1

Manual de cinemática y dinámica

Santiago Olmedo

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

Universidad Politécnica Salesiana

MANUAL DE CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Santiago Olmedo

Santiago Olmedo

Manual de Cinemática y Dinámica

2012

ABYA YALA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA

IUS
INSTITUCIONES SALESIANAS DE EDUCACIÓN SUPERIOR

MANUAL DE CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Santiago Olmedo

1era. edición:	© Editorial Universitaria Abya-Yala Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2 862213 Fax: (+593 2) 4 088958 e-mail: rpublicas@ups.edu.ec www.ups.edu.ec Cuenca-Ecuador Secretaría Técnica de Investigación UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA Casilla: 2074 P.B.X.: (+593 7) 2 862213 Cuenca-Ecuador
Diseño y Diagramación en LaTeX:	Andrés Merino. Editorial Universitaria Abya-Yala
Impresión:	Editorial Universitaria Abya-Yala
ISBN UPS:	978-9978-10-097-4

Impreso en Quito-Ecuador, marzo 2012

Índice general

Introducción

La razón principal para estudiar Física en los primeros años de una carrera de ingeniería es desarrollar en los estudiantes la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y simple, y de aplicar para su solución principios elementales perfectamente comprendidos.

Ajustado a este criterio, este manual se presenta como una guía que enseña la forma como se resuelven cuestiones de Física, particularmente aquellas que tienen relación con la Cinemática y la Dinámica, evitando las confusiones más usuales. No obstante, es necesario precisar que no existe técnica alguna que halle soluciones de forma "mágica", sino que, haciendo uso de nuestra razón, hemos de ir descubriendo en cada problema su aspecto particular.

Entender los elementos del problema, plantearlo y solucionarlo no es tarea fácil, pues son muchas las relaciones que intervienen en los procesos físicos. En este folleto se irá mostrando, a partir de los conceptos elementales, los distintos procesos que se dan y las ecuaciones que las involucran.

El manual está dividido en dos partes: Cinemática y Dinámica. En la primera se desarrollan ejercicios referentes al movimiento rectilíneo, movimiento errático, movimiento parabólico y movimiento circular. En la segunda ejercicios sobre las leyes de Newton, impulso y cantidad de movimiento y choque.

Cada temática de la guía exhibe, en primer lugar, los conceptos fundamentales que deben ser conocidos por el estudiante y, a continuación, ejercicios resueltos afines.

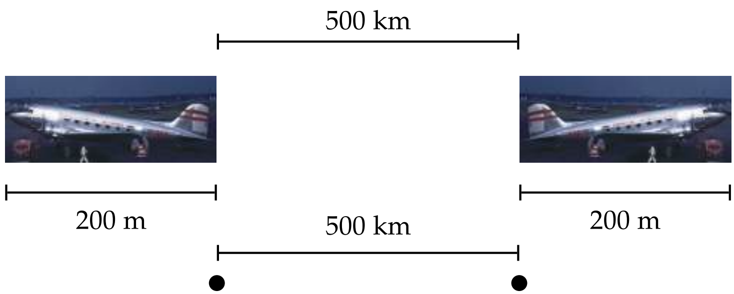
En cualquier caso, la concepción final de este texto es la de un manual: fácil de manejar y entender.

Cinemática

La Cinemática es la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, denominados, en sentido general, como *partículas*.

Así, se puede definir la 'partícula' como todo cuerpo que posee una posición, sin considerar sus dimensiones. En otras palabras, el desplazamiento o movimiento del cuerpo tiene mucha más importancia que sus dimensiones.

Por ejemplo, el gráfico muestra la posición de dos partículas separadas una distancia de 500 km. Nótese que el tamaño de ellas no tiene incumbencia en ese estado y por ello se puede representarlas como un punto.

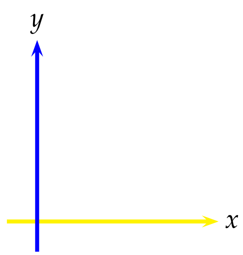


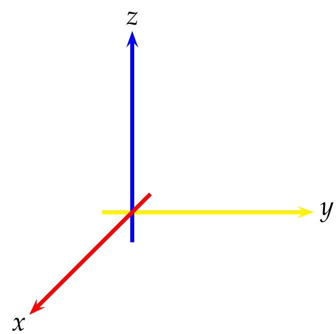
Descripción del movimiento

Una partícula se encuentra en movimiento (o reposo) siempre en relación a un punto de referencia, que generalmente es el punto de origen en un sistema de coordenadas.

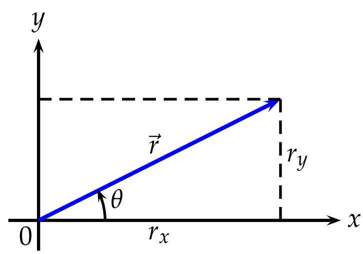
En ese sentido, un sistema de coordenadas no es más que dos o tres rectas ‘imaginarias’ que se cruzan ortogonalmente.

En las gráficas siguientes se muestran sistemas de coordenadas en dos y tres dimensiones.





