita ser calculada como $F = \mathcal{Y}s\Delta x$ a distensão Δx de um material linear com comprimento s submetido a uma tração F .

Resta apenas juntar essas informações para obtermos no limite contínuo a energia potencial

$$U\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_{\ell} \frac{1}{2} \mathcal{Y} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.231)$$

Assim como no caso da energia cinética, o integrando representa uma densidade de energia.

4.6.2 Densidade lagrangiana e equações do movimento

Seguindo as deduções acima, a lagrangiana para um pedaço ℓ da cadeia linear de partículas acopladas se torna

$$\mathcal{L}(\partial_x u, \partial_t u) = \int_{\ell} \left[\frac{1}{2} \mu (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x u)^2 \right] dx, \quad (4.232)$$

em que usamos para as derivadas parciais com relação aos rótulos x e t a notação sintética

$$\partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{e} \quad \partial_x u := \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.233)$$

Vemos que a lagrangiana consiste de uma soma contínua de termos designados pelo rótulo x . O termo genérico do integrando recebe o nome de *densidade lagrangiana*, definida em nosso caso como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial_x u, \partial_t u) &= \int_{x_1}^{x_2} \tilde{\mathcal{L}}(\partial_x u, \partial_t u) dx, \\ \text{em que } \tilde{\mathcal{L}}(\partial_x u, \partial_t u) &= \frac{1}{2} \mu (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} Y (\partial_x u)^2, \end{aligned} \quad (4.234)$$

em que denotamos x_1 e x_2 como os pontos que definem os extremos da cadeia linear contínua.

A equação de movimento para o campo de deslocamentos $u(x, t)$ se obtém diretamente a partir dessa lagrangiana contínua pela utilização do princípio variacional de estacionariedade da ação. Basta entender $\partial_x u$ e $\partial_t u$ como funções deduzidas a partir de $u(x, t)$ e nesta incluir uma função de variação $\delta u(x, t)$, exatamente como fizemos no caso discreto, i.e.

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \delta u(x, t), \quad (4.235)$$

em que $u_0(x, t)$ é o perfil de campo que produz a estacionariedade buscada para a ação, portanto nossa solução do problema. A variação $\delta u(x, t)$ deve ser uma função arbitrária dos rótulos x e t e precisa ser identicamente nula nos extremos dos intervalos de tempo e de espaço da lagrangiana considerada, i.e.

$$\delta u(x_1, t) = \delta u(x_2, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0. \quad (4.236)$$

A integral de ação se escreve como o funcional de $u(x, y)$

$$S[u(x, y)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\partial_x u, \partial_t u) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \tilde{\mathcal{L}}(\partial_x u, \partial_t u) dx dt \quad (4.237)$$

e sua estacionariedade requer

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \delta(\partial_x u) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \delta(\partial_t u) \right) dx dt = 0. \quad (4.238)$$

Mas $\partial_x u$ e $\partial_t u$ são funções deduzidas a partir de u , de forma que suas variações não são independentes, mas produzidas como consequência da variação δu da forma

$$\delta(\partial_x u) = \frac{\partial}{\partial x} \delta u \quad \text{e} \quad \delta(\partial_t u) = \frac{\partial}{\partial t} \delta u. \quad (4.239)$$

Isso nos permite usar as condições de contorno sobre as variações para realizar por partes as integrais no tempo e no espaço separadamente. Obtemos para cada uma delas

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \right) \delta u dx, \quad (4.240)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} dt = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \right) \delta u dt. \quad (4.241)$$

Substituindo esses resultados na Eq. (4.238), chegamos à condição

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \right) \right] \delta u dx dt = 0. \quad (4.242)$$

Como a variação δu é arbitrária por construção, essa integral só pode se anular se a função a multiplicar δu for identicamente nula. Obtemos com isso a equação de movimento do campo $u(x, t)$ como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \right) = 0. \quad (4.243)$$

É simples generalizar essa equação para o caso em que aparece na lagrangiana a própria função $u(x, t)$ e/ou suas derivadas com relação a outros parâmetros (e.g. rótulos y e z relativos a outros eixos de posição). Obtemos a equação de movimento mais geral

$$\sum_s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_s u)} \right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial u} = 0, \quad (4.244)$$

em que o símbolo ‘ s ’ denota o conjunto utilizado de rótulos, e.g. $s = \{t, x, y, z\}$. Esse tipo de expressão fornece a evolução de campos em geral, pois não faz referência a nenhuma lagrangiana específica, mas apenas ao princípio de estacionariedade da integral de ação. A descrição de outros tipos de campos requer ‘apenas’ encontrarmos a lagrangiana correta, tal como e.g. o campo eletromagnético ou e.g. a equação de Klein-Gordon relativística para partículas neutras com spin nulo.

4.6.3 Equação de onda

Para obtermos a equação de movimento específica para nosso sistema, no qual o campo $u(x, t)$ representa o deslocamento de uma cadeia acoplada contínua, aplicamos o princípio extremal da Eq. (4.243) à densidade de lagrangiana da Eq. (4.234). As derivadas parciais necessárias são⁴¹

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \right) = -\frac{1}{2} \mathcal{Y} \frac{\partial}{\partial x} (2\partial_x u) = -\mathcal{Y} \partial_x^2 u \quad (4.245)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_t u)} \right) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial t} (2\partial_t u) = \mu \partial_t^2 u. \quad (4.246)$$

⁴¹Caso você ache confuso calcular coisas como $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_x u)} \right)$, chame $\partial_x u := f$ e calcule $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial f} \right)$. É exatamente isso que essa expressão quer dizer.

A equação de movimento para a cadeia linear contínua se torna

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\mathcal{Y}/\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.247)$$

a qual reconhecemos como a *equação de onda*.

A única restrição que fizemos em nossa dedução foi requerer que as funções $u(x, t)$ respeitem a aproximação de pequenas vibrações do caso discreto. No limite contínuo, essa condição se traduz como uma imposição de ‘suavidade’ sobre $u(x, t)$ [Eq. (4.228)], já que sua variação com x precisa ser suficientemente lenta para que valha a Eq. (4.247). Portanto, desde que as oscilações não deformem apreciavelmente o meio contínuo em que ocorrem, ondas são o fenômeno mais geral possível para qualquer campo em movimento ligeiramente fora do equilíbrio estável: daí sua generalidade. Basta que exista uma configuração de equilíbrio e que a energia potencial possua termo de segunda ordem não nulo, e o meio comportará a propagação de ondas.

No formalismo lagrangiano, a equação de onda foi encontrada a partir da densidade lagrangiana dependente do deslocamento $u(x, t)$ de cada pedaço infinitesimal do meio contínuo. É importante notar que a posição x passa a ser um rótulo a nos dizer onde está ocorrendo o deslocamento descrito por $u(x, t)$, deixando assim de denotar o deslocamento em si como no caso discreto. Por isso, posições e tempo passam a ter no formalismo o mesmo status de *rótulos* a definir o local no Espaço. Cria-se uma separação formal entre o Espaço que habitamos e o espaço de configurações. O primeiro se torna explicitamente um palco imutável de rótulos, enquanto o último engloba todos os estados possíveis de campos contínuos. A estacionariedade da ação determina a configuração de campos escolhida pela natureza na evolução do sistema.

Não é difícil imaginar que mais de uma coisa possa estar acontecendo no mesmo ponto do palco de rótulos. Por exemplo, $u(x, t)$ poderia representar o deslocamento transversal da matéria naquele ponto, sendo o deslocamento longitudinal descrito por uma função independente $v(x, t)$ possuindo o mesmo conjunto de rótulos. Teremos, nesse caso, duas equações de movimento, uma para cada *campo*. De fato, um campo é apenas uma função, eventualmente com várias dimensões (e.g. um campo vetorial a fornecer o deslocamento tridimensional de cada ponto da cadeia), cravada no espaço. Separar conceitualmente as funções que definem os campos do palco sobre o qual existem nos permite considerar as propriedades desses dois conjuntos de objetos de forma independente⁴². É por isso que o formalismo lagrangiano torna simples transitar entre diversos modelos de geometria para o espaço-tempo sem afetar a forma de se deduzir as equações de movimento, fornecendo uma imagem coesa para a dinâmica.

4.6.4 Soluções harmônicas da equação de onda

Uma das formas de se resolver analiticamente a equação de onda consiste em apostar que ela admite soluções separáveis no tempo e no espaço, da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (4.248)$$

⁴²No caso newtoniano, os rótulos $\{t, x, y, z\}$ são definidos a menos de translação, rotações e fatores de escala (unidades), que podem variar entre observadores. Já no caso relativístico, esses rótulos passam a depender também da velocidade do observador, pelas transformações de Lorentz.

no método conhecido como *separação de variáveis*. As derivadas parciais se tornam nesse caso derivadas totais,

$$\partial_x^2 u(x, t) = X''T \quad \text{e} \quad \partial_t^2 u(x, t) = X\ddot{T}, \quad (4.249)$$

em que o apóstrofo indica derivação com relação a x e o ponto, a t . Substituímos essas relações na Eq. (4.247) e reorganizamos os termos para obtermos

$$X\ddot{T} - \frac{\mathcal{Y}}{\mu} X''T = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \frac{X''}{X}. \quad (4.250)$$

Como a última igualdade se refere a duas funções de variáveis completamente independentes, só pode ser válida se ambos os membros forem a mesma constante, i.e.

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{T}}{T} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\mathcal{Y}}{\mu} \frac{X''}{X} = \alpha. \quad (4.251)$$

Existem três possibilidades para a constante α , ser nula, positiva ou negativa. A única possibilidade interessante é esta última, i.e. $\alpha = -\omega^2$, pois nesse caso obtemos equações diferenciais tipo oscilador harmônico tanto no tempo quanto no espaço,

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad \text{e} \quad X'' + k_\omega^2 X = 0. \quad (4.252)$$

A constante ω fornece frequência de oscilação na equação temporal, enquanto o número de onda k_ω dá a periodicidade espacial das funções X . De acordo com a Eq. (4.251), essas constantes precisam estar relacionadas entre si como

$$\frac{\omega}{k_\omega} = \sqrt{\frac{\mathcal{Y}}{\mu}} := v, \quad (4.253)$$

em que v , como veremos, é a *velocidade de fase* da onda. Podemos ainda escrever as constantes ω e k_ω em termos dos períodos temporal τ e espacial λ (comprimento de onda) das funções T e X ,

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{e} \quad k_\omega = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.254)$$

As soluções independentes da Eq. (4.252) consistem de oscilações harmônicas no tempo e no espaço,

$$T(t) = \begin{cases} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{e} \quad X(x) = \begin{cases} \cos(k_\omega x) \\ \sin(k_\omega x) \end{cases}. \quad (4.255)$$

Essas funções representam um conjunto *infinito* de soluções, pois existem infinitas combinações de ω e k_ω capazes de satisfazer a condição da Eq. (4.253).

A solução geral $u(x, t)$ do problema é uma combinação linear das funções da Eq. (4.255). A forma usual de escrevê-la é

$$u(x, t) = \int_0^\infty d\omega [A_+ \cos(k_\omega x + \omega t + \varphi_+) + A_- \cos(k_\omega x - \omega t + \varphi_-)], \quad (4.256)$$

em que A_j e φ_j são constantes reais. As funções de base do tipo

$$u_{\pm\omega}(x, t) = \cos(k_\omega x \pm \omega t) \quad (4.257)$$

representam ondas harmônicas, de extensão infinita tanto no tempo quanto no espaço, propagando-se cada qual em um sentido do eixo x . Isso pode ser visto considerando com que velocidade v_0 um observador precisaria se mover para perceber em seu referencial essas ondas como imutáveis,

$$\begin{aligned} u_{\pm\omega}(x, t) = cte &\Rightarrow k_\omega x \pm \omega t = cte \\ &\Rightarrow x = x_0 \mp vt, \end{aligned} \quad (4.258)$$

ou seja, $v_0 = \mp v$. Assim, ondas do tipo $u_{+\omega}$ movem-se no sentido negativo do eixo x e ondas com sinal negativo no argumento $u_{-\omega}$, no sentido positivo. E daí vemos porque v é chamada de velocidade de fase, já que consiste na velocidade com que se move um ponto de fase constante (argumento do cosseno) da onda.

4.6.5 Solução genérica da equação de onda

Na verdade, a equação de onda admite soluções com qualquer formato satisfazendo a condição de suavidade $\partial u(x, t)/\partial x \ll 1$, pois pode ser vista como uma condição sobre o argumento, e não sobre o formato, de funções. Com isso queremos dizer que o ponto central que permite às funções $u_{\pm\omega}$ satisfazerem a equação de onda não se refere à de sua forma harmônica, mas especificamente a seus argumentos do tipo $x \pm vt$.

De fato, a Eq. (4.247) pode ser fatorada como uma sequência de operadores diferenciais

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t), \quad (4.259)$$

cuja ordem, além disso, não é importante, pois

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t). \quad (4.260)$$

Assim, $u(x, t)$ satisfaz a equação de onda caso valha como verdadeira qualquer uma das condições mais simples,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = 0. \quad (4.261)$$

Suponhamos que a função $u(x, t)$ dependa de x e t de uma forma específica (que queremos encontrar), através de uma função $\zeta(x, t)$ na qual se embutem as variáveis x e t , i.e. suponhamos $u(x, t) = u(\zeta)$. Segue da regra da cadeia da derivação que

$$\frac{\partial}{\partial x} u(\zeta) = \frac{du}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\zeta) = \frac{du}{d\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad (4.262)$$

de maneira que as condições da Eq. (4.261) são herdadas pela função ζ , pois

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) u(x, t) = \frac{du}{d\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \zeta(x, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \zeta(x, t) = 0. \quad (4.263)$$

Essa relação impõe que as derivadas parciais do argumento ζ com relação ao tempo e à posição sejam proporcionais entre si. A forma de se obter isso é através de uma função linear em ambas as variáveis, i.e.

$$\zeta_{\pm}(x, t) = x \pm vt. \quad (4.264)$$

Com isso, encontramos que a dependência de $u(x, t)$ em seus rótulos deve seguir uma de duas possibilidades específicas, as quais chamaremos $u_+(x, t) = u_+(x + vt)$ e $u_-(x, t) = u_-(x - vt)$.

Assim, quaisquer funções u_+ e u_- bem comportadas funcionam como solução genérica da equação de onda. Concluimos que uma superposição dessas funções deve descrever a solução geral, i.e.

$$u(x, t) = u_-(x - vt) + u_+(x + vt). \quad (4.265)$$

O fato de que a solução geral pode ser tanto escrita dessa forma como em termos da integral em funções harmônicas da Eq. (4.256) só reflete o fato conhecido de que qualquer função bem comportada pode ser descrita por sua transformada de Fourier.

Além disso, esse resultado mostra que a Eq. (4.247) possui a propriedade especial de permitir a propagação de ondas sem que sofram deformação. Para mostrar isso, buscamos descobrir se existe um referencial com velocidade uniforme v_0 em que a onda seria vista como um padrão constante e imutável. Requeremos

$$\begin{aligned} u_{\pm}(x \pm vt) = cte &\Rightarrow x \pm vt = cte \\ &\Rightarrow x = x_0 \mp vt, \end{aligned} \quad (4.266)$$

e com isso obtemos $v_0 = \pm v$. Embora tenhamos chegado à mesma resposta do caso harmônico [Eq. (4.258)], a velocidade v aqui determinada, chamada *velocidade de grupo*, possui significado distinto daquela. A velocidade de grupo nos indica com que velocidade se move a função u_{\pm} como um todo, i.e. o *envelope* da onda. O fato de que as duas são coincidentes no caso da cadeia linear contínua nos indica que esse meio não possui *dispersão*.

4.6.6 Dispersão

A propagação sem deformação do envelope de uma onda num meio material ocorre apenas na ausência de dispersão. Que essa propriedade especial só pode valer como aproximação ideal fica claro a partir de considerações elementares.

De acordo com a solução harmônica da Eq. (4.256), a aceleração de um ponto da cadeia linear vale

$$\frac{\partial^2 u_{\pm\omega}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2 A}{2} \cos(k_{\omega}x \pm \omega t + \varphi) = -\omega^2 u_{\pm\omega}, \quad (4.267)$$

ou seja, sua amplitude aumenta com o quadrado da frequência de oscilação, o que não pode ser fisicamente válido para sempre: no caso extremo, para algum ω suficientemente alto, a aceleração imposta sobre um pedaço da cadeia seria causada por uma força tão grande que o meio se romperia. Na verdade, muito antes disso ocorrer deixa de valer a linearidade do deslocamento da cadeia elástica com a tração externa.

Algo similar ocorre para a energia mecânica da oscilação, pois

$$\begin{aligned} \tilde{E} = \tilde{K} + \tilde{U} &= \frac{\mu\omega^2}{2} A_{\pm\omega}^2 \sin^2(k_{\omega}x \pm \omega t + \varphi_{\pm\omega}) + \frac{\mathcal{Y}k_{\omega}^2}{2} A_{\pm\omega}^2 \sin^2(k_{\omega}x \pm \omega t + \varphi_{\pm\omega}) \\ &\Rightarrow \langle \tilde{E} \rangle_{\tau} = \frac{\mu\omega^2}{2} A_{\pm\omega}^2, \end{aligned} \quad (4.268)$$

em que usamos a Eq. (4.253) para escrever $\mu\omega^2 = \mathcal{Y}k_{\omega}^2$ e tomamos a média da energia em um ciclo τ de oscilação. Essa quantidade também aumenta com o quadrado de ω . Novamente, no caso mais extremo imaginável, existe ω para o qual a energia de oscilação seria tão grande que se compararia à massa de repouso da corda, requerendo um tratamento relativístico da oscilação! Claro que isso não ocorre porque

a cadeia linear simplesmente deixa de responder para frequências altas, possivelmente por efeitos mais mundanos como o fato de não ser uma corda real formada por uma cadeia linear perfeitamente alinhada de átomos acoplados. A dimensionalidade transversal da corda, ainda que pequena, leva a efeitos dissipativos que tendem a amortecer a vibração. Esperamos que esses efeitos se intensifiquem justamente quando a frequência se torna tão grande que o comprimento de onda da perturbação passa a ser tão pequeno quanto a dimensão transversal da corda real.

Esses exemplos nos mostram essencialmente que a elasticidade de um material real precisa depender da frequência, i.e. $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(\omega)$, e mais especificamente tender a zero para $\omega \gg \omega_r$, em que ω_r é dada pelo inverso do tempo de resposta típico do sistema. Essa constatação implica que a velocidade de fase [Eq. (4.253)], por sua vez, deve também variar com ω , e precisa ser atualizada para

$$v(\omega) = \frac{\omega}{k_\omega} = \sqrt{\frac{\mathcal{Y}(\omega)}{\mu}}. \quad (4.269)$$

Essa expressão resume como o meio relaciona a frequência da onda ω ao número de onda k_ω , sendo chamada de *relação de dispersão*. Meios sem dispersão possuem relação linear entre ω e k_ω , como é o caso da corda ideal da Eq. (4.253).

Na presença de dispersão, as ondas parciais com frequências harmônicas puras a formarem o envelope $u(x, t)$ (i.e. as componentes de Fourier do envelope) passam a se defasar com a propagação, produzindo deformações. Assim, as funções genéricas $u_\pm(x \pm vt)$ não mais representam soluções da equação de onda mais realista,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2(\omega)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.270)$$

pois não mais existe um referencial em que um observador perceberia a onda como uma forma estática. No entanto, a técnica de separação de variáveis ainda resulta em soluções válidas, e as soluções harmônicas da Eq. (4.256) sobrevivem como corretas, bastando atualizar a conexão entre ω e k_ω de acordo com a Eq. (4.269) para obter a evolução de qualquer pacote de ondas.

Capítulo 5

Mecânica hamiltoniana

A revisão conceitual da mecânica newtoniana e lagrangiana realizada por William Rowan Hamilton e Carl Gustav Jacobi aparece numa série de artigos publicados entre 1834 e 1836. Hamilton se interessou em aplicar à mecânica seu conhecimento de ótica geométrica, tomando para tanto a abordagem de desenvolver a equação que se tornaria conhecida como ‘equação de Hamilton-Jacobi’. Jacobi, que acabara de publicar um artigo importante no problema de três corpos, se interessou pelo trabalho de Hamilton tão logo dele tomou conhecimento, e lhe adicionou seus próprios *insights*, no qual reconhecia a estrutura das equações canônicas como independentes da equação de Hamilton.

O formalismo hamiltoniano da mecânica é uma síntese conceitual e matemática de tudo o que vimos até aqui. Sua profundidade conceitual eleva a mecânica clássica ao nível de uma teoria fundamental da física, de fato a porta de entrada para os desenvolvimentos que se seguiriam na mecânica estatística e na mecânica quântica. Entender o formalismo hamiltoniano é adentrar a linguagem contemporânea da física.

Mas antes de nos aventurarmos no mundo mais abstrato da mecânica hamiltoniana, lembremo-nos brevemente dos conceitos basilares das formulações newtoniana e lagrangiana da mecânica.

Mecânica newtoniana. No primeiro curso de mecânica, vimos como o formalismo newtoniano entende o movimento como consequência de forças. Newton colocou o *momento* como a entidade fundamental na descrição do movimento, e atribuiu a todo objeto uma massa inercial para dar conta do fato de que corpos diferentes se movem de forma diversa ainda que sob ação da uma mesma força. Suas equações fundamentais do movimento são

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r}, t). \quad (5.1)$$

O palco newtoniano do movimento é o Espaço, e por isso as grandezas relevantes são vetores no espaço euclidiano. O ‘estado’ de cada partícula de um sistema mecânico é determinado por duas grandezas vetoriais: posição \vec{r} e momento \vec{p} .

O mérito do formalismo newtoniano é ter criado o arcabouço teórico básico necessário para se começar a entender o movimento, e, de quebra, fornecer algumas ferramentas matemáticas capazes de resolver alguns problemas importantes à sua época e até mesmo problemas simples mas úteis ainda nos dias de hoje, encontrados especialmente em engenharia.

Mecânica lagrangiana. A mecânica lagrangiana veio aprofundar a formulação matemática da mecânica newtoniana, criando roupagem conceitual mais poderosa e abstrata, e por isso capaz de exibir propriedades globais das trajetórias de partículas (e até mesmo soluções analíticas), em situações que seriam difíceis de descrever com vetores espaciais.

A quantidade fundamental nesse formalismo passa a ser a função lagrangiana, construída a partir das energias cinética e potencial do sistema. A lagrangiana $\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ é função de $2N + 1$ quantidades entendidas como independentes: N coordenadas generalizadas $q_j(t)$ e suas velocidades $\dot{q}_j(t)$ associadas, além do tempo, no caso de sistemas abertos.

As equações de movimento para os q_j são comumente deduzidas a partir de um princípio variacional ligado à estacionariedade da integral de ação calculada na trajetória como um todo, o que permite acessar propriedades mais fundamentais das trajetórias físicas de forma qualitativa e estender esses desenvolvimentos conceituais a toda a física. A forma das equações do movimento é a mesma para qualquer escolha de coordenadas generalizadas,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad (5.2)$$

o que traz grande liberdade ao formalismo.

A configuração instantânea do sistema mecânico é descrita por um ponto no espaço de coordenadas $\{q_j(t)\} = \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$, e portanto possui dimensão N . No entanto, o movimento é descrito por equações diferenciais de segunda ordem, e por isso cada qual requer 2 constantes arbitrárias para determinar sua respectiva trajetória $q_j(t)$. Com isso, o total de $2N$ constantes são necessárias para definir a trajetória do sistema como um todo no espaço de configurações. Essas constantes podem ser determinadas e.g. conhecendo-se os valores de $q_j(t)$ em dois instantes de tempo.

No caso mais comum, preferimos determinar as trajetórias a partir de algum ‘estado’ instantâneo do sistema num certo instante conhecido (usualmente definido como inicial), sendo assim necessário conhecermos os valores de N coordenadas $q_j(t)$ e de N velocidades $\dot{q}_j(t)$. O formalismo lagrangiano nesse aspecto se assemelha ao newtoniano, no sentido de que o ‘estado’ do sistema é formalmente dado por um ponto no espaço de configurações, embora apenas essa informação não permita determinar sua evolução. Para tanto, é preciso adicionar informação externa à contida nesse espaço, já que os \dot{q}_j não fazem parte da definição de ‘estado’ por não serem membros do espaço de configurações formal.

Além disso, as coordenadas $q_j(t)$ e suas derivadas temporais $\dot{q}_j(t)$, apesar de independentes no nível da lagrangiana, estão matematicamente conectadas entre si, uma vez que $\dot{q}_j(t)$ é a derivada temporal de $q_j(t)$. A consequência mais óbvia disso é o fato de que, ao aplicarmos o princípio variacional na dedução das equações de movimento, temos de reconhecer que suas variações δq_j e $\delta \dot{q}_j$ não são independentes, mas relacionadas através de $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt}(\delta q_j)$. Esse fato introduz certa assimetria no formalismo, no sentido que as velocidades são independentes das coordenadas no efeito físico que causam (pois \dot{q}_j está usualmente conectado à energia cinética e q_j , à energia potencial), mas estão de certa forma conectadas entre si, uma vez que \dot{q}_j pode ser deduzido pela derivada temporal de q_j (e vice-versa pela integral).

Vimos também como obter a energia do sistema a partir da função lagrangiana, pela quantidade

$$h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}. \quad (5.3)$$

Lembremos, no entanto, que essa definição só é de fato útil quando a lagrangiana não depende explicitamente do tempo, pois no caso contrário a energia não é uma primeira integral do sistema – por isso supusemos essa situação aqui ao ignorarmos o tempo t nos argumentos das funções.

Ao contrário do formalismo newtoniano, no qual o momento é postulado como massa multiplicada pela velocidade, os momentos canônicos p_j do formalismo lagrangiano são definidos de maneira mais abstrata e livre a partir da função lagrangiana, como

$$p_j(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}). \quad (5.4)$$

A função energia h pode ser escrita então da forma mais sintética

$$h(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_j p_j(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \dot{q}_j - \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}). \quad (5.5)$$

Explicitamos na Eq. (5.4) as dependências dos momentos canonicamente conjugados p_j e da lagrangiana \mathcal{L} nas coordenadas q_j e velocidades generalizadas \dot{q}_j para frisar que essas são as variáveis independentes do formalismo lagrangiano. Dessa forma, nada de fundamentalmente novo é introduzido pela Eq. (5.4), cujo papel é apenas abreviar o nome da quantidade $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$ pela notação p_j , pois são de fato a mesma função de q_j e \dot{q}_j .

Cada uma das equações do movimento no formalismo lagrangiano, dada por uma equação diferencial de segunda ordem em q_j , pode ser escrita como um sistema de duas equações diferenciais em q_j e p_j , da forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}, \\ \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Essas duas equações diferenciais são em geral de primeira ordem, mas não possuem muita simetria. A segunda equação nos diz que a derivada temporal de p_j é regulada pela derivada parcial da lagrangiana com relação à coordenada q_j , mas o oposto não é verdade: a derivada da lagrangiana com relação a \dot{q}_j só serve para definir p_j , ainda uma função de q_j e \dot{q}_j . Encaramos usualmente a primeira equação como a definição do momento canônico, e em seguida a utilizamos para eliminar qualquer menção posterior aos p_j (o que os torna pouco úteis do ponto de vista conceitual). De fato, a menção aos p_j só se torna útil quando ocorre de serem conservados pela dinâmica, caso em que são vistos como meras constantes.

Por conta da possibilidade de formulá-la em termos de um princípio variacional global, a mecânica lagrangiana nos permite dar uma espiada mais aprofundada no que a natureza faz quando escolhe a forma como um sistema físico deve evoluir no tempo. E por isso essa maneira de pensar se tornou central na física como um todo. Mas seu maior mérito no contexto específico da mecânica é permitir a solução de problemas reais pela união de conjunto muito poderoso de ferramentas matemáticas. De fato, a mecânica lagrangiana continua a ser ainda hoje o formalismo preferido para esse fim.

Em suma, existe no formalismo lagrangiano certa assimetria entre as propriedades de q_j e \dot{q}_j . Os dois conjuntos de variáveis são indispensáveis para a descrição da dinâmica, mas apenas os q_j são membros oficiais do espaço de configurações. E, apesar de serem variáveis independentes do ponto de vista da lagrangiana, os \dot{q}_j se relacionam aos q_j pela derivada temporal, ou vice-versa pela integral. Finalmente, as equações de movimento podem privilegiar definirmos os momentos canônicos p_j se forem conservados, por conveniência

matemática, embora não haja significado físico mais profundo nisso. Esses pequenos detalhes, apesar de deixarem o formalismo menos limpo do ponto de vista conceitual, não seriam muito relevantes caso não fosse possível fazer melhor do que isso, pois não interferem na funcionalidade da teoria. Mas ocorre que é possível fazer melhor, como veremos no formalismo hamiltoniano.

Mecânica hamiltoniana. A roupagem mais garbosa da mecânica só seria tecida com os desenvolvimentos de Hamilton e Jacobi na década de 1830. A mecânica hamiltoniana eleva a teoria a tal nível de elegância e abstração que até nos esquecemos de estarmos falando do velho e tão conhecido movimento. Isso porque os desdobramentos do formalismo hamiltoniano serviriam como base para a criação da mecânica estatística e da mecânica quântica, e por isso moldariam a visão contemporânea da física como um todo.

A mecânica hamiltoniana é antes de tudo a criação de uma nova linguagem, coesa e sintética, capaz de ‘levantar a ponta do delicado véu’ a cobrir a face de *Physis*. Ela é por isso mais abstrata e rica em desdobramentos, e talvez você tenha dificuldade em entender sua relevância de início. Mas, afinal, quase ninguém aprecia poesia na primeira leitura: é precisamente a exposição a conceitos mais avançados que nos eleva ao nível de poder algum dia entendê-los.

A mecânica hamiltoniana toma como palco do movimento o *espaço de fase*, construído a partir das posições e dos momentos generalizados das partículas do sistema. Sim, posições e momentos possuem o mesmo status de importância na teoria. E por isso conhecer o estado do sistema não mais requer fazer referência ao tempo, já que os momentos, em vez de serem definidos em termos de variações temporais instantâneas, se tornam parte das coordenadas! No entanto, aquilo a que Newton chamaria de momento ou posição se tornam conceitos fluidos no formalismo hamiltoniano, de forma semelhante (embora mais genérica) ao que ocorre na mecânica lagrangiana.

A quantidade central da dinâmica se torna essencialmente a energia mecânica do sistema, formalmente construída como a função hamiltoniana. O arcabouço teórico do formalismo reconhece a hamiltoniana como a *geradora* da dinâmica não só por dela deduzirmos as equações de movimento, como no caso da lagrangiana, mas de forma literal, como a *transformação* matemática (contínua) capaz de gerar a evolução temporal no espaço de fase. Como consequência, as coordenadas de posição e momento passam a respeitar relações algébricas (e que seriam levadas ao extremo na mecânica quântica).

E usamos aqui a palavra ‘dinâmica’ no lugar de ‘movimento’ porque a forma de pensar do formalismo hamiltoniano se aplica não apenas ao Espaço no qual vivemos (seja euclidiano ou relativístico), mas também à evolução temporal de sistemas físicos descritos em espaços matemáticos mais abstratos, e.g. relativos a ‘estados internos’ das partículas. Acima de tudo, a visão global de como se dá a dinâmica clássica e a linguagem que se segue moldam a forma de pensar de grandes áreas da física contemporânea, tais como mecânica estatística, sistemas complexos e mecânica quântica. A abrangência da construção hamiltoniana da dinâmica é tal que suas bases transcendem o problema do movimento, adaptadas como são para descrever também a física das interações fundamentais.

5.1 Construção do formalismo hamiltoniano

Uma das mudanças centrais no formalismo hamiltoniano consiste em promover os momentos conjugados a *coordenadas* no espaço de configurações hamiltoniano, chamado de *espaço de fase*, de forma que este contenha *toda* a informação sobre o estado instantâneo do sistema mecânico. Aplicar esse princípio requer reescrever a teoria para colocá-la sob nova forma autoconsistente, tal que possamos reorganizar as ideias desenvolvidas no formalismo lagrangiano.

O passo fundamental nessa direção consiste em escrever todas as quantidades relevantes da mecânica em termos desse novo conjunto de coordenadas no espaço de fase¹: N posições generalizadas q_j e N momentos conjugados p_j . Uma vez feito isso, i.e. após subirmos a escada que leva do formalismo lagrangiano ao hamiltoniano, podemos jogá-la fora e reinterpretar tudo sob uma nova luz, mais simétrica e conceitualmente mais abrangente, como veremos.

5.1.1 A função hamiltoniana

A primeira quantidade a ser convertida é obviamente a lagrangiana, por seu papel central na dinâmica. E nesse procedimento criamos a função hamiltoniana $\mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\})$. A função energia h da Eq. (5.5) já é quase a hamiltoniana, bastando mudar sua dependência das variáveis $(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\})$ para o conjunto $(\{q_j\}, \{p_j\})$.

Por motivos de consistência, os momentos conjugados p_j precisam coincidir, ao menos na construção inicial do problema, com a definição da Eq. (5.4). Essa equação pode ser vista em nosso contexto como uma mudança de coordenadas possuidora de inversa, i.e.

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) \quad \leftrightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\}) = p_j^{-1}(\{q_j\}, \{p_j\}). \quad (5.7)$$

A função hamiltoniana é então definida como

$$\mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) = \sum_j p_j \dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\}) - \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})\}). \quad (5.8)$$

A diferença entre esta e a Eq. (5.5) se dá ‘apenas’ na interpretação das quantidades: agora as grandezas p_j devem ser encaradas como coordenadas independentes no espaço de fase. Devemos por isso utilizar as relações $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})$ obtidas invertendo-se a Eq. (5.4) para eliminar quaisquer referências aos \dot{q}_j que porventura possam permanecer em \mathcal{H} .

Exemplo: Função hamiltoniana do sistema mecânico mais simples do universo. Ilustramos brevemente os passos para obtenção da função hamiltoniana tomando um sistema formado por uma só partícula movendo-se por um eixo cartesiano sob efeito de energia potencial independente do tempo.

¹Ao nos referirmos às variáveis hamiltonianas de estado no espaço de fase, estaremos reservando o termo ‘posição’ para as coordenadas q_j e ‘momento’ para as coordenadas p_j . Ao utilizar a palavra ‘coordenada’, estaremos nos referindo de forma indistinta tanto a posições quanto a momentos. Já no contexto do formalismo lagrangiano, manteremos a denominação ‘coordenadas’ para nos referirmos apenas às posições q_j , pois subentende-se aí referência ao espaço de configurações lagrangiano, que não utiliza momentos ou derivadas das posições em sua definição.

Sua função lagrangiana se escreve

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x). \quad (5.9)$$

Determinamos a partir dela a expressão para o momento canônico p_x ,

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (5.10)$$

que nesse caso coincide com o momento linear newtoniano p_x . Seguindo a definição da Eq. (5.8), e denotando explicitamente a dependência das funções, a hamiltoniana da partícula é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, p_x) &= p_x \dot{x}(p_x) - \mathcal{L}(x, \dot{x}(p_x)) \\ &= p_x \dot{x}(p_x) - \frac{1}{2}m\dot{x}^2(p_x) + V(x). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Obtemos sua expressão em termos de x e p_x eliminando $\dot{x}(p_x)$ pelo uso da inversa da Eq. (5.10), i.e.

$$\dot{x}(p_x) = \frac{p_x}{m}. \quad (5.12)$$

Encontramos finalmente a função hamiltoniana

$$\mathcal{H}(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + V(x), \quad (5.13)$$

que coincide com a energia mecânica da partícula.

A sequência de passos ilustrada acima retrata a maneira formal de se obter a função hamiltoniana, mesmo em sistemas mais complicados. Conforme veremos em breve, é possível para os sistemas mais comuns realizar essa transformação utilizando automaticamente a inversa da função $\dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})$ em termos de matrizes, bastando que algumas condições usuais sejam satisfeitas.

5.1.2 Transformada de Legendre

O procedimento que estamos utilizando para mudar a dependência entre os conjuntos de variáveis

$$(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \leftrightarrow (q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N) \quad (5.14)$$

recebe o nome de *transformada de Legendre*. A pergunta natural que pode surgir é: porque trocar de variáveis do jeito complicado prescrito pela Eq. (5.8)? Não seria mais fácil simplesmente substituir a relação $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})$ na lagrangiana, e escrevê-la como $\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})\})$? A resposta é: sim, seria mais fácil fazer desse jeito, mas não acessaríamos nenhum ponto de vista interessante com isso.

A transformada de Legendre nos permite trabalhar com uma função diferente da lagrangiana, mas que possui a mesma informação nela contida. Fazemos um paralelo com a transformada de Fourier: do ponto de vista da informação codificada numa função $F(x)$ bem comportada, é equivalente falar nela ou em seu espectro, dado por sua transformada de Fourier $\tilde{F}(s)$,

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{isx} F(x) dx \leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int e^{-isx} \tilde{F}(s) ds, \quad (5.15)$$

pois estão relacionadas univocamente uma à outra. A função $\tilde{F}(s)$ possui uma relação de dualidade com $F(x)$, já que representam a mesma informação, embora de formas diferentes. Em outras palavras, a transformada

de Fourier é um *mapa* entre dois espaços equivalentes para a descrição de uma função que vai a zero suficientemente rápido no infinito e que não possui descontinuidades muito graves. Empregar um espaço ou outro pode ser vantajoso dependendo da física do problema. E é sempre bom ter opções, seja de espaços, seja de namoradas(os)².

Consideremos uma função $F(x)$ convexa, i.e. $d^2F/dx^2 > 0$. Essa condição é importante para que sua derivada dF/dx possua relação unívoca com $F(x)$ (da mesma forma que F e x), i.e. seja função monotonicamente crescente³ de x . A ideia nesse caso consiste em usá-la no lugar de x para localizar qualquer valor de $F(x)$. Definimos a variável

$$s(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (5.16)$$

A forma trivial de trocar a dependência de F seria calcular a derivada acima, inverter a relação resultante para escrever $x = x(s)$ e finalmente substituir $x(s)$ na função original, que se tornaria $F(x(s)) \rightarrow F(s)$. Mas isso nada traz de novo. É mais interessante criar um espaço dual equivalente à função F mas diferente dela. A transformada de Legendre define esse espaço pela nova função

$$G(s) = xs - F(x), \quad (5.17)$$

em que está implícito serem as variáveis x e s conectadas univocamente por $s = s(x)$ ou $x = x(s)$, ou seja, não são independentes. Essas variáveis são ditas *conjugadas* uma à outra pela transformada de Legendre ou, de forma equivalente, formam um *par conjugado*⁴.

A interpretação geométrica dessa transformada, ilustrada pela Fig. 5.1, é muito clara. A função $G(s)$ descreve a função $F(x)$ através do ponto onde a reta tangente à função F na posição x cruza o eixo $x = 0$. Assim, ela associa a cada ponto x do plano uma reta: seu coeficiente angular é dado pela derivada de F na posição x e $G(s)$ nos fornece seu coeficiente linear. Vemos então que $F(x)$ e $G(s)$ são duas pontas de um mesmo problema geométrico: como dispor um conjunto de retas no plano. As duas funções são equivalentes nesse propósito, já que x e s são conectadas pela Eq. (5.16).

Outra forma geométrica de entendermos a transformada de Legendre é como a solução de um problema de extremização. Traçamos nesse caso a reta com coeficiente linear s dado pela função F na posição x , i.e. $y(x) = sx$, e nos perguntamos o valor máximo da distância entre $F(x)$ e $y(x)$ com respeito a x . A resposta é

$$\frac{d}{dx} (y(x) - F(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{dF}{dx}. \quad (5.18)$$

Invertendo essa relação para obter $x(s)$, codificamos a informação na função $G(s) = sx(s) - F(x(s))$.

²Na verdade, o teorema da redundância dupla vale para quase tudo: é preciso possuir duas impressoras, dois celulares, dois pontos de acesso à internet, dois backups de seus arquivos, duas contas no Facebook, duas caixas d'água e, principalmente, duas personalidades para entender a alucinação contraditória que encontramos por toda parte no país do carnaval (o duplipensar orwelliano?).

³Na verdade, tudo o que queremos é que exista um mapa bijetor entre F e $s = dF/dx$, tal que pudéssemos hipoteticamente escrever $F(s)$ e sua inversa. Por isso, é importante apenas que d^2F/dx^2 mantenha seu sinal, podendo ser também negativa. Caso F e s não estejam relacionadas dessa forma, haverá múltiplos valores possíveis no mapa entre as duas quantidades, o que requereria definir a transformada de Legendre mais cuidadosamente, e.g. por intervalos.

⁴Pode ocorrer um problema de terminologia. A palavra 'conjugado' aqui se refere às variáveis duais da transformada de Legendre. No contexto da mecânica, usamos esse termo anteriormente em outro sentido, para denominar o momento p_j canonicamente conjugado à posição q_j . Para evitar confusão sobre que grandeza é conjugada à qual, vamos nos referir aos p_j como 'momentos canonicamente conjugados' ou simplesmente 'momentos canônicos'.

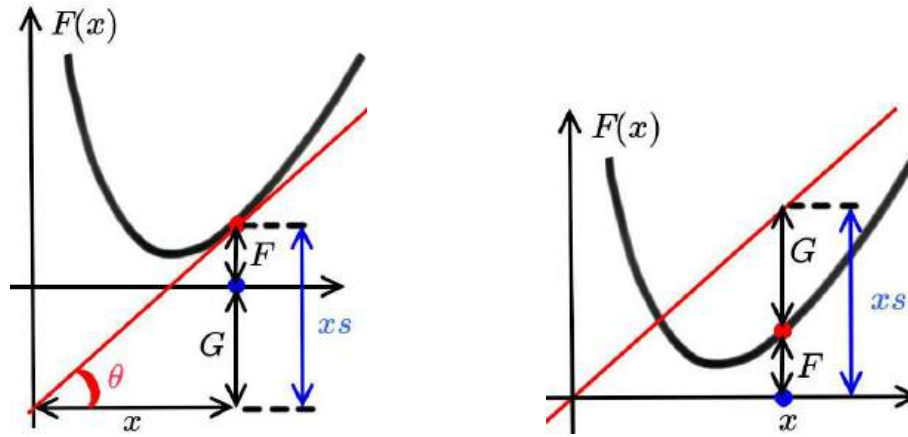


Figura 5.1: Interpretações geométricas da transformada de Legendre. A reta tangente a F na posição x possui inclinação $\tan \theta = s$. Esquerda: a quantidade G corresponde à altura onde a reta tangente à função F (calculada no ponto x) encontra o eixo $x = 0$. Direita: G fornece o extremo da diferença entre o valor de F e a reta construída para passar pela origem com a mesma inclinação da reta tangente a F nesse ponto.

A dependência de G em s é ratificada pela forma diferencial da Eq. (5.17), que nos fornece

$$dG = sdx + xds - dF. \quad (5.19)$$

Como F é função de x , segue que seu diferencial pode ser escrito em termos do diferencial de x como

$$dF = \frac{dF}{dx} dx \stackrel{\text{Eq. (5.16)}}{=} sdx, \quad (5.20)$$

com o que obtemos para a Eq. (5.19) simplesmente

$$dG = xds. \quad (5.21)$$

Essa relação ilustra a simetria que existe entre F e G , pois o diferencial de $G(s)$ em geral se escreve

$$dG = \frac{dG}{ds} ds, \quad (5.22)$$

de onde obtemos a identidade

$$x(s) = \frac{dG}{ds}. \quad (5.23)$$

Assim, a transformada de Legendre nos fornece duas formas equivalentes de olhar o mesmo tipo de informação, por $F(x)$ ou $G(s)$, sendo essas funções relacionadas pelas relações completamente simétricas

$$F(x) + G(s) = xs, \quad \text{com} \quad \begin{cases} s(x) = \frac{dF}{dx}, \\ x(s) = \frac{dG}{ds}. \end{cases} \quad (5.24)$$

Podemos escrever essa expressão tanto como função de x quanto de s , bastando isolar $F(x)$ ou $G(s)$, de onde vemos que a transformada de Legendre é exatamente igual à sua inversa⁵. Além disso, realizá-la duas vezes seguidas retorna a função a si mesma.

⁵A Eq. (5.24) fornece outra imagem para interpretar a transformada de Legendre. A função $F(x)$ representa a integral de $s(x)$, i.e. a área sob a curva $s(x)$, o mesmo valendo para $G(s)$ com relação a $x(s)$. A Eq. (5.24) estabelece que a soma das áreas F e G resulta no retângulo com área xs , ainda outra interpretação geométrica da transformada de Legendre.

A forma simétrica da Eq. (5.24) nos permite relacionar entre si algumas propriedades das funções F e G . Por exemplo, no ponto $s = 0$, temos

$$F(x) + G(0) = 0, \quad \text{com} \quad \frac{dF}{dx} = 0, \quad (5.25)$$

ou seja, $-G(0)$ nos fornece maneira sofisticada de obter o extremo de $F(x)$. Relação simétrica a essa vale em $x = 0$ para o extremo de $G(s)$. Além disso, usando a regra da cadeia para estabelecer que

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}(x(s(x))) = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dx} = 1, \quad (5.26)$$

obtemos pelas definições de s e x uma relação entre as curvaturas de F e G ,

$$\frac{d^2F}{dx^2} \frac{d^2G}{ds^2} = 1. \quad (5.27)$$

Relações similares para derivadas de mais alta ordem podem ser deduzidas diferenciando-se a Eq. (5.24).

A transformada de Legendre em mais dimensões se realiza generalizando-se de maneira direta a Eq. (5.24). Por exemplo, se a função F depende de duas variáveis, i.e. $F = F(x, y)$, então podemos realizar a transformada de Legendre de algumas maneiras diferentes⁶. Ainda para eliminar a coordenada x em favor de s , escrevemos

$$G(s, y) = xs - F(x, y), \quad \text{com} \quad s(x) = \frac{dF}{dx}, \quad (5.28)$$

mantendo assim de forma independente a variável y como argumento das duas funções. Poderíamos alternativamente eliminar apenas y em favor de sua variável conjugada u , pela transformação

$$H(x, u) = yu - F(x, y), \quad \text{com} \quad u(y) = \frac{dF}{dy}. \quad (5.29)$$

Finalmente, existe ainda a possibilidade de se eliminar ambas as variáveis x e y em favor de suas conjugadas, da forma

$$J(s, y) = xs + yu - F(x, y), \quad \text{com} \quad s(x) = \frac{dF}{dx} \quad \text{e} \quad u(y) = \frac{dF}{dy}. \quad (5.30)$$

As funções F , G , H e J possuem essencialmente a mesma informação, embora existam em espaços diferentes. Caso houvesse n argumentos na função F , as possibilidades de transformadas de Legendre crescem com 2^n .

5.1.3 Equações de Hamilton para o movimento

A transformada de Legendre nos oferece um espaço alternativo no qual trabalhar. O formalismo hamiltoniano é a mecânica lagrangiana reescrita nesse espaço, dual àquele usado no formalismo lagrangiano⁷.

⁶Funções com três variáveis independentes aparecem comumente na termodinâmica, contexto em que a transformada de Legendre é empregada para se transitar entre os diferentes potenciais termodinâmicos.

⁷É mesmo algo comum ocorrer de equações da física tornarem-se mais simples num espaço matemático do que em outro. Por exemplo, a equação diferencial do oscilador harmônico forçado assume expressão um tanto complicada de se resolver quando escrita no domínio do tempo. No domínio de frequência, todavia, acessado pela transformada de Fourier, a equação se torna algébrica, e portanto mais simples, pois os operadores de derivada com relação ao tempo viram produtos pela frequência no espaço de Fourier. E algo similar ocorre com as equações de Maxwell, que são mais facilmente quantizáveis no espaço recíproco dos vetores de onda (o espaço de Fourier dual ao Espaço). No caso da mecânica, a transformada de Legendre leva o formalismo lagrangiano, mais robusto na análise e *resolução* de problemas concretos envolvendo sistemas mecânicos (abertos ou fechados), no espaço hamiltoniano, mais limpo e simétrico no que diz respeito à *estrutura* formal da teoria.

A Eq. (5.8) representa a transformada de Legendre da função lagrangiana nas N variáveis \dot{q}_j em favor de N momentos canônicos p_j , que passam a ser coordenadas da hamiltoniana. De fato, a hamiltoniana se torna uma função de $\{q_j\}$ e $\{p_j\}$, pois o diferencial da Eq. (5.8) fornece

$$d\mathcal{H} = \sum_j p_j dq_j + \sum_j \dot{q}_j dp_j - d\mathcal{L}. \quad (5.31)$$

Mas o diferencial da lagrangiana se escreve, pela regra da cadeia da derivada,

$$d\mathcal{L} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \stackrel{\text{Eq. (5.4)}}{=} \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \sum_j p_j d\dot{q}_j, \quad (5.32)$$

em que usamos a definição do momento canonicamente conjugado na última equação. Substituindo essa expressão na Eq. (5.31), concluímos

$$d\mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j dp_j - \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j, \quad (5.33)$$

ou seja, a hamiltoniana varia como consequência de variações em p_j e q_j , sendo portanto função dessas grandezas. Para uma função hamiltoniana genérica, deve valer pela regra da cadeia

$$d\mathcal{H} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j. \quad (5.34)$$

Daí identificamos as relações

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}. \quad (5.35)$$

Caso a lagrangiana dependa explicitamente do tempo, obtemos identidade adicional

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (5.36)$$

A dependência temporal explícita da hamiltoniana é essencialmente a mesma da lagrangiana, a menos de um sinal. no entanto, como veremos, a função hamiltoniana será independente do tempo, e portanto uma quantidade conservada, caso a lagrangiana não dependa explicitamente do tempo⁸. No cenário mais comum, a hamiltoniana será também a energia do sistema, e a invariância temporal da lagrangiana implicará na conservação da energia, como vimos no contexto do teorema de Noether. A função hamiltoniana desfruta, portanto, de significado físico que vai além de mera geradora das equações do movimento.

A Eq. (5.35) revela a estrutura simétrica da transformada de Legendre aplicada à mecânica. A primeira expressão define \dot{q}_j como a variável dual a p_j do ponto de vista da função hamiltoniana. Em resumo, temos a transformada de Legendre

$$\mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) + \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_j p_j \dot{q}_j \quad \text{com} \quad \begin{cases} \dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\}) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \\ p_j(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{cases}, \quad (5.37)$$

que deve ser comparada à Eq. (5.24).

⁸Lembremos que a lagrangiana em geral tem valor dependente do tempo mesmo quando não depende explicitamente do tempo.

Ademais, uma vez que as equações de Lagrange para o movimento impõem a relação

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \dot{p}_j, \quad (5.38)$$

deduzimos que a Eq. (5.35) já fornece as equações de movimento de Hamilton, que precisam ser escritas, por consistência, como

$$\dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j}, \quad (5.39)$$

Estas são as chamadas *equações canônicas* do movimento. A segunda equação pode ser entendida também no contexto da transformada de Legendre como definindo $q_j \leftrightarrow \dot{p}_j$ como o outro par possível de variáveis duais, caso quiséssemos tentar eliminar q_j como coordenadas⁹.

