Géométrie dans l'espace

Table des matières

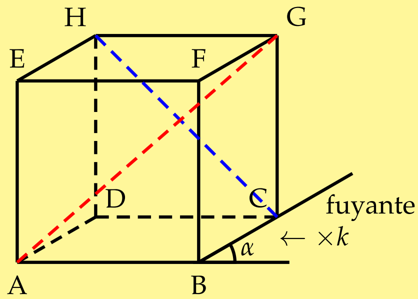
1 Droites et plans

1.1 Perspective cavalière

Définition 1 : La **perspective cavalière** est une manière de représenter en deux dimensions des objets en volume. Cette représentation ne présente pas de point de fuite : la taille des objets **ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent**.

Dans cette perspective, deux des axes sont orthogonaux (vue de face en vraie grandeur) et le troisième axe est incliné d'un angle α compris en général entre 30 et 60°par rapport à l'horizontale, appelé "angle de fuite". Les mesures sur cet axe sont multipliées par un facteur de réduction k compris en général entre 0,5 à 0,7.

Cette perspective ne donne qu'une indication sur la profondeur de l'objet.



représentation du cube ABCDEFGH

⚠ La perspective cavalière **ne conserve pas** :

- la mesure : deux segments de même longueur peuvent être représentés par deux segments de longueurs différentes (AB $\neq$ BC) ;
- les angles en particulier deux droites perpendiculaires peuvent être représentées par deux droites non perpendiculaires ((AB)$\not\perp$(AD))

Un carré peut être représenté par un parallélogramme (AEHD) !
Deux droites peuvent se couper sur la perspective sans être sécantes en réalité ! (les droites (HC) et (AG) par exemple)

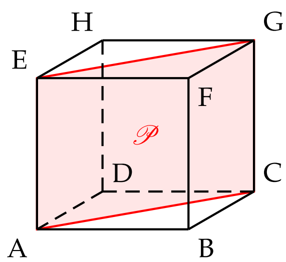
Par contre, cette perspective **conserve** :
- le parallélisme : deux droites parallèles sont représentées par des droites parallèles ;
- le milieu ou tout autre division d'un segment.

1.2 Le plan

Définition 2 : Un plan $\mathscr{P}$ peut être défini par trois points A, B, C non alignés. Il est alors noté (ABC).

Un plan peut être aussi défini par deux droites sécantes ou strictement parallèles.

Exemple : Dans le cube ABCDEFGH le plan $\mathscr{P}$ peut être défini par :
- les points A, E, C. Il peut être noté (AEC)
- les droites (EC) et (AG).
- les droites (AE) et (CG)

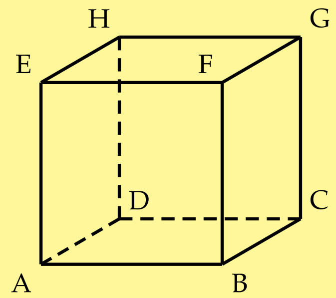


1.3 Relations entre droites et plans

1.3.1 Relations entre deux droites

Propriété 1 : Deux droites, dans l'espace, peuvent être :

- **coplanaires**, si ces deux droites appartiennent à un même plan [(AF) et (BE)] ;
- **secantes**, si ces deux droites se coupent en un point [(AB) et (AD)] ;
- **parallèles**, si ces deux droites sont coplanaires et n'ont aucun point commun ou si ces deux droites sont confondues [(AB) et (HG)] ;
- **non coplanaires** [(AB) et (DG)].

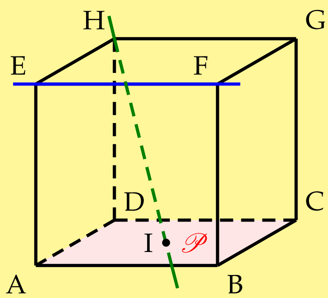


Conclusion : Deux droites peuvent être parallèles, sécantes ou non coplanaires.

1.3.2 Relations entre une droite et un plan

Propriété 2 : Une droite et un plan peuvent être :

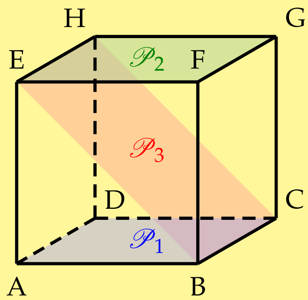
- **parallèles** : si la droite et le plan n'ont aucun point commun ou si la droite est contenue dans le plan [(EF) et $\mathscr{P}$] ;
- **sécantes** : si la droite et le plan ont un seul point commun [(HI) et $\mathscr{P}$]



1.3.3 Relation entre deux plans

Propriété 3 : Deux plans peuvent être :

- **parallèles** : si les deux plans n'ont aucun points commun ou si les deux plans sont confondus ($\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \varnothing$)
- **sécants** : si les deux plans ont une droite en commun. ($\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = (BC)$)

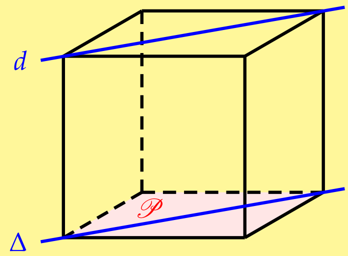


1.4 Le parallélisme

1.4.1 Parallélisme d'une droite et d'un plan

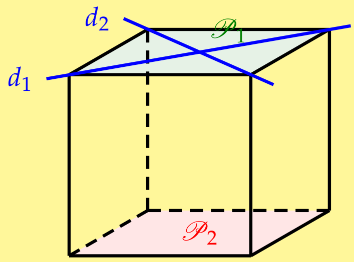
Théorème 1 : Si une droite d est parallèle à une droite Δ contenue dans un plan $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}$.

$$\left.\begin{array}{l} d \,//\, \Delta \\ \Delta \subset \mathscr{P} \end{array}\right\} \Rightarrow d \,//\, \mathscr{P}$$



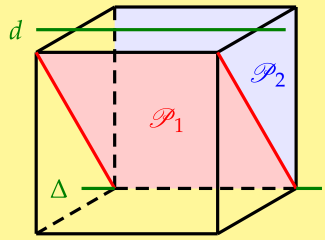
Théorème 2 : Si un plan $\mathscr{P}_1$ contient deux droites sécantes d_1 et d_2 parallèles à un plan $\mathscr{P}_2$, alors les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \subset \mathscr{P}_1 \text{ et } d_2 \subset \mathscr{P}_1 \\ d_1 \text{ et } d_2 \text{ sécantes} \\ d_1 \,//\, \mathscr{P}_2 \text{ et } d_2 \,//\, \mathscr{P}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{P}_1 \,//\, \mathscr{P}_2$$



Théorème 3 : Si une droite d est parallèle à deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants en une droite Δ alors d et Δ sont parallèles.