Vector posición en dos dimensiones ($\vec{r}$)



• *Coordenadas Polares*

$$\underset{\text{Módulo}}{\underset{\downarrow}{|\vec{r}|}} \qquad ; \qquad \underset{\text{Dirección}}{\underset{\downarrow}{\theta}}$$

El *módulo* es la distancia desde el origen de coordenadas hasta la partícula.

La *dirección* es el ángulo, medido desde el eje positivo de las x en sentido anti horario, hasta el vector.

• *Coordenadas Rectangulares*

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j}$$

donde

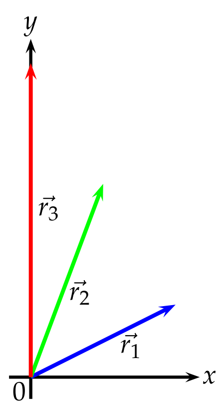
$$r_x = r\cos\theta$$
$$r_y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Posición con respecto al tiempo

Podemos definir al tiempo como el intervalo entre dos sucesos;en el sistema internacional el tiempo es medido en segundos (s) y se define actualmente como la duración de 9.192’631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio (133).

Veamos el ejemplo

$\vec{r}$(m)	t(s)
$6\vec{i} + 3\vec{j}$	0
$3\vec{i} + 8\vec{j}$	2
$0\vec{i} + 13\vec{j}$	4



En $0 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned}
\vec{v} =& \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_f} - \vec{r_o}}{t_f - t_o} \\
\vec{v} =& \frac{(3\vec{i} + 8\vec{j}) - (6\vec{i} + 3\vec{j})}{2 - 0} \\
\vec{v} =& \frac{-3\vec{i} + 5\vec{j}}{2} \\
\vec{v} =& -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}.
\end{aligned}$$

En $2 \leq t \leq 4$

$$\begin{aligned}
\vec{v} =& \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_f} - \vec{r_o}}{t_f - t_o} \\
\vec{v} =& \frac{(0\vec{i} + 1\vec{3}) - (3\vec{i} + 8\vec{j})}{4 - 2} \\
\vec{v} =& \frac{-3\vec{i} + 5\vec{j}}{2} \\
\vec{v} =& -\frac{3}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j}.
\end{aligned}$$

Conclusión: la velocidad es constante.

Se debe considerar que si el vector velocidad $\vec{v}$ es el mismo en todos los puntos de la trayectoria es un *Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)*.

• Trayectoria

Se define como la unión de todos los puntos por donde pasa la partícula a lo largo de un intervalo de tiempo.

En un tiempo macro:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

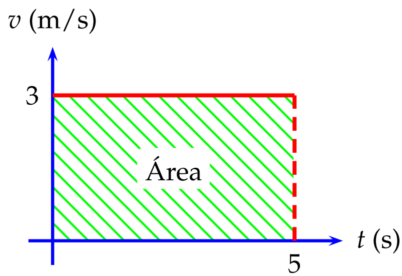
donde $\vec{v}$ es la velocidad promedio.

Analizando en $\lim \Delta t \to 0$, se convierte en dt (diferencial tiempo)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\text{diferencial de posición}}{\text{diferencial de tiempo}}.$$

Ejemplo

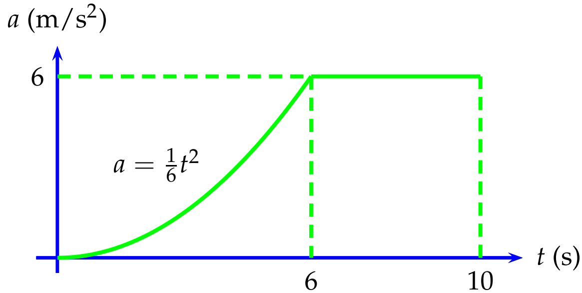


$$\text{Área} = b \cdot h = 5\text{ s} \times 3\text{ m/s} = 15\text{ m}$$

El área representa el desplazamiento

$$\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt}\\
v \cdot dt &= ds\\
ds &= v \cdot dt\\
\int_{s_o}^{s} ds &= \int_{t=0}^{t} v \cdot dt\\
s\Big|_{s_o}^{s} &= (v \cdot t)\Big|_{t=0}^{t}\\
s - s_o &= v(t-0)\\
s - s_o &= v \cdot t\\
s &= s_o + v \cdot t.
\end{aligned}$$

Ejercicio: Un carro de carreras parte del reposo y viaja a lo largo de un camino recto con la aceleración mostrada. Construya la gráfica velocidad - tiempo y encuentre la distancia recorrida en 10 segundos.



$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$ds = v \cdot dt$$
$$a \cdot ds = a \cdot v \cdot dt; \qquad a = \frac{dv}{dt}$$
$$a \cdot ds = \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt$$
$$a \cdot ds = v \cdot dv.$$

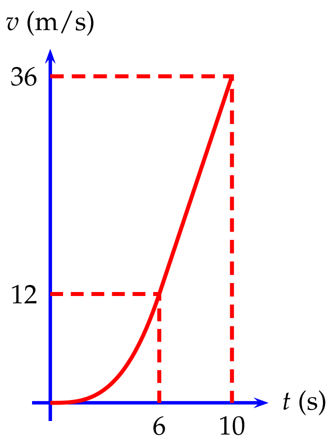
En $0 < t < 6$, $a = \frac{1}{6}t^2$

$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$a \cdot dt = dv$$
$$dv = a \cdot dt$$
$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_{t_o}^{t} v \cdot dt$$
$$v\Big|_0^v = \int_0^t \frac{1}{6}t^2 dt$$
$$v - 0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^3}{3}\Big|_0^t$$

$$v = \frac{t^3}{18}\bigg|_0^t v(t-0)$$
$$v = \frac{t^3}{18} - \frac{0}{18}$$
$$v = \frac{t^3}{18}.$$