⁹ Existem, como vemos, outras transformações de Legendre concebíveis na dinâmica. Supondo inicialmente a título de discussão que façam sentido, seria concebível tentar eliminar as variáveis q_j em favor de suas duais \dot{p}_j [segundo a Eq. (5.39)], pela transformada

$$\mathcal{F}(\{\dot{q}_j\}, \{\dot{p}_j\}) = \sum_j q_j \dot{p}_j - \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}), \quad \text{com} \quad \dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.40)$$

Como vale

$$d\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{p}_j} d\dot{p}_j + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \stackrel{\text{Eq. (5.40)}}{=} q_j d\dot{p}_j - p_j d\dot{q}_j,$$

segue que as equações de movimento obtidas pela ‘Efiana’ seriam

$$q_j = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{p}_j} \quad \text{e} \quad p_j = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.41)$$

Algo parecido poderia ser obtido definindo-se similarmente a ‘Giana’,

$$\mathcal{G}(\{p_j\}, \{\dot{p}_j\}) = \sum_j q_j \dot{p}_j + \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}), \quad \text{com} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j},$$

na qual escolhemos o sinal negativo na definição de p_j para manter a consistência com as equações de Hamilton. Obteríamos assim as equações de movimento

$$q_j = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \dot{p}_j} \quad \text{e} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_j}. \quad (5.42)$$

Notemos que a lagrangiana produz equações da forma

$$\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (5.43)$$

Comparando as quatro possibilidades de equações de movimento [Eqs. (5.39), (5.41), (5.42) e (5.43)], podemos dizer que o formalismo lagrangiano [Eqs. (5.43)] coloca o momento no centro das equações de movimento, ao determinar p_j e \dot{p}_j a partir da função lagrangiana. A função \mathcal{G} faz o oposto [Eqs. (5.42)], ao focar no comportamento de q_j e \dot{q}_j . A função \mathcal{F} considera p_j e q_j de forma mista [Eqs. (5.41)], mas determina essas variáveis a partir da dependência em suas derivadas temporais, o que é oposto ao que gostaríamos e portanto um tanto esquisito.

Apenas o formalismo hamiltoniano [Eqs. (5.39)] reúne p_j e q_j de forma mista mas intuitiva, como faria Newton. Observe com novos olhos as equações newtonianas para o movimento no formato sugestivo da Eq. (5.1), e veja como o formalismo hamiltoniano define de maneira unificada o que são os membros direitos dessas equações: no lugar de forças e da definição *ad hoc* para o momento (agora vista como um caso particular válido para uma partícula pontual movendo-se no Espaço), é a função hamiltoniana que estabelece tanto a evolução temporal do ‘estado’ quanto o significado do momento. Por um lado, as variáveis de espaço de fase q_j e p_j do formalismo hamiltoniano formam de fato o que chamaríamos intuitivamente de ‘estado’, como divisado por Newton; por outro, suas evoluções, quantificadas por \dot{p}_j e \dot{q}_j , que na transformada de Legendre são exatamente as variáveis duais ao ‘estado’ (aprecie os diversos níveis de simetria com moderação!), tornam-se ligadas à dependência da função hamiltoniana nas próprias variáveis do espaço de fase das quais partimos: a hamiltoniana movimenta o ‘estado’ pelo espaço de fase. Arriscamos dizer que as formulações newtoniana, lagrangiana e hamiltoniana da mecânica formam a famosa tríade ‘tese, antítese e síntese’ da dialética hegeliana.

Por fim, apenas mencionamos que as funções \mathcal{F} e \mathcal{G} poderiam encontrar problemas práticos de definição por conta de não ser a energia potencial necessariamente convexa (importante para a definição unívoca da transformada de Legendre em $\dot{p}_j \leftrightarrow q_j$), ao contrário do que ocorre com a energia cinética (que permite sempre a troca $\dot{q}_j \leftrightarrow p_j$ por funções inversíveis, já que a energia

A dinâmica hamiltoniana é descrita por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, no total de $2N$ equações para o mesmo número de coordenadas no espaço de fase. Um ponto instantâneo nesse espaço nos fornece o ‘estado’ do sistema de maneira completa e autocontida¹⁰. Sua evolução é determinada pela função hamiltoniana de acordo com a Eq. (5.39), i.e. essencialmente pela energia do sistema.

Notemos a simetria existente entre as posições q_j e os momentos p_j nas equações do movimento de Hamilton: segundo a transformada de Legendre, a variação temporal \dot{q}_j de q_j é conjugada a p_j , enquanto \dot{p}_j é o par de q_j . Assim, a primeira equação de Hamilton define a dinâmica de q_j , representada por \dot{q}_j , como crucialmente determinada pela dependência da hamiltoniana em p_j , a grandeza dual a \dot{q}_j na transformada; da mesma forma, a dinâmica de p_j depende de como q_j , a variável dual à sua variação temporal \dot{p}_j , influencia a hamiltoniana.

A simetria das equações canônicas¹¹ acaba por criar uma relação de dualidade também entre as posições q_j e os momentos p_j , chamados por isso de grandezas canonicamente conjugadas no formalismo¹². O par (q_j, p_j) forma dois lados de uma mesma moeda, cada qual gerando a evolução do outro através da função hamiltoniana. Vamos por isso estar nos referindo a essas grandezas quando mencionarmos pares ‘conjugados’ da dinâmica (e não aos \dot{p} e \dot{q} da transformada de Legendre, salvo explícito em contrário).

O único fator a quebrar a simetria perfeita entre q_j e p_j parece ser o sinal negativo entre suas equações de evolução. Como veremos, esse sinal determina as propriedades geométricas do espaço de fase, em particular implicando na conservação de volumes pela dinâmica. Ainda assim, veremos que a simetria entre q_j e p_j é de fato perfeita porque a distinção entre posições e momentos deixa de existir pela aplicação de transformações matemáticas ao espaço de fase: é mesmo possível levar q_j em p_j e vice-versa por uma *transformação canônica*, provando não haver qualquer diferença conceitual entre essas coordenadas no formalismo hamiltoniano.

Em essência, a estrutura que emerge sobre o ‘estado’ de um sistema mecânico nesse formalismo é que ele existe como um ponto num espaço de fase formado por N pares canônicos de grandezas físicas. Sua dinâmica é gerada essencialmente pela energia mecânica, que pode ser vista como uma função no espaço de fase, de forma que conhecer a dependência da energia nas variáveis canônicas equivale a conhecer a dinâmica. Podemos então visualizar a hamiltoniana como o ‘relevo’ do espaço de fase, e a dinâmica como um rio, regido pelas relações simétricas da Eq. (5.39), a conectar pontos nesse espaço dual em q_j e p_j .

cinética sempre cresce de valor com o aumento do momento). É preciso nesses casos definir a transformada de Legendre com mais cuidado, e.g. separando a função em domínios limitados inversíveis.

¹⁰O fato de que momento e posição tornam-se coordenadas independentes no espaço de fase permite a definição dessas grandezas de forma independente e sem que seja necessário fazer referência ao tempo. Comparemos isso ao caso newtoniano em que o momento é definido em termos da razão entre a variação infinitesimal da posição e o intervalo infinitesimal de tempo em que ocorre: o momento newtoniano existe como uma vizinhança infinitesimal no tempo. Por contraste, o momento hamiltoniano existe como um ponto na linha do tempo, da mesma forma que a posição. Isso permitirá quantizar essas grandezas sem referência a parâmetros externos tal como o tempo.

¹¹Note que o termo ‘cânon’ se refere ao evangelho, o texto considerado sagrado pela religião católica; na linguagem, esse termo foi abstraído à sua essência para significar algo que segue a forma coletivamente aceita como ‘padrão’, ‘própria’ ou ‘melhor’. No caso das equações de movimento, a forma canônica ou padrão de escrevê-las é, por definição, as equações de Hamilton.

¹²O fato de serem grandezas conjugadas, por enquanto ‘apenas’ uma definição matemática que privilegia a simetria das equações, terá significado muito mais profundo na mecânica quântica, quando implicará na ‘incompatibilidade’ entre esses observáveis e, assim, no princípio de incerteza de Heisenberg.

5.1.4 Princípio variacional na formulação hamiltoniana

A aplicação do princípio variacional segue o mesmo raciocínio utilizado no contexto do formalismo lagrangiano. A integral de ação continua definida como o funcional

$$S[\{q_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) dt. \quad (5.44)$$

Utilizamos então a transformada de Legendre da Eq. (5.37) no sentido inverso para eliminar a lagrangiana em favor da hamiltoniana nessa expressão. Como consequência, a ação passa a ser um funcional de $2N$ funções, as posições e os momentos, e se escreve

$$S[\{q_j(t)\}, \{p_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) dt. \quad (5.45)$$

A condição de estacionariedade da ação requer utilizarmos $2N$ variações independentes no espaço de fase,

$$q_j(t) \rightarrow q_j(t) + \delta q_j(t), \quad p_j(t) \rightarrow p_j(t) + \delta p_j(t), \quad (5.46)$$

no lugar das N variações independentes $\delta q_j(t)$ empregadas no formalismo lagrangiano. Para a trajetória $2N$ -dimensional escolhida pela natureza, vale

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) dt = 0. \quad (5.47)$$

Abrimos a expressão para a variação em primeira ordem, como fazemos usualmente, para obter

$$\delta \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) = p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \delta \mathcal{H}. \quad (5.48)$$

Mas a variação da hamiltoniana ocorre como consequência das variações de seus argumentos,

$$\delta \mathcal{H} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j, \quad (5.49)$$

o que resulta pelo princípio de estacionariedade da ação na condição

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left(p_j \delta \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j \right) + \sum_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] dt = 0. \quad (5.50)$$

Resta-nos utilizar o fato de que a variação $\delta \dot{q}_j$ ocorre como consequência da variação δq_j , i.e. $\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j$, para realizar a integração por partes dos termos

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \frac{d}{dt} \delta q_j = \cancel{p_j \delta q_j} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \dot{p}_j \delta q_j, \quad (5.51)$$

em que usamos a condição de contorno $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ sobre as variações.

Substituindo essa relação na Eq. (5.50), chegamos à forma final para a condição de estacionariedade da ação

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \left(-\dot{p}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \sum_j \left(\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] dt = 0. \quad (5.52)$$

As variações δp_j são agora tão independentes quanto as variações δq_j são entre si, e portanto cada um dos $2N$ termos entre parênteses da Eq. (5.52) precisa se anular identicamente para que a ação seja estacionária. Disso resultam novamente as equações canônicas de Hamilton [Eq. (5.39)].

Notemos que foi necessário utilizar apenas as condições de contorno $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$, as mesmas do formalismo lagrangiano, para deduzir as equações canônicas de Hamilton a partir do princípio variacional [Eq. (5.52)]. Para tornar as variações δp_j dos momentos conjugados verdadeiramente simétricas com relação às variações δq_j , é preciso adicionar ao método variacional no formalismo hamiltoniano as condições de contorno $\delta p_j(t_1) = \delta p_j(t_2) = 0$, de forma que os pontos inicial e final do *espaço de fase* permaneçam constantes. Essas restrições adicionais se mostrarão necessárias quando realizarmos transformações no espaço de fase capazes de combinarem indistintamente posições e momentos. Portanto, para referência futura, utilizamos o fato de que a conexão entre as diversas possibilidades de parametrização do espaço de fase requer adotarmos o conjunto de condições $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = \delta p_j(t_1) = \delta p_j(t_2) = 0$.

5.1.5 Obtenção da função hamiltoniana no cenário usual

Existem cenários particulares, mas de grande abrangência, nos quais é possível determinar a função hamiltoniana por um procedimento automático. Esses casos envolvem sistemas mecânicos isolados, para os quais não há dependência temporal explícita na lagrangiana ou nos vínculos, e também sistemas de partículas em interação com campos eletromagnéticos externos, em cujas lagrangianas aparecem termos proporcionais às suas velocidades, dentre outros.

Tratamos aqui dos casos em que a função lagrangiana possa ser escrita na forma particular

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_{jj'} \frac{1}{2} M_{jj'}(\{q_j\}) \dot{q}_j \dot{q}_{j'} - U(\{q_j\}) + \sum_j A_j(\{q_j\}) \dot{q}_j. \quad (5.53)$$

O primeiro termo representa a energia cinética do sistema, uma função quadrática nas velocidades generalizadas com coeficientes $M_{jj'}(\{q_j\})$ dependentes das posições. A função $U(\{q_j\})$ no segundo termo fornece a parte da energia potencial dependente apenas de posições, o que nos permite tratar a maior parte dos sistemas mecânicos isolados e ideais. O último termo é incluído especificamente para tornar o formalismo mais genérico ao permitir descrever também a interação com campos eletromagnéticos externos ao sistema mecânico, i.e. que não dependem do ‘estado’ das partículas¹³.

Os momentos canônicos p_j se escrevem nesse caso como

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \Rightarrow p_j(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \sum_{j'} M_{jj'}(\{q_{j'}\}) \dot{q}_{j'} + A_j(\{q_j\}). \quad (5.54)$$

Precisamos inverter essas equações para substituir $\dot{q}_j(\{q_j\}, \{p_j\})$ na transformada de Legendre usada para deduzir a função hamiltoniana. Uma maneira conveniente de invertê-las é utilizar a representação matricial

¹³Para incluir campos eletromagnéticos produzidos internamente pelas partículas do sistema, é preciso formular o campo eletromagnético gerado como função das posições das partículas e incluir na dinâmica do sistema também suas equações de movimento (equações de Maxwell), em geral um problema bastante complicado ligado à física dos plasmas.

para p_j e \dot{q}_j , da forma

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix}, \quad (5.55)$$

e definir as matrizes de coeficientes¹⁴

$$\mathbf{M}(\{q_j\}) = \begin{pmatrix} M_{11}(\{q_j\}) & M_{12}(\{q_j\}) & \dots & M_{1N}(\{q_j\}) \\ M_{21}(\{q_j\}) & M_{22}(\{q_j\}) & \dots & M_{2N}(\{q_j\}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1}(\{q_j\}) & M_{N2}(\{q_j\}) & \dots & M_{NN}(\{q_j\}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}(\{q_j\}) = \begin{pmatrix} A_1(\{q_j\}) \\ A_2(\{q_j\}) \\ \vdots \\ A_N(\{q_j\}) \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

para escrever a Eq. (5.54) da forma sintética

$$\mathbf{p}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \mathbf{M}(\{q_j\})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}(\{q_j\}). \quad (5.57)$$

A lagrangiana se escreve nessa representação matricial como

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\{q_j\})\dot{\mathbf{q}} - U(\{q_j\}) + \mathbf{A}^T(\{q_j\})\dot{\mathbf{q}}. \quad (5.58)$$

A matriz $\mathbf{M}(\{q_j\})$ codifica toda a informação sobre a energia cinética do sistema. Ela é por isso positiva definida e, portanto, inversível. É possível então inverter a Eq. (5.57) para obter a expressão desejada

$$\dot{\mathbf{q}}(\{q_j\}, \{p_j\}) = \mathbf{M}^{-1}(\{q_j\})\left(\mathbf{p} - \mathbf{A}(\{q_j\})\right). \quad (5.59)$$

Realizamos finalmente a transformada de Legendre de acordo com a Eq. (5.37) e eliminamos do resultado todas as alusões a \dot{q}_j pelo uso da Eq. (5.59) para obter a função hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A})^T \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{A}) + U(\{q_j\}). \quad (5.60)$$

Essa equação pode ser utilizada diretamente em vários casos usuais, bastando extrair as expressões para as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{A} da lagrangiana e substituí-las na identidade acima.

Exemplo: Sistema de coordenadas esféricas. O uso de coordenadas espaciais cartesianas leva em geral a matrizes \mathbf{M} constantes, nas quais aparecem apenas as massas das partículas. Em outros sistemas de coordenadas, a energia cinética deve apresentar dependência em q_j . Tomemos como exemplo as coordenadas esféricas.

Sabemos por argumentos geométricos que a velocidade de uma partícula se escreve como

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (r \cos \theta \cos \phi \hat{x} + r \cos \theta \sin \phi \hat{y} + r \sin \theta \hat{z}), \quad (5.61)$$

em que $r(t)$ é a distância à origem, $\theta(t)$ é o ângulo azimutal e $\phi(t)$, o ângulo polar de posição da partícula. O cálculo da derivada e conversão para versores esféricos nos leva à decomposição ortogonal

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r \sin \theta \dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \quad (5.62)$$

¹⁴Notemos que a matriz \mathbf{M} definida no contexto de pequenas oscilações é precisamente a matriz abaixo calculada no ponto de equilíbrio estável do sistema, $\mathbf{M}(\{q_j^{eq}\})$.

Dessa expressão deduzimos a energia cinética da partícula em coordenadas esféricas,

$$K(\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right). \quad (5.63)$$

Dela obtemos facilmente também a decomposição do momento linear nesse sistema de coordenadas,

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{r}\hat{r} + mr \sin \theta \dot{\phi}\hat{\phi} + mr\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad (5.64)$$

cujas componentes poderíamos denominar

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\phi = mr \sin \theta \dot{\phi} \quad \text{e} \quad p_\theta = mr\dot{\theta}. \quad (5.65)$$

Poderíamos então escrever a energia cinética de maneira alternativa, em termos das componentes esféricas do momento, já pensando em escrever posteriormente a função hamiltoniana. Obteríamos

$$K(p_r, p_\phi, p_\theta) = \frac{1}{2m} (p_r^2 + p_\phi^2 + p_\theta^2). \quad (5.66)$$

Assim, a energia mecânica do sistema poderia ser escrita como

$$E = K + U = \frac{1}{2m} (p_r^2 + p_\phi^2 + p_\theta^2) + U(r, \phi, \theta). \quad (5.67)$$

Apesar de estar correta e de possuir o mesmo valor da hamiltoniana, essa expressão não é a hamiltoniana, pois não corresponde *em forma* à Eq. (5.60). Esse é um ponto comum de confusão na transição do momento linear newtoniano para momentos canônicos, mais abstratos.

Ao escrevermos a função hamiltoniana, é essencial deixá-la como função dos momentos canônicos p_j , que nesse caso *não são* dados simplesmente pelas componentes do momento linear em coordenadas esféricas. Isso significa que a Eq. (5.67) não pode ser utilizada para produzir as equações canônicas para o movimento das posições $\{r, \phi, \theta\}$ e dos momentos $\{p_r, p_\phi, p_\theta\}$. Em outras palavras, essas posições e momentos assim definidos não evoluem segundo as equações de Hamilton porque os momentos $\{p_r, p_\phi, p_\theta\}$ não são canonicamente conjugados às posições $\{r, \phi, \theta\}$, e vice-versa, sendo esses dois conjuntos disjuntos. Se quisermos juntá-los num sistema de equações, precisamos desvendar outra forma de fazer isso sem utilizar as equações de Hamilton. De fato, para essas posições e momentos as equações corretas seriam as próprias equações de Newton!

Para obtermos os momentos canonicamente conjugados a $\{r, \phi, \theta\}$, começamos renomeando essas variáveis,

$$q_1 = r, \quad q_2 = \phi \quad \text{e} \quad q_3 = \theta, \quad (5.68)$$

para nos referirmos aos respectivos momentos conjugados como p_1, p_2 e p_3 . A lagrangiana dessa partícula, escrita em termos das variáveis $\{r, \phi, \theta\}$ e $\{\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}\}$ e construída pela receita usual, é

$$\mathcal{L}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) = K(\dot{r}, \dot{\phi}, \dot{\theta}) - U(r, \phi, \theta) = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) - U(r, \phi, \theta). \quad (5.69)$$

Os momentos conjugados, embora mais abstratos, são claramente definidos como

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad \text{e} \quad p_3 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}. \quad (5.70)$$

Notemos que, de fato, não há muitas similaridades entre essas expressões e as componentes esféricas do momento linear da Eq. (5.65)! Fisicamente, apenas p_1 consiste de um momento linear newtoniano: como q_2

e q_3 são posições angulares, os momentos canônicos p_2 e p_3 correspondem na verdade a momentos angulares no sentido newtoniano!

Agora que obtivemos corretamente as expressões para os momentos conjugados em termos de \dot{q}_1 , \dot{q}_2 e \dot{q}_3 , podemos substituí-las na lagrangiana da Eq. (5.69) para então realizarmos a transformada de Legendre e com isso deduzirmos a hamiltoniana. Alternativamente, podemos utilizar o caminho mais curto de substituir as expressões da Eq. (5.70) diretamente na Eq. (5.60). Obtemos em ambos os casos a hamiltoniana

$$H(r, \phi, \theta, p_r, L_\phi, L_\theta) = \frac{1}{2m} \left(\dot{p}_r^2 + \frac{L_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{L_\theta^2}{r^2} \right) + U(r, \phi, \theta), \quad (5.71)$$

em que utilizamos a notação newtoniana $p_2 = L_\phi$ e $p_3 = L_\theta$ para tornar a expressão mais familiar. As equações de movimento são dadas pelas equações de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}, & \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_\phi}, & \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_\theta}, \\ \dot{p}_r &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}, & \dot{L}_\phi &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, & \dot{L}_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Exemplo: Partícula em interação com campo eletromagnético. Um exemplo de sistema mecânico a envolver velocidades na lagrangiana consiste de uma partícula com carga elétrica Q sob influência de um campo eletromagnético externo. Esse campo pode ser descrito pelos potenciais escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ e vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, que podem eventualmente depender do tempo.

A lagrangiana genérica de uma partícula em interação com o campo eletromagnético se escreve¹⁵

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - Q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{Q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (5.73)$$

Seguindo a prescrição da Eq. (5.56) e supondo o uso de coordenadas cartesianas, definimos as matrizes

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = \frac{Q}{c} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad (5.74)$$

em que as componentes do potencial vetor são definidas por $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$. Substituindo essas matrizes na Eq. (5.70), obtemos a hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 - \frac{Q}{c} A_x & p_2 - \frac{Q}{c} A_y & p_3 - \frac{Q}{c} A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - \frac{Q}{c} A_x \\ p_2 - \frac{Q}{c} A_y \\ p_3 - \frac{Q}{c} A_z \end{pmatrix} + Q\Phi(x, y, z), \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_1 - \frac{Q}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_2 - \frac{Q}{c} A_y \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_3 - \frac{Q}{c} A_z \right)^2 + Q\Phi(x, y, z). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Notemos que também nesse exemplo os momentos canônicos p_1 , p_2 e p_3 explicitados na hamiltoniana *não são* as componentes cartesianas do momento newtoniano $\vec{p} = p_x \hat{x} + p_y \hat{y} + p_z \hat{z} = m(\dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z})$. De

¹⁵A lagrangiana de um sistema mecânico com várias partículas é obtida simplesmente somando-se as lagrangianas individuais de cada partícula, uma vez que assumimos não haver interação entre elas. É preciso, no entanto, estabelecer essa suposição como válida no caso de interesse.

fato, os momentos canônicos se definem pela Eq. (5.57), e são dados nesse caso por

$$\mathbf{p}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = \begin{pmatrix} m\dot{x} + \frac{Q}{c}A_x \\ m\dot{y} + \frac{Q}{c}A_y \\ m\dot{z} + \frac{Q}{c}A_z \end{pmatrix} \equiv \vec{p} + \frac{Q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t). \quad (5.76)$$

É conveniente abreviar a notação do momento canônico associando a ele um vetor espacial da forma $\vec{p}_c = p_1\hat{x} + p_2\hat{y} + p_3\hat{z}$ para que a hamiltoniana da Eq. (5.75) assumira uma expressão mais sintética¹⁶,

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}_c) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_c - \frac{Q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + Q\Phi(\vec{r}, t). \quad (5.77)$$

5.2 Transformações canônicas

A simetria mais impressionante dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano é a manutenção das equações de movimento por mudanças de coordenadas. A propriedade de interesse aqui é a invariância da *forma das equações diferenciais* satisfeitas pelas trajetórias dos sistemas que, como sabemos, poderiam em princípio depender da escolha de coordenadas (pense na bagunça que são as equações de Newton para as componentes de vetores!). É porque essas equações são definidas a partir das funções lagrangiana ou hamiltoniana (cujas expressões de fato variam com a escolha de coordenadas exatamente da maneira correta para que as equações de movimento sejam invariantes) que obtemos essa propriedade especial.

O propósito central das formulações lagrangiana e hamiltoniana da dinâmica é produzir as equações corretas de movimento do sistema mecânico. O detalhe é (apesar de ainda não termos dito isso) que existem infinitas lagrangianas e hamiltonianas capazes de gerar as mesmas equações corretas do movimento. Essa arbitrariedade inerente às formulações lagrangiana e hamiltoniana da mecânica, apesar de à primeira vista parecer algo como uma deficiência, se cristaliza na verdade como mais uma das ferramentas poderosas de manipulação matemática que se colocam a nosso dispor. De fato, como veremos adiante, as transformações canônicas resultantes dessa arbitrariedade são mais do que isso: elas nos permitirão entender a evolução de sistemas mecânicos em si como uma transformação canônica. Assim, essa arbitrariedade é de certa forma uma liberdade matemática intrínseca ao fato de que o movimento existe.

Veremos em breve como utilizar (para o bem e para o mal!) a liberdade de escolha de funções lagrangianas e hamiltonianas. A ideia é nos focarmos no objetivo primeiro de produzir as equações corretas de movimento para então determinarmos o que exatamente pode ser mudado nessas funções para nossa vantagem.

¹⁶ Para mostrar que essa hamiltoniana corresponde de fato à energia mecânica instantânea da partícula no campo eletromagnético, notamos que de acordo com a Eq. (5.76) o momento newtoniano se escreve

$$\vec{p} = \vec{p}_c - \frac{Q}{c}\vec{A}(\vec{r}, t),$$

de forma que a hamiltoniana possui o mesmo valor da expressão newtoniana para a energia mecânica,

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + Q\Phi(\vec{r}, t).$$

Frisamos, no entanto, que a obtenção das equações canônicas requer o uso da hamiltoniana da Eq. (5.77), e não dessa expressão para E , visto que apenas a primeira faz referência explícita ao momento canônico \vec{p}_c .

Transformações do espaço de configurações lagrangiano. No caso lagrangiano, a liberdade de escolha de sistema de coordenadas no espaço de configurações nos leva às chamadas *transformações de ponto*, descritas por funções arbitrárias (e razoáveis) do tipo

$$Q_j = Q_j(\{q_{j'}\}). \quad (5.78)$$

A lagrangiana escrita nas coordenadas Q_j produz equações sempre na forma padrão de Euler-Lagrange.

Verifiquemos essa asserção no caso mais simples de um sistema com 1 grau de liberdade (a verificação para mais graus de liberdade segue o mesmo caminho). Começamos invertendo a transformação da Eq. (5.78),

$$Q = Q(q, t) \quad \leftrightarrow \quad q = q(Q, t), \quad (5.79)$$

para escrever a lagrangiana em termos da nova coordenada,

$$\mathcal{L}(q(Q, t), \dot{q}(Q, t), t) = \mathcal{L}\left(q(Q, t), \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t\right), \quad (5.80)$$

em que usamos a regra da cadeia para escrever o argumento \dot{q} da lagrangiana como

$$\frac{d}{dt}q(Q, t) = \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (5.81)$$

As derivadas de que precisamos na equação de Lagrange em Q são, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} + \frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial t} \right), \quad (5.82)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{Q}} \stackrel{\text{Eq. (5.81)}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q}. \quad (5.83)$$

Precisamos ainda da derivada temporal total da última equação, dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (5.84)$$

O segundo termo dessa expressão já se encontra no formato em que aparece na equação de Lagrange na coordenada q . Já o primeiro termo requer o cálculo da derivada temporal total de $G(Q, t) = \partial q / \partial Q$. Aplicando novamente a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d}{dt} G(Q, t) = \frac{\partial G}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} + \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial Q}. \quad (5.85)$$

Agora nos resta apenas juntar todas as peças. Pelo uso das Eqs. (5.82), (5.84) e (5.85), a equação de Lagrange na coordenada Q equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} + \frac{\partial^2 q}{\partial Q \partial t} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial Q^2} \dot{Q} + \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial Q} \right) - \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial Q}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

A Eq. (5.86) implica em

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)}{\partial Q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}} = 0. \quad (5.87)$$

Portanto, se a lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ satisfizer a equação de Lagrange escrita na coordenada q , equação diferencial com a mesma *forma* vale para a lagrangiana escrita na coordenada transformada Q .

Transformações do espaço de fase hamiltoniano. O formalismo hamiltoniano, ao envolver tanto as posições como os momentos em possíveis mudanças de variáveis, nos disponibiliza como ferramenta um espaço de configurações de maior dimensão e com grande liberdade de transformação. É simples perceber, no entanto, que nem toda transformação matemática imaginável, i.e.

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(\{q_j\}, \{p_j\}) \\ P_j = P_j(\{q_j\}, \{p_j\}) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} q_j = q_j(\{Q_j\}, \{P_j\}) \\ p_j = p_j(\{Q_j\}, \{P_j\}) \end{cases}, \quad (5.88)$$

mantém invariante a estrutura do formalismo de Hamilton, uma vez que as simetrias existentes entre posições e momentos não são necessariamente preservadas para uma troca arbitrária de coordenadas.

Torna-se então conveniente restringirmos as transformações consideradas impondo-lhes que produzam um novo espaço de fase, i.e. um espaço de configurações hamiltoniano possuidor das mesmas propriedades especiais do espaço original. Em particular, as novas variáveis Q_j e P_j introduzidas pela transformação precisam seguir as mesmas relações de simetria existentes entre posições e momentos originais q_j e p_j .

Denominamos *transformações canônicas* (ou *de contato*) a classe capaz de manter intactas a estrutura matemática do formalismo para toda função hamiltoniana. Isso significa por enquanto para nós preservar as relações

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \end{cases} \mapsto \begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial}{\partial P_j} \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial}{\partial Q_j} \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) \end{cases} \quad (5.89)$$

em que \mathcal{H}' é a hamiltoniana escrita nas novas coordenadas. Após realizada a transformação canônica, o novo momento P_j é a grandeza canonicamente conjugada à nova posição Q_j , e por isso ambos evoluem pelas equações de Hamilton.

Preservar a forma da dinâmica nos espaços de fase $\{q_j, p_j\}$ e $\{Q_j, P_j\}$ implica em condições simples sobre as transformações da Eq. (5.89). Olhemos primeiramente a equação de Hamilton para Q_j . Por um lado, sabemos pela regra da cadeia que

$$\dot{Q}_j = \sum_{j'} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \dot{p}_{j'} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} = \sum_{j'} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{j'}} \frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{j'}} \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j} \right); \quad (5.90)$$

por outro, se os dois conjuntos de coordenadas satisfazem as equações canônicas, i.e. vale a Eq. (5.89), então

$$\dot{Q}_j = \sum_{j'} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial q_{j'}} \right) \quad \text{e} \quad \dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j}. \quad (5.91)$$

Igualando essas duas expressões e utilizando a Eq. (5.90) para $\partial \mathcal{H}' / \partial P_j$, obtemos

$$\sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial q_{j'}} \left(\frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \right) + \sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial p_{j'}} \left(\frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \right) = 0. \quad (5.92)$$

Como as equações canônicas precisam valer para qualquer função hamiltoniana¹⁷, devem valer as condições

$$\frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} = -\frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} = \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j}. \quad (5.93)$$

¹⁷A generalidade de \mathcal{H} e \mathcal{H}' é um ponto central do argumento: transformações canônicas agem para *mapear um espaço de fase em outro*.

Repetir o raciocínio para a equação canônica relativa a \dot{P}_j nos leva às condições,

$$\frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} = \frac{\partial q_{j'}}{\partial Q_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} = -\frac{\partial p_{j'}}{\partial Q_j}. \quad (5.94)$$

As Eqs. (5.93) e (5.94) nos permitem verificar facilmente se uma transformação é ou não canônica conhecendo-se as expressões da Eq. (5.88). Veremos a seguir como o uso de funções geradoras nos ajuda a resolver o problema de encontrar essas expressões de maneira conveniente.

5.2.1 Liberdade de escolha da lagrangiana

Embora isso possa vir como um choque para alguns, a prescrição usual de construção da função lagrangiana, dada por

$$\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) = K(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}) - U(\{q_j\}), \quad (5.95)$$

não é única. De fato, ela se constitui apenas na ‘receita que sempre funciona’ para sistemas mecânicos clássicos, deduzida como foi a partir do princípio de trabalho virtual nulo de D’Alembert, por sua vez baseado nas leis de Newton. Pudemos até mesmo expandir essa prescrição para sistemas mecânicos sujeitos a forças dependentes de velocidades [Eq. (5.53)], e também incluir forças dissipativas.

Lembremos que a função lagrangiana serve para produzir as equações corretas de movimento pela imposição da estacionariedade de sua integral, a ação, na trajetória efetivamente seguida pelo sistema, i.e.

$$\delta S[\{q_j(t)\}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) dt = 0, \quad (5.96)$$

Qualquer função lagrangiana capaz de manter essa ação estacionária na trajetória correta é uma lagrangiana igualmente válida para se descrever o sistema. Sabendo que a receita da Eq. (5.95) para sua construção sempre funciona, podemos começar a brincar com o formalismo e a pensar em como poderíamos modificar essa lagrangiana sem no entanto alterar a condição de estacionariedade da ação imposta pela Eq. (5.96). A nova lagrangiana assim criada deve produzir as mesmas equações do movimento e, portanto, servir para descrever o mesmo sistema físico.

A operação simples que não altera a variação da ação é somar-lhe uma constante α , pois $\delta(S[\{q_j(t)\}] + \alpha) = \delta S[\{q_j(t)\}]$. Como $S[\{q_j(t)\}]$ é definida a partir de uma integral, a constante α pode ser entendida como o resultado da integral de uma função qualquer dF/dt no espaço de configurações, pois

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} F(\{q_j\}, t) \right) dt = F(\{q_j(t_2)\}, t_2) - F(\{q_j(t_1)\}, t_1) = cte := \alpha. \quad (5.97)$$

Devemos concluir que a Eq. (5.96) é equivalente à condição

$$\delta S[\{q_j(t)\}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) + \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, t) \right) dt = 0 \quad (5.98)$$

no sentido de que produz as mesmas equações do movimento. A função lagrangiana, portanto, é definida a menos da derivada total no tempo de uma função arbitrária. Criamos com isso a lagrangiana modificada

$$\mathcal{L}'(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \mathcal{L}(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) + \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, t). \quad (5.99)$$

As lagrangianas \mathcal{L} e \mathcal{L}' descrevem o mesmo sistema físico¹⁸. Pela regra da cadeia da derivação, o termo arbitrário dF/dt se escreve explicitamente como

$$\frac{d}{dt}F(\{q_j\}, t) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.101)$$

Dito de outra forma, embora exista apenas uma trajetória física que torna a ação extrema no espaço de configurações, há infinitas possibilidades não triviais de lagrangianas (integrandos da ação) capazes de produzir as equações diferenciais satisfeitas por essa trajetória¹⁹.

Exemplo de mau uso da liberdade: Partícula livre. Apenas a título de ilustração, vejamos como a imaginação humana é capaz de complicar o mundo. Suponha que alguém mal intencionado escreva a lagrangiana da partícula livre em movimento unidimensional como

$$\mathcal{L}'(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + (x + \dot{x})e^{xt}. \quad (5.102)$$

E esse nosso colega burocrata²⁰ ficaria para sempre insensível aos argumentos racionais de um raro cientista que, citando a navalha de Occam²¹, lhe explicasse que a lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (5.103)$$

produz exatamente a mesma equação do movimento com muito menos trabalho. De fato, o cientista está correto, pois de acordo com a Eq. (5.101) a função incluída pelo burocrata é uma derivada total no tempo,

$$(x + \dot{x})e^{xt} = \frac{d}{dt}e^{xt} \quad \Rightarrow \quad F(x, t) = e^{xt}. \quad (5.104)$$

¹⁸Podemos nos convencer dessa forma de arbitrariedade da lagrangiana também por substituição direta. A Eq. (5.98) impõe ao integrando as condições de Euler

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\mathcal{L} + \frac{dF}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\mathcal{L} + \frac{dF}{dt} \right) = 0.$$

Mas a lagrangiana original a satisfaz por hipótese, restando verificar se vale

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = 0. \quad (5.100)$$

Usando a Eq. (5.101) para desenvolver a derivada total de F , o segundo termo dessa expressão se torna

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{j'} \frac{\partial F}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j}.$$

Para nos convencer de que a derivada temporal total pode ter sua ordem de aplicação trocada com a derivada parcial com relação a q_j , podemos chamar $\frac{\partial F}{\partial q_j} = G(\{q_j\}, t)$ para escrever

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} G = \frac{\partial G}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial q_j^2} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dF}{dt}.$$

Vemos então que o segundo termo da Eq. (5.100) cancela exatamente o primeiro, e a função arbitrária dF/dt sempre satisfaz a equação de Euler.

¹⁹Do ponto de vista da mecânica quântica, é possível afirmar que as lagrangianas obtidas na mecânica clássica são limites macroscópicos de lagrangianas mais fundamentais. A lagrangiana correta deve ser capaz de descrever também efeitos quânticos, e a expectativa é que essa informação adicional a determine univocamente. De qualquer forma, parece razoável a ideia de que devem existir muitas lagrangianas fundamentalmente diferentes no cenário quântico cujos limites macroscópicos coincidem produzindo as mesmas equações clássicas do movimento.

²⁰Eles estão entre nós (ou nós é que estamos entre eles?).

²¹Da Wikipedia, o princípio da ‘navalha de Occam’ é citado como “Se em tudo o mais forem idênticas as várias explicações de um fenômeno, a mais simples é a melhor”.

Explicitamente, a lagrangiana burocrática fornece a equação de movimento

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}' - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}' = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + (x + \dot{x}t)e^{xt} \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + (x + \dot{x}t)e^{xt} \right). \quad (5.105)$$

O primeiro termo resulta em

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + (x + \dot{x}t)e^{xt} \right) = e^{xt} + (x + \dot{x}t)te^{xt} = (1 + xt + \dot{x}t^2)e^{xt}. \quad (5.106)$$

Já o segundo termo envolve o cálculo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 + (x + \dot{x}t)e^{xt} \right) = m\ddot{x} + \frac{d}{dt} (te^{xt}) \stackrel{\text{Eq. (5.101)}}{=} m\ddot{x} + \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) (te^{xt}) = m\ddot{x} + (1 + xt + \dot{x}t^2)e^{xt}. \quad (5.107)$$

Juntando os resultados das Eqs. (5.106) e (5.107), obtemos a equação de movimento esperada

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}' - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \mathcal{L}' = m\ddot{x} = 0. \quad (5.108)$$

Felizmente, nesse caso específico o burocrata não tentava mudar por decreto as leis do movimento de uma partícula livre²², mas é importante estarmos sempre muito atentos.

Exemplo útil: Invariância de calibre no eletromagnetismo. Sabemos do eletromagnetismo que os campos elétrico e magnético possuem a simetria de calibre, i.e. os potenciais escalar e vetor a partir dos quais são deduzidos se definem a menos de uma transformação de calibre.

Esse efeito deve estar implícito na lagrangiana da Eq. (5.73) para a interação de uma partícula com um campo eletromagnético externo. Investiguemos a lagrangiana modificada

$$\mathcal{L}'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{q}{c} \frac{dF(\vec{r}, t)}{dt}. \quad (5.109)$$

Usando a Eq. (5.101), podemos escrever a derivada total no último termo como

$$\frac{dF(\vec{r}, t)}{dt} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} F + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (5.110)$$

tornando-se a lagrangiana modificada

$$\mathcal{L}'(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi'(\vec{r}, t) + \frac{q}{c} \vec{A}'(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}, \quad (5.111)$$

em que os potenciais modificados $\Phi'(\vec{r}, t)$ e $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ são

$$\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \text{e} \quad \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} F(\vec{r}, t). \quad (5.112)$$

Mas essa é justamente a prescrição para a transformação de calibre! Disso concluímos que a liberdade de escolha da lagrangiana está intimamente conectada à simetria de calibre no caso do eletromagnetismo. Essa é a primeira dica de que deve haver algo mais fundamental por trás da arbitrariedade (precisa) da lagrangiana.

²² Talvez quisesse na melhor das intenções burocráticas avançar em algum indicador de qualidade baseado no número de termos de lagrangianas, ou quem sabe apenas estar de acordo com a resolução 1873-9/2014 criada para lidar com os desmandos do Sr. X no trato da lagrangiana pública – alongando com isso os cálculos de inúmeras lagrangianas honestas!

5.2.2 Funções geradoras de transformações canônicas

Uma maneira conveniente de produzir transformações canônicas das coordenadas no espaço de fase se faz através de funções geradoras. O ponto de partida dessa ideia é a arbitrariedade da lagrangiana pela adição de uma derivada temporal total [Eq. (5.98)]. Tal como no caso lagrangiano, queremos descobrir que tipo de modificações podem ser introduzidas na aplicação do princípio variacional ao espaço de fase hamiltoniano sem que sejam afetadas as equações do movimento, entendidas como o objetivo principal do método.

Arbitrariedade do integrando da ação no espaço de fase

Para que dois espaços de fase distintos – um escrito em termos das variáveis canonicamente conjugadas $\{q_j, p_j\}$ e outro em termos dos pares $\{Q_j, P_j\}$ – produzam as mesmas equações do movimento, é preciso que cada qual satisfaça independentemente o princípio de estacionariedade da ação [Eq. (5.47)],

$$\delta S[\{q_j(t)\}, \{p_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) dt = 0, \quad (5.113)$$

$$\delta S[\{Q_j(t)\}, \{P_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) \right) dt = 0. \quad (5.114)$$

Como vimos anteriormente, cada uma dessas duas condições é satisfeita mesmo que seja adicionada a seu integrando (lagrangiana) a derivada total de uma função de seu respectivo espaço de configurações, que no caso se torna o espaço de fase hamiltoniano. Por isso atualizamos as variações das ações acima definidas como funcionais de $\{q_j(t), p_j(t)\}$ e $\{Q_j(t), P_j(t)\}$ (e não apenas de $\{q_j\}$ e $\{Q_j\}$, como no caso lagrangiano).

Assim, da mesma maneira que fizemos no formalismo lagrangiano, podemos somar uma constante a qualquer uma das integrais de ação acima sem produzir mudanças em sua variação. Poderíamos modificar a ação da Eq. (5.113) para

$$S'[\{q_j(t)\}, \{p_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) + \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) dt, \quad (5.115)$$

e ainda produzir as mesmas equações de movimento pelo princípio variacional, visto que o termo adicional fornece

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{p_j\}) = F(\{q_j\}, \{p_j\}) \Big|_{t=t_2} - F(\{q_j\}, \{p_j\}) \Big|_{t=t_1} = cte. \quad (5.116)$$

E o mesmo raciocínio vale no espaço de fase da Eq. (5.114), ou seja, a ação

$$S''[\{q_j(t)\}, \{p_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) + \frac{d}{dt} F(\{Q_j\}, \{P_j\}) \right) dt \quad (5.117)$$

produz as equações corretas do movimento no espaço $\{Q_j, P_j\}$.

E aqui vemos a importância de incluir no formalismo hamiltoniano as imposições $\delta p_j(t_1) = \delta p_j(t_2) = 0$, por um lado, e $\delta P_j(t_1) = \delta P_j(t_2) = 0$, por outro. Afinal, as variações δp_j , apesar de irrelevantes para a obtenção das equações canônicas nesse espaço, poderiam em princípio produzir variações δQ_j quando vistas no espaço novo, tornando os dois princípios variacionais incompatíveis. Para evitar isso, impomos que os

pontos inicial e final da trajetória no espaço de fase permaneçam fixos no processo variacional em qualquer espaço de fase imaginável, e com isso garantimos que as Eqs. (5.113) e (5.114) se referem por consistência às mesmas possibilidades de variação de caminho, embora em coordenadas diferentes.

A arbitrariedade das lagrangianas das Eqs. (5.113) e (5.114) nos permite somar em cada qual a derivada total de uma função de seus respectivos espaços de fase, $\{q_j, p_j\}$ ou $\{Q_j, P_j\}$. Tomadas em conjunto, no entanto, essa mesma invariância admite a soma de uma derivada total no espaço de dimensão $4N$ criado por essas variáveis. Para ver isso, subtraímos as Eqs. (5.113) e (5.114) para escrevê-las conjuntamente sob um mesmo princípio variacional no espaço global de $\{q_j, p_j, Q_j, P_j\}$, obtendo a condição de estacionariedade equivalente

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) - \sum_j P_j \dot{Q}_j + \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) \right) dt = 0, \quad (5.118)$$

em que a variação ocorre agora em δq , δQ , δp e δP . A invariância dessa expressão pela adição de uma derivada temporal total ao integrando resulta na condição²³

$$\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) + \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}, t). \quad (5.120)$$

A função $F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}, t)$ recebe o nome de *função geradora* da transformação canônica. A ideia por trás das transformações canônicas é encontrar funções geradoras que façam coisas interessantes com o espaço de fase.

Exemplo: Transformação identidade. Tratemos por simplicidade um sistema composto de apenas uma partícula, descrito pelos espaços de fase $\{q, p\}$ e $\{Q, P\}$. Consideremos a função geradora

$$F(q, Q, P) = (q - Q)P = (qP - QP). \quad (5.121)$$

Sua derivada temporal fornece

$$\frac{d}{dt} F = P(\dot{q} - \dot{Q}) + (q - Q)\dot{P}. \quad (5.122)$$

Usando essa expressão na Eq. (5.120), obtemos

$$\begin{aligned} p\dot{q} - \mathcal{H} &= P\dot{Q} - \mathcal{H}' + P(\dot{q} - \dot{Q}) + (q - Q)\dot{P} \\ &= P\dot{q} - \mathcal{H}' + (q - Q)\dot{P}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Novamente, essa equação precisa valer para qualquer hamiltoniana \mathcal{H} e sua transformada \mathcal{H}' . Comparando seus dois membros, a igualdade só vale se

$$q - Q = 0 \quad \text{e} \quad p = P \quad (\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}'). \quad (5.124)$$

²³Além da função $\frac{d}{dt} F$, poderíamos incluir nessa expressão uma constante α da forma

$$\alpha \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) \right) = \sum_j P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) + \frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}, t), \quad (5.119)$$

que representaria uma simples troca de escala nos eixos do espaço de fase. Por exemplo, mudar a unidade das posições de metro para quilômetro seria representado pela transformação de escala $q_j \rightarrow \beta q_j$, o que se refletiria na hamiltoniana como a transformação $\mathcal{H} \rightarrow \alpha \mathcal{H}$. No que se segue, vamos desconsiderar transformações de escala no âmbito das transformações canônicas por serem triviais na mecânica clássica (embora não o sejam na mecânica quântica, por conta do princípio de incerteza). Sua maior utilidade é tornar adimensionais posições e momentos quando conveniente.

Assim, a função geradora da Eq. (5.121) mantém todas as coordenadas invariantes, produzindo a transformação identidade no espaço de fase, i.e. fazendo alguma coisa sem fazer coisa nenhuma. A existência da transformação identidade é importante para caracterizar as transformações canônicas como um *grupo*.

Exemplo: Troca entre posições e momentos. Outra função geradora simples se define pela expressão

$$F(q, Q, P) = qQ, \quad (5.125)$$

cuja derivada temporal se escreve

$$\frac{d}{dt}F = q\dot{Q} + Q\dot{q}. \quad (5.126)$$

Substituímos essa expressão na Eq. (5.120) para obter

$$\begin{aligned} p\dot{q} - \mathcal{H} &= P\dot{Q} - \mathcal{H}' + q\dot{Q} + Q\dot{q} \\ \Rightarrow (p - Q)\dot{q} - \mathcal{H} &= (P + q)\dot{Q} - \mathcal{H}' \end{aligned} \quad (5.127)$$

Comparando os dois membros da equação, a identidade vale para quaisquer hamiltonianas $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ se

$$Q = p \quad \text{e} \quad P = -q. \quad (5.128)$$

Essa transformação leva uma posição q_j numa nova coordenada de momento P_j , e vice-versa para o momento p_j , que se torna (a menos de um sinal) a posição Q_j no novo espaço de fase. Esse exemplo ilustra a maneira igualitária como o formalismo hamiltoniano trata posições e momentos, motivando-nos a chamá-los simplesmente de ‘coordenadas’ no tratamento matemático.

Obviamente, do ponto de vista da física do sistema, posições e momentos possuem significados distintos. Uma transformação canônica é em geral realizada para simplificar a solução ou a compreensão de um problema, e não para modificar o significado físico das variáveis no espaço de fase (embora ela possa por vezes desvendar novos significados). Para uma interpretação física, muitas vezes se faz necessário inverter a transformação uma vez encontrada a solução buscada, retornando-se às variáveis com significado físico claro ao final do problema.

Exemplo: Além da lagrangiana. Por ocupar um espaço de fase com o dobro da dimensão do espaço de configurações lagrangiano, o formalismo hamiltoniano nos oferece maior liberdade de escolha no integrando da ação responsável por produzir a dinâmica, não precisando mais ser o mesmo necessariamente uma função lagrangiana, i.e. uma função de $\{q_j, \dot{q}_j\}$. Consideremos a função geradora

$$F = -QP. \quad (5.129)$$

Sua derivada total nos fornece

$$\frac{d}{dt}F = -Q\dot{P} - P\dot{Q}. \quad (5.130)$$

Ela produz a transformação na Eq. (5.120) dada por

$$p\dot{q} - \mathcal{H} = -\sum Q\dot{P} - \mathcal{H}'. \quad (5.131)$$

Com essa transformação (que não envolve o espaço de fase $\{q_j, p_j\}$), o integrando da ação nas coordenadas $\{Q_j, P_j\}$ deixa de corresponder a uma função lagrangiana (notemos sua dependência em \dot{P}_j)! De fato, a ação se escreve nessas novas coordenadas como

$$S[\{Q_j(t)\}, \{P_j(t)\}] = \int_{t_1}^{t_2} \left(- \sum Q_j \dot{P}_j - \mathcal{H}' \right) dt. \quad (5.132)$$

O efeito dessa transformação canônica é modificar a dependência do integrando, o que será usado em breve para definir diferentes tipos de funções geradoras. Em geral, vemos que as transformações canônicas nos permitem obter as equações de movimento do sistema mecânico partindo de funções inacessíveis ao formalismo lagrangiano.

Sistematização de funções geradoras de duas variáveis

No que fizemos até aqui, partimos de algumas funções geradoras simples para ilustrar como a adição da função F ao integrando da ação pode modificar a maneira como são entendidas as coordenadas no espaço de fase. No entanto, atacar um problema mecânico real requer a habilidade inversa: começamos em geral tendo alguma uma ideia de como precisa ser mais ou menos a transformação de variáveis, e a partir disso queremos determinar a função geradora capaz de produzir a transformação almejada.

