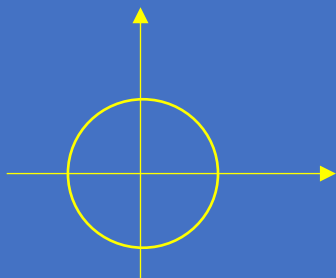


CÁLCULO É FÁCIL



Walter Ferreira Velloso Jr.



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) * \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}$$

1,1,2,3,5,8,13,21,34,89.....

CÁLCULO É FÁCIL

DOI: 10.11606/9786587023069

Walter Ferreira Velloso Junior

Pirassununga-SP
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos da
Universidade de São Paulo (FZEA-USP)
2020

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. Vahan Agopyan

Vice-Reitor: Prof. Dr. Antonio Carlos Hernandez

FACULDADE DE ZOOTECNIA E ENGENHARIA DE ALIMENTOS

Avenida Duque de Caxias Norte, 225

Pirassununga, SP

CEP 13.635-900

<http://www.fzea.usp.br>

Diretora da FZEA: Profa. Dra. Elisabete Maria Macedo Viegas

Vice-Diretor da FZEA: Prof. Dr. Carlos Eduardo Ambrósio

V441c Velloso Junior, Walter Ferreira
Cálculo é fácil / Walter Ferreira Velloso Junior. --
Pirassununga: Faculdade de Zootecnia e Engenharia de
Alimentos da Universidade de São Paulo, 2020.
65 p.

ISBN 978-65-87023-06-9 (e-book)
DOI: 10.11606/9786587023069

1. Cálculo. 2. Matemática. 3. Ensino Universitário.
I. Título.

Ficha catalográfica elaborada por Girlei Aparecido de Lima, CRB-8/7113

Está autorizada a reprodução parcial ou total desta obra desde que citada a fonte. Proibido uso com fins comerciais.

DEDICATÓRIA

À Prof. Dra. Mara Talarito Meliani, a melhor professora de Cálculo que eu já conheci. Amor da minha vida, luz dos meus olhos.

Aos meus vários milhares de alunos que, ao longo dos últimos 44 anos, aprenderam comigo que Cálculo é Fácil.

AGRADECIMENTOS

À professora Mara T. Meliani pela autoria da graciosa capa deste livro.

À querida Patrícia Tonetti, Chefe do Setor de Graduação da FZEA, pelo incentivo e paciência.

Prefácio

O Cálculo Diferencial e Integral é uma das áreas mais fundamentais da Matemática. Sua importância é imensa, tanto por estar intimamente relacionado com a História das Ciências, quanto por representar um patrimônio cultural e lógico de inigualável profundidade e abrangência, quanto, enfim, por razões práticas, já que o Cálculo se aplica a quase todas as áreas da Ciência e Tecnologia.

As disciplinas de Cálculo, entretanto, representam uma enorme dificuldade para estudantes das áreas de exatas (Matemática, Física, Química, Engenharias, Economia, e muitas outras). Um número expressivo de estudantes dos primeiros anos destes cursos tem muita dificuldade e muitos têm que enfrentar reprovações. Outros ainda desistem dessas profissões por não conseguir ultrapassar a “barreira” representada pelas “aulas de Cálculo”.

Essa dificuldade, porém, é compreensível. Recém-saídos do ensino médio, os estudantes demoram para se adaptar ao novo modo de organizar os estudos e frequentemente são “atropelados” pela enorme quantidade de exercícios, trabalhos, livros e professores que não são mais como os “amigões” do ensino médio. Além disto, muitos estudantes ingressam na Universidade com uma espécie de aversão à Matemática, provocada, creio, por um enfoque equivocado que esta disciplina tem no ensino médio.

O resultado é trágico. Nas vésperas das provas de Cálculo há “choro e ranger de dentes” por todos os corredores de todas as faculdades e nos dias seguintes só resta “o choro” e uma lista de notas vermelhas nos murais. A consequência disto é que todos dizem por aí que Cálculo é muito difícil.

Este livro, porém, tem a meta ambiciosa, no bom sentido, de provar o contrário. Sem, entretanto, pretender substituir os livros de Cálculo tradicionais (existem centenas de autores que escreveram e ainda escrevem livros didáticos de Cálculo Diferencial; uma bibliografia básica se encontra no final desse livro), pois eles serão sempre necessários e úteis por toda vida acadêmica e profissional. O presente livro, porém, pretende ajudar os estudantes a mudar de opinião sobre a matemática e “perder o medo de Cálculo”. Vamos estudar juntos e espero mostrar ao final que, na verdade, **Cálculo é fácil**.

Sumário	Pag.
CAPÍTULO 1. DICAS FUNDAMENTAIS PARA COMEÇAR A ESTUDAR	6
a. Álgebra: a base de tudo	
b. Geometria: Ah estes gregos!	
c. Trigonometria: sem ela não se vive....	
CAPÍTULO 2. O CÉU É O LIMITE. ESTUDANDO AS FUNÇÕES.	22
Funções importantes que você <u>não</u> pode <u>não</u> conhecer!	
a) O céu é o limite. Estudando as funções	
b) A ideia dos limites das funções	
c) Máximos, Mínimos e mudanças de inflexão	
d) Usando a ideia de limites para construir gráficos e entender as funções	
CAPÍTULO 3. CALCULANDO LIMITES	37
a) Domínio e contradomínio das funções	
b) Descontinuidades das funções: $0/0$; ∞/∞ ; raízes (-n) etc.	
c) Fatorando expressões para eliminar descontinuidades.	
d) Quando nada funciona: L'Hopital nele!	
CAPÍTULO 4. QUE HISTÓRIA É ESTA DE CÁLCULO DIFERENCIAL?	44
a) Newton versus Leibnitz	
b) Se você não pode vencer o problema, divida-o.	
c) A ideia da derivada. Definição geométrica.	
CAPÍTULO 5. AS DERIVADAS SÃO FÁCEIS.	48
a) regras de derivação:	
b) A derivada mais fácil: exponencial	
c) Derivada de uma soma/subtração.	
d) Derivada de um produto/divisão.	
CAPÍTULO 6. INTEGRAL: A FUNÇÃO INVERSA DA DERIVADA	57
a) Funções primitivas	
b) Regras de integração	
c) Integrais definidas	
d) Discussão Final	

CAPÍTULO 1. DICAS FUNDAMENTAIS PARA COMEÇAR A ESTUDAR

Você não pode nem pensar em entender matemática se não tiver à mão, o seguinte conjunto de coisas:

Papel para escrever (montes) e desenhar, lápis e canetas de diversas cores, régua, esquadros, transferidores, compasso, borrachas (isso é importante pois certamente você vai errar um pouquinho). Uma calculadora também é bom hoje em dia (mas lembre-se que a matemática, particularmente o Cálculo, foi desenvolvida antes das calculadoras e portanto é possível passar sem elas, sim). Arrume tudo sobre uma mesa limpa e grande o suficiente para você poder desenhar se precisar. Agora podemos começar.

a) Álgebra: a base de tudo

- (1) Números reais;
- (2) Propriedades importantes dos números reais;
- (3) potenciação, radiciação;
- (4) fatoração, produtos notáveis, binômio de Newton;
- (5) exponenciação, logaritmos.

Na matemática trabalhamos com grandezas de diversas espécies representadas pelos números. Os números, entretanto, são meros símbolos inúteis se não lhes dermos um significado. Esse significado pode até ser abstrato, e frequentemente é, mas sem ele tudo perde sentido. Não conhecer o significado dos símbolos com os quais se está trabalhando é a causa primordial que produz todas as dificuldades de quem estuda matemática. Vamos eliminar esta causa? Vamos conhecer melhor os números com os quais teremos que trabalhar.

1- Números reais.

Há várias espécies de números os quais você já conhece mais ou menos bem desde o ensino médio. Naturais, inteiros, fracionários, reais, imaginários e complexos. Uma boa imagem para representar esta ideia seria a Matriuska, aquela bonequinha russa que você vai abrindo e uma está dentro da outra. Os números foram surgindo ao longo da História à medida que a humanidade foi precisando representar grandezas mais e mais abrangentes. Para simplesmente contar objetos bastavam os números naturais. Os indianos inventaram o zero. A geometria, desde os gregos, já exigia os números fracionários (ou racionais) e foi o próprio Pitágoras que, muito a contragosto, acabou encontrando a necessidade de tratar de números irracionais (ou seja: não definíveis como uma razão entre dois inteiros). A reunião de todos estes tipos forma o conjunto dos números reais. Um estudo formal começaria por considerá-los um a um, começando pelos naturais e tratando-os desde os axiomas fundamentais. Se você tiver interesse neste formalismo, pode encontrar este assunto em qualquer livro de Cálculo ou Análise tradicionais. Nós, entretanto, muito pragmaticamente, vamos começar logo com o que nos interessa mais diretamente: os Reais. Os quais na verdade são os números que geralmente usamos para representar grandezas com as quais lidamos no dia a dia. Esses números,

entretanto, têm certas propriedades que devemos conhecer se quisermos trabalhar bem com eles.

2-Propriedades importantes dos números reais.

Os números reais admitem, por sua natureza, duas operações aritméticas (nossas velhas conhecidas) que chamamos de adição e produto, as quais apresentam certas propriedades:

Associativa: $x+(y+z) = (x+y) + z$ (para a soma) e $x.(y.z) = (x.y).z$ (para o produto)

Comutativa: $x+y = y+x$ (para a soma) e $x.y = y.x$ (para o produto)

Elemento neutro: $x + 0 = x$ (para a soma) e $x.1 = x$ (para o produto)

Simetria: $x + (-x) = 0$

Inversibilidade: $x. x^{-1}=1$

Estas propriedades por vezes nos parecem óbvias, mas podem ser demonstradas formalmente e são características que certas classes numéricas por vezes não possuem o que, então, não as caracteriza como reais. Mas, principalmente, estas propriedades que se aplicam às operações com grandezas numéricas do tipo Real, estendem-se para as expressões algébricas que relacionam estas grandezas. Portanto definem as propriedades algébricas que nos permite operar de forma abstrata com essas grandezas. É daí que vêm, por exemplo, as regras de fatoração, os produtos notáveis e mesmo, indiretamente, as relações entre as funções trigonométricas. Você vai precisar saber tudo isso para operar com o Cálculo Diferencial e Integral. As regras de obtenção de limites, de diferenciação e de integração são todas obtidas a partir destas relações algébricas. Percebeu a importância?

Além disto, estas propriedades têm certas consequências que nos interessam. Por exemplo, elas permitem definir duas novas operações (você já adivinhou quais são?).

Subtração → $x + (-y) = x-y$

Divisão → $x . (y^{-1}) = x/y$

E permitem demonstrar que a divisão por zero **não pode ser definida** entre os reais. Pois:

$$x + x.0 = x.1 + x.0=x.(1+0)=x \rightarrow x + x.0 = x \rightarrow x.0=0$$

Então **se fosse possível dividir por zero**, existiriam x e a (reais) tal que $a/0=x$. Portanto **teríamos $x.0=a$** o que obviamente **contradiz a afirmação de que $x.0=0$ demonstrada aí em cima**. Portanto **a divisão por zero não tem definição entre os reais**. Esse fato tem importância capital. Quando você, mais para a frente, for estudar os limites, vai haver ocasiões em que ficará tentado a dizer que a divisão por zero “é igual a” infinito. Essa é uma das causas de muitas notas baixas em Cálculo I. Mas você só erraria isso se não soubesse as propriedades dos números reais. Agora sabemos que você vai acertar! Estamos ainda no primeiro capítulo e você já acertou um exercício da sua primeira prova de Cálculo I. Viu como Cálculo é fácil?!

3-Potenciação, Radiciação

As operações de potenciação e radiciação são estudadas no nível médio, de modo que a maioria dos estudantes já as conhece quando chegam aos cursos superiores. Entretanto, mesmo nos cursos da área de exatas (Matemática, Engenharias, Ciências etc.), existe uma parcela considerável dos estudantes que não dominam estas técnicas e, por esta razão, enfrentam dificuldades nas disciplinas de Cálculo.

Uma vez que conhecemos a operação produto, é fácil formalizar a potenciação que é na verdade um produto de dois ou mais fatores, quando estes fatores forem iguais. Neste caso, ao invés de repetirmos esse fator várias vezes, representamos o produto pelo símbolo de expoente que indica quantas vezes o produto deve ser executado. Ou seja:

$$\underbrace{x * x * x * x * \dots * x}_{n \text{ vezes}} = x^n$$

agora, como supomos que x é real e sabemos que a potenciação na verdade é uma sucessão de produtos, podemos aplicar as propriedades definidas no item anterior.

Por exemplo podemos escrever:

$$x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5$$

Daí vem a regra, que você aprendeu no ensino médio, que multiplicar potências corresponde a somar os expoentes destas potências.

Consequentemente, aplicando a regra da inversibilidade:

$$x^0 = x^{1-1} = x^1 \cdot x^{-1} = 1$$

$$x^2 \cdot x^{-3} = (x^1 \cdot x^1) \cdot (x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1}) = x^1 \cdot x^1 \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x^{-1} = (x^1 \cdot x^{-1}) \cdot (x^1 \cdot x^{-1}) \cdot x^{-1} = x^{-1}$$

Como o produto goza da propriedade distributiva, podemos aplicar esta regras a expressões algébricas :

$$(x+a)^n = \underbrace{(x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot \dots \cdot (x+a)}_{n \text{ vezes}}$$

$$[(x+a)^n]^m = \underbrace{(x+a)^n \cdot (x+a)^n \cdot (x+a)^n \cdot \dots \cdot (x+a)^n}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{(x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot \dots \cdot (x+a) \cdot (x+a) \cdot (x+a)}_{m \cdot n \text{ vezes}}$$

$$\text{resultando } \rightarrow [(x+a)^n]^m = (x+a)^{n \cdot m},$$

que é outra regra fundamental da Álgebra que você aprendeu lá no ensino médio.

A partir daí dá para deduzir outras regras:

Imaginemos a seguinte expressão algébrica onde n é presumivelmente um número inteiro:

$$(x+a)^n$$

Sabemos que n pode ser a soma (ou subtração) de dois inteiros escolhidos adequadamente. Por exemplo, suponhamos que $n=m-l$. então, usando novamente a regra da inversibilidade:

$$(x+a)^n = (x+a)^m \cdot (x+a)^{-l} = (x+a)^m / (x+a)^l,$$

$$\text{ou } (x+a)^m / (x+a)^l = (x+a)^{m-l}$$

E assim, aplicando-se as propriedades dos reais às expressões algébricas que contêm os números reais, podemos deduzir todas aquelas regras da Álgebra que você aprendeu no ensino médio e que pareciam “mágicas”. Mas mágicas são feitas para a gente não compreender mesmo. Matemática não é mágica. Sabendo como deduzir as regras algébricas a partir das propriedades dos números elas deixam de ser “passes de mágica” e se transformam em ferramentas lógicas de raciocínio. E os problemas de matemática deixam de ser “suplícios incompreensíveis” e passam a ser desafios lógicos interessantes. Aposto que você vai passar a gostar de matemática! E vai achar o Cálculo muito mais fácil!

Continuemos. Uma vez que definimos a potenciação, o próximo passo é definir a radiciação que é a sua operação inversa. Também podemos pensar a radiciação como sendo a operação de potenciação quando o expoente é fracionário e menor que 1. Por exemplo, usando as regras que acabamos de deduzir, podemos escrever:

$$x = x^1 = (x^{1/2}) \cdot (x^{1/2})$$

Assim, $(x^{1/2})$ é um número que elevado ao quadrado (potência 2) resulta em x .

Ou ainda

$$x = x^1 = (x^{1/3}) \cdot (x^{1/3}) \cdot (x^{1/3}) \rightarrow \text{logo, } (x^{1/3})^3 = x.$$

Ou genericamente

$$x = x^1 = \underbrace{(x^{1/n}) \cdot (x^{1/n}) \cdot (x^{1/n}) \cdot (x^{1/n}) \dots \cdot (x^{1/n}) \cdot (x^{1/n})}_{n \text{ vezes}} \rightarrow (x^{1/n})^n = x.$$

Dizemos então que $(x^{1/n})$ é a raiz enésima de x a qual pode ser representada pelo símbolo nosso velho conhecido:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

Como definimos uma raiz enésima como uma potência de expoente fracionário $1/n$, valem para a radiciação todas as regras da potenciação, apenas devemos tomar cuidado de que neste caso, obviamente como sabemos, n não pode ser zero.

Ou seja:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Uma das mais importantes regras da Álgebra são as propriedades de fatoração das expressões algébricas. Essas regras permitem simplificar as expressões o que facilita o cálculo das operações. Essas regras de fatoração são fundamentais para quem estuda Cálculo. No ensino médio essas técnicas são estudadas, mas muito estudantes as esquecem (ou nunca aprenderam). Essa é outra causa de dificuldades nas disciplinas dos cursos superiores. Vamos relembra-las.

A mais básica das técnicas de fatoração é o agrupamento de termos semelhantes. Uma expressão onde uma variável aparece muitas vezes, pode ser simplificada (ou fatorada) se agruparmos os termos de mesma natureza. Vamos explicar usando um exemplo:

Veja a expressão:

$$f = a.x + b.y + c.(x^2 + y)$$

ela pode ser fatorada se fizermos uso das propriedades fundamentais das operações (associativa e comutativa) citadas no item 1 acima, apenas separando ou agrupando, conforme o caso, as operações que envolvem a variável x das operações que envolvem a variável y :

$$f = a.x + c.x^2 + by + cy,$$

ou ainda podemos **por em evidência** os fatores comuns, por exemplo:

$$f = (a + c.x).x + (b+c)y.$$

Via de regra, com estas simples modificações, conseguimos simplificar eficientemente as expressões.

Algumas operações de fatoração são particularmente importantes e ganham o nome de **produtos notáveis**.

Quase todo mundo conhece (e muitos sabem de cor) a regra do **quadrado da soma** que pode ser facilmente demonstrado apenas executando as multiplicações indicadas dos termos entre parênteses:

$$(x+y)^2 = (x+y) \cdot (x+y) = x^2 + 2xy + y^2$$

Menos conhecida, mas também importante, é a regra do produto notável do **culo da soma**:

$$(x+y)^3 = (x+y) \cdot (x+y) \cdot (x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Assim, pode-se obter as regras para $(x+y)^n$, simplesmente multiplicado-a por $(x+y)$:

$$a) (x+y)^3 = (x+y)^2 \cdot (x+y) = (x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$b) (x+y)^4 = (x+y)^3 \cdot (x+y) =$$

$$= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x+y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 + x^3y + 3x^2y^2 + 3xy^3 + y^4 =$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

e assim sucessivamente.

É claro que, para graus maiores, essas operações ficam cada vez mais trabalhosas e mais difíceis de decorar. Assim, para expressões de grau maior (n maior) contamos com as propriedades do

Binômio de Newton (faça uma pesquisa sobre isso) para obter uma regra geral minemônica. Mas você quase nunca vai precisar disso.....

Outra muito importante é:

$$(a+b)*(a-b) = (a^2 - b^2)$$

É fácil demonstrar essas regras, particularmente essa última. Mas tente decorá-las. Vão ser úteis. Se não puder decorar, mantenha essas regrinhas sempre por perto quando for estudar Cálculo. Vão ajudar bastante a convencer você de que Cálculo é fácil!