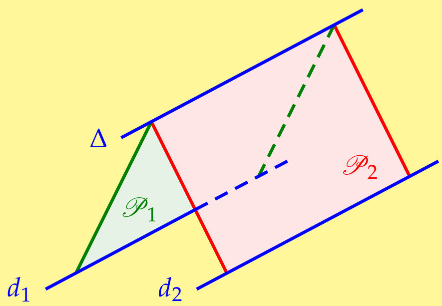
$$\left.\begin{array}{l} d \,//\, \mathscr{P}_1 \text{ et } d \,//\, \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow d \,//\, \Delta$$



Théorème 4 : **Théorème du toit** (*démonstration cf géométrie vectorielle*)

Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Si ces deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

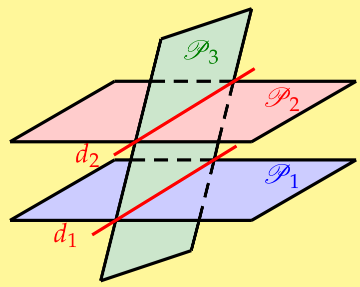
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \,//\, d_2 \\ d_1 \subset \mathscr{P}_1 \text{ et } d_2 \subset \mathscr{P}_2 \\ \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta \,//\, d_1 \\ \Delta \,//\, d_2 \end{array}\right.$$



1.4.2 Parallélisme de deux plans

Théorème 5 : Si deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{P}_1 \;/\!/\; \mathscr{P}_2\\ \mathscr{P}_3 \cap \mathscr{P}_1 = d_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathscr{P}_3 \cap \mathscr{P}_2 = d_2\\ d_1 \;/\!/\; d_2\end{array}\right.$$



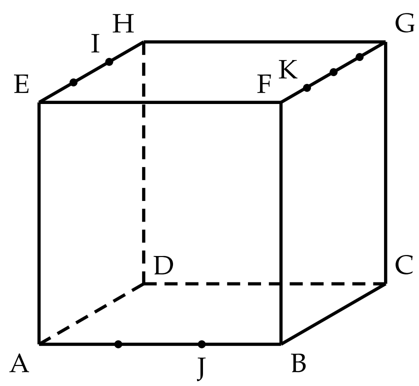
1.5 Applications : section d'un cube et d'un tétraèdre par un plan

1.5.1 Section d'un cube par un plan

Soit un cube ABCDEFGH et un plan (IJK) tel que :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}\,, \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$

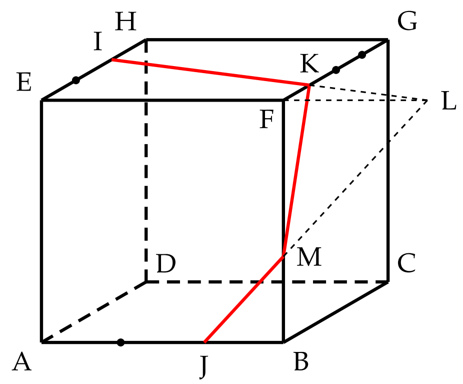
Il s'agit de déterminer l'intersection, lorsque cela est possible, d'un plan avec chaque face du cube.



- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant la face du cube
- Si deux points M et N du plan (IJK) sont sur une face, on relie M et N, cela donne l'intersection de (IJK) et de cette face
- La section du cube par le plan (IJK) est un polygone.

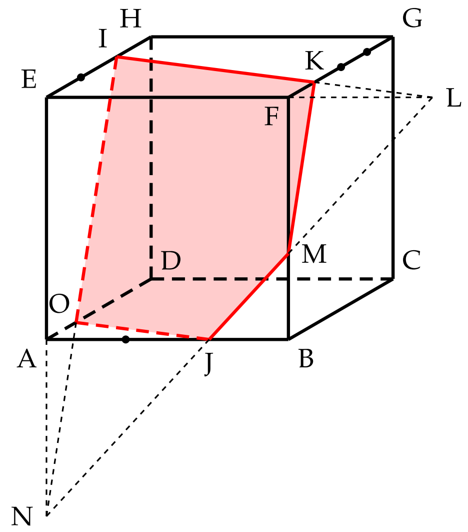
Dans notre construction :

- On trace [IK] en rouge qui est l'intersection du plan (IJK) avec la face du haut EFGH.
- On ne peut pas relier J à I ou K car ces segments ne sont pas sur une face du cube.
- On cherche l'intersection de (IJK) avec la face avant ABFE. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (IK) avec la droite (EF) qui contient l'arête [EF] appartenant aux faces EFGH et ABFE. On note L leur point d'intersection. Comme L $\in$ (IK) donc $L \in$ (IJK).
- Comme L $\in$ (EF), donc L appartient au plan (EFB) contenant la face ABFE. On trace alors la droite (JL) dans le plan (EFB) qui coupe [FB] en M. Comme M $\in$ (JL), M $\in$ (IJK).
- Ainsi [JM] et [KM] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces avant ABFE et de droite BCGF. On trace ces segments en rouge



On réitère cette opération pour la face gauche ADHE et la face du dessous ABCD :

- On détermine l'intersection de la droite (MJ) avec la droite (AE) qui contient l'arête [AE] appartenant aux faces ADHE et ABFE. On note N leur point d'intersection. Comme N ∈ (MJ) donc N ∈ (IJK).
- Comme N ∈ (AE), donc N appartient au plan (EAD) contenant la face ADHE. On trace alors la droite (NI) dans le plan (EAD) qui coupe [AD] en O. Comme O ∈ (NI), O ∈ (IJK).
- Ainsi [OI] et [OJ] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces de gauche ADHE et de dessous ABCD. On trace ces segments en rouge et en pointillé car ces segments sont sur des faces cachées.
- La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est le pentagone IKMJO.