Nosso propósito em geral consiste em obter uma função geradora conveniente $F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}, t)$ baseada na transformação canônica desejada, descrita por trocas de variáveis do tipo

$$\{q_j, p_j\} \mapsto \{Q_j, P_j\}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} Q_j = Q_j(\{q_j\}, \{p_j\}) \\ P_j = P_j(\{q_j\}, \{p_j\}) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} q_j = q_j(\{Q_j\}, \{P_j\}) \\ p_j = p_j(\{Q_j\}, \{P_j\}) \end{cases}. \quad (5.133)$$

Só o fato de F poder existir como uma função arbitrária num espaço de dimensão $4N$ (pois é função de todas as coordenadas envolvidas, originais e novas) já nos mostra que fazer a conexão tentada pode ser bastante complicado no caso geral. Além do mais, pode existir mais de uma função F capaz de produzir a transformação de coordenadas buscada, de forma que o problema de encontrar F a partir da Eq. (5.133) pode não ser inversível.

Nesse cenário, torna-se importante sermos pragmáticos e tentarmos encontrar funções F simples mas razoavelmente gerais, ou seja, conceitualmente fáceis de construir mas que sejam capazes de produzir uma classe abrangente de transformações canônicas.

Uma primeira dica de como encontrar algumas dessas funções aparece ao reescrevermos a Eq. (5.120) como

$$\frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{p_j\}, \{Q_j\}, \{P_j\}) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j - \left(\mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}) - \mathcal{H}'(\{Q_j\}, \{P_j\}) \right). \quad (5.134)$$

A forma dessa equação nos remete à expressão da derivada temporal total. De fato, restringindo F a depender apenas de q_j e Q_j (e do tempo), i.e. $F = F(\{q_j\}, \{Q_j\}, t)$, sua derivada temporal total segue a expressão geral

$$\frac{d}{dt} F(\{q_j\}, \{Q_j\}, t) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial F}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.135)$$

Basta então identificarmos nessas duas equações os coeficientes de \dot{q}_j e \dot{Q}_j com as derivadas parciais de F . Em outras palavras, funções geradoras com esse tipo de dependência de fato sempre satisfazem a Eq. (5.134), para qualquer hamiltoniana²⁴ \mathcal{H} , produzindo diretamente as transformações de coordenadas

$$p_j(\{q_j\}, \{Q_j\}, t) = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \quad P_j(\{q_j\}, \{Q_j\}, t) = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.136)$$

Na verdade, podemos simplificar essas expressões de transformação lembrando que não precisamos submeter todas as coordenadas a uma transformação canônica, mas apenas um subconjunto delas. A função F pode mesmo mirar em apenas um par canônico específico $\{q_j, p_j\}$ e ser independente das demais coordenadas. Vamos por isso reescrever a partir deste ponto a Eq. (5.134) de maneira mais simples, como

$$\frac{d}{dt}F(q_j, p_j, Q_j, P_j) = p_j\dot{q}_j - P_j\dot{Q}_j - (\mathcal{H} - \mathcal{H}'), \quad (5.137)$$

na qual deve ser subentendido que o índice j se refere ao espaço de fase reduzido $\{q_j, p_j\}$ a ser transformado²⁵. Vamos nos restringir a tratar o bloco fundamental formado por transformações geradoras dependentes de forma não trivial de apenas 2 variáveis.

Assim, funções com a dependência nas duas coordenadas de posição (antiga e nova), a que nos referiremos como funções geradoras do tipo 1, produzem equações de transformação no espaço de fase restrito da partícula j segundo

$$F = F_1(q_j, Q_j, t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} p_j = p_j(q_j, Q_j, t) = \frac{\partial F}{\partial q_j} \\ P_j = P_j(q_j, Q_j, t) = -\frac{\partial F}{\partial Q_j} \end{cases}. \quad (5.138)$$

No caso mais simples possível, esse tipo de função geradora assume a forma $F_1(q_j, Q_j, t) = q_j Q_j$, produzindo a troca de coordenadas por momentos do espaço de fase conforme ilustrado pelo exemplo da Eq. (5.125).

Essas transformações não correspondem exatamente à forma que supusemos na Eq. (5.133), com as coordenadas novas escritas em termos das antigas, pois envolvem uma mistura entre esses dois conjuntos ao produzir os momentos p_j e P_j como função das posições q_j e Q_j . Para quisermos recuperar a partir da Eq. (5.138) a transformação canônica entre coordenadas na forma da Eq. (5.133), precisamos invertê-las, e.g. seguindo os passos

$$(i) \quad \frac{\partial F}{\partial q_j} = p(q_j, Q_j, t) \quad \xrightarrow{\text{inversa}} \quad Q_j = Q_j(q_j, p_j, t) \quad (5.139)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial Q_j} = -P_j(q_j, Q_j, t) \quad \xrightarrow{\text{Eq. (5.139)}} \quad P_j(q_j, Q_j(q_j, p_j), t) = P_j(q_j, p_j, t). \quad (5.140)$$

Na Eq. (5.139), invertemos a relação $p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}$ para obtermos as novas posições Q_j como funções das coordenadas do espaço de fase original; já na Eq. (5.140), substituímos a expressão de Q_j na relação $P_j = -\frac{\partial F}{\partial Q_j}$ para determinarmos os novos momentos P_j em termos de $\{q_j, p_j\}$.

²⁴Caso quiséssemos somente transformar uma hamiltoniana específica, seria preciso conhecer sua expressão para determinar F , o que poderia funcionar, mas não seria necessariamente uma transformação canônica.

²⁵É verdade que a forma da Eq. (5.137) tira um pouco da generalidade de nosso tratamento, pois não permite a ‘mistura’ de espaços de fase reduzidos de partículas diferentes. Seu mérito em nosso contexto é apenas simplificar a compreensão elementar da técnica. Notemos que a Eq. (5.137) ainda permite que funções geradoras diferentes possam ser aplicadas às coordenadas de partículas diferentes, por conta da linearidade da derivada (basta somar as funções geradoras atuando sobre espaços de fase restritos $\{q_j, p_j\}$ e $\{q_{j'}, p_{j'}\}$ distintos). Uma vez entendidas as ideias dessa seção, é simples generalizar ainda mais as funções geradoras para contemplarem transformações mais complexas.

É possível ampliar a abrangência de funções geradoras dependentes de duas variáveis utilizando procedimento similar à transformada de Legendre. A ideia é utilizar, no espírito da transformada de Legendre, um termo ‘auxiliar’ para mudar a dependência do integrando da ação, tal como visto no exemplo da Eq. (5.129), e com isso permitir manipulá-lo utilizando lógica similar à da Eq. (5.136).

Inspirados na Eq. (5.129), supomos uma função geradora com a dependência

$$F = -Q_j P_j + F_2. \quad (5.141)$$

Sua derivada temporal total é

$$\frac{d}{dt}F = -P_j \dot{Q}_j - Q_j \dot{P}_j + \frac{d}{dt}F_2 \quad (5.142)$$

O uso dessa expressão na Eq. (5.134) resulta no cancelamento dos termos em \dot{Q}_j e sua substituição por termos em \dot{P}_j , mudando sua dependência para

$$\frac{d}{dt}F_2 = p_j \dot{q}_j + Q_j \dot{P}_j - (\mathcal{H} - \mathcal{H}'). \quad (5.143)$$

Seguindo o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, a Eq. (5.143) nos remete à derivada temporal total de uma função das posições originais q_j e dos novos momentos P_j , pois vale em geral que

$$\frac{d}{dt}F_2(q_j, P_j) = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \dot{P}_j + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (5.144)$$

Comparando as Eqs. (5.143) e (5.144), identificamos dessa vez as transformações de coordenadas

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (5.145)$$

Obtemos assim o segundo tipo de função geradora e suas transformações canônicas correspondentes como

$$F = -Q_j P_j + F_2(q_j, P_j, t) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} p_j = p_j(q_j, P_j, t) = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \\ Q_j = Q_j(q_j, P_j, t) = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \end{cases}. \quad (5.146)$$

A função geradora mais simples de tipo 2 segue a forma $F_2(q_j, P_j, t) = q_j P_j$, e produz a transformação identidade vista no exemplo da Eq. (5.121).

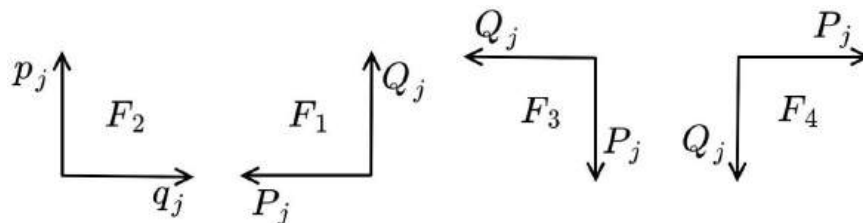


Figura 5.2: Efeito das funções geradores mais simples sobre o espaço de fase. A função F_2 mais elementar produz a transformação identidade. As demais produzem efeitos equivalentes a rotações, de $\pi/4$ no caso de F_1 , π para F_3 e $3\pi/4$ para F_4 .

O terceiro e quarto tipos de funções geradoras simples são obtidos de maneira similar. No terceiro tipo, escrevemos a função geradora com o intuito de eliminar \dot{q}_j em favor de \dot{p}_j na Eq. (5.134). Obtemos as

relações

$$F = q_j p_j + F_3(p_j, Q_j, t) \rightarrow \begin{cases} q_j = q_j(p_j, Q_j, t) = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \\ P_j = P_j(p_j, Q_j, t) = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \end{cases}. \quad (5.147)$$

A função geradora de tipo 3 mais simples fornece

$$F_3(p_j, Q_j, t) = p_j Q_j. \quad (5.148)$$

Usando a Eq. (5.147), obtemos a transformação $Q_j = -q_j$ e $P_j = -p_j$, que inverte o sentido das coordenadas ou, alternativamente, produz uma rotação de π do espaço de fase.

O quarto tipo de função geradora utiliza ambos os termos adicionais dos tipos 2 e 3 para eliminar ambas as coordenadas do tipo 1. Ela se define como

$$F = q_j p_j - Q_j P_j + F_4(p_j, P_j, t) \rightarrow \begin{cases} q_j = q_j(p_j, P_j, t) = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \\ Q_j = Q_j(p_j, P_j, t) = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \end{cases}. \quad (5.149)$$

Sua forma mais simples, $F_4(p_j, P_j, t) = p_j P_j$, produz a transformação de coordenadas $Q_j = -p_j$ e $P_j = q_j$, correspondente a uma rotação do espaço de fase pelo ângulo $3\pi/4$,

Em resumo, podemos construir com facilidade 4 funções geradoras básicas similares, relacionadas entre si pela mesma lógica da transformada de Legendre para substituição de variáveis.

$$\begin{aligned} (i) \quad F_1(q_j, Q_j) &\rightarrow p_j(q_j, Q_j) = \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \text{ e } P_j(q_j, Q_j) = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \quad \left[\text{e.g. } F_1 = q_j Q_j \rightarrow \begin{cases} Q_j = p_j \\ P_j = -q_j \end{cases} \right] \\ (ii) \quad F_2(q_j, P_j) &\rightarrow p_j(q_j, P_j) = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} \text{ e } Q_j(q_j, P_j) = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad \left[\text{e.g. } F_2 = q_j P_j \rightarrow \begin{cases} Q_j = q_j \\ P_j = p_j \end{cases} \right] \\ (iii) \quad F_3(p_j, Q_j) &\rightarrow q_j(p_j, Q_j) = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j} \text{ e } P_j(p_j, Q_j) = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} \quad \left[\text{e.g. } F_3 = p_j Q_j \rightarrow \begin{cases} Q_j = -q_j \\ P_j = -p_j \end{cases} \right] \\ (iv) \quad F_4(p_j, P_j) &\rightarrow q_j(p_j, P_j) = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j} \text{ e } Q_j(p_j, P_j) = \frac{\partial F_4}{\partial P_j} \quad \left[\text{e.g. } F_4 = p_j P_j \rightarrow \begin{cases} Q_j = -p_j \\ P_j = q_j \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (5.150)$$

A tabela acima reúne essas funções e as transformações de coordenadas implicadas por elas.

Exemplo: Transformação de ponto. As transformações agindo sobre o espaço de configurações lagrangianas atuam apenas sobre os conjuntos de posições q_j e Q_j , da forma

$$Q_j = Q_j(\{q_j\}) \leftrightarrow q_j = q_j(\{Q_j\}). \quad (5.151)$$

Gostaríamos de traduzir esse tipo de transformação para o espaço de fase hamiltoniano pelo uso de uma função geradora simples. Como supomos conhecida as equações $Q_j(\{q_j\})$ de transformação, uma combinação de funções geradoras do tipo 2 (uma para cada coordenada j) nos oferece o que estamos buscando. De fato, uma forma simples de fazer valer a condição

$$Q_j(q_{j'}, P_{j'}) = \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \quad (5.152)$$

é integrar trivialmente essa equação para obter

$$F_2(q_{j'}, P_j) = Q_j(q_{j'})P_j. \quad (5.153)$$

Para transformar todas as coordenadas Q_j , basta generalizar as funções geradoras de cada transformação da Eq. (5.153) para envolver todos os q_j e somá-las, produzindo dessa forma a função geradora que sintetiza todo o sistema de equações da transformação de ponto,

$$F_2(\{q_j\}, \{P_j\}) = \sum_{j'} Q_{j'}(\{q_j\})P_{j'}. \quad (5.154)$$

Os novos momentos P_j são obtidos pela segunda condição da transformação canônica, invertendo-se a relação (e.g. pelo uso de sua representação matricial)

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{j'} \frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} P_{j'}. \quad (5.155)$$

De fato, vemos dessa expressão que é possível aumentar a liberdade da transformação de ponto pela adição de um termo dependente apenas das posições q_j na função geradora da Eq. (5.154), da forma

$$F_2(\{q_j\}, \{P_j\}) = \sum_{j'} (Q_{j'}(\{q_j\})P_{j'} + g_{j'}(\{q_j\})), \quad (5.156)$$

resultando na transformação mais geral para os momentos

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j} = \sum_{j'} \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} P_{j'} + \frac{\partial g_{j'}}{\partial q_j} \right). \quad (5.157)$$

Concluimos assim que as transformações de ponto formam um subconjunto das transformações canônicas.

Exemplo: Oscilador harmônico. Uma das utilidades das transformações canônicas é levar a hamiltoniana a um formato em que algumas das coordenadas se tornem cíclicas, tornando mais simples a solução do movimento. De fato, se a coordenada Q_j não aparece na hamiltoniana, a equação canônica para seu momento conjugado apenas indica ser o mesmo uma quantidade conservada do movimento,

$$\dot{P}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_j = cte. \quad (5.158)$$

No cenário mais favorável possível, a transformação canônica leva a uma hamiltoniana independente de posições, e como consequência todos os momentos conjugados se tornam constantes. As equações canônicas para as coordenadas também se tornam simples nesse caso extraordinário, pois a hamiltoniana vira uma função constante em todo o espaço de fase transformado,

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_j} = \omega_j = cte \quad \Rightarrow \quad Q_j = \omega_j t + c_j, \quad (5.159)$$

em que c_j é uma constante dada e.g. pelas condições iniciais. As coordenadas do espaço de fase com essa propriedade fazem papel análogo aos deslocamentos normais de um sistema de osciladores acoplados: a transformação canônica consegue nesse caso levar a descrição do sistema num conjunto de variáveis coletivas desacopladas com evolução temporal simples.

Surpreendentemente, esse tipo de transformação funciona para o oscilador harmônico simples. Estamos acostumados a entender seu movimento como uma troca perpétua de excitação entre sua posição e seu momento. Conforme vimos anteriormente, sua trajetória no espaço de fase são circunferências, se normalizarmos apropriadamente posição e momento, ou elipses, caso não nos preocupemos com isso. Os parâmetros de cada circunferência são o raio, que se define pela energia do oscilador, e a velocidade angular com que é percorrida, dada pela frequência ω de oscilação. Vejamos como essa imagem muda em um novo espaço de fase capaz de tornar a evolução do sistema simples conforme discutido no contexto da Eq. (5.159).

A hamiltoniana do oscilador harmônico se escreve

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2. \quad (5.160)$$

Ao observar uma soma de quadrados desse tipo, a tentativa natural de troca de coordenadas envolve escrevê-la em termos de funções trigonométricas. Nesse caso, poderia funcionar a troca²⁶

$$p = f(P) \cos Q \quad \text{e} \quad q = \frac{f(P)}{m\omega} \sin Q, \quad (5.161)$$

pois então a hamiltoniana se tornaria cíclica em Q ,

$$\mathcal{H}(P) = \frac{f^2(P)}{2m}. \quad (5.162)$$

O trabalho consiste em encontrar $f(P)$ através de uma função geradora, um processo baseado até certo ponto na ‘tentativa e erro’. Vamos obviamente tentar usar uma das funções geradoras simples baseadas em duas variáveis (o problema é escolher uma delas).

O caminho geral a seguir envolve integrar uma das derivadas parciais da Eq. (5.150) relacionando $q \leftrightarrow p$ ou $Q \leftrightarrow P$ se quisermos ter alguma chance de determinar F . Precisamos então conhecer ao menos uma expressão conectando duas variáveis do mesmo espaço de fase. A Eq. (5.161) de nosso problema mantém desconhecida a função $f(P)$, e portanto precisamos recorrer a uma relação conectando $q \leftrightarrow p$. Atingimos esse primeiro objetivo combinando as relações da Eq. (5.161) para eliminar $f(P)$,

$$f(P) = \frac{m\omega q}{\sin Q} \quad \Rightarrow \quad p = m\omega q \cot Q. \quad (5.163)$$

Integrando essa relação em q nos leva à escolha natural de uma função geradora do tipo 1 (caso tivéssemos escolhido isolar q , seríamos levados a uma função geradora dependente de p e Q , i.e. de tipo 3, o que forneceria o mesmo resultado),

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = p = m\omega q \cot Q \quad \Rightarrow \quad F_1(q, Q) = m\omega q^2 \cot Q. \quad (5.164)$$

A equação para P pode agora ser encontrada diferenciando-se essa expressão com relação a Q . Obtemos

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 Q}. \quad (5.165)$$

Determinamos com isso todas as transformações de coordenadas necessárias. É preciso apenas invertê-las e combiná-las para isolarmos q e p a fim de reescrevermos a hamiltoniana usual do oscilador harmônico nas

²⁶É possível tentar também a transformação $p = f(P) \sin Q$ e $q = \frac{f(P)}{m\omega} \cos Q$. Obtemos nesse caso P restrito a valores negativos.

coordenadas $\{Q, P\}$ do espaço de fase transformado. Isolamos q na Eq. (5.165) e substituímos o resultado na Eq. (5.164) para obtermos

$$q(Q, P) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q \quad \text{e} \quad p(Q, P) = \sqrt{2m\omega P} \cos P, \quad (5.166)$$

da qual reconhecemos a função procurada na Eq. (5.163) como $f(P) = \sqrt{2m\omega P}$. Substituir essas expressões na hamiltoniana da Eq. (5.160) nos fornece a hamiltoniana transformada

$$\mathcal{H}'(Q, P) = \omega P. \quad (5.167)$$

A solução do movimento é, portanto,

$$P(t) = \frac{E_0}{\omega}, \quad \text{e} \quad Q(t) = \omega t + Q_0, \quad (5.168)$$

em que usamos o fato de que a hamiltoniana corresponde à energia mecânica E_0 do sistema. É interessante substituir essas soluções nas variáveis $\{q, p\}$ para obter a evolução temporal no espaço de fase usual,

$$q(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad p(Q, P) = \sqrt{2mE_0} \cos(\omega t + \phi). \quad (5.169)$$

Reconhecemos então a constante de integração Q_0 como a fase inicial do oscilador.

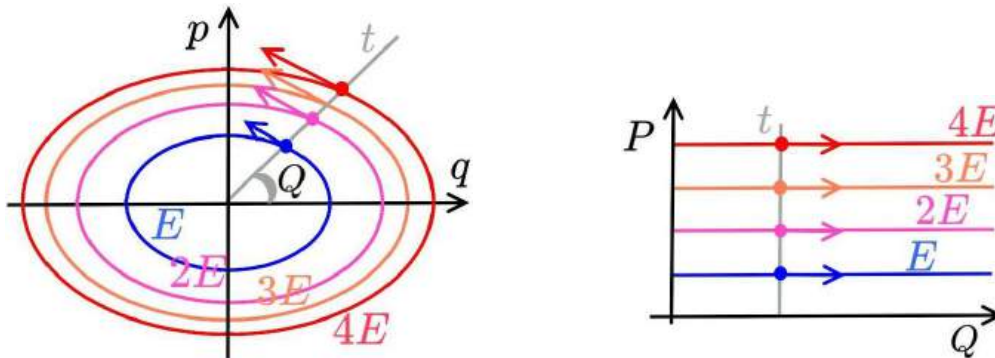


Figura 5.3: Trajetórias do oscilador harmônico nos espaços de fase (esquerda) usual $\{q, p\}$ e (direita) transformado $\{Q, P\}$. Quatro curvas coloridas indicam trajetórias com diferentes energias. A reta cinza une pontos de diferentes trajetórias no mesmo instante de tempo t .

É interessante comparar as trajetórias seguidas pelo oscilador nos dois espaços de fase, representados nas variáveis $\{q, p\}$ (Fig. 5.3, esquerda) e $\{Q, P\}$ (Fig. 5.3, direita), para notarmos algumas características gerais do fluxo de trajetórias hamiltonianas.

No espaço $\{q, p\}$, o oscilador percorre uma elipse com semi-eixos $q_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m\omega^2}}$ e $p_0 = \sqrt{2mE_0}$, funções crescentes da energia mecânica ou, de forma alternativa, do novo momento P . O ângulo de posicionamento da partícula sobre a elipse aumenta uniformemente no tempo, e é de fato dado pela posição transformada $Q = \omega t + Q_0$. Notamos então que as novas coordenadas $\{Q, P\}$ parametrizam de forma econômica a trajetória vista no espaço de fase $\{q, p\}$.

No segundo espaço de fase, o oscilador traça uma linha reta paralela ao eixo Q , uma vez que P se mantém constante, também com velocidade uniforme. Uma característica marcante das trajetórias nesse espaço é sua simplicidade. Em especial, vemos que a densidade de trajetórias no espaço de fase é constante:

o número de trajetórias é proporcional ao intervalo de energia considerado. Com isso queremos dizer que a distância entre trajetórias separadas pela mesma diferença de energia é constante.

A mesma observação não vale para o espaço de fase $\{q, p\}$. Nele vemos as trajetórias com energias mais altas se aproximando no gráfico, por conta da dependência $E_0^{1/2}$ do tamanho (semi-eixo) da elipse. Por exemplo, a distância entre as curvas com energias E e $2E$ é claramente menor do que a distância entre as trajetórias com o triplo e o quádruplo da energia E , mesmo que a diferença de energia seja a mesma, i.e. $\Delta E = 2E - E = 4E - 3E = E$.

No entanto, e essa é uma característica geral da dinâmica hamiltoniana, a *área* abarcada entre duas trajetórias se mantém a mesma em qualquer representação do espaço de fase. Por exemplo, a área ocupada por todas as trajetórias no intervalo de energia $0 \leq E_0 \leq 4E$ se encontra, no espaço de fase $\{q, p\}$, no interior da elipse com energia $4E$,

$$A_{qp} = \pi q_0 p_0 = 8\pi \frac{E}{\omega}. \quad (5.170)$$

Já no espaço de fase $\{Q, P\}$, as mesmas trajetórias se encontram no interior do retângulo com área

$$A_{QP} = (Q(t + \tau) - Q(t)) P = \omega \tau \frac{E_0}{\omega} = 8\pi \frac{E}{\omega}, \quad (5.171)$$

em que utilizamos 1 período $\tau = 2\pi/\omega$ do oscilador para realizar a comparação fidedigna de áreas (i.e. a área da elipse no espaço $\{q, p\}$ é varrida apenas uma vez). Cálculo similar revelaria que a área entre as trajetórias com energias entre $3E \leq E_0 \leq 4E$ segue a mesma regra, e assim por diante. O importante na comparação é possuir uma forma de comparar áreas com o mesmo número de trajetórias. Assim, a transformação canônica pode mudar a densidade de trajetórias conforme percebida numa certa região de determinada representação do espaço de fase; ela não altera, entretanto, a área ocupada por um conjunto fixo de trajetórias.

5.2.3 Transformações canônicas infinitesimais

Vimos no formalismo lagrangiano como transformações infinitesimais das coordenadas q_j estão intrinsecamente relacionadas a quantidades físicas como momentos lineares, angulares e energia. No contexto do teorema de Noether, identificamos a invariância da lagrangiana a certas transformações com leis de conservação dessas quantidades.

Essa forma de pensar é mantida e aprofundada no formalismo hamiltoniano. E a ferramenta matemática que nos permite vislumbrar essas simetrias fundamentais da natureza se baseia na ideia de transformações contínuas do espaço de fase, produzidas pela concatenação de transformações canônicas infinitesimais.

Uma transformação canônica pode ser construída para modificar o espaço de fase infinitesimalmente, assemelhando-se em ordem zero à transformação identidade. Como a identidade é produzida pela função geradora mais simples de tipo 2 [Eq. (5.150)], uma transformação canônica infinitesimal agindo sobre as coordenadas $\{q_j, p_j\}$ se constrói a partir da função geradora

$$F_2(q_j, P_j, t) = q_j P_j + \epsilon G(q_j, P_j, t). \quad (5.172)$$

As equações de transformação para as coordenadas são

$$\begin{aligned} p_j(q_j, P_j, t) &= \frac{\partial F_2}{\partial q_j} & Q_j(q_j, P_j, t) &= \frac{\partial F_2}{\partial P_j} \\ &= P_j + \epsilon \frac{\partial}{\partial q_j} G(q_j, P_j, t) & &= q_j + \epsilon \frac{\partial}{\partial P_j} G(q_j, P_j, t) \end{aligned} \quad (5.173)$$

Estamos interessados em valores infinitesimais para ϵ , e por isso $p_j \approx P_j$ e $q_j \approx Q_j$. A dependência da função G pode então ser escrita em termos de qualquer variável, visto que as derivadas parciais com relação a q_j ou Q_j fornecem o mesmo resultado em primeira ordem, o mesmo valendo para p_j e P_j , i.e.

$$\frac{\partial G}{\partial q_j} = \frac{\partial G}{\partial Q_j} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial p_j} = \frac{\partial G}{\partial P_j} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.174)$$

Com isso, a função G pode ser entendida como $G(q_j, p_j, t)$ até primeira ordem em ϵ , o que nos permite ignorar a dependência formal $p_j(q_j, P_j, t)$ ou $Q_j(q_j, P_j, t)$ para escrever simplesmente p_j ou Q_j , já que as relações da Eq. (5.173) se tornam trivialmente inversíveis.

Escrevemos assim facilmente as expressões de transformação no formato desejável em que as novas coordenadas $\{Q_j, P_j\}$ aparecem como funções das variáveis do espaço de fase original $\{q_j, p_j\}$,

$$Q_j = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad P_j = p_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \quad (5.175)$$

Suas inversas se escrevem simplesmente

$$q_j = Q_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \quad \text{e} \quad p_j = P_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial Q_j}. \quad (5.176)$$

Os termos em G nessas expressões produzem correções infinitesimais em q_j e p_j . Podemos mesmo entender a transformação canônica infinitesimal pelas relações

$$Q_j = q_j + dq_j \quad \text{e} \quad P_j = p_j + dp_j, \quad \text{com termos de correção} \quad \begin{cases} dq_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \\ dp_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \end{cases}. \quad (5.177)$$

Vemos que a função G é que efetivamente gera a transformação infinitesimal. É por isso comum no caso de transformações contínuas como essa, parametrizada no caso por ϵ , redefinir aquilo que se chama de função geradora, passando esta denominação a se referir à função G . Dizemos que a função geradora G produz uma transformação canônica infinitesimal.

Para mostrar que as expressões da Eq. (5.177) e suas inversas de fato representam uma transformação canônica, testamos essas expressões pelo uso das 4 condições diretas das Eqs. (5.93) e (5.94),

$$(i) \quad \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} : \quad \begin{cases} \text{Eq. (5.175)} : \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} = \frac{\partial q_j}{\partial p_{j'}} + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial p_{j'} \partial p_j} \\ \text{Eq. (5.176)} : \frac{\partial q_{j'}}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_{j'}}{\partial P_j} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_j \partial P_{j'}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial p_{j'} \partial p_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial P_j \partial P_{j'}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \checkmark \quad (5.178)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \stackrel{?}{=} \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j} : \quad \begin{cases} \text{Eq. (5.175)} : \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} = \delta_{jj'} + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial q_{j'} \partial p_j} \\ \text{Eq. (5.176)} : \frac{\partial p_{j'}}{\partial P_j} = \delta_{jj'} + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial P_j \partial Q_{j'}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial q_{j'} \partial p_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial P_j \partial Q_{j'}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \checkmark \quad (5.179)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} \stackrel{?}{=} \frac{\partial q_{j'}}{\partial Q_j} : \begin{cases} \text{Eq. (5.175)} : \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} = \delta_{jj'} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial p_{j'} \partial q_j} \\ \text{Eq. (5.176)} : \frac{\partial q_{j'}}{\partial Q_j} = \delta_{jj'} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_j \partial P_{j'}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial p_{j'} \partial q_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial Q_j \partial P_{j'}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \checkmark \quad (5.180)$$

$$(iv) \quad \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} \stackrel{?}{=} -\frac{\partial p_{j'}}{\partial Q_j} : \begin{cases} \text{Eq. (5.175)} : \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} = \frac{\partial p_{j'}}{\partial q_{j'}} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial q_{j'} \partial q_j} \\ \text{Eq. (5.176)} : \frac{\partial p_{j'}}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_{j'}}{\partial Q_j} + \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial Q_j \partial Q_{j'}} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial q_{j'} \partial q_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial Q_j \partial Q_{j'}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \checkmark \quad (5.181)$$

Assim, nossa transformação infinitesimal passa em todos os testes diretos de ‘canonicidade’ até ordem ϵ , e se caracteriza portanto como uma transformação canônica.

Transformações canônicas como um grupo

Outra propriedade das transformações canônicas digna de nota é o fato de que sua composição produz uma transformação também canônica. Isso é fácil de mostrar partindo diretamente da equação básica a definir as funções geradoras, a Eq. (5.137). Supomos a aplicação de duas transformações canônicas, descritas pelas funções geradoras F e F' , que modificam os espaços de fase na sequência

$$\{q_j, p_j\} \xrightarrow{F} \{Q_j, P_j\} \xrightarrow{F'} \{Q'_j, P'_j\}. \quad (5.182)$$

A primeira transformação produz a identidade

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}' + \frac{d}{dt} F, \quad (5.183)$$

enquanto a segunda fornece

$$P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H} = P'_j \dot{Q}'_j - \mathcal{H}'' + \frac{d}{dt} F'. \quad (5.184)$$

A transformação a conectar diretamente os espaços de fase $\{q_j, p_j\}$ e $\{Q'_j, P'_j\}$ é encontrada isolando-se o termo $P_j \dot{Q}_j - \mathcal{H}'$ na primeira equação e substituindo-o na segunda. Obtemos

$$p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = P'_j \dot{Q}'_j - \mathcal{H}'' + \frac{d}{dt} (F + F'), \quad (5.185)$$

da qual identificamos a transformação direta como canônica e gerada pela função $F'' = F + F'$,

$$\{q_j, p_j\} \xrightarrow{F''} \{Q'_j, P'_j\}, \quad \text{com } F'' = F + F'. \quad (5.186)$$

Essa relação nos indica também que a transformação canônica inversa de F sempre existe e é produzida pela função $-F$. A sequência de passos acima vale para qualquer transformação canônica, inclusive infinitesimais.

Juntando as propriedades de existência da identidade, composição e inversão, podemos concluir que as transformações canônicas formam um grupo.

Hamiltoniana como função geradora da dinâmica

Como já vimos diversas vezes até aqui, o formalismo hamiltoniano, tal como a poesia, preza o *formato* visual das expressões matemáticas como mais uma dimensão expressiva das relações entre as quantidades envolvidas, fornecendo maneiras de interpretá-las ou de perceber conexões gerais apenas pela análise da forma. Em especial, queremos aqui chamar a atenção para os diferenciais de coordenadas produzidos por transformações canônicas,

$$dq_j = \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad dp_j = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \quad (5.187)$$

É irresistível olhar para essas expressões, que representam em princípio apenas um mapa entre dois espaços de fase, e não pensar nas próprias equações de Hamilton (até mesmo o sinal relativo está correto!).

Essa semelhança ‘estética’ só pode significar uma coisa a olhos bem treinados: as equações de movimento devem ser elas mesmas a receita de uma transformação canônica infinitesimal. Essa intuição é formalmente confirmada tomando-se o parâmetro ϵ como um intervalo infinitesimal de tempo dt . A Eq. (5.187) nos fornece nesse caso

$$\epsilon = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j = \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad \frac{dp_j}{dt} = \dot{p}_j = -\frac{\partial G}{\partial q_j}, \quad (5.188)$$

o que, à luz das equações de Hamilton para o movimento, nos obriga a identificar a função geradora como sendo a própria hamiltoniana, i.e.

$$\epsilon = dt \quad \Rightarrow \quad G(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \mathcal{H}(\{q_j\}, \{p_j\}). \quad (5.189)$$

A dinâmica hamiltoniana pode ser então entendida como uma sequência de transformações canônicas infinitesimais cuja função geradora é a própria hamiltoniana do sistema! Assim, a evolução do sistema mecânico entre dois instantes de tempo ocorre por uma composição de transformações canônicas infinitesimais que, como vimos, também são canônicas, já que formam um grupo.

Esse *insight* representa um grande salto conceitual na compreensão da evolução temporal dos sistemas físicos. Estamos aqui unindo a dinâmica, cuja missão desde Newton se restringia a simplesmente encontrar as equações diferenciais apropriadas, ao formalismo muito mais geral de transformações infinitesimais. As equações diferenciais se tornam então apenas uma das formas de se representar a dinâmica, que ocorre em nível mais profundo e portanto admite outras interpretações, e.g. algébricas ou mesmo geométricas.

Finalmente, o reconhecimento da dinâmica como transformação canônica no espaço de fase abre o caminho conceitual que estava faltando para determinarmos a partir da hamiltoniana as equações de transformação de coordenadas capazes de sintetizar o movimento, pela equação de Hamilton-Jacobi.

5.3 Forma simplética: formulação geométrica da dinâmica hamiltoniana

Os sinais negativos que aparecem nas equações de Hamilton e também nas derivadas parciais das funções geradoras de transformações canônicas nos remetem a uma forma *simplética*²⁷, ou antissimétrica. De fato,

²⁷O termo ‘simplético’ se origina do grego, significando ‘complexo’, e foi proposto por Herman Weyl em seu livro “The Classical Groups: their invariants and representations” (Princeton University Press, 1939) para se referir ao grupo de transformações que

se trocarmos q_j por p_j em vários desses contextos veremos aparecer um sinal negativo à frente da expressão, atestando a presença de uma espécie de antissimetria natural entre as coordenadas duais da mecânica hamiltoniana.

A *representação simplética* da mecânica de Hamilton se faz mais conveniente em notação matricial, definindo-se uma matriz coluna para reunir as coordenadas no espaço de fase e outra contendo os operadores diferenciais correspondentes. Para o espaço de fase restrito da partícula j , temos as matrizes

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \partial_{q_j} \\ \partial_{p_j} \end{pmatrix}, \quad \text{em que} \quad \begin{cases} \partial_{q_j} := \frac{\partial}{\partial q_j} \\ \partial_{p_j} := \frac{\partial}{\partial p_j} \end{cases}. \quad (5.190)$$

As equações de Hamilton para o movimento dessa partícula podem ser escritas de forma bastante compacta definindo-se a matriz $\boldsymbol{\omega}$, chamada de *forma simplética*,

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.191)$$

Essa matriz é antissimétrica, como esperado, pois

$$\omega_{jj'} = -\omega_{j'j} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}. \quad (5.192)$$

Além disso, é muito simples verificar (ou visualizar!) tratar-se de uma matriz ortogonal,

$$\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\omega}^T = \mathbb{1}. \quad (5.193)$$

Seguem daí as identidades

$$\boldsymbol{\omega}^T = \boldsymbol{\omega}^{-1} = -\boldsymbol{\omega} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega}^2 = -\mathbb{1}. \quad (5.194)$$

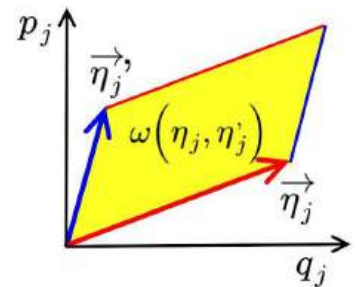
A forma simplética pode ser alternativamente definida pela operação bilinear

$$\omega(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\eta}'_j) := \boldsymbol{\eta}'_j{}^T \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\eta}_j = \begin{pmatrix} q'_j & p'_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} = p'_j q_j - q'_j p_j, \quad (5.195)$$

cuja forma se assemelha à de um produto escalar num espaço vetorial, porém antissimétrico, i.e. $\omega(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\eta}'_j) = -\omega(\boldsymbol{\eta}'_j, \boldsymbol{\eta}_j)$ (veremos que um espaço vetorial munido de um produto escalar antissimétrico caminha na direção de produzir estruturas algébricas de Lie).

Uma interpretação geométrica da forma simplética da Eq. (5.195) se dá em termos de *áreas* no espaço de fase. Podemos entender $\boldsymbol{\eta}_j$ e $\boldsymbol{\eta}'_j$ como representações matriciais de vetores $\vec{\eta}_j = q_j \hat{q}_j + p_j \hat{p}_j$ e $\vec{\eta}'_j = q'_j \hat{q}_j + p'_j \hat{p}_j$ no espaço de fase, em que \hat{q}_j e \hat{p}_j apontam respectivamente as direções dos eixos ordenados de posição e momento, i.e. $\boldsymbol{\eta}_j \equiv \vec{\eta}_j$ e $\boldsymbol{\eta}'_j \equiv \vec{\eta}'_j$. Nesse caso, a Eq. (5.195) pode ser entendida, a menos de um sinal, como o módulo do produto vetorial entre esses vetores, pois

$$\omega(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\eta}'_j) = \pm |\vec{\eta}_j \times \vec{\eta}'_j|, \quad (5.196)$$



mantém invariante uma forma bilinear antissimétrica (pág. 165), já que o termo ‘complexo’ nos remete irremediavelmente aos números complexos.

que, como sabemos, fornece a área do paralelogramo produzido pelos vetores. Vemos daí também que o produto vetorial pode ser tomado como o produto escalar antissimétrico necessário para formar a álgebra que se insinua nas equações de Hamilton.

Em essência, a forma simplética ω carrega a estrutura das equações canônicas, relacionando com o sinal correto os pares conjugados e derivadas parciais correspondentes. Cada par de equações canônicas se sintetiza pela equação matricial

$$\dot{\eta}_j = \omega \partial_{\eta_j} \mathcal{H}, \quad (5.197)$$

comumente chamada de *representação simplética* das equações de Hamilton. Explicitamente, temos

$$\dot{\eta}_j = \begin{pmatrix} \dot{q}_j \\ \dot{p}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{q_j} \mathcal{H} \\ \partial_{p_j} \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_j} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_j} \mathcal{H} \end{pmatrix},$$

mostrando que a representação funciona.

Para representar todas as $2N$ equações canônicas em apenas 1 equação matricial, concatenamos numa matriz coluna $\boldsymbol{\eta}$ todas as matrizes η_j de coordenadas (valendo o mesmo para a matriz ∂_{η_j} de operadores diferenciais) e generalizamos a forma simplética pela soma direta,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix}, \quad \partial_{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \partial_{\eta_1} \\ \partial_{\eta_2} \\ \vdots \\ \partial_{\eta_N} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Omega} = \underbrace{\omega \oplus \omega \oplus \cdots \oplus \omega}_{N \text{ vezes}} = \begin{pmatrix} \omega & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \omega \end{pmatrix}, \quad (5.198)$$

em que $\mathbf{0}$ é a matriz nula 2×2 . Em termos dessas matrizes estendidas a todo o espaço de fase, escrevemos as equações de Hamilton (em formato de blocos de matrizes 2×2) como

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\eta_1} \\ \partial_{\eta_2} \\ \vdots \\ \partial_{\eta_N} \end{pmatrix} \mathcal{H}, \quad (5.199)$$

que também pode ser escrita no formato sintético

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}. \quad (5.200)$$

A forma simplética $\boldsymbol{\Omega}$ mais uma vez assume o papel de trocar linhas de $\partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}$ aos pares e com os sinais corretos, sintetizando assim a estrutura das equações de Hamilton. Para vermos isso claramente e dirimirmos quaisquer dúvidas sobre o que de fato representa a Eq. (5.200), escrevemo-la novamente de maneira ainda mais explícita, abrindo os blocos 2×2 da Eq. (5.199) pelo uso da definição de η_j [Eq. (5.190)], obtendo

assim

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_j \\ \dot{p}_j \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{p}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{q_1} \mathcal{H} \\ \partial_{p_1} \mathcal{H} \\ \partial_{q_2} \mathcal{H} \\ \partial_{p_2} \mathcal{H} \\ \vdots \\ \partial_{q_j} \mathcal{H} \\ \partial_{p_j} \mathcal{H} \\ \vdots \\ \partial_{q_N} \mathcal{H} \\ \partial_{p_N} \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{p_1} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_1} \mathcal{H} \\ \partial_{p_2} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_2} \mathcal{H} \\ \vdots \\ \partial_{p_j} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_j} \mathcal{H} \\ \vdots \\ \partial_{p_N} \mathcal{H} \\ -\partial_{q_N} \mathcal{H} \end{pmatrix}. \quad (5.201)$$

E paramos por aqui: tentar tornar a equação ainda mais explícita poderia ser entendido como atentado ao pudor! De qualquer maneira, a forma sucinta da Eq. (5.200) a torna muito mais atraente²⁸.

O maior benefício da representação simplética é nos remeter a construções *geométricas* e *algébricas* da dinâmica. Sabendo que a matriz Ω sintetiza em essência o formato das equações de Hamilton, podemos tentar definir as transformações canônicas impondo a preservação de sua forma, como veremos a seguir.

5.3.1 Condições diretas de canonicidade

Deduzimos logo no início de nossa discussão sobre as transformações canônicas [Eqs. (5.93) e (5.94)] as condições gerais a serem satisfeitas para que sejam preservadas as equações de Hamilton. A mesma dedução pode ser realizada de maneira mais geométrica na representação simplética.

Consideramos dois espaços de fase η e η' conectados por uma transformação canônica. Valem então por princípio as equações de Hamilton em ambos os espaços,

$$\dot{\eta} = \Omega \partial_{\eta} \mathcal{H}(\eta) \quad \text{e} \quad \dot{\eta}' = \Omega \partial_{\eta'} \mathcal{H}(\eta'). \quad (5.203)$$

em que tomamos a hamiltoniana como independente do tempo. As condições gerais impostas sobre as transformações canônicas são determinadas levando-se formalmente uma dessas equações na outra, pelo uso

²⁸Existe ainda outra maneira usual de se generalizar a Eq. (5.197) de 2 para $2N$ dimensões. Reunimos as coordenadas em matriz coluna preenchendo-a com as posições q_j do índice 1 ao N e com os momentos p_j do índice $N+1$ ao $2N$. As generalizações da Eq. (5.198) nesse novo formato seriam

$$\eta = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ q_N \\ \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_N \end{pmatrix}, \quad \partial_{\eta} = \begin{pmatrix} \partial_{q_1} \\ \vdots \\ \partial_{q_N} \\ \partial_{p_1} \\ \vdots \\ \partial_{p_N} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{1}_N \\ -\mathbf{1}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix}, \quad (5.202)$$

em que $\mathbf{0}_N$ é a matriz nula $N \times N$ e $\mathbf{1}$ é a matriz identidade de mesma dimensão. A forma simplética Ω assim representada também possui as propriedades apontadas pela Eq. (5.194), e as equações de Hamilton ainda se escrevem segundo a Eq. (5.200). Preferimos no entanto o formato da Eq. (5.197) por reunir de maneira simples as coordenadas $\{q_j, p_j\}$ usualmente associadas a uma única partícula, facilitando assim a distinção por blocos entre operações *locais* (i.e. que atuam apenas sobre uma partícula) e *não-locais* (i.e. que afetam mais de uma partícula), algo de especial relevância em mecânica quântica.

das equações de transformação e suas inversas,

$$\eta_j = \eta_j(\boldsymbol{\eta}') \quad \leftrightarrow \quad \eta'_j = \eta'_j(\boldsymbol{\eta}). \quad (5.204)$$

Escolhemos partir da primeira expressão da Eq. (5.203) para reescrevê-la em termos das coordenadas η'_j (o mesmo resultado é encontrado partindo-se da segunda expressão). Calculamos primeiramente a derivada temporal de η_j para obter, pela regra da cadeia,

$$\dot{\eta}_j(\{\eta'_{j'}\}) = \sum_{j'} \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta'_{j'}} \dot{\eta}'_{j'}, \quad (5.205)$$

onde vemos aparecerem as derivadas parciais $\partial \eta_j / \partial \eta'_{j'}$ da transformação $\eta(\{\eta'_{j'}\})$ entre os dois espaços de fase. Esses termos são comumente reunidos na *matriz jacobiana* \mathbf{J} da transformação, definida como

$$J_{jj'} := \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta'_{j'}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{J} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta'_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta'_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_N}{\partial \eta'_1} & \cdots & \frac{\partial \eta_N}{\partial \eta'_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \eta'_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_N \end{pmatrix} = \partial_{\boldsymbol{\eta}'}(\boldsymbol{\eta}^T). \quad (5.206)$$

Com essa definição, a Eq. (5.205) se escreve em forma matricial como

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}'. \quad (5.207)$$

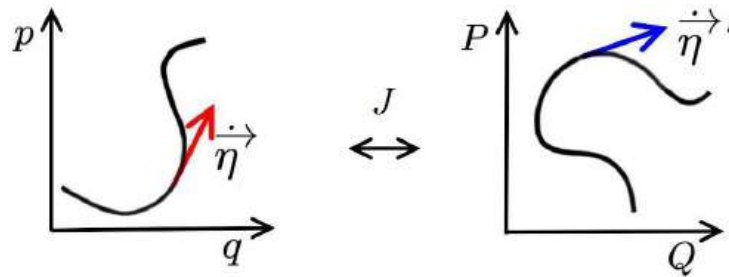


Figura 5.4: A matriz jacobiana leva os vetores tangentes $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ à trajetória no espaço de fase $\boldsymbol{\eta}$ em vetores tangentes $\dot{\boldsymbol{\eta}}'$ à trajetória no espaço de fase $\boldsymbol{\eta}'$.

O significado geométrico dessa expressão se torna claro no espaço de fase, onde as matrizes coluna $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ podem ser identificadas a vetores velocidades, i.e. $\boldsymbol{\eta} \equiv \vec{v}$ e $\boldsymbol{\eta}' \equiv \vec{v}'$. Como as velocidades são sempre tangentes às curvas de trajetória (Fig. 5.4), a Eq. (5.207) representa um mapa, realizado pela matriz jacobiana, entre os vetores tangentes às trajetórias do sistema mecânico nesses dois espaços de fase.

A segunda derivada de que precisamos para transformar a equação canônica para $\boldsymbol{\eta}$ é

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_j} = \sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta'_{j'}} \frac{\partial \eta'_{j'}}{\partial \eta_j}, \quad (5.208)$$

em que reconhecemos a matriz jacobiana²⁹ $\mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1}$ da transformação inversa $\eta'_j(\{\eta_j\})$. Essa expressão se

²⁹O mapa inverso $\boldsymbol{\eta}' \mapsto \boldsymbol{\eta}$, dado no caso da derivada temporal por

$$\dot{\eta}'_{j'} = \sum_j \frac{\partial \eta'_{j'}}{\partial \eta_j} \dot{\eta}_j \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}' = \mathbf{J}' \dot{\boldsymbol{\eta}}, \quad \text{com } \mathbf{J}' := \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta'_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \eta'_1}{\partial \eta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta'_N}{\partial \eta_1} & \cdots & \frac{\partial \eta'_N}{\partial \eta_N} \end{pmatrix},$$

torna, em representação matricial,

$$\partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H} = (\mathbf{J}^{-1})^T \partial_{\boldsymbol{\eta}'} \mathcal{H}, \quad (5.209)$$

em que a transposição de \mathbf{J}^{-1} se faz necessária pelo fato de ser a soma da Eq. (5.208) realizada no índice de linha da matriz.

Juntamos então esses resultados para escrevermos a equação canônica para $\boldsymbol{\eta}$,

$$\text{Eq. (5.203) : } \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}) \quad \xrightarrow{\text{Eqs. (5.207) e (5.209)}} \quad \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}' = \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{J}^{-1})^T \partial_{\boldsymbol{\eta}'} \mathcal{H}. \quad (5.210)$$

Mas vale por hipótese também a equação canônica no espaço de fase $\boldsymbol{\eta}'$ [Eq. (5.203)], i.e. $\dot{\boldsymbol{\eta}}' = \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}'} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}')$. Usando essa expressão, a Eq. (5.210) estabelece como condição direta de canonicidade a identidade

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{J}^{-1})^T. \quad (5.211)$$

Essa expressão pode ainda ser escrita de forma alternativa pelo uso das propriedades da forma simplética [Eq. (5.194)],

$$\boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{J}^{-1})^T. \quad (5.212)$$

Lembrando que a forma simplética é uma matriz ortogonal, o membro esquerdo da Eq. (5.212) representa uma rotação da matriz jacobiana no espaço de fase, e de fato uma rotação bem simples. Pela maneira como $\boldsymbol{\Omega}$ é construída, em termos da soma direta de N formas simpléticas $\boldsymbol{\omega}$, a rotação produzida por $\boldsymbol{\Omega}$ é na verdade um conjunto de N rotações independentes, cada qual agindo sobre um par conjugado: a matriz $\boldsymbol{\omega}$ leva $p_j \mapsto q_j$ e $q_j \mapsto -p_j$, e portanto representa uma rotação de $\pi/2$.

Como consequência, a Eq. (5.211) se separa em um conjunto de condições individuais para os blocos 2×2 de cada espaço de fase restrito. Usamos a seguir a forma explícita da Eq. (5.190) para as matrizes de coordenadas $\boldsymbol{\eta}_j$ e $\boldsymbol{\eta}'_j$ a fim de tornar a expressão facilmente reconhecível, escrevendo-as em termos das variáveis de espaço de fase restritos $\boldsymbol{\eta}_j = \{q_j, p_j\}$ e $\boldsymbol{\eta}'_j = \{Q_j, P_j\}$, i.e.

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{pmatrix} q_j \\ p_j \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\eta}'_j = \begin{pmatrix} Q_j \\ P_j \end{pmatrix}. \quad (5.213)$$

Definimos então cada bloco 2×2 da matriz jacobiana e de sua inversa como

$$\mathbf{J}_{j,j'} := \begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} & \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_{j,j'}^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial Q_{j'}} & \frac{\partial q_j}{\partial P_{j'}} \\ \frac{\partial p_j}{\partial Q_{j'}} & \frac{\partial p_j}{\partial P_{j'}} \end{pmatrix}. \quad (5.214)$$

Cada condição j, j' implicada pela Eq. (5.211) se torna nessa notação

$$\mathbf{J}_{j,j'} \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{J}_{j,j'}^{-1})^T, \quad \forall j, j'. \quad (5.215)$$

é produzido pela matriz inversa de \mathbf{J} , pois

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}' = \mathbf{J}' \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad \xrightarrow{\text{Eq. (5.207)}} \quad \mathbf{J}' \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1}.$$

Assim, a matriz jacobiana da transformação inversa é representada pela matriz inversa da transformação original.