5.Exponenciação, Logaritmos

Muito mais úteis são as regras algébricas que tratam da expoenciação e de sua inversa, os logaritmos. Eles vão aparecer muito durante o seu curso e mais ainda durante sua vida profissional, pois estão relacionados com os fenômenos de crescimento e decrescimento que são tão importantes nas Ciências. Por exemplo, se você for estudante de Física ou Química no estudo da radioatividade, você verá que os átomos que emitem radiação comportam-se de acordo com uma exponencial decrescente e essa regra de variação define, por exemplo, a vida média daquele elemento. Ou, se você for estudante de Engenharia de Alimentos, aprenderá que os processos de fermentação da uva (para produzir vinho) ou da cevada (para produzir cerveja), ou mesmo da massa dos pães, pode ser descrito por variações exponenciais para calcular o grau alcoólico das bebidas ou o ponto justo para enfiar o pão. Se você estiver estudando Biologia ou Agronomia ou mesmo Medicina vai aprender que o crescimento das populações dos seres vivos (sejam animais ou vegetais) ou a contaminação (ou imunização) de uma população por uma doença contagiosa também seguem uma regra exponencial. Existem muitos outros exemplos em todas as áreas da Ciência, mesmo nas Humanas (tais como Geografia, Sociologia, Economia, etc). Ninguém passa sem a exponencial! E os logaritmos, que representam a forma inversa dessa operação, serão usados justamente para resolver os problemas de tipo exponencial. Viu como são importantes essas operações? Então vamos lá. Mãos à obra:

5.1 Exponenciação.

A exponencial é muito semelhante à potenciação, e também nesse caso, podemos definir previamente uma **base** (que será o número a ser multiplicado várias vezes por si mesmo) e um **expoente** (que representará o quantas vezes essa multiplicação ocorrerá). No caso da exponenciação, entretanto, a base e o expoente “trocam de lado” . Vejamos :

5.1.1 No caso da potenciação, que estudamos no item 3 acima, escrevemos :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{n \text{ vezes}}$$

onde X é a base (variável) e n é a potência que indica que devemos multiplicar o número representado por X por si mesmo n vezes. Neste caso, o expoente pode ser eventualmente fracionário, por exemplo, poderamos escrever $x^{2/3}$ que, como vimos no item 3 acima, representa a raiz cúbica do quadrado de X ou seja:

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$$

5.1.2 No caso da exponenciação escrevemos $\rightarrow b^x$ onde **b** é a base (constante) e **x** representa o número de vezes que devemos multiplicar a base por si mesma. Neste caso também, o expoente **x** pode ser eventualmente fracionário. Por exemplo, poderíamos escrever $x = m/n$ e $b^{m/n}$ que representaria a raiz enésima (**n**) de **b** elevado a (**m**) ou seja:

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$$

5.2 Logarítmos.

Portanto, se você já sabe calcular a operação de potenciação, então também saberá calcular o exponencial. A única diferença é que no caso da potenciação a variável **x** está na base, enquanto na exponenciação a variável **x** está no expoente. Essa sutil diferença, entretanto, tem consequências importantes. A utilização da operação exponencial exigirá mais empenho e por vezes, pode criar dificuldades algébricas. Para resolver isso, é que se utilizam os logarítmos. Esses “seres estranhos” do mundo da matemática nada mais são do que a operação inversa da exponenciação e podemos defini-los assim:

$$\log_b(a) = x$$

onde **b** representa a base, e **a** o argumento da operação inversa da exponencial abaixo tal que:

$$b^x = a$$

Assim, de acordo com essa definição, podemos dizer que **x** é o logaritmo de **a** na base **b** e isso é equivalente a dizer que **b** elevado ao expoente **x** é igual a **a**. Esse artifício, e conhecendo os valores dos logarítmos, nos permite então calcular com facilidade os valores dos exponenciais para quaisquer valores, seja qual for o expoente e seja qual for a base. Antigamente, usavam-se tábuas de logarítmos¹ previamente calculadas para realizar esses cálculos. Os livros mais antigos quase sempre traziam essas tabelas sem as quais não se conseguia trabalhar. Mas atualmente, usamos as calculadoras que informam os logarítmos de qualquer número necessários para fazer os cálculos. Portanto, não se preocupe. A sua calculadora informará tudo para você.

Em geral, usamos os logarítmos em base **10** (porque nosso sistema de numeração é decimal) ou na base neperiana na qual usamos como base o número irracional $e \approx 2,71828....$. É a

¹ As tábuas de logarítmos eram calculadas à mão antigamente, usando algoritmos (receitas de cálculo) que você vai aprender nas disciplinas de Cálculo Numérico. Essas receitas de cálculo estão, hoje em dia, programadas nos computadores modernos de modo que, quando você aperta o botão da sua calculadora, ela realiza quase instantaneamente, seguindo a tal receita, os cálculos necessários que há apenas aproximadamente 100 anos exigia uma sala cheia de calculistas trabalhando por muitos dias. É o progresso...

primeira vez nesse texto que os números irracionais aparecem. Mas eles são muito importantes para nós. Você já conhece muitos deles. São irracionais porque não podem ser escritos como a razão entre dois inteiros. Eles aparecem quando tratamos de grandezas não comensuráveis ou seja quando tentamos medir algo que não seja múltiplo inteiro de uma unidade determinada. Por exemplo o raio (**R**) e o comprimento (**C**) da circunferência de um círculo. Todos sabemos que a relação entre essas duas grandezas depende de um número irracional ou seja $C=2\pi R$. É o nosso velho conhecido $\pi = \pi \approx 3,14159\dots$. Também aparece um número irracional quando calculamos a diagonal do quadrado....você deve se lembrar. É a raiz quadrada de 2 ou $\sqrt{2} \approx 1,4142\dots$. Existem muitos outros que você já deve ter visto por ai, mas agora estamos interessados no tal de número de Napier $e \approx 2,71828\dots$ que serve de base para os logaritmos neperianos (ou naturais). Esse número é muito importante no Cálculo como você vai apreender nos próximos meses. Ele tem propriedades importantes que serão usadas muitas vezes em diversas situações. Então teremos : logaritmos decimais de base **10** e logaritmos naturais de base **e**. Mas, como essas operações são, em última análise, aplicações da potenciação então podemos aplicar as suas propriedades para obter regras algébricas para realizar a mudança de base dos logaritmos e calcular assim o exponencial de qualquer base. A sua definição depende o cálculo de um limite, coisa que ainda não vimos. Então voltaremos a ele mais tarde.

Pode ser até provável que você tenha apreendido essas regras no ensino médio, mas provavelmente seu professor só deu as regras e pediu que você as decorasse. É provável que você tenha decorado, mas já deve ter esquecido..... Mas você vai ter que usar essas regras no curso de cálculo, sem dúvida. Sem saber como usar as regras básicas dos logaritmos seria impossível resolver as provas de Cálculo I, por exemplo. Não podemos correr este risco, né? Então vamos rever estas regras com outros olhos, para entendê-las e, assim, não precisar mais decorá-las. Pegue seu livro do ensino médio e recorde essas regras, pois você vai precisar delas.

Mas essa lição você já pode fazer sozinho. Por exemplo, prove a primeira propriedade dos logaritmos : o logaritmo de um produto é igual á soma dos logaritmos das partes somadas. Ou seja:

Vamos supor, por premissa, 2 números Reais **m** e **n** e uma base **a** também Real quaisquer com exceção do zero, então:

$$\log_a (m.n) = \log_a(m) + \log_a (n)$$

Perceba que eu mudei as letras usadas na álgebra como base (**a**) e expoentes (**m** e **n**) para fazer você notar que em matemática as letras são mudas, ou seja elas nao dizem nada...apenas representam grandezas dos diversos tipos. Você pode trocá-las como quiser. Então, podemos provar a propriedade partindo da definição de logaritmo:

$$\log_a(m) =x \rightarrow a^x=m \quad .$$

Alguém já havia dito que você seria capaz de demonstrar uma propriedade matemática e portanto não precisará decorá-la? Pois eu digo, você pode, sim.

Suponhamos números reais (pressupostos diferentes de zero) . Os números **m,n** e **a** podem, em princípio, ser escritos tal que:

$$m= a^x , n=a^y \text{ e } m.n=a^z ,$$

pois sempre existirão os expoentes **X**, **Y** e **Z** que satisfaçam essas expressões. (Pense sobre essa afirmação até entendê-la bem.)

Calculemos então os logaritmos correspondentes :

$$m = a^x \quad \rightarrow \log_a m = x$$

$$n = a^y \quad \rightarrow \log_a n = y$$

$$m \cdot n = a^z \quad \rightarrow \log_a (m \cdot n) = z$$

Temos então, como $m \cdot n = a^z \rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$

Logo, podemos escrever: $\rightarrow a^z = a^{(x+y)}$,

portanto $z = x + y$. Então , substituindo nossas premissas, obtemos:

Propriedade 1 $\rightarrow \log (m \cdot n) = \log(m) + \log(n)$

ou seja, acabamos de demonstrar a propriedade principal dos logaritmos : **o logaritmo de um produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.** Viu como é fácil?

Você não achou fácil? Não se aborreça. É assim mesmo. Demora um pouco para a gente se acostumar com a linguagem da matemática. Então insista. Leia novamente a demonstração repetidas vezes até que você entenda. Você vai conseguir e será uma vitória. Você vai ficar muito satisfeito. Sua autoconfiança vai aumentar.

Agora, não precisa mais decorar a regra, não. Você já sabe demonstrá-la. Só precisa de um pouco de lógica e persistência (em matemática você não pode desistir, viu?).

Agora vou lhe dar uma tarefa. Deduza as demais propriedades dos logaritmos. (Você tem que dar uma olhada nos livros de Álgebra do ensino médio para achá-las) . Você vai ter que fazer isso frequentemente. Os livros do ensino médio serão úteis. Você vai ter que voltar a eles muitas vezes. Você é capaz, sim. Em cada caso, parta sempre das propriedades anteriormente demonstradas. Por exemplo, usando a propriedade 1 deduza a propriedade 2:

Propriedade 2 $\rightarrow \log_a(m^b) = b \cdot \log_a m$

Tenho certeza que você vai conseguir! E saiba que, a cada demonstração que você obtiver, sua auto estima vai crescer um pouquinho . Você aprenderá que essas pequenas vitórias que o estudo da Matemática vai lhe proporcionar, vão ser muito gratificantes. E compreenderá progressivamente que, ao contrário do que seus professores de Matemática do ensino médio e dos primeiros anos da Universidade lhe fizeram pensar, você é um ser humano muito inteligente e capaz de entender as teorias Matemáticas. A Álgebra, ao contrário do que você aprendeu no colégio, não é composta de regras mágicas incompreensíveis às quais ficamos reféns ou escravos! São apenas expressões de uma linguagem lógica que podemos entender se fizermos algum esforço. Assim como podemos aprender as línguas estrangeiras. As Ciências e, particularmente a Matemática, não foram criadas por seres alienígenas extraterrestres. Foram propostas,

desenvolvidas e descobertas por seres humanos como você. Essas sabedorias são patrimônio da Humanidade. Portanto você é perfeitamente capaz e digno de entendê-las. Certamente. Mas assim como com as línguas estrangeiras, não basta ler os livros. É preciso usar a língua conversando, lendo livros, escrevendo, ensinando as mais novos, errando e corrigindo. Pacientemente... Então mãos á obra. Demonstre agora as demais propriedades dos logaritmos. Se tiver dificuldades, o que é bastante normal, pergunte aos colegas, aos professores, procure nos seus livros ou na internet. Acredite em você. Eu acredito. Quando se sentir pronto, retorne para irmos para o item (b) da Geometria. Você vai aprender que os Gregos da Geometria falam grego mas mesmo assim você está pronto para entender o que eles dizem.

b) Geometria: Ah estes gregos!

A geometria começou a ser desenvolvida há milênios quando os povos antigos (do Egito, da Babilônia e da Índia) começaram a resolver problemas de construção de edifícios e templos, de agrimensura para organizar a posse das terras e de posicionamento dos astros no céu para marcar as estações do ano que eram importantes para a agricultura. Portanto, ao contrário do que poderia parecer, o estudo da geometria decorre de problemas práticos. E é assim até hoje, como você vai aprender nos próximos meses. Mas a Geometria formal, como entendemos hoje, surgiu mais tarde, na Grécia. O século V AC foi pródigo em matemáticos importantes que tiveram papéis fundamentais na fundação da Matemática. Três deles devem ser citados;

O tal do Tales. Eis aí um cara importante. Ele nasceu na Grécia no ano de 623 A.C e viveu até 548 AC. Na cidade de Mileto na Ásia Menor numa região que atualmente pertence à Turquia. Consta que ele foi o primeiro filósofo grego. Ele é conhecido como filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo. Ou seja; Tales era mesmo o tal.

Ele fez as primeiras considerações sobre a matéria que considerava composta de elementos e a água como elemento primordial. E foi capaz de entender os eclipses após ter compreendido que a Lua era iluminada pela luz do Sol e, com essas ideias, previu o eclipse solar que iria acontecer no ano de 585 AC. Já imaginou!? Este feito, hoje até corriqueiro, deve ter sido uma fantástica demonstração de poder intelectual. Ele previu com precisão um evento raro que aconteceria nos céus (efeméride). Mas a sua maior contribuição foi nos estudos das grandezas métricas relacionadas aos ângulos. Essas relações foram fundamentais para o desenvolvimento da ciência que, ao longo dos séculos, permitiu que outros matemáticos fossem criando as regras que resultaram no que hoje se chama de Geometria. Tales provou que:

- 1) Nos triângulos isósceles os ângulos da base são iguais;**
- 2) Dois triângulos que tem dois ângulos correspondentes e ao menos um dos lados iguais, então estes triângulos são iguais;**
- 3) Uma reta que liga dois pontos diametralmente opostos de um círculo determina duas partes iguais desse círculo;**
- 5) As retas que ligam um ponto C qualquer da circunferência às duas extremidades A e B de um diâmetro qualquer resultam sempre num triângulo retângulo em C;**

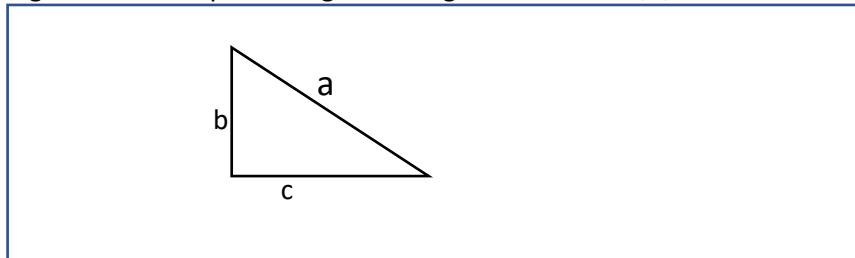
- 6) A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a soma de dois ângulos retos (180 graus);
- 7) Os ângulos opostos de duas retas que se cortam são iguais.
- 8) Entre dois triângulos semelhantes, as razões entre os lados correspondentes têm o mesmo valor

O tal do Pitágoras. Partir dessas proposições de Tales, a Geometria foi se desenvolvendo com os trabalhos de Pitágoras, ainda no século 5 AC. Você certamente conhece o famoso teorema de Pitágoras que relaciona os quadrados dos lados de um triângulo retângulo. Eis aí outra equação que seu professor do ensino médio mandou você decorar sem explicar porque. É mais uma das muitas fórmulas que estão lá dentro da sua memória, flutuando num espaço meio caótico cheio de expressões algébricas que, aparentemente, servem apenas para resolver os exercícios das provas. Você decorou, resolveu as provas, tirou até boas notas e depois nem ligou mais pra fórmula e provavelmente a esqueceu, deixando o tal Teorema de Pitágoras perdido e flutuando lá naquela confusão que é a sua cuca..... Será que você lembra? Como é mesmo?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Lembrou?..... acho até que sim, mas falta saber quem são **a**, **b** e **c**, né? Vou ajudar : são os lados de um triângulo retângulo. O lado maior (ou hipotenusa. Ah, esses gregos!...) está representado pela letra **a** e os lados menores (ou catetos) são representados por **b** e **c**.

Figura 1. Um simples triângulo retângulo com lados a,b,c



Própria autoria. (após Pitágoras)

Essa proposição aparentemente simples, contém segredos importantes que foram utilizados desde aquela época até os dias de hoje, pois representa numericamente características do espaço e em última análise do Universo. Todas as Ciências exatas, em alguma circunstância, devem utilizar esse teorema. Por exemplo, nas Engenharias Civil e Mecânica, obviamente, pois as estruturas das construções e das máquinas estão cheias de ângulos retos. Nas engenharias Elétrica e Eletrônica pois os sinais eletromagnéticos comportam-se periodicamente seguindo as relações que surgem, em última análise, das proporções entre os ângulos e os lados de um triângulo retângulo. Na Física no que diz respeito à Óptica nas interfaces que a luz encontra quando atravessa a fronteira entre dois meios materiais diferentes (por exemplo entre o ar e o vidro ou entre o ar e a água onde ocorrem refrações angulares). Ainda na Física, mas também na Química, na descrição das formas que aparecem quando os átomos e moléculas se agrupam ou se ordenam geometricamente para criar as estruturas dos cristais. Na Matemática mesmo e na Astronomia, na descrição das cônicas que são curvas particularmente interessantes (parábola, elipse, hiperboles..e muitas outras) que descrevem as órbitas planetárias que você aprenderá na disciplina de Cálculo II e na disciplina de Mecânica mais pra frente. Daria para citar

muitos outros exemplos em muitas outras áreas, mas deixo para você buscar. Mas o importante é saber que aquela fórmula chata que o seu professor do ensino médio te mostrou vai ser usada muitas vezes no seu curso universitário. Você precisa entendê-la. Isso vai ajudá-lo a organizar aquela confusão algébrica que se formou na sua cuca. Vamos lá, lembre-se: Cálculo é fácil.

Vamos aproveitar a demonstração do teorema de Pitágoras treinar a interpretação de enunciados matemáticos mais intrincados. Você vai encontrar coisas deste tipo nas suas próximas disciplinas. Não saber interpretar esses enunciados é a causa de dificuldades que o estudantes enfrentam, principalmente nos primeiros anos. Vamos treinar?

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras você pode fazer o seguinte:

Considere um triângulo retângulo cujos vértices são os pontos A B e C. Considere ainda que o ponto A seja o vértice correspondente ao ângulo reto. Portanto o ponto A é oposto à hipotenusa. Deste modo resulta que os catetos do do triângulo são $c=AB$ e $b=AC$ e a hipotenusa será $BC=a$. Trace agora a altura do triângulo passando pelo ponto A. Essa altura determina na hipotenusa um ponto D. O segmento de reta AD divide o triângulo original em outros dois triângulos retângulos menores mas, de acordo com a proposição 2 de Tales, semelhantes ao triângulo original. Os vértices destes dois triângulos são: ADB e ADC . Utilizando a proposição 8 de Tales (ali em cima) sabe-se que as razões entre os lados correspondente de triângulos semelhantes são iguais.

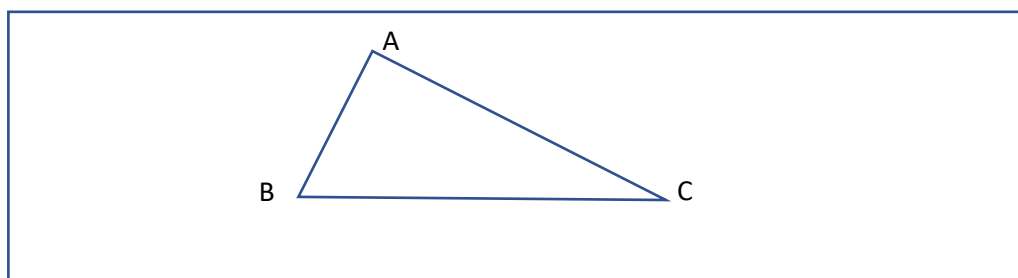
Esse enunciado é bem intrincado. De modo que o exercício pedido parece à primeira vista muito difícil. Muitos desistiram sem nem tentar. Mas você já começou a entender que Cálculo é fácil e já ganhou confiança após fazer as demonstrações com os logaritmos do item anterior. Então, sem dúvida, vai ter coragem de fazer também esta importante demonstração geométrica. Não se preocupe.....eu vou junto com você para apoiar.

Você deve seguir literalmente cada parte do enunciado e desenhar no seu papel , com capricho, todas as ordens ali descritas. Se não fizer isso, dificilmente vai conseguir destrinçar esse problema. O mesmo procedimento você vai usar sempre, em todas as disciplinas. Vamos lá, leia o enunciado de novo e vá fazendo aos poucos o que ele prescreve:

- Considere um triângulo retângulo cujos vértices são os pontos A B e C. Considere ainda que o ponto A seja o vértice correspondente ao ângulo reto. Portanto o ponto A é oposto à hipotenusa. Deste modo resulta que os catetos do do triângulo são $c=AB$ e $b=AC$ e a hipotenusa será $BC=a$.

Então, baseado nesse enunciado, desenhe a figura:

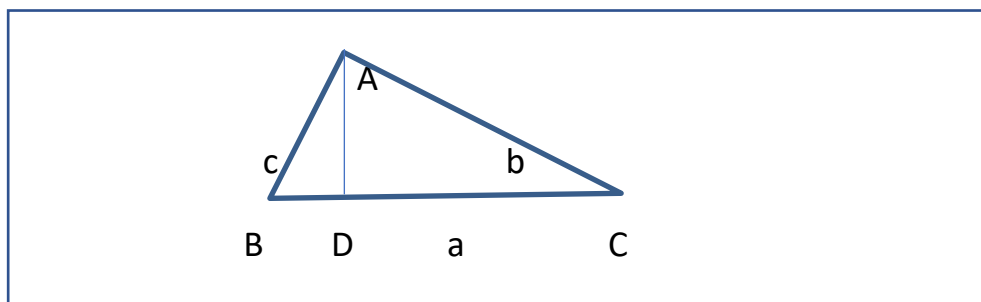
Figura 2. O triângulo com vértices A,B,C



Propria autoria (após Pitágoras)

Trace agora a altura do triângulo passando pelo ponto A. Essa altura determina na hipotenusa um ponto D. O segmento de reta AD divide o triângulo original em outros dois triângulos retângulos menores mas, de acordo com a proposição 2 de Tales, semelhantes ao triângulo original. Os vértices destes dois triângulos são: A,D e B e A,D e C.

Figura 3 . Dividindo o triângulo retângulo em dois



Própria autoria.

- b) Utilizando a proposição 8 de Tales (ali em cima) sabe-se que as razões entre os lados correspondente de triângulos semelhantes são iguais.