Remarque : Comme les faces EFGH et ABCD dont parallèles. Le plan (IJK) coupe ces faces en des segments parallèles. Il en est de même pour les faces BCGH et ADHE. On a donc :

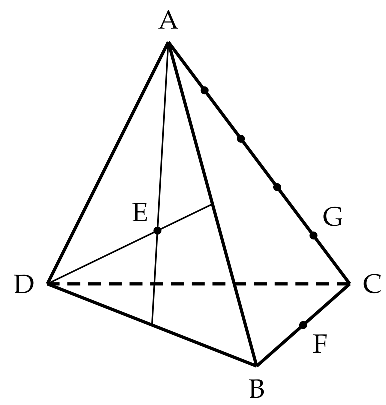
$$(IK) \parallel (OJ) \quad \text{et} \quad (KM) \parallel (IO)$$

1.5.2 Section d'un tétraèdre par un plan

Soit un tétraèdre ABCD et un plan (EFG) tel que :

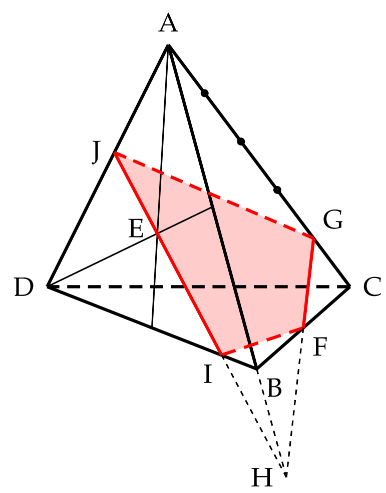
E centre de gravité du triangle ABD,
$\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CA}$

Il s'agit de déterminer l'intersection d'un plan avec chaque face du tétraèdre.



Dans notre construction :

- E est l'intersection des médianes du triangle ABD.
- On trace [GF] en rouge qui est l'intersection du plan (EFG) avec la face ABC.
- On ne peut pas relier E à F ou G car ces segments ne sont pas sur une face du tétraèdre.
- On cherche l'intersection de (EFG) avec la face ABD. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (GF) avec la droite (AB) qui contient l'arête [AB] appartenant aux faces ABC et ABD. On note H leur point d'intersection. Comme H ∈ (GF) donc H ∈ (EFG).
- Comme H ∈ (AB), donc H appartient au plan (ABD) contenant la face ABD. On trace alors la droite (HE) qui coupe [BD] en I et [AD] en J. Comme I ∈ (HE) et J ∈ (HE) alors I ∈ (EFG) et J ∈ (EFG).
- Ainsi [IJ], [FI] et [JG] constituent les intersections du plan (EFG) avec les faces ABD, BCD et ADC. On trace ces segments en rouge et [FI] et [JG] en pointillé car sur des faces cachées.
- La section du tétrèdre ABCD par le plan (EFG) est le quadrilatère GFIJ.

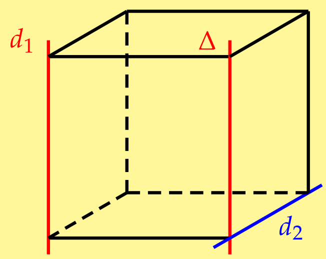


1.6 L'orthogonalité

1.6.1 Droites orthogonales

Définition 3 : Deux droites d_1 et d_2 sont :

- **perpendiculaires** si, et seulement si, d_1 et d_2 se **coupent** perpendiculairement.
- **orthogonales** si, et seulement si, il existe une droite Δ **parallèle** d_1 qui est perpendiculaire à d_2.



Note : On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $d_1 \perp d_2$

Remarque : On remarquera que dans l'espace, on fait une différence pour des droites entre "orthogonales" et "perpendiculaires".

Théorème 6 : Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

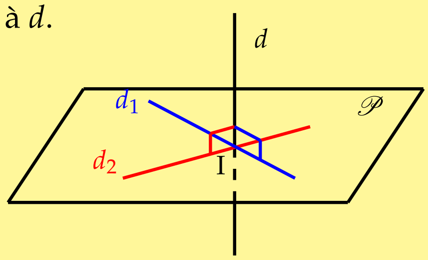
Remarque : La démonstration est immédiate d'après la définition de deux droites orthogonales.

1.6.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Définition 4 : Une droite d est perpendiculaire ou orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ perpendiculaires à d.

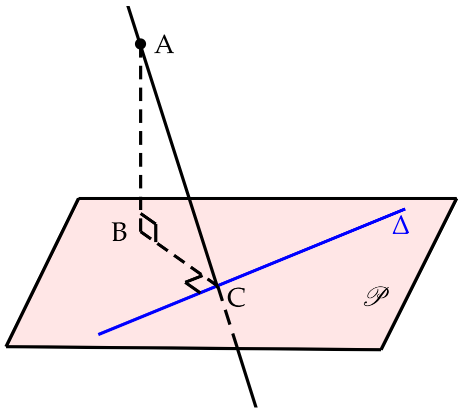
Théorème 7 : Si une droite d est perpendiculaire en I à un plan $\mathscr{P}$ alors toute droite de $\mathscr{P}$ passant par I est perpendiculaire à d.

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \mathscr{P} \\ d \cap \mathscr{P} = I \\ I \in d_1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d_1 \perp d$$



Exemple : Δ est une droite contenue dans le plan $\mathscr{P}$. Un point A extérieur à $\mathscr{P}$ se projette orthogonalement en B sur $\mathscr{P}$ et B se projette orthogonalement en C sur Δ.

- Figure ci-contre
- Démontrer que les droites (AC) et Δ sont perpendicualaires.

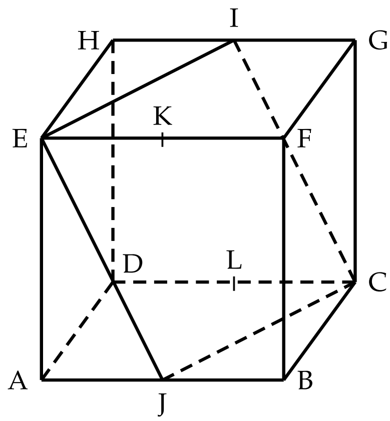


La droite Δ est orthogonale au plan (ABC) car (BC)$\perp$ Δ et (AB)$\perp$ Δ. Toute droite du plan (ABC) passant par C est donc perpendiculaire à Δ, en particulier la droite (AC).

1.6.3 Exemple d'application

On considère le cube ABCDEFGH ci contre de côté 4 cm. I, J, K et L sont les milieux respectifs de [GH], [AB], [EF] et [CD].

1) Le point F appartient-il au segment [IC] ?
2) Justifier que EG = GB = BD = DE.
   Peut-on en déduire que EGBD est un losange ?
3) Démontrer que le quadrilatères EIGK, GKJC et EICJ sont des parallélogrammes.
4) Démontrer que EICJ est un losange.
5) Le quadrilatère EICJ est-il un carré ?