Realizando explicitamente o produto de matrizes, i.e.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} & \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \\ \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} & \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial Q_{j'}} & \frac{\partial p_j}{\partial Q_{j'}} \\ \frac{\partial q_j}{\partial P_{j'}} & \frac{\partial p_j}{\partial P_{j'}} \end{pmatrix}, \quad (5.216)$$

chegamos ao resultado³⁰

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} & \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \\ -\frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} & \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_j}{\partial P_{j'}} & \frac{\partial p_j}{\partial P_{j'}} \\ -\frac{\partial q_j}{\partial Q_{j'}} & -\frac{\partial p_j}{\partial Q_{j'}} \end{pmatrix}. \quad (5.217)$$

Essa expressão matricial sintetiza as condições que havíamos obtidos nas Eqs. (5.93) e (5.94), como esperado.

5.3.2 Preservação da forma simplética

É possível seguir uma rota alternativa para impor a validade concomitante das equações canônicas nos espaços de fase $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$, colocando a preservação da forma simplética $\boldsymbol{\Omega}$ no centro da canonicidade das transformações.

Partimos dessa vez da equação para $\dot{\boldsymbol{\eta}}$, dada pela Eq. (5.207), e vamos fazer o ‘caminho reverso’ de encontrar sua equação canônica supondo que vale a equação canônica para $\boldsymbol{\eta}'$. Obtemos

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\eta}}' \stackrel{\text{Eq. (5.203)}}{=} \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}'} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}'). \quad (5.218)$$

A derivada parcial da hamiltoniana pode ser reescrita em termos das coordenadas $\boldsymbol{\eta}$ pela regra da cadeia, que em forma matricial utiliza a mesma matriz jacobiana \mathbf{J} , pois

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}'_j} = \sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}_{j'}} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}_{j'}}{\partial \boldsymbol{\eta}'_j} \quad \Rightarrow \quad \partial_{\boldsymbol{\eta}'} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}') = \mathbf{J}^T \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}). \quad (5.219)$$

Substituímos então essa expressão na Eq. (5.218) para escrever

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}^T \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}). \quad (5.220)$$

Mas a equação canônica para $\boldsymbol{\eta}$ vale por hipótese, i.e.

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}(\boldsymbol{\eta}). \quad (5.221)$$

Assim, a validade simultânea das equações canônicas nos espaços de fase $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\eta}'$ implica que a transformação canônica a levar um em outro, aqui representada pela matriz jacobiana, precisa preservar a forma simplética³¹,

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}^T = \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.222)$$

Uma matriz que transforma por congruência a forma simplética nela mesma é chamada *matriz simplética*. Portanto, toda transformação canônica é simplética. Podemos então identificar a condição de canonicidade como equivalente à condição de ‘simplecticidade’.

³⁰As expressões mais simples que aparecem para os espaços de fase restritos nos permitem entender em palavras a prescrição da Eq. (5.211). Ela requer que troquemos apenas os *denominadores* de cada membro segundo as regras $p_j \rightarrow q_j$, $q_j \rightarrow -p_j$, $Q_j \rightarrow P_j$ e $P_j \rightarrow -Q_j$, e que o segundo membro seja transposto.

³¹Notemos que essa é apenas outra maneira de expressarmos a condição de canonicidade obtida na Eq. (5.211).

Transformações canônicas como transformações simpléticas

A preservação da forma simplética nos oferece uma maneira alternativa de testar se uma dada transformação é ou não canônica. Aplicamos a título de ilustração a Eq. (5.222) às transformações infinitesimais da Eq. (5.177), que reproduzimos aqui por conveniência

$$Q_j = q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \quad \text{e} \quad P_j = p_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j}. \quad (5.223)$$

Notemos que a transformação infinitesimal conecta apenas espaços $\{q_j, p_j\}$ e $\{Q_j, P_j\}$ de mesmo índice j , de maneira que sua matriz jacobiana é bloco-diagonal,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{J}_j & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_j & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_N \end{pmatrix}. \quad (5.224)$$

Isso precisa ser assim para que a transformação se torne a identidade para $\epsilon = 0$. A verificação da Eq. (5.222) se torna então muito mais simples, bastando testar cada bloco \mathbf{J}_j da matriz jacobiana.

Mas, antes disso, é conveniente escrever as transformações de coordenadas da Eq. (5.223) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} Q_j \\ P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_j} \\ p_j - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\eta} + \epsilon \boldsymbol{\omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} G. \quad (5.225)$$

Seguindo a definição da Eq. (5.206), a matriz jacobiana da transformação canônica infinitesimal se escreve

$$\mathbf{J}_j = \partial_{\boldsymbol{\eta}} (\boldsymbol{\eta}')^T = \partial_{\boldsymbol{\eta}} (\boldsymbol{\eta}^T + \epsilon (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T G) = \mathbf{1} + \epsilon \partial_{\boldsymbol{\eta}} (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T G, \quad (5.226)$$

em que a matriz de operadores diferenciais assume a forma explícita

$$\partial_{\boldsymbol{\eta}} (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} \\ \frac{\partial}{\partial p_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_j} & \frac{\partial}{\partial p_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} & \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial p_j} \\ \frac{\partial^2}{\partial p_j \partial q_j} & \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} \end{pmatrix}, \quad (5.227)$$

e toda a informação sobre a transformação infinitesimal se encontra na matriz envolvendo a função geradora G , dada explicitamente por

$$\partial_{\boldsymbol{\eta}} (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial p_j \partial q_j} & \frac{\partial^2 G}{\partial p_j^2} \\ -\frac{\partial^2 G}{\partial q_j^2} & -\frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_j} \end{pmatrix}. \quad (5.228)$$

Verificamos finalmente a simpleticidade da matriz jacobiana da transformação infinitesimal dada pela Eq. (5.226). Aplicando a condição da Eq. (5.222), obtemos

$$\mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega} \mathbf{J}_j^T = (\mathbf{1} + \epsilon \partial_{\boldsymbol{\eta}} (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T G) \boldsymbol{\omega} (\mathbf{1} + \epsilon \boldsymbol{\omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} (\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T G), \quad (5.229)$$

em que usamos o fato de que a matriz $\partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T$ é simétrica [Eq. (5.227)], i.e. $[\partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T]^T = \partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T$. Usando as propriedades da forma simplética [Eq. (5.194)] e o fato de que G é uma função escalar, o produto dessas matrizes fornece

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_j \boldsymbol{\omega} \mathbf{J}_j^T &= \boldsymbol{\omega} + \epsilon (\partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^2 \partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T) G + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \boldsymbol{\omega} + \epsilon (\partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T - \partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T) G + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \boldsymbol{\omega} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.230)$$

Esse resultado atesta que transformações canônicas infinitesimais preservam a forma simplética até $\mathcal{O}(\epsilon)$, i.e. estão associadas a matrizes jacobianas simpléticas.

Evolução temporal hamiltoniana como transformação simplética

A evolução temporal do sistema mecânico no espaço de fase ocorre segundo as equações de Hamilton, que segue expressão similar à Eq. (5.225). De fato, podemos entender a evolução hamiltoniana como um mapa do espaço de fase $\{q_j(t), p_j(t)\}$ em sua versão $\{Q_j(t), P_j(t)\} := \{q_j(t + dt), p_j(t + dt)\}$ atualizada para o instante $t + dt$, de acordo com a transformação

$$\begin{pmatrix} Q_j(t) \\ P_j(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_j(t + dt) \\ p_j(t + dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_j(t) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dt \\ p_j(t) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dt \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta}(t + dt) = \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H} dt, \quad (5.231)$$

uma expressão que de fato apenas repete a equação canônica $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} \mathcal{H}$.

Como consequência, a jacobiana da evolução infinitesimal no tempo segue a forma bloco-diagonal da Eq. (5.224) e, portanto, cada espaço de fase restrito j se transforma seguindo a matriz jacobiana

$$\mathbf{J}_j = \mathbf{1} + \epsilon \partial_{\boldsymbol{\eta}}(\partial_{\boldsymbol{\eta}})^T \boldsymbol{\omega}^T \mathcal{H}, \quad (5.232)$$

que obviamente produz a condição da Eq. (5.230) e é, portanto, simplética.

Com isso podemos concluir que a evolução hamiltoniana pode ser vista como uma transformação contínua, canônica ou simplética, do espaço de fase. Do ponto de vista da estrutura matemática da teoria, esse reconhecimento nos permite entender a dinâmica de maneiras diferentes para escolher a mais conveniente de acordo com o contexto.

A conexão existente entre transformações canônicas e simpléticas nos permite inferir que as propriedades de grupo das primeiras são herdadas pelas últimas, uma vez que existe um mapa unívoco entre ambas. Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir ainda que as matrizes utilizadas para representar as transformações simpléticas também formam um grupo³², dada a relação unívoca existente entre as transformações simpléticas no espaço de fase e essas matrizes de representação. Outras consequências dessas conexões aparecem ao escrevermos a estrutura da teoria de outra forma ainda, em termos de uma álgebra de Lie.

³²Esse grupo é denotado em nosso caso como $\text{Sp}(2N, \mathfrak{R})$, em que se especifica a dimensão $2N$ das matrizes e o corpo de números sobre o qual são construídas (reais).

Preservação de volume no espaço de fase na dinâmica hamiltoniana

O fato de que a evolução temporal hamiltoniana segue uma transformação simplética do espaço de fase nos motiva a investigar o significado físico da condição de preservação da forma simplética estabelecida pela Eq. (5.222).

Sabemos do cálculo diferencial básico que o determinante da matriz jacobiana, comumente chamado de ‘jacobiano’, fornece a razão entre as áreas infinitesimais dos espaços relacionados pela transformação considerada. Um elemento de volume $d\eta^{2N} = \Pi_j dq_j^N dp_j^N$ no espaço de fase $\boldsymbol{\eta}$ se relaciona a seu correspondente $d\eta'^{2N}$ em $\boldsymbol{\eta}'$ pela relação

$$d\eta'^{2N} = \det(\mathbf{J}) d\eta^{2N}, \quad (5.233)$$

em que $\det(\mathbf{J})$ é o determinante da matriz jacobiana da transformação.

No entanto, se a transformação advém de evolução hamiltoniana, a matriz \mathbf{J} é simplética, ou seja, representa uma transformação canônica, e deve respeitar a condição simplética. Tomando o determinante da Eq. (5.222), obtemos

$$\det(\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}^T) = \det\boldsymbol{\Omega}. \quad (5.234)$$

Mas o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes, fornecendo

$$\det(\mathbf{J})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(\mathbf{J}) = \pm 1, \quad (5.235)$$

já que $\det(\boldsymbol{\Omega}) = 1$. Escolhemos o sinal correto de $\det(\mathbf{J})$ impondo que a evolução temporal por um tempo $dt \rightarrow 0$ produza a transformação identidade, cujo determinante é obviamente positivo. Concluímos então que

$$\det(\mathbf{J}) = 1. \quad (5.236)$$

Tendo em vista a Eq. (5.233), esse resultado implica para uma transformação canônica genérica e, em especial, para a evolução temporal hamiltoniana, na propriedade

$$d\eta'^{2N} = d\eta^{2N}, \quad (5.237)$$

de maneira que pedaços infinitesimais do espaço de fase não mudam de volume! Esse resultado é uma forma de se interpretar o teorema de Liouville da mecânica estatística, que estabelece como constante a densidade de estados na vizinhança de qualquer ponto em evolução hamiltoniana no espaço de fase.

5.3.3 Estrutura geométrica da dinâmica hamiltoniana

As conexões construídas até este ponto nos permitem vislumbrar algumas características geométricas da evolução hamiltoniana no espaço de fase. Para efeito de comparação, mencionemos primeiramente como elementos análogos são tratados nas formulações newtoniana e lagrangiana da mecânica.

No caso newtoniano (Fig. 5.5a), as trajetórias são objetos quase concretos beirando o intuitivo: correspondem aos próprios caminhos percorridos por partículas no Espaço. Cada partícula desenha a sua própria³³, e nada impede trajetórias diferentes de se cruzarem. De fato, existem infinitas possibilidades de

³³Notemos que cada curva da Fig. 5.5a representa o caminho espacial de uma partícula individual. Nos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, a trajetória em espaços abstratos se refere à evolução de todo o sistema mecânico, e os caminhos das partículas no Espaço podem ser reconstruídos com base nessa informação.

futuro e de passado para uma partícula partindo de determinado ponto no Espaço, já que a variação da posição depende do momento, uma grandeza ‘implícita’ das trajetórias.

Do ponto de vista matemático, as trajetórias newtonianas são essencialmente descritas por operações de translação no Espaço, embora essa forma de pensar seja raramente utilizada no formalismo. É verdade que podemos refinar um pouco esse quadro considerando corpos rígidos, para os quais precisamos invocar também a matemática das rotações, com o uso de grupos de transformações (representados por matrizes ortogonais) que preservam ângulos e distâncias. Mas em geral a matemática newtoniana se restringe a tratar equações diferenciais.

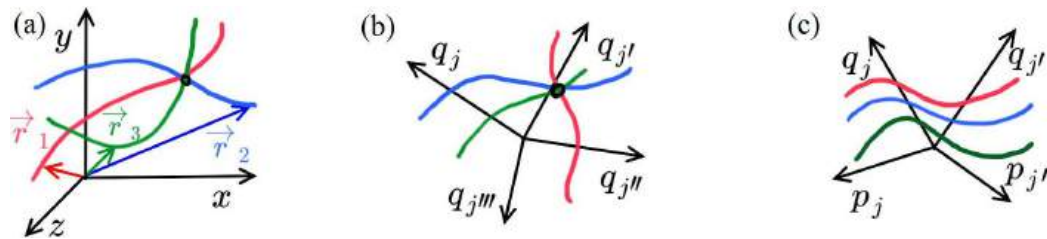


Figura 5.5: Aparência das trajetórias físicas (curvas azul, vermelha e verde) nas formulações (a) newtoniana, (b) lagrangiana e (c) hamiltoniana da mecânica. Os círculos pretos indicam pontos de cruzamento entre as trajetórias no espaço empregado pelo formalismo correspondente.

Na mecânica lagrangiana (Fig. 5.5b), o advento de espaço de configurações mais abstrato torna a trajetória uma propriedade do sistema mecânico como um todo. E embora possamos ainda escolher pensar nas trajetórias de partículas individuais como ocorrendo em ‘planos de corte’ desse espaço, a verdade é que uma curva nele desenhada percorre as N dimensões necessárias para descrever o sistema mecânico completo. No entanto, assim como na visão newtoniana, saber o ponto onde se encontra o sistema em determinado instante não permite prever seu futuro ou passado, uma vez que estes dependem também da velocidade generalizada com que a curva é percorrida naquele instante, um pedaço de informação tomado à parte por não pertencer às coordenadas empregadas na descrição do sistema. E, por esse motivo, em cada ponto do espaço de configurações cruzam-se infinitas trajetórias, cada qual associada a uma possibilidade de futuro e passado, tal como no caso newtoniano. Assim, nesse aspecto, a adição conceitual do formalismo lagrangiano é estender o espaço onde caminha o sistema para comportar sua descrição completa de forma sintética.

A trajetória do sistema no espaço de configurações é ainda descrita por operações de translação (mesmo para corpos rígidos!), porém no espaço de configurações, cuja dinâmica não pode ser descrita em termos de princípios globais simples. Equações diferenciais ainda guardam importância central para a determinação dessas trajetórias, embora uma única função, a lagrangiana, sintetize a dedução dessas equações em quaisquer conjunto de coordenadas escolhido, outra característica poderosa do formalismo lagrangiano.

Finalmente, o espaço de fase hamiltoniano possui propriedades marcadamente distintas dessas (Fig. 5.5c). Dissemos que a evolução temporal hamiltoniana pode ser entendida como um mapa canônico ou simplético entre o espaço de fase num certo tempo e ele mesmo em outro instante, formando um grupo de transformações. Pelo fato de sempre estar disponível a transformação inversa, os mapas realizados pela dinâmica hamiltoniana são unívocos, i.e. pode-se associar a cada ponto do espaço de fase um novo ponto no espaço de fase transformado. Isso estabelece que a dinâmica não pode misturar trajetórias distintas (ou os mapas mencionados não seriam inversíveis): curvas de trajetória não se cruzam no espaço de fase. É por isso

possível determinar todo o passado ou futuro do sistema conhecendo-se apenas sua localização instantânea no espaço de fase e, obviamente, a função hamiltoniana do sistema, dando-nos pela primeira vez a sensação de que o espaço de configurações de fato colige toda a informação necessária à descrição do sistema.

Vimos também que volumes do espaço de fase se mantêm constantes por transformações canônicas ou simpléticas e, conseqüentemente, pela dinâmica. Isso significa que em qualquer instante podemos definir uma superfície fechada no espaço de fase e seguir sua evolução temporal como se fosse uma bolha deformável de líquido incompressível em movimento laminar dentro de um fluido. Como as trajetórias no espaço de fase não se cortam umas às outras, um ponto que se encontre no interior desse volume jamais pode deixá-lo, e vice-versa para pontos fora dele: a evolução temporal do espaço de fase segue um *fluxo ordenado*³⁴. A mecânica hamiltoniana nos fornece uma visão qualitativa unificadora das leis fundamentais envolvidas no movimento³⁵.

As operações matemáticas aplicáveis à compreensão da dinâmica se tornam muito mais ricas no formalismo hamiltoniano, por envolverem transformações contínuas com desdobramentos geométricos e algébricos. A dinâmica hamiltoniana ocorre em torno de um produto escalar antissimétrico, e envolve apenas transformações capazes de preservar uma forma simplética. Essa representação da dinâmica sintetiza propriedades como o não cruzamento de trajetórias e a conservação de volumes no espaço de fase, e começa a tocar em simetrias algébricas que precisarão ser respeitadas também em extensões mais fundamentais das leis clássicas do movimento, como na mecânica quântica.

Fluxos hamiltonianos de regiões do espaço de fase como imagem fiel da dinâmica clássica encontram analogia intuitiva no escoamento de fluidos ideais incompressíveis, mas também na teoria ondulatória e na ótica geométrica. Os caminhos conceituais abertos pela mecânica hamiltoniana são ricos e inumeráveis.

³⁴Ou seja, a mecânica hamiltoniana torna a dinâmica a coisa mais previsível e enfadonha do mundo? Não, não tão rápido! Apesar da aparência de ordem e progresso de uma trajetória individual bem-sucedida que se queira seguir e traçar do infinito passado ao infinito futuro, a verdade é que existe um importante aspecto coletivo da forma como o espaço de fase se comporta: Como duas trajetórias se distanciam uma da outra durante a evolução hamiltoniana? Um fato surpreendente da dinâmica hamiltoniana é a existência do ‘caos’. No regime caótico, duas trajetórias que se aproximem infinitesimalmente num instante de tempo qualquer, para nossa surpresa, divergirão *exponencialmente* uma da outra. Sistemas dinâmicos complexos, por exemplo tais como os detentores de não-linearidades na hamiltoniana ou mecanismos de *feedback*, apresentam esse tipo de dependência sensível das condições iniciais (capturado pela ideia do ‘efeito borboleta’ na previsão do tempo). Você consegue coadunar a ordem mencionada acima (por exemplo, a conservação de volumes no espaço de fase, rigorosamente deduzida) com trajetórias que se afastam exponencialmente umas das outras no tempo? Pois é, o espaço de fase se mistura de forma tempestuosa no regime caótico. E isso não depende de escala, valendo mesmo para volumes infinitesimais. Claro que, como físicos, já podemos imaginar aonde isso vai nos levar: Volumes infinitesimais do espaço de fase matemático não existem fisicamente: Em algum momento teremos de falar da granularidade do mundo (a mensagem mais importante que Feynman deixaria para as futuras gerações caso todo o resto da ciência fosse esquecido!): Partículas. Mas se continuarmos insistindo em explorar volumes cada vez menores do espaço de fase, teremos de lidar com diferenças de posições e momentos tão pequenas que essas partículas se comportarão novamente como algo diferente: Ondas. E a mecânica quântica é linear por construção, e portanto o caos nesse limite não pode existir. Novamente: Não tão rápido! Algumas das propriedades de ‘mistura’ tempestuosa do espaço de fase podem continuar a persistir, e de forma ainda mais extrema, uma vez que sistemas formados por algumas partículas quânticas também se emaranham loucamente. Mas se começarmos a considerar cada vez mais particular, estaremos voltando sem perceber ao limite clássico em que o sistema se torna macroscópico... Curioso? Existe uma tensão fundamental aí que é hoje tema de intensa pesquisa. A física da fronteira entre os mundos clássico e quântico desafia a compreensão em termos de regimes gerais da física fora desse limbo: Existe caos ou não, e em que sentido? Valem ainda as poderosas leis tão gerais da termodinâmica, e em que sentido? Esses sistemas termalizam em certo ponto? Que parâmetros são importantes para vermos aparecerem as características clássicas da dinâmica hamiltoniana a partir da dinâmica ondulatória mais fundamental?

³⁵E, de forma mais geral, da dinâmica como um todo.

5.4 Colchetes de Poisson: formulação algébrica da dinâmica hamiltoniana

A interpretação da evolução temporal hamiltoniana como uma transformação canônica contínua nos permitiu conectar a dinâmica à estrutura geométrica de um espaço de fase em metamorfose ambulante. Rumando a outro nível conceitual, talvez ainda mais fundamental, buscamos entender as transformações simpléticas a partir de sua estrutura algébrica³⁶.

O primeiro passo consiste em buscar uma quantidade invariante por transformações canônicas, chamada de *invariante canônico*, capaz de produzir uma construção algébrica ‘interessante’, o que em nosso caso significa relacionar de maneira sucinta várias grandezas dinâmicas³⁷.

5.4.1 Motivação e definição

A tentativa mais simples possível considera alguma quantidade escalar. No caso da mecânica hamiltoniana, buscamos definir algo como um produto interno capaz de preservar o mesmo tipo de informação algébrica codificada na matriz simplética: por um lado, a troca de uma coordenada por sua conjugada deve trocar o sinal da expressão considerada; por outro, transformações agindo sobre uma coordenada são geradas por derivadas parciais com relação à sua canonicamente conjugada.

Uma quantidade escalar que se caracteriza claramente como um invariante canônico e que possui essas propriedades é o determinante da condição simplética [Eq. (5.211)]. Este fornece expressão fatorável por conta da estrutura bloco-diagonal da forma simplética, tornando-se na verdade um produto de determinantes de matrizes 2×2 para pares conjugados de coordenadas [Eq. (5.215)]. Cada fator desse determinante fornece

$$\det(\mathbf{J}_{j,j'}\boldsymbol{\omega}) = \det \begin{pmatrix} -\frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} & \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \\ \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} & \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}} \end{pmatrix} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_{j'}} \frac{\partial P_j}{\partial p_{j'}} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_{j'}} \frac{\partial P_j}{\partial q_{j'}}. \quad (5.238)$$

Já podemos ver que ao menos a estrutura matemática dessa expressão se comporta como esperado: trocar posições por momentos inverte seu sinal. Mas ela só será útil caso apareça de forma corriqueira em contextos importantes do formalismo hamiltoniano. Vejamos se isso ocorre.

³⁶Com a palavra ‘álgebra’ queremos nos referir aqui de forma bem ampla a um conjunto de objetos matemáticos relacionados por regras bem definidas. Esses objetos são escolhidos em nosso caso para representar quantidades físicas mensuráveis, e as relações algébricas entre eles podem servir tanto para imitar a evolução temporal das mesmas quanto sintetizar propriedades de conservação ou simetria através de condições simples.

³⁷Um paralelo do que gostaríamos de atingir na formulação da mecânica pode ser realizado com a álgebra das rotações. No contexto do movimento, essas operações representam mudanças de orientação de um corpo extenso no Espaço, e, como vimos na dinâmica dos corpos rígidos, podem ser mapeadas em objetos matemáticos de diversas formas diferentes. A formulação algébrica consiste em entendê-las como operações que mantêm invariante o produto escalar vetorial (produto interno), i.e. comprimentos de vetores e ângulos entre eles. Descobrimos por essa definição que a álgebra das rotações segue aquela de matrizes ortogonais 3×3 , um mapa que pode trazer vantagem e.g. na determinação de propriedades gerais dessas operações, tal como formarem um grupo; de forma análoga, poderíamos utilizar em vez disso a álgebra dos quatêrnions para e.g. implementar numericamente problemas reais de perspectiva num jogo de computador. A vantagem de usarmos definições sucintas é reduzir à essência as características de um conjunto de objetos de interesse, e com isso poder mapeá-los em outros, para fins diversos.

Na dinâmica, estamos principalmente interessados em determinar como grandezas físicas evoluem no tempo. Por exemplo, poderíamos querer conhecer como uma função $u(q, p)$ do espaço de fase (e.g. momento angular de uma partícula) se comporta durante o movimento, e portanto estaríamos interessados na quantidade

$$\frac{d}{dt}u(q, p) = \frac{\partial u}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial u}{\partial p}\dot{p}, \quad (5.239)$$

em que utilizamos a regra da cadeia da derivação. Mas as equações de Hamilton implicam na identidade

$$\frac{d}{dt}u(q, p) = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad (5.240)$$

que se assemelha bastante em forma à Eq. (5.238). De fato, as derivadas parciais são tomadas nas duas expressões com relação ao mesmo par canonicamente conjugado e aplicadas em funções do espaço de fase.

Na verdade, dada a conexão entre evolução temporal e transformações contínuas, relação similar deve valer para uma transformação canônica infinitesimal qualquer. A regra da cadeia nos fornece nesse caso

$$du(q, p) = \frac{\partial u}{\partial q}dq + \frac{\partial u}{\partial p}dp. \quad (5.241)$$

Mas as variações dq e dp , para serem canônicas, precisam estar relacionadas a uma função geradora G segundo a prescrição da Eq. (5.177), que nos fornece

$$du(q, p) = \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} \right). \quad (5.242)$$

Obtemos também nesse contexto mais geral algo com a mesma forma da Eq. (5.238). Como uma transformação canônica qualquer pode ser produzida pela concatenação de transformações infinitesimais, devemos concluir que a estrutura matemática da Eq. (5.238) é na verdade mais presente na mecânica hamiltoniana do que pensávamos, o que é interessante e nos motiva a generalizá-la para se tornar compatível com os casos acima.

Isso pode ser feito notando-se que a Eq. (5.238) é simplética ‘duas vezes’ por ter seu sinal invertido tanto pela troca $q_j \leftrightarrow p_j$ quanto $Q_j \leftrightarrow P_j$, o que nos permite eliminar uma dessas dependências e ainda assim manter sua antissimetria. As Eqs. (5.240) e (5.242) nos indicam substituir Q_j e P_j , entendidas implicitamente como funções do espaço de fase $\{q_j, p_j\}$, i.e. $Q_j = Q_j(\{q_j, p_j\})$ e $P_j = P_j(\{q_j, p_j\})$, por funções genéricas quaisquer nesse espaço³⁸.

Definimos os *colchetes de Poisson* dessas funções como

$$[u, v] = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} \right). \quad (5.244)$$

Notemos a forma geral dessa expressão, construída como uma soma de derivadas parciais em que cada termo j envolve um par de coordenadas canonicamente conjugadas. A antissimetria está codificada no sinal negativo que os colchetes de Poisson recebem quando trocamos entre si um par conjugado $q_j \leftrightarrow p_j$;

³⁸Tomar o caminho oposto de substituir $\{q_j, p_j\}$ por funções do espaço de fase leva aos colchetes de Lagrange,

$$\{u, v\} = \frac{\partial q_j}{\partial u}\frac{\partial p_j}{\partial v} - \frac{\partial p_j}{\partial u}\frac{\partial q_j}{\partial v}, \quad (5.243)$$

também invariantes canônicos. O uso dos colchetes de Poisson é preferível por encontrar ramificações mais profundas na teoria.

na verdade, como a Eq. (5.244) estabelece ser essa troca equivalente a mudar a ordem dos argumentos, a propriedade de antissimetria também aparece sob a forma

$$[u, v] = -[v, u]. \quad (5.245)$$

Os colchetes de Poisson podem ser representados de forma sucinta com o uso da matriz ∂_{η} de operadores diferenciais da Eq. (5.198),

$$[u, v] = (\partial_{\eta} u)^T \Omega \partial_{\eta} v, \quad (5.246)$$

em que a forma simplética Ω produz a conexão desejada entre troca de sinal e de variáveis canônicas nas parcelas do somatório.

5.4.2 Condições de canonicidade

Os colchetes de Poisson nos oferecem uma nova perspectiva da mecânica hamiltoniana. Para apreciá-la melhor, é interessante refazermos as deduções principais do formalismo hamiltoniano dentro dessa nova linguagem, criando no caminho ainda mais intuição sobre a estrutura da mecânica como teoria.

Certamente uma das principais ideias herdadas da mecânica lagrangiana é a imposição de invariância das equações de movimento por transformações do espaço de configurações. No formalismo hamiltoniano, definimos as transformações canônicas como aquelas capazes de levar um espaço de fase em outro igualmente bom. Os colchetes de Poisson nos permitem tirar o foco da transformação em si e colocá-lo no próprio espaço de fase: em vez de tentarmos caracterizar o que é uma boa transformação, vamos descobrir como se identifica um bom espaço de fase.

Se as equações básicas da mecânica precisam ter a mesma forma em qualquer espaço de fase, podemos começar impondo que os colchetes de Poisson entre duas funções das posições e momentos possuam os mesmos valores independentemente do espaço de fase no qual se calculam, i.e. sejam invariantes canônicos. Queremos impor

$$[u, v]_{\{q_j, p_j\}} = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \stackrel{\text{canonicidade}}{=} \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j} \frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j} \frac{\partial v}{\partial Q_j} \right) = [u, v]_{\{Q_j, P_j\}}. \quad (5.247)$$

Os índices inferiores nos colchetes de Poisson indicam que o espaço de fase no qual devem ser calculados, se $\{q_j, p_j\}$ ou $\{Q_j, P_j\}$. A diferença entre os dois casos é a dependência implícita das funções u e v , que pode ser tanto $u = u(\{q_j, p_j\})$ e $v = v(\{q_j, p_j\})$ quanto $u = u(\{Q_j, P_j\})$ e $v = v(\{Q_j, P_j\})$. Lembremos que a transformação a unir esses dois espaços de fase deve nos permitir escrever as relações $q_j = q_j(\{Q_j, P_j\})$ e $p_j = p_j(\{Q_j, P_j\})$ ou, pela inversa, $Q_j = Q_j(\{q_j, p_j\})$ e $P_j = P_j(\{q_j, p_j\})$.

A Eq. (5.247) nos permite obter as condições de canonicidade, segundo a perspectiva dos colchetes de

Poisson, pela regra da cadeia da derivação. Explicitamente, obtemos

$$\begin{aligned}
[u, v]_{\{q_j, p_j\}} &= \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j} \frac{\partial v}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_{j, j', j''} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial Q_{j'}} \frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} + \frac{\partial u}{\partial P_{j'}} \frac{\partial P_{j'}}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Q_{j''}} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial p_j} + \frac{\partial v}{\partial P_{j''}} \frac{\partial P_{j''}}{\partial p_j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial u}{\partial Q_{j'}} \frac{\partial Q_{j'}}{\partial p_j} + \frac{\partial u}{\partial P_{j'}} \frac{\partial P_{j'}}{\partial p_j} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial Q_{j''}} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial q_j} + \frac{\partial v}{\partial P_{j''}} \frac{\partial P_{j''}}{\partial q_j} \right) \right] \\
&= \sum_{j, j', j''} \left[\frac{\partial u}{\partial Q_{j'}} \frac{\partial v}{\partial Q_{j''}} \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial Q_{j'}} \frac{\partial v}{\partial P_{j''}} \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial q_j} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial P_{j'}} \frac{\partial v}{\partial Q_{j''}} \left(\frac{\partial P_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial u}{\partial P_{j'}} \frac{\partial v}{\partial P_{j''}} \left(\frac{\partial P_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial q_j} \right) \right]. \quad (5.248)
\end{aligned}$$

Por comparação com a Eq. (5.247), essa expressão fornecerá a identidade buscada, i.e. representará colchetes de Poisson também no espaço $\{Q_j, P_j\}$, caso os coeficientes dos produtos de derivadas parciais de u e v satisfaçam as condições bem específicas:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \sum_j \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial Q_{j''}}{\partial q_j} \right) = 0, \\
(ii) \quad & \sum_j \left(\frac{\partial P_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial P_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial q_j} \right) = 0, \\
(iii) \quad & \sum_j \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial q_j} \right) = \delta_{j'j''}, \quad (5.249)
\end{aligned}$$

que nada mais são do que colchetes de Poisson relacionando os dois espaço de fase! São eles:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & [Q_{j'}, Q_{j''}] = 0, \\
(ii) \quad & [P_{j'}, P_{j''}] = 0, \\
(iii) \quad & [Q_{j'}, P_{j''}] = \delta_{j'j''}. \quad (5.250)
\end{aligned}$$

Por sintetizarem a estrutura do espaço de fase sob nova forma, essas relações são chamadas de *colchetes de Poisson fundamentais*, e devem valer quando calculadas em quaisquer espaços de fase ‘bons’. De fato, poderíamos escolher o dois espaços como cópias do mesmo espaço, de onde obteríamos de forma quase trivial a identidade

$$[Q_{j'}, P_{j''}] = \sum_j \left(\frac{\partial Q_{j'}}{\partial Q_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial P_j} - \frac{\partial Q_{j'}}{\partial P_j} \frac{\partial P_{j''}}{\partial Q_j} \right) = \sum_j \delta_{jj'} \delta_{jj''} = \delta_{j'j''}, \quad (5.251)$$

em que usamos apenas o fato de que todos os Q_j e P_j são coordenadas independentes. Retiramos por isso da notação dos colchetes de Poisson os índices $\{q_j, p_j\}$ ou $\{Q_j, P_j\}$.

Obtemos assim como condição de canonicidade um princípio bastante abrangente e simples: todo espaço de fase hamiltoniano válido precisa satisfazer os colchetes de Poisson fundamentais. Eles ‘definem’, por assim dizer, a estrutura matemática do espaço de grandezas físicas fundamentais no qual vale o formalismo hamiltoniano.

A Eq. (5.250) é não apenas equivalente à condição simplética, mas também uma maneira simples de atribuir significado à matriz simplética. De fato, se reunirmos numa matriz \mathbf{M} todos os colchetes de

Poisson fundamentais, obtemos

$$M_{jj'} := [\eta_j, \eta_{j'}] = \begin{pmatrix} [q_1, q_1] & [q_1, p_1] & \dots & [q_1, q_N] & [q_1, p_N] \\ [p_1, q_1] & [p_1, p_1] & \dots & [p_1, q_N] & [p_1, p_N] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [q_N, q_1] & [q_N, p_1] & \dots & [q_N, q_N] & [q_N, p_N] \\ [p_N, q_1] & [p_N, p_1] & \dots & [p_N, q_N] & [p_N, p_N] \end{pmatrix}. \quad (5.252)$$

A Eq. (5.250) impõe a nulidade de quase todos os elementos de \mathbf{M} , exceto por blocos 2×2 da diagonal com a forma

$$\begin{pmatrix} [\eta_{2j}, \eta_{2j}] & [\eta_{2j}, \eta_{2j+1}] \\ [\eta_{2j+1}, \eta_{2j}] & [\eta_{2j+1}, \eta_{2j+1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [q_{2j}, q_{2j}] & [q_{2j}, p_{2j}] \\ [p_{2j}, q_{2j}] & [p_{2j}, p_{2j}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\omega}. \quad (5.253)$$

Devemos concluir então que $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega}$, ou seja,

$$[\eta_j, \eta_{j'}] = \Omega_{jj'}. \quad (5.254)$$

Na formulação da mecânica em termos de colchetes de Poisson, a forma simplética $\boldsymbol{\Omega}$ aparece como a ‘impressão digital’ das relações fundamentais entre as coordenadas formadoras do espaço de fase. Um espaço de fase hamiltoniano, i.e. um espaço de configurações no qual valem as equações de Hamilton, possui como estrutura algébrica básica a matriz de *produtos internos* (tomados como os colchetes de Poisson) prescrita pela forma simplética³⁹.

5.4.3 Transformações canônicas

No tratamento das transformações canônicas infinitesimais, vimos que uma função $u(\boldsymbol{\eta})$ do espaço de fase $\{q_j, p_j\}$ representado pela matriz de coordenadas $\boldsymbol{\eta}$ se transforma como

$$u(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{d}\boldsymbol{\eta}) = u(\boldsymbol{\eta}) + \sum_j \frac{\partial u}{\partial \eta_j} d\eta_j = u(\boldsymbol{\eta}) + (\partial_{\boldsymbol{\eta}} u)^T \mathbf{d}\boldsymbol{\eta}, \quad (5.255)$$

em que a variação $\mathbf{d}\boldsymbol{\eta}$ é produzida por uma função geradora $G(\boldsymbol{\eta})$ segundo a prescrição

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\eta} = \epsilon \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} G. \quad (5.256)$$

Logo, podemos escrever

$$u(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{d}\boldsymbol{\eta}) = u(\boldsymbol{\eta}) + \epsilon (\partial_{\boldsymbol{\eta}} u)^T \boldsymbol{\Omega} \partial_{\boldsymbol{\eta}} G, \quad (5.257)$$

relação que, frisemos, descreve como qualquer função do espaço de fase se modifica por uma transformação canônica infinitesimal.

A ubiquidade dos colchetes de Poisson na mecânica hamiltoniana se estabelece como fato ao poderem ser aplicados também nesse contexto. A expressão matricial da Eq. (5.246) para os colchetes de Poisson possui precisamente a forma genérica da Eq. (5.257) para as transformações canônicas infinitesimais, e por isso podemos escrever

$$u(\boldsymbol{\eta} + \mathbf{d}\boldsymbol{\eta}) = u(\boldsymbol{\eta}) + \epsilon [u(\boldsymbol{\eta}), G(\boldsymbol{\eta})], \quad (5.258)$$

³⁹Uma analogia pode ser traçada com o espaço newtoniano, construído sobre os versores cartesianos. As relações fundamentais do espaço newtoniano da mecânica seriam $\hat{x}_j \cdot \hat{x}_{j'} = \delta_{jj'}$.

expressão que deixa de fazer menção ao espaço de fase específico em que é pensada e passa a valer em qualquer um se a escrevermos ainda como

$$du = \epsilon[u, G], \quad (5.259)$$

em que $du = u(\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\eta}) - u(\boldsymbol{\eta})$ é uma função implícita do espaço de fase de escolha para representá-las, assim como u e G . Ainda outra maneira válida de entender essa relação consiste em escrevê-la como

$$\frac{\partial u}{\partial \epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{du}{\epsilon} = [u, G]. \quad (5.260)$$

Nesse formato, os colchetes de Poisson aparecem como a operação segundo a qual a função geradora G atua sobre a grandeza u para transformá-la, regulada pelo parâmetro ϵ .

O reconhecimento da evolução temporal como uma transformação gerada pela função hamiltoniana \mathcal{H} e controlada pelo parâmetro tempo dt nos permite escrever as próprias equações canônicas em termos dos colchetes de Poisson,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = [\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}], \quad (5.261)$$

um progresso que sedimenta de uma vez a importância dos colchetes de Poisson no formalismo hamiltoniano.

É simples mostrar que as equações de Hamilton, na verdade, podem ser entendidas de forma mais compacta nessa notação, referindo-se à evolução temporal de qualquer função u do espaço de fase,

$$\dot{u} = [u, \mathcal{H}]. \quad (5.262)$$

As equações canônicas se tornam a relação fundamental da evolução temporal⁴⁰, para a qual Eq. (5.262) é aplicada a funções do tipo $u = \eta_j$. Em especial, uma grandeza conservada pela dinâmica é aquela para a qual vale

$$\dot{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad [u, \mathcal{H}] = 0, \quad (5.263)$$

uma relação intuitiva: se a hamiltoniana é a geradora da dinâmica, uma constante do movimento é uma quantidade que se mantém invariante pela transformação produzida pelos colchetes de Poisson com a hamiltoniana.

A solução do movimento para qualquer função u pode ser determinada pela aplicação sucessiva de transformações canônicas infinitesimais, o que equivale a expandir $u(t)$ em série no parâmetro de controle t ,

$$u(t) = u(t_0) + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|_{t_0} (t - t_0)^3 + \dots \quad (5.264)$$

A Eq. (5.262) prescreve como a derivada temporal deve ser conectada a uma transformação no espaço de fase, podendo ser entendida como a identidade

$$\frac{d}{dt} = [\diamond, \mathcal{H}], \quad (5.265)$$

em que o símbolo ‘ \diamond ’ indica onde no membro direito deve ser incluída a função na qual se opera com a derivada no membro esquerdo.

⁴⁰Utilizamos aqui a palavra ‘fundamental’ no sentido de que representam a camada mais basilar da evolução hamiltoniana. De fato, toda função do espaço de fase evolui no tempo como consequência da evolução temporal de seus argumentos, i.e. o espaço de fase, prescrita pelas equações canônicas, já que a Eq. (5.262) pode ser entendida como uma simples aplicação da regra da cadeia e da regra fundamental da Eq. (5.261).

A Eq. (5.265) sintetiza a dinâmica hamiltoniana da seguinte forma: atualizar no tempo uma função qualquer do espaço de fase *equivale* a nela operar com os colchetes de Poisson envolvendo a hamiltoniana. Esses são os dois lados da transformação física a que chamamos evolução temporal. A mecânica hamiltoniana enxerga no tempo o parâmetro de uma transformação formal do espaço de fase gerada pela função hamiltoniana através da aplicação dos colchetes de Poisson.

Utilizamos essa equivalência para reescrever a série da Eq. (5.264) de maneira a obter a solução geral do movimento. Tudo o que precisamos fazer é substituir cada derivada temporal pela aplicação dos colchetes de Poisson com a função hamiltoniana. Notemos apenas que a aplicação de várias operações de derivada temporal deve ser mapeada na aplicação correspondente de vários colchetes de Poisson, o que é obtido substituindo-se recursivamente \diamond por $[\diamond, \mathcal{H}]$ na Eq. (5.265), da forma

$$\frac{d}{dt} \rightarrow [\diamond, \mathcal{H}], \quad \frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\right)^2 \rightarrow [[\diamond, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \quad \frac{d^3}{dt^3} = \left(\frac{d}{dt}\right)^3 \rightarrow [[[\diamond, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}], \quad \text{etc.} \quad (5.266)$$

O resultado fica

$$u(t) = u(t_0) + [u(t_0), \mathcal{H}](t - t_0) + \frac{1}{2}[[u(t_0), \mathcal{H}], \mathcal{H}](t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}[[[u(t_0), \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}](t - t_0)^3 + \dots \quad (5.267)$$

A conexão entre movimento e transformações canônicas infinitesimais pode também ser invocada para fazermos o caminho de volta. Se dermos o nome genérico ϵ para o parâmetro da transformação, i.e. $dt \rightarrow \epsilon$, e entendermos a hamiltoniana como um caso particular de uma função geradora qualquer, i.e. $\mathcal{H} \rightarrow G$, a Eq. (5.267) estabelece que uma sequência de transformações canônicas infinitesimais produzirá a transformação contínua

$$u' = u + [u, G]\epsilon + \frac{1}{2}[[u, G], G]\epsilon^2 + \frac{1}{3!}[[[u, G], G], G]\epsilon^3 + \dots \quad (5.268)$$

Realizar esse somatório para encontrar a transformação finita resultante não é tarefa simples em geral. No caso da evolução temporal, esse problema é resolvido pela equação de Hamilton-Jacobi.

Exemplo: Rotação no espaço de fase. Vimos no contexto do teorema de Noether a conexão entre rotações e componentes do vetor momento angular. Vejamos como as transformações canônicas infinitesimais nos permitem construir rotações finitas a partir disso.

Supomos por concretude uma função geradora igual à componente L_z do momento angular newtoniano⁴¹,

$$G(x, y, p_x, p_y) = xp_y - yp_x. \quad (5.269)$$

As transformações canônicas infinitesimais daí decorrentes são

$$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow x + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_x} = x - \epsilon y, \\ y \rightarrow y + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_y} = y + \epsilon x, \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x \rightarrow p_x - \epsilon \frac{\partial G}{\partial x} = p_x - \epsilon p_y, \\ p_y \rightarrow p_y - \epsilon \frac{\partial G}{\partial y} = p_y + \epsilon p_x. \end{array} \right., \quad (5.270)$$

que já nos sugerem uma rotação infinitesimal.

⁴¹Para realizar rotações em torno de qualquer eixo definido pelo versor espacial \hat{n} , basta considerarmos a componente $\hat{n} \cdot \vec{L}$ do momento angular. Nossa abordagem equivale a escolher a direção \hat{z} arbitrária do espaço como $\hat{n} = \hat{z}$.

A forma exata da transformação finita pode ser determinada pelo cálculo da série indicada pela Eq. (5.268). Os colchetes de Poisson necessários à obtenção da transformação para a posição x são calculados explicitamente como

$$(i) \quad [x, G] = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial p_x} - \cancel{\delta} \frac{\partial x}{\partial p_x} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\cancel{\delta} \partial x}{\cancel{\delta} y} \frac{\partial G}{\partial p_y} - \frac{\cancel{\delta} \partial x}{\cancel{\delta} p_y} \frac{\partial G}{\partial y} = -y \quad (5.271)$$

$$(ii) \quad [[x, G], G] = -[y, G] = -\frac{\cancel{\delta} \partial y}{\cancel{\delta} x} \frac{\partial G}{\partial p_x} + \frac{\cancel{\delta} \partial y}{\cancel{\delta} p_x} \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial p_y} + \frac{\cancel{\delta} \partial y}{\cancel{\delta} p_y} \frac{\partial G}{\partial y} = -x. \quad (5.272)$$

A próxima iteração volta nos colchetes de Poisson calculados em (i), porém com o sinal trocado, uma vez que $[[[x, G], G], G] = -[x, G]$. Algo análogo vale para a iteração (iv), para a qual temos $[[[[x, G], G], G], G] = [y, G]$. O padrão que se revela é a obtenção do mesmo resultado a menos de uma troca de sinal a cada par de iterações. A série para a posição x nos fornece então

$$\begin{aligned} x' &= x + [x, G]\epsilon + \frac{1}{2}[[x, G], G]\epsilon^2 + \frac{1}{3!}[[[x, G], G], G]\epsilon^3 + \frac{1}{4!}[[[[x, G], G], G], G]\epsilon^4 + \dots \\ &= x - \epsilon y - \frac{1}{2}\epsilon^2 x + \frac{1}{3!}\epsilon^3 y + \frac{1}{4!}\epsilon^4 x + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{4!}\epsilon^4 + \dots\right) x - \left(\epsilon - \frac{1}{3!}\epsilon^3 + \frac{1}{5!}\epsilon^5 + \dots\right) y \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \epsilon^{2n} - y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \epsilon^{2n+1} \\ &= x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, \end{aligned} \quad (5.273)$$

uma rotação controlada pelo parâmetro ϵ , agora identificado como o ângulo de rotação. Relações similares valem para y , p_x e p_y .

Por ser a dinâmica hamiltoniana uma transformação canônica, devemos concluir que o movimento de uma partícula sob ação de uma hamiltoniana proporcional a L_z deve ser uma rotação no plano $\mathcal{O}xy$. Esse tipo de interação de fato ocorre para uma partícula sob influência de um campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, caso em que podemos escrever seu momento magnético como proporcional a seu momento angular, i.e. $\vec{\mu} = gL_z\hat{z}$, sendo a hamiltoniana de interação dada por

$$\mathcal{H}_I = -gL_z. \quad (5.274)$$

Essa conexão nos permite entender a ação de qualquer hamiltoniana a partir da transformação canônica produzida por geradores com a mesma dependência nas coordenadas do espaço de fase.

5.4.4 Simetria, conservação e coordenadas cíclicas

Uma característica interessante das transformações canônicas em geral é o papel da variável conjugada, expresso de maneira bastante direta pelos colchetes de Poisson, que nos permite entender de forma auto-consistente a relação entre simetrias da hamiltoniana, quantidades conservadas e coordenadas cíclicas. Por exemplo, se tomarmos a função u como uma das coordenadas η_j do espaço de fase e escolhermos a função geradora G como um dos momentos $p_{j'}$, i.e. $G = p_{j'}$, a Eq. (5.259) nos fornece

$$d\eta_j = \epsilon[\eta_j, q_{j'}] \Rightarrow \begin{cases} dq_j = \delta_{jj'}\epsilon, \\ dp_j = 0. \end{cases} \quad (5.275)$$

de maneira que a função geradora G desloca por ϵ apenas a posição $q_{j'}$ canonicamente conjugada a $p_{j'}$, e nenhuma outra coordenada mais. Além disso, essa mesma transformação modifica qualquer função do espaço de fase, inclusive o *valor* da função hamiltoniana⁴², de acordo com a prescrição da Eq. (5.259)

$$d\mathcal{H} = [G, \mathcal{H}], \quad (5.276)$$

Como a função geradora é em si uma função do espaço de fase, sua evolução temporal também obedece

$$\frac{d}{dt}G = [G, \mathcal{H}], \quad (5.277)$$

‘atualizando-a’ a $p_{j'}(t)$ para todo tempo.

Todo esse quadro se fecha de forma autoconsistente no caso especial em que $p_{j'}$ é uma quantidade conservada, no qual temos necessariamente que

$$\dot{p}_{j'} = [p_{j'}, \mathcal{H}] = 0 \quad \Rightarrow \quad [G, \mathcal{H}] = 0, \quad (5.278)$$

e portanto $d\mathcal{H} = 0$ de acordo com a Eq. (5.276), indicando que o valor da hamiltoniana não se modifica pela transformação gerada por G , i.e. \mathcal{H} é invariante por translações em $q_{j'}$. Esse fato também é apontado calculando-se explicitamente os colchetes de Poisson da Eq. (5.278),

$$[p_{j'}, \mathcal{H}] = \sum_j \left(\frac{\partial p_{j'}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial p_{j'}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{j'}} = 0, \quad (5.279)$$

ou seja, a hamiltoniana não pode depender de $q_{j'}$, portanto uma coordenada cíclica. Isso precisa ser assim também por conta da Eq. (5.275): se $G = p_{j'}$ desloca a coordenada $q_{j'}$ e ainda assim o valor da hamiltoniana continua o mesmo, é porque \mathcal{H} não depende de $q_{j'}$. A propriedade de conservação do momento $p_{j'}$ se conecta indissociavelmente à simetria de translação da hamiltoniana na coordenada conjugada $q_{j'}$.