En $6 < t < 10$, $a = 6$

$$dv = a \cdot dt$$
$$\int_{12}^{v} dv = \int_{6}^{t} 6 \cdot dt$$
$$v\bigg|_{12}^{v} = 6t\bigg|_{6}^{t}$$
$$v - 12 = 6t - 6 \cdot 6$$
$$v - 12 = 6t - 36$$
$$v = 6t - 24.$$



En $0 < t < 6$, $v = \frac{t^3}{18}$

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$\int ds = \int v \cdot dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^s ds &= \int_0^t v \cdot dt \\
s &= \int_0^t \frac{t^3}{18} \cdot dt \\
s &= \left.\frac{t^4}{72}\right|_0^t \\
s &= \frac{t^4}{72} \\
s_1 &= \frac{6^4}{72} \\
s_1 &= 18 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

En $6 < t < 10, v = 6t - 24$

$$
\begin{aligned}
\int_{18}^s ds &= \int_6^t v \cdot dt \\
s - 18 &= \int_6^t (6t - 24) dt \\
s - 18 &= \left.\frac{6t^2}{2}\right|_6^t - 24\Big|_6^t \\
s - 18 &= 3t^2 - 24t - (3 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6) \\
s &= 3t^2 - 24t + 54 \\
s_2 &= 3(10)^2 - 24(10) + 54 \\
s_2 &= 114 \text{ m}
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\begin{aligned}
s_t &= s_1 + s_2 \\
s_t &= 18 + 114 \\
s_t &= 132 \text{ m.}
\end{aligned}
$$

Ejercicio: Un proyectil pequeño es disparado verticalmente hacia abajo a través de un fluido con velocidad inicial de 60 m/s, debido a la resistencia del fluido el proyectil presenta una desaceleración igual a $-0,4v^3$ m/s^2. Determine la velocidad y la posición del proyectil 4 s después de haber sido disparado.

$$a = -0{,}4v^3 \text{m/s}^2.$$

Para calcular la posición:

$$\begin{aligned}
a ds &= v dv \\
-0{,}4v^3 ds &= v dv \\
ds &= \frac{v}{-0{,}4v^3} dv \\
\int_0^s ds &= \int_{60}^v \frac{dv}{-0{,}4v^2} \\
s &= -\frac{1}{0{,}4}\frac{v^{-1}}{-1}\Big|_{60}^{v} \\
s &= \frac{1}{0{,}4}\frac{1}{v}\Big|_{60}^{v} \\
s &= \frac{1}{0{,}4}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{60}\right) \\
s &= \frac{1}{0{,}4v} - \frac{1}{0{,}4 \cdot 60} \\
s &= \frac{1}{0{,}4v} - \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Para calcular la velocidad:

$$\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} \\
-0{,}4v^3 &= \frac{dv}{dt} \\
dt &= \frac{dv}{-0{,}4v^3} \\
\int_0^t dt &= -\frac{1}{-0{,}4}\int_{60}^v v^{-3} dv \\
t &= \frac{1}{-0{,}4} \cdot \frac{v^{-2}}{-2}\Big|_{60}^{v} \\
t &= \frac{1}{0{,}8v^2}\Big|_{60}^{v}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{0{,}8v^2} - \frac{1}{0{,}8 \cdot 60} \\
t &= \frac{1}{0{,}8v^2} - \frac{1}{48} \\
t + \frac{1}{48} &= \frac{1}{0{,}8v^2} \\
\frac{48t+1}{48} &= \frac{1}{0{,}8v^2} \\
0{,}8v^2 &= \frac{48}{48t+1} \\
\sqrt{v^2} &= \sqrt{\frac{48}{0{,}8(48t+1)}} \\
v &= \sqrt{\frac{60}{48t+1}}.
\end{aligned}
$$

Si $t = 4$

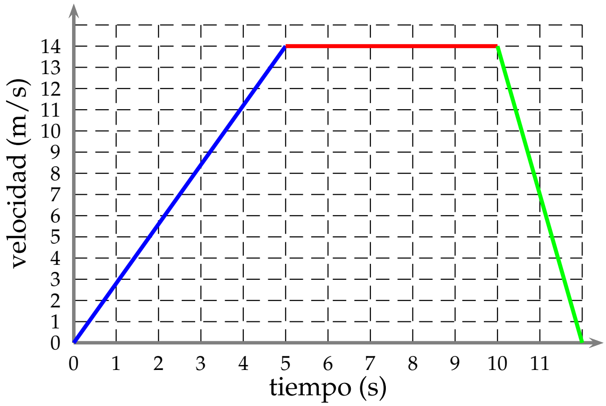
$$v = \sqrt{\frac{60}{48(4)+1}} = 0{,}56 \text{ m/s}.$$

Si $v = 0{,}56$ m/s

$$s = \frac{1}{0{,}4 \cdot 0{,}56} - \frac{1}{24} = 4{,}42 \text{ m}.$$

Movimiento errático

El movimiento errático se da cuando un cuerpo que tiene aceleración seguido de desaceleraciones continuas, no mantiene un solo tipo de movimiento. Por ejemplo, una motocicleta en reposo cuando $s = 0$, viaja a lo largo de un camino recto con la rapidez mostrada en la gráfica de velocidad vs tiempo.Construyamos la gráfica de espacio vs tiempo y aceleración vs tiempo.