1) La perspective est trompeuse. Le point F n'appartient pas au segment [IC] car F nest pas sur la face CDHG.
2) EG = GB = BD = DE car ces longueurs correspondent à la longueur de la diagonale d'une face.
   EGBD n'est pas un losange car les points E, G, B et D ne sont pas coplanaires. En effet D n'appartient pas au plan (EGB).
3) Comme I et K sont les milieux respectifs de [GH] et [EF], on a :
   $$IG = EK \quad \text{et} \quad (IG) \mathbin{//} (EK) \quad \Rightarrow \quad \text{EIGK parallélogramme } (1)$$
   Comme K et J sont les milieux respectifs de [EF] et [AB], on a :
   $$\left.\begin{array}{lll} KJ = FB & \text{et} & (KJ) \mathbin{//} (FB) \\ FB = GC & \text{et} & (FB) \mathbin{//} (GC) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{GKJC parallélogramme } (2)$$
   De (1) et (2), on déduit que EI = JC et (EI) // (JC) dont EICJ est un parallélogramme.
4) Les triangle EHI et EAJ sont isométriques donc EI = EJ, le parallélogramme EICJ est un losange. On peut ainsi en déduire que les droites (EC) et (IJ) sont perpendiculaires (diagonales d'un losange).

5) La perspective est encore trompeuse. On pourrait penser que les droites (EI) et (EJ) sont perpendiculaires. En réalité, elles ne le sont pas. Montrons par l'absurde que les droites (EI) et (EJ) ne sont pas perpendiculaires.

   Supposons donc que (EJ)$\perp$(EI).

   (EH) est perpendiculaire au plan (AEF), donc (EH) est perpendiculaire à toutes droites de ce plan passant par E. En particulier (EJ). Comme (EJ) est aussi perpendiculaire à (EI) alors (EJ) est perpendiculaire au plan (HEF). (EJ) est donc perpendiculaire à toutes droites du plan (HEF) passant par E, donc perpendiculaire à (EF), ce qui est absurde.

   Comme les droites (EJ) et (EI) ne sont pas perpendiculaires, EICJ n'est pas un carré.

2 Géométrie vectorielle

2.1 Définition

On étend la notion de vecteur dans le plan à l'espace.
Un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ est donc défini par :

- une direction (la droite (AB)) ;
- un sens (de A vers B) ;
- une norme ou distance notée : $||\vec{u}|| = AB$

Théorème 8 : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ABDC parallélogramme}$$

On définit, comme dans le plan des opérations avec les vecteurs.

- L'addition par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
  La construction de la somme de deux vecteurs de même origine s'effectue par un parallélogramme.
- Le produit d'un vecteur par un scalaire : soit un réel λ et le vecteur $\vec{v} = \lambda\vec{u}$
  1) $\vec{v}$ a la même direction que le vecteur $\vec{u}$
  2) $\vec{v}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $\lambda > 0$ et un sens contraire si $\lambda < 0$
  3) $||\vec{v}|| = |\lambda| \times ||\vec{u}||$

Définition 5 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou si l'un d'eux est nul.

Remarque : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéraire à tout vecteur

Théorème 9 : De la colinéarité, on déduit que :

- les points A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$
- les droite (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$
- une droite (AB) est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}\,,\ k \in \mathbb{R}$

2.2 Application

Soit un tétraèdre ABCD. On considère les points I, J, K, L définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\,, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\,, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}\,, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

- Faire une figure.
- Montrer que IJKL est un parallèlogramme

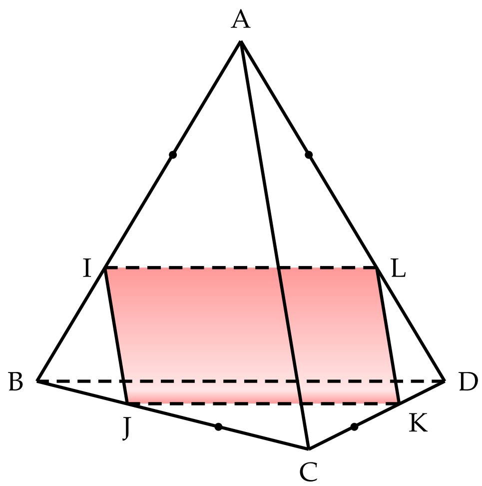
On a :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On a de même :

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On a donc : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc IJKL est un parallélogramme.



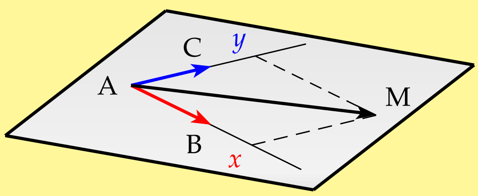
2.3 Vecteurs coplanaires

Théorème 10 : Un plan est engendré par deux vecteurs non colinéaires.

Le plan (ABC) est donc l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2$$

$(x;y)$ sont donc les coordonnées du point M dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ du plan (ABC)



Remarque : On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) ou forment une base pour le plan (ABC).

Théorème 11 : Si deux plans ont le même couple de vecteurs directeurs $(\vec{u}, \vec{v})$ alors ces deux plans sont parallèles

Définition 6 : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si, on peut exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w} \text{ coplanaires} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

Théorème 12 : Les points A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AD} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$$

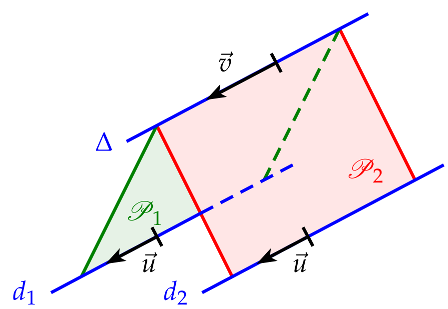
2.4 Le théorème du toit

Théorème 13 : Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Si ces deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite Δ, alors la droite Δ est parallèle à d_1 et d_2.

ROC

Démonstration : Par l'absurde. On considère que Δ n'est pas paralléle à d_1 ce qui entraine que Δ n'est pas parallèle à d_2.
On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ

- Comme d_1 et d_2 sont parallèles, on appelle $\vec{u}$ leur vecteur directeur.
- Comme Δ n'est pas parallèle à d_1, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme Δ est contenue dans $\mathscr{P}_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_1$.
- Comme Δ est aussi contenue dans $\mathscr{P}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_2$.



- On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants

Δ est donc parallèle à d_1 et d_2.

2.5 Repérage dans l'espace

Théorème 14 : Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans l'espace est constitué d'un point origine O et de trois vecteurs non coplanaires : $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.