A discussão acima ilustra um caso particular do teorema de Noether, estudado no contexto do formalismo lagrangiano da mecânica. Vemos que o mesmo raciocínio pode ser aplicado ao formalismo hamiltoniano, com a sutileza de que as transformações de que tratamos não são meros objetos de interesse acadêmico, mas se mesclam indissociavelmente à própria dinâmica. Em geral, uma função geradora cujos colchetes de Poisson com a hamiltoniana se anulam produzirá uma transformação sob a qual a hamiltoniana permanece invariante, indicando uma simetria. Se pudermos escrever essa função geradora como uma coordenada canônica de um novo espaço de fase, então ela será uma constante do movimento e sua coordenada conjugada será a única a sofrer ação da transformação.

5.4.5 Álgebra da mecânica hamiltoniana

Os colchetes de Poisson nos permitem entender a mecânica como um conjunto de objetos que se relacionam entre si algebricamente, uma visão bastante poderosa e genérica que desemboca diretamente na mecânica quântica.

⁴²Com isso queremos dizer que a função hamiltoniana transformada ainda deve ser entendida como uma função do espaço de fase antigo. Notemos que em geral o processo de transformação da hamiltoniana busca reescrevê-la nas coordenadas *novas* com o objetivo de obter as equações de movimento corretas nesse novo espaço de fase. A transformação de que estamos falando aqui é de fato ‘ativa’ no sentido de que, se interpretada no espaço de fase antigo, resultaria em uma hamiltoniana diferente no mesmo espaço, i.e. como ocorre para qualquer função do espaço de fase após sofrer uma transformação canônica.

Uma álgebra se refere a um conjunto de objetos munidos de um produto interno. Na mecânica, os colchetes de Poisson são a escolha natural de produto interno e, por conta de suas propriedades, produzem uma *álgebra de Lie*. Além das propriedades gerais de qualquer álgebra⁴³, o produto da álgebra de Lie precisa ser antissimétrico e obedecer a chamada *identidade de Jacobi*:

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \quad (5.280)$$

Essa identidade é uma espécie de substituição especial à propriedade de associatividade. De fato, se denotarmos o produto interno pelo símbolo ‘ \cdot ’, a associatividade seria representada pela condição

$$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w, \quad \text{i.e. } u \cdot (v \cdot w) - (u \cdot v) \cdot w = 0, \quad (5.281)$$

de maneira que a ordem em que se realizam produtos encadeados não afeta o resultado. Isso claramente não é verdade no caso de uma álgebra de Lie, posto que a identidade de Jacobi significa nessa notação

$$u \cdot (v \cdot w) + v \cdot (w \cdot u) + w \cdot (u \cdot v) = 0, \quad (5.282)$$

de forma que

$$u \cdot (v \cdot w) - (u \cdot v) \cdot w = (w \cdot u) \cdot v \neq 0, \quad (5.283)$$

em que utilizamos a propriedade de antissimetria do produto interno para escrever $w \cdot (u \cdot v) = -(u \cdot v) \cdot w$.

De fato, a identidade de Jacobi diz respeito aos colchetes de Poisson da mecânica, e pode ser utilizada para obter constantes do movimento a partir de quantidades conservadas conhecidas. Se u e v são constantes do movimento, então

$$[u, \mathcal{H}] = [v, \mathcal{H}] = 0, \quad (5.284)$$

e a identidade de Jacobi aplicada a esse trio de funções do espaço de fase estabelece que

$$[\mathcal{H}, [u, v]] + [u, [v, \mathcal{H}]] + [v, [\mathcal{H}, u]] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{H}, [u, v]] = 0. \quad (5.285)$$

Isso nos permite inferir que a grandeza w construída a partir dos colchetes de Poisson entre u e v , i.e. $w = [u, v]$, também é conservada. Esse procedimento leva muitas vezes a identidades triviais, revelando-se pouco útil na maioria dos casos simples. Ele se torna importante em problemas complicados, nos quais é por vezes possível identificar constantes do movimento pouco óbvias a partir de quantidades conservadas mais usuais.

A utilidade de se associar uma álgebra de Lie ao espaço de fase munido dos colchetes de Poisson como produto interno reside em adicionarmos a nosso ferramental toda a matemática desenvolvida para esses conjuntos de objetos. Isso nos permitirá também aproveitar teoremas conectando a álgebra aos mapas simpléticos produzidos por transformações canônicas.

Tomamos assim como produto de Lie entre duas funções u e v no espaço de fase os colchetes de Poisson $[u, v]$,

$$u \cdot v \mapsto [u, v]. \quad (5.286)$$

⁴³São elas: o produto de dois elementos gera um terceiro elemento (único) do conjunto, sendo essa operação linear e distributiva (note que associatividade não é requerida!).

O resultado dessa operação é uma nova função $w = [u, v]$ do espaço de fase, como deve ser para uma álgebra. Nesse novo contexto, é por vezes conveniente entender esse produto como um operador \hat{u} agindo na função v , da forma

$$\hat{u}v = [u, v], \quad (5.287)$$

ou seja, toda vez que virmos uma função com um chapéu devemos aplicar os colchetes de Poisson dela com o que estiver à sua direita. Potências desse operador são definidas como

$$\hat{u}^0 = v, \quad \hat{u}^1 = [u, v], \quad \hat{u}^2 = [u, [u, v]], \quad \hat{u}^3 = [u, [u, [u, v]]], \dots, \quad (5.288)$$

e assim por diante. Uma *transformação de Lie*, intimamente ligada às transformações simpléticas, é definida pela exponencial desse operador,

$$e^{\hat{u}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{u}^n}{n!}, \quad (5.289)$$

de maneira que sua atuação sobre uma função g , dada por

$$\begin{aligned} e^{\hat{u}}v &= \hat{u}^0v + \hat{u}^1v + \frac{1}{2}\hat{u}^2v + \frac{1}{3!}\hat{u}^3v + \dots \\ &= v + [u, v] + \frac{1}{2}[u, [u, v]] + \frac{1}{3!}[u, [u, [u, v]]] + \dots, \end{aligned} \quad (5.290)$$

reproduz o tipo de série de que tratamos na Eq. (5.267) para a evolução temporal e na Eq. (5.268) para uma transformação canônica genérica.

Citemos algumas propriedades desse tipo de operação. É possível mostrar que a ação da exponencial num produto de funções se distribui nas duas funções,

$$e^{\hat{u}}(vw) = (e^{\hat{u}}v)(e^{\hat{u}}w), \quad (5.291)$$

e também que sua atuação sobre uma função $v(\eta)$ pode ser resumida a uma operação agindo diretamente em seu argumento η ,

$$e^{\hat{u}}v(\eta) = v(e^{\hat{u}}\eta). \quad (5.292)$$

De maneira análoga, o operador de Lie age nos parênteses de Poisson como

$$e^{\hat{u}}[v, w] = [e^{\hat{u}}v, e^{\hat{u}}w]. \quad (5.293)$$

É conveniente denotarmos o operador exponencial por $\mathcal{U} = e^{\hat{u}}$, o qual corresponde a um *mapa simplético*. A origem da denominação é clara: se os colchetes de Poisson produzem uma transformação canônica infinitesimal, sua atuação em série deve produzir uma transformação canônica finita, que por sua vez corresponde a uma transformação simplética, ou mapa simplético. O mapa \mathcal{U} conecta dois espaços de fase pela transformação de suas coordenadas através da operação

$$\{q_j, p_j\} \xrightarrow{\mathcal{U}} \{Q_j, P_j\}, \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}' = \mathcal{U}\boldsymbol{\eta}. \quad (5.294)$$

É simples mostrar que esse operador de fato consiste numa transformação simplética. Explicitamente, os colchetes de Poisson das novas coordenadas $\{Q_j, P_j\}$ satisfazem

$$[\eta'_j, \eta'_{j'}] = [\mathcal{U}\eta_j, \mathcal{U}\eta_{j'}] \stackrel{\text{Eq. (5.293)}}{=} \mathcal{U}[\eta'_j, \eta'_{j'}] = \mathcal{U}\Omega_{jj'} = \Omega_{jj'}, \quad (5.295)$$

mostrando que os colchetes de Poisson fundamentais são preservados no novo espaço de fase.

É também possível mostrar a conexão em sentido oposto, i.e. que todo mapa simplético (transformação canônica) por ser decomposto em transformações de Lie (teorema da fatorização). Assim, a toda transformação canônica corresponde um mapa simplético \mathcal{U} construído por transformações de Lie, e vice-versa. Isso nos permite resolver problemas da dinâmica por outros meios, uma vez que as soluções das equações de Hamilton são mapas simpléticos.

De fato, a solução da Eq. (5.267) para o movimento se escreve nessa notação como

$$u(\boldsymbol{\eta}(t)) = e^{-\hat{\mathcal{H}}(t-t_0)} u(\boldsymbol{\eta}(t_0)), \quad (5.296)$$

exatamente a mesma relação algébrica que serve como solução para a dinâmica na mecânica quântica: mudam ‘apenas’ os objetos referidos na expressão.

5.4.6 Garantindo a canonicidade das coordenadas no espaço de fase

A estrutura do formalismo hamiltoniano se baseia em pares de grandezas conjugadas. É apenas nesse caso que valem as equações canônicas e toda a descrição do movimento em termos do espaço de fase. Relembramos aqui as ferramentas que possuímos para garantir como válida essa importante propriedade das coordenadas hamiltonianas.

A maneira mais básica de se obter pares conjugados utiliza a função lagrangiana. Partimos das posições generalizadas q_j e suas derivadas temporais para definir os momentos conjugados pela relação $p_j = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_j$. A função hamiltoniana é então construída pela transformada de Legendre da lagrangiana. Garantimos assim que os pares $\{q_j, p_j\}$ são canonicamente conjugados pela definição básica dos p_j .

A segunda forma de se garantir a canonicidade dos pares da dinâmica parte de uma função hamiltoniana corretamente construída em torno de coordenadas canônicas $\{q_j, p_j\}$. Podemos nesse caso utilizar a liberdade de escolha do integrando de ação para transformá-las em novas coordenadas $\{Q_j, P_j\}$ pelo emprego de uma função geradora. Esse procedimento também garante que os novos pares são canonicamente conjugados, posto que a função geradora é concebida justamente para explorar a máxima liberdade de transformação permitida dentro da limitação de que as equações de Hamilton precisam ser preservadas.

A terceira abordagem do problema de verificação da canonicidade utiliza a estrutura simplética da geometria do espaço de fase, sendo uma alternativa ao uso de funções geradoras. Partimos das equações de transformação de coordenadas $Q_j = Q_j(\{q_j, p_j\}, t)$ e $P_j = P_j(\{q_j, p_j\}, t)$ e construímos a matriz jacobiana \mathbf{J} da transformação. A preservação da forma simplética de acordo com a condição $\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}^T = \boldsymbol{\Omega}$ garante que as novas coordenadas são canonicamente conjugadas. Esse procedimento é equivalente a verificar as condições diretas de canonicidade.

Finalmente, a quarta abordagem visa a preservação dos colchetes de Poisson fundamentais. Utilizamos então as equações de transformação $Q_j = Q_j(\{q_j, p_j\}, t)$ e $P_j = P_j(\{q_j, p_j\}, t)$ para verificarmos se valem as relações $[Q_j, P_{j'}] = \delta_{jj'}$, $[Q_j, Q_{j'}] = 0$ e $[P_j, P_{j'}] = 0$. Sua validade nos permite dizer que o espaço de configurações transformado é de fato um espaço de fase hamiltoniano.

5.4.7 Conexão com a mecânica quântica

A mecânica clássica possui um amplo domínio de validade, de fato tão abrangente que serve como descrição perfeita⁴⁴ para quase todos os fenômenos de nosso cotidiano que envolvam o movimento. Ela falha apenas nos limites extremos, tais como ‘muito rápido’ ou ‘muito pouca energia’. As estruturas criadas para descrever a natureza nesses casos limites devem ser mais complexas, embora todas devam guardar obrigatoriamente alguma semelhança com a mecânica clássica por precisarem corresponder a ela longe dos extremos de que tratam. De fato, as teorias dos extremos devem possuir mais ‘informação’ sobre a natureza e ao mesmo tempo se assemelharem à mecânica clássica quando a parte nova da informação se tornar irrelevante, como se esta última fosse um ‘espectro’ das primeiras.

A mecânica quântica, portanto, mantém grande parte do formalismo da mecânica clássica, desde que colocado da forma mais apropriada. E essa forma é a algébrica, baseada nos colchetes de Poisson. A propriedade de antissimetria dos colchetes continua válida, significando no entanto algo ligeiramente diferente. Enquanto na mecânica clássica ela tem origem na troca das coordenadas conjugadas, i.e. na estrutura simplética do espaço de fase, na mecânica quântica ela passa a se referir à *ordem* em que transformações físicas ocorrem. Se os colchetes de Poisson abrem mão da propriedade de associatividade, a mecânica quântica se caracteriza principalmente pela não comutatividade.

A regra de quantização canônica consiste em substituir os colchetes de Poisson pelo comutador, uma consequência de serem as grandezas físicas não mais representadas por funções do espaço de fase, mas por operadores atuando no espaço vetorial de Hilbert, a versão 2.0 do espaço de configurações⁴⁵. Abre-se mão do determinismo absoluto, segundo o qual toda teoria precisa prever cada resultado individual de medida, em favor de uma teoria determinística de ensembles. O comutador resume a característica fundamental da mecânica quântica de que a estatística de observáveis *incompatíveis* (a reminiscência clássica dos pares dinâmicos canonicamente conjugados) precisam respeitar uma relação de incerteza prevista por Heisenberg.

À parte os postulados interpretativos da mecânica quântica, grande parte da estrutura que vimos na mecânica clássica se mantém como álgebra. Constantes do movimento ainda comutam com o (operador) hamiltoniano, e simetrias estão conectadas de maneira análoga a leis de conservação (e Noether, atestando a profundidade de seu *insight*, continua intacta). A evolução temporal ainda é equivalente a uma transformação qualquer no espaço de configurações apropriado, e as equações de movimento de observáveis físicos são dadas (ao menos em termos das relações algébricas) exatamente pela Eq. (5.262). Por conseguinte, a solução geral do movimento também é dada por relação algebricamente idêntica à Eq. (5.296). A única diferença matemática fundamental entre as teorias se dá no nível de como são representados observáveis físicos: no lugar de funções, operadores, tornando-se por isso a álgebra parte central da teoria quântica.

⁴⁴Dentro da precisão experimental, obviamente, mas o que mais poderia ser se nada existe fora do domínio do experimento?

⁴⁵Podemos dizer que o espaço newtoniano seria a versão 1.0, o lagrangiano, 1.2 e o hamiltoniano, 1.5.

Capítulo 6

Formulação de Hamilton-Jacobi da mecânica

As conexões reveladas pela formulação de Hamilton-Jacobi da mecânica nos levam a ainda outra interpretação da teoria. Se a formulação simplética conecta a mecânica à geometria e os colchetes de Poisson revelam sua estrutura algébrica, a abordagem de Hamilton-Jacobi provê uma interpretação incipiente da mecânica como uma teoria ondulatória para a matéria¹, válida no limite em que as dimensões relevantes são muito maiores do que os comprimentos de onda associados ao movimento.

Mais concretamente, esse formalismo nos permite vislumbrar semelhanças entre o movimento de partículas e a propagação de raios de luz na ótica geométrica, além de nos fornecer pistas valiosas de como precisa funcionar uma teoria ondulatória que busque fazer pela matéria o que as equações de Maxwell fazem com relação à propagação da luz. A equação de Schrödinger, assim como o comprimento de onda postulado heurísticamente por de Broglie, têm como ponto de partida, como veremos, a interpretação de Hamilton-Jacobi da mecânica.

6.1 Função principal de Hamilton

A função hamiltoniana possui até agora para nós um papel duplo. Por um lado, ela produz as equações diferenciais canônicas para o movimento, mantendo conjuntamente a abordagem newtoniana e os avanços matemáticos da mecânica lagrangiana; por outro, numa interpretação mais rica e contemporânea capaz de nos levar a novas visões da dinâmica, essa função gera sobre o espaço de fase a transformação infinitesimal correspondente à evolução temporal do sistema. É sobre esta última visão que se constrói o método de Hamilton-Jacobi.

Embora possamos de fato ‘aplicar’ a hamiltoniana um sem-número de vezes ao espaço de fase para resolver a dinâmica durante certo intervalo não infinitesimal de tempo, gostaríamos de saber como determinar diretamente a função geradora capaz de produzir essa transformação canônica correspondente à evolução

¹Historicamente, no entanto, Hamilton iniciou seu trabalho por aqui, buscando a analogia mecânica dos fenômenos observados na ótica geométrica.

finita, i.e. capaz de conectar o espaço de fase em qualquer instante t_0 a outro instante arbitrário t .

Essa função geradora especial, denotada por S , deve conter implicitamente a solução de toda a dinâmica do sistema e se reduzir à transformação infinitesimal gerada pela hamiltoniana para qualquer instante pontual no tempo. De certa forma, essa função seria uma espécie de ‘integral’ da transformação criada pela hamiltoniana no sentido de revelar seu efeito concatenado entre quaisquer dois instantes no tempo. Como veremos, a integral de ação, cujo significado físico permanece até agora um tanto obscuro para nós, possui forte relação com essa função especial.

Buscamos então a função geradora tal que, partindo de um espaço de fase dado num instante inicial t_0 , quando todos os pares $\{q_j(t_0), p_j(t_0)\} = \{Q_j, P_j\}$ possuem valores conhecidos pelo experimentador (constantes), sua transformação associada nos providencie diretamente as coordenadas evoluídas $\{q_j(t), p_j(t)\}$ no espaço de fase, i.e.

$$\{q_j(t_0), p_j(t_0)\} = \{Q_j, P_j\} = cte \quad \xrightarrow{S} \quad \begin{cases} q_j(t) = q_j(\{Q_j, P_j\}, t) \\ p_j(t) = p_j(\{Q_j, P_j\}, t) \end{cases}. \quad (6.1)$$

A montagem matemática dessa abordagem encara os pares $\{q_j(t), p_j(t)\}$ como o espaço de fase no qual estamos interessados, a ser obtido pela transformação canônica, e os pares $\{q_{0j}, p_{0j}\} = \{Q_j, P_j\}$ como o espaço de fase conhecido, aquele do qual partimos. O problema se resume a determinar a função geradora $S(\{q_j(t), p_j(t), Q_j, P_j\}, t)$ que produza a conexão entre esses dois espaços de fase,

$$\{q_j(t), p_j(t)\} \quad \xleftrightarrow{S} \quad \{Q_j, P_j\}. \quad (6.2)$$

Observemos que a transformação canônica gerada por S deve em geral depender explicitamente do tempo pelo fato de envolver a solução da dinâmica.

Notemos que as coordenadas $\{Q_j, P_j\}$, por representarem condições iniciais (constantes), não podem evoluir no tempo. A função hamiltoniana nesse espaço de fase ‘auxiliar’ deve ser, portanto, identicamente nula, já que nele valem também as equações canônicas,

$$\{Q_j, P_j\} = cte \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial P_j} := 0 \\ \dot{P}_j = -\frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial Q_j} := 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}' = 0. \quad (6.3)$$

Assim, o problema de Hamilton-Jacobi se constrói conhecendo-se as funções hamiltonianas nos dois espaços de fase considerados, i.e. $\mathcal{H}' = 0$ no espaço ‘auxiliar’ de condições iniciais $\{Q_j, P_j\} = cte$ e a hamiltoniana (mesmo) do sistema \mathcal{H} no espaço de fase $\{q_j(t), p_j(t)\}$,

$$\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) \quad \xleftrightarrow{S} \quad \mathcal{H}'(\{Q_j, P_j\}) = 0, \quad (6.4)$$

e buscando-se determinar a função geradora especial S , chamada de *função principal de Hamilton*, capaz de produzir essa transformação.

Exemplo: Oscilador harmônico. Ilustremos a ideia geral do método de Hamilton-Jacobi tomando como exemplo o velho e confiável oscilador harmônico. Vamos mostrar que é possível construir ‘à la

Hamilton-Jacobi' um espaço de fase 'imutável' a partir da solução geral já conhecida para o movimento, dada por

$$q(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{e} \quad p(t) = A m \omega \cos(\omega t + \phi). \quad (6.5)$$

As constantes A e ϕ fixam a trajetória exata seguida pela partícula e se relacionam às condições iniciais $\{q_0, p_0\} = \{q(0), p(0)\}$ através das relações

$$A = \sqrt{q_0^2 + p_0^2} \quad \text{e} \quad \tan \phi = \frac{m \omega q_0}{p_0}. \quad (6.6)$$

Uma maneira aparentemente trivial de se construir coordenadas constantes no tempo seria considerar a posição transformada

$$Q = q(t) - A_0 \sin(\omega t + \phi_0), \quad (6.7)$$

em que A_0 e ϕ_0 são constantes de nossa escolha. De fato, conseguimos com essa transformação fazer $Q = 0 = cte$ para a trajetória na qual valem $A = A_0$ e $\phi = \phi_0$; conhecendo as constantes A e ϕ específicas de nosso oscilador, poderíamos sempre realizar essa transformação para obter sua descrição em termos da coordenada $Q = 0$. No entanto, essa não é a ideia do método. A transformação ingênua da Eq. (6.7) falha em produzir posições Q constantes para *todas* as demais trajetórias cujas condições iniciais difiram de nossas constantes de escolha, i.e. sempre que $A \neq A_0$ ou $\phi \neq \phi_0$, significando que a hamiltoniana transformada não é identicamente nula como desejado. No método de Hamilton-Jacobi, é preciso encontrar a transformação canônica capaz de levar o espaço de fase *como um todo* em algo imutável no tempo, e não apenas um subconjunto das trajetórias de nossa escolha.

Produzir uma coordenada constante no tempo requer combinar as condições iniciais de alguma forma interessante. No caso do oscilador harmônico, pode funcionar a parametrização da trajetória em termos de sua amplitude, já que vale

$$A^2 = q^2 + \frac{p^2}{m^2 \omega^2} \quad (6.8)$$

para todo tempo. Isso nos motiva a definir

$$Q := q^2 + \frac{p^2}{m^2 \omega^2} \quad (6.9)$$

como a nova coordenada de posição². A expressão para Q não envolve nesse caso o tempo explicitamente, mas poderia envolver.

Resta-nos determinar o momento canônico P . A outra variável intuitiva a servir como rótulo para as possíveis trajetórias do oscilador é a fase. Pelo uso da Eq. (6.5), ela poderia ser escrita como

$$\phi = \arctan \left(m \omega \frac{q}{p} \right) - \omega t, \quad (6.10)$$

também uma constante no tempo, por construção. Tentamos por isso para o novo momento a definição

$$P = \arctan \left(m \omega \frac{q}{p} \right) - \omega t, \quad (6.11)$$

²Você pode estar se perguntando: 'por que não escrever Q^2 em vez de Q na definição acima?'. O motivo é: não importa. Queremos aqui apenas mostrar que é possível produzir coordenadas imutáveis, e não (ainda) fornecer uma forma sistemática de encontrá-las. De fato, esse é o problema do método de Hamilton-Jacobi a ser exposto em breve!

que dessa vez depende explicitamente do tempo. Os colchetes de Poisson nos mostram que Q e P não formam propriamente um par canônico, pois

$$[Q, P] = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{2}{m\omega}, \quad (6.12)$$

mas estamos quase lá. Esse pequeno deslize é facilmente consertado modificando a definição de P para multiplicá-lo pela constante adequada; redefinimos

$$P := -\frac{m\omega}{2} \arctan\left(m\omega \frac{q}{p}\right) + \frac{m\omega^2}{2}t, \quad (6.13)$$

forçando a validade de $[Q, P] = 1$.

Agora Q e P formam um espaço de fase *bona fide*, no qual vale a estrutura do formalismo hamiltoniano. As novas coordenadas $\{Q, P\}$ permanecem por construção constantes para todas as trajetórias, embora sejam constantes diferentes para cada uma delas. Essa característica torna o par $\{Q, P\}$ uma espécie de ‘rótulo’ com o qual é possível nomear e distinguir as diversas trajetórias mesmo que descritas no espaço de fase $\{q, p\}$. Vemos então que nosso procedimento visou encontrar um par canônico de rótulos cuja evolução se resume à constância (como deve mesmo ocorrer para rótulos úteis), de onde segue que a hamiltoniana transformada para esse espaço de fase é de fato nula, i.e. $\mathcal{H}' = 0$. A transformação canônica de Hamilton-Jacobi mapeia a cada instante t um ponto $\{Q, P\}$ em outro no espaço $\{q, p\}$; equivalentemente, ela mapeia cada ponto $\{Q, P\}$ em uma curva no espaço de fase estendido $\{q, p, t\}$.

A etapa final do método de Hamilton-Jacobi consistiria em inverter as Eqs. (6.9) e (6.13) para obter a solução $\{q(t), p(t)\}$, o que em nosso exemplo funciona por construção (de fato, partimos das soluções $\{q(t), p(t)\}$ para ilustrar a possibilidade de encontrarmos coordenadas constantes no tempo!). O passo crucial do método consiste de fato em *determinar* as equações de transformação análogas às Eqs. (6.9) e (6.13), pela equação de Hamilton-Jacobi.

6.2 Equação de Hamilton-Jacobi

A equação a unir a hamiltoniana \mathcal{H} do sistema à sua versão \mathcal{H}' identicamente nula passa pela função geradora da transformação canônica buscada,

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (6.14)$$

A hamiltoniana \mathcal{H} é uma função das coordenadas $\{q_j, p_j\}$, restando escolher o par de coordenadas (uma do espaço de fase $\{p_j, q_j\}$ e outra do espaço $\{Q_j, P_j\}$) nas quais expressar a função geradora S . Se escolhermos por um lado as posições q_j como argumentos de S , segue que os momentos p_j se deduzem a partir de S pelas relações da transformação canônica

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}. \quad (6.15)$$

Já a escolha entre Q_j e P_j é equivalente, por serem ambas as coordenadas constantes³. As relações da transformação canônica buscada se tornam assim

$$\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) + \frac{\partial S(\{q_j, P_j\}, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{com} \quad p_j = \frac{\partial S(\{q_j, P_j\}, t)}{\partial q_j}. \quad (6.16)$$

Essa equação pode ser colocada em forma mais compacta se substituirmos as equações para os p_j em favor da função S e sua derivada parcial com relação aos q_j , de maneira que faça menção apenas a S , q_j e às constantes P_j ,

$$\mathcal{H}\left(\left\{q_j, \frac{\partial S(\{q_j, P_j\}, t)}{\partial q_j}\right\}\right) + \frac{\partial S(\{q_j, P_j\}, t)}{\partial t} = 0. \quad (6.17)$$

Essa relação é denominada *equação de Hamilton-Jacobi*, uma equação diferencial a derivadas parciais em S ao utilizarmos a expressão da hamiltoniana do sistema de interesse. Por conta do termo quadrático da energia cinética, ela é também não-linear, e portanto a combinação linear de soluções não forma em geral uma nova solução. Além disso, por ser uma equação a derivadas parciais, a equação de Hamilton-Jacobi possui várias soluções possíveis. A forma de escolher soluções consistentes será discutida a seguir.

Exemplo: Partícula livre. Ilustremos algumas propriedades das soluções da equação de Hamilton-Jacobi utilizando como exemplo a partícula livre em movimento unidimensional, cuja função hamiltoniana é

$$\mathcal{H}(p) = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.18)$$

A equação de Hamilton-Jacobi para a partícula livre se obtém pela substituição de p em favor de S através da relação $p = \partial S / \partial x$,

$$\frac{\partial S(x, P, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(x, P, t)}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (6.19)$$

Notemos como a constante P permanece como ‘observadora passiva’ na equação, uma vez que não participa de nenhuma derivada parcial, podendo mesmo ser omitida nesse estágio.

Uma possível solução para essa equação envolve tentar a técnica de separação de variáveis, pelo ‘chute’

$$S = X(x)T(t). \quad (6.20)$$

Sua substituição na Eq. (6.19) fornece

$$X\dot{T} + \frac{1}{2m}X'^2T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2m} \frac{X'^2}{X} = -\frac{\dot{T}}{T^2} := \alpha, \quad (6.21)$$

em que usamos a notação $\dot{T} = \frac{dT}{dt}$ e $X' = \frac{dX}{dx}$, e definimos a constante α de separação. As duas equações diferenciais ordinárias resultantes podem ser diretamente integradas,

$$\frac{dX}{\sqrt{X}} = \sqrt{2m\alpha} dx \quad \Rightarrow \quad X = \frac{m}{2}\alpha(x - x_0)^2 \quad (6.22)$$

e

$$\frac{dT}{T^2} = -\alpha dt \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{\alpha(t - t_0)}, \quad (6.23)$$

³Escolhemos no que segue as constantes P_j em detrimento dos Q_j apenas pela conveniência do sinal positivo na equação de transformação $Q_j = \partial S / \partial P_j$. Isto é, se escolhêssemos escrever $S = S(\{q_j, Q_j\}, t)$, teríamos de usar as relações $P_j = -\partial S / \partial Q_j$ para ficar tudo correto nos mínimos detalhes. O problema é que o incômodo de ter de lembrar desse sinal negativo ultrapassa em muito sua relevância.

em que x_0 e t_0 são os valores iniciais de posição e tempo obtidos como constantes de integração. O produto dessas duas soluções resulta na função principal

$$S = \frac{m}{2} \frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}. \quad (6.24)$$

Uma forma alternativa de resolver a Eq. (6.19) envolve supor outro tipo de solução separável,

$$S = X(x) + T(t), \quad (6.25)$$

da qual segue por substituição direta a equação

$$\dot{T} + \frac{1}{2m} X'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2m} X'^2 = -\dot{T} = \beta. \quad (6.26)$$

Seguem daí duas equações diferenciais ordinárias com soluções

$$X' = \sqrt{2m\beta} \quad \Rightarrow \quad X = \sqrt{2m\beta}(x - x_0) \quad (6.27)$$

e

$$\dot{T} = -\beta \quad \Rightarrow \quad T = -\beta(t - t_0). \quad (6.28)$$

A soma dessas duas soluções resulta na função principal

$$S = \sqrt{2m\beta}x - \beta t + \gamma, \quad (6.29)$$

em que o termo constante $\gamma = \sqrt{2m\beta}x_0 - \beta t_0$ não possui significado físico, uma vez que toda função geradora é definida a menos de uma constante (consequência do fato de que apenas derivadas dessas funções são empregadas na dinâmica).

O importante a notar nesse exemplo são as formas funcionais completamente distintas das soluções das Eqs. (6.24) e (6.29). Para compatibilizá-las de maneira que forneçam as mesmas equações de transformação (i.e. a solução para a evolução temporal do sistema), é preciso escolher as constantes arbitrárias de acordo com prescrição compatível com o formalismo. De fato, qualquer uma das constantes encontradas, x_0 , t_0 ou mesmo β , pode ser escolhida como o momento constante P , bastando que respeite certas condições de consistência.

6.3 Função principal de Hamilton como integral de ação

As condições determinantes para a escolha das constantes P_j na função principal S são encontradas notando-se uma conexão mais profunda natural do formalismo hamiltoniano, conexão esta que nos leva na direção de uma teoria ondulatória para a matéria.

As relações matemáticas que cercam as funções geradoras de transformações canônicas são deduzidas considerando-se a derivada total dessas funções como termos adicionais no integrando da ação. No caso da função principal de Hamilton, a derivada total nos fornece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(\{q_j, P_j\}, t) &= \sum_j p_j \dot{q}_j - \sum_j P_j \dot{Q}_j - \left(\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) - \mathcal{H}'(\{Q_j, P_j\}) \right) \\ &= \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H}(\{q_j, p_j\}), \end{aligned} \quad (6.30)$$

em que usamos o fato de que todos os Q_j são constantes e a hamiltoniana transformada \mathcal{H}' é nula por consistência. Mas a derivada total de qualquer função desse tipo se calcula como

$$\frac{d}{dt}S(\{q_j, P_j\}, t) = \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial t}, \quad (6.31)$$

identidade que nos permite escrever as relações que levam à equação de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j. \quad (6.32)$$

Por outro lado, o membro direito da Eq. (6.30) é exatamente a lagrangiana, ou seja, o integrando da ação, e por isso poderíamos escrever essa equação como

$$\frac{d}{dt}S(\{q_j\}, t) = \frac{d}{dt} \int^t \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}) dt'. \quad (6.33)$$

O teorema fundamental do cálculo nos diz então que a função principal deve corresponder à *integral indefinida* da ação (i.e. a menos de uma constante⁴). Escrevemos (sem pudor de ignorar essa constante) a relação

$$S(\{q_j(t)\}, t) = \int^t \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}) dt', \quad (6.34)$$

em que entendemos S como uma função do ponto final $\{q_j(t), t\}$ da trajetória. Investigar como essa mesma função se comporta por uma variação infinitesimal no ponto *inicial* (visto como uma constante do problema) deve nos fornecer outras condições a serem satisfeitas pela função principal de Hamilton.

De fato, como vimos acima, a integral de ação pode ser interpretada como uma *função* comum dos pontos extremos da trajetória (no formato de integral indefinida), em contraposição a um funcional das curvas de trajetória (em forma definida). Entendê-la como um funcional é útil para determinarmos a trajetória efetivamente seguida pelo sistema físico, pelo uso do princípio variacional; no entanto, uma vez conhecida a trajetória física, podemos (em princípio) realizar formalmente a integral da ação e nos perguntar como S responderia a pequenas variações nos pontos de início e fim da trajetória no espaço de configurações lagrangiano. Para deixar essa visão clara na notação, escreveríamos a função S nesse caso como

$$S(\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\}, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}) dt, \quad (6.35)$$

em que $q_j^{(1)} = q_j(t_1)$ é o ponto de partida do sistema e $q_j^{(2)} = q_j(t_2)$, seu ponto de chegada.

Gostaríamos de entender a sensibilidade da integral indefinida da ação a variações infinitesimais nas ‘constantes’ $t_1, t_2, q_j^{(1)}$ e $q_j^{(2)}$, motivando com isso a escolha consistente das constantes da função principal de Hamilton. Introduzimos as respectivas variações $dt_1, dt_2, dq_j^{(1)}$ e $dq_j^{(2)}$, cujo significado é ilustrado esquematicamente na Fig. 6.1. As primeiras permitem mudança nos tempos em que o sistema parte ou chega, enquanto as últimas admitem pequenas variações nas posições de partida e chegada. Essas mudanças

⁴Mas sabemos que essa constante não tem qualquer efeito sobre a dinâmica. De fato, foi essa sua arbitrariedade que nos deu a liberdade de definir as transformações canônicas e tudo o mais.

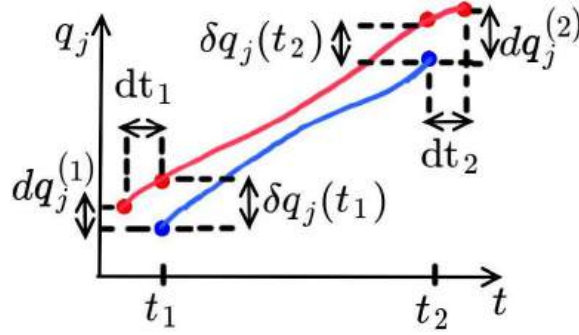


Figura 6.1: Variações produzidas nos pontos inicial e final da trajetória.

infinitesimais produzem em S a variação⁵

$$\begin{aligned} dS(\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\}, t_1, t_2) &:= S(\{q_j^{(1)} + dq_j^{(1)}, q_j^{(2)} + dq_j^{(2)}\}, t_1 + dt_1, t_2 + dt_2) - S(\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\}, t_1, t_2) \\ &= \int_{t_1+dt_1}^{t_2+dt_2} \mathcal{L}(\{q_j(t) + \delta q_j(t), \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)\}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Sobre o primeiro termo dessa expressão, vale em primeira ordem para qualquer integral que

$$\int_{t_1+dt_1}^{t_2+dt_2} \mathcal{L}(t) dt \approx \mathcal{L}(t_2)dt_2 - \mathcal{L}(t_1)dt_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt, \quad (6.38)$$

identidade que fica clara a partir da interpretação geométrica da integral como a área sob a curva $\mathcal{L}(t)$ (abreviamos acima o argumento da lagrangiana para indicar apenas o tempo em que é calculada). O último termo dessa expressão possui agora os mesmos limites de integração utilizados no último termo da Eq. (6.37), podendo ser somados para produzir a variação δS empregada no cálculo do princípio variacional. Nesse caso, no entanto, as variações δq_j não precisam se anular nos instantes t_1 e t_2 . Para obtermos os termos resultantes desse fato, expandimos a variação ‘usual’ da lagrangiana usando a regra da cadeia,

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt = \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) dt \quad (6.39)$$

e integramos por partes o termo em $\delta \dot{q}_j$, da forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j dt = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \quad (6.40)$$

Notemos que nesse caso o primeiro termo não se anula, posto que estamos admitindo a possibilidade de variação das posições inicial e final do sistema no espaço de configurações (em contraposição, na aplicação do método variacional, supúnhamos $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$). Utilizando essa expressão de volta na Eq. (6.39), temos

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_j \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt, \quad (6.41)$$

⁵Esta deve ser comparada à variação δS do funcional de ação realizada no contexto do cálculo variacional. Tínhamos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt := \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j(t) + \delta q_j(t), \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t)\}) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt, \quad (6.36)$$

com as condições adicionais $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$.

em que o último termo se anula na trajetória física como consequência do princípio variacional de Euler-Lagrange. Mas as derivadas parciais da lagrangiana que aparecem acima nada mais são do que os momentos canônicos, resultando na identidade

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\{q_j(t), \dot{q}_j(t)\}) dt = \sum_j p_j(t_2) \delta q_j(t_2) - \sum_j p_j(t_1) \delta q_j(t_1). \quad (6.42)$$

Descobrimos até aqui essencialmente que a variação dos limites de integração da ação, i.e. dos tempos de partida e chegada do sistema, produzem os termos da Eq. (6.38), enquanto admitir a variação das posições de início e fim da trajetória nos trazem os termos da Eq. (6.42). Juntamos esses dois resultados na Eq. (6.37) para obtermos para a variação dS a expressão

$$dS = \mathcal{L}(t_2) dt_2 - \mathcal{L}(t_1) dt_1 + \sum_j p_j(t_2) \delta q_j(t_2) - \sum_j p_j(t_1) \delta q_j(t_1). \quad (6.43)$$

Os primeiros dois termos na verdade significam algo do tipo

$$\mathcal{L}(t_2) dt_2 = \mathcal{L}(\{q_j(t_2) + \delta q_j(t_2), \dot{q}_j(t_2) + \delta \dot{q}_j(t_2)\}) dt_2, \quad (6.44)$$

em que aparecem duas variações infinitesimais concomitantes, dt_2 e $\delta q_j(t_2)$. No entanto, devemos reter variações somente até primeira ordem, o que nos leva a desprezar correções de mais alta ordem para escrever

$$\mathcal{L}(\{q_j(t_2) + \delta q_j(t_2), \dot{q}_j(t_2) + \delta \dot{q}_j(t_2)\}) dt_2 = \mathcal{L}(\{q_j(t_2), \dot{q}_j(t_2)\}) dt_2 + \mathcal{O}(dt_2 \delta q_j), \quad (6.45)$$

a qual escrevemos em notação abreviada $\mathcal{L}(\{q_j(t_2), \dot{q}_j(t_2)\}) \approx \mathcal{L}(t_2)$, o mesmo valendo para a lagrangiana calculada em t_1 . A Eq. (6.43) fornece então

$$dS = \mathcal{L}(t_2) dt_2 - \mathcal{L}(t_1) dt_1 + \sum_j p_j(t_2) \delta q_j(t_2) - \sum_j p_j(t_1) \delta q_j(t_1), \quad (6.46)$$

uma expressão que liga a variação dS às variações dt_1 e dt_2 , como queríamos, mas ainda faz menção às variações δq_j nos instantes extremos (ver Fig. 6.1); gostaríamos em vez disso de escrevê-la em termos das variações $dq_j^{(1)}$ e $dq_j^{(2)}$ impostas diretamente sobre os pontos inicial e final, $q_j^{(1)}$ e $q_j^{(2)}$. Isso pode ser feito por uma aproximação linear, notando que a partícula deve e.g. partir do ponto $\delta q_j(t_2)$ para chegar ao ponto $q_j^{(2)} + dq_j^{(2)}$ (determinado pela variação imposta) movimentando-se nesse ínterim com velocidade uniforme $\dot{q}_j(t_2)$, pois as distâncias e tempos considerados são infinitesimais, valendo portanto

$$dq_j^{(1)} = \delta q_j(t_1) + \dot{q}_j(t_1) dt_1 \quad \text{e} \quad dq_j^{(2)} = \delta q_j(t_2) + \dot{q}_j(t_2) dt_2. \quad (6.47)$$

Substituímos então $\delta q_j(t_1)$ e $\delta q_j(t_2)$ em favor das variações de interesse $dq_j^{(1)}$ e $dq_j^{(2)}$ pelo uso dessas relações, obtendo para a Eq. (6.46)

$$dS = \mathcal{L}(t_2) dt_2 - \mathcal{L}(t_1) dt_1 + \sum_j p_j(t_2) \left(dq_j^{(2)} - \dot{q}_j(t_2) dt_2 \right) - \sum_j p_j(t_1) \left(dq_j^{(1)} - \dot{q}_j(t_1) dt_1 \right). \quad (6.48)$$

Reorganizando os termos, obtemos

$$dS = \sum_j p_j(t_2) dq_j^{(2)} - \left(\sum_j p_j(t_2) \dot{q}_j(t_2) - \mathcal{L}(t_2) \right) dt_2 - \sum_j p_j(t_1) dq_j^{(1)} + \left(\sum_j p_j(t_1) \dot{q}_j(t_1) - \mathcal{L}(t_1) \right) dt_1. \quad (6.49)$$

Reconhecemos então os termos entre parênteses como a função hamiltoniana para escrever finalmente

$$dS(\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\}, t_1, t_2) = \sum_j p_j(t_2) dq_j^{(2)} - \mathcal{H}(t_2) dt_2 - \sum_j p_j(t_1) dq_j^{(1)} + \mathcal{H}(t_1) dt_1, \quad (6.50)$$

em que abreviamos a notação em $\mathcal{H}(t_1) = \mathcal{H}(\{q_j(t_1), p_j(t_1)\})$ e analogamente para $\mathcal{H}(t_2)$.

Essa expressão nos dá a forma como a função S se comporta sob pequenas variações dos pontos extremos da trajetória do sistema. De fato, vale de maneira geral a identidade

$$S(\{q_j^{(1)}, q_j^{(2)}\}, t_1, t_2) = \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j^{(1)}} dq_j^{(1)} + \sum_j \frac{\partial S}{\partial q_j^{(2)}} dq_j^{(2)} + \frac{\partial S}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial S}{\partial t_2} dt_2, \quad (6.51)$$

da qual obtemos, por comparação direta à Eq. (6.50), as relações procuradas

$$\frac{\partial S}{\partial q_j^{(1)}} = p_j(t_1), \quad \frac{\partial S}{\partial q_j^{(2)}} = p_j(t_2), \quad \frac{\partial S}{\partial t_1} = -\mathcal{H}(t_1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial t_2} = -\mathcal{H}(t_2). \quad (6.52)$$

Notemos que todas as quantidades aí mencionadas são ‘constantes’ do ponto de vista da dinâmica, pois se referem ao ponto inicial e final já determinados *a priori* na trajetória. Embora a derivada parcial a unir momentos e posições seja uma velha conhecida, consequência de serem essas coordenadas canonicamente conjugadas, a relação entre t e \mathcal{H} nos remete a uma espécie de ‘canonicidade’ existente também entre o tempo e a hamiltoniana. Essa relação dual entre tempo e energia permanece na mecânica quântica, e de fato só evolui para algo mais claro quando as coordenadas de espaço são levadas ao status de ‘rótulos’, tal como o tempo, em teorias de campo.

A relevância dessas relações em nosso contexto se tornam mais claras se denotarmos de maneira diferente as quantidades de interesse. Escrevendo a função principal de Hamilton como a integral indefinida da ação na forma

$$S(\{q_j^{(0)}, q_j(t)\}, t_0, t) = \int_{t_0}^t \mathcal{L}(\{q_j, \dot{q}_j\}) dt', \quad (6.53)$$

as condições da Eq. (6.52) impõem para o ponto final da trajetória

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad (6.54)$$

nada mais do que as relações basilares da equação de Hamilton-Jacobi. Assim, essa equação surge da maneira como a integral de ação se modifica por pequenas variações no *ponto final* da trajetória. Adicionalmente, a Eq. (6.52) nos revela que a função principal deve satisfazer relações similares também no *ponto inicial*, i.e.

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = -\mathcal{H}^{(0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial q_j^{(0)}} = p_j^{(0)}, \quad (6.55)$$

em que $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}(t_0)$ e $p_j^{(0)} = p_j(t_0)$ são *constantes*. Generalizando esse conceito, a forma correta de atribuímos valores às constantes arbitrárias a_j das soluções da equação de Hamilton-Jacobi devem seguir a prescrição

$$\frac{\partial S(\{q_j, a_j\}, t)}{\partial a_j} = b_j, \quad (6.56)$$

em que b_j são novas constantes. Introduzimos por esse método 2 constantes para cada índice j , totalizando o número esperado de $2N$ constantes arbitrárias da dinâmica. Podemos entendê-las como as coordenadas imutáveis do novo espaço de fase, i.e. $Q_j = b_j$ e $P_j = a_j$, embora essa interpretação não tenha qualquer

consequência relevante. As soluções $q_j(\{a_j, b_j\}, t)$ para a dinâmica das posições são obtidas invertendo-se esse sistema de equações. Já as soluções para os momentos $p_j(\{a_j, b_j\}, t)$ requerem o uso da Eq. (6.15) juntamente com as soluções da Eq. (6.56) para as posições.

Que essa maneira de se escolher constantes é a correta pode ser visto considerando a derivada parcial da Eq. (6.31) com relação a a_j , que nos fornece, por um lado

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial a_j} = \frac{d}{dt} b_j = 0, \quad (6.57)$$

e, por outro,

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \frac{dS}{dt} = \sum_{j'} \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial t}. \quad (6.58)$$

Mas, segundo a Eq. (6.54), vale

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial t} = - \sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{j'}} \frac{\partial p_{j'}}{\partial a_j} = - \sum_{j'} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{j'}} \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial q_{j'}}, \quad (6.59)$$

de maneira que a Eq. (6.58), nula de acordo com a Eq. (6.57), estabelece

$$\sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial q_{j'}} \left(\dot{q}_{j'} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{j'}} \right) = 0. \quad (6.60)$$

Essa equação pode ser entendida como um produto de matrizes,

$$\mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{H}) = 0, \quad (6.61)$$

em que as matrizes coluna são $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dots \ \dot{q}_N)^T$ e $\partial_{\mathbf{p}} = (\frac{\partial}{\partial p_1} \ \frac{\partial}{\partial p_2} \ \dots \ \frac{\partial}{\partial p_N})^T$, e a matriz quadrada se define pelos elementos $\mathbf{S}_{jj'} = \frac{\partial^2 S}{\partial a_j \partial q_{j'}}$. Se a matriz S for inversível, então a única solução para essa equação é

$$(\dot{\mathbf{q}} - \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{H}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad (6.62)$$

que nos fornecem metade das equações de Hamilton. A outra metade advém da relação $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$, pois

$$\dot{p}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{dS}{dt} \stackrel{\text{Eq. (6.31)}}{=} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{j'} \frac{\partial S}{\partial q_{j'}} \dot{q}_{j'} + \frac{\partial S}{\partial t} \right) \stackrel{\text{Eq. (6.54)}}{=} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{j'} p_{j'} \dot{q}_{j'} - \mathcal{H} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j}, \quad (6.63)$$

i.e. as equações de Lagrange.

O fato crucial assumido nessa dedução é a inversibilidade da matriz \mathbf{S} , i.e. seu determinante não pode se anular. Isso significa que as constantes arbitrárias devem ser ‘independentes’ no sentido de que a matriz \mathbf{S} responsável pela transformação de coordenadas $q_j(\{a_j, b_j\}, t)$ precisa possuir linhas e colunas linearmente independentes. Essa é a condição imposta por Jacobi para que as diversas soluções da equação de Hamilton-Jacobi façam sentido físico e sejam consistentes com as equações canônicas.

Os passos a serem seguidos para a solução da dinâmica a partir do método de Hamilton-Jacobi se resumem aos seguintes:

1. Encontrar uma solução $S(\{q_j\}, t)$ qualquer da equação de Hamilton-Jacobi [Eq. (6.17)], na qual aparecerão naturalmente constantes arbitrárias a_j (tais como e.g. constantes de integração ou advindas de separação de variáveis).

2. Resolver o sistema da Eq. (6.56) em termos das posições $q_j(\{a_j, b_j\}, t)$.
3. Utilizar essas soluções para resolver o sistema da Eq. (6.15) para os momentos $p_j(\{a_j, b_j\}, t)$.

Exemplo revisitado: partícula livre. Voltemos às soluções da equação de Hamilton-Jacobi obtidas para a partícula livre nas Eqs. (6.24) e (6.29). Vamos determinar as soluções para o movimento utilizando a prescrição geral da Eq. (6.56).

No caso da função principal na forma da Eq. (6.29),

$$S = \frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)}. \quad (6.64)$$

temos por exemplo que

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = -\frac{m(x - x_0)^2}{2(t - t_0)^2} = b_0. \quad (6.65)$$

Resolver essa equação para a posição x nos fornece a solução

$$x(t) = x_0 + \sqrt{-\frac{2b_0}{m}}(t - t_0). \quad (6.66)$$

Já a solução para o momento p se torna

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = m \frac{x - x_0}{t - t_0} = \sqrt{-2mb_0} = cte. \quad (6.67)$$

Poderíamos aqui redefinir as constantes para simplificar a solução, denotando e.g. $p_0 = \sqrt{-2mb_0}$ para reescrevê-la da maneira familiar

$$x(t) = x_0 + p_0(t - t_0) \quad e \quad p = p_0. \quad (6.68)$$

No entanto, o significado físico da constante b_0 já poderia ter sido esclarecido desde o início pelo uso da Eq. (6.55), segundo a qual $b_0 = -E_0 < 0$, i.e. o negativo da energia mecânica do sistema. Temos assim que $p_0 = \sqrt{2mE_0}$, como esperado.

A solução alternativa para a função principal obtida na Eq. (6.29) deve ser compatível com a solução da Eq. (6.68) se seguirmos a mesma prescrição de Jacobi para a escolha das constantes. Começamos pela equação para o momento, que nos fornece diretamente uma constante,

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2m\beta}, \quad (6.69)$$

o que já identifica a constante β como a energia mecânica do sistema. A segunda constante arbitrária precisa ser encontrada a partir de β , a única constante útil disponível na Eq. (6.29). Definimos então

$$b_1 = \frac{\partial S}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{m}{2\beta}}x - t. \quad (6.70)$$

Isolando x , obtemos a solução

$$x = \sqrt{\frac{2\beta}{m}}(b_1 + t) = \frac{p}{m}(b_1 + t), \quad (6.71)$$

que possui a forma $x = \frac{p}{m}t + cte$, i.e. idêntica à Eq. (6.68) se rearranjarmos as constantes. As diferentes soluções para S geram, portanto, a mesma dinâmica, como desejado.

