Ejercicios de “Lógica matemática y fundamentos” (2018–19)

José A. Alonso Jiménez
María J. Hidalgo Doblado

Grupo de Lógica Computacional
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Sevilla
Sevilla, 6 de febrero de 2019

Índice general

Introducción

En el presente volumen se presentan los enunciados de los ejercicios de los primeros temas del curso de Lógica matemática y fundamentos (2018–19). [1]

En cada tema los ejercicios se han dividido en tres grupos:

- Ejercicios resueltos: son ejercicios comentados en las clases cuyas soluciones se encuentran en las transparencias. [2]
- Ejercicios propuestos.
- Ejercicios de exámenes: son ejercicios de exámenes de cursos anteriores y sus soluciones se encuentran en Soluciones de exámenes de Lógica informática. [3]

[1] `https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/lmf-18`
[2] `https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/lmf-18/temas.php`
[3] `https://www.cs.us.es/~jalonso/cursos/li-14/temas/examenes-li.pdf`

Tema 1

Sintaxis y semántica de la lógica proposicional

1.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.1 Determinar cuáles de las siguientes expresiones son fórmulas proposicionales:

1. p
2. (p)
3. $(p \lor \neg q)$
4. $p \lor \neg q$
5. $\neg(p \lor p)$
6. $((p \to q) \lor (q \to p))$
7. $(p \lor \land q)$

Ejercicio 1.2 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{np}(F)$ que calcula el número de paréntesis de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{np}((p \to (\neg q \lor p))) = 4$.
2. $\mathsf{Subf}(F)$ que calcula el conjunto de las subfórmulas de la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{Subf}(p \to \neg q \lor p) = \{p \to \neg q \lor p, p, \neg q \lor p, \neg q, q\}$.

Ejercicio 1.3 Demostrar por inducción que todas las fórmulas proposicionales tienen un número par de paréntesis.

Ejercicio 1.4 Para la siguiente fórmula

$$p \to \neg q \lor p$$

escribir la fórmula con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

Ejercicio 1.5 Calcular el valor de la fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$ en las siguientes interpretaciones

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.6 Demostrar que para toda fórmula F se tiene que para todo par de intepretaciones I_1, I_2, si $I_1(p) = I_2(p)$ para todos las variables proposicionales de F, entonces $I_1(F) = I_2(F)$.

Ejercicio 1.7 Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo de la fórmula $(p \lor q) \land (\neg q \lor r)$

1. I_1 tal que $I_1(p) = I_1(r) = 1, I_1(q) = 0$
2. I_2 tal que $I_2(r) = 1, I_2(p) = I_2(q) = 0$

Ejercicio 1.8 Determinar si las siguientes fórmulas son satisfacible o insatisfacible.

1. $(p \to q) \land (q \to r)$
2. $p \land \neg p$

Ejercicio 1.9 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es tautología syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es tautología, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.

Ejercicio 1.10 En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

1. $(p \to q) \lor (q \to p)$
2. $(p \to q) \land \neg(p \to q)$
3. $p \to q$

4. $p \vee \neg p$
5. $p \wedge \neg p$
6. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
7. $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow p)$

Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿Cuáles son insatisfacibles?

Ejercicio 1.11 Demostrar que las fórmulas que aparecen en la transparencia 19 del tema 1 son tautologías:

1.	$F \rightarrow F$	ley de identidad
2.	$F \vee \neg F$	ley del tercio excluso
3.	$\neg(F \wedge \neg F)$	principio de no contradicción
4.	$(\neg F \rightarrow F) \rightarrow F$	ley de Clavius
5.	$\neg F \rightarrow (F \rightarrow G)$	ley de Duns Scoto
6.	$((F \rightarrow G) \rightarrow F) \rightarrow F$	ley de Peirce
7.	$(F \rightarrow G) \wedge F \rightarrow G$	modus ponens
8.	$(F \rightarrow G) \wedge \neg G \rightarrow \neg F$	modus tollens

Ejercicio 1.12 Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$
   $F \wedge F \equiv F$
2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$
   $F \wedge G \equiv G \wedge F$
3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$
   $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$
4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$
   $F \vee (F \wedge G) \equiv F$
5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
   $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.
7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

Ejercicio 1.13 Demostrar que $F \equiv G$ syss $\models F \leftrightarrow G$.

Ejercicio 1.14 Determinar cuáles de las siguientes interpretaciones es modelo del conjunto de fórmulas $S = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), q \to r\}$.

1. I_1 tal que $I_1(p) = 1, I_1(q) = 0, I_1(r) = 1$.
2. I_2 tal que $I_2(p) = 0, I_2(q) = 1, I_2(r) = 0$.

Ejercicio 1.15 Calcular los modelos de los siguientes conjuntos de fórmulas y decidir cuáles son consistente.

1. $S_1 = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r\}$
2. $S_2 = \{(p \lor q) \land (\neg q \lor r), p \to r, \neg r\}$

Ejercicio 1.16 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \to q, q \to r\} \models p \to r$
2. $\{p\} \not\models p \land q$

Ejercicio 1.17 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para todo conjunto de fórmula S, $S \models S$.
2. Para todo conjunto de fórmula S_1 y toda fórmula F, si $S_1 \models F$ y $S_1 \subseteq S_2$, entonces $S_2 \models F$.
3. Para todo conjunto de fórmula S_1 y todo par de fórmulas F, G, si $S \models F$ y $\{F\} \models G$, entonces $S \models G$.

Ejercicio 1.18 Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{F_1, \dots, F_n\} \models G$
2. $\models F_1 \land \dots \land F_n \to G$
3. $\neg(F_1 \land \dots \land F_n \to G)$ es insatisfacible
4. $\{F_1, \dots, F_n, \neg G\}$ es inconsistente

Ejercicio 1.19 Determinar si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si el tren llega a las 7 y no hay taxis en la estación, entonces Juan llegará tarde a la reunión. Juan no ha llegado tarde a la reunión. El tren llegó a las 7. Por tanto, habían taxis en la estación.

2. Si hay corriente y la lámpara no está fundida, entonces está encendida. La lámpara no está encendida. Hay corriente. Por tanto, la lámpara está fundida.

Ejercicio 1.20 Determinar la corrección del siguiente argumento.

Se sabe que

1. Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.
2. Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.
3. Los ungulados de cuello largo son jirafas.
4. Los ungulados con rayas negras son cebras.

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por consiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Ejercicio 1.21 En una isla hay dos tribus, la de los veraces (que siempre dicen la verdad) y la de los mentirosos (que siempre mienten). Un viajero se encuentra con tres isleños A, B y C y cada uno le dice una frase

1. A dice "B y C son veraces syss C es veraz"
2. B dice "Si A y C son veraces, entonces B y C son veraces y A es mentiroso"
3. C dice "B es mentiroso syss A o B es veraz"

Determinar a qué tribu pertenecen A, B y C.

1.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.22 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{npi}(F)$ que calcula el número de paréntesis izquierdos de la fórmula F. Por ejemplo,
   $\mathsf{npi}((p \to (\neg q \lor p))) = 2$.
2. $\mathsf{npd}(F)$ que calcula el número de paréntesis derechos de la fórmula F. Por ejemplo,
   $\mathsf{npd}((p \to (\neg q \lor p))) = 2$.

Ejercicio 1.23 Demostrar por inducción que todas las fórmulas proposicionales tienen el mismo número de paréntesis izquierdos que de derechos.