Agora que você transformou o enunciado numa figura compreensível (sim, as figuras devem servir para isso: simplificar as coisas), podemos escrever:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} \gg \text{baseados na regra 8 do Tales e,}$$

$$\text{então multiplicando em cruz} \gg (AB)^2 = (BD) \cdot (BC)$$

e analogamente,

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC} \gg (AC)^2 = (BC) \cdot (CD)$$

Então, somando as duas equações vem:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BD) \cdot (BC) + (BC) \cdot (CD)$$

Ou, colocando **(BC)** em evidência $\rightarrow (AB)^2 + (AC)^2 = BC \cdot (BD + CD)$

Mas, observando a figura (vá lá olhar, cara), vemos que a soma $(BD + CD) = BC$, portanto pode-se escrever:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$$

como **(AB)** e **(AC)** são os catetos e **(BC)** é a hipotenusa, então o Teorema de Pitágoras fica demonstrado.

Você conseguiu! Talvez tenha sido difícil e você tenha precisado da minha ajuda, mas o importante é que no fim você entendeu. Você pode encontrar muitas outras formas de

demonstrar esse teorema. Procure na internet. Acredite, isso vai fazer diferença para você. Repita os passos da demonstração até entendê-la perfeitamente. Ao longo do seu curso, os professores vão propor inúmeros enunciados de exercícios das mais diversas áreas. Você sempre vai usar este método: vai destrinchando o texto e tentando montar um esquema geométrico ou gráfico correspondente ao enunciado (às vezes eles serão bem complicados). Assim, parte por parte, vai resolvendo o problema. Você não terá mais que decorar uma regra pronta para resolver um determinado problema, mas sim ir raciocinando, em função de uma teoria que você conheça previamente. Isso fará com que você vá se tornando paulatinamente capaz de resolver qualquer problema (não só os de matemática, mas sim de qualquer área do seu curso). É essa capacidade que vai fazer você se tornar, ao longo dos próximos anos, um profissional universitário. As disciplinas básicas de matemática servem justamente para treinar você nesse aspecto. Seguindo essa forma de raciocínio, você logo vai perceber que o Cálculo é fácil.

Você vai fazer assim em todos os problemas que encontrar ao longo do seu curso. Calmamente, interprete o enunciado e utilize suas informações anteriores para ir trabalhando com as grandezas em jogo, até obter um resultado satisfatório. Se não conseguir na primeira, lembre-se que todo mundo é assim. Os 5% de inspiração que você precisa para obter sucesso, só chegam após você ter gastado 95% de transpiração. Quem disse isso? Um cara chamado Albert Einstein. Se para ele que era um gênio valia essa máxima, que dirá para nós que somos simples mortais. Temos que transpirar um bocado. Mas agora você já sabe que dá certo e que no final você vai ficar muito contente de poder se comparar com muito respeito e modéstia a gente como Pitágoras e Einstein e Tales de Mileto. Eles também suaram um bocado.

O tal do Euclides.

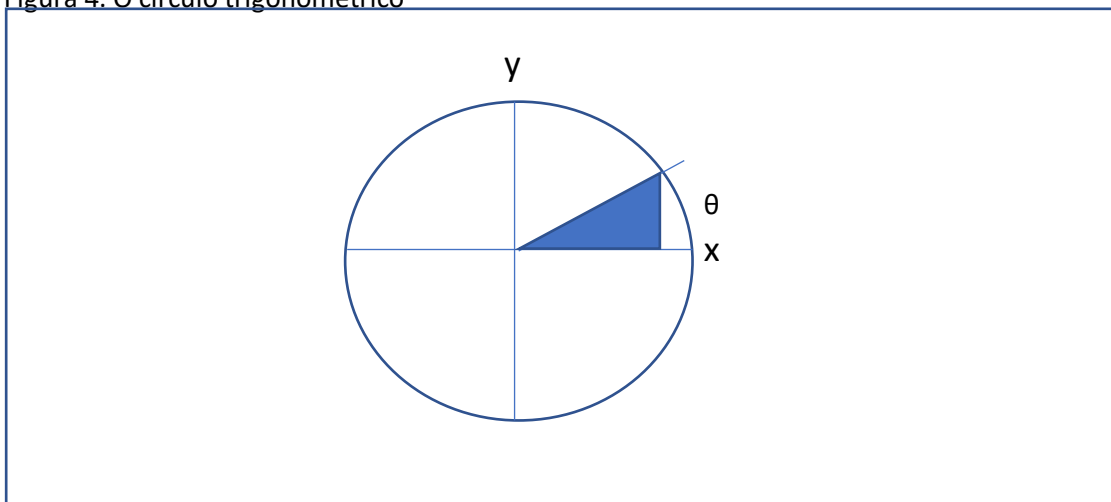
Muitos anos após Tales e Pitágoras surgiu um outro matemático tao importante quanto eles. Euclides de Alexandria, na Grécia. Sua obra **Os Elementos** é considerada a maior influência sobre a mente humana, ao longo dos séculos, só perdendo para a Bíblia. Esta obra sistematiza todo o conhecimento da Humanidade sobre as noções de espaço e das formas geométricas na sua época. A influência de Euclides permanece até hoje, estando impregnada em diversos aspectos da nossa descrição mais moderna da realidade (cosmos). Sua forma de organizar o pensamento e de raciocinar através de deduções lógicas a partir de axiomas (proposições) e provas (teoremas) formalmente e rigorosamente demonstrados permanece até hoje e constitui parte importante do Método Científico. A Geometria euclidiana é a base da descrição do espaço desenvolvida por Descartes a qual, por sua vez, é a base da matemática em que se criou o Cálculo Diferencial e Integral. Somente no final do século dezenove é que começaram a surgir novas teorias de geometrias não euclidianas, criadas para descrever o espaço do ponto de vista da Relatividade de Einstein. Mas ainda hoje, apesar disto continuamos a usar as ideias e os métodos de raciocínio do mestre Euclides.

c) Trigonometria: sem ela não se vive....

Você já viu que o tal de Tales estabeleceu que as relações entre os **lados** dos triângulos apresentam certas propriedades. Estas propriedades se aplicam também em relação aos **ângulos** dos triângulos. A primeira aplicação desse fato foi descoberta por Pitágoras, como vimos. Mas podemos generalizar para triângulos de qualquer espécie e não só os que possuem um ângulo reto. É daí que vêm os conceitos de senos, cossenos, tangentes e seus inversos. Por

exemplo; **Imagine uma circunferência de raio 1** com centro na origem do sistema de coordenadas (x, y) e desenhe um triângulo inserido nesta circunferência de modo que a hipotenusa seja um raio e os catetos sejam as projeções deste raio nos eixos x e y. Faça o desenho de modo que o ângulo reto esteja sobre o eixo x. Faça esta descrição para mais uma vez você verificar que é mesmo capaz de ler um enunciado intrincado e construir aquilo que o enunciado diz. Você vai obter uma figura assim:

Figura 4. O círculo trigonométrico



Própria autoria

então, se calcularmos a razão entre um cateto oposto ao ângulo θ e a hipotenusa do triângulo, obtemos um número que será sempre constante se o ângulo entre esses lados for o mesmo. A este número chamaremos seno. Idem para a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa cujo resultado chamaremos cosseno. Essas duas grandezas, derivadas das proposições de Tales, são a base da trigonometria. Por outro lado, como são calculadas a partir de um triângulo retângulo, devem obedecer ao Teorema de Pitágoras e, portanto, resulta:

$$\mathbf{\text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta)=1}$$

Essa é a propriedade fundamental da trigonometria, que você talvez já conheça. E o interessante dela é que é válida para qualquer ângulo. Ela será útil para você em todo seu curso, seja ele qual for. Existem diversas outras propriedades da trigonometria e você as encontra nos livros de cálculo em geral. Não precisa decorá-las não. Basta entendê-las e saber os livros onde procurá-las. Elas servem para simplificar expressões trigonométricas e serão muito úteis quando você estiver estudando as derivadas e as integrais. Duas outras propriedades são muito importantes: A lei dos senos e a lei dos cossenos. A lei dos senos relaciona as razões entre os senos de ângulos e os lados opostos dentro de um triângulo. Assim, num triângulo qualquer cujos lados são a , b e c com ângulos α , β e θ , teremos:

Lei dos senos. $\rightarrow \frac{a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{\text{sen}(\theta)}$

Você vai usar bastante essas relações nos exercícios de Mecânica que tratam do equilíbrio dos corpos. E de Óptica que tratam das reflexões da luz.

Já a lei dos cossenos é uma extensão do teorema de Pitágoras para caso de triângulos que não sejam retos (afinal a vida não é feita só de ângulos retos, não é mesmo?).

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \\ \text{Lei dos cossenos } \rightarrow b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

Também existem duas outras expressões importantes que você precisa conhecer. São as fórmulas do seno e cosseno da soma (e da diferença) de dois ângulos.

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$

Essas você deve lembrar de cor, porque seu professor do ensino médio (aquele engraçadinho) associou essas fórmulas com o poema Canção do Exílio de Gonçalves Dias: “minha terra tem palmeiras onde canta o sabiá.... seno(a) cosseno(b) + seno (b) cosseno(a)”.

Preste atenção nas inversões de sinal no caso do cosseno da soma e diferença. Um exercício bacana para você se aperfeiçoar é provar essas duas fórmulas. Tente.

CAPÍTULO 2 O CÉU É O LIMITE. ESTUDANDO AS FUNÇÕES.

Funções importantes que você não pode não conhecer! E como fazer seus gráficos.

Agora que já falamos das coisas básicas e que você já está um pouco mais tranquilo, vamos começar a tratar dos pontos principais das disciplinas de Cálculo. O seu professor quase certamente vai começar falando de funções, pois serão esses entes matemáticos o objeto do seu trabalho em todas as disciplinas de matemática daqui em diante. Por isso, é muito importante você ter o conceito de função bem estabelecido.

Funções são apenas ordens de cálculo, ou seja: uma receita para fazer contas. Você dirá: só isso? Eu então respondo, sim, só isso. Essas ordens, porém, são escritas em uma linguagem chamada Álgebra, que você tem que conhecer. A Álgebra permite descrever como você deve fazer para, a partir de uma variável² (que normalmente chamamos de x), calcular uma outra variável (que normalmente chamamos de y (você já estudou isso no ensino médio). Por exemplo:

$y=2x$ \implies a ordem de cálculo é: multiplique por 2 o número representado por x

$y= ax^2 + bx +c$ \implies ordem de cálculo é: eleve x ao quadrado e multiplique por a , depois multiplique x por b e some os dois resultados, por fim, some com c . Então guarde esse resultado em y .

Como fica óbvio, é muito mais conciso escrever a ordem de cálculo na linguagem matemática do que em português (ou em outra língua qualquer). Aliás, é interessante saber que foram os árabes (que foram matemáticos importantes na época da Antiguidade) que perceberam que a linguagem cotidiana não era muito adequada para descrever as operações da matemática. Imagine só aquelas duas frases ali em cima escritas em árabe...Seria horrível, né? mesmo os árabes achavam isso. Por isso eles inventaram uma "linguagem" mais adequada a qual chamavam de "Al jabr" que significa..... O Cálculo! Com o tempo a palavra se transformou em Álgebra³. Portanto, as funções são simplesmente ordens de cálculo escritas na linguagem da matemática. Que sorte temos, hein? Não precisaremos estudar árabe, né?

Sabemos que as funções funcionam como ordens de cálculo escritas na linguagem da Matemática. Mas para que elas servem? As funções indicam como muda o comportamento de uma certa variável. No âmbito da Matemática são entidades abstratas que se relacionam de acordo com as regras da Álgebra que você já conhece um pouco, desde o ensino médio. Mas o importante é que as funções servem muito bem para descrever o comportamento de grandezas relacionadas com os mais diversos aspectos da realidade. A Física, a Química, a Biologia, a Geologia, a Astronomia, a Computação, as Engenharias (todas), a Medicina, a Economia, a Administração, a Estatística e, obviamente, a Matemática etc se apoiam em funções para descrever os seus fenômenos de interesse. Assim, se você pretende exercer qualquer uma destas profissões (ou ainda muitas outras), você tem que saber analisar as funções que descrevem os fenômenos. Quer exemplos? Na Física a atração gravitacional entre os corpos é descrita pela Lei de Newton que você já conhece desde o ensino médio. Essa lei é uma função que relaciona as grandezas envolvidas nesta atração gravitacional. Se você for trabalhar na NASA (só como exemplo) e precisar mandar um foguete para a Lua, vai ter que usar essa função. E se você for um químico ou farmacêutico e trabalhar na Bayer (só como exemplo), vai ter que usar

² (em Cálculo II você vai aprender como tratar mais de uma variável simultaneamente!)

³ Descubra o que têm em comum a Álgebra, o Alfinete, a Almofada e a Alface

as funções da estequiometria para projetar as substâncias que compõem os seus medicamentos. Se você for biólogo ou médico e trabalhar no Hospital Albert Einstein (só como exemplo), precisará entender o código genético do DNA das células dos seres vivos (plantas, animais e seres humanos) que estarão sob sua análise. Esse código genético é uma espécie de função matemática regida pela lei das probabilidades. Você vai ser economista ou contabilista? Vai trabalhar (só como exemplo) no Banco Central do Brasil? Então dê uma olhada nas funções que regem o mercado de capitais. Ou ainda, veja lá as funções da matemática financeira com as quais você vai ter que trabalhar, queira ou não. Na Engenharia, então, nem se fala: Você quer ser engenheiro mecânico ou aeronáutico e quer trabalhar (só como exemplo) na Boeing ou na Embraer? Vai projetar os novos aviões e desenvolver modelos para simular o comportamento mecânico dos motores ou das asas ou das turbinas dos jatos? Obviamente terá que trabalhar com funções. Quer ser engenheiro Químico ou de Materiais? Vai trabalhar com as funções de onda dos átomos e moléculas e com as regras matemáticas que regem a formação geométrica molecular dos cristais e dos metais. Engenheiro Metalúrgico, trabalhando (só como exemplo) na ALCOA? Tem que saber as técnicas matemáticas para sintetizar as ligas metálicas: mais funções, portanto. Engenheiro de Alimentos (só como exemplo) trabalhando na Nestle? Pode parecer que não, mas você terá que entender muito de termodinâmica para entender e controlar os processos de preparação industrial dos alimentos que sempre envolvem aquecimento, refrigeração, pasteurização e fermentação etc. A termodinâmica, que é toda feita de funções, está para o engenheiro de alimentos assim como o estetoscópio para os médicos. Não pode sair da sua cabeça (ou pescoço, he,he,he). Engenheiro de Biosistemas trabalhando (só como exemplo) na Embrapa? Biosistemas são regidos pelas equações fractais, entre tantas outras. Enfim, você não pode passar sem as funções da matemática, qualquer que seja a sua futura profissão. E você precisará, obviamente, saber trabalhar bem com elas. Saiba, porém, que todos esses exemplos de trabalho que eu dei ai em cima, não são fictícios. Muitos dos meus ex-alunos e ex-alunas ocupam atualmente cargos nessas instituições e muitas outras tão importante quanto a NASA, a General Motors, a Nestle, a Monsanto, O Banco Central, o banco Itaú, a Embrapa. Portanto, se você acreditar em mim, pode ter certeza e sonhar que você também poderá conseguir um emprego destes após a sua formatura. Então, prepare-se adequadamente para não tropeçar logo de cara. A primeira vez que você vai precisar das funções é logo na disciplina de Cálculo I. Se você se preparar um pouco (eu vou ajudar, claro), terá até facilidade para entender as aulas de análise matemática que o seu professor de Cálculo vai passar logo de cara. Fazendo assim, você vai dizer: Cálculo é fácil!

Agora chega de bla,bla,bla. Você já sabe que trabalhar com funções é fundamental. Vamos a elas.

Você certamente já estudou sobre funções no ensino médio. Seu professor definiu as funções e criou uns esquemas gráficos para explicar sobre os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função. E além disso, definiu os tipos de funções: afim, injetora, bijetora, sobrejetora, exponencial, identidade, polinomial, trigonométrica etc. Dê uma olhada no seu livro do ensino médio para recordar essa explicação mais formal. E vamos nos dedicar àquelas que vamos usar nas disciplinas de Cálculo.

Podemos citar alguns exemplos de função:

Polinômios

⇒ São sequências do tipo: $y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$.

ou ainda mais concisamente:

$$y = \sum_{i=0}^n a_i * x^i$$

O símbolo \sum , que significa somatória, indica que os termos indexados em i devem ser somados para todos os valores de i desde 0 até n . Essa ordem de cálculo geral permite obter todas as funções polinomiais que nos interessam, ou seja;

a função constante ($n=0$) $\implies y = a_0. x^0 = a_0$

a função linear ($n=1$) $\implies y = a_0 + a_1X$

a função quadrática ($n=2$) $\implies y = a_0 + a_1X + a_2X^2$

a função cúbica ($n=3$) $\implies y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$, e assim por diante.

Você achou estranho? Então pare e tente destrinçar esse enigma. Procure entender como os parâmetros que estão indicados no símbolo da somatória se transformam nos índices e nos expoentes das funções aí em cima. Aproveite e escreva as funções para $n=4$ e $n=5$. Você deveria ter aprendido isso no ensino médio. Se não aprendeu, paciência, mas resolva esse problema agora. Não deixe para a véspera da primeira prova de Cálculo I, porque aí não dá. Se você deixar passar essa chance de aprender, não vá dizer depois que o seu professor de Cálculo é um chato.... talvez ele até seja mesmo, mas a culpa da sua nota baixa não será dele. Por isso, mãos a obra; estude bem os polinômios que eles serão importantes parceiros para construir a sua vitória. Eu tenho certeza que você conseguirá.

Você já sabe que os gráficos das funções são muito importantes pois nos dão uma imagem que ajuda a entendê-las melhor e, como consequência, compreender bem o comportamento dos fenômenos que elas representam. Mas eu sei que muitos estudantes têm dificuldades para construir os gráficos. Durante o curso de Cálculo, você vai aprender técnicas de análise matemática que lhe ajudarão neste aspecto. Mas é importante que você já chegue nessas aulas, sabendo as noções básicas da nomografia (que é a técnica de construir gráficos).

Então vamos lá. Você deve começar um gráfico construindo os seus eixos de referência que devem ser perpendiculares entre si. (muitos estudantes chegam na faculdade sem saber isso, creiam). Analise o espaço que você tem disponível para fazer o gráfico. Uma página? Meia página? Seja lá como for, seu gráfico deve aproveitar ao máximo esse espaço, pois assim você poderá representar bem os detalhes do seu cálculo ou função. Não construa gráficos muito pequenos pois assim eles não conseguirão cumprir a sua missão que é criar uma imagem clara e de fácil entendimento.

Próximo passo, escolher a escala. Veja qual é o maior valor e qual é o menor valor que você tem que representar, tanto no eixo horizontal (que tradicionalmente chamamos de abcissas ou eixo x) quanto no eixo vertical (que tradicionalmente chamamos de ordenadas ou eixo y). Essas letras podem mudar à vontade (lembre-se que em matemática as letras são mudas).

A diferença entre esses dois valores (maior e menor) define a escala do seu gráfico. Assim, o espaço que você tem disponível no papel deverá representar esse intervalo numérico. Com essa providência, você fica seguro que a sua função representada graficamente vai ocupar todo o espaço disponível do seu papel e, portanto, mostrará todos os detalhes daquele intervalo escolhido. Seu gráfico vai ficar bonito (e correto) e seu professor (quer seja de Cálculo, de Física,

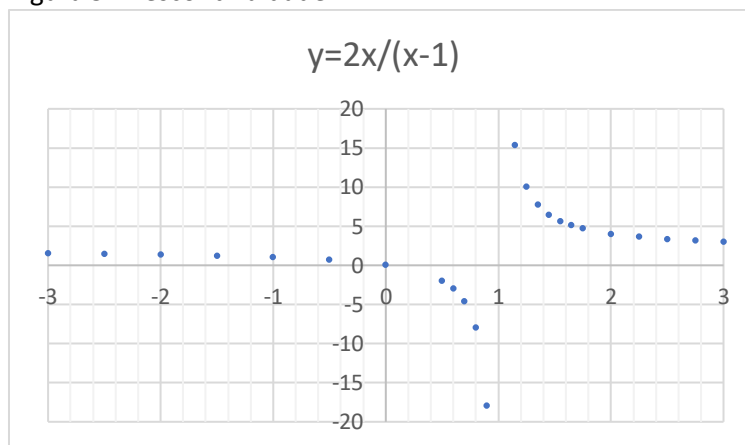
de Termodinâmica, de Processos Industriais, Operações Unitárias, Mecânica, etc.) vai gostar e lhe dará uma boa nota (que você vai mesmo merecer).