6.4 Função característica para hamiltoniana independente do tempo

Um cenário particular mas de especial importância para a dinâmica se dá quando a função hamiltoniana é conservada, i.e. não envolve o tempo explicitamente. Nesse caso, a única referência ao tempo na equação de Hamilton-Jacobi aparece na derivada parcial da própria função S , e podemos satisfazê-la com facilidade utilizando solução separável do tipo

$$S(\{q_j\}, t) = W(\{q_j\}) - Et, \quad (6.72)$$

em que omitimos na dependência de S a menção explícita às constantes arbitrárias $\{a_j, b_j\}$ envolvidas na solução do problema. A nomenclatura E para a constante de separação de variáveis foi empregada pelo fato de ser a hamiltoniana nesse tipo de cenário comumente igual à energia mecânica do sistema, embora isso não seja necessário. Supor esse tipo de solução para S reduz a equação diferencial a ser resolvida à forma

$$\mathcal{H}\left(\left\{q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}\right\}\right) = E. \quad (6.73)$$

A função W recebe o nome de *função característica de Hamilton*. Essa equação pode também ser entendida como mais uma demonstração de que a função hamiltoniana é uma constante caso não dependa explicitamente do tempo (mesmo que não represente a energia mecânica do sistema). A escolha de constantes arbitrárias consistentes em W segue prescrição similar àquela da Eq. (6.56), i.e.

$$\frac{\partial W(\{q_j, a_j\}, t)}{\partial a_j} = b_j, \quad (6.74)$$

a não ser que a constante escolhida seja justamente a constante E utilizada na separação de variáveis, quando então devemos escrever

$$\frac{\partial S}{\partial E} = b_j \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W(\{q_j, a_j\}, t)}{\partial E} = b_j + t \quad (6.75)$$

para obter a solução das posições $q_j(\{q_j, a_j, b_j\}, t)$. Podemos até mesmo denominar $b_j = -t_0$ para tornar essa equação mais familiar, embora a constante advinda da integração do membro esquerdo possa modificar esse arranjo se não for escolhida nula.

Vemos então que hamiltonianas independentes do tempo nos permitem resolver toda a dependência temporal, i.e. satisfazer a condição $\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}$ imposta à transformação canônica agindo sobre a hamiltoniana, pela simples introdução do termo $-Et$ na função principal S [Eq. (6.72)]. Já a parte da dinâmica particular ao sistema físico de interesse fica codificada na equação diferencial para a função característica W [Eq. (6.73)], uma equação a derivadas parciais independente do tempo. Escrever a hamiltoniana do sistema é, nesse caso, equivalente a escrever a equação diferencial para W .

Exemplo revisitado: oscilador harmônico. Apliquemos esse método ao oscilador harmônico simples. Sua hamiltoniana é conservada e corresponde à energia mecânica da partícula oscilante,

$$\mathcal{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 := E. \quad (6.76)$$

A equação diferencial para a função característica $W(x)$ se escreve, portanto,

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = E, \quad (6.77)$$

que pode ser resolvida por integração direta

$$W(x) = \int^x dx' \sqrt{2m \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x'^2 \right)}. \quad (6.78)$$

Mas as soluções do movimento podem ser por vezes obtidas sem a necessidade de se realizar a integração acima explicitamente.

A relação que produz a solução $x(t)$ é

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int^x \frac{dx'}{\sqrt{E - \frac{m\omega^2}{2} x'^2}} := b + t. \quad (6.79)$$

Calculando a integral, obtemos

$$\sqrt{\frac{m}{2E}} \int^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2E} x'^2}} = \frac{1}{\omega} \int^x \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x' \right)^2}} d \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x' \right) = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) + cte. \quad (6.80)$$

Substituímos esse resultado na Eq. (6.79) para obter

$$\frac{1}{\omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right) = t - t_0, \quad (6.81)$$

em que a constante de integração foi fagocitada pela constante b e se tornou $-t_0$. Invertendo essa relação, obtemos finalmente

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \phi), \quad (6.82)$$

em que a constante metamorfoseou-se agora para $\phi = -\omega t_0$. Poderíamos também escrever essa solução em termos da amplitude de oscilação $A = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$. A solução para o momento se obtém pela relação

$$p = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{2m \left(E - \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right)}. \quad (6.83)$$

Usando a solução para $x(t)$, obtemos

$$p(t) = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}} x \right)^2} = \sqrt{2mE} \cos(\omega t + \phi), \quad (6.84)$$

completando a dedução.

6.5 Função característica na presença de coordenadas cíclicas

O cenário de hamiltoniana independente do tempo possui similaridades matemáticas com o cenário de coordenadas cíclicas da hamiltoniana. Tempo e energia seguem relação similar àquela a unir pares conjugados de coordenadas [observe a Eq. (6.55)], e por isso a forma imediata de se resolver a dependência temporal de S quando o tempo não aparece explicitamente na hamiltoniana [Eq. (6.72)], pela adição do termo $-Et$, deve valer também para o caso de uma coordenada cíclica.

De fato, se uma coordenada q_α se encontra ausente da hamiltoniana, torna-se possível isolar na equação de Hamilton-Jacobi a derivada parcial $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ correspondente a seu momento conjugado, de forma a escrevê-la como

$$\mathcal{H}\left(\left\{q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}\right\}, \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}\right) = E \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = f\left(\left\{q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}\right\}\right), \quad (6.85)$$

em que f é uma função apenas das demais coordenadas q_j e suas derivadas parciais. Os dois membros dessa equação se referem a funções com dependências disjuntas, e por isso precisam ser ambos iguais à mesma constante, que precisa ser o valor do momento $p_\alpha = b_\alpha$ por construção. Assim, a solução para a função característica pode ser escrita em forma separável como

$$W(\{q_j\}, q_\alpha) = W'(\{q_j\}) + b_\alpha q_\alpha. \quad (6.86)$$

A função principal de Hamilton se torna por consequência

$$S(\{q_j\}, q_\alpha, t) = S'(\{q_j\}) + b_\alpha q_\alpha - Et. \quad (6.87)$$

Notemos a semelhança entre essa expressão e a transformada de Legendre, mais uma similaridade da relação energia-tempo com os pares conjugados da dinâmica.

Pragmaticamente, adotamos no tratamento de coordenadas cíclicas a forma da Eq. (6.87) para S e substituímos os valores constantes $p_\alpha = b_\alpha$ na hamiltoniana para tentar resolver a equação de Hamilton-Jacobi nas demais coordenadas.

Exemplo: Movimento de uma partícula em campo de forças central. A escolha de sistema de coordenadas também afeta a facilidade de resolução da equação de Hamilton-Jacobi, pois altera o número de coordenadas cíclicas. Nossa ideia em geral é maximizar esse número para podermos utilizar a solução separável da Eq. (6.87) no maior número possível de coordenadas.

No caso de energia potencial radialmente simétrica $U(r)$, sabemos estarem ausentes da interação as posições angulares, que portanto possuem alguma chance de serem cíclicas. Claro que algumas delas devem aparecer na energia cinética, mas o ganho compensa a perda. Por exemplo, se escolhermos trabalhar com coordenadas cartesianas, contamos com a vantagem de que a energia cinética não envolve qualquer posição; mas o preço a pagar é fazer aparecer na energia potencial nada menos do que todas as coordenadas de posição: de fato, um preço bem alto. Em coordenadas esféricas, apenas uma das coordenadas ausentes da energia potencial deixa de ser cíclica por conta da energia cinética. Temos a função hamiltoniana

$$\frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}p_\theta^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}p_\phi^2 + U(r) = 0, \quad (6.88)$$

em que p_r , p_θ e p_ϕ são os momentos canonicamente conjugados (i.e. momentos angulares newtonianos) às coordenadas esféricas de posição da partícula, r , θ e ϕ . As posições angulares θ e ϕ representam respectivamente os ângulos azimutal e polar, i.e. $\cos\theta = \hat{z} \cdot \vec{r}$.

A equação de Hamilton-Jacobi em coordenadas esféricas para um campo de forças central é

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + U(r) = 0. \quad (6.89)$$

A hamiltoniana é uma constante do movimento, e de fato igual à energia mecânica E do sistema, tornando o tempo similar a uma coordenada dinâmica cíclica, como vimos. O fato de ϕ não aparecer na hamiltoniana

já nos permite supor uma solução tal como a Eq. (6.87), em que a constante escolhida deve ser o valor conservado L_z (i.e. a projeção constante do momento angular na direção z) do momento p_ϕ . Podemos, no entanto, ser mais ambiciosos do que isso, dado que a coordenada θ aparece de forma simples, e buscar a solução totalmente separável

$$S(r, \theta, \phi, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + L_z\phi - Et. \quad (6.90)$$

Usando esse *Ansatz* na Eq. (6.89), obtemos

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} L_z^2 + U(r) = E. \quad (6.91)$$

Multiplicando a equação por $2mr^2$, conseguimos escrevê-la como uma soma de equações diferenciais em argumentos independentes, o que efetivamente separa essa equação em duas,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} L_z^2 = L^2 \\ \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) = E \end{cases}. \quad (6.92)$$

A constante de separação é o momento angular total L . Sua conservação pode ser inferida calculando-se os colchetes de Poisson entre sua expressão genérica $L(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ e a função hamiltoniana.

Ambas as equações podem ser escritas em forma integral isolando-se sua derivada parcial correspondente. Obtemos

$$\begin{cases} S_\theta(\theta) = \int^\theta \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta'}} d\theta' \\ S_r(r) = \sqrt{2m} \int^r \sqrt{E - U(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}} dr' \end{cases}. \quad (6.93)$$

Notemos que a função principal $S(\theta)$ só faz sentido numa faixa restrita de valores θ determinada pelas constantes fixadas L e L_z . A raiz quadrada do integrando requer

$$\sin \theta \geq \frac{L_z}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{2} - \frac{L_z}{L} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{L_z}{L}, \quad (6.94)$$

significando que a partícula não visita todos os ângulos θ , mas se mantém confinada a uma região em torno do plano $\mathcal{O}xy$. De fato, já sabemos que a solução geral do problema envolve nesse caso o movimento sobre um único plano, por conta da conservação do vetor momento angular total da partícula (que também pode ser demonstrada considerando-se os colchetes de Poisson entre cada uma de suas componentes $\vec{L}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ e a hamiltoniana). Por isso já poderíamos escolher o sistema de coordenadas de forma que $L_z = L$, de onde seguiria S_θ identicamente nula.

No caso geral, a expressão para a função principal de Hamilton pode ser escrita como

$$S(r, \theta, \phi, t) = \sqrt{2m} \int^r \sqrt{E - U(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}} dr' + \int^\theta \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta'}} d\theta' + L_z\phi - Et. \quad (6.95)$$

Uma vez encontrada uma solução para S , nosso próximo passo consiste em determinar as soluções para as posições $r(t)$, $\theta(t)$ e $\phi(t)$ da partícula usando a prescrição da Eq. (6.56), i.e. pela introdução de novas constantes dadas por derivadas parciais de S com relação a constantes já presentes na Eq. (6.95). Precisamos em princípio resolver um sistema de três equações do tipo

$$\frac{\partial S}{\partial a_r} = b_r, \quad \frac{\partial S}{\partial a_\theta} = b_\theta, \quad \frac{\partial S}{\partial a_\phi} = b_\phi, \quad (6.96)$$

em que denotamos as três novas constantes como b_r , b_θ e b_ϕ , e representamos as constantes já presentes na expressão para S como a_r , a_θ e a_ϕ .

A forma mais simples de resolvermos esse sistema é buscarmos equações independentes (se possível), escolhendo com essa ideia em mente as constantes em relação às quais derivar a Eq. (6.95). Em nosso caso, no entanto, não há qualquer escolha a ser feita, já que só nossa expressão só envolve três constantes arbitrárias.

Derivar com relação a L_z nos permite eliminar a primeira integral da Eq. (6.95) para obter uma equação relacionando ϕ a θ ,

$$\frac{\partial S}{\partial L_z} = -L_z \int \frac{1}{\sin^2 \theta' \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta'}}} d\theta' + \phi := b_\phi. \quad (6.97)$$

Essa integral pode ser resolvida para fornecer a curva $\phi(\theta)$ ou $\theta(\phi)$ relacionando seus ângulos azimutal e polar.

A derivada com relação a L nos fornece

$$\frac{\partial S}{\partial L} = -\frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{1}{r'^2 \sqrt{E - U(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}}} dr' + \int \frac{L}{\sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta'}}} d\theta' := b_\theta. \quad (6.98)$$

Essa equação provê a relação $r(\theta)$ ou $\theta(r)$, i.e. a posição azimutal da partícula com relação à sua distância da origem.

Finalmente, a derivada com relação à energia E produz a equação

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{E - U(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}}} dr' - t := b_r. \quad (6.99)$$

que nos fornece a solução radial $r(t)$.

Caso o problema possa ser simplificado por uma rotação dos eixos de referência tal que $L = L_z$, então as Eqs. (6.97) e (6.98) deixam de fazer sentido, uma vez que os numeradores dos integrandos divergem. É preciso nesse caso retornar à solução original para S considerando $L = L_z$ para reescrever a Eq. (6.95) como

$$S(r, \phi, t) = \sqrt{2m} \int^r \sqrt{E - U(r') - \frac{L^2}{2mr'^2}} dr' + L\phi - Et. \quad (6.100)$$

A derivada parcial com relação a L agora nos fornece uma equação unindo r e ϕ , que seria a curva seguida pela partícula no espaço (estudada na Seção 1.7). A derivada com relação à energia ainda fornece a Eq. (6.99), que portanto continua válida. Mesmo sem essa simplificação, o método de Hamilton-Jacobi nos fornece um procedimento mais simples para a resolução do problema central.

6.6 Princípio de mínima ação

Para um sistema descrito por uma hamiltoniana independente do tempo, a possibilidade de separação de variáveis na função S nos revela que o *formato* da curva de trajetória no espaço de fase e o *tempo* que o sistema leva para percorrer trechos da curva podem ser entendidos como *problemas separados*.

De fato, se a hamiltoniana é constante, i.e. $\mathcal{H} = E$, então a integral de ação pode ser parcialmente realizada,

$$S = \int_{t_0}^t \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt' = \int_{t_0}^t \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - E \right) dt' = \sum_j \int_{t_0}^t p_j \dot{q}_j dt' - E(t - t_0), \quad (6.101)$$

e recuperamos (a menos da constante irrelevante Et_0) a forma da Eq. (6.72) para a função principal de Hamilton como integral indefinida da ação. A integral restante é a função característica W .

A derivada temporal total de W nos fornece

$$\frac{d}{dt} W(\{q_j\}) = \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (6.102)$$

Mas vale

$$\frac{\partial W}{\partial q_j} = \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j, \quad (6.103)$$

do que segue

$$\frac{d}{dt} W(\{q_j\}) = \sum_j p_j \dot{q}_j. \quad (6.104)$$

Escrevendo essa expressão na forma integral, temos

$$W(\{q_j(t)\}) = \sum_j \int_{t_0}^t p_j \dot{q}_j dt, \quad (6.105)$$

tal como explicitado na Eq. (6.101).

Com essa construção, o princípio variacional nos permite entender propriedades da trajetória sob nova luz. Seu enunciado no contexto da integral de ação impõe

$$\delta S(\{q_j(t), p_j(t)\}) = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} \right) dt = 0. \quad (6.106)$$

Mas, se a hamiltoniana é constante, podemos pensar de forma mais simples. Em vez de considerarmos quaisquer variações possíveis $\delta q_j(t)$ e $\delta p_j(t)$ na trajetória do sistema, podemos usar a informação dada *a priori* de que $\mathcal{H} = E$ para restringir as variações de forma a manter essa condição válida, i.e.⁶

$$\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) = E \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{H} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \delta p_j := 0. \quad (6.109)$$

A hamiltoniana atua nesse caso como uma função de vínculo, relacionando as variações δq_j e δp_j entre si. Para essas variações mais estritas de trajetória, compatíveis com a conservação da energia, a condição da Eq. (6.106) passa a requerer

$$\delta S(\{q_j(t)\}, t) = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_j p_j \dot{q}_j dt = \delta W(\{q_j(t)\}) = 0. \quad (6.110)$$

⁶Usando a identidade $\delta q_j(t) = \int \delta(t' - t) \delta q_j(t') dt'$ e expressão análoga para δp_j , interpretamos a hamiltoniana como um funcional para escrevermos a expansão de primeira ordem

$$\delta \mathcal{H} = \sum_j \int \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_j(t')} \delta q_j(t') dt' + \sum_j \int \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j(t')} \delta p_j(t') dt', \quad (6.107)$$

da qual depreendemos que as derivadas funcionais da hamiltoniana são dadas por

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q_j(t')} = \delta(t' - t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \quad \text{e} \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_j(t')} = \delta(t' - t) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}. \quad (6.108)$$

Temos então a situação mais simples em que $\mathcal{H}(\{q_j, p_j\}) = E$ define uma hipersuperfície no espaço de fase⁷ e a trajetória deve ser escolhida como a curva que torna estacionária a integral de linha⁸ de $\sum_j p_j \dot{q}_j$.

Equivalentemente, a Eq. (6.110) nos permite dizer que a variação volta a ocorrer no espaço de configurações lagrangiano, de menor dimensão, já que os δp_j são efetivamente eliminados da variação da curva por estarem vinculados aos δq_j . Essa visão é especialmente intuitiva quando os q_j são coordenadas cartesianas no Espaço. É simples mostrar que a união dessas duas condições [Eq. (6.109) e Eq. (6.110)] resulta mais uma vez nas equações canônicas.

Para um sistema com energia potencial independente da velocidade e energia cinética com a forma

$$K(\{q_j, \dot{q}_j\}) = \sum_{jj'} M_{jj'}(\{q_j\}) \dot{q}_j \dot{q}_{j'}, \quad (6.115)$$

vale a identidade

$$\sum_j p_j \dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2K. \quad (6.116)$$

O princípio variacional na forma da Eq. (6.110) pode ser entendido como uma condição sobre a estacionariedade da energia cinética na trajetória,

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} K(\{q_j, p_j\}) dt = 0, \quad (6.117)$$

condição que em geral leva à sua maximização, ou seja, vai no sentido de minimizar o tempo de trânsito entre dois pontos. Como a hamiltoniana é conservada, vale $\mathcal{H} = K + U = E$, de maneira que a Eq. (6.117) ainda pode ser escrita como

$$\delta W = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E - U(\{q_j\})} dt = 0. \quad (6.118)$$

⁷Podemos aqui atentar novamente ao significado físico da curvatura da integral de ação no formalismo hamiltoniano, como havíamos feito na Seção 2.2.2 para o formalismo lagrangiano. Se a hamiltoniana é uma função constante nas trajetórias físicas, então suas derivadas funcionais de mais alta ordem também ficam acopladas entre si por relações análogas à Eq. (6.109). A curvatura da ação no espaço de fase passa a depender apenas da forma de W . Explicitamente, temos

$$\delta W = \sum_j \int (p_j \delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \delta p_j) dt = \sum_j \int (-\dot{p}_j \delta q_j + \dot{q}_j \delta p_j) dt, \quad (6.111)$$

do que segue para as derivadas funcionais

$$\frac{\delta W}{\delta \dot{q}_j(t)} = -\dot{p}_j \quad \text{e} \quad \frac{\delta W}{\delta q_j(t)} = \dot{q}_j. \quad (6.112)$$

Essas relações levam, como sabemos, às equações canônicas. A curvatura de W é dada pela variação dessas variações. Obtemos

$$\delta^2 W = \sum_j \int (-\delta \dot{p}_j \delta q_j + \delta \dot{q}_j \delta p_j) dt. \quad (6.113)$$

Mas as variações $\delta \dot{q}_j$ e $\delta \dot{p}_j$ também são restritas pela condição $\mathcal{H} = cte$, já que \dot{p}_j e \dot{q}_j obedecem as equações canônicas. Temos de considerar, assim, a variação

$$\delta^2 W = \sum_j \int \left[\delta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \delta \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right] dt, \quad (6.114)$$

que também é nula, pois $\delta^2 \mathcal{H} = 0$. Assim, se as trajetórias só puderem ser variadas de maneira compatível com a conservação de energia, a curvatura de W em cada dimensão δq_j ou δp_j do espaço de fase (e em dimensões cruzadas) está atrelada à curvatura da hipersuperfície determinada por $\mathcal{H} = cte$. Portanto, a imposição de estacionariedade da função característica apenas conecta sua curvatura àquela fornecida pela hamiltoniana no espaço de fase, e não introduz novo conteúdo físico.

⁸Esse integrando é o que se chamava de ‘ação’ antigamente. A regra de quantização de Sommerfeld postula que W seja um múltiplo de uma constante \hbar para sistemas periódicos (i.e. caminhos fechados no espaço de fase), condição *ad hoc* para a quantização da ‘ação’ que permite criar uma visão crua mas intuitiva do caráter ondulatório da matéria nas menores escalas.

Essa é a forma de Jacobi para o princípio de mínima ação. Usando a regra da cadeia para escrever $dq_j = \dot{q}_j dt$, podemos ainda colocar a Eq. (6.110) na forma do princípio de Maupertuis

$$\delta W(\{q_j(t)\}) = \delta \sum_j \int_{q_j^{(1)}}^{q_j^{(2)}} p_j dq_j = 0, \quad (6.119)$$

dado por uma integral de caminho no espaço de fase. A trajetória deve tornar estacionário o comprimento da curva seguida, com ‘pesos’ dados pelo momento em cada ponto. Se considerarmos os coeficientes p_j do elemento de linha $ds = \sqrt{\sum_j dq_j^2}$ como uma espécie de *métrica* na hipersuperfície $\mathcal{H} = E$, temos que a trajetória seguida pelo sistema deve ser uma *geodésica* cuja curvatura é controlada pela energia potencial: o movimento da partícula se curva como consequência da variação da energia potencial tal como um raio de luz se desvia por causa do índice de refração em meio inhomogêneo. Por exemplo, uma função energia potencial constante em todo o espaço, i.e. $p_j = cte$, requer de acordo com a Eq. (6.119) minimizar a distância entre os pontos inicial e final da trajetória: o sistema segue uma linha reta no espaço de configurações.

A solução do movimento passa agora pela função característica W , que controla o *formato* da trajetória, entendida como uma curva $\{q_j(s)\}$ parametrizada pela variável s com dimensão de distância. De fato, utilizar s como parâmetro (em lugar do tempo) é uma simplificação produzida pela separação de variáveis. Determinar a equação horária $s(t)$ passa a ser um problema unidimensional resolvido pela condição de conservação de energia. Podemos dizer que W resolve localmente o versor de direção seguido pela curva, enquanto E nos dá a velocidade com que cada trecho ds é percorrido no tempo.

Embora essa separação possa parecer artificial no caso da mecânica, uma vez que em geral a pergunta de interesse se refere à posição ocupada pelo sistema em função do tempo, ela se torna útil para comparar a mecânica à ótica geométrica, como fazemos a seguir. De fato, as velocidades envolvidas na propagação da luz foram durante muito tempo difíceis de se medir, sendo observáveis apenas os *caminhos* seguido pelos raios no Espaço. Assim, as equações da ótica geométrica se referem em geral ao formato de curvas de trajetória, e não ao tempo; colocar a mecânica na mesma formulação nos permite comparar as duas teorias.

6.7 Ótica geométrica e a equação de Hamilton-Jacobi

A roupagem de Hamilton-Jacobi para a mecânica clássica produz uma belíssima conexão com a ótica geométrica: se fizermos as identificações apropriadas, as trajetórias de partículas seguem regras matemáticas *idênticas* àquelas que regem as curvas seguidas por raios de luz. Como mostraremos a seguir, as equações a descreverem esses dois fenômenos, em princípio muito distintos do ponto de vista físico, são de fato idênticas caso troquemos algumas quantidades para transitar entre esses dois mundos.

À primeira vista, essa descoberta de Hamilton pode ser ingenuamente vista como mera coincidência. Raios são um modelo criado por Newton para descrever a propagação da luz numa época em que quase nada se sabia sobre esse fenômeno. A ideia construída por Newton é de fato muito parecida com sua descrição da mecânica (até mesmo porque ele acreditava ser a luz formada por partículas): dada uma posição por onde o raio passa e sua direção de movimento (tangente à curva), constrói-se sua trajetória conhecendo-se também alguma propriedade do meio capaz de alterar sua velocidade, algo análogo a um campo de forças (e Newton realmente desenvolveu modelos para entender as forças capazes de curvarem os raios de luz, tal como ocorre e.g. na interface entre dois meios, no fenômeno de refração). Bem, se os mesmos conceitos de posição

e velocidade podem ser utilizados para descrever tanto partículas quanto a luz, nada há de extraordinário na unificação entre ótica e mecânica (até porque Newton já havia feito isso).

O interessante dessa conexão aparece com as evidências experimentais cada vez mais fortes de que a luz estaria ligada a um fenômeno *ondulatório*. Na visão capitaneada por Huygens, frentes de onda seriam a chave para entender a propagação da luz em sua totalidade, inclusive explicando efeitos de difração⁹. As frentes de onda de Huygens são superfícies distanciadas pelo mesmo número de ondas da fonte, i.e. superfícies de fase constante, e por isso sempre perpendiculares aos raios newtonianos¹⁰. Young desenvolveu a visão mais apurada de que cada raio teria a ele associada uma fase determinada pela distância percorrida desde a fonte, tal que a intensidade da luz em pontos de interseção dos mesmos deveria ser calculada pela superposição de amplitudes, dando origem a efeitos de *interferência*.

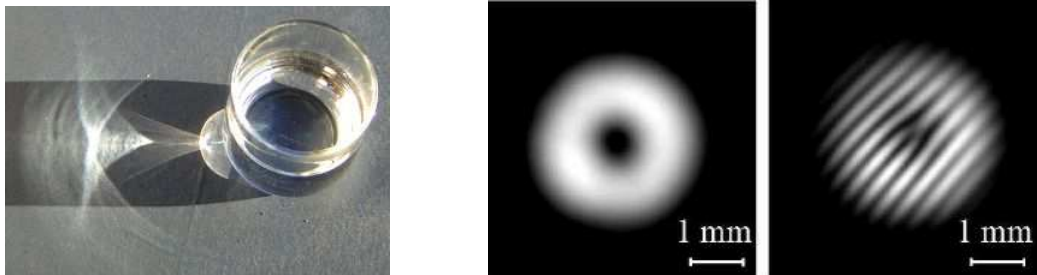


Figura 6.2: Sutilezas da ótica geométrica. Esquerda: cáusticas (pontos de convergência de raios de luz) ocorrem todos os dias, tal como essas produzidas por um copo comum de água comum iluminado de maneira comum [fonte: Wikipedia]. Direita: Perfil de intensidade e de fase de um feixe laser com modo espacial de Laguerre-Gauss (vulgo ‘modo rosquinha’); o vórtice de fase pode ser visto no quadro à direita, onde curvas de fase constante aparecem como resultado de interferência com outro feixe de referência (não mostrado); em especial, nota-se que a curva a passar pelo centro do feixe se divide em duas (vulgo ‘garfinho’), indicando a presença de momento angular orbital no feixe [fonte: S. G. Garanin, F. A. Starikov and Yu. I. Malakhov, “Adaptive Optics and Optical Vortices”, in “Adaptive Optics Progress”, R. K. Tyson (ed.), 2012].

Como vemos, embora haja semelhanças entre a mecânica newtoniana e o modelo de raios para a ótica geométrica, existem também importantes diferenças, o que torna aproximadamente inacreditável a existência de uma conexão entre propagação da luz e o movimento de partículas. Na verdade – e esse seria o caminho tomado pelos pioneiros da mecânica quântica –, a ótica geométrica deve ser entendida como uma aproximação para descrever o comportamento de ondas num certo limite, quando o comprimento típico associado às ondas é muito menor do que as distâncias envolvidas na propagação ou do que o ‘tamanho’ transversal de um raio.

⁹Muito embora Newton conseguisse descrever também esses fenômenos com seu modelo corpuscular, o que tornaria a questão ‘luz: onda ou partícula?’ algo intensamente debatido por dois séculos. Foram as discussões iniciadas no início do século XIX pela academia francesa de ciências que levaram à resposta definitiva de que luz (como objeto clássico) é totalmente explicada por um fenômeno ondulatório. Notemos que as primeiras evidências de comportamento corpuscular da luz viriam somente no início do século XX, em outro contexto (totalmente diferente de tudo o que havia sido visto antes) e, de maneira irônica, junto ao questionamento oposto de que a matéria poderia apresentar comportamento ondulatório. A teoria quântica viria a agregar as duas visões colocando as ondas como objeto mais fundamental subjacente a tudo (campos). O caráter corpuscular de objetos, por ser algo mal definido (de fato, ‘partícula’ quer muitas vezes dizer apenas ‘algo localizado no Espaço’), parece decorrer simplesmente como consequência da localização das interações, i.e. pelo fato de que toda interação física é local.

¹⁰Tanto na teoria de raios quanto na de frentes de onda há problemas de singularidades em pontos nos quais os raios se encontram (‘cáustica’) ou as superfícies se dividem (‘vórtices de fase’). Apenas uma teoria ondulatória para a luz baseada nas leis de Maxwell pode lidar com essas situações mais delicadas e outras, tais como efeitos vetoriais do campo (polarização).

A mecânica clássica, por se assemelhar à ótica geométrica, poderia ser entendida da mesma forma, restando descobrir como estendê-la para descrever trajetórias em dimensões comparáveis às ondas hipotéticas que estariam associadas à matéria (bem, e descobrir que escala seria essa).

Conforme tentaremos motivar aqui, a mecânica clássica está para a ótica geométrica assim como a mecânica quântica de Schrödinger está para a teoria ondulatória da luz. As trajetórias das partículas no espaço de fase podem ser entendidas como objetos análogos aos raios na ótica: uma descrição efetiva de comportamento corpuscular de algo que, fundamentalmente, é ondulatório. Portanto, assim como efeitos de difração da luz precisam de todo o formalismo ondulatório de Maxwell para serem entendidos, a mecânica de Hamilton-Jacobi precisará ser estendida à mecânica quântica de Schrödinger para descrever corretamente efeitos ondulatórios no movimento.

6.7.1 Raios de luz e a lei de Snell-Descartes

A descrição das trajetórias seguidas por raios de luz se faz com três pedaços de informação: uma posição \vec{r} da curva desenhada pelo raio, o versor \hat{v} de direção instantânea de propagação nesse ponto da curva, e o índice de refração $n(\vec{r})$ do meio. O índice de refração é por definição uma propriedade macroscópica média do meio e, como tal, assumido constante (ou lentamente variável) na escala do comprimento de onda da luz propagante. O problema consiste em determinar a curva $\vec{r}(s)$ seguida pelo raio no Espaço, em que a parametrização s representa o comprimento percorrido sobre a curva.

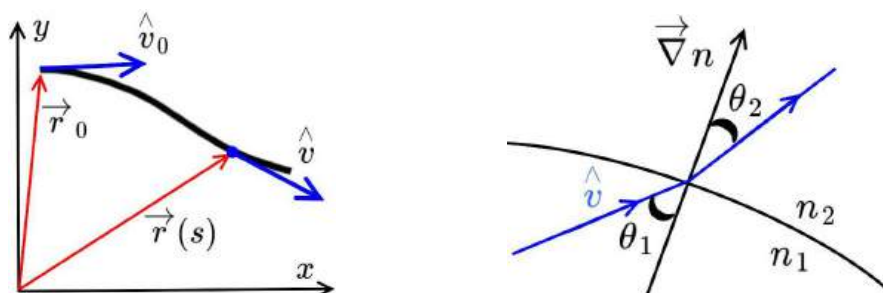


Figura 6.3: Esquerda: parametrização de uma curva no espaço. Direita: representação esquemática de raio de luz cruzando interface entre duas regiões infinitesimais com índices de refração distintos.

Precisamos para tanto de uma regra que nos permita encontrar o próximo ponto da curva a partir de um ponto conhecido (condição inicial), a lei de Snell-Descartes. Essa lei nos diz que na interface entre dois meios com índices de refração n_1 e n_2 os ângulos de propagação dos raios com relação ao versor normal à superfície de separação respeitam a regra

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (6.120)$$

Para generalizar essa relação, fazemos a espessura de cada meio ir a um infinitésimo, caso em que representam fatias de um meio inhomogêneo com índice de refração $n(\vec{r})$. A direção normal às superfícies $n = cte$ é dada precisamente pelo gradiente de n (Fig. 6.3).

A lei de Snell-Descartes prescreve como atualizar o ângulo entre o versor \hat{v} do raio e o gradiente $\vec{\nabla}n$ do índice de refração a cada distância infinitésima ds percorrida pelo raio. Mais do que isso, ela estabelece

que o vetor hipotético $\vec{n} = n\hat{v}$ tem como constante sua componente (relativa) tangencial à superfície. Se sabemos como variam a magnitude desse vetor (proporcional a n) e sua direção (mantendo a componente tangencial $n \sin \theta = cte$ em todo o caminho), podemos já escrever a equação diferencial para a curva traçada pelo raio. A maneira mais detalhada seria calcular separadamente as variações de direção e de magnitude pela lei de Snell-Descartes, mas esta se revela demasiado prolixa. Existe uma forma mais simples e direta de fazermos aparecer em uma só expressão a magnitude e a direção do vetor \vec{n} ; conforme percorremos uma distância ds sobre a curva desenhada pelo raio, consideramos o diferencial da identidade

$$(n\hat{v})^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{v} \cdot \frac{d}{ds}(n\hat{v}) = \frac{dn}{ds}. \quad (6.121)$$

A variação de n com s requisitada no membro direito é dada pela componente de $\vec{\nabla}n$ na direção de propagação, i.e.

$$\frac{dn}{ds} = \hat{v} \cdot \vec{\nabla}n. \quad (6.122)$$

A validade dessa identidade se torna clara ao considerarmos casos limites: um raio movendo-se paralelamente à direção do gradiente deve sentir maximamente seu efeito (i.e. $\frac{dn}{ds} = |\vec{\nabla}n|$), enquanto um raio que siga exatamente uma linha $n = cte$ não sofre qualquer alteração (i.e. $\frac{dn}{ds} = 0$). A Eq. (6.122) estabelece que no caso intermediário devemos considerar a projeção do gradiente sobre a curva para calcular a variação de n quando nos movemos sobre a mesma. A Eq. (6.121) nos fornece, portanto,

$$\hat{v} \cdot \frac{d}{ds}(n\hat{v}) = \hat{v} \cdot \vec{\nabla}n. \quad (6.123)$$

Mas os dois vetores que aparecem multiplicando \hat{v} são paralelos. O gradiente é por construção ortogonal à superfície de interface $n = cte$, e, pela lei de Snell-Descartes, também a variação do vetor $\vec{n} = n\hat{v}$, já que sua componente tangente é por definição constante. Podemos então igualá-los para escrever a *equação diferencial para os raios* da ótica geométrica como

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{\nabla}n, \quad (6.124)$$

em que definimos o arco direcional $d\vec{r} = \hat{v}ds$ para conectar a direção de propagação e a magnitude ds da distância percorrida sobre a curva.

Exemplo: Meio homogêneo. Um feixe de luz propagando-se num meio com índice de refração constante segue linhas retas. Esse resultado pode ser deduzido facilmente da Eq. (6.124). Para um meio homogêneo, temos

$$n = n_0 = cte \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}n = 0, \quad (6.125)$$

e a equação diferencial para os raios nos fornece

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad n \frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{v}_0, \quad (6.126)$$

em que \hat{v}_0 é a direção inicial de propagação do feixe, i.e. $\frac{d\vec{r}(s=0)}{ds} = \hat{v}_0$. Integrando mais uma vez essa equação, obtemos

$$\vec{r}(s) = \frac{1}{n} \hat{v}_0 s + \vec{r}_0. \quad (6.127)$$

As superfícies de fase constante são *planos paralelos* definidos em termos de versores normais \hat{v}_0 .

6.7.2 Analogia newtoniana entre energia potencial e índice de refração

A analogia entre a lei de Snell-Descartes e a equação de Newton é, de fato, perfeita. Para torná-la bastante visível, consideremos uma única partícula movendo-se através da interface entre duas regiões do Espaço com valores distintos U_1 e U_2 de energia potencial¹¹. A segunda lei de Newton reza que ao atravessar essa interface a partícula deve manter constante seu momento transversal (i.e. paralelo à interface), já que não há qualquer força nessa direção, e sofrer variação apenas em sua componente longitudinal (paralela à direção do gradiente de energia potencial), regra que pode ser escrita da maneira sugestiva

$$p_1 \sin \theta_1 = p_2 \sin \theta_2. \quad (6.128)$$

Assim como no caso da lei de Snell-Descartes para um raio de luz em situação similar, a interface modifica de forma abrupta a direção e a magnitude da velocidade da partícula através de sua componente longitudinal.

Devemos nesse caso considerar um vetor ‘abstrato’ $\vec{p}(s) = p(s)\hat{v}(s)$, parametrizado pelo comprimento s sobre a curva, cuja direção faz parte da condição inicial do movimento e cuja magnitude depende do valor da energia potencial em cada região, uma vez que, como é conservada a energia mecânica, vale

$$\frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = E \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{U}{E}}. \quad (6.129)$$

Assim como no caso dos raios de luz da ótica geométrica, a forma mais simples de tratarmos a variação conjunta de magnitude e direção de \vec{p} considera o diferencial em s da quantidade

$$(p\hat{v})^2 = p^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{v} \cdot \frac{d}{ds}(p\hat{v}) = \frac{dp}{ds}. \quad (6.130)$$

A variação da magnitude do momento na curva (consequência da variação da energia potencial) se relaciona a seu gradiente pela relação

$$\frac{dp}{ds} = \hat{v} \cdot \vec{\nabla} p, \quad (6.131)$$

de maneira que a Eq. (6.130) nos fornece

$$\hat{v} \cdot \frac{d}{ds}(p\hat{v}) = \hat{v} \cdot \vec{\nabla} p. \quad (6.132)$$

Mas ambos os vetores projetados sobre o versor velocidade \hat{v} são paralelos: de fato, a lei de Newton nos diz que a variação do vetor \vec{p} só pode ocorrer na direção do gradiente da magnitude de p . Escrevendo a direção da velocidade como $\hat{v} = \frac{d\vec{x}}{ds}$, i.e. tangente à curva de trajetória, obtemos¹²

$$\frac{d}{ds} \left(p \frac{d\vec{x}}{ds} \right) = \vec{\nabla} p. \quad (6.133)$$

A comparação entre as Eqs. (6.124) e (6.133) revela que a curva seguida por um raio de luz é a mesma traçada por uma partícula caso índice de refração e magnitude do momento sejam identificados entre si.

¹¹Evitamos por enquanto o uso do formalismo hamiltoniano para traçar o paralelo ótico-mecânico pelo fato de que raios de luz movem-se no Espaço, enquanto um sistema mecânico hamiltoniano se move num espaço de configurações abstrato.

¹²Notemos que até este ponto não faz diferença utilizar o momento ou a velocidade da partícula na analogia ótico-mecânica, já que a variação de \vec{p} fica escrita em termos de seu próprio gradiente. A utilidade de se empregar o momento reside no fato de podermos utilizar a mesma energia potencial $U(\vec{r})$ para descrever o movimento de qualquer partícula, independentemente de sua massa. A massa nos diz apenas que cada partícula perceberia um potencial efetivo diferente caso considerássemos apenas variações de velocidade.

Na verdade, por estarmos pensando tacitamente em propriedades do meio em que luz ou partícula se propaga, a relação relevante aqui é entre *índice de refração* e *energia potencial*, tendo em vista a Eq. (6.129). Identificamos

$$n(s) \leftrightarrow \frac{p(s)}{\sqrt{2mE}} \quad \Rightarrow \quad n(\vec{r}) \leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{U(\vec{r})}{E}}, \quad (6.134)$$

em que respeitamos o fato de que o índice de refração é uma grandeza adimensional.

A analogia ótico-mecânica reconhece a energia potencial como uma espécie de índice de refração no que concerne o *formato* das curvas traçadas por partículas no Espaço (notemos como referências explícitas ao tempo precisam ser evitadas na analogia). Isso nos permite fazer o caminho reverso e utilizar o fato de que seguem a mesma equação diferencial – uma vez feita a identificação da Eq. (6.134) – para escrever o princípio global, rigorosamente deduzido na mecânica, que deve ser seguido por analogia pelos raios de luz. É preciso nesse caso empregar a Eq. (6.119), escrita no Espaço como a condição

$$\delta W(\vec{r}) = \delta \int_C \vec{p} \cdot d\vec{r} = \delta \int_0^\ell p \, ds = 0, \quad (6.135)$$

em que ℓ é o comprimento da curva C . A identificação da Eq. (6.134) nos permite inferir que as trajetórias seguidas por raios de luz devem satisfazer o princípio variacional

$$\delta \int_0^\ell n \, ds = 0. \quad (6.136)$$

Reconhecendo o índice de refração como o inverso da velocidade, i.e.

$$ds = \frac{c}{n} dt \quad (6.137)$$

a Eq. (6.136) pode ser levada de volta ao domínio temporal como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt = 0, \quad (6.138)$$

conhecido como o *princípio de Fermat*: de todas as curvas possíveis entre dois pontos no Espaço, um raio de luz segue aquela que minimiza o tempo total de percurso. Assim, o princípio de Hamilton da mecânica se traduz formalmente no princípio de mínimo tempo da ótica geométrica¹³.

6.7.3 Analogia entre o eikonal e a função principal de Hamilton

Embora a teoria newtoniana já aponte como ótica e mecânica poderiam ser unificadas, a verdade é que a conexão não funciona perfeitamente dessa forma. O motivo é o fato experimental que relaciona o índice de refração ao inverso da velocidade da luz no meio [Eq. (6.137)], justamente o oposto do que deveria ser caso houvesse partículas mecânicas de luz [Eq. (6.134)]. Podemos dizer também que o princípio de Hamilton traduzido para a ótica nos fornece o princípio de Fermat (como vimos acima), e não o princípio de Maupertuis, como esperado pelos defensores da hipótese newtoniana para as partículas de luz.

¹³Notemos a importante diferença entre a mecânica e a ótica no que concerne ao integrando usado no princípio variacional. No caso da mecânica, o momento é proporcional à velocidade da partícula; na ótica, o índice de refração (a quantidade análoga ao momento) fornece o *inverso* da velocidade. Esse é o motivo que nos restringe a falar apenas de formatos de curva na comparação ótico-mecânica, e não do tempo; de forma equivalente, esse mesmo motivo nos impede de escrever o princípio variacional da mecânica como mera minimização do tempo de percurso, como no caso da ótica.

A analogia ótico-mecânica é de fato mais sutil do que previa Newton. Ela funciona perfeitamente não para os raios de luz, mas para as *frentes de onda* associadas aos raios. A ótica geométrica nesse caso é obtida como um limite da equação de onda para o campo eletromagnético, a *equação do eikonal*.

Consideremos o potencial escalar $\phi(x, y, z, t)$ e a equação de Maxwell num meio material com índice de refração n . A propagação do campo deve obedecer à equação de onda

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (6.139)$$

em que $v = c/n$ é a velocidade de propagação de uma onda plana no meio. O tipo de solução aproximada que dá origem aos raios da ótica geométrica supõe um meio cujo índice de refração $n(x, y, z)$ varia ‘lentamente’ no Espaço, significando que a onda percebe alterações muito sutis com relação à sua escala própria de variação espacial, seu vetor de onda \vec{k} . Assim, ‘lentamente’ significa que n varia em escalas espaciais muito maiores do que o comprimento de onda λ da luz, proporcional ao inverso de k . Portanto, a ótica de raios é obtida no limite em que $k \rightarrow \infty$ com relação a todas as demais escalas do problema. Supomos então uma solução para a equação de onda na qual toda a variação esteja contida na *fase espacial* da onda, do tipo

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0(x, y, z, t) e^{i(k\ell - \omega t)}, \quad (6.140)$$

em que $\ell = \ell(x, y, z, t)$ representa o *caminho ótico* percorrido pela luz, $\omega = kv$ é a frequência (cor) da luz e $\phi_0(x, y, z, t)$ é a amplitude (lentamente variável) da onda¹⁴. Nesse limite, nossa missão passa a ser determinar a função $\ell(x, y, z)$ para o caminho ótico entre a fonte e a posição considerada, por vezes chamada de ‘eikonal’¹⁵.

Se k é a escala dominante do sistema, as derivadas espacial e temporal da Eq. (6.140) fornecem

$$\nabla^2 \phi \approx -k^2 \left[\left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial z} \right)^2 \right] \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \approx -\omega^2 \phi, \quad (6.141)$$

pois derivadas parciais de ϕ_0 com relação a k ou t são desprezíveis por hipótese, com o que a equação de onda se torna simplesmente

$$\left(\frac{\partial \ell}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ell}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (6.142)$$

conhecida como ‘equação do eikonal’. As superfícies de *frente de onda*, dadas por $\ell(x, y, z) = cte$, são ortogonais ao vetor de onda \vec{k} por construção e fornecem nesse caso \vec{k} toda a informação sobre as ondas de luz.

Observemos que a equação do eikonal possui a *mesma forma* da equação de Hamilton-Jacobi, permitindo finalmente a construção de uma analogia perfeita entre quantidades da ótica geométrica e da mecânica. De fato, a Eq. (6.15) para a transformação canônica gerada pela função principal S se traduz para o Espaço descrito em termos de coordenadas cartesianas como

$$\vec{\nabla} S(\vec{r}, t) = \vec{p}, \quad (6.143)$$

ou seja, o momento newtoniano \vec{p} deve ser associado ao gradiente da função principal, sendo portanto normal a qualquer superfície $S(\vec{r}, t) = cte$. Para tornar perfeita a analogia ótico-mecânica, consideremos a forma

¹⁴‘Lentamente variável’ significa que ϕ_0 não varia apreciavelmente em escalas espaciais da ordem do inverso de k nem em escalas temporais da ordem do inverso de ω ; ou seja, a função se comporta como uma constante nessas escalas.

¹⁵O termo ‘eikonal’ tem origem na palavra grega para ‘imagem’.

explícita da Eq. (6.143). Temos então $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ para as coordenadas de posição; pelo lado do momentos, temos $p_1 = p_x$, $p_2 = p_y$, $p_3 = p_z$. A Eq. (6.143) nos fornece

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_y, \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_z. \quad (6.144)$$

Mas a função S deve satisfazer a equação de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 + U(\vec{r}) = E, \quad (6.145)$$

em que $(\vec{\nabla}S)^2 = \vec{\nabla}S \cdot \vec{\nabla}S$, do que segue a equação

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = p, \quad (6.146)$$

na qual usamos $\sqrt{2m(E - U)} = p$. Comparando esta à Eq. (6.142), encontramos novamente a relação $n \leftrightarrow p$, porém agora com a troca adicional

$$\ell(x, y, z) \leftrightarrow S(x, y, z), \quad (6.147)$$

ou seja, caminho ótico e função de Hamilton desempenham essencialmente o mesmo papel, cada qual em seu contexto. Essas duas substituições tornam ótica geométrica e mecânica idênticas no que tange à determinação de raios e trajetórias. A diferença entre as duas teorias passa a ser essencialmente física, i.e. relativa à interpretação física das quantidades de que tratam. Enquanto a Eq. (6.143) ‘pilota’ as trajetórias no sentido de que lhes controla em cada ponto do Espaço os possíveis momentos, fornecendo com isso direção e velocidade locais da trajetória, a Eq. (6.146) nos diz como as superfícies $S = cte$ se comportam como função da energia cinética disponível na posição \vec{r} . No entanto, ao contrário da ótica, a função S aparece como mero ‘artifício matemático’ no caso da mecânica clássica, não fazendo em geral sentido tentar entendê-la como uma frente de onda (afinal, onda de quê?). A mecânica quântica viria a dar os próximos desenvolvimentos interpretativos para essa função.

Exemplo: Partícula livre. Para determinar a função $S(x, y, z)$ (e com isso investigar um sistema específico), é em geral necessário ainda incluir constantes adicionais pelo uso de derivadas parciais $\frac{\partial S}{\partial a_j} = b_j$, como discutido anteriormente. Mas os elementos essenciais do comportamento de S podem ser visualizados já no tipo mais simples possível de movimento, i.e. para uma partícula livre. A hamiltoniana nesse caso é cíclica em \vec{r} , e podemos supor diretamente a solução

$$S(\vec{r}, \vec{p}_0, t) = \vec{p}_0 \cdot \vec{r} - Et. \quad (6.148)$$

Essa solução satisfaz a Eq. (6.143) com $\vec{p} = \vec{p}_0$, em que \vec{p}_0 é o momento constante da partícula, e a Eq. (6.146) nos fornece a familiar relação $E = p_0^2/(2m)$.

As superfícies $S = cte$ são nesse caso planos no Espaço com inclinação dada pelo vetor normal \vec{p}_0 (Fig. 6.4). As trajetórias da partícula para o conjunto de condições iniciais $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ formam retas perpendiculares a esses planos. O termo $-Et$ em S faz com que seus valores se desloquem no tempo, movimentando o plano $S = S_0$ ao longo da direção dada pelo vetor \vec{p}_0 . A velocidade com que o plano se move pode ser encontrada analisando seu deslocamento entre dois instantes diferentes de tempo, i.e.

$$S_0 = \vec{p}_0 \cdot \vec{r} - \frac{p_0^2}{2m}t = \vec{p}_0 \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \frac{p_0^2}{2m}(t + \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\vec{p}_0}{m}, \quad (6.149)$$

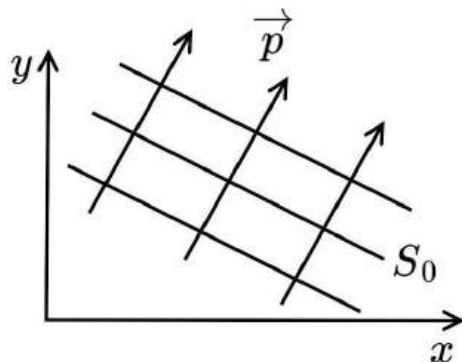


Figura 6.4: Corte bidimensional dos planos $S = cte$ no Espaço. As soluções possíveis para \vec{p} cortam perpendicularmente todos os planos, sendo ‘pilotadas’ pelos mesmos.

o que nos dá *metade* da velocidade da partícula. Essa estranha discrepância fica esclarecida ao obtermos a solução do movimento, pelo uso em cada direção Espacial da condição

$$\frac{\partial S}{\partial p_j} = q_j - \frac{\partial E}{\partial p_j} t := q_j^{(0)}, \quad (6.150)$$

que pode ser escrita como

$$q_j(t) = \frac{p_j}{m} t + q_j^{(0)}. \quad (6.151)$$

Ou seja, a velocidade da partícula se calcula na verdade pela *velocidade de grupo*

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p_0}{m}, \quad (6.152)$$

e não pela velocidade sugerida pelo movimento dos planos $S = cte$, i.e. a *velocidade de fase*. De fato, uma partícula que se movesse com a velocidade de fase teria de estar deslocalizada no espaço como uma onda plana e... bem, não seria uma partícula no sentido mais elementar de estar localizada no Espaço!