Ejercicio 1.24 Para cada una de las siguientes fórmulas,

1. $\neg q \land q \land p \to r$

2. $p \to q \to \neg r \lor s \lor p$

escribir la fórmula con paréntesis, construir el árbol de análisis y determinar todas sus subfórmulas.

Ejercicio 1.25 Definir por recursión sobre fórmulas las siguientes funciones

1. $\mathsf{n\_variables}(F)$ que calcula el número variables proposicionales que ocurren en la fórmula F. Por ejemplo, $\mathsf{n\_variables}(p \to p \lor q) = 3$.
2. $\mathsf{profundidad}(F)$ que calcula la profundidad del árbol de análisis de la fórmula F. Por ejemplo,
   $\mathsf{profundidad}(p \to p \lor q) = 2$.

Demostrar por inducción, que para toda fórmula F, $\mathsf{n\_variables}(F) \leq 2^{\mathsf{profundidad}(F)}$.

Ejercicio 1.26 En cada caso, determinar todos los modelos de la fórmula proposicional correspondiente:

1. $p \to (q \to r \land q)$
2. $q \to (p \land \neg p) \to r$
3. $(p \leftrightarrow q) \land (p \to \neg q) \land p$
4. $(p \land r) \lor (\neg p \land q) \to \neg q$

Clasificar las fórmulas anteriores en tautologías, contingentes y contradicciones. ¿Cuáles son satisfacibles? ¿Cuáles son insatisfacibles?

Ejercicio 1.27 Para cada uno de los siguientes pares de fórmulas, decidir si son o no equivalentes:

1. $A \to B \to C$ y $A \land B \to C$
2. $A \to (B \land \neg C)$ y $A \to B \to C$
3. $\neg(A \leftrightarrow B)$ y $A \leftrightarrow \neg B$

Ejercicio 1.28 ¿Existe un conjunto S de tres fórmulas tal que de todos los subconjuntos de S sólo uno es consistente?

Ejercicio 1.29 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $\{p \lor q\} \models p \to q$
2. $\{p \to q, \neg r \to \neg q\} \models p \to r$

3. $\{p \wedge \neg p\} \models r \leftrightarrow r \vee q$

4. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \wedge r\} \models p \rightarrow (p \ \rightarrow q) \rightarrow r$

Ejercicio 1.30 Determinar si los siguientes argumentos son lógicamente correctos:

1. Si Juan es andaluz, entonces Juan es europeo. Juan es europeo. Por tanto, Juan es andaluz.

2. Cuando tanto la temperatura como la presión atmosférica permanecen contantes, no llueve. La temperatura permanece constante. En consecuencia, en caso de que llueva, la presión atmosférica no permanece constante.

3. Siempre que un número x es divisible por 10, acaba en 0. El número x no acaba en 0. Luego, x no es divisible por 10.

4. En cierto experimento, cuando hemos empleado un fármaco A, el paciente ha mejorado considerablemente en el caso, y sólo en el caso, en que no se haya empleado también un fármaco B. Además, o se ha empleado el fármaco A o se ha empleado el fármaco B. En consecuencia, podemos afirmar que si no hemos empleado el fármaco B, el paciente ha mejorado considerablemente.

Ejercicio 1.31 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar la puerta que debe de elegir el prisionero.

1.3. Ejercios de exámenes

Ejercicio 1.32 **[Examen 5–Mayo–2005]** ¿Es cierto que si $F \rightarrow G$ y F son satisfacibles, entonces G es satisfacible? Si es cierto, dar una explicación. Si no es cierto, dar un contraejemplo.

Ejercicio 1.33 [Examen 30–Junio–2005] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si F es una fórmula satisfacible, entonces todas las subfórmulas de F son satisfacibles.

2. Existen fórmulas válidas tales que todas sus subfórmulas son válidas.

Ejercicio 1.34 [Examen 5–Abril–2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cup S_2$ es consistente.

2. Si S_1 y S_2 son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces $S_1 \cap S_2$ es inconsistente.

Ejercicio 1.35 [Examen 26–Junio–2006] Demostrar o refutar las siguiente proposición:
Si $\{F \to G,\ F\}$ es consistente, entonces $\{G\}$ es consistente.

Ejercicio 1.36 [Examen 7–Abril–2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \models F$ y $S \models \neg F$.

2. Existe un conjunto de fórmulas S y una fórmula F tal que $S \not\models F$ y $S \not\models \neg F$.

Ejercicio 1.37 [Examen 23–Septiembre–05] Demostrar o refutar las siguiente proposición: Para todo conjunto de fórmula S y para toda fórmula F se verifica que si $S \not\models F$ entonces $S \models \neg F$.

Tema 2

Deducción natural proposicional

2.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1 Probar mediante deducción natural:

1. $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$
2. $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$
3. $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$
4. $p, p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash r$
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$
6. $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$
7. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$
8. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$
9. $\vdash p \rightarrow p$
10. $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$
11. $p \vee q \vdash q \vee p$
12. $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$
13. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
14. $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$
15. $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

16. $p \land q \leftrightarrow q \land p$

17. $p \leftrightarrow q, p \lor q \vdash p \land q$

18. $p \to q \vdash \neg p \lor q$

Ejercicio 2.2 Demostrar la adecuación de las reglas de deducción natural:

1. $\land$i: $\{F, G\} \models F \land G$
2. $\land$e: $F \land G \models F$
3. $\land$e: $F \land G \models G$
4. $\neg\neg$e: $\{\neg\neg F\} \models F$
5. $\neg\neg$i: $\{F\} \models \neg\neg F$
6. $\to$ e: $\{F, F \to G\} \models G$
7. $\to$ i: Si $F \models G$, entonces $\models F \to G$.
8. $\bot$e: $\bot \models F$
9. $\neg$e: $\{F, \neg F\} \models \bot$
10. $\neg$i: Si $F \models \bot$, entonces $\models \neg F$.

Ejercicio 2.3 Demostrar las reglas derivadas.

1. Modus tollens:
$$\frac{F \to G \quad \neg G}{\neg F}\, MT$$

2. Introducción de la doble negación:
$$\frac{F}{\neg\neg F}\, \neg\neg\text{i}$$

3. Reducción al absurdo:
$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg F\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{F}\, RAA$$

4. Ley del tercio excluido:
$$\frac{}{F \lor \neg F}\, LEM$$

Ejercicio 2.4 Demostrar las equivalencias lógicas que aparecen en la transparencia 20 del tema 1:

1. Idempotencia: $F \vee F \equiv F$
   $F \wedge F \equiv F$

2. Conmutatividad: $F \vee G \equiv G \vee F$
   $F \wedge G \equiv G \wedge F$

3. Asociatividad: $F \vee (G \vee H) \equiv (F \vee G) \vee H$
   $F \wedge (G \wedge H) \equiv (F \wedge G) \wedge H$

4. Absorción: $F \wedge (F \vee G) \equiv F$
   $F \vee (F \wedge G) \equiv F$

5. Distributividad: $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
   $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$

6. Doble negación: $\neg\neg F \equiv F$.

7. Leyes de De Morgan: $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$
   $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$

2.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.5 Probar mediante deducción natural:

1. $p, p \to q \vdash q$
2. $p \to q, q \to r, p \vdash r$
3. $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$
4. $p \to q, q \to r \vdash p \to r$
5. $p \to (q \to r) \vdash q \to (p \to r)$
6. $p \to (q \to r) \vdash (p \to q) \to (p \to r)$
7. $p \vdash q \to p$
8. $\vdash p \to (q \to p)$
9. $p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)$
10. $p \to (q \to (r \to s)) \vdash r \to (q \to (p \to s))$
11. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
12. $(p \to q) \to r \vdash p \to (q \to r)$