- Tout point M de l'espace est alors défini par :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

- Les trois réels uniques (x,y,z) sont appelés coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. x correspond à l'abscisse, y à l'ordonnée et z à la cote.
- le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dit orthonormal si, et seulement si,

$$||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\imath},\ \vec{\jmath} \text{ et } \vec{k} \text{ orthogonaux 2 à 2}$$

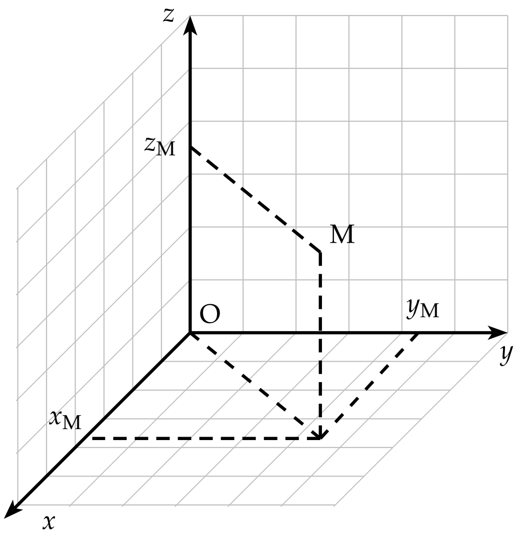
On a alors les relations :

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A\ ;\ z_B - z_A)$
- Si I est le milieu de [AB] :

$$I = \left(\frac{x_B + x_A}{2}\ ;\ \frac{y_B + y_A}{2}\ ;\ \frac{z_B + z_A}{2} \right)$$

- Si $\vec{u} = (a;b;c)$, on a alors dans un repère orthonormal :

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Exemple 1 : Soient quatre points $A(2;0;1)$, $B(1;-2;1)$, $C(5;5;0)$, $D(-3;-5;6)$.

1) Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.
2) Montrer que A, B, C et D sont coplanaires.

⇒ ⇒

1) Les points A, B et C ne sont pas alignés, si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (3;5;-1)$$

Manifestement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles, par exemple en observant la troisième coordonnée des deux vecteurs. (-1 n'est pas un multiple de 0)

Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Les point A, B, C et D sont coplanaires si, et seulement si, on peut exprimer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
il faut donc déterminer a et b telles que : $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.
On a $\overrightarrow{AD} = (-5;-5;5)$
En identifiant, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -a+3b=-5 \\ -2a+5b=-5 \\ -b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5 \\ -a-15=-5 \\ -2a-25=-5 \end{cases}$$

D'où $a=-10$ et $b=-5$. Les points A, B, C et D sont coplanaires.

Remarque : Pour déterminer a et b, il faut résoudre un système à trois équations à deux inconnues. Une équation peut alors être incompatible avec les deux autres. Dans ce cas les coefficients a et b n'existent pas. Les points sont alors non coplanaires.

Exemple 2 : Soient les points A(6 ;8 ;2) ; B(4 ;9 ;1) ; C(5 ;7 ;3) dans un repère orthonormal. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Par la réciproque du théorème de Pythagore. On calcule les longueurs suivantes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-2;1;-1) \quad \text{donc} \quad AB^2 = 4+1+1=6 \\ \overrightarrow{AC} &= (-1;-1;1) \quad \text{donc} \quad AC^2 = 1+1+1=3 \\ \overrightarrow{BC} &= (-1;-2;2) \quad \text{donc} \quad BC^2 = 1+4+4=9 \end{aligned}$$

On a donc $AB^2 + AC^2 = 6+3 = 9 = BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2.6 Représentation paramétrique d'une droite

2.6.1 Théorème

Théorème 15 : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$.

La droite (Δ) admet donc un système d'équations paramètriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$(\Delta) \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Démonstration : Soit un point quelconque $M(x;y;z)$ de Δ, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc :

$$\exists\, t \in \mathbb{R} \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x - x_A = a\,t \\ y - y_A = b\,t \\ z - z_A = c\,t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_A + a\,t \\ y = y_A + b\,t \\ z = z_A + c\,t \end{cases}$$

Remarque : Pour une demi-droite, il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par une section commençante ou une section finissante : $]-\infty;\alpha]$ ou $[\alpha;+\infty[$

Pour un segment il suffit de remplacer $t \in \mathbb{R}$, par un intervalle fermé $[\alpha;\beta]$.

2.6.2 Exercices

1) Donner la représentation paramétrique de la droite d définie par :

$$\mathrm{A}(2;1;-1) \quad \text{et} \quad \vec{u}(0;1;-1)$$

2) A et B ont pour coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(-2;1;0) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(2,3,1)$$

Donner la représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants :

a) La droite (AB)
b) Le segment $[\mathrm{AB}]$
c) La demi-droite $[\mathrm{AB})$
d) La demi-droite $[\mathrm{BA})$

3) Les représentations paramétriques suivantes sont-elles associées à une même droite ?

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = 3 - 6s \\ y = -3s + 2 \\ z = 9s - 5 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

1) La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2) Un vecteur directeur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4;2;1)$.

a) La droite (AB) a pour représentation paramétrique :

$$(\mathrm{AB}) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Pour déterminer l'intervalle du paramètre t pour le segment [AB], on doit connaître la valeur de t pour avoir le point B : on trouve $t = 1$. On a donc :

$$[\mathrm{AB}] \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0;1]$$

c) Pour la demi-droite [AB). Le paramètre doit être positif pour avoir le point B, on a donc :

$$[\text{AB}) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

d) Pour la demi droite [BA). Le paramètre t doit être inférieur à 1 pour contenir A. On a donc :

$$[\text{BA}) \quad \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in]-\infty; 1]$$

3) Pour que les deux représentations soit la même droite, il faut que leurs vecteurs directeurs soient colinéaires et qu'elles possèdent un point commun.

On obtient comme vecteurs directeurs respectifs :

$$\vec{u}_1 = (2; 1; -3) \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = (-6; -3; 9)$$

On a donc : $\vec{u}_2 = -3\vec{u}_1$. Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont donc colinéaires.

Prenons un point quelconque de d_1, la première droite. Par exemple avec $t = 0$, on obtient $\text{A}(-1; 0; 1)$. Cherchons à déterminer s pour savoir si A est sur la deuxième droite, d_2. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3 - 6s = -1 \\ -3s + 2 = 0 \\ 9s - 5 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \\ s = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Comme on peut déterminer s, A appartient aussi à d_2. On a donc $d_1 = d_2$.

2.6.3 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème 16 : Soit un plan $\mathscr{P}$ défini par un point $\text{A}(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs non colinéraires $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$.

Le plan $\mathscr{P}$ admet donc un système d'équations paramétriques, appelé représentation paramétrique, de la forme :

$$\mathscr{P} \quad \begin{cases} x = x_\text{A} + a\,t + \alpha\,s \\ y = y_\text{A} + b\,t + \beta\,s \\ z = z_\text{A} + c\,t + \gamma\,s \end{cases} \qquad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

3 Produit scalaire

3.1 Définition

Remarque : Le terme « scalaire » est employé pour désigner un nombre réel par opposition au mot vecteur.