Para pasar valores en km/h a m/s se usa la relación siguiente:

$$Mks = \frac{1\text{ km}}{\text{h}} \left| \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} \right| \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} = \frac{1}{3{,}6}.$$

Se puede calcular la pendiente para hallar la ecuación de cada recta.

Movimiento 1:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{14 - 0}{5 - 0} \\ &= \frac{14}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{y - y_1}{x - x_1} \\ \frac{14}{5} &= \frac{v - 14}{t - 5} \\ 14(t - 5) &= 5(v - 14) \\ 14t - 70 &= 5v - 70 \\ v &= \frac{14}{5}t \end{aligned}$$

Movimiento 2:

$$\begin{aligned} v &= \text{constante} \\ v &= 14. \end{aligned}$$

Movimiento 3:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{0 - 14}{12 - 10} \\ &= \frac{-14}{2} = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -7 &= \frac{v - 14}{t - 10} \\ -7(t - 10) &= v - 14 \\ v &= -7t - 70 + 14 \\ v &= -7t + 84. \end{aligned}$$

Para el gráfico de aceleración, derivando la velocidad:
Mov. 1:

$$\begin{aligned} v &= \frac{14}{5}t \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{14}{5} \\ a &= \frac{14}{5}. \end{aligned}$$

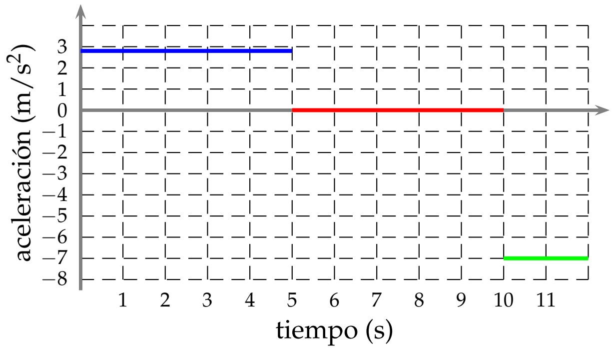
Mov. 2:

$$\begin{aligned} v &= 14 \\ \frac{dv}{dt} &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Mov. 3:

$$v = -7t + 84$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -7\\ a &= -7.\end{aligned}$$



Mov. 1:

$$\begin{aligned}v &= \frac{14}{5}t\\ \frac{ds}{dt} &= \frac{14}{5}t\\ \int_0^s ds &= \int_0^t \frac{14}{5}t\cdot dt\\ s-0 &= \frac{14}{5}t^2 2\\ s &= \frac{7}{5}t^2,\end{aligned}$$

para $t=5$, $s=35$.

Mov. 2:

$$\begin{aligned}v &= 14\\ \frac{ds}{dt} &= 14\\ \int_{35}^s ds &= \int_5^t 14\cdot dt\\ s-35 &= 14\int_5^t dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s - 35 &= 14(t-5) \\ s &= 14t - 70 + 35 \\ s &= 14t - 35, \end{aligned}$$

para $t = 10$, $s = 105$.

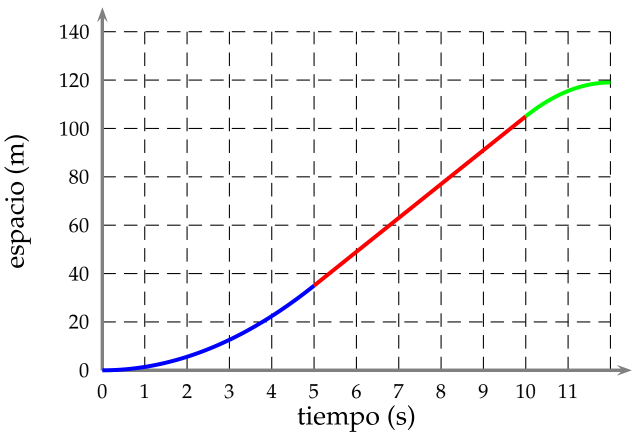
Mov. 3:

$$\begin{aligned} v &= -7t + 85 \\ \frac{ds}{dt} &= -7t + 85 \\ \int_{105}^{s} ds &= \int_{10}^{t} (-7t + 85)dt \end{aligned}$$

obteniéndose

$$s = -\frac{7}{2}t^2 + 84t - 385$$

para $t = 10$, $s = 105$.