Mas ainda não acabamos. Uma vez escolhida a escala, agora é só dispor os pontos da sua função. Você vai ter que construir uma tabela inicialmente. A famosa tabela X, Y que seu professor do ensino médio deve ter ensinado. Mas cuidado! Tem umas armadilhas nesse processo. Muitas funções têm descontinuidades que são pontos ou intervalos onde a função não está definida. Por exemplo, se a sua função tiver uma fração, o denominador não pode ser zero pois já sabemos que é impossível dividir por zero. Então, no intervalo em torno deste ponto a tal função vai ter um comportamento bem característico (a tal descontinuidade) que você tem que conhecer. Por exemplo, suponha a seguinte função:

$$y = \frac{2x}{(x-1)}$$

Quando o valor da variável x se aproxima de 1, o denominador se aproxima de zero e, portanto, a função não estará definida neste ponto ($x=1$). Chamamos esse ponto de descontinuidade da função. Não dá para colocar esse ponto no gráfico. Mas sabemos que quando o denominador é pequeno o resultado da fração é grande e desse conhecimento podemos deduzir que, próximo de 1, a função terá valores muito grandes. Mas olhando bem, quando $x>1$ o denominador será positivo e quando $x<1$ será negativo. O gráfico, supondo o intervalo $-3 < x < +3$, então será:

Figura 5. Descontinuidade



Própria Autoria

É fácil ver que se você não considerar a descontinuidade, o seu gráfico não seria capaz de representar bem a função. Tome cuidado. Nas aulas de cálculo você vai aprender a fazer isso mais precisamente. Voltaremos a esse tema mais pra frente.

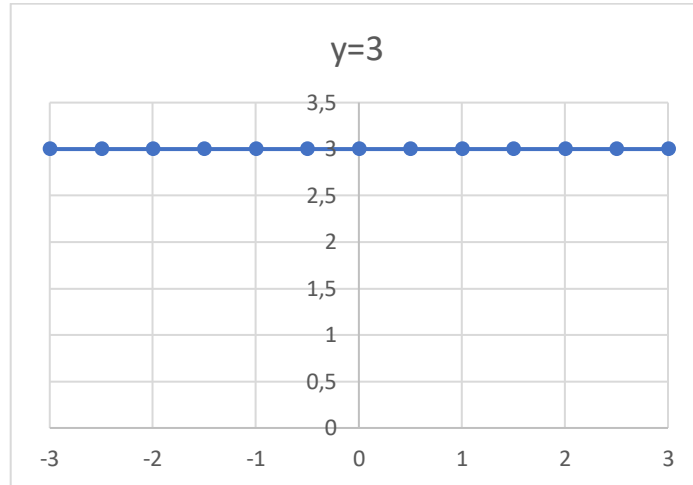
Você precisa conhecer de cor os gráficos das principais funções. Isso vai ser importante e facilitará bastante a sua vida durante as aulas de cálculo.

Então vamos fazer os gráficos dos principais polinômios (que estudamos ali em cima) .

1. a função constante ($n=0$) $\implies y = a_0x^0$

é uma linha paralela ao eixo X

Figura 6. Função Constante

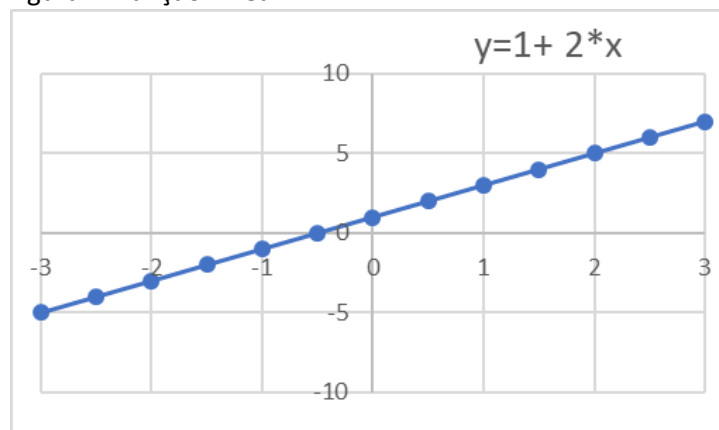


Própria autoria

2. a função linear ($n=1$) $\implies y = a_0 + a_1 x$

é uma reta com inclinação ($\theta = \text{arco tangente}(a_1)$) em relação ao eixo x

Figura 7. Função Linear

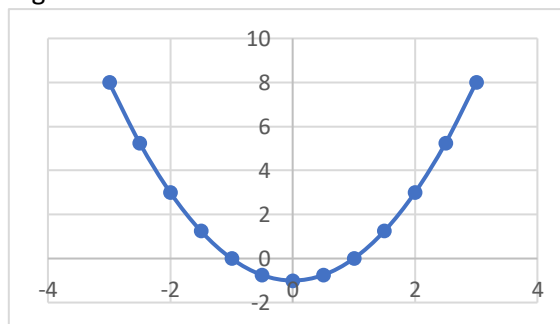


Própria autoria

3. a função quadrática ($n=2$) $\implies y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

é uma parábola (que você já conhece como $y = ax^2 + bx + c$)

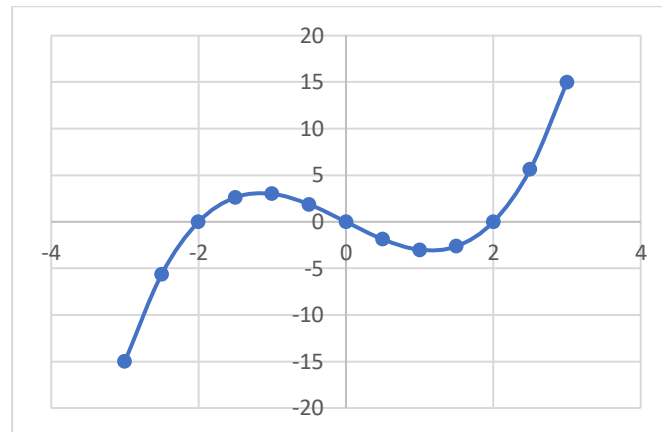
Figura 8. Parábola



Própria autoria

4. a função cúbica (n=3) $\implies y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$

Figura 9. Parábola Cúbica



Própria autoria

Perceba que as funções polinomiais têm raízes (que são os valores da variável onde a função vale zero) em número igual ao grau do polinômio. A função de primeiro grau tem uma raiz, a de segundo grau tem duas, a cúbica tem três e assim por diante. Mas nem sempre as raízes são números reais. Às vezes as raízes são imaginárias ou complexas. Trataremos destes casos mais adiante. Por enquanto tratemos das raízes reais.

Mas existem muitas outras funções que você vai precisar. Por exemplo:

5. A função Exponencial

Neste caso a ordem de cálculo é: multiplique a variável x pelo parâmetro b e use esse resultado como expoente para a base escolhida. Muito frequentemente é usada a base neperiana e . Multiplique o resultado pelo parâmetro A .

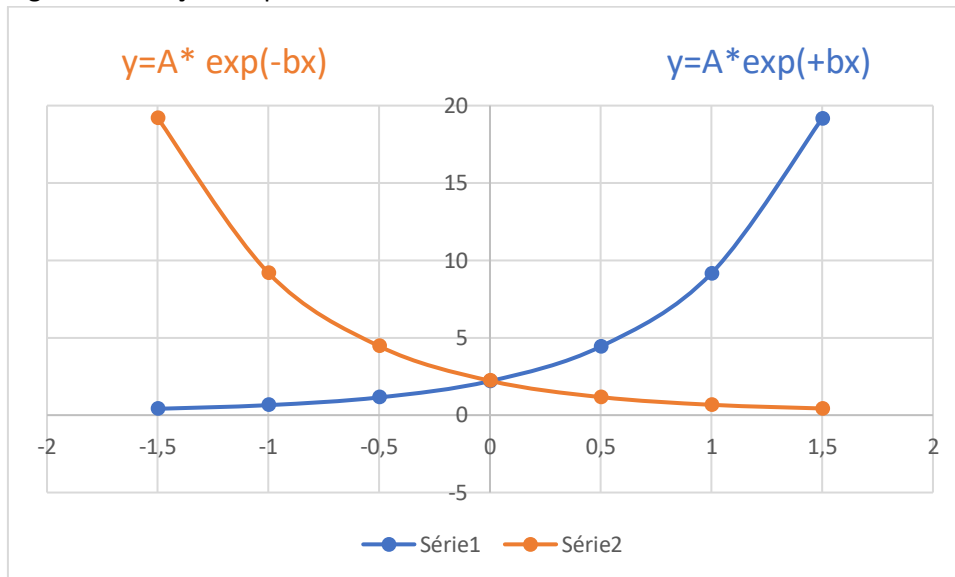
Ou, usando a linguagem matemática:

$$y = A \cdot e^{bx} \quad \text{ou também,} \quad y = A * \exp(bx)$$

Essa função é muitíssimo importante no Cálculo pois, como você verá, ela tem propriedades muito especiais relacionadas com os processos de crescimento e decrescimento da natureza ou da tecnologia. Por causa disso, você deve entendê-la bem. O parâmetro b é a chave da função, pois determina a magnitude da velocidade de crescimento (quando positivo) ou decrescimento (quando negativo). Esse valor determina a forma e ou a velocidade de variação do fenômeno descrito pela variável que é o argumento da função. Enquanto o parâmetro A determina a escala do fenômeno em questão.

Seu gráfico tem a forma a seguir:

Figura 10. Funções exponenciais



Própria autoria

Note que quando o expoente é negativo, a função é decrescente e quando o expoente é positivo a função é crescente. Note ainda que a função exponencial não tem raízes, ou seja não toca o eixo horizontal. Nunca vale zero. Mas à medida que os valores de x se afastam da origem (para direita ou para a esquerda), a função se aproxima de zero, sem nunca atingir este valor. Esse é um primeiro exemplo de limite de uma função. A exponencial tende a zero, sem nunca o atingir. Ou seja, zero é o limite (no caso inatingível) da função exponencial. Essa ideia de limite vai ser muito importante quando você estiver estudando as derivadas e integrais. Você vai ver que é um conceito matemático bem difícil de assimilar. Quando chegar a hora e você tiver dúvidas sobre isso, lembre-se da função exponencial e seus limites. Isso vai ajudar você a entender. Afinal, Cálculo é fácil!

Outra função importante é a

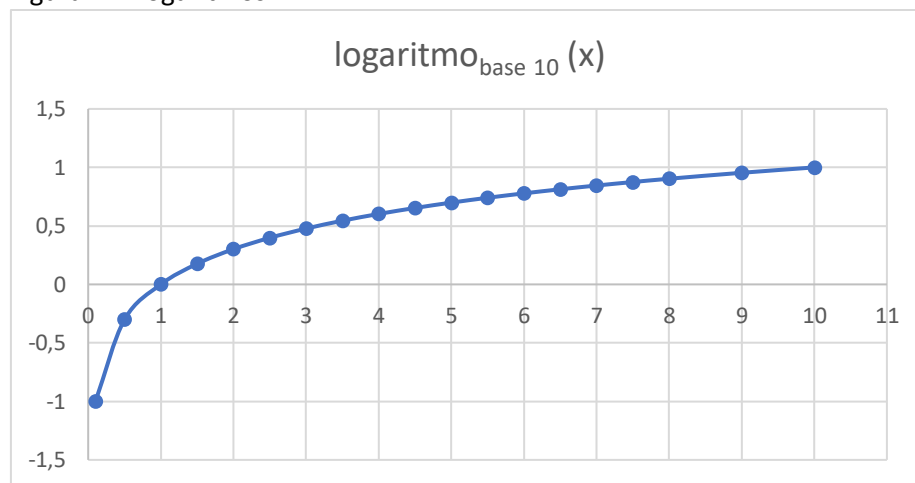
6. A Função Logarítmica que é a função inversa da exponencial.

➔ $\log_a x = y$

Neste caso a ordem de cálculo é: calcule o logaritmo da variável X na base a e armazene na variável dependente y

Essa função é um dos casos onde há discontinuidades, pois sabemos que não existe nenhum valor cuja exponencial dá zero e ainda por cima, não é possível calcular logaritmos para argumentos negativos. Portanto, o gráfico desta função quando a base é decimal será:

Figura 11. Logaritmos



Própria autoria

Perceba que a função só existe para valores positivos $x > 0$ e em $x=0$ temos um valor assintótico tendendo a $-\infty$ ou indeterminadamente negativo. Note que os valores dos logaritmos para $x > 1$ são positivos, o logaritmo de 1 é zero ($x^0=1$) e para valores de x entre zero e um os logaritmos são negativos.

No caso particular e importante de usarmos a base neperiana $e=2,7182$, então a função logarítmica se expressa como $\ln(x)$ e a chamamos de logaritmo natural de x . Você vai usar isso muitas vezes. Os logaritmos naturais são muito importantes no Cálculo.

7. E as funções trigonométricas:

Seno com seu símbolo **$\text{sen}(x)$** ;

Cosseno com seu símbolo **$\text{cos}(x)$** ;

Tangente com seu símbolo **$\text{tan}(x)$** .

E suas funções inversas:

arco-seno com símbolo **$\text{sen}^{-1}(x)$ ou $\text{asen}(x)$** ;

arco-cosseno com símbolo **$\text{cos}^{-1}(x)$ ou $\text{acos}(x)$** ;

arcotangente com símbolo **$\text{tan}^{-1}(x)$** .

Cuidado para não confundir **$\text{sen}^{-1}(x)$** , que é o arco-seno ou a função inversa do seno com **$[\text{sen}(x)]^{-1}$** que é o inverso ou recíproco do seno, ou seja: **$1/\text{sen}(x)$** . O mesmo vale para as outras funções. É um detalhe muito sutil, mas se você não prestar atenção pode errar na hora da prova... e nós não queremos isso, né?

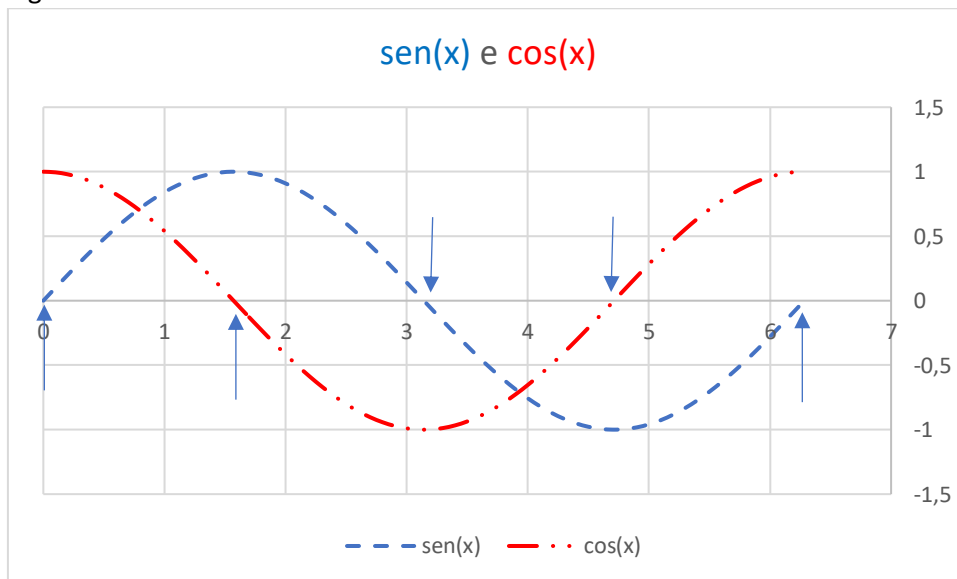
É muito útil decorar os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos fracionários principais. Tente decorar ao menos os ângulos do primeiro quadrante, pois os valores para os demais quadrantes ficam bem fáceis de deduzir. Veja a tabela abaixo. É fácil decorá-los se você perceber que a tabela tem uma certa simetria. Isso vai ser muito útil pra você.

Tabela 1. Valores dos senos e cossenos de ângulos do primeiro quadrante.

Ângulo (em graus)	ângulo (em radianos)	sen(x)	cos(x)	tan(x)
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1/2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	∞

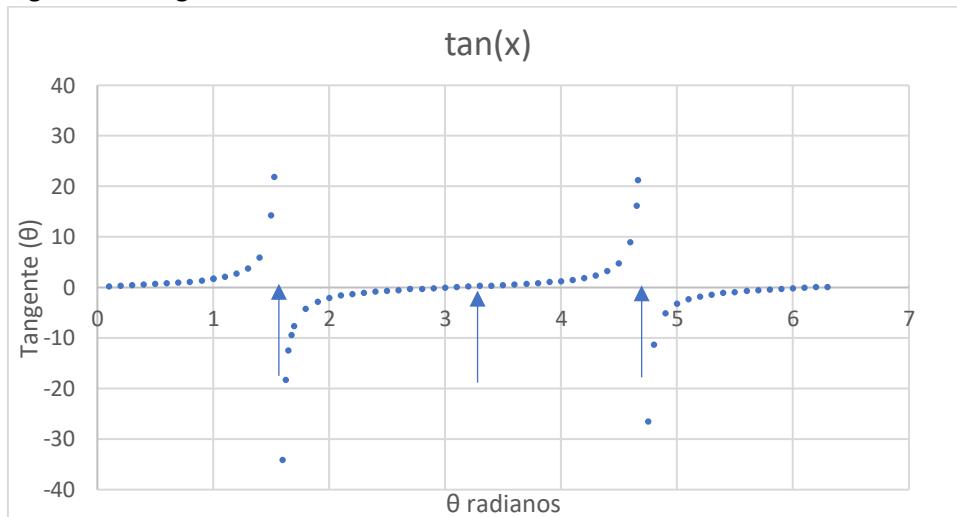
No caso das funções trigonométricas e mesmo em outras funções periódicas, onde o período da função é múltiplo ou submúltiplo de π , é muito prático fazer a escala de abcissas com indicações das posições 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, 2π na escala de 0 a 2π . Nos exemplos abaixo, essas posições são indicadas por setas azuis. Tendo isto em vista, o gráfico das funções trigonométricas serão:

Figura 12. Seno e cosseno



Própria autoria

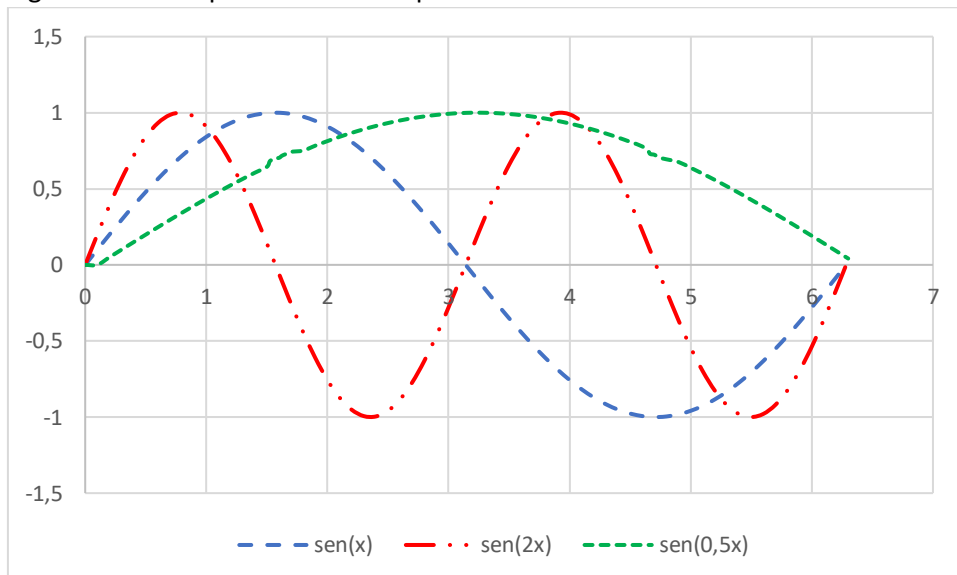
Figura 13. Tangente



Própria autoria

Para treinar, construa em uma folha de papel (não no Excell ou qualquer outra planilha) os gráficos de diversas funções periódicas trigonométricas. Lembre-se que o parâmetro que aparece multiplicando as variáveis nas funções seno, cosseno e tangente corresponde à frequência da função periódica. Se o parâmetro for maior que 1 então o período é menor que 2π e, se for menor que 1, o período é maior que 2π . Por exemplo, abaixo estão os gráficos das funções: $\text{sen}(2x)$ em vermelho, $\text{sen}(x)$ em azul e $\text{sen}(0,5x)$ em verde. Perceba que as funções mantêm o mesmo padrão de variação, mudando somente o número de ciclos que cabem num certo intervalo (2π , no caso). Veja:

Figura 14. Senos para diversas frequências



Própria autoria

Agora, faça num papel os gráficos para $\cos(2*x)$, $\cos(x)$ e $\cos(0,5*x)$. E depois faça $\tan(2*x)$, $\tan(x)$ e $\tan(0,5*x)$. Vai dar trabalho, mas você vai aprender muito e isso vai ajudar muito nas provas de Cálculo. Mãos a obra!