13. $p, q \vdash p \wedge q$
14. $p \wedge q \vdash p$
15. $p \wedge q \vdash q$
16. $p \wedge (q \wedge r) \vdash (p \wedge q) \wedge r$
17. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
18. $p \wedge q \vdash p \rightarrow q$
19. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \vdash p \rightarrow (q \wedge r)$
20. $p \rightarrow (q \wedge r) \vdash (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
21. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash (p \wedge q) \rightarrow r$
22. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
23. $p \vdash p \vee q$
24. $q \vdash p \vee q$
25. $p \vee q \vdash q \vee p$
26. $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$
27. $p \vee p \vdash p$
28. $p \vdash p \vee p$
29. $p \vee (q \vee r) \vdash (p \vee q) \vee r$
30. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$
31. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
32. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r \vdash p \wedge (q \vee r)$
33. $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
34. $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$
35. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \vdash (p \vee q) \rightarrow r$
36. $(p \vee q) \rightarrow r \vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
37. $p \vdash \neg\neg p$

38. $\neg p \vdash p \rightarrow q$

39. $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

40. $p \vee q, \neg q \vdash p$

41. $p \vee q, \neg p \vdash q$

42. $p \vee q \vdash \neg(\neg p \wedge \neg q)$

43. $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$

44. $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

45. $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

46. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

47. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$

48. $p \wedge \neg p \vdash q$

49. $\neg\neg p \vdash p$

50. $\vdash p \vee \neg p$

51. $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

52. $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow q$

53. $\neg(\neg p \wedge q) \vdash p \vee q$

54. $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

55. $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

56. $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Ejercicio 2.6 Demostrar, por deducción natural, la corrección del siguiente argumento: *Se sabe que*

1. *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*

2. *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*

3. *Los ungulados de cuello largo son jirafas.*

4. *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por tanto, el animal es una cebra.

Ejercicio 2.7 Demostrar por deducción natural cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 1.30.

Ejercicio 2.8 Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que en cada una de las habitaciones puede haber un tigre o una dama. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que le lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarle, en cada puerta hay un letrero:

- puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.
- puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama y en una de estas habitaciones hay un tigre.

Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, demostrar por deducción natural que la dama está en la segunda puerta.

2.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 2.9 Probar mediante deducción natural:

1. **[Examen de Junio de 2004]**

$$(E \vee F) \rightarrow G \vdash (E \rightarrow G) \wedge (F \rightarrow G)$$

2. **[Examen de Septiembre de 2004]**

$$\vdash (E \rightarrow (F \wedge G)) \rightarrow (E \rightarrow F) \vee (E \rightarrow G)$$

3. **[Examen de Abril de 2005]**

   a) $\{p \rightarrow r, r \rightarrow \neg q\} \models \neg(p \wedge q)$
   b) $p \vee q,\ \neg q \vee r \vdash p \vee r$
   c) $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow q)$
   d) $(p \vee (q \rightarrow p)) \wedge q \vdash p$
   e) $\neg(p \wedge \neg q) \vdash p \rightarrow q$
   f) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \models p \rightarrow (q \wedge r)$
   g) $(p1 \rightarrow p2) \wedge (q1 \rightarrow q2) \vdash (p1 \wedge q1 \rightarrow p2 \wedge q2)$
   h) $\neg(\neg p \vee \neg q) \vdash p \wedge q$

i) $\vdash ((p \to q) \lor (p \to r)) \to (p \to q \lor r)$

j) $((\neg p \lor \neg q) \to (\neg p \land r)) \vdash \neg q \lor (p \lor r)$

4. **[Examen de Junio de 2005]**

$$p \land \neg(q \to r) \vdash (p \land q) \land \neg r$$

5. **[Examen de Septiembre de 2005]**

$$\vdash ((p \to (q \land \neg r)) \to p) \to p$$

6. **[Examen de Diciembre de 2005]**

$$\vdash (p \to \neg q) \land (p \to \neg r) \to (p \to \neg(q \lor r))$$

7. **[Examen de Abril de 2006]**

a) $(p \lor q) \land (p \to r) \vdash p \lor r$.

b) $\vdash (\neg p \to q) \to ((p \to q) \to q)$.

c) $\neg(\neg q \land p) \vdash p \to q$.

d) $\neg p \lor (r \to q) \vdash \neg q \to \neg(p \land r)$.

e) $\neg(p \land q) \vdash p \to \neg q$.

f) $(p \lor \neg q) \to p \land r \vdash \neg q \lor (\neg p \lor r)$.

g) $(p \to q) \land ((\neg r \lor q) \to s) \vdash \neg(p \land \neg s)$.

h) $\vdash (\neg(s \lor (p \to q))) \to (p \land \neg q \land \neg s)$.

8. **[Examen de Junio de 2006]**

$$\vdash ((p \land q) \to (r \lor s)) \to ((p \to r) \lor (q \to s))$$

9. **[Examen de Septiembre de 2006]**

$$(p \to r) \lor (q \to s) \vdash (p \land q) \to (r \lor s)$$

10. **[Examen de Diciembre de 2006]**

$$\vdash (\neg q \to \neg p) \lor (q \to p)$$

Tema 3

Sintaxis y semántica de la lógica de primer orden

3.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.1 Formalizar el siguiente argumento: *"Si una ciudad es vecina de otra, entonces la segunda es vecina de la primera. Sevilla es vecina de Cádiz. Por tanto, Cádiz es vecina de Sevilla"*.

Ejercicio 3.2 Para representar el mundo de los bloque se parte de los siguientes predicados primitivos:

- sobre(x, y) se verifica si el bloque x está colocado sobre el bloque y
- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa

Definir las siguientes relaciones:

- bajo(x, y) se verifica si el bloque x está debajo del bloque y.
- encima(x, y) se verifica si el bloque x está encima del bloque y, pudiendo haber otros bloques entre ellos.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima
- pila(x, y, z) se verifica si el bloque x está sobre el y, el y sobre el z y el z sobre la mesa.

Representar la siguiente propiedad: el bloque central de cualquier pila no está libre.

Ejercicio 3.3 Otra representación del mundo de los bloques se basa en los conceptos primitivos:

- es_bloque(x) se verifica si x es un bloque.
- superior(x) es el bloque que está sobre el bloque x.

Definir los siguientes conceptos:

- sobre_mesa(x) se verifica si el bloque x está sobre la mesa.
- libre(x) se verifica si el bloque x no tiene bloques encima.
- tope(x) es el bloque libre que está encima de x.

Ejercicio 3.4 Formalizar las siguientes expresiones, usando la conceptualización

planeta(x)	x es un planeta
Tierra	la Tierra
Luna	la Luna
satélite(x)	x es un satélite
satélite(x, y)	x es un satélite de y
gira(x, y)	x gira alrededor de y
Sol	el Sol

1. La Tierra es un planeta.
2. La Luna no es un planeta.
3. La Luna es un satélite.
4. La Tierra gira alrededor del Sol.
5. Todo planeta es un satélite.
6. Todo planeta gira alrededor del Sol.
7. Algún planeta gira alrededor de la Luna.
8. Hay por lo menos un satélite.
9. Ningún planeta es un satélite.
10. Ningún objeto celeste gira alrededor de sí mismo.
11. Alrededor de los satélites no giran objetos.
12. Hay exactamente un satélite.
13. La Luna es un satélite de la Tierra.