Définition 7 : Le produit scalaire dans l'espace se définit de la même façon que dans le plan. Les trois définitions suivantes sont équivalentes et la deuxième demande un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';k')$, le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ tel que :

- **Formule 1 : identité remarquable**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

- **Formule 2 : géométrie analytique**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

  On peut aussi utiliser la notation matricielle :

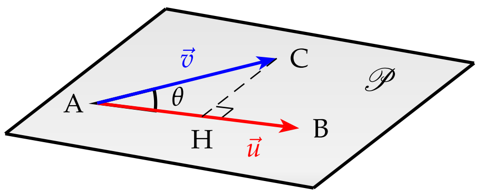
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

- **Formule 3 : angle entre les deux vecteurs**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration : La démonstration de l'équivalence de ces trois définitions est identique à la démonstration dans le plan.

En effet, on peut toujours trouver un plan $\mathscr{P}$, passant par un point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cf 1re S).



Si H est le projetté orthogonal de C sur la droite (AB), on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

Par convention : On écrira $\quad \vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 \quad$ et $\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = \mathrm{AB}^2$.

Remarque : Pour la 3e définition, on pourra considérer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$, comme un angle géométrique θ (de 0 à π), car la fonction cosinus est paire. Cela explique d'ailleurs la commutativité du produit scalaire. Le signe du produit scalaire est celui du $\cos(\theta)$

- $\theta < \dfrac{\pi}{2}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$
- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\theta > \dfrac{\pi}{2}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$

Exemple

Soient les points A, B et C : A$(6;8;2)$, B$(4;9;1)$ et C$(5;7;3)$

1) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
2) Les points A, B et C se projettent orthogonalement respectivement en A′, B′ et C′ sur le plan $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ (plan d'équation $z = 0$).
   a) Déterminez les coordonnées des points A′, B′ et C′.
   b) Déterminez la mesure de l'angle géométrique $\widehat{B'A'C'}$. Que constatez-vous ?

⇒ ⇒

1) Pour calculer l'angle $\widehat{BAC}$ utilisons la 3ᵉ définition du produit scalaire. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

Pour calculer le produit scalaire et les distances AB et AC, on utilise la définition analytique :

$$\overrightarrow{AB} = (-2;1;-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\,(-1;-1;1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$$

$$AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{0}{\sqrt{18}} = 0$

Conclusion : $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{2}$. Le triangle ABC est rectangle en A

2) a) Pour trouver les coordonnées des points A′, B′ et C′, projection orthogonale sur le plan $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on annule la troisième coordonnée. On obtient alors :

$$A'(6;8;0), \quad B'(4;9;0) \quad \text{et} \quad C'(5;7;0)$$

   b) Comme pour le 1), on a :

$$\cos(\widehat{B'A'C'}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{A'B' \times A'C'}$$

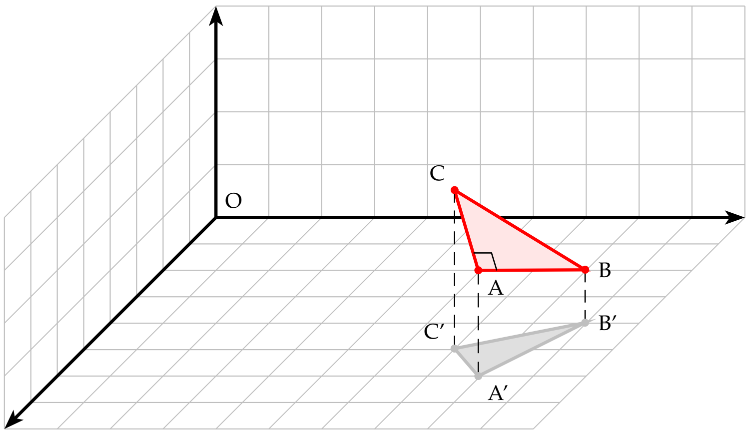
On calcule alors :

$$\overrightarrow{A'B'} = (-2;1;0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A'C'} = (-1;-1;0)$$

$$\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = (-2) \times (-1) + 1 \times (-1) + 0 \times 0 = 1$$

$$A'B' = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad A'C' = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

on obtient alors : $\cos(\widehat{B'A'C'}) = \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$



Conclusion : $\widehat{B'A'C'} \simeq 71,5°$. Le triangle A′B′C′ n'est pas rectangle en A′. La projection orthogonale d'un triangle rectangle n'est pas nécessairement un triangle rectangle. La projection orthogonale ne conserve pas les angles géométriques.

3.2 Propriétés et orthogonalité dans l'espace

Propriété 4 : Dans l'espace, le produit scalaire est :

- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- distributif (bilinéarité) par rapport à l'addition de deux vecteurs :
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$
- distributif (bilinéarité) par rapport à la multiplication par un scalaire :
$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et :

- de même sens : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
- de sens contraires : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Exemples

1) Déterminer le réel α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux :
$$\vec{u}\left(2\,;\,-\frac{1}{2}\,;5\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{v}\left(-\frac{2}{5}\,;\,3\,;\,\alpha\right)$$

2) Les points A et B ont pour coordonnées respectives $A(2;-5;1)$ et $B(0;2;6)$. Démontrer que la droite d qui passe par le point $C(-2;3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$ est orthogonale à la droite (AB)

3) Les points A, B, C, D et E ont pour coordonnées $A(2;0;2)$, $B(4;0;0)$, $C(1;-2;1)$, $D(-1;1;0)$, $E(1;-1;2)$.
Prouvez que les points A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est normal au plan (ABC).

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si leur produit scalaire est nul. On a donc :

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2\times-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times 3+5\alpha=0\\
-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+5\alpha=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right)\\
\alpha=\frac{1}{5}\left(\frac{23}{10}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha=\frac{23}{50}
\end{aligned}$$

2) Les droites d et (AB) sont orthogonales si, et seulement si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux. On a :

$$\begin{aligned}
\vec{u}=(-4;1;-3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB}&=(-2;7;5)\\
\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}&=-4\times(-2)+1\times 7-3\times(5)=8+7-15=0
\end{aligned}$$

On a donc $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$. Les coordonnées du points C ne servent à rien sauf à montrer que les droites sont perpendiculaires chose ici non vérifiée.