Vemos disso tudo que dada superfície $S = cte$ de uma partícula livre se comporta como uma superfície de fase constante de uma *onda plana* propagante; a trajetória da partícula segue nesse contexto *retas* localmente perpendiculares a essas superfícies em instantes diferentes do tempo, tais como raios de luz movendo-se num meio homogêneo [Eq. (6.127)]. Da mesma maneira, ondas planas estão associadas na ótica a raios que se propagam em linhas retas; a conexão entre ondas planas e partículas livres se mantém na mecânica quântica.

6.8 Conexões com a descrição ondulatória da mecânica quântica

A abordagem da ótica geométrica para a propagação da luz, em termos de raios entendidos como curvas bem definidas no Espaço, vale no limite em que efeitos de difração podem ser desprezados, i.e. quando a ‘resolução’ com que se observa o caminho percorrido pelas ondas eletromagnéticas é muito grosseira em comparação ao comprimento de onda típico envolvido. Esse regime se caracteriza por superfícies de fase constante possuidoras de *curvaturas lentamente variáveis* na escala de comprimento de onda da luz (equação do eikonal).

Se, pelo contrário, as dimensões em que se analisa a propagação da luz são da ordem de seu comprimento de onda, como ocorre e.g. na propagação através de uma fenda microscópica, ou em torno de obstáculos

com dimensões similares, é preciso corrigir a teoria ‘corpúscular’ da ótica geométrica para lidar com o caráter inerentemente ondulatório da luz. Nesse regime, as superfícies de fase constante passam a apresentar variações de curvatura em dimensões *da ordem* do comprimento de onda típico envolvido.

A forte analogia entre as equações da mecânica e a ótica geométrica nos leva a desconfiar de que deve existir, oculta para além da precisão dos experimentos realizados até a época de Hamilton e Jacobi (e, de fato, até várias décadas posteriores), uma teoria ondulatória da matéria. A mecânica clássica seria uma teoria *aproximada* do movimento, válida no limite em que os comprimentos de onda associados às trajetórias das partículas fossem muito menores do que a resolução com que o espaço de fase poderia ser hipoteticamente sondado em experimento.

De fato, essa visão começaria a se concretizar com as primeiras investigações da interação luz-matéria na virada dos séculos XIX e XX, quando a observação de efeitos quânticos indiretos do movimento em regimes de ‘alta’ (para a época) energia por partícula, tal como as linhas espectrais de emissão atômica, começaram a se tornar óbvios nos experimentos.

À parte alguns ‘detalhes’, a mecânica clássica na roupagem do método de Hamilton-Jacobi já nos permite vislumbrar elementos de como deve ser uma teoria ondulatória da matéria, dado que esta deve necessariamente se reduzir no limite macroscópico às regras matemáticas daquela, estabelecidas como foram ao longo de nada mais nada menos do que três séculos de muita experimentação e teoria (enfim, de muita diversão).

6.8.1 Equação de onda de Schrödinger

Se efeitos ondulatórios começam a se tornar importantes, devemos esperar que sejam produzidos em primeira aproximação por fases rapidamente variáveis, uma vez que fases são capazes de produzir efeitos dramáticos na amplitude resultante por conta de interferência (mesmo para amplitudes iniciais aproximadamente constantes). É conveniente supor então que a função principal de Hamilton seja o termo de fase de uma amplitude de onda $\psi(\vec{r}, t)$ com módulo constante em primeira aproximação¹⁶,

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{i\frac{S(\vec{r}, t)}{\hbar}}, \quad (6.153)$$

A constante de escala \hbar é necessária para tornar adimensional o argumento da exponencial, e precisa ter a mesma unidade de ação (área no espaço de fase), i.e. energia vezes tempo (ou momento vezes distância – ou, ainda, momento angular). Fisicamente, ela fornece a escala típica das estruturas ondulatórias do espaço de fase. A única afirmação que podemos fazer sobre o valor de \hbar é que deve ser pequeníssimo¹⁷.

Consideremos por simplicidade um sistema formado por uma única partícula. Queremos obter uma equação para a *amplitude de onda* ψ a partir da equação de Hamilton-Jacobi para a *fase* dessa onda [Eq. (6.145)]. O termo de energia cinética dessa equação envolve $\vec{\nabla}S$, e por isso poderíamos tentar diretamente tomar o gradiente da Eq. (6.153) para obter

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{i}{\hbar} e^{i\frac{S}{\hbar}} \vec{\nabla}S = \frac{i}{\hbar} \psi \vec{\nabla}S \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}S = -i\hbar \frac{\vec{\nabla}\psi}{\psi}. \quad (6.154)$$

¹⁶Essa expressão na verdade ainda permite levar em conta efeitos de módulo variável da amplitude de onda, bastando supor para isso S complexa. Escrita nessa forma, ela é uma identidade. Vamos supor aqui S real, tornando-a uma aproximação.

¹⁷Por causa da dimensão de momento angular de \hbar , poderíamos tentar estimar seu valor considerando o menor momento angular concebível, e.g. aquele de um elétron movendo-se em torno de um núcleo no modelo de Bohr.

Já a derivada temporal de S requer invertermos a Eq. (6.153),

$$S = -i\hbar \ln \psi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -i\hbar \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (6.155)$$

Substituindo diretamente esses resultados na equação de Hamilton-Jacobi, obteríamos

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + U = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\hbar \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\vec{\nabla} \psi}{\psi} \right)^2 + U = 0 \quad (6.156)$$

resultando na equação

$$-i \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \psi^2}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \psi)^2 + U \psi^2 = 0. \quad (6.157)$$

Embora seja por construção compatível com a equação de Hamilton-Jacobi para a dinâmica clássica, essa equação para a hipotética amplitude de onda ψ possui a propriedade indesejável de ser não-linear em ψ , não admitindo o uso do valioso princípio da superposição de soluções linearmente independentes e por isso não sendo, no final das contas, uma onda.

Vemos aqui uma ilustração de como a extensão de uma teoria conhecida a territórios nunca d'antes navegados requer a introdução de novas hipóteses pelo simples fato de que existem muitas extensões matematicamente possíveis compatíveis com o que já é sabido. É preciso considerar o que a física diz sobre o que a equação precisa dizer. Uma das ideias a guiar Schrödinger na escolha da equação para a amplitude de onda ψ foi obter algo linear, já que se trata de uma onda (note que não há garantia de que isso funcione nem de que seja razoável: apenas o crivo experimental buscado *a posteriori* pode confirmar ou descartar a equação sugerida¹⁸).

É preciso alguma ginástica matemática para obter a equação mais simples possível que seja linear. Mas agora que já conhecemos o inimigo do qual precisamos nos livrar, i.e. o termo não linear $(\vec{\nabla} S)^2$, fica mais simples encontrar formas de relacioná-lo a derivadas lineares (podemos também tomar a equação do eikonal como inspiração). O primeiro passo é notar que, por conta da independência entre as coordenadas canônicas, vale a identidade

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial S}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} p_j = 0. \quad (6.158)$$

Por seu uso, podemos relacionar os quadrados de derivadas parciais de S a derivadas parciais simples de ψ . Notamos pela definição de ψ que

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j} = \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial S}{\partial q_j}. \quad (6.159)$$

A Eq. (6.158) nos permite derivar novamente esse termo sem criarmos um termo indesejável, pois

$$\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \frac{\partial S}{\partial q_j} + \frac{i}{\hbar} \psi \frac{\partial^2 S}{\partial q_j^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j^2} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial q_j} \frac{\partial S}{\partial q_j}. \quad (6.160)$$

Relacionamos então esse produto de derivadas parciais ao quadrado da derivada de S (o termo a ser eliminado) utilizando a Eq. (6.159) para $\frac{\partial \psi}{\partial q_j}$; obtemos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \psi \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right)^2 = -\frac{\hbar^2}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_j^2}, \quad (6.161)$$

¹⁸Mas não pense de forma alguma que isso é um 'defeito': não saber (de forma muito precisa) o que estamos fazendo é de fato todo o ponto da diversão a que chamamos ciência – mas evite revelar isso assim dessa forma em seu primeiro projeto de pesquisa.

atingindo com isso o objetivo de relacionar o termo $(\vec{\nabla}S)^2$ a derivadas (lineares) de ψ .

Agora, sim, podemos finalmente substituir as Eqs. (6.155) e (6.161) na equação de Hamilton-Jacobi,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] + U = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\hbar \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \nabla^2 \psi + U = 0. \quad (6.162)$$

Multiplicando por ψ , encontramos uma equação diferencial linear em ψ ,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U\psi. \quad (6.163)$$

Essa é nada mais nada menos do que a equação de Schrödinger para a função de onda ψ da mecânica quântica! Como vimos, ela é a equação linear mais simples possível de se obter entendendo a equação de Hamilton-Jacobi como uma equação diferencial para a fase de uma onda.

A equação de Schrödinger pode ser ainda entendida como uma equação para operadores diferenciais,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi, \quad (6.164)$$

o que já nos remete à ideia de que as coordenadas canônicas da mecânica hamiltoniana devem se tornar operadores diferenciais na mecânica quântica, da forma

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \mathcal{H}\psi. \quad (6.165)$$

Essa relação nos permite também imaginar que as coordenadas conjugadas da mecânica quântica precisam satisfazer relações diferentes dos colchetes de Poisson fundamentais, uma vez que o conceito de espaço de fase perde o sentido¹⁹. A extensão natural dos colchetes de Poisson é considerar alguma operação com estrutura similar e que mantenha apenas sua ‘essência simplética’. Eliminando as derivadas parciais, definimos então os comutadores fundamentais como²⁰

$$[q_j, p_{j'}] = q_j p_{j'} - p_{j'} q_j = i\hbar \delta_{jj'}. \quad (6.167)$$

Transformações canônicas passam a ser entendidas como aquelas capazes de manter os comutadores fundamentais. A extensão a outros pares canonicamente conjugados (tal como posição angular e momento angular) faz aparecerem novas estruturas algébricas, indicando ser a própria equação de Schrödinger apenas a representação de uma estrutura matemática mais fundamental. De fato, trocar os colchetes de Poisson pelo comutador nos leva ao formalismo contemporâneo da mecânica quântica em termos de operadores atuando num espaço linear com as propriedades de um espaço de Hilbert²¹.

¹⁹Ele pode ser, no entanto, recuperado, pela construção de Weyl em termos de operadores diferenciais num espaço similar. Torna-se necessário abrir mão do conceito de estado como um ponto nesse espaço, colocando-se no lugar uma função (função de Wigner) que no limite clássico produz uma distribuição de probabilidade com dimensões da ordem de \hbar (detalhe: para estados sem análogo clássico, essa função pode assumir valores negativos, sendo essa propriedade utilizada hoje em experimentos para atestar a produção de estados eminentemente quânticos, tal como fótons individuais ou ‘gatinhos de Schrödinger’).

²⁰Essa identidade pode ser facilmente deduzida considerando-se uma função $\psi(q_j)$ de teste na qual aplicar o comutador. Obtemos

$$[q_j, p_j]\psi = -i\hbar q_j \frac{\partial}{\partial q_j} \psi + i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} (q_j \psi) = -i\hbar q_j \frac{\partial}{\partial q_j} \psi + i\hbar q_j \frac{\partial}{\partial q_j} \psi + i\hbar \psi = i\hbar \psi. \quad (6.166)$$

²¹Embora Heisenberg tenha utilizado o formalismo de comutadores como ponto de partida para sua própria versão da extensão da mecânica clássica, ele também escolheu uma representação específica para essas entidades em termos de matrizes (a qual de fato não foi percebida nem por ele mesmo, mas por Jordan, que reescreveu a teoria de Heisenberg em termos das matrizes como as conhecemos hoje). Foi na verdade Dirac que percebeu a conexão abstrata entre a mecânica algébrica de Heisenberg e a mecânica ondulatória de Schrödinger, mostrando serem apenas duas representações de uma mesma estrutura mais profunda.

Em particular, para um sistema hamiltoniano independente do tempo, vale também na mecânica quântica a separação de variáveis $S = W - Et$, ou seja

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} e^{i\frac{W(\vec{r})}{\hbar}}, \quad (6.168)$$

em que $\omega = E/\hbar$, e a equação de Schrödinger se torna independente do tempo,

$$\mathcal{H}\psi = E\psi. \quad (6.169)$$

Essa equação de autovalores e autovetores do operador diferencial \mathcal{H} possui em geral várias soluções linearmente independentes, requerendo especial atenção nos casos em que E admitir apenas valores *discretos*²². As soluções de ψ com valores de energia mecânica E bem definidos estão naturalmente relacionadas a uma oscilação com frequência dada por $E = \hbar\omega$, relação primeiramente obtida por Planck para descrever o espectro da radiação emitida por um corpo negro.

6.8.2 Comprimento de onda de de Broglie

Agora que conhecemos algumas propriedades das funções ψ , torna-se interessante retornar ao início de nossa dedução e nos perguntarmos como a equação de Hamilton-Jacobi se modificaria caso ψ envolvesse também uma função de magnitude, como seria natural para um objeto que representasse a amplitude de uma onda, i.e.

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{i\frac{S(\vec{r}, t)}{\hbar}}. \quad (6.170)$$

Usando essa expressão na Eq. (6.163) e separando-a em partes real e imaginária, obtemos após álgebra bem direta o par respectivo de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 + U = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}, \\ \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{m} \left(\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S - \frac{1}{2}A\nabla^2 S \right). \end{cases} \quad (6.171)$$

Multiplicando a segunda equação por $2A$,

$$2A \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{m} \left(2A\vec{\nabla}A \cdot \vec{\nabla}S - A^2\nabla^2 S \right) \frac{\partial A^2}{\partial t} = -\frac{1}{m} \left(\vec{\nabla}A^2 \cdot \vec{\nabla}S - A^2\nabla^2 S \right), \quad (6.172)$$

ela se revela uma *equação de continuidade*, pois

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(A^2 \frac{\vec{\nabla}S}{m} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (6.173)$$

²²A quantização da energia, algo que à época pareceu uma escandalosa ruptura intelectual com relação à maneira ‘clássica’ de pensar (e que levou Planck, como bom alemão ou similar, a rever suas contas para o espectro de corpo negro inúmeras vezes e por vários anos até ter certeza de que não possuía mesmo nenhuma alternativa ‘sã’ e que portanto não pudera ter evitado cometer a loucura de criar o quantum), é hoje encarada de forma muito natural pelas novas gerações, talvez por não ser nem de longe o aspecto mais antiintuitivo da teoria. A ruptura mais fundamental só seria identificada por Einstein, Podolsky e Rosen em artigo seminal de 1935 (e também por Schrödinger no mesmo ano, com relação ao emaranhamento), no qual a propriedade não-local/não-realista do estado quântico ficaria escancarada. A esperança de solução só viria com a proposta de Bell em 1964 para testes experimentais que, desde a década de 80, apóiam a teoria quântica (embora nenhum deles seja ainda definitivo!).

Vemos que o quadrado da amplitude dado por $\rho(\vec{r}, t) = A^2(\vec{r}, t)$ faz o papel de uma *densidade* de alguma coisa, enquanto o termo de divergência nos remete a uma *corrente* $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t)$ com campo de velocidades $\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{\nabla}S(\vec{r}, t)}{m}$ (notemos a relação entre momento e S compatível com a transformação canônica).

Essas evidências nos remetem à interpretação de $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ como uma *densidade de probabilidade*, já que a equação de continuidade coloca sua integral no Espaço como quantidade conservada pela dinâmica²³. A probabilidade P de se encontrar a partícula em certa região V do espaço em dado instante de tempo deve ser dada pela integral

$$P = \int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (6.175)$$

A primeira relação da Eq. (6.171) nos fornece de volta a equação de Hamilton-Jacobi, embora com a presença de um termo adicional de correção produzido por variações da amplitude A no espaço. No caso de possuir o sistema energia bem definida, essa relação se escreve

$$(\vec{\nabla}S)^2 = 2m(E - U) + \hbar^2 \frac{\nabla^2 A}{A}. \quad (6.176)$$

Como $\vec{\nabla}S = \vec{p}$, essa equação estabelece a magnitude do momento como devida a duas contribuições,

$$p^2 = p_c^2 + p_\lambda^2. \quad (6.177)$$

O primeiro termo é aquele encontrado classicamente, $p_c = \sqrt{2m(E - U)}$; o segundo, p_λ , obtido por de Broglie como contribuição inerentemente quântica (a correção ondulatória que buscávamos!), vale

$$p_\lambda = \hbar k, \quad \text{com } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \sqrt{\frac{\nabla^2 A}{A}}. \quad (6.178)$$

O comprimento de onda de de Broglie fornece a escala de comprimento natural em que medir a curvatura da função de onda, pois, definindo as posições adimensionais $q'_j = q_j/\lambda$, temos

$$\lambda^2 \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial(x/\lambda)^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial(y/\lambda)^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial(z/\lambda)^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z'^2} = \nabla'^2 A. \quad (6.179)$$

Assim, o termo ondulatório de correção quântica se torna importante quando a curvatura da função de onda se torna comparável ao tamanho da região em que se encontra a partícula, entendida como um *pacote de ondas*. Como a escala λ é dada pelo inverso do momento da partícula [Eq. (6.178)], efeitos quânticos devem se tornar relevantes, por exemplo, para velocidades muito baixas, ou seja, temperaturas muito baixas. Um desses efeitos notórios é a necessidade de simetrização ou antissimetrização das funções de onda total de sistemas formados por partículas idênticas, e que levam a fenômenos tais como condensação de Bose-Einstein e supercondutividade.

No caso em que a função de onda varia lentamente com relação à escala λ , podemos desprezar esse termo para recuperar a equação de Hamilton-Jacobi, obtida no limite clássico em que $p_c \gg p_\lambda$, i.e.

$$\nabla'^2 A \ll A. \quad (6.180)$$

²³Em forma integral, a Eq. (6.173) se escreve

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV - \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = 0. \quad (6.174)$$

Se escolhermos uma superfície S no infinito, tal que o volume V englobe todo o Espaço, temos que $\int_V \rho dV = cte$.

Podemos supor nesse cenário que a amplitude A é aproximadamente constante numa região muito maior do que λ , justificando assim *a posteriori* a consistência da Eq. (6.153), chamada de *aproximação semi-clássica de WKB* (as iniciais de Wentzel, Kramers e Brillouin). Temos nesse caso a ideia intuitiva de que a região V do Espaço em que $|\psi|^2 \approx 1$ (a envoltória do pacote) é muito maior do que as dimensões λ em que $|\psi|$ oscila no espaço (ondas de fase superpostas para formar o pacote). Além disso, V é por sua vez muito menor do que a resolução com que o espaço pode ser medido, justificado a terminologia ‘partícula’. Obtemos nesse limite a equação de Hamilton-Jacobi e, por consequência, a analogia ótico-mecânica para as trajetórias de partículas como similares em formato aos raios da ótica geométrica.

Assim, na mecânica clássica e na ótica geométrica, a interpretação do movimento em termos de trajetórias típicas de ‘partículas’ é uma abstração decorrente de um comportamento limite de ondas localizadas em dimensões V muito maiores do que suas frequências espaciais típicas λ de oscilação e medidas com resolução tão crua que se assemelhem a linhas unidimensionais no Espaço²⁴. A mecânica clássica na formulação de Hamilton-Jacobi pode ser entendida de forma simples como o limite da equação ondulatória de Schrödinger no regime de comprimentos de onda muito pequenos.

6.9 Variáveis de ação-ângulo

Para sistemas periódicos ou quase periódicos, o formalismo de Hamilton-Jacobi leva a um método poderoso de análise do movimento. O uso de coordenadas canônicas de ação-ângulo possui especial importância na compreensão de sistemas dinâmicos complexos, nos quais se busca entender de maneira aproximada (perturbativa) dinâmicas regulares ou caóticas em regiões especiais do espaço de fase (e.g. nas proximidades de pontos de sela das trajetórias). É também possível mostrar por seu uso que algumas grandezas físicas são robustas quanto a variações lentas em parâmetros do sistema – invariantes adiabáticos –, algo historicamente relevante para a quantização de sistemas clássicos.

6.9.1 Construção do método

A ideia central do método considera a integral de ação calculada na trajetória seguida pelo sistema. Por ser periódico, o movimento pode ser associado a uma área no espaço de fase (dimensão de momento angular), que se torna uma das novas coordenadas (conservadas) da transformação canônica. A coordenada conjugada a essa, uma espécie de ângulo, evolui como a fase de um oscilador harmônico, de maneira monotônica e linear no tempo. A taxa com que ocorre essa evolução é uma frequência angular, em geral associada a alguma frequência real de oscilação do sistema físico. Um dos pontos fortes do método é nos fornecer essa frequência (como função de parâmetros do sistema) sem a necessidade de se resolver a dinâmica.

Construímos esse formalismo requerendo que os novos momentos I sejam constantes, implicando que sua variável conjugada ϕ seja cíclica na hamiltoniana. Para um sistema unidimensional, a transformação

²⁴Observemos, no entanto, que as ondas da ótica geométrica são explicadas classicamente em termos de campos elétricos e magnéticos oscilantes, enquanto as ondas de matéria não possuem significado claro na mecânica quântica de Schrödinger. Teorias de campo iriam identificar essas ondas como excitações análogas ao que ocorre no caso do campo eletromagnético. Assim, por um lado, surgiria o conceito de fóton, a partícula de luz, como excitação localizada do campo eletromagnético e, por outro, os campos das partículas elementares como o substrato ondulatório no qual existem elétrons, quarks etc.

canônica a atingir esses objetivos deve partir de função geradora $S(q, I)$ tal que

$$p = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q}, \quad \phi = \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(p, q) = h(I). \quad (6.181)$$

A última relação impõe que a hamiltoniana transformada (notemos que $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$) seja uma função $h(I)$ apenas da nova variável de momento. Podemos verificar que a evolução obtida será do tipo buscada, pois

$$\dot{\phi} = \frac{\partial h}{\partial I} = \omega \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \omega t + \phi_0, \quad \text{e} \quad \dot{I} = -\frac{\partial h}{\partial \phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \text{cte}. \quad (6.182)$$

com ω e ϕ_0 constantes.

Uma função geradora capaz de produzir essa transformação pode ser obtida notando-se que a primeira relação da Eq. (6.181) implica em

$$dS|_I = p dq, \quad (6.183)$$

de maneira que podemos daí partir para propor a função geradora da forma

$$S(q, I) = \int_{q_0}^q p dq'. \quad (6.184)$$

Como o movimento é assumido periódico²⁵, é conveniente tomar o valor dessa integral quando calculada sobre múltiplos do período, i.e. para posições inicial e final idênticas $q = q_0$, como o novo momento I ,

$$I = \oint_C p dq. \quad (6.185)$$

Essa integral, a *variável de ação*, possui a dimensão de área no espaço de fase, visto que, pelo teorema de Stokes, podemos escrever no caso de trajetórias fechadas

$$I = \int_S dp dq, \quad (6.186)$$

em que S é a superfície com bordo C . A variável de ação pode ser interpretada então como a área englobada por uma trajetória fechada no espaço de fase para o caso de movimento periódico tanto em q quanto em p .

Que essa função é uma constante pode ser notado pelo fato de podermos sempre inverter a última relação da Eq. (6.181) para escrever $p = p(q, I)$ e resolver a integral da Eq. (6.185) tal que ela forneça a identidade buscada. Já a variável conjugada à ação, o ‘ângulo’, responde à integral em 1 ciclo de oscilação como

$$\Delta\phi = \oint d\phi = \oint \frac{\partial\phi}{\partial q} dq \stackrel{\text{Eq. (6.181)}}{=} \oint \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq \stackrel{\text{Eq. (6.181)}}{=} \frac{\partial}{\partial J} \oint p dq \stackrel{\text{Eq. (6.185)}}{=} \frac{\partial}{\partial J} J = 1. \quad (6.187)$$

Mas, segundo a Eq. (6.182), o incremento $\Delta\phi$ no período τ de 1 ciclo vale

$$\Delta\phi = \omega\tau \stackrel{\text{Eq. (6.187)}}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (6.188)$$

ou seja, com essa construção, ω se torna a frequência angular associada ao período τ de oscilação do sistema. A mesma construção pode ser utilizada para sistemas mecânicos de maior dimensionalidade nos quais sejam admitidas formas completamente separáveis para a função principal de Hamilton. Devemos nesse caso definir uma variável I_j de ação para cada par conjugado, no mesmo espírito da Eq. (6.185).

²⁵Para que o método possa ser utilizado, o movimento só precisa ser periódico em q (o que ocorre e.g. para movimento de rotação), embora a periodicidade também em p possa ocorrer, caso em que as trajetórias no espaço de fase são fechadas.

Exemplo: Oscilador harmônico. O poder do método de variáveis de ação-ângulo na determinação de frequências de oscilação de um sistema pode ser ilustrado de maneira bastante sucinta considerando como exemplo o oscilador harmônico.

A variável de ação I pode ser obtida utilizando a conservação da energia para escrever $p = p(q)$ da forma

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2 := E \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}q^2}. \quad (6.189)$$

Podemos com isso realizar formalmente a integral da Eq. (6.185),

$$I = \sqrt{2mE} \int_{q(t)}^{q(t+\tau)} \sqrt{1 - \frac{k}{2E}q^2} dq. \quad (6.190)$$

A escolha dos limites de integração segue, por exemplo, análise do movimento com o auxílio da função energia potencial. Por ela descobrimos os pontos de inflexão do movimento, o que permite realizarmos a integral entre esses dois pontos e dobrar o resultado para levar em conta 1 ciclo inteiro. No caso tratado, no entanto, a troca de variáveis sugerida pela integral da Eq. (6.190) já nos fornece a periodicidade do integrando,

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}q \rightarrow \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad I = 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = E \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (6.191)$$

tornando simples a escolha de limites de integração em α de maneira a envolver 1 ciclo do integrando. Dessa relação obtemos a nova hamiltoniana

$$\mathcal{H}(\phi, I) = E = \sqrt{\frac{k}{m}}I = h(I), \quad (6.192)$$

uma função apenas da variável de ação I , como esperado. Finalmente, a frequência de oscilação ω é determinada pela equação canônica,

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} := \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (6.193)$$

encontrada, como vemos, sem a necessidade de se obterem explicitamente as soluções $q(t)$ e $p(t)$ para o movimento.

Exemplo: Movimento planetário. O problema de Kepler é um exemplo de sistema integrável de maior dimensionalidade no qual é possível ilustrar o método de variáveis de ação-ângulo. Utilizamos aqui a solução separável da equação de Hamilton-Jacobi obtida na Eq. (6.91) para o caso particular em que

$$U(r) = -\frac{k}{r}. \quad (6.194)$$

As três variáveis de ação-ângulo são nesse caso

$$I_r = \oint p_r dr = \oint \frac{\partial S}{\partial r} dr \stackrel{\text{Eq. (6.93)}}{=} \sqrt{2m} \oint \sqrt{E - \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}} dr, \quad (6.195)$$

$$I_\theta = \oint p_\theta d\theta = \oint \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta \stackrel{\text{Eq. (6.93)}}{=} \oint \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta, \quad (6.196)$$

$$I_\phi = \oint p_\phi d\phi = \oint \frac{\partial S}{\partial \phi} d\phi \stackrel{\text{Eq. (6.91)}}{=} L_z \oint d\phi = 2\pi L_z. \quad (6.197)$$

As integrais precisam ser realizadas em 1 ciclo orbital da partícula. A solução periódica existe para $E < 0$.

A primeira integral é calculada de maneira mais simples caso a raiz quadrada apareça no denominador. Calculamos por isso

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_r}{\partial |E|} &= \sqrt{2m} \oint \frac{1}{\sqrt{-|E| - \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}}} dr \\ &= -2m \oint \frac{r}{\sqrt{-2mr^2|E| - 2mrk - L^2}} dr \\ &= -2m \oint \frac{r}{\sqrt{(r - r_-)(r_+ - r)}} dr,\end{aligned}\quad (6.198)$$

em que definimos os raios de inflexão da trajetória, periastro r_- e apoastro r_+ pelas relações

$$\bar{r} = \frac{1}{2}(r_+ - r_-) := \frac{k}{2|E|} \quad \text{e} \quad \Delta r = \frac{1}{2}(r_+ - r_-).\quad (6.199)$$

A mudança de variáveis $r = \bar{r} + \cos \theta \Delta r$ leva às identidades $(r - r_-)(r_+ - r) = \sin^2 \theta (\Delta r)^2$, sendo $r(\theta = 0) = r_+$ e $r(\theta = \pi) = r_-$. A integral se torna

$$\frac{\partial I_r}{\partial |E|} = -\frac{2m}{|E|} \int_0^\pi (\bar{r} + \cos \theta \Delta r) d\theta = -\frac{k}{2} \frac{m}{2} \frac{1}{|E|^{3/2}}.\quad (6.200)$$

Assim, temos

$$I_r = \pi \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} + cte.\quad (6.201)$$

Essa variável de ação deve ser a mesma para qualquer órbita, o que nos permite utilizar alguma órbita simples (e.g. circular) para determinarmos a constante restante. Obtemos

$$I_r = \pi \left(\frac{k}{2} \sqrt{\frac{2m}{|E|}} - (L + L_z) \right).\quad (6.202)$$

As demais variáveis de ação fornecem os resultados

$$I_\theta = L - L_z \quad \text{e} \quad I_\phi = 2\pi L_\phi\quad (6.203)$$

Isolando $|E|$ a Eq. (6.202), obtemos a hamiltoniana transformada

$$\mathcal{H}(I_r, I_\theta, I_\phi) = -\frac{2\pi^2 m k^2}{(I_r + I_\theta + I_\phi)^2}\quad (6.204)$$

As três frequências de oscilação são degeneradas,

$$\omega = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_r} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_\phi} = \frac{4\pi^2 m k^2}{(I_r + I_\theta + I_\phi)^3},\quad (6.205)$$

consequência de serem as órbitas sempre fechadas. Utilizando a Eq. (6.202) para escrever ω como função da energia, obtemos essencialmente a terceira lei de Kepler,

$$\tau = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.\quad (6.206)$$

6.9.2 Invariância adiabática da variável de ação

Um conceito importante da teoria de perturbação canônica se refere a adiabaticidade de algumas grandezas físicas, ou melhor, à procura de grandezas com essa propriedade. Grandezas adiabáticas não variam para perturbações ‘lentas’ do sistema mecânico, ainda que se acumulem por um longo tempo e deixem portanto de ser pequenas. Isso significa que, em certos contextos, podemos obter resultados aproximados com ótima precisão partindo de algumas grandezas robustas: os *invariantes adiabáticos*.

A variável de ação é uma dessas grandezas. Consideremos um sistema mecânico unidimensional cuja hamiltoniana apresente pequena dependência $\lambda(t)$ no tempo. A energia do sistema não se conserva, mas vamos escrever $E(t)$ como a energia que o sistema teria caso a função $\lambda(t)$ fosse mantida constante. Temos

$$\mathcal{H}(q, p, \lambda(t)) = E(t). \quad (6.207)$$

Para estudar a dependência ‘lenta’ de grandezas desse sistema, consideramos suas médias temporais em 1 ciclo. Assim, a uma grandeza $f(t)$ estará associada sua média

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(t') dt' := \frac{1}{\tau} \int_{\tau} f dt, \quad (6.208)$$

em que o último passo serve apenas para definir uma notação simplificada. Essa relação nos permite entender ‘lento’ como algo cuja média não varia apreciavelmente²⁶ durante 1 período de oscilação do sistema. No final, a qualidade das aproximações sempre depende da precisão com que se realizam medidas, mas pode ser entendida ‘usualmente’ como algo menor do que alguns pontos percentuais. Em geral, existe um compromisso entre a tolerância admitida para o erro e o intervalo de tempo em que vale a aproximação.

Supomos que a perturbação $\lambda(t)$ seja ‘lenta’ em sentido estrito, valendo $\forall t$ em primeira aproximação

$$\frac{d\lambda}{dt} \approx \frac{d\bar{\lambda}}{dt}, \quad \text{ou ainda} \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{1}{\tau}. \quad (6.209)$$

Consideramos a variação da ‘energia instantânea’ $E(t)$ como função da variação de λ no tempo. De acordo com a Eq. (6.207) a taxa de variação média \bar{E} da energia é

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \quad \Rightarrow \quad \bar{E} := \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \dot{E} dt \approx \frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{\tau} \int_{\tau} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} dt, \quad (6.210)$$

em que retiramos o termo $\frac{d\lambda}{dt}$ da integral tendo em vista sua constância aproximada em qualquer instante do ciclo de oscilação [Eq. (6.209)].

Para continuarmos, é preciso nos livrarmos da dependência explícita no tempo nesse tipo de estimativa, posto que e.g. o próprio período de oscilação pode variar como consequência da perturbação! Não podemos confiar em nada que envolva o tempo, e por isso tentamos escrever integrais sobre o período em termos de integrais de caminho no espaço de fase. Segundo a equação canônica para q , temos

$$dq = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dt \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} dq \quad (6.211)$$

Usamos essa expressão para colocar a Eq. (6.210) na forma

$$\bar{E} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{\tau} \oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} dq \quad (6.212)$$

²⁶Para uma definição de ‘apreciavelmente’, não consulte o seu matemático mais próximo.

Essa expressão já é da ordem $\frac{d\lambda}{dt}$ de perturbação, e por isso podemos calcular todas as quantidades que multiplicam esse termo como se fossem não perturbadas. De fato, caso fôssemos corrigir o período τ e a hamiltoniana do integrando durante a oscilação, teríamos novos termos proporcionais a $\frac{d\lambda}{dt}$ que produziriam termos de mais alta ordem em $\frac{d\lambda}{dt}$ na expressão. Ignoramos esses termos na aproximação de primeira ordem.

O sistema não perturbado se caracteriza pelas equações

$$E = \mathcal{H}(q, p, \lambda) \quad \text{ou} \quad p = p(q, E, \lambda) \quad \text{ou ainda} \quad E = \mathcal{H}(q, p(q, E, \lambda), \lambda). \quad (6.213)$$

Esta última equação pode ser diferenciada com relação a λ para fornecer

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (6.214)$$

o que substituído na Eq. (6.215) nos leva à variação média da energia

$$\bar{E} \approx -\frac{d\lambda}{dt} \frac{1}{\tau} \oint \frac{\partial p}{\partial \lambda} dq. \quad (6.215)$$

A integral de linha e o período τ devem ser calculados sobre a trajetória não perturbada (em princípio, conhecida).

O mesmo raciocínio pode ser seguido para calcular a robustez da variável de ação. Partindo de sua definição, temos

$$I = \oint p(q, E, \lambda) dq \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \oint \frac{d}{dt} p(q, E, \lambda) dq = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} d\lambda dt \right) dq \quad (6.216)$$

Mas essa expressão pode ser ainda reescrita, substituindo $\frac{dE}{dt}$ pelo uso da primeira relação da Eq. (6.210), como

$$\frac{dI}{dt} = \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} d\lambda dt \right) dq \approx \frac{d\lambda}{dt} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) dq. \quad (6.217)$$

Eliminamos $\frac{\partial p}{\partial E}$ em favor da hamiltoniana tomando a derivada parcial da última relação da Eq. (6.213), que nos fornece

$$1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}. \quad (6.218)$$

Obtemos finalmente

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{d\lambda}{dt} \oint \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) dq. \quad (6.219)$$

Mas junto à Eq. (6.214), essa expressão nos fornece o resultado

$$\frac{dI}{dt} \approx 0, \quad (6.220)$$

mostrando que I é aproximadamente constante mesmo sob efeito de perturbação. Dizemos que a variável de ação é um invariante adiabático, ou seja, é robusta a pequenas perturbações na trajetória do sistema. Assim, ainda que a perturbação possa alterar localmente as curvas de trajetória, as diferentes fontes perturbativas conspiram para se cancelarem em seus efeitos integrados no período.

O significado físico disso fica mais evidente ao calcularmos como a variável de ação se relaciona ao período. Tomando a derivada parcial de sua definição com relação à energia, temos

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq \stackrel{\text{Eq. (6.218)}}{=} \oint \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} dq \stackrel{\text{Eq. (6.211)}}{=} \int_T dt = \tau, \quad (6.221)$$

ou seja,

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (6.222)$$

Essa relação pode ser diretamente checada para o caso do oscilador harmônico. Temos que a integral de ação da trajetória não perturbada nos fornece²⁷

$$I = \oint_C p dq = \int_S dp dq = \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = 2\pi \frac{E}{\omega}, \quad (6.223)$$

claramente compatível com a Eq. (6.222).

O fato de I ser constante mesmo para perturbações lentas justifica seu uso como nova variável de momento no formalismo de variáveis de ação-ângulo. Seu valor não perturbado serve como bom ponto de partida para o tratamento de sistemas mecânicos perturbados, posto que se mantém constante com ótima aproximação também nesses casos.

Já no contexto da mecânica quântica, a robustez da variável de ação a aponta como boa candidata para uma regra de quantização, pois deve ser uma quantidade constante até mesmo nas menores escalas do espaço de fase, mesmo para área englobada pela trajetória da ordem de \hbar , podemos supor. Embora esse raciocínio não seja de forma alguma irrefutável, ele leva intuitivamente à escolha de Bohr-Sommerfeld para sua regra de quantização, que na verdade não é tão *ad hoc* quanto parece à primeira vista. Os números quânticos que caracterizam um dado estado estacionário de um sistema quântico devem possuir, espera-se, invariantes adiabáticos como análogos clássicos.

²⁷Lembrando de que é preciso não apenas seja periódico em q , mas que siga trajetória fechada no espaço de fase, para que possamos relacionar a integral de linha à integral de superfície.

Capítulo 7

Um pouco de relatividade

A teoria da relatividade restrita (ou ‘especial’) surgiu da necessidade de se compatibilizarem o eletromagnetismo e a mecânica. Se precisamos até aqui de um extenso curso para entender bem a estrutura formal da mecânica clássica, o eletromagnetismo, em contraste, pode ser entendido muito mais brevemente. O motivo: várias de suas ideias vêm da mecânica. Mas a estrutura matemática a que chegaremos por seu estudo, talvez mais simples e no entanto não menos bela, permite avançar a própria mecânica em novos rumos, e também criar outras áreas de estudo, como a gravitação. Eletromagnetismo e relatividade são, por isso, outra das ‘teorias-base’ a moldar o pensamento da física atual.

Ocorre que foi percebida no século XIX uma discrepância entre as essas duas teorias (mecânica e eletromagnetismo) com relação ao princípio de relatividade de Galileu (notemos: tomado da mecânica!), segundo o qual as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial. Dito em outras palavras, esse princípio estabelece o fato de que não acreditamos existir uma maneira de se decidir experimentalmente qual de dois referenciais inerciais é ‘melhor’ para se descrever a física¹.

A mecânica é invariante pelas *transformações de Galileu*, i.e. a *forma* das equações fundamentais é a mesma em dois referenciais inerciais S e S' quaisquer. Isso significa dizer que as posições de objetos ou acontecimentos medidos em cada referencial por coordenadas $\vec{r} \equiv (x, y, z)$ e $\vec{r}' \equiv (x', y', z')$, respectivamente, são definidos – no que diz respeito à forma das leis da mecânica – a menos de uma velocidade relativa, i.e.

$$x' = x + vt, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (7.1)$$

Escolhemos a velocidade relativa na direção $\hat{x} = \hat{x}'$ por conveniência; como estamos interessados na forma geral das equações, assumimos que reorientações dos eixos de referência podem ser realizadas em S e S' sem alterar a física do problema. Além disso, o tempo é absoluto e percebido da mesma maneira em qualquer

¹Notemos que à época de Galileu não se sabia que o Universo causalmente conectado a nós é finito, nem que é possível observar com riqueza de detalhes o fóssil de flutuações quânticas na radiação cósmica de fundo. Esses sinais ‘absolutos’ seriam na verdade suficientes para definirmos um referencial absoluto, e.g. com relação ao movimento médio da matéria no Universo, ou então e.g. com relação ao desvio espectral da radiação cósmica de fundo. Não existe, no entanto, evidência de que haja alguma diferença nas leis da física entre um referencial definido de maneira ‘absoluta’ com relação a propriedades mensuráveis do universo e qualquer outro referencial inercial (na definição atualizada pela relatividade geral). A física das galáxias mais distantes observáveis, cuja luz primordial viaja desde pouco após o início do Universo há 13 bilhões de anos para atingir nossos analisadores espectrais hoje, parece ser a mesma física a governar o nosso Sol, a meros 8 minutos-luz de distância. O princípio de relatividade continua válido como um dos princípios gerais a guiar a formulação de leis para descrever a natureza.

referencial,

$$t' = t. \quad (7.2)$$

Essa transformação mantém invariante as leis de Newton para o movimento (por construção!), e portanto toda a mecânica clássica (e também a mecânica ondulatória de Schrödinger) dariam origem à mesma fenomenologia em qualquer referencial inercial galileano.

Já as equações de Maxwell para o eletromagnetismo são invariantes por *transformações de Lorentz*, inerentemente incompatíveis com as transformações de Galileu. Assim, aplicar as transformações da Eqs. (7.1) e (7.2) às equações de Maxwell no referencial S levaria a equações com forma diferente no referencial S' . Todavia, o erro cometido seria pequeno para velocidades ‘normais’ $v \ll c$ do cotidiano.

A consequência mais relevante da invariância de Lorentz do eletromagnetismo para o contexto da mecânica clássica é a constância da velocidade da luz. E o valor dessa velocidade é algo difícil de entender de forma intuitiva (i.e. pela experiência humana de convívio com o fato) mesmo na atualidade: não haveria motivos para imaginar que a mecânica clássica já estaria preparada para lidar com esse regime especial do movimento em que as energias envolvidas seriam igualmente inimagináveis. Por isso parece natural, ao nos questionarmos qual das transformações entre referenciais inerciais estaria correta nesse novo contexto, se a de Galileu ou de Lorentz, escolhermos esta última. O desafio consiste em reconhecer a energia (i.e. a velocidade) como fator influenciador do movimento mantendo, no entanto, a forma e a estrutura das leis da mecânica em qualquer referencial inercial.

7.1 Princípio de relatividade

No final do século XIX, a interpretação das leis do eletromagnetismo conforme sintetizadas pelas equações de Maxwell ainda não estava completa. Era necessário em algumas situações recorrer a descrições conceitualmente diferentes para fenômenos que pareciam produzir os mesmos efeitos, em especial quando envolviam o *movimento* de cargas.

Um exemplo que ilustra bem essa situação é a indução de corrente elétrica por campos magnéticos. Consideremos um circuito fechado formado por um fio condutor e sujeito a uma variação de fluxo de campo magnético. Existem aparentemente duas explicações fundamentais diferentes para a forma como esse fenômeno ocorre, ambas produzindo o mesmo efeito.

No primeiro caso, suponhamos que o circuito seja deformável, possuindo um trecho móvel de maneira que sua área aumente linearmente no tempo. A variação de fluxo de um campo magnético externo constante gera a diferença de potencial

$$\varepsilon = \frac{d\phi_B}{dt} = B \frac{dA}{dt} = avB. \quad (7.3)$$

Como os campos envolvidos são estáticos, a maneira fundamental de entendermos o aparecimento de corrente no fio requer pensarmos que a força eletromotriz é produzida pelo movimento forçado das cargas localizadas na parte móvel do circuito; por estarem em movimento imposto por algum agente externo, são aceleradas na presença do campo magnético por força de Lorentz da forma $\vec{v} \times \vec{B}$ (por unidade de carga), tangente ao fio e constante em toda a sua extensão. A soma das contribuições infinitesimais agindo sobre toda a parte

móvel do fio resultam em

$$\varepsilon = \frac{F}{q} = avB, \quad (7.4)$$

fornecendo o mesmo resultado. Assim, apesar de podermos pensar em termos de variação de fluxo, uma regra funcional mas aparentemente desprovida de conteúdo físico nesse exemplo específico, parece mais fundamental entender a força eletromotriz como devida ao movimento de cargas na direção ortogonal ao fio.

O segundo caso envolve um circuito rígido, porém sob influência de campo magnético variável no tempo. Também aqui há o aparecimento de corrente elétrica no fio, mas a explicação fundamental precisa envolver a lei de indução de Faraday. De fato, a força de Lorentz não poderia ter qualquer papel na geração da diferença de potencial a causar a corrente, uma vez que as cargas, estando inicialmente em repouso no campo magnético, assim permaneceriam (não há forças especiais produzidas por campos magnéticos variáveis no tempo). Somente a lei de Faraday pode descrever a criação de um campo elétrico em situações desse tipo.

Embora a regra da variação de fluxo possa ser aplicada com sucesso nos dois casos, a razão física por trás das duas explicações é conceitualmente diferente. A situação em que dois princípios distintos precisam ser invocados para explicar fenômenos qualitativamente idênticos (no caso, o surgimento de uma corrente elétrica no fio) nos leva a crer que deve existir algum princípio fundamental por trás de ambos ou apenas certa confusão de nossa parte.

Talvez a questão ingênua a ser feita aqui fosse: o que significa uma partícula se mover com relação a um campo? De fato, a pergunta não faz sentido. Mas ela nos motiva a pensar em como seriam os campos num referencial em movimento. O princípio de relatividade nos guia na resposta. Devemos procurar uma transformação entre referenciais inerciais que mantenha intacta a forma das equações de Maxwell percebida por cada observador.

As equações de Maxwell, colocadas em notação vetorial por Heaviside e Hertz, estabelecem as relações satisfeitas por objetos que se comportem como os campos elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \text{(c)} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \text{(b)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, & \text{(d)} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

A coluna da esquerda se refere às equações dependentes de fontes, i.e. densidade de carga $\rho(\vec{r}, t)$ e de corrente $\vec{j}(\vec{r}, t)$ elétricas; à direita temos as equações que não envolvem fontes, sendo as mesmas para campos livres ou na presença de cargas e correntes elétricas. Chamamos esse referencial de S .

Invocando o princípio de relatividade, um segundo observador inercial em seu referencial S' precisa descrever o campo eletromagnético pelas *mesmas* equações (caso contrário, ele estaria num referencial qualitativamente diferente do primeiro e poderia através da forma aparente de suas equações determinar o referencial inercial ‘bom’), i.e.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' &= \frac{\rho'}{\epsilon_0}, & \text{(c)} \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' &= 0, \\ \text{(b)} \quad \vec{\nabla}' \times \vec{B}' &= \mu_0 \vec{j}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'}, & \text{(d)} \quad \vec{\nabla}' \times \vec{E}' &= -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Rotulamos as quantidades observadas nesse referencial pelos mesmos símbolos acompanhados de um apóstrofo (‘linha’). Por exemplo, o gradiente ‘linha’ se define como $\vec{\nabla}' = \hat{x}' \frac{\partial}{\partial x'} + \hat{y}' \frac{\partial}{\partial y'} + \hat{z}' \frac{\partial}{\partial z'}$. Notemos que devemos

assumir *a priori* que não só as magnitudes e direções dos campos elétrico e magnético podem se alterar entre referenciais, mas também os próprios ‘rótulos’ do que significam posição e tempo precisam ser percebidos de forma diferente. De fato, isso é o que ocorre na realidade.

Uma consequência imediata das transformações de Lorentz é a constância da velocidade da luz em qualquer referencial inercial. Como a ‘permissividade’ ϵ_0 e a ‘permeabilidade’ μ_0 do vácuo são constantes universais da física², então a equação de onda deduzida a partir das equações de Maxwell deve seguir sempre a mesma forma, implicando na mesma velocidade de propagação para as ondas eletromagnéticas (independentemente de referencial),

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (7.7)$$

o que justifica o uso do símbolo c de ‘constante’. Essa é a consequência mais óbvia e direta do princípio de relatividade aplicado ao eletromagnetismo.

7.2 Transformações de Lorentz

As transformações que mantêm as equações de Maxwell invariantes entre referenciais inerciais são as transformações de Lorentz. Podemos vislumbrá-las manipulando magicamente as Eqs. (7.5a–d). Tomamos a componente x da Eq. (7.5b) e escrevemos explicitamente a Eq. (7.5a),

$$(7.5b) \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \mu_0 j_x, \quad (7.8)$$

$$(7.5a) \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

para combinar essas equações da seguinte forma: multiplicamos a primeira por um fator escalar γ e a segunda por $-u\gamma/c^2$, somando em seguida as equações resultantes para obter

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma \left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \left(B_y + \frac{u}{c^2} E_z \right) \right] = \frac{1}{c^2} \left[\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] E_x + \mu_0 [\gamma(j_x - u\rho)]. \quad (7.9)$$

Outra forma *ad hoc* de manipular as Eqs. (7.8) consiste em multiplicar a primeira por $-\gamma u$ e a segunda por γ antes de somá-las; obtemos

$$\left[\gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] E_x + \frac{\partial}{\partial y} [\gamma(E_y - uB_z)] + \frac{\partial}{\partial z} [\gamma(E_z + uB_y)] = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\gamma \left(\rho - \frac{u}{c^2} J_x \right) \right]. \quad (7.10)$$

Essas relações devem ser comparadas respectivamente à componente x da Eq. (7.6b) e à Eq. (7.6a). Elas se tornam equações de Maxwell em S' , i.e. satisfazem a invariância desejada de forma, se identificarmos, pelo lado dos campos³,

$$\begin{aligned} (a) \quad E'_x &= E_x & (d) \quad B'_x &= B_x \\ (b) \quad E'_y &= \gamma(E_y - uB_z) & (e) \quad B'_y &= \gamma \left(B_y + \frac{u}{c^2} E_z \right) \\ (c) \quad E'_z &= \gamma(E_z + uB_y) & (f) \quad B'_z &= \gamma \left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

²Novamente: se mudassem entre referenciais inerciais, o observador poderia inferir diferença física entre referenciais inerciais distintos, o que violaria o princípio de relatividade.

³A transformação entre campos elétricos e magnéticos de acordo com o referencial resolve as contradições criadas por se interpretar as equações de Maxwell como restritas ao referencial de laboratório.

e, pelo lado dos rótulos espaço-temporais,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (7.12)$$

Além disso, as densidades de corrente e de carga também se transformam, pois

$$\rho' = \gamma \left(\rho - \frac{u}{c^2} J_x \right), \quad j'_x = \gamma (j_x - u\rho), \quad j'_y = j_y, \quad j'_z = j_z. \quad (7.13)$$

O fator γ pode ser determinado aplicando-se o princípio de relatividade a qualquer uma das equações de transformação, que devem por isso possuir a mesma forma no sentido inverso da transformação (devemos apenas fazer a troca $u \rightarrow -u$). Tomando a Eq. (7.11b), temos para sua inversa

$$E_y = \gamma(E'_y + uB'_z) \stackrel{\text{Eq. (7.11)}}{\stackrel{\downarrow}{=}} \gamma \left[\gamma(E_y - uB_z) + u\gamma \left(B_z - \frac{u}{c^2} E_y \right) \right] = \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) E_y, \quad (7.14)$$

ou seja,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \text{com } \beta = \frac{u}{c}. \quad (7.15)$$

Encontramos os comportamentos limites $\gamma \rightarrow 1$ para $u \ll c$ (i.e. $\beta \rightarrow 0$) e $\gamma \rightarrow \infty$ para $u \rightarrow c$ (i.e. $\beta \rightarrow 1$). Em particular, a expressão não faz sentido para $u \geq c$ (em seu contexto original de validade); no mais, temos sempre $\gamma \geq 1$.

