

Polynômes de Legendre

On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X - 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)(2X-1)P_n + nP_{n-1} = 0$$

PARTIE A - PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES POLYNÔMES

- ① Calculer P_2 .
- ② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n .
- ③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n le coefficient dominant de P_n . Montrer que $a_{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}a_n$.
- ④ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

PARTIE B - FORMULE DE RODRIGUES

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \frac{1}{n!} X^n (X-1)^n$$

- ⑤ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U'_{n+1} = (2X-1)U_n \quad \text{et} \quad U''_{n+1} = 2(2n+1)U_n + U_{n-1}$$

Conseil : pour la seconde égalité, procéder par équivalences peut être utile.

- ⑥ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide des deux relations précédentes, montrer que

$$U_{n+1}^{(n+1)} = (2X-1)U_n^{(n)} + 2nU_n^{(n-1)} \quad \text{et} \quad U_{n+1}^{(n+1)} = 2(2n+1)U_n^{(n-1)} + U_{n-1}^{(n-1)}$$

NB : ici, si $P \in \mathbb{K}[X]$, la notation $P^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de P .

- ⑦ En déduire que $(n+1)U_{n+1}^{(n+1)} - (2n+1)(2X-1)U_n^{(n)} + nU_{n-1}^{(n-1)} = 0$.
- ⑧ En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = U_n^{(n)}$.
- ⑨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $U_n^{(i)}(0) = U_n^{(i)}(1) = 0$.
- ⑩ En effectuant des intégrations par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 U_n(t) f^{(n)}(t) dt = (-1)^n \int_0^1 P_n(t) f(t) dt$$

- ⑪ Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\int_0^1 P_n(t) Q(t) dt = 0$.

PARTIE C - RACINES DES POLYNÔMES

Dans cette partie, on utilisera les notations de la partie précédente et le résultat des questions 8 et 9.

- ⑫ On fixe $n \geq 2$. Justifier que U'_n s'annule au moins une fois sur $]0, 1[$, puis que U''_n s'annule au moins deux fois sur $]0, 1[$.
- ⑬ Montrer finalement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]0, 1[$.
- ⑭ Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_1, \dots, x_n \in]0, 1[$ distincts tels que :

$$P_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} (X - x_1) \cdots (X - x_n)$$