Ejercicio: Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con $a = \frac{5}{3s^{1/3}+s^{5/2}}$ medida en $\mathrm{m/s^2}$ y 5 m. Determine la velocidad cuando una partícula se encuentra a $s = 2$ m si parte del reposo cuando $s = 1$ m.

$$ads = vdv$$

$$\int_1^2 \frac{5}{3s^{1/3}+s^{5/2}}ds = \int_0^v dv$$
$$\int_1^2 \frac{5}{3s^{1/3}+s^{5/2}}ds = \frac{v^2}{2}\Big|_0^v.$$

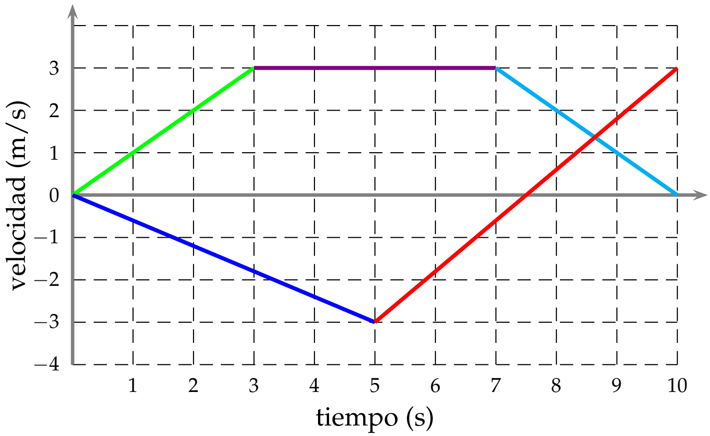
Utilizando la regla se Simpson

n	s_n	$a_n = \dfrac{5}{3s_n^{1/3}+s_n^{5/2}}$	$\dfrac{a_n + s_{a+1}}{2(s_{n+1}-s_n)}$
1	1	1,25	0,11976197
2	1,1	1,145239489	0,10972328
3	1,2	1,049226194	0,10052829
4	1,3	0,961339701	0,09211853
5	1,4	0,881030861	0,08444045
6	1,5	0,807778103	0,07744245
7	1,6	0,741070807	0,07107386
8	1,7	0,680406471	0,06528503
9	1,8	0,625294096	0,06002768
10	1,9	0,575259564	0,05525552
11	2	0,529850876	

Sumatoria: 0,83565707, por lo tanto

$$0{,}8356 = \frac{v^2}{2}$$
$$v = \sqrt{2{,}0836}$$
$$v = 1{,}293 \text{ m/s}^2.$$

Ejercicio: Teniendo el gráfico de $v - t$, hallar el gráfico de $s - t$ concluir cuándo y dónde se cruzan.



Mov. 1:

$$v = t$$
$$\frac{ds}{dt} = v$$
$$ds = vdt$$
$$\int_{-20}^{s} ds = \int_{0}^{t} tdt$$
$$s + 20 = \frac{t^2}{2}$$
$$s = \frac{t^2}{2} - 20,$$

si $t = 3$, $s = -15,5$.

Mov. 2:

$$v = 3$$
$$\frac{ds}{dt} = v$$
$$ds = vdt$$
$$\int_{-15,5}^{s} ds = \int_{3}^{t} 3dt$$
$$s + 15,5 = 3(t - 3)$$

$$s = 3t - 24{,}5,$$

si $t = 7$, $s = -3{,}5$.

Mov. 3:

$$v = 10 - t$$
$$\frac{ds}{dt} = v$$
$$ds = vdt$$
$$\int_{-3{,}5}^{s} ds = \int_{7}^{t} (10 - t)dt$$
$$s + 3{,}5 = \left(10t - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_7^t$$
$$s + 3{,}5 = 10t - \frac{t^2}{2} - 70 + \frac{49}{2}$$
$$s = -\frac{t^2}{2} + 10t - 49.$$

Mov. 4:

$$v = -0{,}6t$$
$$\frac{ds}{dt} = v$$
$$ds = vdt$$
$$\int_{10}^{s} ds = -\int_{0}^{t} 0{,}6tdt$$
$$s - 10 = -0{,}6\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t$$
$$s = -0{,}3t^2 + 10,$$

si $t = 5$, $s = 2{,}5$.

Mov. 5:

$$v = 1{,}2t - 9$$
$$\frac{ds}{dt} = v$$

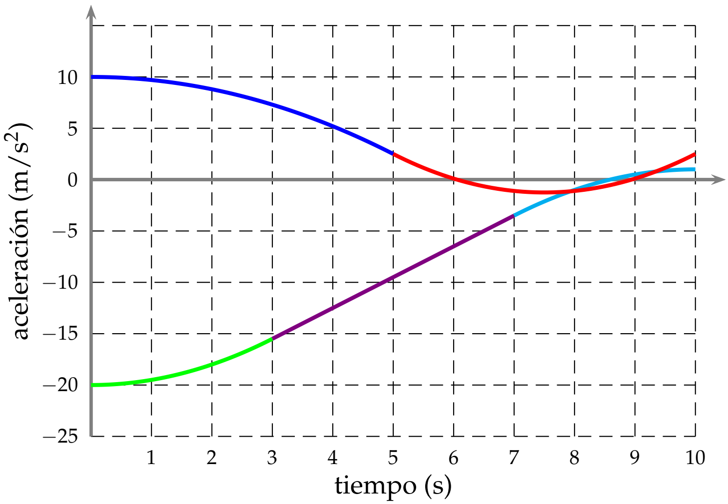
$$ds = vdt$$

$$\int_{-2,5}^{s} ds = -\int_{5}^{t} (1{,}2t - 9)dt$$

$$s + 2{,}5 = 1{,}2\left(\frac{t^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right) - 9(t-5)$$