14. Todo planeta tiene un satélite.
15. La Tierra no tiene satélites.
16. Algún planeta no tiene satélites.
17. Sólo los planetas tienen satélites.
18. Todo satélite es satélite de algún planeta.
19. La Luna no gira alrededor de dos planetas diferentes.
20. Hay exactamente dos planetas.

Ejercicio 3.5 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje de la aritmética:

1. $+(\cdot(x, 1), s(y))$.
2. $+(\cdot(x, <), s(y))$.

Ejercicio 3.6 Decidir si las siguientes expresiones son términos en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. superior(superior(c)).
2. libre(superior(c)).

Ejercicio 3.7 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje de la aritmética:

1. $< (\cdot(x, 1), s(y))$.
2. $+(x, y) = \cdot(x, y)$.

Ejercicio 3.8 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas atómicas en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. libre(superior(c)).
2. tope(c) = superior(b).

Ejercicio 3.9 Decidir si las siguientes expresiones son fórmulas en el lenguaje de la aritmética:

1. $\forall x \exists y < (x, y)$
2. $\forall x \exists y + (x, y)$.

Ejercicio 3.10 Decidir si la siguiente expresión es una fórmula en el lenguaje del mundo de los bloques:

1. $\forall x(\text{tope}(x) = x \leftrightarrow \text{libre}(x))$.

Ejercicio 3.11 Dibujar el árbol de análisis de la fórmula $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 3.12 Calcular las subfórmulas de $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 3.13 Calcular los conjuntos de variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(R(x,c) \to P(f(y)))$.
2. $\forall x(R(a,c) \to P(f(y)))$.

Ejercicio 3.14 Determinar las ocurrencias libres y ligadas de las variables de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(z,x))$.
2. $\exists x R(x,y) \lor \forall y P(y)$
3. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
4. $P(x) \to R(x,y)$

Ejercicio 3.15 Calcular el conjunto de variables libres y el conjunto de variables ligadas de cada una de las siguientes fórmulas:

1. $\forall x(P(x) \to R(x,y)) \to (\exists y P(y) \to R(x,z))$.
2. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
3. $\forall z(P(x) \to R(x,y))$.

Ejercicio 3.16 Determinar si las siguientes fórmulas son abiertas o cerradas:

1. $\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$.
2. $\exists x R(x,y) \lor \forall y P(y)$.

Ejercicio 3.17 Se considera el lenguaje L cuyos símbolos propios son:

- constante: 0;
- símbolo de función monaria: s;
- símbolo de función binaria: $+$ y

- símbolo de relación binaria: $\leq$

y las siguientes estructuras de L

- $\mathcal{I}_1 = (U_1, I_1)$ con
  - $U_1 = \mathbb{N}$
  - $I_1(0) = 0$
  - $I_1(s) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ (sucesor)
  - $I_1(+) = \{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{N}\}$ (suma)
  - $I_1(\leq) = \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$
- $\mathcal{I}_2 = (U_2, I_2)$ con
  - $U_2 = \{0, 1\}^*$ (cadenas de 0 y 1)
  - $I_2(0) = \epsilon$ (cadena vacía)
  - $I_2(s) = \{(w, w1) : w \in \{0, 1\}^*\}$ (siguiente)
  - $I_2(+) = \{(w_1, w_2, w_1w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*\}$ (concatenación)
  - $I_2(\leq) = \{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in \{0, 1\}^*, w_1$ es prefijo de $w_2\}$ (prefijo)
- $\mathcal{I}_3 = (U_3, I_3)$ con
  - $U_3 = \{abierto, cerrado\}$
  - $I_3(0) = cerrado$
  - $I_3(s) = \{(abierto, cerrado), (cerrado, abierto)\}$

e	$I_3(s)(e)$
abierto	*cerrado*
cerrado	*abierto*

  - $I_3(+) = \{ (abierto, abierto, abierto), (abierto, cerrado, abierto), (cerrado, abierto, abierto), (cerrado, cerrado, cerrado)\}$

$I_3(+)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	*abierto*	*abierto*
cerrado	*abierto*	*cerrado*

  - $I_3(\leq) = \{ (abierto, abierto), (cerrado, abierto), (cerrado, cerrado)\}$

$I_3(\leq)$	*abierto*	*cerrado*
abierto	1	0
cerrado	1	1

Calcular el valor del término $s(x + s(0))$ en

1. $\mathcal{I}_1$ con la asignación $A(x) = 3$.
2. $\mathcal{I}_2$ con la asignación $A(x) = 10$.
3. $\mathcal{I}_3$ con la asignación $A(x) = abierto$.

Ejercicio 3.18 Calcular el valor de la fórmula $\forall x \exists y P(x,y)$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(P) = \{(1,1),(2,2)\}$.

Ejercicio 3.19 Calcular el valor de la fórmula $\forall x g(g(x)) = x$ en la estructura $\mathcal{I} = (U, I)$ tal que $U = \{1,2\}$ e $I(g) = \{(1,2),(2,1)\}$.

Ejercicio 3.20 Calcular el valor de las siguientes fórmulas.

1. $\forall x \exists y R(y,x)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   a) $U = \mathbb{Z}$ e $I(R) = <$
   b) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = <$
2. $\exists x \forall y R(x,y)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   a) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \leq$
   b) $U = \mathbb{N}$ e $I(R) = \geq$
3. $\forall y R(x,y)$ en $\mathcal{I} = (U, I)$ con
   a) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 0$.
   b) $U = \mathbb{N}$, $I(R) = \leq$ y A una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 5$.

Ejercicio 3.21 Sea $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ una estructura tal que $I(f) = +$ e $I(g) = *$.

1. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = A(y) = 2$, es una realización de $f(x,y) = g(x,y)$.
2. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$, donde A es una asignación en $\mathcal{I}$ tal que $A(x) = 1$, $A(y) = 2$, es una realización de $f(x,y) = g(x,y)$.
3. Determinar si $\mathcal{I}$ es un modelo de $f(x,y) = g(x,y)$.
4. Determinar si $\mathcal{I}$ es un modelo de $f(x,y) = f(y,x)$.

Ejercicio 3.22 Determinar si las siguientes fórmulas son válidas, satisfacibles o insatisfacibles:

1. $\exists x P(x) \lor \forall x \neg P(x)$.

2. $\exists x P(x) \land \exists x \neg P(x)$.
3. $\forall x P(x) \land \exists x \neg P(x)$.

Ejercicio 3.23 Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. F es válida syss $\neg F$ es insatisfacible.
2. Si F es válida, entonces F es satisfacible.
3. Si F es satisfacible, entonces $\neg F$ es insatisfacible.
4. Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es válida syss $\forall x_1 \dots \forall x_n F$ es válida.
5. Sea F una fórmula de L y $x_1, \dots, x_n$ las variables libres de F. Entonces, F es satisfacible syss $\exists x_1 \dots (\exists x_n) F$ es satisfacible.

Ejercicio 3.24 Sea $S = \{\forall y R(x, y),\ \forall y f(x, y) = y\}$. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$ es una realización de S

1. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = \leq, f^I = +, A(x) = 0$.
2. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I), R^I = <, f^I = +, A(x) = 0$.

Ejercicio 3.25 Sea $S = \{R(e, y),\ f(e, y) = y\}$. Determinar si $(\mathcal{I}, A)$ es un modelo de S

1. $R^I = \leq, f^I = +, e^I = 0$.
2. $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, I)$ con $R^I = <, f^I = +, e^I = 0$.