7.3 Relatividade restrita

A constância da velocidade da luz seria adotada por Eistein como um postulado da relatividade restrita. A ideia era adaptar a mecânica ao regime de velocidades relativísticas e com isso investigar como poderia ser compatibilizada com o eletromagnetismo.

Impor a velocidade da luz como absoluta implica em aceitar espaço e tempo como relativos ao observador. Por isso é preciso adaptar a ideia newtoniana de espaço-tempo absoluto, o palco imutável da dinâmica, para algo mais maleável e capaz de lidar com a velocidade finita de propagação das interações. Não é mais possível nessa nova visão demarcar posições no espaço de forma independente de instantes no tempo, como se o espaço fosse ocupado por uma grade cartesiana invisível e perfeitamente regular; de fato, é preciso pensar de forma completamente diferente, em termos de *eventos* localizados no espaço-tempo.

Um evento é como uma demarcação pontual no espaço-tempo de cada observador, ainda que ocorra em coordenadas diferentes para cada um deles: é um fato físico cuja ocorrência pode ser atestada por qualquer um, independentemente das coordenadas que o demarcam. Um observador inercial em S atribuirá uma posição \vec{r} e um instante t para a ocorrência do evento, enquanto S' lhe localizará em \vec{r}' e t' .

7.3.1 Intervalo

Talvez o evento mais simples possível de imaginarmos seja a emissão de luz por uma fonte pontual, na qual se cria uma onda esférica propagando-se pelo espaço. Suponhamos por simplicidade que essa fonte se encontre em repouso na origem do referencial S e que, além disso, as origens dos referenciais S e S'

coincidam no instante inicial; assim, o evento de emissão é observado ocorrer no ponto $\vec{r} = \vec{r}' = (x, y, z) = (x', y', z') = (0, 0, 0)$ em ambos os referenciais no instante $t = t' = 0$.

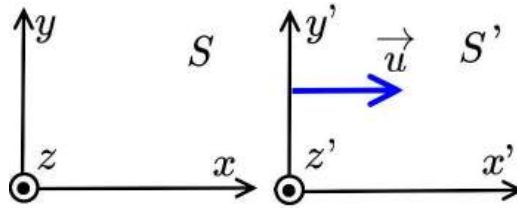


Figura 7.1: Referenciais inerciais S e S' em movimento relativo.

Notemos que esse evento *define* o instante inicial, e pode ser entendido como uma *sincronização* dos relógios de observadores localizados nas origens \mathcal{O} e \mathcal{O}' dos referenciais. Embora as coordenadas desse evento específico coincidam, o mesmo não precisa ocorrer para eventos posteriores, uma vez que a origem do referencial S' é medida no referencial S na posição $(ut, 0, 0)$; do ponto de vista do referencial S' , é a origem do referencial S que ocupa as coordenadas $(-ut, 0, 0)$.

A onda esférica conforme observada no referencial S , no qual a fonte se encontra em repouso, possui raio ct e se encontra centrada na origem. Sua frente de onda possui coordenadas

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2. \quad (7.16)$$

Mas, pelo postulado de constância da velocidade da luz, algo similar deve ocorrer no referencial S' . Embora a fonte seja vista nesse referencial com velocidade $\vec{u} = -u\hat{x}$, todos os raios de luz se movem com velocidade c também nesse referencial. Portanto, a frente de onda deve possuir raio ct' e estar centrada em seu ponto de emissão, a origem de S' (e não mais a fonte), seguindo a equação

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2. \quad (7.17)$$

A invariância de *forma* para a localização da frente de onda esférica nos dois referenciais revela uma maneira geral de entendermos a nova física da relatividade: o espaço e o tempo se mesclam para formar uma nova entidade geométrica, o espaço-tempo. Se cada observador precisa utilizar localmente a mesma relação entre coordenadas para descrever o lugar geométrico ocupado pela frente de onda esférica, então deve ser um invariante por troca de referencial a quantidade

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (7.18)$$

Vemos que distâncias tal como definidas na mecânica newtoniana não dão conta do tempo de propagação finito de sinais luminosos; a relatividade nos mostra ser preciso generalizar o conceito de ‘distância’ para incluir também o tempo. Definimos assim o *intervalo* Δs entre dois eventos $\mathcal{E}_1 = (t_1, \vec{r}_1) = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ e $\mathcal{E}_2 = (t_2, \vec{r}_2) = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ como

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &:= c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 \\ &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \end{aligned} \quad (7.19)$$

A Eq. (7.18) nos mostra que a luz se propaga *sempre* de maneira tal que $\Delta s = 0$, resultado válido em qualquer referencial. As superfícies $\Delta s = 0$ no espaço-tempo servem para separar regiões causalmente

conectadas de regiões desconectadas. Ao contrário da distância euclidiana, o quadrado do intervalo quadridimensional (quantidade ligada ao módulo quadrático de um quadrivetor, como veremos) pode assumir valores positivos, negativos ou nulos.

7.3.2 Simultaneidade temporal e espacial

O fato de que o intervalo Δs possui o mesmo valor em qualquer referencial inercial implica em particular que o sinal de seu quadrado deve ser mantido. Consideremos dois eventos \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 em S satisfazendo

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \vec{r}^2. \quad (7.20)$$

Notemos que o intervalo é definido como a diferença de dois termos positivos. A conservação de seu sinal por troca de referencial implica que o termo ‘vencedor’ deve ser sempre o mesmo.

Analisemos as três situações possíveis para o sinal de Δs^2 . Como vimos, o caso especial em que $\Delta s = 0$ corresponde à propagação da luz, sendo por isso chamado *intervalo tipo luz*. Tomemos como segundo caso a situação em que $\Delta s^2 > 0$. Visto no referencial S' , o intervalo seria denotado como

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{r}'^2. \quad (7.21)$$

Embora esses dois termos possam ser tão grandes quanto se queira, existe um mínimo a ser respeitado por ambos para que valha $\Delta s^2 > 0$, no qual

$$\Delta \vec{r}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t_{min}^2. \quad (7.22)$$

Isso significa que existe sempre um referencial inercial em que os dois eventos ocorrem no mesmo ponto \vec{r}' do espaço, efeito a que chamamos ‘simultaneidade espacial’ por falta de terminologia melhor. Não existe, no entanto, nenhum referencial em que os dois eventos ocorram ao mesmo tempo. Como o termo de tempo domina o intervalo, chamamo-lo de *intervalo tipo tempo*. Eventos que podem ocorrer no mesmo ponto do espaço em algum referencial estão, por definição, causalmente conectados, i.e. o evento posterior pode ter sido influenciado pelo anterior. Isso se deve ao fato de que existe tempo suficiente para que um raio de luz se propague entre suas localizações no espaço, significando que um ‘percebe’ o outro.

O terceiro cenário envolve o caso oposto, em que $\Delta s < 0$. Temos então a possibilidade de maximizar Δs pela escolha de referencial S' tal que

$$\Delta t' = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta s^2 = \Delta \vec{r}'_{min}{}^2. \quad (7.23)$$

Os dois eventos são simultâneos (no sentido usual, i.e. temporal) nesse referencial. Nesse caso, não existe referencial em que os dois eventos ocorram no mesmo ponto de espaço. Temos então um *intervalo tipo espaço*.

A invariância do intervalo, consequência direta de postularmos a velocidade da luz como absoluta, impõe muito claramente que o espaço e o tempo a separarem eventos dependem de referencial, tornando-se quantidades relativas. Todavia, a manutenção do sinal do intervalo quadrático torna a causalidade respeitada em todos os referenciais. Dois eventos podem se influenciar sempre que a distância entre eles é menor do que a distância percorrida pela luz no tempo decorrido entre suas ocorrências. Pelo contrário, eventos causalmente desconectados são aqueles tão distantes que nem a luz encontra tempo hábil para chegar à posição de um partindo do outro.

7.3.3 Transformações de Lorentz

A teoria da relatividade surge da aplicação das leis de transformação de Lorentz para os rótulos de espaço e de tempo como se fossem de fato mudanças na própria geometria dessa nova entidade, o espaço-tempo. As transformações da Eq. (7.12) devem ser encaradas como as transformações de posições e tempo, nos sentidos adotados pela mecânica clássica, conforme vistos nos dois referenciais inerciais.

Obtemos a forma como as coordenadas de um evento são traduzidas entre os referenciais S e S' a partir das relações da Eq. (7.12). Elas nos fornecem imediatamente

$$y = y' \quad \text{e} \quad z = z'. \quad (7.24)$$

As duas equações restantes misturam a posição longitudinal (i.e. paralela à velocidade relativa \vec{u} entre os referenciais) e o tempo em ambos os referenciais. Se tomarmos as coordenadas x e t do referencial S como funções das coordenadas em S' , da forma $t = t(x', t')$ e $x = x(x', t')$, podemos entender as equações restantes como

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.25)$$

A Eq. (7.12) nos fornece então as identidades

$$\frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma \frac{u}{c^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma u, \quad \frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \quad (7.26)$$

que se traduzem nas equações de transformação (de S' para S)

$$t = \gamma \left(t' + \frac{u}{c^2} x' \right) \quad \text{e} \quad x = \gamma (x' + ut'). \quad (7.27)$$

Pelo princípio de relatividade, as transformações inversas devem possuir a mesma forma⁴, bastando trocar o sentido da velocidade relativa, i.e. $u \rightarrow -u$, para obtermos

$$t' = \gamma \left(t - \frac{u}{c^2} x \right) \quad \text{e} \quad x' = \gamma (x - ut). \quad (7.28)$$

As transformações relativísticas entre referencial afetam apenas a coordenada espacial alinhada à velocidade relativa, misturando-a à coordenada temporal; as coordenadas espaciais transversais à velocidade são mantidas sem modificações.

7.3.4 Contração do espaço

A necessidade de ocorrência do fenômeno de contração do espaço na relatividade pode ser já depreendida da propriedade de invariância do intervalo. De fato, se dois eventos ocorrem ao mesmo tempo no referencial S , seu intervalo em qualquer outro referencial S' será tal que

$$-\Delta r^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta \vec{r}'^2 \quad (7.29)$$

Se Δr já é a distância mínima entre os eventos simultâneos, temos necessariamente que $\Delta r'^2 > \Delta r^2$, indicando que a percepção de distância deve ser diferente nos dois referenciais.

⁴De fato, a constante γ foi deduzida na Eq. (7.15) pela imposição de que isso seja verdade.

A forma como distâncias se alteram entre referenciais depende da orientação relativa à direção da velocidade. De acordo com a Eq. (7.24), as dimensões transversais permanecem iguais nos dois referenciais. Já as direções longitudinais devem se alterar por causa do movimento, segundo a Eq. (7.28). Como essas equações de transformação misturam tempo e posição, é preciso dividir uma maneira de se medir distância sem dúvida. Vamos convencionar que dimensões sejam medidas de maneira simultânea no referencial em que o objeto for medido, como se fosse uma ‘fotografia’⁵. A ideia dessa escolha é fazer com que os termos de dependência temporal não contribuam na transformação entre referenciais.

Consideremos uma barra retilínea unidimensional presa à origem do referencial S' , em movimento uniforme com relação ao referencial de laboratório S . Seu comprimento é definido como a diferença entre as posições de seus pontos extremos conforme vistos instantaneamente no referencial S , no qual tomamos $t_1 = t_2 = t$ e $x_2(t) - x_1(t) = \ell$. A transformação de Lorentz nos permite relacionar essas coordenadas pela relação

$$x'_2 - x'_1 \stackrel{\text{Eq. (7.28)}}{=} \gamma [x_2 - x_1 - u(t_1 - t_2)]. \quad (7.30)$$

Como convencionamos $t_1 - t_2 = 0$ na maneira ‘fotográfica’ de medir tamanhos, temos

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma}, \quad (7.31)$$

em que $\ell' = x'_1 - x'_2$ é a distância entre os pontos da extremidade da barra no referencial S' compatíveis com a medida instantânea⁶ em S .

7.3.5 Dilatação do tempo

O fenômeno de dilatação do tempo possui origem muito similar à contração do espaço, como fica claro pelo argumento de invariância do intervalo. Para evitar repetições, vamos utilizar a abordagem pragmática típica da relatividade para definir o tempo em termos de eventos: o tic-tac de um relógio de luz.

Um relógio de luz é um dispositivo formado por dois espelhos dispostos e alinhados frontalmente, de maneira que um raio de luz viaje de um até outro (‘tic’) e de volta (‘tac’). Cada um desses instantes é um evento cuja ocorrência pode ser testemunhada em qualquer referencial. Os observadores S e S' fixam cada qual um relógio de luz à origem de suas coordenadas e os sincronizam em $t = t' = 0$ no instante em que passam um pelo outro em $x = x' = 0$.

No referencial próprio de cada observador, a duração de 1/2 período do relógio é simplesmente dada pelo tempo de trânsito entre os espelhos,

$$\frac{\tau'}{2} = \frac{\ell}{c}. \quad (7.32)$$

⁵A maneira como objetos localizados num referencial em movimento relativo seriam visualizados em geral requer transformarmos *posições angulares aparentes*, e não comprimentos. De fato, nossa visão interpreta tamanho e forma em termos da direção e da divergência de um conjunto de vetores de onda partindo do objeto observado. Notemos que toda definição intuitiva no mundo não-relativístico, tal como comprimento e duração temporal, precisam ser revistas para fazerem sentido em algum contexto relativístico; em geral, elas não funcionarão em todos os contextos, parecendo artificiais em alguns deles.

⁶Há sutilezas. Os raios de luz que produzem a fotografia em S não partem simultaneamente das extremidades da barra em S' . A Eq. (7.28) nos diz que $t'_2 - t'_1 = -u\ell/c^2$, i.e. para que cheguem juntos, o raio de luz parte da extremidade mais distante da barra antes daquele partindo da mais próxima, e portanto ℓ' não corresponde ao comprimento da barra vista pelo observador S' , mas sim à distância em S' entre os dois eventos de emissão de luz (não simultâneos em S') contribuindo para a fotografia instantânea em S .

Por isso, τ' é chamado de *tempo próprio*.

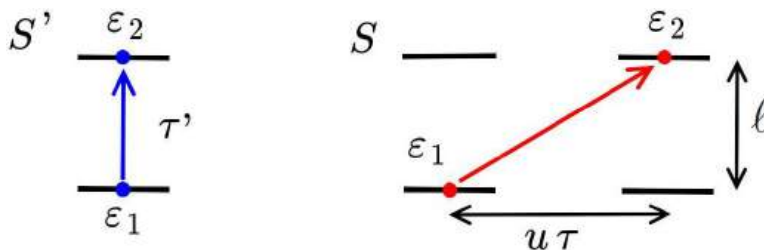


Figura 7.2: Esquerda: relógio de luz possui período τ' em seu referencial próprio S' . Direita: mesmo relógio observado do referencial S , em relação ao qual se encontra em movimento.

A dilatação do tempo fica aparente quando o observador S tenta inferir o tempo que o referencial S' em movimento relativístico estaria medindo, ou seja, o número de tic-tacs do relógio em S' conforme visto por S . Vista por S , a trajetória em 1/2 período do raio de luz no relógio em S' é uma reta que percorre horizontalmente a distância $\Delta x = u\tau/2$ e verticalmente a distância ℓ entre os espelhos, i.e. seu comprimento vale $\Delta \ell = \sqrt{\Delta x^2 + \ell^2}$; mas o raio de luz em S' possui velocidade c também quando observado a partir de S , de maneira que 1/2 período aparente vale

$$\frac{\tau}{2} = \frac{\Delta \ell}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\left(u \frac{\tau}{2}\right)^2 + \ell^2} \quad \begin{array}{l} \text{Eq. (7.32)} \\ \Downarrow \\ \Rightarrow \end{array} \quad \tau = \gamma \tau'. \quad (7.33)$$

Assim, o observador em S observa o período aparente τ do relógio em S' , sempre maior do que o período próprio τ' : a cada tic-tac de seu relógio correspondem γ tic-tacs do relógio em S' . Como $\gamma \geq 1$, segue que o tempo parece passar mais lentamente em S' quando visto de S . O mesmo obviamente deve ocorrer em sentido inverso, por simetria. Dizemos que um referencial em movimento experimenta um efeito de dilatação do tempo com relação ao referencial em repouso (sob o ponto de vista deste último!).

7.3.6 Composição de velocidades

A transformação de Lorentz nos sugere que nenhum referencial inercial pode se mover com velocidade maior ou igual a c quando observado de qualquer outro. O fator γ precisa ser real para que os campos elétrico e magnético façam sentido físico em todo referencial, o que limita a velocidade relativa a $|v| < c$. Em particular, não faz sentido pensar num referencial no qual a frente de onda da luz esteja em repouso.

Isso nos leva a deduzir que a mesma limitação deva valer para a cinemática de objetos tratada pela mecânica: nenhum objeto pode se mover com velocidade maior⁷ ou igual a c . Portanto, a regra de composição de velocidades de Galileu deve deixar de valer no cenário relativístico. Podemos encontrar essa regra utilizando as transformações de Lorentz para o espaço-tempo.

Consideremos uma partícula movendo-se com velocidade \vec{v} no referencial S . Suas componentes cartesianas se escrevem como razões entre deslocamentos infinitesimais e intervalos infinitesimais de tempo, como usual,

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} = \frac{dx}{dt} \hat{x} + \frac{dy}{dt} \hat{y} + \frac{dz}{dt} \hat{z}. \quad (7.34)$$

⁷A restrição a velocidades maiores do que c pode ser removida se você gostar de matemática suja o suficiente para tratar táquions.

A transposição do movimento dessa partícula para o referencial S' , movendo-se relativamente a S com velocidade $\vec{u} = u\hat{u}$, é realizada pelas transformações de Lorentz escritas em forma diferencial. De acordo com as Eqs. (7.24) e (7.28), são elas

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{u}{c^2} dx \right), \quad dx' = \gamma (dx - u dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad (7.35)$$

Aplicação direta dessas relações à Eq. (7.34) mostra que todas as componentes da velocidade são afetadas por conta do efeito de dilatação do tempo. Temos

$$v'_x = \frac{\gamma (dx - u dt)}{\gamma (dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma (1 - \frac{uv_x}{c^2})}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma (1 - \frac{uv_x}{c^2})}. \quad (7.36)$$

Assim, o vetor velocidade \vec{v}' se transforma entre referenciais como

$$\vec{v}' = v'_x \hat{x}' + v'_y \hat{y}' + v'_z \hat{z}' = \frac{1}{\gamma (1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2})} \left(\gamma (v_x - u) \hat{x}' + v_y \hat{y}' + v_z \hat{z}' \right). \quad (7.37)$$

Essa transformação se reduz à de Galileu para $\gamma \approx 1$. É possível mostrar que as magnitudes v e v' das velocidades nos dois referenciais se relacionam por

$$\frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2})^2}. \quad (7.38)$$

7.3.7 Momento e energia

A troca de referenciais peculiar da relatividade leva a contradições se mantivermos as expressões newtonianas para o momento e a energia cinética. A maneira de adaptar essas grandezas ao contexto relativístico pode ser encontrada por considerações simples.

Consideremos duas partículas livres idênticas num processo de colisão frontal. Tomamos o mesmo como sendo simétrico para facilitar a análise: as partículas se aproximam da origem do referencial S (o referencial de centro de massa), cada qual num ângulo de 45° com relação aos eixos x e y (o plano da colisão); por simetria e por serem idênticas, ambas partem também a 45° desses eixos, embora por caminhos diferentes. Os momentos iniciais das partículas são

$$\vec{p}_1 = m_1 v_x \hat{x} + m_1 v_y \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{p}_2 = -m_2 v_x \hat{x} - m_2 v_y \hat{y}, \quad (7.39)$$

enquanto os finais são

$$\vec{P}_1 = m_1 v_x \hat{x} - m_1 v_y \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{P}_2 = -m_2 v_x \hat{x} + m_2 v_y \hat{y}. \quad (7.40)$$

É imediato verificar que essa colisão é física, i.e. respeita a conservação do momento no referencial S ,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0. \quad (7.41)$$

tendo em vista que $m_1 = m_2$.

Realizamos agora uma troca de referencial para considerar como essa mesma colisão seria percebida por um observador em S' em movimento relativo. As transformações de velocidade das Eqs. (7.37) nos fornecem para os momentos iniciais as expressões

$$\vec{p}'_1 = m_1 \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \hat{x} + m_1 \frac{v_y}{\gamma (1 - \frac{uv_x}{c^2})} \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{p}'_2 = -m_2 \frac{v_x - u}{1 + \frac{uv_x}{c^2}} \hat{x} - m_2 \frac{v_y}{\gamma (1 + \frac{uv_x}{c^2})} \hat{y}, \quad (7.42)$$

e, para os finais,

$$\vec{P}'_1 = m_1 \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \hat{x} - m_1 \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \hat{y} \quad \text{e} \quad \vec{P}'_2 = -m_2 \frac{v_x - u}{1 + \frac{uv_x}{c^2}} \hat{x} + m_2 \frac{v_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv_x}{c^2}\right)} \hat{y}. \quad (7.43)$$

Enquanto a conservação do momento ocorre na direção x , obtemos na direção y a condição

$$p_{1y} + p_{2y} = m_1 \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} - m_2 \frac{v_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv_x}{c^2}\right)} \stackrel{!}{=} -m_1 \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} + m_2 \frac{v_y}{\gamma \left(1 + \frac{uv_x}{c^2}\right)} = P_{1y} + P_{2y}, \quad (7.44)$$

relação que produz uma contradição sempre que $u \neq 0$,

$$1 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \frac{uv_x}{c^2}}{1 + \frac{uv_x}{c^2}} \neq 1. \quad (7.45)$$

O motivo por trás dessa incompatibilidade está relacionado ao sentido relativo (sinal) entre a velocidade longitudinal v_x da partícula e a velocidade u de troca de referenciais. Os vetores momento resultantes não apontariam na mesma direção e em sentidos opostos caso a expressão newtoniana para o momento fosse mantida! Isso nos mostra que o momento newtoniano deve ser uma expressão aproximada, obtida no limite $v \ll c$ da mecânica relativística.

Consertamos o momento newtoniano postulando que a *inércia* da partícula, confundida no caso newtoniano apenas com a massa, passe a depender da velocidade através de uma função $\Gamma = \Gamma(v)$, i.e.

$$\vec{p} = \Gamma m \vec{v}. \quad (7.46)$$

Com o uso dessa expressão revisada para o momento, fazemos $m_1 \rightarrow \Gamma_1 m_1$ e $m_2 \rightarrow \Gamma_2 m_2$ na Eq. (7.44) para obter

$$\frac{\Gamma(v_1)}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} m_1 = \frac{\Gamma(v_2)}{1 + \frac{uv_x}{c^2}} m_2. \quad (7.47)$$

Mas a Eq. (7.38) para a transformação de magnitudes das velocidades estabelece para os denominadores acima as identidades

$$\frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}, \quad (7.48)$$

de maneira que a Eq. (7.47) fornece a condição

$$\Gamma(v_1) m_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \Gamma(v_2) m_2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}. \quad (7.49)$$

Logo, a função $\Gamma(v)$ da forma

$$\Gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.50)$$

consertaria a conservação do momento. Postulamos por isso o momento relativístico como

$$\vec{p} = \Gamma m \vec{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v}. \quad (7.51)$$

A principal adição conceitual do momento relativístico é reconhecer que a inércia, i.e. o termo que multiplica a velocidade e que portanto regula o quanto a trajetória da partícula é sensível a forças externas, não advém apenas da massa, mas de algo além, conectado à velocidade. Veremos mais detalhes a seguir.

Com a nova expressão para o momento, a segunda lei de Newton se modifica para

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right), \quad (7.52)$$

e o trabalho realizado pela força para levar a partícula do repouso até a velocidade \vec{v} é dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = K. \quad (7.53)$$

Por isso é preciso revisar também a expressão para a energia cinética! Realizando a integral (um cálculo simples mas tedioso), chega-se à expressão

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2, \quad (7.54)$$

algo que não se assemelha na aparência à energia cinética newtoniana. No entanto, a compatibilidade entre as duas expressões fica clara ao considerarmos o limite $v \ll c$,

$$K = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - mc^2 \stackrel{v \ll c}{\approx} mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) - mc^2 = \frac{1}{2} mv^2. \quad (7.55)$$

A Eq. (7.54) indica ser a energia cinética uma diferença entre dois termos, algo que podemos chamar de *energia total* E e uma contribuição a que denominamos *energia de repouso* $E_0 = mc^2$. Reorganizando os termos, a expressão para a energia relativística se torna

$$E = K + E_0, \quad \text{com} \quad E = \Gamma mc^2 \quad \text{e} \quad E_0 = mc^2. \quad (7.56)$$

A definição para a energia total já nos permite entender o que significa exatamente o novo termo de inércia a aparecer no momento,

$$\Gamma m = \frac{E}{c^2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{E}{c^2} \vec{v}. \quad (7.57)$$

Assim, a relatividade estabelece de maneira bastante clara que a inércia (termo que multiplica a velocidade na expressão do momento) advém, na verdade, de algo mais genérico: da energia! A massa de repouso é apenas uma de suas formas, posto que a energia cinética também contribui para a inércia. Em outras palavras, podemos agora conectar os conceitos de inércia e energia para reconhecer que energia possui inércia ou, equivalentemente, inércia advém da energia.

O termo de energia cinética, por possuir relação com o momento, pode ser eliminado na Eq. (7.56) em favor deste. Para tanto, consideramos a quantidade

$$p^2 c^2 = \Gamma^2 m^2 v^2 c^2 = \Gamma^2 m^2 \left(1 - \frac{1}{\Gamma^2} \right) c^4 = (\Gamma mc^2)^2 - (mc^2)^2, \quad (7.58)$$

do que segue a relação fundamental para a energia relativística,

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2. \quad (7.59)$$

Nela se estabelece a conexão entre massa, momento e energia total. Em particular, vemos que partículas com massa de repouso nula devem necessariamente viajar com a velocidade da luz, pois nesse caso vale

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc. \quad (7.60)$$

Visto da forma contrária, o argumento nos leva a crer que uma ‘partícula’ de luz (o fóton) deve possuir massa nula e ser, portanto, inerentemente relativística. Ela não deve obedecer a equação de Schrödinger, restrita como é ao limite não-relativístico, mas a algo relacionado às equações de Maxwell (após quantização!). Por conseguinte, a descrição de partículas relativísticas *massivas* também deve seguir caminho parecido; afinal, seu comportamento deve tender sob certos aspectos àquele de um fóton para energias muito altas. E daí vem a equação de Dirac com sua formulação natural para o spin e muitas outras coisas interessantes.

7.4 Geometria do espaço-tempo

A similaridade entre a expressão para o intervalo e o módulo de um vetor, e também a maneira como as transformações de Lorentz misturam as coordenadas de posição e de tempo, nos motivam a buscar uma forma mais coesa de representar as grandezas no espaço-tempo. É nessa nova formulação, essencialmente geométrica, que a relatividade restrita de Einstein atinge seu mais alto grau de coesão matemática e conceitual. As ferramentas teóricas desenvolvidas nesse contexto culminariam na teoria da gravitação de Einstein, a relatividade geral, utilizada para entender a fronteira científica exploratória⁸ da atualidade: o universo em grandes escalas.

7.4.1 Métrica e quadrivetores

A formulação geométrica da relatividade se inicia com a introdução de *quadrivetores*. Posições no espaço-tempo passam a ser representadas por vetores em quatro dimensões, uma das quais corresponde ao tempo, da forma

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}), \quad (7.61)$$

em que x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$, representa cada uma de suas componentes (por convenção, índices representados por letras do alfabeto grego vão de 0 a 3). O posicionamento do índice na parte superior indica que x^μ se comporta como as *componentes* projetivas de um vetor, i.e. se transforma no sentido contrário aos versores de base, sendo por isso chamado de um quadrivetor *contravariante*.

⁸Ou seja, aquela na qual ninguém sabe exatamente o que esperar e que por isso depende exclusivamente de dados experimentais (observacionais) para avançar. O ‘boom’ da cosmologia das últimas duas décadas se deve em grande parte a uma sequência sem precedentes de instrumentos avançados de medição. A cobertura observacional da radiação eletromagnética na atualidade se estende a praticamente todo o seu espectro, com sensibilidade para detetar desde as explosões mais energéticas fisicamente possíveis (raios gama) até as coisas naturais mais frias do universo (microondas). Na faixa de microondas, vimos o primeiro mapa da radiação cósmica de fundo, realizado na década de 90, evoluir até a fineza técnica atual de ser (quase) possível observar as ‘cicatrizes’ de ondas gravitacionais primordiais nessa mesma radiação (há controvérsias!). Na faixa de ondas de rádio, redes de rádio-telescópios com proporções continentais estão hoje entrando em operação para observar com precisão sem igual estruturas ocultas pela poeira de nossa galáxia, tal como o buraco negro que habita seu centro. A faixa ótica contou com todos os avanços exploratórios do telescópio Hubble, e com ele a primeira medida precisa da taxa de expansão do universo; descobrimos com ele que não sabemos o que forma mais de 90% da massa do universo, a ‘matéria escura’... Há hoje telescópios capazes de detetar as explosões mais energéticas do cosmos na forma de radiação de raios gama. Novos tipos de telescópios, sensíveis a neutrinos, ajudam a entender desde as supernovas até as características da fusão nuclear no centro do Sol. E vários projetos prometem a continuação dessa fase exploratória por algumas décadas: medir pela primeira vez as posições de fração não desprezível das estrelas da Via Láctea, com implicações para o grande mistério de como se distribui e o que pode ser a matéria escura; substituir o telescópio Hubble por outro, otimizado para o infra-vermelho e por isso capaz de observar objetos em *red shifts* jamais explorados, além de exoplanetas; observar ondas gravitacionais com a primeira geração de equipamentos entrando em operação; sem mencionar as velhas sondas Voyager, que continuam suas viagens rumo ao espaço interestelar...

O intervalo passa a se relacionar à magnitude desse vetor, e pode ser calculado com o uso da *métrica* (de Minkowski), representada em forma matricial como

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

A métrica pode ser usada para levar um vetor contravariante em seu dual, um vetor *covariante*, i.e. para ‘baixar’ seu índice, da forma

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\nu := \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (7.63)$$

em que utilizamos na última passagem a notação de Einstein em que a repetição de um índice é tomada como indicativo tácito de soma sobre todos os seus valores (‘índice mudo’). Esse tipo de operação é comumente chamada de ‘contração de índices’ (no caso, o índice ν foi contraído). Vetores covariantes se transformam como *versores* de base. Fazendo explicitamente o produto indicado na Eq. (7.63), a diferença entre vetores covariantes e contravariantes fica mais clara, pois

$$x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3), \quad (7.64)$$

i.e. temos para a parte temporal $x_0 = x^0$ e para a espacial, $x_a = -x^a$. Utilizamos aqui a convenção de que índices latinos representam apenas coordenadas de espaço (i.e. vão de 1 a 3).

É conveniente definirmos a métrica inversa $\eta^{\mu\nu}$ pela condição

$$\eta^{\mu\lambda} \eta_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad (7.65)$$

em que δ_ν^μ é a delta de Kronecker. Para métricas diagonais (i.e. construídas sobre coordenadas ortogonais), temos simplesmente que $\eta^{\mu\mu} = \frac{1}{\eta_{\mu\mu}}$. No caso da métrica de Minkowski (espaço-tempo plano), vale ainda a identidade mais simples $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, ou seja, a métrica é sua própria inversa, de maneira que em representação matricial vale $\boldsymbol{\eta}^2 = \mathbf{1}$. A métrica inversa nos permite inverter a Eq. (7.63) para criar um vetor contravariante a partir de um covariante pela operação de ‘levantar’ o índice. Contraíndo o índice μ da Eq. (7.63) com a métrica inversa $\eta^{\lambda\mu}$, obtemos

$$\eta^{\lambda\mu} x_\mu = \eta^{\lambda\mu} \eta_{\mu\nu} x^\nu \stackrel{\text{Eq. (7.65)}}{=} \delta_\nu^\lambda x^\nu = x^\lambda; \quad (7.66)$$

renomeando índices, chegamos a

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (7.67)$$

A arte de ‘levantar’ e ‘baixar’ índices pela contração com a métrica é popularmente conhecida como ‘ginástica de índices’, apesar de queimar um número desprezível de calorias. É preciso atentar apenas a qual índice da métrica se utiliza na operação⁹.

O quadrado do intervalo se calcula pela contração de índices (produto interno) da quadriposição em suas versões contravariante e covariante, como

$$s^2 := x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = ct^2 - r^2, \quad (7.68)$$

⁹Embora isso não tenha relevância no caso de quadrivetores, a contração da métrica com tensores pode apresentar resultados diferentes de acordo com o índice utilizado (tal como ocorre no produto com uma matriz ou sua transposta).

e portanto envolvem a métrica. Contrações de quadrivetores dão origem a quantidades escalares, invariantes de Lorentz. A operação está definida também para quadrivetores diferentes,

$$x_\mu y^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad (7.69)$$

Notemos que a ordem dos fatores não é relevante, já que a notação usual da relatividade envolve somatórios explícitos de componentes numéricas (e não matrizes).

A métrica nos fornece essencialmente o diferencial de ‘distância’ nesse espaço, i.e. o intervalo infinitesimal. Definindo um quadrivetor infinitesimal $dx^\mu \equiv (cdt, d\vec{r})$ (i.e. a diferença de coordenadas de dois eventos infinitesimalmente próximos), temos que o elemento de distância no espaço de Minkowski vale

$$ds^2 := dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (7.70)$$

Essa definição pode ser escrita também como

$$ds^2 := dx_\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (7.71)$$

e deve ser comparada ao elemento euclidiano de distância, $d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. De fato, lembremos para efeito de ilustração que mesmo o espaço euclidiano pode ter sua métrica descrita em termos de outros sistemas de coordenadas; teríamos e.g. em coordenadas esféricas

$$d\vec{r}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 := g_{ab} dx^a dx^b, \quad \text{com } g_{ab} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (7.72)$$

Dessas expressões vemos que a métrica é uma quantidade definidora da *geometria* local do espaço considerado. O que nos leva à pergunta: por que a relatividade restrita está associada à geometria de Minkowski? Bem, certamente sua característica euclidiana na parte espacial deve influenciar na escolha. Mas a resposta física mais precisa está relacionada à transformação de Lorentz e, mais fundamentalmente, à imposição de invariância da velocidade da luz.

7.4.2 Transformação relativística entre referenciais inerciais

Vejamos então como transformações de referencial agem sobre um quadrivetor. No caso mais básico de uma transformação de coordenadas, obtemos pela regra da cadeia

$$x'^\mu(\{x^\nu\}) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu := \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad \text{com } \Lambda_\nu^\mu := \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}. \quad (7.73)$$

Se ignorarmos rotações e translações por serem operações já analisadas anteriormente no curso, o tensor Λ_ν^μ representa uma transformação de Lorentz (mais precisamente, um ‘*boost*’ de Lorentz na direção x), e se escreve, de acordo com as Eqs. (7.24) e (7.28),

$$\Lambda_\nu^\mu \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.74)$$

Em particular, a transformação do intervalo diferencial ocorre da forma

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Lambda_{\mu}^{\alpha} dx^{\mu} \Lambda_{\nu}^{\beta} dx^{\nu}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Notemos, no entanto, que podemos juntar os fatores que não envolvem diferenciais de distância para identificarmos a transformação da métrica como

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu}. \quad (7.76)$$

De fato, já vimos essa regra de transformação anteriormente: a métrica $\eta_{\mu\nu}$ e a transformação de Lorentz Λ_{ν}^{μ} são tensores, e por isso podem ser representados por matrizes. A Eq. (7.76) se escreve em notação matricial como

$$\mathbf{\Lambda}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\eta}. \quad (7.77)$$

Usando essa identidade de volta na Eq. (7.75), obtemos em resumo

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \stackrel{\text{Eq. (7.76)}}{=} \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = ds^2. \quad (7.78)$$

Como esperado, o diferencial de distância se mantém invariante por transformações de Lorentz. Mas a métrica desse espaço (Minkowski) foi deduzida como consequência direta da invariância de c . Podemos então utilizar a Eq. (7.77) para *definir* as transformações de Lorentz em torno de uma propriedade matemática unificadora: aquelas que mantêm a métrica de Minkowski invariante, i.e. preservam a estrutura do espaço-tempo. Notemos como a forma de pensar é muito similar à utilizada para entender as transformações canônicas agindo sobre o espaço de fase hamiltoniano: na relatividade, o espaço-tempo transformado deve herdar as propriedades físicas do espaço-tempo original. As transformações de Lorentz fazem esse tipo de conexão. Elas formam por isso um grupo e tudo o mais.

A Eq. (7.77) nos permite estabelecer ainda outra propriedade do boost de Lorentz. Como levantar um índice da métrica leva à matriz identidade [Eq. (7.65)], podemos contrair um dos índices livres da Eq. (7.76) para obter

$$\eta^{\lambda\mu} \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta^{\lambda\mu} \eta_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{\beta}^{\lambda} \Lambda_{\nu}^{\beta} = \delta_{\nu}^{\lambda}, \quad \text{ou seja, } \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T = \mathbb{1}, \quad (7.79)$$

a qual estabelece a transformação de Lorentz como ortogonal. Isso significa que ela deve fornecer uma espécie de ‘rotação’ entre as coordenadas de tempo e de posição longitudinal no espaço quadridimensional. De fato, se reescrevermos as componentes relevantes do intervalo embutindo a unidade imaginária nos termos quadráticos (para dar conta do sinal negativo), i.e.

$$ds^2 = (ct)^2 + (idx)^2, \quad (7.80)$$

a rotação deve ser tal que

$$\begin{cases} ct' = ct \cos \theta + idx \sin \theta, \\ ix' = -ct \sin \theta + idx \cos \theta. \end{cases} \quad (7.81)$$

Para fazer sentido, a transformação precisa fornecer números reais, o que pode ser obtido com a substituição $\theta \rightarrow i\phi$ (i.e. $\cos \theta \rightarrow \cosh \phi$ e $\sin \theta \rightarrow i \sinh \phi$). Obtemos

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \phi - dx \sinh \phi, \\ x' = -ct \sinh \phi + dx \cosh \phi. \end{cases} \quad (7.82)$$

Com essa parametrização, o tensor de transformação de Lorentz se escreve

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} \equiv \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.83)$$

Comparação direta com a Eq. (7.74) nos leva a identificar¹⁰

$$\cosh \phi = \gamma \quad \text{e} \quad \sinh \phi = \beta\gamma. \quad (7.84)$$

É fácil verificar que essas relações são consistentes no sentido de que valem como uma troca de variáveis inversível para toda a faixa de valores de γ e β (sem causarem contradições internas). Por exemplo, a identidade $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$ se reproduz tanto em termos de ϕ quanto do par γ e β . A parametrização das transformações de Lorentz em termos de ϕ , ‘um ângulo imaginário de rotação no plano (ct, x) do espaço-tempo quadridimensional’ (livro 4 de Moysés Nussenzveig), as tornam mais sucintas e elegantes.

7.4.3 Outros quadrivetores

Existem ainda outros quadrivetores úteis. A definição de um quadrivetor é baseada em sua lei de transformação: todo objeto que se transforma como as coordenadas, i.e. conforme prescrito pela Eq. (7.73), é um quadrivetor.

Uma possível inspiração para a construção de quadrivetores pode vir dos invariantes de Lorentz. De fato, sabemos que a contração de um quadrivetor deve possuir a forma de uma soma entre sua parte temporal e o negativo de sua parte espacial; além disso, o resultado deve produzir um escalar, portanto invariante por troca de referenciais.

Tomemos como exemplo o vetor momento. Qual seria a parte temporal de um quadrivetor momento? A Eq. (7.59) nos fornece uma resposta para isso se a reorganizarmos como

$$E_0^2 = E^2 - p^2 c^2. \quad (7.85)$$

Assim, o análogo da ‘componente temporal’ desse quadrivetor deve ser a energia. É conveniente então definirmos o quadrimomento como

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad (7.86)$$

cuja contração produz essencialmente a energia de repouso (ou a massa de repouso) como invariante de Lorentz,

$$p^{\mu} p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{E_0^2}{c^2} = m^2 c^2. \quad (7.87)$$

¹⁰A forma como um quadrivetor é construído, a partir da junção de uma dimensão escalar a três dimensões cartesianas de Espaço, nos remete também aos *quatêrnions*. Nesse caso, quadrivetores covariantes e contravariantes são conjugados um do outro, e o módulo do quatêrnion é um invariante de Lorentz. De fato, o boost de Lorentz é apenas a generalização de uma rotação a esse espaço de quatro dimensões, e por isso conserva módulos de quatêrnions.

A partir dele podemos construir a quadrivelocidade de tal forma que

$$p^\mu := mv^\mu, \quad (7.88)$$

ou seja,

$$v^\mu \equiv \gamma(c, \vec{v}). \quad (7.89)$$

Seu quadrado é obviamente um invariante de Lorentz,

$$v^\mu v_\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2, \quad (7.90)$$

a velocidade da luz.

7.5 Eletromagnetismo na formulação relativística

A cinemática relativística se expressa de maneira mais simples e atinge uma formulação geométrica se as grandezas dinâmicas forem reunidas em vetores de quatro dimensões. No contexto do eletromagnetismo, esse tipo de estrutura nos permite escrever as equações de Maxwell em formato *covariante*, i.e. em formas invariantes por transformações de Lorentz, a tradução matemática do princípio de relatividade de Galileu aplicado ao eletromagnetismo.

No caso dos campos elétrico e magnético, é razoavelmente claro que não podem ser reunidos em estruturas desse tipo: a forma como são afetados pela transformação de Lorentz [Eq. (7.11)], com componentes longitudinais constantes e transversais alteradas, é o oposto do que esperamos de quadrivetores!

No entanto, os dois campos podem ser escritos em termos de potenciais, um deles escalar $\Phi(\vec{r}, t)$ e outro vetorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Os potenciais são construídos para que sejam satisfeitas automaticamente as equações homogêneas de Maxwell (aquelas sem presença de fontes [Eqs. (7.5c-d)]), pelas relações

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (7.91)$$

Existem infinitos potenciais capazes de produzir os mesmos campos elétrico e magnético, propriedade chamada de *simetria de calibre*. O campo eletromagnético é invariante pelas transformações de calibre

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}F, \\ \Phi &\rightarrow \Phi - \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned} \quad (7.92)$$

em que $F(\vec{r}, t)$ é uma função escalar. Na prática, os potenciais são fixados pelo uso de uma condição de calibre, uma equação que lhes conecta entre si de maneira a eliminar qualquer dubiedade.

As demais equações de Maxwell, i.e. com fontes, fornecem então a dinâmica dos potenciais. Por substituição direta das definições para os potenciais [Eq. (7.91)], obtemos para esses objetos as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right). \end{array} \right. \quad (7.93)$$

A segunda equação é muito similar em forma à *equação de onda*, e podemos utilizar a liberdade de escolha de calibre para torná-la de fato. O calibre de Lorentz consiste em fixar os potenciais pela relação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (7.94)$$

Com essa escolha, na verdade os *dois* potenciais passam a obedecer equações de onda inhomogêneas¹¹,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{j}. \end{aligned} \quad (7.97)$$

A primeira evidência de quadrivetores no eletromagnetismo aparece nos termos de fonte dessas equações. De acordo com a Eq. (7.13), as densidade de carga e de corrente se transformam como quadrivetores, e portanto podem ser reunidas na quadricorrente

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}). \quad (7.98)$$

Mas as equações dinâmicas para os potenciais são igualdades entre objetos do mesmo tipo: assim, seus membros esquerdos também devem corresponder a um quadrivetor! Por isso juntamos os potenciais escalar e vetor no quadripotencial

$$A^\mu \equiv (c\Phi, \vec{A}). \quad (7.99)$$

Resta-nos apenas entender os operadores diferenciais agindo nesse objeto. Juntamos então o gradiente e a derivada temporal na quadridivergência

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (7.100)$$

A transformação desse objeto segue pela regra da cadeia a forma

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \tilde{\Lambda}_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad \text{com } \tilde{\Lambda}_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = (\Lambda_\mu^\nu)^{-1}, \quad (7.101)$$

e portanto se transforma como um quadrivetor covariante, denotado por

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}. \quad (7.102)$$

O quadrivetor contravariante correspondente é

$$\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right). \quad (7.103)$$

¹¹Para encontrar a função de calibre $F(\vec{r}, t)$ a permitir tal transformação, suponhamos que começássemos o tratamento com potenciais \vec{A}_0 e Φ_0 quaisquer, e então aplicássemos as transformações de calibre da Eq. (7.92) tal que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{=0} + \nabla^2 F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (7.95)$$

ou seja,

$$\nabla^2 F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = f, \quad \text{em que } f(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}. \quad (7.96)$$

Assim, a função de calibre não só existe como também obedece uma equação de onda inhomogênea! O calibre de Lorentz é por conta dessas simetrias visto como a escolha ‘natural’ de calibre do eletromagnetismo.

Por exemplo, a equação de continuidade para ρ e \vec{j} (conservação de carga) se escreve pela contração da quadridivergência com a quadricorrente, i.e.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (7.104)$$

Assim, o operador diferencial agindo sobre A^μ na Eq. (7.97) é um invariante de Lorentz obtido pela contração

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = -\square, \quad (7.105)$$

o operador d'Alembertiano. As equações de Maxwell para os potenciais se escrevem na forma elegante

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad (7.106)$$

válidas no calibre de Lorentz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (7.107)$$

Mas e os campos elétrico e magnético na formulação covariante? Para escrever as 'equações de Maxwell mesmo' em forma covariante, notemos primeiramente como os campos se conectam aos potenciais. A Eq. (7.91) nos fornece explicitamente para as componentes do campo elétrico

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad E^i = \partial^i c A^0 - c \partial^0 A^i, \quad (7.108)$$

e para o campo magnético

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B^1 = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ B^2 = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 \\ B^3 = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \end{cases}. \quad (7.109)$$

A estrutura dos campos é dada essencialmente pelo produto de dois quadrivetores, a quadridivergência e o quadripotencial, sendo descrito por dois índices. Ao serem submetidos a uma transformação de Lorentz, os campos devem se portar da mesma maneira que a métrica [Eq. (7.76)], e são portanto elementos de um *tensor*. As expressões acima nos mostram as características gerais desse tensor: índices não se repetem nos membros direitos e trocá-los entre si leva a uma inversão de sinal. Isso nos remete a um tensor antissimétrico, objeto com 6 elementos independentes, tomados obviamente como as 3 componentes de cada um dos campos. Usando os índices como rótulos, definimos o tensor do campo eletromagnético como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (7.110)$$

Fazendo uso da Eq. (7.109), sua representação matricial fica

$$F^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E^1}{c} & -\frac{E^2}{c} & -\frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & -B^3 & B^2 \\ \frac{E^2}{c} & B^3 & 0 & -B^1 \\ \frac{E^3}{c} & B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.111)$$

A transformação de Lorentz segue a mesma prescrição da Eq. (7.76). Os campos se transformam como

$$\mathbf{F}' = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{F} \mathbf{\Lambda}, \quad (7.112)$$

uma maneira mais sucinta de obter as relações da Eq. (7.11).

Podemos agora construir de volta as equações de Maxwell a partir desse tensor. A lei de Coulomb se obtém pela derivada da primeira linha ou coluna,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \partial_i F^{i0} = \mu_0 j^0. \quad (7.113)$$

Relações similares podem ser explicitamente construídas para a segunda equação com fontes. As duas equações de Maxwell inhomogêneas se escrevem

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (7.114)$$

As equações homogêneas se tornam

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0. \quad (7.115)$$

A contração do tensor de campo eletromagnético fornece o invariante de Lorentz

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left(B^2 - \frac{E^2}{c^2} \right), \quad (7.116)$$

que pode servir como inspiração para definirmos a lagrangiana do campo eletromagnético. É preciso nesse ponto considerar o que seria uma ‘boa’ lagrangiana. Certamente não queremos que ela inclua as coordenadas explicitamente, ou não seria invariante por translações no espaço-tempo (i.e. a posição do sistema físico no universo afetaria seu comportamento); por outro lado, queremos que ela seja um invariante de Lorentz. É possível traçar outras considerações mais técnicas, como exigência de ausência de massa para as partículas, mas não saberíamos falar dessas coisas.

A equação de movimento para os campos foi obtida na Eq. (4.244) no tratamento lagrangiano de meios contínuos. Nós a reescrevemos aqui utilizando a notação de quadrivetores como

$$\partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial A^\nu} = 0. \quad (7.117)$$

Essa equação envolve os campos A^μ (em nosso caso, quatro deles: Φ, A_x, A_y, A_z), suas derivadas parciais com relação às coordenadas ($\partial_\mu A^\nu$) e a densidade lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu)$.

Como temos quatro campos escalares, teremos quatro equações de movimento. Para ver o que devem fazer os termos, façamos o paralelo com a equação de Lagrange para o movimento de uma partícula,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0. \quad (7.118)$$

Essa equação é escrita para a função de interesse $q(t)$. O primeiro termo nos fornece a maneira como ocorre sua evolução (no caso, ele nos dá a aceleração \ddot{q}). O segundo, a lei que controla \ddot{q} , dada no caso pela lei de força (derivada espacial da energia potencial).

Algo similar deve ocorrer para a Eq. (7.117). A variável de interesse em cada equação passa a ser A^μ , uma função não apenas do tempo, como no caso da posição de uma partícula, mas de quatro rótulos, i.e. $A^\mu(x^\nu)$. O primeiro termo, dado agora por um somatório em todos os rótulos x^ν , se refere à derivada de $\tilde{\mathcal{L}}$ com respeito a alguma derivada $\partial_\nu A^\mu$ do campo. Ele deve nos fornecer a forma de atualizar o próprio

campo, e portanto deve estar relacionado aos membros esquerdos das equações de Maxwell (i.e. referentes aos campos). Já o segundo termo deve fornecer a grandeza a ‘mover’ os campos, i.e. as fontes. Como esse termo envolve derivadas com relação a A^μ , a lagrangiana do campo deve possuir um termo de contração (para ser covariante) entre campos e fontes.

Tomemos o invariante da Eq. (7.116) como nossa densidade lagrangiana, e lhes adicionemos o termo de fonte, da forma

$$\tilde{\mathcal{L}}(A^\mu, \partial_\nu A^\mu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{c}j_\mu A^\mu, \quad (7.119)$$

em que mudamos para unidades gaussianas por serem as mais utilizadas nesse estágio do formalismo. Utilizando $F^{\mu\nu}$ definido pela Eq. (7.110) e aplicando diretamente a prescrição da Eq. (7.117), com o cuidado de realizar corretamente a distinção entre termos covariantes e contravariantes (essencialmente, sinais), é possível mostrar que obtemos de fato as equações de Maxwell. Além disso, por uma transformação de Legendre obtemos a densidade hamiltoniana

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2), \quad (7.120)$$

ou seja, a densidade de energia do campo. Essa formulação sucinta e elegante do eletromagnetismo é o modelo mestre das teorias covariantes de campo criadas no século XX.