$$s + 2{,}5 = 0{,}6t^2 - 9t - 0{,}6 \cdot 5^2 - 9{,}5$$

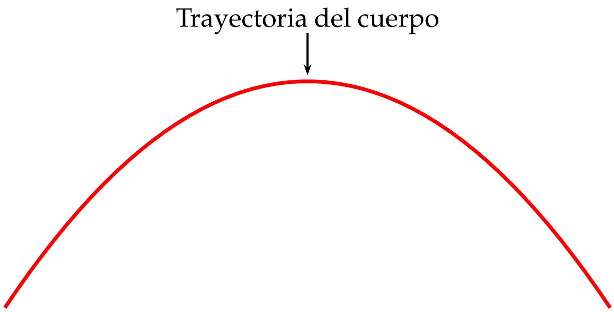
$$s = 0{,}6t^2 - 9t + 32{,}5.$$



Los móviles si se cruzan.

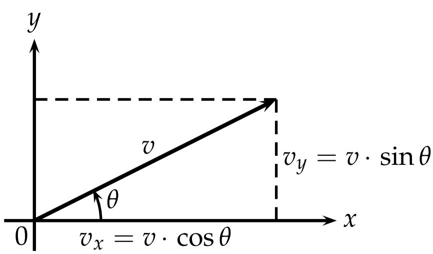
Movimiento parabólico

Es el movimiento de una partícula en dos dimensiones describiendo una trayectoria parabólica. Se corresponde con la trayectoria ideal de un proyectil que se mueve en un medio que no ofrece resistencia al avance y que está sujeto a un campo gravitatorio uniforme. También es posible demostrar que puede ser analizado como la composición de dos movimientos rectilíneos, un movimiento rectilíneo uniforme horizontal y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado vertical.



- *Tiro parabólico*

En las cercanías de la superficie terrestre se comporta de la siguiente manera:



Se debe tomar en consideración que la aceleración en este movimiento es la aceleración de la gravedad, que sabemos que no es constante sino que depende de la distancia del punto de análisis con el centro de la Tierra.

• *Ecuaciones del movimiento parabólico*

MRUV

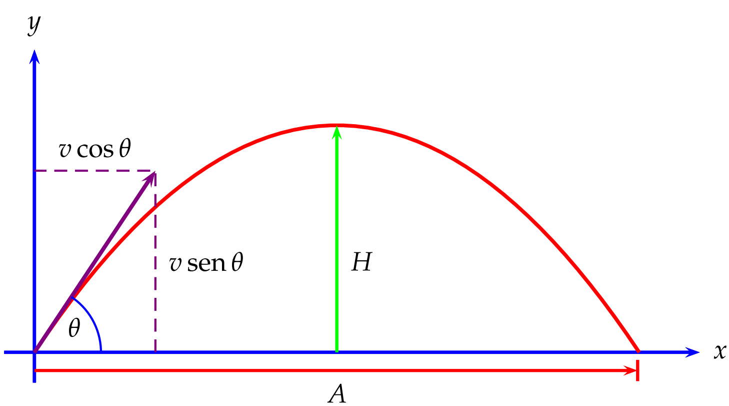
$$v_f = v_o + a \cdot t$$
$$e = v_o \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$v_f^2 = v_o^2 + 2 \cdot a \cdot e.$$

Caída Libre

$$v_{fy} = v_{oy} - g \cdot t$$
$$h = v_{oy} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$
$$v_{fy}^2 = v_{oy}^2 + 2 \cdot g \cdot h.$$

Siempre tomando en cuenta con respecto a un eje coordenado.

Ejercicio: Se tiene un tiro parabólico con V_{oy} θ. Hallar una expresión para el alcance máximo y para la altura máxima.



Origen $(0, 0)$ a $t = 0$

$$v_{fy} - v_{oy} = -g \cdot t$$

$$
\begin{gathered}
v_{oy} = g \cdot t \\
\frac{v_{oy}}{g} = t \\
\frac{v_o \cdot \operatorname{sen}\theta}{g} = t \\
t_{\text{subida}} = t_{\text{bajada}} \\
t_{\text{vuelo}} = t_{\text{subida}} + t_{\text{bajada}} \\
t_v = \frac{2 \cdot v_o \cdot \operatorname{sen}\theta}{g}.
\end{gathered}
$$

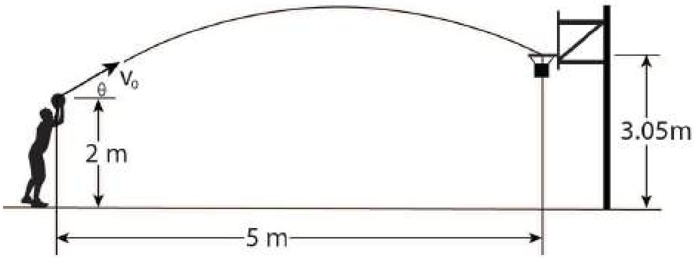
Altura máxima:

$$
\begin{gathered}
v_{fy}^2 - v_{oy}^2 = -2 \cdot g \cdot h \\
\frac{v_{oy}^2}{2g} = h \\
H = \frac{(v_o \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g} \\
H = \frac{v_o^2 \cdot \operatorname{sen}\theta^2}{2g}.
\end{gathered}
$$