Ejercicio 3.26 Determinar si los siguientes conjuntos son consistentes:

1. $S = \{\forall y R(x, y),\ \forall y f(x, y) = y\}$.
2. $S = \{P(x) \rightarrow Q(x),\ \forall y P(y),\ \neg Q(x)\}$.

Ejercicio 3.27 Decidir si se verifican las siguientes relaciones de consecuencia lógica:

1. $\forall x P(x) \models P(y)$.
2. $P(y) \models \forall x P(x)$.
3. $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)),\ P(c)\} \models Q(c)$.
4. $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)),\ Q(c)\} \models P(c)$.
5. $\{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)),\ \neg Q(c)\} \models \neg P(c)$.
6. $\{P(c),\ \neg P(d)\} \models c \neq d$.

3.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.28 Determinar las variables libres y ligadas de las siguientes fórmulas:

1. $\exists x\, \exists z\, [P(x,y) \to P(x,z) \land \exists x\, (P(y,z) \land Q(x,y))]$
2. $\forall x\, \exists z\, [P(x,y) \to R(x,z) \to \exists y\, (P(y,z) \lor R(x,y))]$

Ejercicio 3.29 Sea F la fórmula $P(x) \to P(a)$, donde a es un símbolo de constante. ¿Es F satisfacible? ¿Tiene modelos? ¿Es F una fórmula válida?

Ejercicio 3.30 Sea L un lenguaje de primer orden con dos símbolos de predicado, P (de aridad 1), Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f, de aridad 1. Sea $\mathcal{I} = (U, I)$ la estructura dada por:

- $U = \{a, b, c, d\}$;
- $I(P) = \{a, b\}$,
- $I(Q) = \{(a, b),\ (b, b),\ (c, b)\}$,
- $I(f) = \{(a, b), (b, b), (c, a), (d, c)\}$.

Decidir cuáles de las siguientes fórmulas de L son válidas en $\mathcal{I}$:

1. $P(x) \to \exists y Q(y, x)$.
2. $\forall x Q(f(x), x)$.
3. $Q(f(x), x) \to Q(x, x)$.
4. $Q(x, y) \to P(x)$.

Ejercicio 3.31 ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de fórmulas son consistentes?

1. $\{Q(x),\ \forall x[Q(x) \to R(x)],\ \forall x \neg R(x)\}$
2. $\{\forall x P(x, y),\ \forall x \neg P(x, x)\}$
3. $\{\forall x \forall y[P(x, y) \to P(y, x)],\ \forall x \neg P(x, x),\ \exists y P(x, y)\}$

Ejercicio 3.32 Decidir si son correctas o no las siguientes relaciones de consecuencia:

1. $\{\forall x[P(x) \lor Q(x)]\} \models \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
2. $\{\forall x[P(x) \to Q(x)]\} \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$
3. $\{\forall x P(x) \to \forall x Q(x)\} \models \forall x[P(x) \to Q(x)]$

4. $\{P(x) \vee Q(f(x))\} \models P(x) \vee Q(x)$

Ejercicio 3.33 En el lenguaje con igualdad $L = \{a, f\}$, siendo f un símbolo de función de aridad 1 y a una constante, se consideran las siguientes fórmulas:

$$F_1 := \forall x[f(x) \neq a],$$

$$F_2 := \forall x \forall y[f(x) = f(y) \to x = y],$$

$$F_3 := \forall x[x \neq a \to \exists y[f(y) = x]].$$

Probar que ninguna de estas fórmulas es consecuencia lógica de las dos restantes.

Ejercicio 3.34 Formalizar las siguientes argumentaciones; es decir, para cada argumentación, determinar la simbolización y formalizarla en lógica de primer orden. Escribir las formalizaciones en APLI2 y demostrar en APLI2 las argumentaciones válidas.

1. Existe una persona en la Feria tal que si dicha persona paga, entonces todas las personas pagan.

2. Sócrates es un hombre. Los hombres son mortales. Luego, Sócrates es mortal.

3. Hay estudiantes inteligentes y hay estudiantes trabajadores. Por tanto, hay estudiantes inteligentes y trabajadores.

4. Todos los participantes son vencedores. Hay como máximo un vencedor. Hay como máximo un participante. Por lo tanto, hay exactamente un participante.

5. Todo aquel que entre en el país y no sea un VIP será cacheado por un aduanero. Hay un contrabandista que entra en el país y que solo podrá ser cacheado por contrabandistas. Ningún contrabandista es un VIP. Por tanto, algún aduanero es contrabandista.

6. Juan teme a María. Pedro es temido por Juan. Luego, alguien teme a María y a Pedro.

7. Los hermanos tienen el mismo padre. Juan es hermano de Luis. Jorge es padre de Luis. Por tanto, Jorge es padre de Juan.

8. La existencia de algún canal de TV pública, supone un acicate para cualquier canal de TV privada; el que un canal de TV tenga un acicate, supone una gran satisfacción para cualquiera de sus directivos; en Madrid hay varios canales públicos de TV; TV5 es un canal de TV privada; por tanto, todos los directivos de TV5 están satisfechos.

9. Quien intente entrar en un país y no tenga pasaporte, encontrará algún aduanero que le impida el paso. A algunas personas motorizadas que intentan entrar en un país le impiden el paso únicamente personas motorizadas. Ninguna persona motorizada tiene pasaporte. Por tanto, ciertos aduaneros están motorizados.

10. Los aficionados al fútbol aplauden a cualquier futbolista extranjero. Juanito no aplaude a futbolistas extranjeros. Por tanto, si hay algún futbolista extranjero nacionalizado español, Juanito no es aficionado al fútbol.

11. Ningún aristócrata debe ser condenado a galeras a menos que sus crímenes sean vergonzosos y lleve una vida licenciosa. En la ciudad hay aristócratas que han cometido crímenes vergonzosos aunque su forma de vida no sea licenciosa. Por tanto, hay algún aristócrata que no está condenado a galeras.

12. Todo individuo que esté conforme con el contenido de cualquier acuerdo internacional lo apoya o se inhibe en absoluto de asuntos políticos. Cualquiera que se inhiba de los asuntos políticos, no participará en el próximo referéndum. Todo español, está conforme con el acuerdo internacional de Maastricht, al que sin embargo no apoya. Por tanto, cualquier individuo o no es español, o en otro caso, está conforme con el contenido del acuerdo internacional de Maastricht y no participará en el próximo referéndum.

13. Toda persona pobre tiene un padre rico. Por tanto, existe una persona rica que tiene un abuelo rico.

14. Todo lo existente tiene una causa. Luego hay una causa de todo lo existente.

15. Todo deprimido que estima a un submarinista es listo. Cualquiera que se estime a sí mismo es listo. Ningún deprimido se estima a sí mismo. Por tanto, ningún deprimido estima a un submarinista.

16. Todos los robots obedecen a los amigos del programador jefe. Alvaro es amigo del programador jefe, pero Benito no le obedece. Por tanto, Benito no es un robot.

17. En una pecera nadan una serie de peces. Se observa que:

    a) Hay algún pez x que para cualquier pez y, si el pez x no se come al pez y entonces existe un pez z tal que z es un tiburón o bien z protege al pez y.

    b) No hay ningún pez que se coma a todos los demás.

    c) Ningún pez protege a ningún otro.

    Por tanto, existe algún tiburón en la pecera.

18. Supongamos conocidos los siguientes hechos acerca del número de aprobados de dos asignaturas A y B:

    a) Si todos los alumnos aprueban la asignatura A, entonces todos aprueban la asignatura B.

    b) Si algún delegado de la clase aprueba A y B, entonces todos los alumnos aprueban A.

    c) Si nadie aprueba B, entonces ningún delegado aprueba A.

    d) Si Manuel no aprueba B, entonces nadie aprueba B.