2. A ideia dos limites das funções.

Como vimos anteriormente, as funções têm características algébricas que podem representar grandezas e fenômenos da natureza e da tecnologia, mas existem alguns valores que podem representar problemas algébricos bastante complicados. Por isso, devemos esmiuçá-las o máximo possível para não cairmos em armadilhas e para obter o máximo de informação. Há algumas características que são muito úteis para isso. Vamos lá:

a) Máximos, Mínimos

As funções podem ser crescentes (aumentando x , **umenta** y); ou decrescente (aumentando x **diminui** y). Esse caráter pode variar, e nesse caso a função passa por um contexto muito importante: conforme a condição crescente se torne decrescente (ponto de máximo) ou o contrário decrescente se torne crescente (ponto de mínimo). Essa informação fornecida pela localização destes pontos característicos é muito útil, pois indica algebricamente as posições correspondentes às condições de otimização que são tão importantes nas diversas áreas das Ciências. Em geral, os profissionais de todas as áreas estão em busca dessas condições. Por exemplo, um economista pode estar em busca da condição de máximo rendimento, um administrador procura o mínimo custo; o engenheiro civil procura a situação de máxima resistência, o físico busca a situação de mínima energia (você vai aprender o porquê disso nas aulas de mecânica, não se preocupe por enquanto); o médico busca a condição de mínima dor; o engenheiro mecânico tem que achar a condição de máximo rendimento do motor e simultaneamente com o mínimo consumo de combustível; o engenheiro metalúrgico quer achar a liga metálica de maior maleabilidade, o engenheiro de alimentos tem que encontrar o processo industrial para fabricar um certo alimento com o mínimo de gordura e o melhor (máximo) sabor e tantos outros casos (acho que você é capaz de citar mais alguns exemplos; tente achar alguns na sua área de estudo. Acredite que isso ocorre em todas as disciplinas). Portanto fica óbvio que estudar os máximos e mínimos vai ser importante para você. Nas aulas de Cálculo I, seu professor vai ensinar como achar estes pontos importantes com a utilização das derivadas que ele já terá ensinado. E você vai usar bastante essas técnicas ao longo da vida acadêmica e profissional. Mas já podemos adiantar um pouco com o que estamos sabendo, ao menos em relação às funções que estudamos no capítulo II. Vamos nos restringir àquelas funções mais básicas. Por exemplo, sabemos que a função linear ($y(x)=a_0 + a_1x$) corresponde a uma reta que pode ser crescente ou decrescente conforme o sinal do parâmetro a_1 . Mas essa função nunca muda a sua direção, portanto não tem nem máximo nem mínimo. Mas a função de segundo grau ($y(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2$) corresponde à parábola e portanto, muda de direção continuamente sendo hora crescente e depois decrescente ou vice versa, dependendo do sinal de a_2 . Esse ponto de máximo ou mínimo é chamado de vértice da parábola e você aprendeu no ensino médio como calculá-lo. Lembra? Era assim,

$$x_v = -b/2a$$

O seu professor do ensino médio mandou você decorar, né? Mas você já deve ter esquecido, eu acho. Essa fórmula refere-se à equação de segundo grau como normalmente se formula: $y = ax^2 + bx + c$. Nesse caso, traduzindo para a notação polinomial que nós estudamos anteriormente e que o seu professor de Cálculo I certamente vai usar, teríamos: $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$; e então: $a_0 = c$; $a_1 = b$; $a_2 = a$. Portanto a fórmula do vértice da parábola se torna:

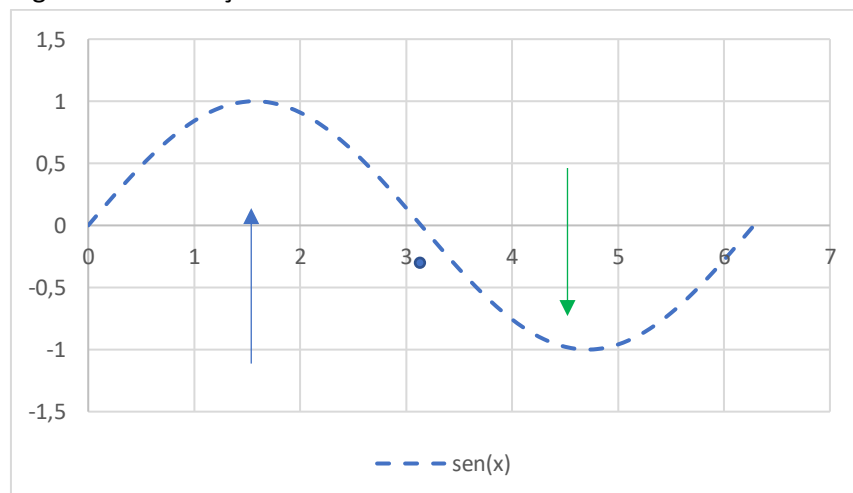
$$x_v = -\frac{a_1}{2a_2}$$

É importante que você olhe para essas duas fórmulas acima e as reconheça como referentes à mesma coisa. Fiz questão de fazer essa “tradução” porque é muito comum os estudantes confundirem as coisas que aprenderam no ensino médio porque não lembram de “traduzir” para a linguagem mais padronizada da Álgebra e Cálculo como se estuda na Universidade. Preste sempre atenção nisso. Seu professor de Cálculo I, aquele chato, vai exigir que você use esse formalismo mais rigoroso. E ele tem toda razão. Você terá que se adaptar a esta nova realidade, queira ou não. Então chamo a sua atenção para isso agora. Antes cedo do que nunca, né? Se você se adaptar, logo estará dominando o formalismo matemático. E as coisas ficarão cada vez mais compreensíveis e você dirá: Cálculo é fácil!!!

b) Mudanças de inflexão

Nesse caso, é importante notar que as funções, além de trocar seu caráter de crescente para decrescente e vice-versa, o que define os valores de máximo e mínimo que vimos na sessão anterior, pode também sofrer mudanças de inflexão. A inflexão de uma função pode ser definida como côncava ou convexa. É o que vemos na figura abaixo, em relação à função $\text{sen}(x)$ que pode ser considerada **convexa** na região entre 0 e π , e pode ser considerada **côncava** entre π e 2π :

Figura 15. Mudança de inflexão



Própria autoria

Nesse exemplo, o valor da abscissa no qual essa condição muda (no caso no ponto $x=\pi$) chamamos **de ponto de inflexão** (ou de mudança de inflexão). Esse ponto costuma ser muito importante pois, quando a função representar algum fenômeno da natureza ou da tecnologia, o ponto de inflexão pode ter um significado que auxiliará na análise do assunto em questão. Falando em modo genérico, o ponto de inflexão determinará a posição (valor) da abscissa onde a variabilidade da função (crescente ou decrescente) varia. Essa frase pode parecer estranha agora, mas você vai aprender em Cálculo I que esse raciocínio equivalerá à determinação do caráter côncavo ou convexo da função e à determinação do ponto em que essa característica muda. Voltaremos a esse ponto mais adiante.

c) Interceptos

Os interceptos são pontos especiais, aonde as funções coincidem (ou seja: cruzam ou interceptam) com os eixos coordenados. Por exemplo um intercepto importante é aquele correspondente ao cruzamento com o eixo das ordenadas (y). Esse ponto corresponde ao valor da função para o ponto origem das abscissas (x) ou seja corresponde à solução da equação:

$$y=f(0).$$

Assim, para determinar esse intercepto basta substituir o valor $x=0$ na expressão da função.

Por exemplo o intercepto em y da função $f(x)= a_0 + a_1x$ pode ser calculado por:

$$y= a_0 + a_1*(0) \Rightarrow y= a_0 \Rightarrow a_0 \text{ é o intercepto } y \text{ de } f(x)$$

outro exemplo: calcular o intercepto em y da função

$$f(x)= x^2+3x +1 \Rightarrow f(0)= (0)^2+ 3*(0) +1 \Rightarrow \text{logo o intercepto } y \text{ de } f(x) \text{ é } 1.$$

Talvez você tenha já estudado isso no ensino médio, mas sei que muitos dos estudantes ou não viram ou já esqueceram essas coisas. Por isso é importante revê-las. Quando você precisar, nas provas de Cálculo vai estar preparado. Viu como Cálculo é fácil!

Mas existem outros interceptos importantes mas mais difíceis de calcular: as raízes que são os interceptos como eixo x. Ou seja as soluções das equações do tipo : $f(x)=0$.

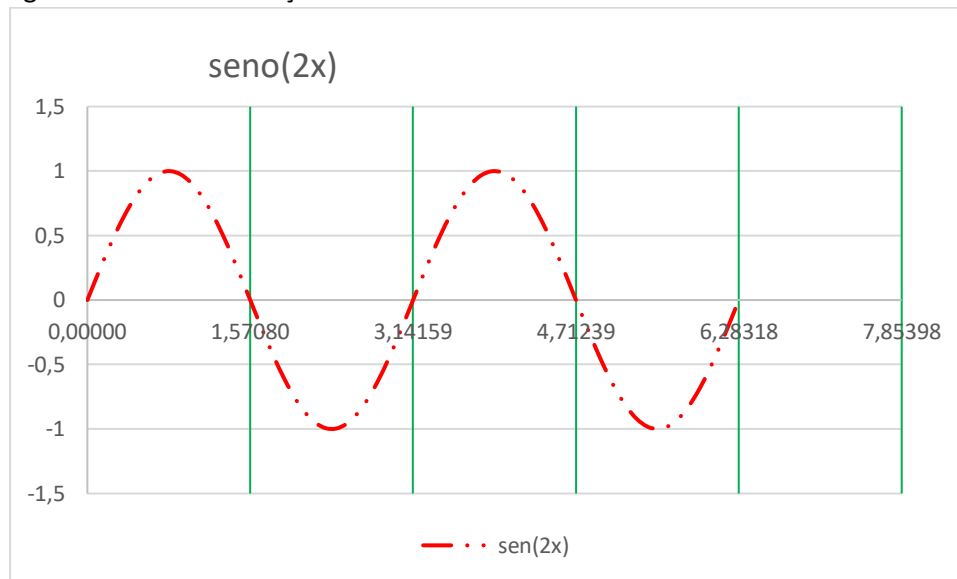
Por exemplo,: $f(x) = \text{sen}(2x)$. Para calcular as raízes precisamos resolver a equação:

$f(x)=\text{sen}(2x)=0 \Rightarrow$ para a qual sabemos que sempre que x for múltiplo inteiro de $\pi/2$ a função valerá zero:

as raízes então serão: $0; \pi/2; \pi; 3\pi/2, 4\pi/2, \dots, n*\pi/2$

Veja o gráfico (escala trigonométrica com cinco decimais)

Figura 16. Raízes da função seno



Própria autoria

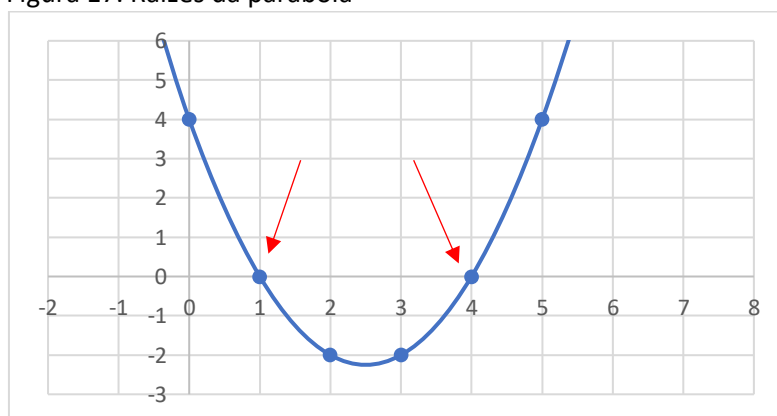
Um outro exemplo: achar as raízes da função $f(x) = x^2 - 5x + 4$

Todos sabemos aplicar a fórmula da Baskhara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e obter : $x_1 = 1$ e $x_2 = 4$. E então, construímos o gráfico para conferir:

Figura 17. Raízes da parábola



Própria autoria

Resolver as equações algebricamente para encontrar as raízes nem sempre é uma tarefa muito fácil. Na verdade, pode ser uma tarefa muito difícil. Mas existem técnicas numéricas que você aprenderá na disciplina de Cálculo Numérico que poderão ajudar muito.

d) Descontinuidades

As descontinuidades, são muito importantes. Elas correspondem aos valores da abscissa de uma função, nos quais a operação (ou ordem de cálculo) não pode ser realizada.

Já falamos das descontinuidades anteriormente, mas é preciso enfatizar que essa ideia está muito relacionada com a ideia de limites que por sua vez definirá a operação fundamental do Cálculo: as derivadas. Você vai aprender que as derivadas indicarão a variabilidade das funções, mas nas descontinuidades essa variabilidade não pode ser calculada. E nesse caso, só podemos conhecer a função FORA das descontinuidades.

Portanto, conhecer as descontinuidades das funções será crucial.

Lembre-se principalmente dos denominadores (que não podem ser zero), das raízes pares (que não podem ter argumentos negativos) e dos logaritmos (que só podem ter argumentos positivos). Em torno destas descontinuidades é que teremos que calcular os limites (ou seja; os valores para os quais a função tende ao se aproximar das descontinuidades). Você vai aprender que a determinação dos limites, está na definição das derivadas. Essa é a chave mestra da disciplina de Cálculo. Estamos chegando lá! Se você entender bem esse conceito que estamos construindo paulatinamente, você certamente vai dizer: Cálculo é fácil!

CAPÍTULO 3. CALCULANDO LIMITES

Como sabemos que os limites serão importantes para aprender Cálculo, vamos dar uma definição algébrica formal para eles:

Simbolizaremos os limites pela seguinte notação:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Significando que queremos calcular o valor da função quando a variável x se aproxima do valor a . Normalmente isso significa apenas uma substituição algébrica que todos sabem fazer. Por exemplo, se $f(x) = x/(x-1)$, é fácil calcular o limite quando $a=3$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{(x-1)} = \frac{3}{(3-1)} = \frac{3}{2}$$

Calculemos agora o seguinte limite:

$$v(t) = \lim_{x \rightarrow 0} \beta(1 - e^{-\alpha t})$$

A expressão corresponde à velocidade v em função do tempo t de um paraquedista, que salta de um helicóptero que esteja parado no ar, em uma certa altitude, sob ação da gravidade e sofrendo a resistência do ar. Você vai estudar bem esse exercício na disciplina de Mecânica Geral, mas já podemos adiantar alguma informação.

Então, quando $t=0$ ou seja, no instante inicial, a velocidade na direção y é 0. Basta substituir $t=0$ na expressão e lembrar que o exponencial de zero (e^0) = 1 e portanto:

$$v(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \beta(1 - e^{-\alpha 0}) = \beta(1 - 1) = 0$$

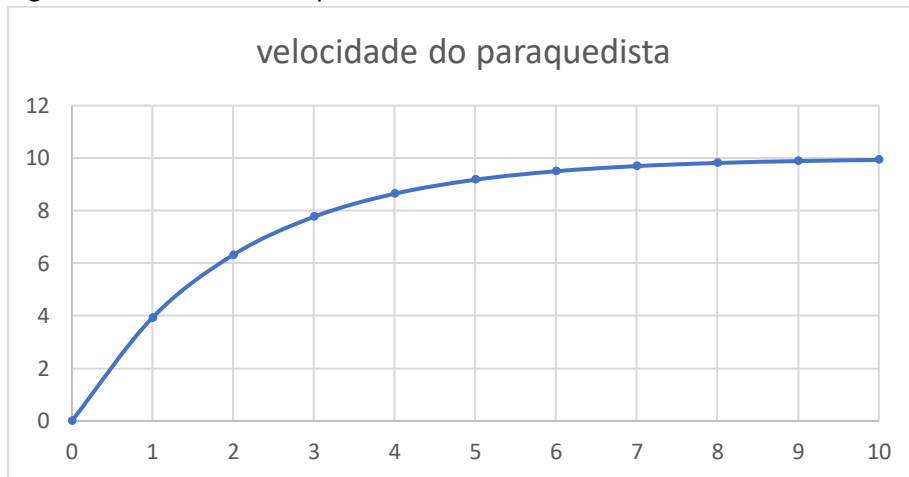
Por outro lado, quando o tempo vai passando e o paraquedista vai caindo, como varia a sua velocidade? Num primeiro momento poderíamos pensar que a velocidade aumenta sempre, mas a resistência do ar exerce uma força contrária à gravidade e tende a fazer diminuir a variação da velocidade da queda. É justamente o comportamento descrito pelo termo exponencial da função que determina isso, de acordo com os parâmetros α e β .

Quando $t \rightarrow \infty$ então $e^{-\infty} \rightarrow 0$

Portanto
$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(1 - e^{-\infty}) = \beta$$

Portanto a velocidade da queda do paraquedista está **limitada** pelo valor do parâmetro β e a variação é determinada pelo parâmetro α (o qual depende da resistência do ar). O que resulta no seguinte gráfico:

Figura 18. Velocidade de queda



Própria autoria

Assim, a velocidade aumenta continuamente, mas tem um limite determinado pela resistência do ar. A velocidade do fenômeno da queda, então, tem um limite de tal forma que a velocidade nunca ultrapassará esse limite. Quando o paraquedista sente que sua velocidade está quase constante, significando que ele está quase alcançando o limite, então é hora de puxar a cordinha do paraquedas. Legal, né?

Agora vamos retornar para a álgebra:

Se quisermos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)} = \frac{3}{(1-1)} = ?$$

Temos uma impropriedade, pois não é possível a divisão por zero. Identicamente, no caso a seguir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[2]{(x-4)} = \sqrt[2]{-2} = ?$$

Temos uma outra impropriedade pois, no âmbito dos números reais, não podemos calcular raiz quadrada de números negativos.

Quando temos essas circunstâncias, concluímos que a função está indeterminada naquele ponto e então podemos dizer que a função **não é limitada** naquele ponto.

Mas há casos mais interessantes. Por exemplo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)} = \frac{1 - 3 \cdot 1 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} = ?$$

Obviamente a divisão 0/0 é impossível de ser calculada. Não vá cair na tentação de cancelar o numerador com o denominador dizer que essa divisão dá 1 (é um erro recorrente nas provas de Cálculo 1). Como aprendemos, lá no item 1, não podemos dividir por zero. Essa operação não está definida entre os Reais. Então como faremos para calcular esse limite (se ele existir)? A resposta é: você precisa fatorar algebricamente. Tem que usar o que já sabe de álgebra e ir simplificando a expressão de f(x) até que a fatoração possa indicar uma solução. Aí vão entrar as propriedades dos números reais, os polinômios, os produtos notáveis, as regras da trigonometria, as regras dos logaritmos e dos expoentes e tudo mais que você tiver aprendido

de matemática até hoje. Tudo vai ser importante. É, definitivamente você deveria ter estudado mais no nível médio.... Mas, não fique nervoso. O que estamos aprendendo juntos já vai ajudar bastante. Mas seria muito bom se você tivesse em mãos os seus livros do ensino médio e do cursinho. Pra dar uma espiadinha de vez em quando. Com essa ajuda você vai vencer as dificuldades e vai se sentir o “último biscoito do pacotinho”. E poderá dizer com o nariz empinado: Cálculo é Fácil !!

Então vamos lá. Vamos fatorar a função acima. Como fazer isso? Bem, é fácil ver que a função $f(x) = x^2 - 3x + 2$ é um polinômio do segundo grau e, obviamente, pode ter até duas raízes reais. Uma boa providência é achar estas raízes (pela fórmula de Baskhara que você já conhece). Com essas raízes calculadas, é possível escrever essa função a partir da multiplicação das raízes, do seguinte modo:

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-x_1)(x-x_2)$; na qual x_1 e x_2 são as duas raízes que você pode achar com a fórmula da Baskhara. Então:

- Calcule as raízes com a fórmula de Baskhara
- Escreva a função em função das suas raízes
- Use a expressão fatorada no limite

No presente caso temos: $x_1=1$ e $x_2=2$. Logo,

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ Faça a multiplicação para conferir.

Agora façamos o limite e então podemos cancelar:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

Desse modo contornamos a descontinuidade e obtivemos o valor limite para aquela expressão.

Então, se quisermos estabelecer uma receita para calcular limites, teremos:

- Calcule o Domínio e Contradomínio das funções.
- Ou seja: examine a função e determine os valores validos para x e y e encontre as descontinuidades
- Ou seja: procure as possibilidades de haver na função as seguintes circunstâncias:

$$n/0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\sqrt[n]{-n}$$

Se encontrar descontinuidades, então é preciso usar a álgebra para eliminar essas indeterminações, o que nem sempre é possível, porém.