Alcance:

$$
\begin{gathered}
e = v_x \cdot t \\
A = v_o \cdot \cos\theta \cdot t_v \\
A = v_o \cdot \cos\theta \frac{2 \cdot v_o \cdot \operatorname{sen}\theta}{g} \\
A = \frac{v_o^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta.
\end{gathered}
$$

Ejercicio: Un jugador de básquet al lanzar el balón lo hace alzando la mano desde una altura de 2 m y con una rapidez inicial de 50 km/h. Si el aro se halla a una altura de 3,05 m y una distancia de 5 m, ¿cuál es el ángulo de tiro con el que podría encestar?



Datos:
$s_x = 5$ m
Altura del jugador $= 2$ m.
Altura del aro $= 3{,}05$ m.
$v_o = 5$ km/h.
Incógnitas:
$s_y = ?$
$\theta = ?$
Solución:

$$s_y = \text{Altura del aro} - \text{Altura del jugador}$$
$$s_y = 3{,}05 \text{ m} - 2 \text{ m}$$
$$s_y = 1{,}05 \text{ m}$$

$$50\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 13{,}89\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

• *Ecuaciones paramétricas*

$$x = v_{ox} \cdot t$$
$$x = v_o \cdot \cos\theta \cdot t$$
$$t = \frac{x}{v_o \cdot \cos\theta} \quad (1)$$

$$y = v_{oy} \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$
$$y = v_o \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2. \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2)

$$y = v_o \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{x}{v_o \cdot \cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{v_o \cdot \cos\theta}\right)^2$$
$$y = x \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{v_o^2 \cdot \cos\theta^2}$$
$$y = c \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} \frac{1}{\cos\theta^2}; \qquad \sec\theta^2 = \frac{1}{\cos\theta^2}$$
$$y = x \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} \sec\theta^2; \qquad \sec\theta^2 = 1 + \tan\theta^2$$
$$y = x \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} \cdot (1 + \tan\theta^2)$$
$$y = x \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} \cdot \tan\theta^2$$

$$x \cdot \tan\theta - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} \cdot \tan\theta^2 - y = 0$$
$$\tan\theta^2 \left(-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2}\right) + \tan\theta(x) + \left(-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} - y\right) = 0$$
$$\tan\theta = z$$
$$\left(-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2}\right) z^2 + (x)z + \left(-\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_o^2} - y\right) = 0$$
$$\left(-\frac{9{,}81 \cdot 5^2}{2 \cdot 13{,}89^2}\right) z^2 + (5)z + \left(-\frac{9{,}81 \cdot 5^2}{2 \cdot 13{,}89^2} - 1{,}05\right) = 0$$
$$(-0{,}64)z^2(5)z + (-1{,}69) = 0$$

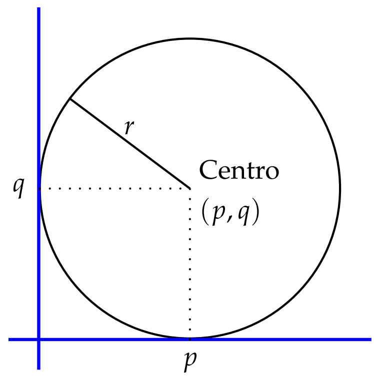
$$z = 0{,}352 \qquad \text{y} \qquad z = 7{,}513$$

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 0{,}352 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = 7{,}513 \\ \theta &= \tan^{-1} 0{,}352 \qquad \text{y} \qquad \theta = \tan^{-1} 7{,}513 \\ \theta &= 19{,}29^\circ \qquad \text{y} \qquad \theta = 82{,}42^\circ. \end{aligned}$$

La respuesta son las dos va que con los dos ángulos se puede llegar al mismo objetivo.

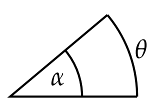
Movimiento circular

Antes de definir este movimiento, precisemos lo que es círculo. Se conoce como círculo al lugar geométrico de todos los puntos equivalentes a uno fijo interior denominado centro.



Luego un movimiento circular será aquel cuya trayectoria es un círculo.

Se denomina desplazamiento angular al arco de círculo que una partícula describe en un tiempo t.

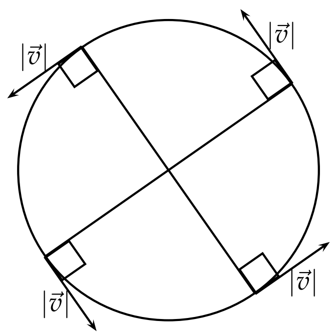


Al ángulo α le corresponde un arco θ (α se mide en rad).

Los radianes son unidades de medida angular que corresponde al número de veces que un radio entra en el arco formado por el círculo; esto es 6,28 veces o 2π rad, lo que significa a su vez una vuelta (revolución) y 360°.

• *Movimiento Circular Uniforme (MCU)*

Es el movimiento constante que tiene una partícula alrededor de un punto.