    Por tanto, si Manuel es un delegado y aprueba la asignatura A, entonces todos los alumnos aprueban las asignaturas A y B.

19. En cierto país oriental se ha celebrado la fase final del campeonato mundial de fútbol. Cierto diario deportivo ha publicado las siguientes estadísticas de tan magno acontecimiento:

    - A todos los porteros que no vistieron camiseta negra les marcó un gol algún delantero europeo.
    - Algún portero jugó con botas blancas y sólo le marcaron goles jugadores con botas blancas.
    - Ningún portero se marcó un gol a sí mismo.
    - Ningún jugador con botas blancas vistió camiseta negra.

    Por tanto, algún delantero europeo jugó con botas blancas.

20. Las relaciones de parentesco verifican la siguientes propiedades generales:

    - Si x es hermano de y, entonces y es hermano de x.
    - Todo el mundo es hijo de alguien.
    - Nadie es hijo del hermano de su padre.
    - Cualquier padre de una persona es también padre de todos los hermanos de esa persona.
    - Nadie es hijo ni hermano de sí mismo.

    Tenemos los siguientes miembros de la familia Peláez: Don Antonio, Don Luis, Antoñito y Manolito y sabemos que Don Antonio y Don Luis son hermanos, Antoñito y Manolito son hermanos, y Antoñito es hijo de Don Antonio. Por tanto, Don Luis no es el padre de Manolito.

21. Si uno de los miembros del club afeita a algún otro (incluido a sí mismo), entonces todos los miembros del club lo han afeitado a él (aunque no necesariamente al mismo tiempo). Guido, Lorenzo, Petruccio y Cesare pertenecen al club de barberos. Guido ha afeitado a Cesare. Por tanto, Petruccio ha afeitado a Lorenzo.

22. Carlos afeita a todos los habitantes de Las Chinas que no se afeitan a sí mismo y sólo a ellos. Carlos es un habitante de las Chinas. Por consiguiente, Carlos no afeita a nadie.

23. Quien desprecia a todos los fanáticos desprecia también a todos los políticos. Alguien no desprecia a un determinado político. Por consiguiente, hay un fanático al que no todo el mundo desprecia.

24. Sólo hay un sofista que enseña gratuitamente, y éste es Sócrates. Sócrates argumenta mejor que ningún otro sofista. Platón argumenta mejor que algún sofista que enseña gratuitamente. Si una persona argumenta mejor que otra segunda, entonces la segunda no argumenta mejor que la primera. Por consiguiente, Platón no es un sofista.

25. Todos los filósofos se han preguntado qué es la filosofía. Los que se preguntan qué es la filosofía se vuelven locos. Nietzsche es filósofo. El maestro de Nietzsche no acabó loco. Por tanto, Nietzsche y su maestro son diferentes personas.

26. El hombre puro ama todo lo que es puro. Por tanto, el hombre puro se ama a sí mismo.

27. Ningún socio del club está en deuda con el tesorero del club. Si un socio del club no paga su cuota está en deuda con el tesorero del club. Por tanto, si el tesorero del club es socio del club, entonces paga su cuota.

28. Los caballos son animales. Por tanto, las colas de caballo son colas de animales.

29. Los padres son mayores que los hijos. Juan es el padre de Luis. Por tanto, Juan es mayor que Luis.

30. El esposo de la hermana de Toni es Roberto. La hermana de Toni es María. Por tanto, el esposo de María es Roberto.

31. Juan y Jaime tienen el mismo padre. La madre de María es Mónica. Mónica ama a Pedro. Pedro es el padre de Jaime. Por tanto, la madre de María ama al padre de Juan.

32. Si dos personas son hermanos, entonces tienen la misma madre y el mismo padre. Juan es hermano de Luis. Por tanto, la madre del padre de Juan es la madre del padre de Luis.

33. Todos los miembros del claustro son asturianos. El secretario forma parte del claustro. El señor Martínez es el secretario. Por tanto, el señor Martínez es asturiano.

34. Eduardo pudo haber visto al asesino. Antonio fue el primer testigo de la defensa. O Eduardo estaba en clase o Antonio dio falso testimonio. Nadie en clase pudo haber visto al asesino. Luego, el primer testigo de la defensa dio falso testimonio.

35. La luna hoy es redonda. La luna de hace dos semanas tenía forma de cuarto creciente. Luna no hay más que una, es decir, siempre es la misma. Luego existe algo que es a la vez redondo y con forma de cuarto creciente.

36. Juana sólo tiene un marido. Juana está casada con Tomás. Tomás es delgado y Guillermo no. Luego, Juana no está casada con Guillermo.

37. Sultán no es Chitón. Sultán no obtendrá un plátano a menos que pueda resolver cualquier problema. Si el chimpancé Chitón trabaja más que Sultán resolverá problemas que Sultán no puede resolver. Todos los chimpancés distintos de Sultán trabajan más que Sultán. Por consiguiente, Sultán no obtendrá un plátano.

38. Rosa ama a Curro. Paco no simpatiza con Ana. Quien no simpatiza con Ana ama a Rosa. Si una persona ama a otra, la segunda ama a la primera. Hay como máximo una persona que ama a Rosa. Por tanto, Paco es Curro.

39. Soy hijo único. El padre de Gutiérrez es el hijo de mi padre. Luego, yo soy el padre de Gutiérrez.

40. La sal y el azúcar son blancos. La sal no es azúcar. Por tanto, nada es blanco.

41. Quien mucho abarca poco aprieta. Sólo será líder quien aprieta poco. Juan abarca mucho porque ha estudiado cuatro carreras. El mayor de los hermanos es un líder. Luego, Juan no es el mayor de los hermanos.

42. Nadie sino Enrique y el cajero tenía una llave. Alguien que tenía una llave cogió la maleta. Por tanto, Enrique o el cajero tomaron la maleta.

43. El gestor que contrató a Juan sólo contrata licenciados con sobresaliente. Por tanto, Juan era un licenciado con sobresaliente.

44. Sócrates era el maestro de Platón. Sócrates tuvo, a lo sumo, un discípulo. Aristóteles fue discípulo de alguien cuyo maestro fue Sócrates. Por consiguiente, Platón fue el maestro de Aristóteles.

45. Nadie tiene más de un discípulo. Un autodidacta es aquel que ha sido maestro de sí mismo. Platón fue discípulo de un autodidacta. Por tanto, Platón fue un autodidacta.

46. Todos tiene exactamente un padre. Luego, todos tienen exactamente un abuelo paterno.

47. Todos tiene exactamente dos progenitores. Por tanto, todos tienen exactamente cuatro abuelos.

48. Si dos personas x e y son amigas, entonces x es amiga de la pareja de y. La pareja de Juan es amiga de Eva. Si x es amiga de y, entonces y es amiga de x. La pareja de la pareja de x es x. Por tanto, Juan es amigo de Eva.

49. Alguien que vive en la casa del crimen ha asesinado a la tía Ágata. Ágata, el mayordomo y Carlos viven en la casa del crimen y son las únicas personas que viven en la casa del crimen. Un asesino siempre odia a sus víctimas, y nunca es más rico que su víctima. Carlos no odia a nadie de los que odia la tía Ágata. Ágata odia a todos excepto al mayordomo. El mayordomo odia a los que no son más rico que la tía Ágata. El mayordomo odia a todos los que odia la tía Ágata. Nadie odia a todos. Por tanto, Ágata se ha suicidado.