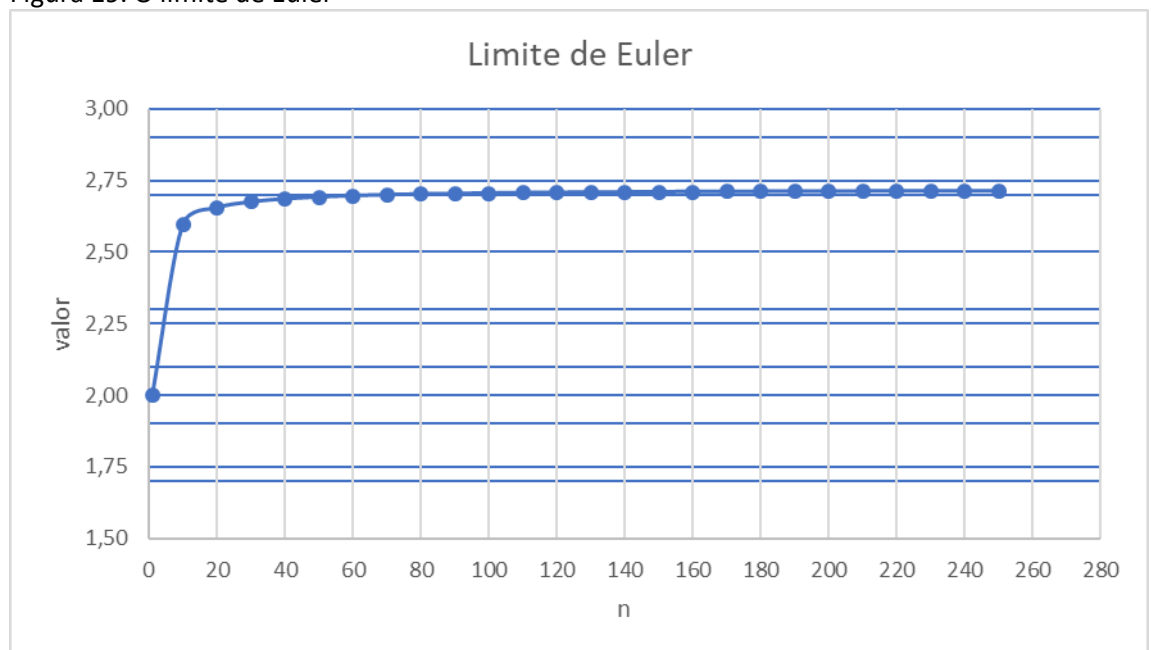
Existe um limite muito importante, que foi proposto por Napier, para definir o número irracional **e** que é a base dos logaritmos naturais. Esse é um resultado muito importante e, portanto, dê uma decorada. Se quiser saber mais, procure sobre o número neperiano ou número de Euler. É uma história bem interessante. Você vai usar bastante esse número e portanto, quanto mais souber sobre ele, melhor para você.

O limite fundamental neperiano é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182.....$$

À primeira vista, é difícil entender esse resultado, mas se fizermos um gráfico em função de n, teremos:

Figura 19. O limite de Euler



Própria autoria

E fica bem fácil de entender o resultado. Esse número é muito importante e nós vamos voltar a ele mais tarde.

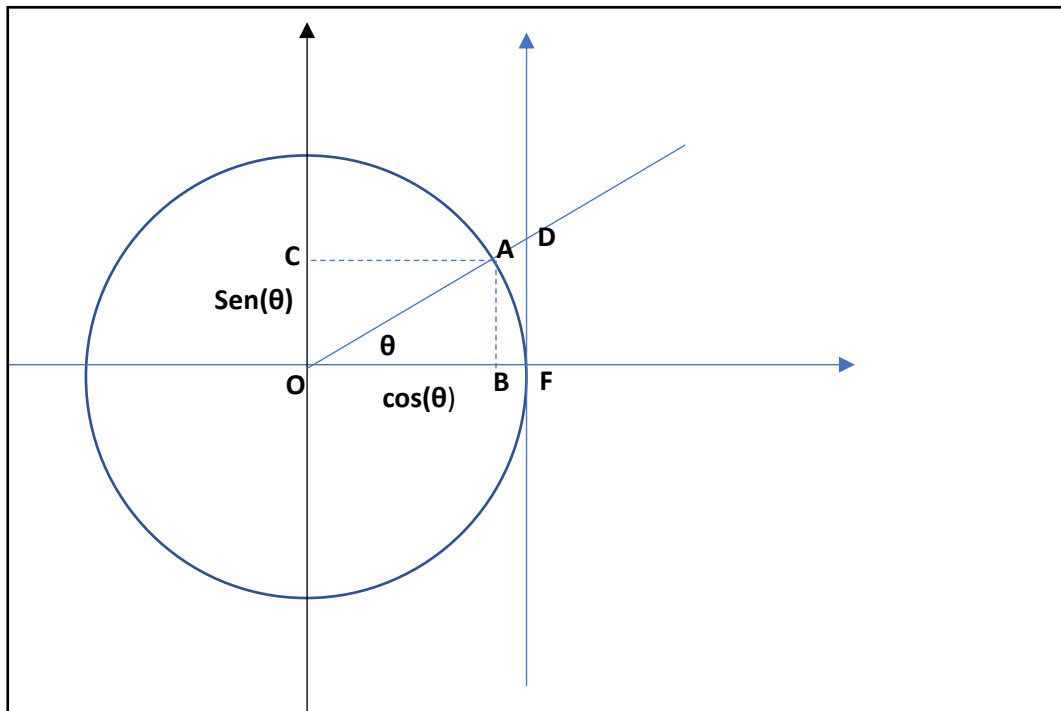
Uma outra relação importante é o **limite fundamental trigonométrico**. Que aparece nos cálculos das derivadas. A demonstração desse limite é baseada em raciocínio geométrico e fica como lição para você. Vamos, por enquanto apenas listar aqui o resultado.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Guarde esse resultado na memória. Você vai usá-lo muitas vezes.

Mas podemos dar uma ideia, considerando o círculo trigonométrico (raio=1) e as projeções de seno e cosseno:

Figura 20. Cálculo do limite trigonométrico pela geometria



Própria autoria

O raio determina um ponto **A** e um arco **AF** na circunferência o qual determina um ângulo que chamaremos **θ** . O comprimento desse arco sobre a circunferência é, obviamente, um pouquinho maior que o valor do **sen(θ)** o qual corresponde à projeção do ponto **A** sobre o eixo vertical (se não entendeu, dê uma olhadinha no seu livro do ensino médio). Essa ideia pode ser resumida pela comparação do cálculo das áreas do setor determinado por **θ** (com a forma de um pedaço de pizza), da área do triângulo retângulo **OAB** ($= \frac{1}{2} \text{sen}(\theta) \cos(\theta)$) e, por último, com a área do triângulo **ODF** ($= \frac{1}{2} * 1 * \text{tg}(\theta)$)

. Então podemos afirmar:

$$\text{Área } \Delta OAB < \text{Área setor OAF} < \text{Área } \Delta ODF.$$

Ou, usando a fórmula para área do triângulo retângulo: área = base*altura/2

E a fórmula para a área do setor = $r^2 * \theta / 2$; como $r=1$ temos

$$\frac{1}{2} \text{sen}(\theta) \cos(\theta) < \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2} * \text{tg}(\theta)$$

Ou

$$\text{sen}(\theta) \cos(\theta) < \theta < \text{tg}(\theta)$$

Ou ainda, dividindo por $\text{sen}(\theta)$:

$$\cos(\theta) < \frac{\theta}{\text{sen}(\theta)} < \frac{1}{\cos(\theta)}$$

ângulo	→	comprimento	→	área
$(2 * \pi)$	→	$2 * \pi * r$	→	$\frac{(2 * \pi)}{2} * r^2$
θ	→	$\theta * r$	→	$\frac{(\theta)}{2} * r^2$

invertendo:

$$\frac{1}{\cos(\theta)} > \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} > \cos(\theta)$$

Agora podemos calcular o limite:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\theta)} > \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} > \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos(\theta)$$

Então:

$$1 \geq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} \geq 1$$

E portanto, para atender, simultaneamente, à dupla desigualdade a única solução será:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} = 1$$

Que é chamado de limite fundamental trigonométrico. Esse resultado será muito utilizado daqui pra frente. Leia repetidas vezes a explicação acima até entendê-la PERFEITAMENTE. Insista porque vai ser importante para você.

Deu pra ver nesta demonstração, que esses limites são mesmo muito intrincados. Portanto, após treinar um pouquinho e entender o raciocínio é melhor mesmo a gente confiar nos livros, mas fazer muitos exercícios para ir apreendendo as técnicas. Não tem outro jeito. Exercícios, exercícios e exercícios...

Propriedades dos limites

Os limites obedecem a diversas propriedades decorrentes do fato de estarmos tratando sobre o domínio dos números reais. Elas são:

Suponha duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tal que : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = N$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

Elas obedecem às seguintes propriedades:

CONSTANTE: $\rightarrow f(x) = K \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$

POTÊNCIA: $\rightarrow f(x) = [g(x)]^n \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = M^n$

EXPONENCIAL $\rightarrow g(x) = [b^{f(x)}] \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = [b]^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = b^N$

LOGARÍTMO $\rightarrow g(x) = \log_b(f(x)) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \log_b[\lim_{x \rightarrow a} f(x)] = \log_b N$

RAIZ N-ÉSIMA: $\rightarrow f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sqrt[n]{M}$

SOMA / SUBTRAÇÃO $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = N + M$

MULTIPLICAÇÃO $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) * g(x)] = N * M$

DIVISÃO: para $M \neq 0$ $\rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [f(x) / g(x)] = N / M$

Essas propriedades serão muito úteis quando você tiver que resolver os exercícios de limites que o seu professor de Cálculo vai passar. Leia com calma as propriedades tentando entendê-las. Ainda existem outras (procure no seu livro texto da sua disciplina), mas com essas aí já dá pra ir avante.

Mas, calcular os limites pode mesmo ser bem difícil mas tem uma regra importante que pode facilitar tudo. Quando nada funciona: L'Hopital nele! Você aprenderá com o seu professor de Cálculo, uma regra de ouro para calcular limites: a Regra de L'Hopital. Mas para entendê-la devemos saber primeiro derivar e ainda não chegamos lá. Então vamos começar logo com essa história de derivadas...

CAPÍTULO 4. QUE HISTÓRIA É ESTA DE CÁLCULO DIFERENCIAL?

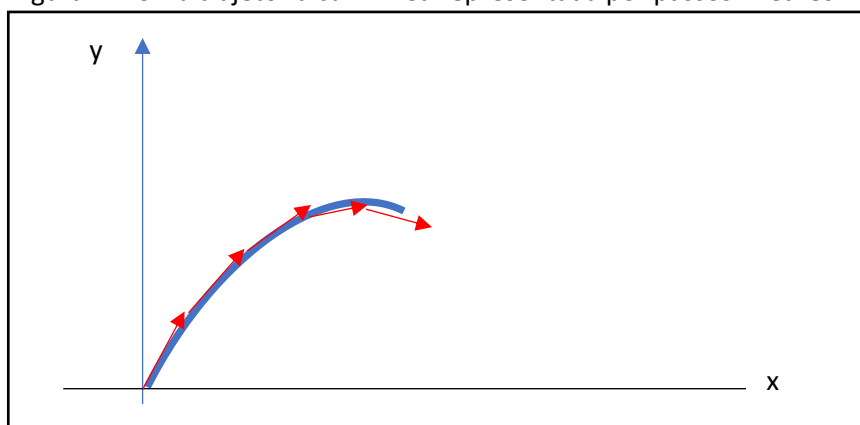
A história da Ciência está cheia de casos onde dois cientistas descobrem (ou inventam) alguma coisa simultaneamente. Um desses casos mais importantes foi a invenção (ou descoberta?) do Cálculo Diferencial que aconteceu (quase) simultaneamente, devido ao trabalho de dois mestres da Humanidade: Issac Newton e Gottfried Wilhelm Leibntz. Ambos viveram na mesma época na Inglaterra e na Alemanha respectivamente. Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 e morreu em 20 de março de 1727, enquanto Leibntz veio ao mundo em 1 de julho de 1646 e partiu em 14 de novembro de 1716. Eram, portanto, contemporâneos. Esses dois personagens da História tinham muita coisa em comum, entre as quais uma religiosidade muito forte e o gosto pelas ideias matemáticas. O Cálculo Diferencial e Integral que estudamos hoje nas universidades em todo mundo, foi desenvolvido por eles, cada um em seu país. Ambos usaram formalismos matemáticos diferentes que hoje usamos indistintamente. Temos que aprender as lições destes mestres, portanto.

Mas em que consistiam essas lições? Falando de um modo bem simplório, podemos dizer que a base do Cálculo é a ideia de que se você não pode vencer o problema matemático devido a limitações algébricas, então deve dividi-lo em partes progressivamente menores até que as dificuldades desapareçam. Por exemplo:

a) A ideia de Newton: representar uma curva por uma sucessão de retas

Sabemos que Newton era aficionado pelo estudo dos movimentos dos planetas e satélites. Esses corpos celestes descrevem no céu trajetórias curvilíneas. Mas na sua época não se sabia representar essas trajetórias. Então veja o que ele fez, supondo uma trajetória parabólica de um objeto lançado à distância, desenhada em azul. Como não sabemos descrevê-la adequadamente, podemos representar a curva de modo aproximado usando as setas vermelhas. Se imaginamos que a curva azul representa a trajetória de uma bala de canhão, é fácil entender que, usando as setas vermelhas, uma por vez, poderemos saber de modo bem aproximado qual a posição do alvo que vamos atingir com a tal bala. Assim, transformamos um problema complicado (cuja solução não conhecemos) em uma sucessão de problemas simples que sabemos resolver.

Figura 21. Uma trajetória curvilínea representada por passos lineares



Própria autoria (após I. Newton)

É justamente essa ideia básica que está por trás o Cálculo que queremos aprender. Não parece nada difícil, não é mesmo? Eu não disse? Cálculo é fácil!

Mas a ideia genial do Newton foi ter percebido que seria possível usar o mesmo raciocínio para estudar as órbitas do planetas e satélites (objetos celestes), cujos resultados conduziram à teoria da Gravitação Newtoniana ou Mecânica Celeste, e também para quaisquer outros objetos que se movimentem (na Terra mesmo) cujos resultados representam a Teoria da Mecânica Racional Newtoniana. Ele usou os dados de Kepler para descrever os movimentos dos planetas, satélites e cometas. Tudo se encaixava nas suas equações. Um de seus alunos, chamado Edmundo Halley, usou a teoria de Newton, baseada no Cálculo que você está aprendendo, para descrever a órbita de um cometa que passava nos céus. Concluiu que a órbita deveria ser elíptica e previu que o tal cometa deveria voltar após 76 anos. Aí, advinha.... O tal cometa voltou mesmo na época certinha. O tal Halley poderia até ter ganhado o prêmio Nobel, mas naquela época esse prêmio ainda não existia, né? Mas, pensando bem, ele não poderia mesmo ganhar esse prêmio porque quando o cometa voltou, após 76 anos, confirmando os seus cálculos e a teoria do Newton, o Edmundo já tinha morrido, coitado. E o prêmio Nobel só pode ser concedido a cientistas vivos. Mas, em homenagem a ele, a Ciência deu ao cometa o seu nome. Foi assim que batizaram o Cometa Halley. As últimas vezes que o Cometa Halley passou nas nossas vizinhanças, foi em 1910 e 1986. Portanto retornará em 2062. Faltam ainda 42 anos. Como você está perto dos 20 anos, poderá vê-lo e apreciar essa visão fantástica. Quando estiver olhando para ele, por favor, lembre-se do seu "velho professor de Cálculo" que contou a história do Halley pra você. Vai ser emocionante.

Figura 22. O Cometa Halley em sua última passagem (1986)



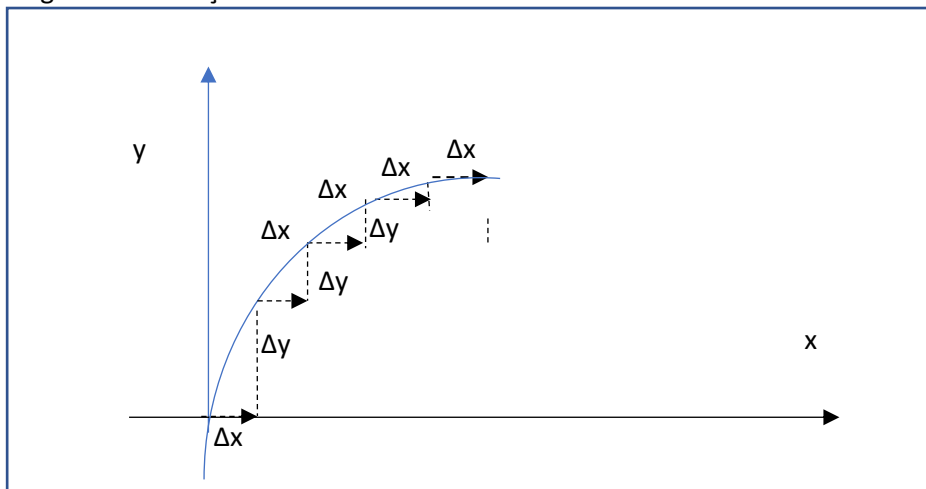
Fonte. NASA. https://blogs.nasa.gov/Watch_the_Skies/tag/halleys-comet/

b) A ideia de Leibntz:

Definição geométrica da “derivada”. A razão de incrementos e a variabilidade das funções

Newton tinha uma visão mais de físico e usava a matemática para descrever os fenômenos de seu interesse. Mas Leibntz era mais matemático e tinha um ponto de vista diferente. Ele trabalhava com as funções (que estudamos no capítulo 2) e se interessava por estudar como descrever a variabilidade das diferentes funções matemáticas. Então ele pensou em descrever essa variabilidade, por incrementos relativamente pequenos e depois usar o raciocínio (e a imaginação) para tornar esses incrementos cada vez menores. Pensemos na seguinte figura que chamaremos de “escadinha matemática”.

Figura 23. A função “Escadinha”



Própria autoria (após Leibntz) .

Leibntz concebeu a função variando por degraus, onde Δx corresponderia à largura e Δy à altura de cada degrau de modo que subindo (ou descendo) é possível (se Δx for suficientemente pequeno), descrever muito aproximadamente a função (curva azul na figura). Δx corresponderia a um passo e Δy (ou $\Delta f(x)$) será determinado pela expressão algébrica da função. De modo que a inclinação de cada degrau indicará a variabilidade média da função naquele degrau.

A derivada corresponde a um cálculo de limite!

Se aceitamos essa aproximação, podemos ver, sem dificuldade, que a aproximação será melhor se os degraus (Δx) forem menores. E, se formos diminuindo indefinidamente a magnitude horizontal do degrau (Δx), a tendência é que a dimensão vertical do degrau(Δy) se aproxime cada vez mais do valor exato da função em cada ponto e, portanto, a inclinação do degrau vai indicar a variabilidade exata da função naquele ponto!

A ideia da derivada. Definição algébrica .

Vamos resumir essa ideia num formalismo que você já conhece: calculemos o limite da razão ($\Delta y/ \Delta x$) entre as dimensões dos degraus da nossa “escadinha” matemática. E vamos dar um nome a este limite. Como o valor deste limite deriva da variabilidade da função, que tal denominarmos **derivada** a este limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{derivada de } f(x)$$

Legal! Como você já conhece a noção de limite e já sabe usar as suas propriedades que decorrem do fato de utilizarmos os números reais e, como você já conhece a maior parte das funções e sabe trabalhar com elas algebricamente, então, você já aprendeu o conceito de derivada!!!!

Podemos progredir ainda, considerando que Leibntz propôs usar um símbolo especial para as variáveis que são calculadas ao limite. Ele propôs:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = dx = \text{diferencial de } x$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta y = dy = \text{diferencial de } y$$

Então, chegamos no formalismo proposto por Leibntz para a derivada de uma função $f(x)$

$$\text{Derivada de } y=f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Pronto! Eu não disse que Cálculo é fácil? Agora é só treinar. Aguarde os próximos capítulos

CAPÍTULO 5. AS DERIVADAS SÃO FÁCEIS

Certamente você já ouviu falar das dificuldades que surgem ao calcular as derivadas. Os alunos dos anos mais adiantados adoram assustar os calouros dizendo que os professores de Cálculo são uns carrascos e que as provas são quase impossíveis de fazer e que você vai se sair mal e.... tantas outras coisas. Esqueça tudo isso! Você já tem as ferramentas para resolver esse problema e calcular as derivadas de qualquer função. Você vai se sair muito bem, porque Cálculo é Fácil!!!!

Já sabemos que calcular uma derivada de uma função corresponde à determinação de um limite. E as regras algébricas para isso são nossas conhecidas. É verdade que não sabemos todas as regras de cor. Por isso você vai precisar de livros. Existem centenas de livros de Cálculo Diferencial nas bibliotecas das universidades e muitos são até bem acessíveis se você quiser comprar. No final deste livro há uma relação dos mais comuns. Seus livros do ensino médio também serão muito úteis pois mostram as regras de fatoração algébrica e as relações trigonométricas mais importantes. Deixe-os à mão.

Nos livros de Cálculo universitários, é possível encontrar as demonstrações das derivações de muitas funções. Nem todos os livros tem todas as demonstrações. Assim, você vai precisar procurar em vários livros. Isso pode dar trabalho. Você vai ter que virar um “rato de biblioteca”. Mas estudando essas demonstrações, você vai paulatinamente entendendo que as regras gerais de derivação que surgem dessas análises são bastante práticas, de modo que, se você as aceita, pode usá-las à vontade. Praticamente todo livro de Cálculo traz um apêndice com uma lista das regras de derivação para os mais diversos tipos de função. Você terá que consultar essas listas com frequência, pois é praticamente impossível decorá-las todas. Todo mundo faz isso. Mas existem algumas regras principais que todos DEVEMOS saber de cor se quisermos resolver as provas de Cálculo como aquelas que você vai enfrentar logo, logo. Então vamos a elas ...