3) Les points A, B et C ne sont pas alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a :

$$\overrightarrow{AB}=(2;0;-2) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}=(-1;-2;-1)$$

Manifestement les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles du fait des 2e coordonnées (-2 n'est pas un multiple de 0). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés. (ABC) forme donc un plan

Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC) si, et seulement si, il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan (ABC). On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE}&=(2;-2;2)\\
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}&=2\times 2+0\times(-2)-2\times 2=0\\
\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}&=-1\times 2-2\times(-2)-1\times 2=0
\end{aligned}$$

Conclusion : Le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal au plan (ABC).

3.3 Équation cartésienne d'un plan

3.3.1 Vecteur normal. Droite orthogonale à un plan

Définition 8 : Le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$

Propriété 5 : Le plan $\mathscr{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \vec{n} = 0$

Théorème 17 : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ perpendiculaires à Δ.

ROC

Démonstration :

- $\Rightarrow$ Si Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc Δ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$ donc à deux sécantes de $\mathscr{P}$
- $\Leftarrow$ Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs directeurs respectifs des deux sécantes de $\mathscr{P}$: d_1 et d_2.
  1) Δ est perpendiculaire à d_1 et d_2 donc : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$
  2) d_1 et d_2 sont sécantes donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc un couple de vecteurs directeur du plan $\mathscr{P}$.
  3) Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur d'une droite quelconque de $\mathscr{P}$, comme $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forme un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$, on a : $\vec{v} = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
  4) $\overrightarrow{n} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{n} \cdot (a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2) = a\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_1 + b\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$ d'après le 1)

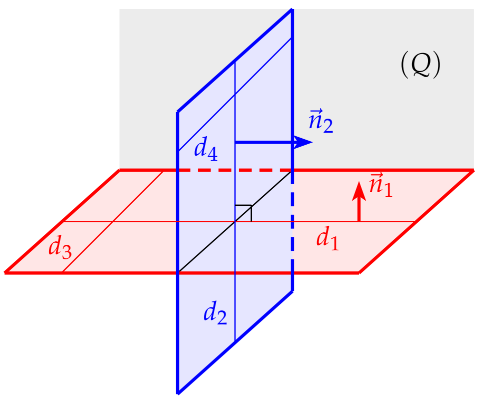
  Δ est donc orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc Δ est orthogonale à $\mathscr{P}$

3.3.2 Plans perpendiculaires

Définition 9 : Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires ou orthogonaux si, et seulement si : $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

⚠ La notion d'orthogonalité de deux plans est moins souple qu'avec deux droites. Par exemple

- Si $\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2$, une droite d_3 de $\mathscr{P}_1$ peut être parallèle à une droite d_4 de $\mathscr{P}_2$.
- Si un plan (Q) est perpendiculaire à deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas nécessairement parallèles entre eux.



3.4 Équation d'un plan

Théorème 18 : L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nuls}$$

Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est alors un vecteur normal au plan.

ROC

Démonstration :

- $\Rightarrow$ Soit un plan $\mathscr{P}$, un point A de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $\mathrm{M}(x;y;z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} &= 0 \\ a(x - x_{\mathrm{A}}) + b(y - y_{\mathrm{A}}) + c(z - z_{\mathrm{A}}) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) &= 0 \end{aligned}$$

  On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors

$$ax + by + cz + d = 0$$

- $\Leftarrow$ Si on a l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non tous nuls, on peut toujours trouver un point $\mathrm{A}(x_0;y_0;z_0)$ qui verifie l'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

  On a alors $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par exemple, si $a \neq 0$, on peut prendre $x_0 = -\dfrac{d}{a}$ et $y_0 = z_0 = 0$.

  Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifie l'équation, alors : $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

  Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a;b;c)$, la relation $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients a, b et c par un facteur k non nul.

Exemples

1) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par un point A.

$$\mathrm{A}(\sqrt{2};-2;5) \qquad \vec{n}(2;-3;-1)$$

2) Trouver une équation cartésienne du plan (Q) parallèlle au plan $\mathscr{P}$ et passant par un point A donné :

$$\mathrm{A}(3;-1;0) \qquad \mathscr{P} \;:\; 2x - y + 3z = 0$$

3) Déterminer une équation cartésienne au plan médiateur du segment [AB].

$$\mathrm{A}(-1;1;0) \qquad \mathrm{B}(2;1;-1)$$

1) On doit avoir pour un point M de $\mathscr{P}$:
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= 0\\ 2(x-\sqrt{2}) - 3(y+2) - (z-5)\\ 2x - 3y - z - 2\sqrt{2} - 6 + 5 &= 0\\ 2x - 3y - z - 1 - 2\sqrt{2} &= 0\end{aligned}$$

2) Si les plans $\mathscr{P}$ et (Q) sont parallèles, un vecteur normal de $\mathscr{P}$ est aussi un vecteur normal de (Q). D'après l'équation de $\mathscr{P}$, on peut prendre comme vecteur normal $\vec{n}(2;-1;3)$. On a alors pour un point M de (Q) :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= 0\\ 2(x-3) - (y+1) + 3(z-0)\\ 2x - y + 3z - 6 - 1 &= 0\\ 2x - y + 3z - 7 &= 0\end{aligned}$$

Conclusion : une équation du plan (Q) est : $\quad 2x - 3y - z - 7 = 0$.

3) Le plan médiateur d'un segment [AB] est le plan dont les points sont équidistants des points A et B. Il passe alors orthogonalement par le milieu du segment [AB].

On détermine les coordonnées du milieu I de [AB]. Le plan recherché a alors pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

$$\mathrm{I} = \left(\frac{-1+2}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{0-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{-1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = (3;0,-1)$$

$$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0(y-1) - \left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$$
$$3x - z - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - z - 2 = 0$$

3.5 Exercice de BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$.

Partie A

1) Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2) Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :
$$x + y + z - 3 = 0$$
Prouver que $\mathscr{P}$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par le point A.
3) Soit $\mathscr{P}'$ le plan orthogonal à la droite (AC) et passant par le point A. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}'$.
4) Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

Partie B

1) Soit D le point de coordonnées $(0;4;-1)$. Prouvez que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
2) Calculer le volume du tétraêdre ABCD
3) Prouver que l'angle $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4) a) Calculer l'aire du triangle BDC.
   b) En déduire la distance du point A au plan (BDC).

Partie A

1) Montrons que le triangle ABC est rectangle en A. Pour cela calculons le produit scalaire suivant : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3;3;3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (3;0-3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 - 3 \times 3 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

2) Si $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de $\mathscr{P}$.