50. (*Schubert's Steamroller*) Los lobos, zorros, pájaros, orugas y caracoles son animales y existen algunos ejemplares de estos animales. También hay algunas semillas y las semillas son plantas. A todo animal le gusta o bien comer todo tipo de plantas o bien le gusta comerse a todos los animales más pequeños que él mismo que gustan de comer algunas plantas. Las orugas y los caracoles son mucho más pequeños que los pájaros, que son mucho más pequeños que los zorros que a su vez son mucho más pequeños que los lobos. A los lobos no les gusta comer ni zorros ni semillas, mientras que a los pájaros les gusta comer orugas pero no caracoles. Las orugas y los caracoles gustan de comer algunas plantas. Luego, existe un animal al que le gusta comerse un animal al que le gusta comer semillas.

3.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 3.35 [Examen de Junio de 2002] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{P, f\}$ y las fórmulas de L: $F_1 : \forall x \exists y P(x, f(y))$, $F_2 : \exists y \forall x P(x, f(y))$ y $F_3 : \exists y \forall x P(x, y)$.

1. Hallar una L estructura, $\mathcal{I}$, tal que $\mathcal{I} \models F_1$ pero $\mathcal{I} \not\models F_2$.

2. Hallar una L estructura, $\mathcal{I}'$, tal que $\mathcal{I}' \models F_3$ pero $\mathcal{I}' \not\models F_2$.

Ejercicio 3.36 [Examen de Diciembre de 2003] Se considera el lenguaje de primer orden $L = \{a, f, P, Q, R\}$ y el conjunto de fórmulas de L

$$\begin{aligned} S = \{ \; & \forall x[Q(x) \to R(x)], \\ & \forall x \forall y[P(x,y) \to P(y,x)], \\ & \forall x \neg P(x,x), \\ & \forall x[P(f(x),x) \to Q(f(x))], \\ & \forall x[R(x) \leftrightarrow P(x,f(x))], \\ & Q(f(a))\} \end{aligned}$$

Construir razonadamente un modelo $\mathcal{I}$ de S cuyo universo sea $U = \{1,2,3,4,5\}$.

Ejercicio 3.37 [Examen de Junio de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado, Q (de aridad 2) y un símbolo de función, f (de aridad 1). Se considera la estructura $\mathcal{I}$ dada por: Universo: $\{a,b\}$, $Q^I = \{(a,b), (b,a)\}$, $f^I(a) = a$ y $f^I(b) = a$. Decidir cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen en la estructura:

1. $\forall x[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$
2. $\exists x[Q(f(x),x) \to Q(x,x)]$

Ejercicio 3.38 [Examen de Septiembre de 2004] Sea L un lenguaje de primer orden con un símbolo de predicado P de aridad 2.

1. Probar que las fórmulas $\forall x \exists y P(x,y)$ y $\exists x \forall y P(x,y)$ no son equivalentes, dando una estructura que sea modelo de la primera pero no de la segunda.
2. En la estructura $\mathcal{I} = (U,I)$ cuyo universo es $U = \{a,b,c\}$ y $P^I = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, ¿cuáles de las siguientes fórmulas se satisfacen y cuáles no?
   a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \forall y P(x,y)$
   b) $\exists x \forall y P(x,y) \to \forall x \exists y P(x,y)$
   c) $\neg[\forall x \exists y P(x,y) \land \exists x \forall y P(x,y)]$

Ejercicio 3.39 [Examen de Septiembre de 2006] Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

1. Para toda fórmula F, toda subfórmula G de F y toda variable libre x de G, se tiene que x es una variable libre de F.
2. Para toda fórmula F y toda fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists xF \land \exists xG$.
3. Para ninguna fórmula F y ninguna fórmula G, se tiene $\exists x[F \land G] \equiv \exists xF \land \exists xG$.

Tema 4

Deducción natural de primer orden

4.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.1 Sea σ la sustitución $[x/f(y,a), y/z]$. Calcular

1. $a\sigma$.
2. $w\sigma$.
3. $h(a,x,w)\sigma$.
4. $f(x,y)\sigma$.
5. $h(a,f(x,y),w)\sigma$.

Ejercicio 4.2 Sea σ la sustitución $[x/f(y), y/b]$. Calcular

1. $(\forall x\ (Q(x) \to R(x,y)))\sigma$.
2. $(Q(x) \to \forall x\ R(x,y))\sigma$.
3. $(\forall x\ (Q(x) \to \forall y\ R(x,y)))\sigma$.

Ejercicio 4.3 Decidir si la sustitución σ es libre para la fórmula F en cada uno de los siguientes casos:

1. σ es $[y/x]$ y F es $\exists x\ (x < y)$.
2. σ es $[y/g(y)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \to Q(x,f(y)))$.
3. σ es $[y/g(x)]$ y F es $\forall x\ (P(x) \to Q(x,f(y)))$.

Ejercicio 4.4 Demostrar mediante deducción natural

1. $P(c)$,
   $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
   $\vdash \neg Q(c)$

2. $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$,
   $\forall x P(x)$
   $\vdash \forall x \neg Q(x)$

3. $\forall x P(x)$
   $\vdash \exists x P(x)$

4. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$,
   $\exists x P(x)$
   $\vdash \exists x Q(x)$

5. $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$,
   $\exists x[P(x) \land Q(x)]$
   $\vdash \exists x[P(x) \land R(x)]$

6. $\exists x P(x)$,
   $\forall x \forall y[P(x) \rightarrow Q(y)]$
   $\vdash \forall y Q(y)$

7. $\vdash \neg\forall x P(x) \leftrightarrow \exists x \neg P(x)$

8. $\vdash \forall x[P(x) \land Q(x)] \leftrightarrow \forall x P(x) \land \forall x Q(x)$

9. $\vdash \exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x[P(x) \lor Q(x)]$

10. $\vdash \exists x \exists y P(x,y) \leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y)$

4.2. Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.5 Demostrar mediante deducción natural

1. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
   $\vdash \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

2. $\exists x \neg P(x)$
   $\vdash \neg\forall x P(x)$

3. $\forall x P(x)$
   $\vdash \forall y P(y)$

4. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$
   $\vdash \forall x \neg Q(x) \rightarrow \forall x \neg P(x)$

5. $\forall x[P(x) \rightarrow \neg Q(x)]$
   $\vdash \neg \exists x[P(x) \wedge Q(x)]$

6. $\forall x \forall y P(x,y)$
   $\vdash \forall u \forall v P(u,v)$

7. $\exists x \exists y P(x,y)$
   $\vdash \exists u \exists v P(u,v)$

8. $\exists x \forall y P(x,y)$
   $\vdash \forall y \exists x P(x,y)$

9. $\exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$
   $\vdash P(a) \rightarrow \exists x Q(x)$

10. $P(a) \rightarrow \exists x Q(x),$
    $\vdash \exists x[P(a) \rightarrow Q(x)]$

11. $\exists x P(x) \rightarrow Q(a)$
    $\vdash \forall x[P(x) \rightarrow Q(a)]$

12. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(a)],$
    $\vdash \exists x[P(x) \rightarrow Q(a)]$

13. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
    $\vdash \forall x[P(x) \vee Q(x)]$

14. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$
    $\vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

15. $\forall x \forall y[P(y) \rightarrow Q(x)]$
    $\vdash \exists y P(y) \rightarrow \forall x Q(x)$