As regras de derivação principais:

Todas as fórmulas que mostraremos abaixo foram deduzidas do mesmo modo, ou seja: calculando o limite abaixo:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ou:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Obviamente, para funções diferentes as operações algébricas usadas nos cálculos dos limites serão também diferentes. Algumas são até fáceis enquanto outras exigem um raciocínio mais sofisticado. Você é capaz de entendê-las todas. Mas precisa estudar e dedicar-se com esmero a essas demonstrações. Talvez você precise de ajuda. Busque com seus colegas e professores. Também na internet, hoje em dia, é fácil encontrar explicações dessa área. Se você fizer isso, progredirá rapidamente e conseguirá uma “proficiência” na linguagem matemática. Tudo ficará cada vez mais compreensível. Você ganhará em auto estima e satisfação intelectual. Vai valer a pena.

Para facilitar o seu serviço (não tente escapar dele) abaixo estão as regras mais fundamentais do Cálculo. Se você as decorar elas serão MUITO úteis para você.

a) A demonstração mais difícil da derivada mais fácil: função exponencial

Suponha a função $f(x) = \exp(x)$. Essa função, como já falamos anteriormente, é muito importante porque está na base de todos os fenômenos de crescimento (ou decréscimo quando o argumento for negativo) da natureza e da tecnologia. Por exemplo, o crescimento de micro organismos (Biologia, Engenharia de Alimentos), o crescimento populacional (Geografia, Economia), o crescimento de uma cultura de vegetais (Agricultura, Agronomia, Engenharia de Biosistemas), o decréscimo radioativo de um material (Física, Química), a propagação de um vírus ou bactéria numa população (na Medicina) e outros. Percebe a importância? Então, vai ser importante saber como essa função varia. Já sabemos como calcular isso. Basta usar a derivada, ou seja: devemos calcular o seguinte limite:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} = ?$$

Prepare-se, pois a demonstração é BEM complicada. Mas você já está preparado para entendê-la. Mas vai ter que ler e reler várias vezes. Mas tenho convicção que você conseguirá. Coragem!

Sabemos desde o capítulo 1 que: $\exp(x + \Delta x) = \exp(x) * \exp(\Delta x)$

Portanto,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp(x+\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp x * \exp(\Delta x) - \exp(x)}{\Delta x} =$$

E, colocando $\exp(x)$ em evidência....

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp x * (\exp(\Delta x) - 1)}{\Delta x} = \frac{0}{0}$$

Aparece, portanto, uma indeterminação no cálculo do limite. Devemos dar “tratos à bola”⁴ como se dizia antigamente para resolver isso.

Basta lembrar do limite fundamental para o número de Napier que vimos no capítulo 3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e fazemos a seguinte mudança de variáveis:

$$\exp(\Delta x) - 1 = u \rightarrow \Delta x \rightarrow 0 \rightarrow u \rightarrow 0$$

Logo:

$$\exp(\Delta x) = u + 1$$

E, portanto, aplicando o logaritmo natural, teremos:

$$\ln(\exp(\Delta x)) = \ln(u + 1) \rightarrow \Delta x = \ln(u + 1)$$

(estude essa passagem até entendê-la perfeitamente)

⁴ Ih, me denunciarei ao usar esta expressão.....

Voltando ao nosso limite:

$$\frac{d(\exp(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) * (\exp(\Delta x) - 1)}{\Delta x} = \exp(x) * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u}{\Delta x} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{u}{\ln(u+1)} \right)$$

E então, se passamos a variável u para o denominador obtemos

$$\frac{d(\exp(x))}{dx} = \exp(x) * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u}{\Delta x} = \exp(x) * \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1}{u} * \ln(u+1)} \right) = \exp(x) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(u+1)^{\frac{1}{u}}}$$

Ou, usando as propriedades dos limites que vimos anteriormente (cap. 3)

$$\frac{d(\exp(x))}{dx} = \exp(x) * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \exp(x) * \frac{1}{\ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)}$$

Como sabemos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, temos:

$$\frac{d(\exp(x))}{dx} = \exp(x) * \frac{1}{\ln(e)} = \exp(x)$$

Como você viu, essa demonstração foi bastante complexa. Não se afobe, você precisa se acostumar a esse tipo de demonstrações matemáticas. Elas são meio cansativas, mas você consegue, porque entende o raciocínio de cada passagem. Você talvez ainda não consiga fazê-la sozinho. Mas nada que usamos na demonstração era seu desconhecido. Usei como primeiro exemplo porque o resultado é MUITO importante. E representa a derivada mais fácil de todas. Vamos repeti-lo:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

A derivada de $\exp(x)$ é igual a $\exp(x)$. Ou seja a função é a derivada dela mesma!! Essa igualdade tem a ver com o comportamento de um número muito grande de fenômenos de crescimento em todas as Ciências e Tecnologias. Você vai usar esse resultado, sem dúvidas. E não poderá confundir a função exponencial com uma potência, NÃO. Esse é um erro recorrente entre os alunos dos primeiros anos que você não vai mais correr o risco de cometer. Por falar nisso, vamos agora deduzir as derivadas das potências que também são importantíssimas:

b) A derivada das potências

As potências como sabemos aparecem nas expressões polinomiais. Portanto você vai ter que derivá-las certamente. Então vamos lá. Vamos começar com os polinômios de grau zero, ou seja as funções constantes. Se voltarmos na nossa analogia com a “escadinha de Leibntz” a função constante não tem degraus. Anda sempre no mesmo “pavimento”. Portanto, não varia. Se não varia, sua variabilidade é nula, lógico. E, portanto, a derivada é nula:

$$1) f(x) = C \rightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

Mas se a função for de primeiro grau, teremos uma “escadinha com inclinação constante determinada pela declividade da reta que no caso da nossa convenção seria:

$$2) f(x) = a_0 + a_1x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} = a_1$$

Será muito bom (e muito fácil) para você, provar esse resultado.

Prossigamos:

Se a função for de grau 2 (parábola) a derivada será:

$$3) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2 * a_2x + a_1$$

Será muito bom (e ainda muito fácil) para você provar esse resultado.

$$4) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 3 * a_3 * x^2 + 2 * a_2x + a_1$$

e por indução obtemos:

$$5) f(x) = \sum_{i=0}^n (a_i * x^i) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n-1} (i * a_i x^{i-1})$$

Então, por exemplo, vamos derivar $f(x) = 2x^6$

$$\frac{d(2 * x^6)}{dx} = 6 * 2 * x^{6-1} = 12 * x^5$$

Fácil, né? Essa regra é muito importante, pois os polinômios estão sempre presentes nas disciplinas de exatas. É tão importante que os estudantes deram um apelido para ela: “regra do tombo”. Isso porque o expoente da variável x “cai” na frente do coeficiente.... Mas é um nome não muito bonito, né? É melhor falar em termos mais matemáticos, para não “cair” por causa da regra do tombo. Não pode esquecer que ela se aplica apenas aos polinômios (e não aos exponenciais). Muitas vezes os estudantes menos atentos (que não é seu caso, claro) confundem as coisas.

A derivada das funções trigonométricas

Aqui não tem jeito. Para derivar as funções trigonométricas são necessários exercícios e mais exercícios. E tem que saber as relações trigonométricas. Você tem que voltar aos livros do ensino médio e rever toda aquela coisa. Pois para calcular os limites correspondentes às derivadas, tem que ser bem craque em usar as funções seno, cosseno, tangente e seus inversos e saber usar as relações trigonométricas principais. Não dá para passar sem essas relações que devem ser decoradas (volte ao capítulo 2 se necessário):

Agora vamos às derivadas das funções trigonométricas.

Começemos com a função $\text{sen}(x)$. O limite a ser calculado é :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x + x) - \text{sen}(x)}{\Delta x}$$

Então vamos começar usando a fórmula do “seno da soma” que vimos no capítulo 3.

$$\text{sen}(\Delta x + x) = \text{sen}(\Delta x) * \cos(x) + \text{sen}(x) * \cos(\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x + x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x) + \text{sen}(x) \cos(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x}$$

E colocar $\text{sen}(x)$ em evidência:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x) + \text{sen}(x) * [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x}$$

Agora separamos os limites (Ver propriedades dos limites):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) * [\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x}$$

E multiplicamos (e dividimos) o segundo limite por: $\cos[(\Delta x + 1)]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) * [\cos(\Delta x) - 1] * (\cos(\Delta x + 1))}{\Delta x * (\cos(\Delta x + 1))} =$$

Usando agora a regra de fatoração que vimos lá no capítulo 1 (e que eu tinha sugerido você decorar, lembra? Já estamos usando.)

$$[(\cos(\Delta x) - 1) * (\cos(\Delta x) + 1)] = [\cos^2(\Delta x) - 1]$$

O nosso limite trigonométrico fica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) * [\cos^2(\Delta x) - 1]}{\Delta x * (\cos(\Delta x + 1))} =$$

Usando agora: $\cos^2(\Delta x) = 1 - \text{sen}^2(\Delta x)$, obtemos:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x) \cos(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) * \text{sen}^2(\Delta x)}{\Delta x * (\cos(\Delta x + 1))} =$$

E agora, separando os limites:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \text{sen}(\Delta x) * \text{sen}(\Delta x)}{\Delta x * (\cos(\Delta x + 1))} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \text{sen}(\Delta x)}{(\cos(\Delta x + 1))} =$$

E finalmente, lembrando do limite trigonométrico fundamental que vimos anteriormente:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1$$

E, como $\cos(x)$ não depende explicitamente de Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(x)$$

e ainda que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \text{sen}(\Delta x)}{(\cos(\Delta x + 1))} = 0$$

Chegamos finalmente a:

$$\frac{d[\text{sen}(x)]}{dx} = \cos(x)$$

De modo análogo podemos deduzir as derivadas de todas as funções trigonométricas, mas já dá pra ver que essas demonstrações são complicadas. Então, uma vez entendida a demonstração para $\text{seno}(x)$, usaremos as tabelas que sempre existem nos apêndices dos livros de cálculo.

Então teremos:

$$\frac{d[\cos(x)]}{dx} = -\text{sen}(x)$$

Note que as derivadas das funções trigonométricas são fáceis de calcular uma vez que as funções são periódicas. Você pode tentar. Então temos:

$$\frac{d[\text{sen}(x)]}{dx} = \cos(x); \quad \frac{d[\cos(x)]}{dx} = -\text{sen}(x); \quad \frac{d[-\text{sen}(x)]}{dx} = -\cos(x); \quad \frac{d[-\cos(x)]}{dx} = \text{sen}(x)$$

Esse resultado será muito importante quando você estudar as séries, lá na disciplina de Cálculo IV. Ainda está longe? Nem tanto, o tempo passará rapidinho se você se dedicar bastante à essas disciplinas.

Há outras funções trigonométricas cujas derivadas podem ser calculadas. Uma que **você não pode não conhecer** é a função tangente ($\text{tg}(x)$).

$$\frac{d[\text{tangente}(x)]}{dx} = \text{sec}^2(x)$$

Se você for muito interessado(a), tente demonstrar essas fórmulas de modo análogo como fizemos com o **seno(x)**.

Agora você pode procurar no seu livro texto de Cálculo que achará todas as derivadas das funções trigonométricas. Va lá olhar. Depois volte.

Derivada de uma soma/subtração.

Essa regra decorre da propriedade distributiva da soma (ou subtração) que vimos lá no capítulo 1 e que impõe uma propriedade dos limites.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x)$$

Como consequência, temos:

$$\frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx}$$

Então, por exemplo, vamos calcular:

$$\frac{d(x^2 + \text{sen}(x))}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(\text{sen}(x))}{dx} = 2x + \cos(x)$$

Ou ainda

$$\frac{d(\exp(x) - \text{tg}(x))}{dx} = \frac{d(\exp(x))}{dx} - \frac{d(\text{tg}(x))}{dx} = \exp(x) - \text{sec}^2(x)$$

Agora você pode fazer exercícios deste tipo que encontrará aos montes no seu livro texto da sua disciplina. Vá fazendo todos que conseguir. Isso vai dando segurança para você e aumentando sua autoestima. Não deixe para fazer os exercícios no dia da prova. Esse seria **o jeito certo de fazer a coisa errada**. Você não vai cometer esse erro, né? Coragem, vai lá no seu livro e faça uns exercícios de derivação. Você só tem a ganhar.

Derivada de um produto.

Mas vamos progredindo. Agora vamos tratar dos produtos de funções. Nesse caso, precisamos considerar as propriedades dos números reais em relação ao produto (veja no capítulo 1).

Então consideremos inicialmente o produto entre duas funções: $f(x) = h(x) * g(x)$.

Teremos que calcular o limite da razão de incrementos que será:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f[(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x) * g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) * h(x+\Delta x)}{\Delta x}$$

Logo;

$$\frac{d(h(x) * g(x))}{dx} = h(x) * \frac{dg(x)}{dx} + g(x) * \frac{dh(x)}{dx}$$

Derivadas de funções compostas

Outra coisa importante é quando precisamos derivar expressões matemáticas compostas. Essas expressões aparecem frequentemente. A maneira de calcular isso ainda é a mesma. Estimar a variabilidade da expressão e calcular o limite quando a variação da grandeza x tende a zero ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$). Esse procedimento está demonstrado na maioria dos livros de Cálculo disponíveis e provavelmente está também no seu livro texto da sua disciplina. Por isso não vou repeti-lo. Mas vamos às regras principais e como usá-las.

Muitas vezes, as expressões matemáticas contêm uma combinação de funções mais fundamentais o que torna a derivação um pouco mais trabalhosa. Vamos estudá-las através de exemplos. Consideremos a função:

$$f(x) = \text{sen}^2(x)$$

Nessa única expressão, estão combinadas duas funções: a função $u(x) = \text{sen}(x)$ e a função $g(u) = u^2$. Obviamente a variabilidade da função $f(x)$ vai depender algebricamente tanto de $u(x)$ quanto de $g(u)$, não é mesmo? As funções estão encadeadas, uma sendo influenciada pela outra. Assim, a variabilidade da função $g(u)$ vai influenciar a variabilidade da função $u(x)$ de modo que é a convolução (produto) das duas variabilidades que determinará a derivada da função $f(x)$. Então teremos:

$$\frac{df(x)}{d(x)} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx}$$

Essa fórmula encadeia as variabilidades das funções e por isso leva o nome de **Regra da Cadeia**. Ela pode ser aplicada mesmo que mais de duas funções sejam encadeadas, gerando a regra geral:

$$\frac{df(x)}{d(x)} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dg} * \frac{dg}{dh} * \frac{dh}{di} * \dots * \frac{dw}{dx}$$

Aplicada na função $f(x) = \text{sen}^2(x)$ teríamos

$$\frac{df}{dx} = 2 * \text{sen}(x) * \cos(x)$$

Derivamos primeiro a função potência ao quadrado e em seguida derivamos o $\text{sen}(x)$.

Mas vamos aplicar a regra para mais um caso particular importante:

$$f(x) = \text{sen}(x^3)$$

Nesse caso temos a função $u=x^3$ encadeada com $\text{sen}(u)$. Pela nossa regra teríamos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} * \frac{du}{dx} = \cos(x^3) * (3x^2)$$

Exercícios como este existem muitos e você pode ir fazendo. Quantos mais, melhor.

Por último, temos:

Derivada de uma razão.

Pensemos agora na função: $f(x)=h(x)/g(x)$.

Podemos reescrever assim: $f(x)=h(x)*[g(x)]^{-1}$

Agora é só tratar pela regra do produto que vimos acima e considerando $[g(x)]^{-1}$ como uma função composta. Então fica:

$$\frac{d [g(x)]^{-1}}{dx} = \left[-1 * (g(x))^{-2} \right] * \frac{dg}{dx}, \text{ e então, pela regra do produto, vem:}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dh(x)}{dx} * [g(x)]^{-1} + h(x) * \left[-1 * (g(x))^{-2} \right] * \frac{dg}{dx}$$

Ou

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\frac{dh(x)}{dx}}{g(x)} - \frac{h(x) * \frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2} \quad \rightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{\frac{dh(x)}{dx} * g(x) - h(x) * \frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Ou, na forma mais comum usando a notação de Newton:

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \quad f(x)' = \frac{h(x)' * g(x) - h(x) * g(x)'}{[g(x)]^2}$$

Dicas:

Todas essas regras você precisa saber de cor, mas o mais importante é entender bem as deduções que foram feitas aí em cima. Leia a demonstração até que finalmente a entenda. Esse é o único jeito de aprender e decorar.

Essas são as principais, mas você terá que aprender diversas outras regras de derivação. Elas serão importantes para a solução dos problemas nas provas, quando você provavelmente, não poderá consultar seus livros. Então fica a dica. Se você entender bem as deduções e fizer MUITOS exercícios usando essas regras, vai ficar craque e vai se sair bem nas provas. Tem que ter paciência. Trabalhar duro resolvendo os exercícios que o seu professor da disciplina de Cálculo vai passar. Isso vai fazer a diferença pra você. Você compreenderá que Cálculo é fácil (mas só pra quem estuda seriamente com afinco). Considere que o estudo dessa disciplina é o treinamento do seu cérebro para raciocínios bastante sofisticados dos quais você vai precisar nas demais disciplinas do seu curso. Por analogia, você deve saber que um atleta de alta performance tem que treinar muito. Não dá para chegar nas competições só com o atestado de inscrição. Os músculos precisam de treinamento especializado e do empenho dedicado do atleta. Cumprindo essa fase, o atleta vai pra competição seguro de si e, sempre com muito esforço, é bem capaz que ganhe uma medalha e suba no pódio. Se não der pódio, pelo menos

ela fará uma boa corrida e ficará “bem na fita” como se costuma dizer. Mas se não tiver treinado com dedicação, vai tropeçar nos próprios pés e pagará um “senhor Mico” na frente da arquibancada. Se tiver transmissão direta, o mundo inteiro verá o seu fiasco.

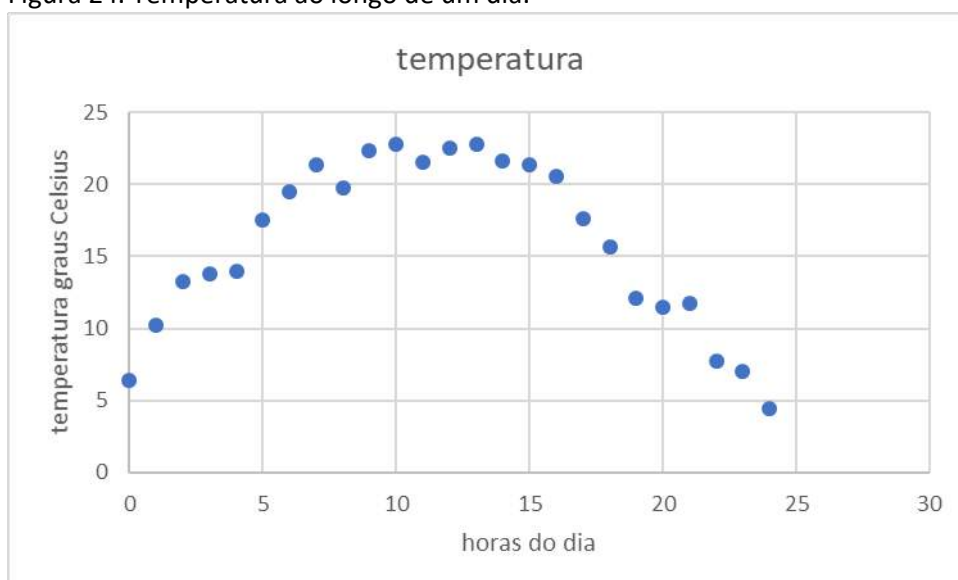
Lembre-se disso quando for fazer a sua primeira prova de Cálculo. Não deu muita bola pra matéria? Foi em todas as festas? Faltou às aulas (aproveitando a famigerada lei dos 30% de abono)? Então, você fez a coisa certa para dar tudo errado. Prepare-se para ficar vermelho na lista de notas que será pregada no seu mural. Mas, se você leu esse livro e seguiu as aulas do seu professor de Cálculo e fez os exercícios, e se preparou com afinco, então você estará seguro como o **Usain Bolt**, o flecha humana, campeão olímpico dos 100 metros, ou do **João do Pulo** que vocês nem conheceram (olhem no Google), o brasileiro campeão olímpico do salto triplo. Quando eles entravam na raia, tinham segurança que iriam vencer. E venciam. É assim que eu quero que você entre na sala de prova e sente na carteira como quem vai disputar a prova da olimpíada, sabendo de antemão qual o seu potencial e seguro daquilo que sabe. Afinal, para você, Cálculo agora é Fácil. Vai!

CAPÍTULO 6. INTEGRAL, A FUNÇÃO INVERSA DA DERIVADA, TAMBÉM É FÁCIL

As disciplinas de Cálculo I das diversas Universidades, às vezes, incluem também o conceito de Integrais. Por isso, incluímos esse último capítulo. Mas talvez você só vá estudar as integrais na disciplina de Cálculo II que será o objetivo do nosso próximo livro. Por via das dúvidas, vamos já falando desse assunto.

As integrais são correspondentes às funções inversas das derivadas. E correspondem à uma soma dos valores de uma função dentro de um intervalo. Nós vamos aprender que a integral realiza algebricamente a somatória dos valores de uma função e permite, por exemplo e entre outras utilidades, calcular o valor médio da função. Vamos pelos exemplos. Considere um gráfico que represente a temperatura de uma cidade ou região, medida por uma estação meteorológica. Vamos supor o seguinte gráfico ao longo de 24 horas. Vemos claramente que a temperatura tem um comportamento variável, sendo mínima nas proximidades da meia noite e máxima nas proximidades do meio dia.