Or l'équation de $\mathscr{P}$ est : $x+y+z-3=0$ donc le vecteur $\vec{n}(1;1;1)$ est un autre vecteur normal de $\mathscr{P}$. Donc si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, il doit être colinéaire à $\vec{n}$. Or on sait que $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$, on a donc : $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, donc le plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à (AB)

3) Si $\mathscr{P}'$ est orthogonal à (AC), alors $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}'$. Comme $\mathscr{P}'$ passe par A, alors un point M quelconque de $\mathscr{P}'$ vérifie :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ 3(x-3) + 0(y+2) - 3(z-2) &= 0 \\ 3x - 3z - 3 &= 0 \\ x - z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion : Le plan $\mathscr{P}'$ a pour équation cartésienne : $x - z - 1 = 0$

4) On cherche un vecteur directeur de l'intersection des deux plans. On obtient donc le système suivant :

$$\Delta \begin{cases} x+y+z-3=0 & (1) \\ x \qquad -z-1=0 & (2) \end{cases}$$

Si on privilégie le paramètre z, c'est à dire que l'on exprime x et y en fonction de z, on obtient :

A partir de (2) : $x = z+1$

en remplaçant dans (1) : $z+1+y+z-3=0$ d'où $y = -2z+2$

Pour trouver un vecteur directeur de Δ, comme on sait que cette droite passe par A, il suffit de trouver un autre point de Δ, c'est à dire de donner une valeur à z. Soit en prenant $z = 1$, on obtient le point $\mathrm{E}(2;0;1)$. On obtient alors comme vecteur directeur : $\vec{u}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{EA}} = (3-2; -2-0; 2-1) = (1; -2; 1)$$

Partie B

1) Pour prouver que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires au plan, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

   On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (-3; 6; -3)$

   On calcule alors les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -3 \times 3 + 6 \times 3 - 3 \times 3 = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -3 \times 3 + 6 \times 0 - 3 \times (-3) = 0$$

   Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. La droite (AD) est donc perpendiculaire au plan (ABC).

2) On rappelle le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre (plus généralement d'une pyramide) :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

   En appliquant cette formule à ABCD. On prend comme base le triangle ABC rectangle en A. Comme la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC), AD est la hauteur issue de D sur ABC. On a alors :

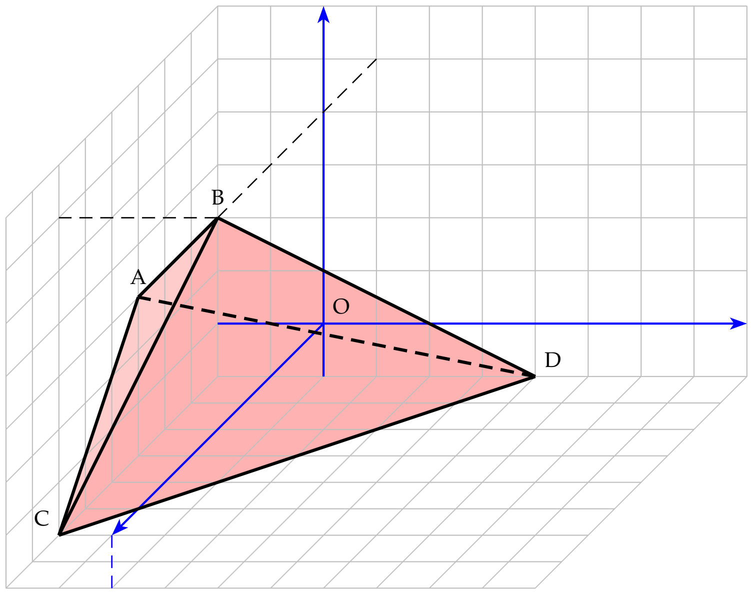
$$\mathcal{V}_{(\mathrm{ABCD})} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}) \times \mathrm{AD}}{3} = \frac{(\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}) \times \mathrm{AD}}{6}$$

   On calcule les différentes distances :

$$\mathrm{AB} = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$
$$\mathrm{AC} = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\mathrm{AD} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

   On obtient alors : $\mathcal{V}_{(ABCD)} = \dfrac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{6} = 27$

Remarque : On peut donner une représentation de ce tétraèdre (représentation pas toujours aisée pour que cela soit clair).



3) Pour calculer l'angle $\widehat{BDC}$, on utilise la troisième définition du produit scalaire :

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos(\widehat{BDC}) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{BDC}) = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC}$$

On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$, ainsi que les distances DB et DC :

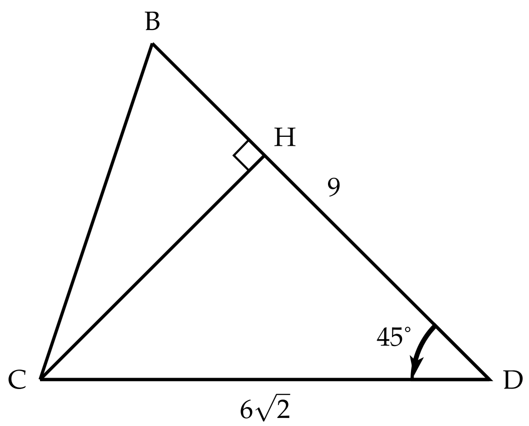
$$\overrightarrow{DB} = (6; -3; 6) \qquad DB = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$\overrightarrow{DC} = (6; -6; 0) \qquad DB = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 6 \times 6 + (-3) \times (-6) + 6 \times 0 = 54$$

On obtient alors : $\cos(\widehat{BDC}) = \dfrac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On a donc bien : $\widehat{BDC} = \dfrac{\pi}{4}$

4) a) Faisons une figure avec les données que l'on dispose :



Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BDC, on a alors, en posant H le projeté orthogonal de C sur [DB]

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{DB} \times \mathrm{CH}}{2}$$

Pour calculer CH, utilisons le triangle DHC rectangle en H :

$$\mathrm{CH} = \sin\frac{\pi}{4} \times \mathrm{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6\sqrt{2} = 6$$

On obtient alors :

$$\mathscr{A} = \frac{9 \times 6}{2} = 27$$

b) Pour trouver la distance de A au plan (BDC), il faut connaître la hauteur issue de A sur le triangle BDC. Utilisons alors le volume $\mathcal{V}_(\mathrm{ABCD})$ du tétraèdre en appelant H′ le projeté orthogonal de A sur le plan (BDC). On a alors :

$$\mathcal{V}_{(ABCD)} = \frac{\mathscr{A} \times \mathrm{AH'}}{3} = 9\mathrm{AH'}$$

Or on sait que : $\quad \mathcal{V}_{(\mathrm{ABCD})} = 27, \quad$ on en déduit alors que : $\mathrm{AH'} = 3$.