16. $\neg \forall x \neg P(x),$
    $\vdash \exists x P(x)$

17. $\forall x \neg P(x)$
    $\vdash \neg \exists x P(x)$

18. $\exists x P(x)$
    $\vdash \neg \forall x \neg P(x)$

19. $P(a) \to \forall x Q(x)$
 $\vdash \forall x[P(a) \to Q(x)]$

20. $\forall x \forall y \forall z[R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)]$,
 $\forall x \neg R(x,x)$
 $\vdash \forall x \forall y[R(x,y) \to \neg R(y,x)]$

21. $\forall x[P(x) \lor Q(x)]$,
 $\exists x \neg Q(x)$,
 $\forall x[R(x) \to \neg P(x)]$
 $\vdash \exists x \neg R(x)$

22. $\forall x[P(x) \to (Q(x) \lor R(x))]$,
 $\neg \exists x[P(x) \land R(x)]$
 $\vdash \forall x[P(x) \to Q(x)]$

23. $\exists x \exists y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
 $\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

Ejercicio 4.6 Demostrar mediante deducción natural

1. $t_1 = t_2$,
 $t_2 = t_3$
 $\vdash t_1 = t_3$

2. $t_1 = t_2$
 $\vdash t_2 = t_1$

3. $P(a)$
 $\vdash \forall x((x = a) \to P(x))$

4. $\exists x \exists y(R(x,y) \lor R(y,x))$
 $\neg \exists x R(x,x)$
 $\vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

5. $\forall x P(a,x,x)$,
 $\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
 $\vdash P(f(a),a,f(a)$

6. $\forall x P(a,x,x)$,
 $\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))$
 $\vdash \exists z P(f(a),z,f(f(a)))$

7. $\forall y Q(a,y)$,
   $\forall x \forall y (Q(x,y) \to Q(s(x),s(y))$
   $\vdash \exists z(Q(a,z) \land Q(z,s(s(a))))$

Ejercicio 4.7 Demostrar por deducción natural cada una de las argumentaciones válidas del ejercicio 3.34.

4.3. Ejercicios de exámenes

Ejercicio 4.8 Demostrar mediante deducción natural

1. $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$
   $\vdash \forall x[P(x) \lor Q(x)]$

2. $\exists x[P(x) \land Q(x)]$
   $\vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

3. $\forall x[R(x) \to Q(x)]$,
   $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)]$
   $\vdash \exists x[P(x) \land \neg R(x)]$

4. $\exists x[P(x) \land Q(x)]$,
   $\forall y[P(y) \to R(y)]$
   $\vdash \exists x[R(x) \land Q(x)]$

5. $\forall x R(x,x)$,
   $\forall x \forall y \forall z[\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)]$
   $\vdash \forall x \forall y[R(x,y) \lor R(y,x)]$

6. $\exists x \exists y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
   $\vdash \exists x \exists y R(x,y)$

7. $\forall x[P(x) \to \exists y Q(y)]$,
   $\vdash \forall x \exists y[P(x) \to Q(y)]$

8. $\forall x[P(x) \to \neg C(x)]$,
   $\exists x[C(x) \land B(x)]$
   $\vdash \exists x[B(x) \land \neg P(x)]$

9. $\forall x \exists y[P(x) \to Q(y)]$
   $\vdash \forall x[P(x) \to \exists y Q(y)]$

10. $\neg \forall x[P(x) \to Q(a)]$
    $\vdash \exists x P(x) \land \neg Q(a)$

11. $\forall x P(x)$,
$\forall x[P(x) \to Q(x) \lor R(x)]$,
$\exists x \neg Q(x)$
$\vdash \exists x R(x)$

12. $\forall x \forall y[R(x,y) \to R(y,x)]$,
$\forall x \forall y[R(x,y) \lor R(y,x)]$
$\vdash \forall x \forall y \forall z[\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)]$

13. $\neg \forall x P(x)$
$\vdash \exists x \neg P(x)$

14. $\forall x \forall y[(\exists z R(y,z)) \to R(x,y)]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \forall x \forall y R(x,y)$

15. $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)] \to \forall y[P(y) \to R(y)]$,
$\exists x[P(x) \land S(x)]$,
$\forall x[P(x) \to \neg R(x)]$
$\vdash \exists x[S(x) \land Q(x)]$

16. $\vdash \neg \exists x \forall y[P(y,x) \leftrightarrow \neg P(y,y)]$

17. $\forall x[\exists y R(x,y) \to \exists y[\forall z R(y,z) \land R(x,y)]]$,
$\exists x \exists y R(x,y)$
$\vdash \exists x \forall y R(x,y)$

18. $\forall x[P(x) \to \forall y[Q(y) \to R(x,y)]]$,
$\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
$\vdash \neg \forall x Q(x)$

19. $\exists x[P(x) \to \forall y Q(y)]$
$\vdash \exists x \forall y[P(x) \to Q(y)]$

20. $\exists y \exists z[\forall x \neg R(x,y) \lor \forall x \neg R(x,z)]$
$\vdash \neg \forall y \forall z \exists x[R(x,y) \land R(x,z)]$

21. $\exists x[P(x) \to \forall y[P(y) \to Q(y)]]$,
$\neg \exists x Q(x)$
$\vdash \neg \forall x P(x)$

22. $\neg \exists x[P(x) \land \neg \forall y[Q(y) \to R(x,y)]]$,
$\exists x[P(x) \land \exists y \neg R(x,y)]$
$\vdash \exists x \neg Q(x)$

23. $\forall x \forall y[\exists z[R(z,y) \land \neg R(x,z)] \rightarrow R(x,y)]$,
$\neg \exists x R(x,x)$
$\vdash \forall x \forall y[\neg R(y,x) \rightarrow \neg R(x,y)]$

24. $P(a) \rightarrow \neg \forall x \neg R(x)$,
$\vdash \neg \forall x[\neg R(x) \land P(a)]$

25. $\forall x \forall y \forall z[P(x,y) \land P(y,z) \rightarrow R(x,z)]$,
$\forall x \exists y P(x,y)$
$\vdash \forall x \exists y R(x,y)$

26. $\forall x[P(x) \rightarrow (\exists y Q(x,y) \rightarrow \exists y Q(y,x))]$,
$\forall x[\exists y Q(y,x) \rightarrow Q(x,x)]$,
$\neg \exists x Q(x,x)$
$\vdash \forall x[P(x) \rightarrow \forall y \neg Q(x,y)]$

27. $\forall x[Q(x) \rightarrow \neg R(x)]$,
$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x) \lor S(x)]$,
$\exists x[P(x) \land R(x)]$
$\vdash \exists x[P(x) \land S(x)]$

28. $\forall x[P(x) \rightarrow (R(x) \rightarrow S(x))]$,
$\exists x[P(x) \lor \neg R(x)]$
$\vdash \exists x[R(x) \rightarrow S(x)]$

Ejercicio 4.9 [Examen de Junio 2005] Se sabe que:

- Si todo el que estudia aprueba, entonces todo el que estudia recibe un regalo.
- Hay quien estudia y no recibe ningún regalo.
- No es verdad que todo el que estudia aprueba.

Formalizar los conocimientos anteriores y probar que el conjunto de fórmulas obtenidas es consistente, proporcionando una estructura que sea modelo de cada una de las fórmulas.

Bibliografía

[1] C. Badesa, I. Jané y R. Jansana *Elementos de lógica formal* (Ariel, 2000)

[2] R. Bornat *Using ItL Jape with X* (Department of Computer Science, QMW, 1998).

[3] M. Huth y M. Ryan *Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems* (Cambridge University Press, 2000)