Figura 24. Temperatura ao longo de um dia.



Própria autoria.

Agora imaginemos que queiramos saber a temperatura média. Todos sabemos fazer essa média. Basta somar todas as temperaturas e dividir pelo número de dados. Como temos 24 medidas (uma por hora) ao longo do dia, é fácil saber que a temperatura média será dada pela somatória dividida pelo número de medidas:

$$\text{Temperatura Média} = \frac{1}{24} \sum_{i=0}^{n=23} T(i)$$

No caso do gráfico acima, o resultado é: temperatura média = 15,97 graus Celsius.

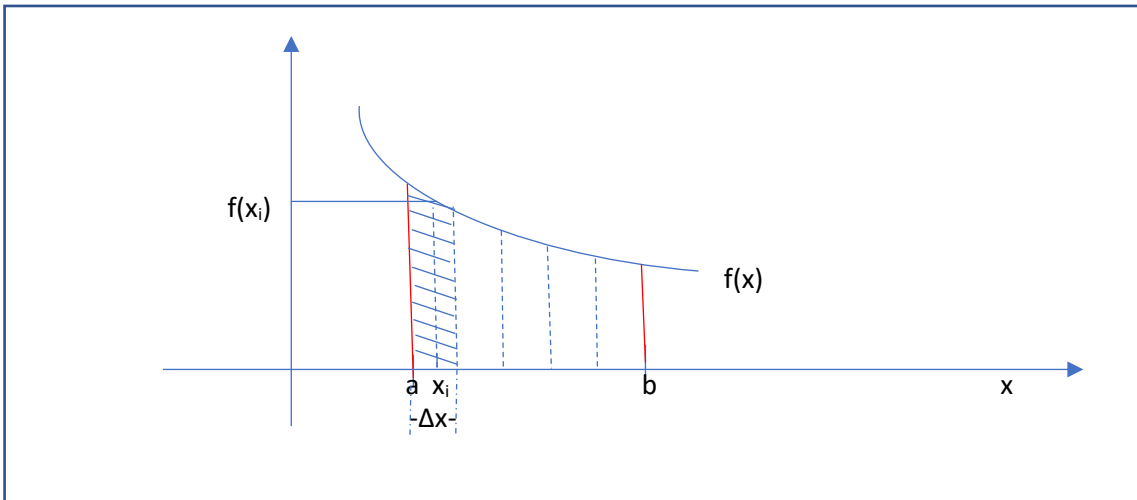
Esse procedimento acima, na verdade, usou a base da ideia de integral, aplicada a um número finito de dados (no caso em tela, os 24 pontos). Mas podemos calcular essa soma também para uma função contínua, de modo que integrar corresponde a somar os valores dessa função ao longo de um intervalo. A definição algébrica que está abaixo poderá em seguida ser interpretada geometricamente:

Definição algébrica da integral:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) * \Delta x \right)$$

Definição geométrica da integral:

Figura 25. Definição da integral através da geometria



Própria autoria.

É fácil ver que a multiplicação $f(x_i) * \Delta x$ corresponde aproximadamente à área do trapézio hachurado na figura acima. Se somarmos todas as áreas dos trapézios que aparecem sob a curva no intervalo (a, b) considerado, essa soma será uma razoável aproximação da área sob a curva de $f(x)$. Deste modo, quanto menor o Δx , melhor a aproximação da área sob a curva. Se agora tomamos o limite $\Delta x \rightarrow 0$, o resultado será a área exata da curva no intervalo em questão. Suponhamos agora que a curva, só para compararmos com o resultado anterior, corresponda à variação da temperatura do dia, durante um intervalo de tempo de **a** até **b**. Então, por analogia, a temperatura média neste intervalo será a divisão da integral de $f(t) * dt$ pela integral de dt .

No caso em tela temos:

$$\text{valor médio} = \frac{\int_a^b f(t).dt}{\int_a^b dt}$$

(Aqui vale, literalmente, um parêntese: é comum os estudantes, principalmente nas provas, quando estão sob pressão, esquecerem de escrever o diferencial da integral. Isso é um erro grave. O integrando deve ser lembrado como sendo o PRODUTO da função ($f(x)$) pelo intervalo (Δx) ou seja: $f(x) * \Delta x$. Quando calculamos ao limite, Δx se converte em dx . Por isso SEMPRE as integrais devem conter um diferencial no seu integrando. É só lembrar da frase mnemônica: **“integral sem diferencial não é legal!”**)

A associação do conceito de valor médio de uma função com as integrais, como definidas acima, será muito utilizado nas suas disciplinas do seu curso. Por isso estou frisando esse resultado. Mas na verdade, ainda nem sabemos calcular as integrais. Vamos trabalhar nisso agora, utilizando o conceito de função primitiva (é assim que o seu professor de Cálculo vai fazer, mas então você já saberá de antemão. Legal, né?

Função primitiva.

O conceito de função primitiva decorre da definição da derivada (que você já conhece bem, não é mesmo?). Você sabe que se uma função $f(x)$ pode ser derivada, tal que:

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

então $f(x)$ será a função primitiva de $g(x)$. Ou seja: $g(x)$ deriva de $f(x)$. Meio confuso? Então vamos ver.

Você já sabe que a derivada de $\sin(x)$ é igual ao $\cos(x)$. Assim, para obter o $\cos(x)$ você tem que derivar $\sin(x)$. Ou seja: $\sin(x)$ é a primitiva de $\cos(x)$. Uma função decorre da outra. Pensando desse modo, podemos definir a integração como a função inversa da derivação (e vice-versa).

Então são equivalentes as expressões:

$$\cos(x) = \frac{d[\sin(x)]}{dx} \rightarrow \text{cosseno de } x \text{ é a derivada do seno de } x \text{ ou,}$$

$$\sin(x) = \int \cos(x) * dx \rightarrow \text{seno de } x \text{ é a primitiva de cosseno de } x$$

Um outro exemplo seria:

$$3 * x^2 = \frac{dx^3}{dx}$$

e

$$x^3 = \int 3 * x^2 * dx$$

Aliás, existe uma regra importante que é a integração dos polinômios. Nesses casos, basta inverter a regra de derivação dos polinômios. Então teremos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(x^n)}{dx} = n * x^{n-1} ; \text{ portanto, a inversa seria: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

À primeira vista parece estranho, mas se você calcular a derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ você obterá:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = (n+1) * \frac{x^n}{(n+1)} = x^n$$

Essa regra, entretanto, tem uma exceção. Ela não vale no caso da seguinte integral:

$$\int x^{-1} dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1}, \text{ pois nesse caso apareceria um zero no denominador.}$$

Então, teremos um caso particular cuja demonstração é complicadinha, além do escopo desse livro. Por hora, basta você decorar a regra para não se confundir:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

A demonstração desta regra, baseia-se na demonstração do limite de Euler que define o número e que é a base dos logaritmos neperianos. Não se preocupe, seu professor de Cálculo vai ensinar.

Mas, podemos lembrar que a derivada é a função inversa da integral e, portanto, deduziremos agora uma regra de derivação que ficou faltando no capítulo das derivadas, ou seja: a derivada de funções logarítmicas: $\ln(x)$ e $\log_a(x)$. teremos, então:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \rightarrow \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

Se a base for diferente de e , teremos:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Você pode agora incluir essa nova regrinha na sua listinha das derivadas mais importantes e fundamentais, (você já organizou uma, né? Você vai precisar, hein!).

Perceba que essa maneira de definir a integral, não depende diretamente de um intervalo no domínio, mas somente da característica de variabilidade das funções. Assim, consideradas desse modo, as integrais são ditas indeterminadas, pois sempre pode existir uma outra função, adicionada de uma constante, que seja a primitiva daquela função dada. Por isso, é necessário adicionar essa hipotética constante às integrais indefinidas. O valor exato dessas constantes, só poderá ser encontrado quando aplicarmos esse cálculo a problemas concretos. Veremos em seguida exemplos de aplicação e você entenderá melhor. Então temos: se $f(x)$ é a primitiva de $g(x)$:

$$\int g(x) dx = f(x) + C ,$$

onde C é chamada de constante de integração. Melhor pegar um exemplo:

Vamos calcular:

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x)$$

Porque sabemos que a primitiva correspondente é $-\cos(x)$ (veja no capítulo 5). Ou seja:

$$\frac{d[-\cos(x)]}{dx} = \text{sen}(x)$$

Mas, se somarmos uma constante C ainda teríamos:

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C$$

Pois, de qualquer modo,

$$\frac{d[-\cos(x) + C]}{dx} = \text{sen}(x)$$

Leia com atenção os exemplos acima para entender bem esse conceito de função primitiva. Mas, não poderemos sempre conhecer a priori as primitivas das funções de modo que teremos que desenvolver técnicas algébricas para integração. Existem muitas, que você vai aprender durante a disciplina de Cálculo I. Algumas são bem simples e outras bem sofisticadas. Conforme a complexidade da função integrando, a integração por métodos analógicos pode ser muito difícil ou mesmo impossível. Mas, na disciplina de Cálculo Numérico, você vai aprender modos computacionais de resolvê-las. Por hora, vamos aprender as regras mais básicas de integração.

Regras de integração

A regra mais básica é tentar reconhecer qual a função primitiva do integrando. Muitas vezes isso é possível, como nos exemplos das funções trigonométricas e polinomiais (como visto no item anterior). Aqui, está resolvida a questão. Você pode achar as funções primitivas nas listas de integração que você encontrará nos apêndices da maior parte dos livros de Cálculo. Procure no seu. Entretanto, outras vezes é impossível achar a primitiva de antemão. Aqui, tem que achar um raciocínio algébrico para facilitar seu trabalho. Vamos dar alguns exemplos:

Integração por substituição.

Nesse caso, você tem que encontrar uma mudança de variável para facilitar seu trabalho, transformando o integrando numa função para a qual você conheça a primitiva. Aqui faz a integral e “desfaz” a mudança de variável para achar o resultado final. Vamos por exemplos:

Vamos supor a integral: $\int x \cos(x^2) dx$

Ela parece complicada, pois não conhecemos, de antemão, a primitiva. Então faremos uma substituição:

$$x^2 = u$$

Assim, o integrando resulta escrito como se fosse uma função composta:

$$x \cos(x^2) = x \cos(u)$$

Agora, entretanto, temos que recalcular o diferencial na nova variável. Para isso, podemos usar a regra da cadeia para diferenciação, teremos:

$$du = 2x dx \rightarrow \frac{du}{2x} = dx$$

Portanto a integral se transforma:

$$\int x * \cos(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

Agora, sabemos que a primitiva de $\cos(u)$ é $\sin(u)$. Logo :

$$\int x * \cos(x^2) = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{\sin(u)}{2} + C$$

e finalmente, “desfazendo” a substituição, vem:

$$\rightarrow \int x * \cos(x^2) = \frac{\sin(x^2)}{2} + C$$

Essa técnica funciona quase sempre, mas existem casos em que não se consegue uma substituição adequada. Nesses casos, usamos a regra da integração por partes que se baseia na regra da diferenciação do produto.

Regra da integração por partes

Então, vamos tirar partido do fato de que muitas vezes, o integrando de uma integral contém uma composição de uma função com o diferencial de outra função. Por exemplo:

$$\int x e^x dx = ?$$

Nesse caso percebemos que se considerarmos

$$x = u \quad , \rightarrow \quad du = dx \quad e \quad e^x dx = dv \rightarrow v = e^x$$

Então a nossa integral se traduz por:

$$\int u * dv$$

Não podemos fazer essa integral, pois o diferencial dv não tem explicitamente a variável u .

Mas, como sabemos, lembrando da regra da derivada do produto:

$$\frac{d(u(x)*v(x))}{dx} = u(x) * \frac{dv(x)}{dx} + v(x) * \frac{du(x)}{dx} \rightarrow \text{regra de derivação do produto}$$

De onde podemos escrever (na notação de Newton):

$$(u * v)' = u(x) * v' + v(x) * u' \rightarrow \text{Essa expressão pode ser integrada e obtemos}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u * v = & \int u dv & + \int v du \end{array} \text{ , e finalmente,}$$

$$\int u dv = u * v - \int v du \quad \rightarrow \text{regra da integração por partes.}$$

Voltando agora para o nosso exemplo, onde

$$x = u \quad , \rightarrow \quad du = dx \quad e \quad dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$$

Então a nossa integral se traduz por:

$$\int x e^x dx = \int u * dv = u * v - \int v du = x * e^x - \int e^x dx =$$

$$\int x e^x dx = x * e^x - \int e^x dx = x * e^x - e^x$$

$$\int x e^x dx = e^x * (x - 1) + C$$

Fiz essa demonstração bem detalhada porque você precisa entender bem. **Leia e releia diversas vezes até que tenha entendido bem.** Faça os muitos exercícios que utilizam este método que você encontrará em qualquer livro de Cálculo. É apenas exercitando bastante que você adquirirá uma espécie de intuição que vai facilitar para descobrir qual método de integração usar. Além destes dois principais que eu citei, existem muitos outros que você vai aprender nas suas aulas da disciplina de Cálculo. Mas os principais você já sabe e já tem proficiência para aprender os outros que virão. Eles são:

Integração por substituições trigonométricas \rightarrow para integrar expressões com raiz quadrada

Integração por frações parciais \rightarrow para integrar expressões em forma de frações

Integração por substituições hiperbólicas \rightarrow para integra funções trigonométricas hiperbólicas

Seu professor de Cálculo vai mostrar esses métodos para você, mas dá para obter bastante informações sobre esses métodos no site abaixo:

[https://pt.wikibooks.org/wiki/Cálculo_\(Volume_1\)/Técnicas_de_integração](https://pt.wikibooks.org/wiki/Cálculo_(Volume_1)/Técnicas_de_integração).

Integrais definidas

Você pode calcular as integrais num intervalo definido, como fizemos no caso anterior onde calculamos a temperatura média. Lembra? A maneira de fazer isso, é encontrar a primitiva (usando alguma das regras de integração que você já conhece (ou aquelas que você ainda vai aprender) e aí substituir na expressão encontrada, os dois extremos da integração. E então subtrair os dois valores encontrados. Essa providência é importante, pois confere à expressão abstrata, que você encontrou na integração, um caráter concreto e, portanto, um significado físico ou geométrico (ou químico ou biológico, ou financeiro etc, dependendo de que área você estiver estudando). Por exemplo:

$$\int_a^b \text{sen}(x) dx = \cos(x) \Big|_a^b = \cos(a) - \cos(b)$$

Outro exemplo: Vamos calcular a massa de um corpo cilíndrico com densidade $\rho = 2 \text{ g/cm}^3$ cujo volume é dado pela seguinte expressão (que você conhece do ensino médio):

Volume do cilindro é função da altura $\rightarrow V(h) = \pi R^2 * h$. Então, a variabilidade dessa função pode ser obtida derivando-se a função em relação à variável h :

$$\frac{dV(h)}{dh} = \pi R^2$$

Assim, dizemos que o diferencial de Volume do cilindro é:

$$\rightarrow dV(h) = (\pi R^2) * (dh).$$

Então, a integral definida:

$$\int_0^3 dV(h) = \pi * R^2 * \int_0^3 dh$$

vai determinar o volume do cilindro em função da sua altura h . Vamos supor que o raio seja constante ($R=2 \text{ cm}$) e que a altura do cilindro seja 15 cm . Então teremos:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \\ \pi * R^2 * \int_0^{15} dh &= \pi * 4 * h = \pi * [15 * 4 - 0] = 60 * \pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

E finalmente, multiplicado pela densidade teremos:

$$\text{massa} = (60 * \pi) \text{ cm}^3 * 2 \text{ g/cm}^3 = 120 * \pi \text{ gramas}$$

Embora seja um exemplo bastante simples, por enquanto, serve para mostrar como a integração pode ser útil para descobrir propriedades dos objetos que estudamos na ciência e na tecnologia. Durante seu curso de Cálculo você vai aprender como descobrir o volume, a massa, a temperatura e tantas outras propriedades geométricas, físicas, químicas etc, de objetos diversos, de formas mais complicadas que os cilindros, que aparecerão nas disciplinas que você vai cursar nos próximos anos. Isso inclui, só como exemplo, as variações de temperatura e a resistência das embalagens dos alimentos (EAlm), as peças mecânicas das turbinas dos

aviões(EAer), as formas das moléculas(QUI), as variações de volume de gases em recipientes(EQm), as tensões mecânicas nas estruturas da engenharia civil (ECiv) e Mecânica (EMec), as ressonâncias nos instrumentos musicais e nos átomos e moléculas (FIS), as vibrações em máquinas industriais (EMt), a utilização de vibrações para realizar a colheita de frutas e outros vegetais que nascem em árvores (EBios), a Variação patrimonial (Econ) e tantas outras.

Discussão Final

As integrais são muito usadas em todas as Ciências e Tecnologias de modo que você vai ter que fazer integrais muitas vezes ao longo do seu curso (qualquer um da área de exatas) e ao longo da sua vida profissional. A aplicação mais importante das integrais é na solução das equações diferenciais que são equações que incluem derivadas. Essas equações são usadas para descrever qualquer fenômeno da natureza ou da tecnologia que varie no tempo ou no espaço ou em função de qualquer grandeza de interesse (por exemplo, pressão, temperatura, umidade, viscosidade etc). Assim, praticamente todos os fenômenos científicos ou da tecnologia são descritos por equações deste tipo. Até mesmo as situações de equilíbrio, nas quais é a estabilidade que interessa, podem ser estudadas por equações diferenciais, no caso particular em que a variabilidade (e, portanto, a derivada) é zero.

Para resolver essas equações, você vai ter que integrá-las, já que a função inversa das diferenciais é a integral. Portanto, prepare-se para fazer integrais por ainda muito tempo. Pode parecer difícil à primeira vista. Você vai aprender a resolver as equações diferenciais no Cálculo IV. Mas você leu esse livro e deve já ter proficiência para entender todas essas coisas. Comece tranquilamente com o Cálculo I. Essa é a disciplina mais importante do seu curso (qualquer que ele seja). Você agora tem todas as condições para se sair bem nesse importante objetivo acadêmico. Conseguindo isso, as demais disciplinas de Cálculo vão parecer ainda mais tranquilas para você. Mas tem que estudar muito e treinar os seus neurônios para trabalharem do mesmo modo que trabalhavam os neurônios de Issac Newton, Leibntz, Gauss, Euler e tantos outros mestres da Humanidade. Eles eram gênios, sim. Mas eram humanos e não alienígenas. Você, portanto, é perfeitamente capaz de entender o que eles falam (sim, o verbo está no presente, pois esses mestres falam conosco através dos livros). Quanto mais estudar, melhor os entenderá. Encare o estudo como uma conversa com os Mestres da Humanidade na área de matemática. É uma satisfação imensa quando você lê um dos livros desses caras e percebe que entende o que eles dizem. Essa percepção vai deixar claro para você aquilo que venho falando desde o início. **Cálculo é Fácil**. E, agora, você já sabe disso. Então, vá tranquilo. Vá bater um papo com o Newton, com o Pitágoras, com Leibnitz, Euclides, Euler, Fourier, Galileu, Einstein, Gauss, Heisenberg, De Broglie, Feynman, Cesar Lattes, Schenberg, e tantos outros caras legais. Alguns você já conhecia, outros conheceu ao longo desse livro. Muitos outros você vai conhecer ao longo do seu curso. Na faculdade a gente faz muitos amigos. Todos eles são bons de conversa. E você já sabe falar a língua deles. Você ainda tem um sotaque forte, e ainda comete uns errinhos de sintaxe. É normal. Mas já vai entender e se fazer entender. Daqui pra frente será só Sucesso! porque **Cálculo é fácil!**

Bibliografia Básica

ÁVILA, G.S.S. Cálculo I - Funções de uma variável. 4ª edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1983.

BARTLE, RG The elements of real analysis, 2nd ed., John Wiley, 1976.

BOULOS, P. Cálculo Diferencial e Integral, vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1999.

FLEMING, D.; GONÇALVES, M.B. Cálculo A - Funções, limite, derivação, integração. 5ª ed., Makron Books do Brasil Editora Ltda., 1992.

GUIDORIZZI, L.H. Um curso de Cálculo - vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.,1985

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica - vol. 1, 2ª edição, Harper & Row do Brasil Ltda., 1982.

LARSON, R. Cálculo Aplicado: Curso Rápido. Cengage Learning, 2011.

MORETTIN, P A.; BUSSAB, W. O. Cálculo: funções de uma variável, 3ª ed. Atual Editora, 1987.

MUNEM, M.A.; FOULS, D.J. Cálculo, 2ª ed., Guanabara Dois, 1986.

PENNEY, D.E. Cálculo com Geometria Analítica. 4ª ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997. 486p.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1995. Vol. 1

SIMMONS, G.F. Cálculo com geometria analítica. São Paulo: Pearson Makron Books, 2010. Vol. 1.



Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos – USP
Departamento de Engenharia de Biosistemas



ISBN 978-65-87023-06-9 (e-book)