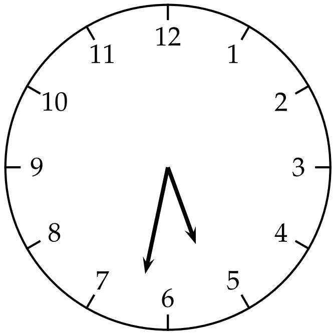
Velocidad instantánea forma 90° con el radio y es constante en modulo

$$v = \frac{e}{t}.$$

Ecuaciones del MCU

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lineal} & \rightarrow & \div & \rightarrow & \text{Angular} \\ e & & & & \theta \\ t & & & & t \\ v & & & & \omega \\ \text{Lineal} & \leftarrow & * & \leftarrow & \text{Angular} \end{array}$$

Ejercicio: ¿Qué ángulo forman el horero con el minutero de un reloj cualquiera a las 5h32?



$$5 \times 60 = 300 \text{ min(Horas en minutos)}$$
$$32 + 300 = 332 \text{ min(Tiempo total en minutos)}$$
$$\theta h = 0{,}5 \left(\frac{\circ}{\text{min}} \right) \times 332\text{min} = 166^\circ$$
$$\theta \text{min} = 6 \left(\frac{\circ}{\text{min}} \right) \times 332\text{min} = 1992^\circ$$
$$1992^\circ \times \frac{1\text{vuelta}}{360^\circ} = 5{,}53\text{vueltas}$$
$$0{,}53\text{vueltas} \times \frac{360^\circ}{1\text{vuelta}} = 191{,}99^\circ$$
$$\measuredangle = 191{,}99^\circ - 166^\circ$$
$$\measuredangle = 25{,}99^\circ.$$

Ejercicio: Una bicicleta tiene una catalina de 10 cm de radio y se conecta mediante una cadena hasta un piñón de 6 cm de diámetro, unida a una llanta de 80 cm de diámetro. Si el ciclista pedalea con una frecuencia de 0,3 Hz, hallar la velocidad en km/h en que se mueve la bicicleta.

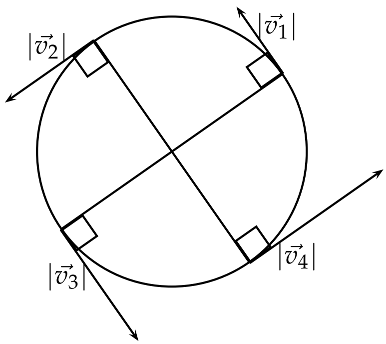
Frecuencia f**:** Es el número de vueltas que da la partícula en una unidad de tiempo.
Periodo T**:** Es el tiempo en que la partícula describe una vuelta.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{360}{T} = \frac{1\text{rev}}{T}$$
$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 360 \cdot f = 1\text{rev} \cdot f$$
$$\omega = 2 \cdot \pi \times 0{,}33 = 2{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$v = \omega \cdot r$$
$$v = 2{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 10\text{cm} = 21 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

La velocidad del piñón es la misma que la de la catalina y es

$$v = 21 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \omega = \frac{v}{r} = \frac{21 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{3\text{cm}} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$\omega \text{piñón} = \omega \text{rueda}$$
$$\omega \text{rueda} = 7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \times 40\text{cm} = 280 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$
$$280 \frac{\text{cm}}{\text{s}} \times \frac{60\text{s}}{1\text{min}} \times \frac{60\text{min}}{1\text{h}} \times \frac{1\text{m}}{100\text{cm}} \times \frac{1\text{km}}{1000\text{m}} = 10{,}08 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$\omega \text{rueda} = 10{,}08 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

• *Movimiento Circular Uniformemente Variado (MCUV)*

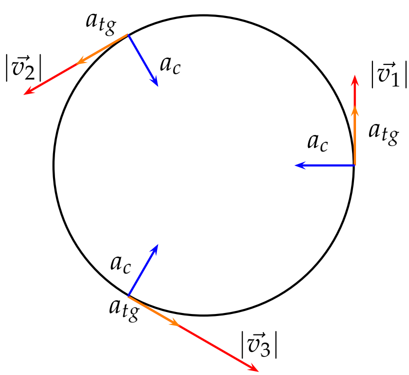


MCUV Acelerado

$$|\vec{v}_1| < |\vec{v}_2| < |\vec{v}_3| < |\vec{v}_4|.$$

La aceleración centrípeta a_c es constante en modulo y con la dirección hacia el centro del círculo.

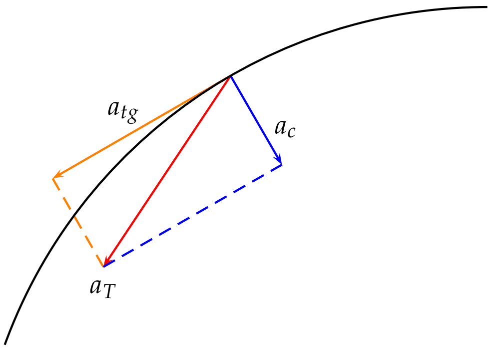
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$



a_{tg} es constante en modulo y colineal con la velocidad y forma 90°con la aceleración centrípeta en ese momento y no es constante en dirección con el MCUV.

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

No es constante ni en modulo, ni en dirección en el MCUV.

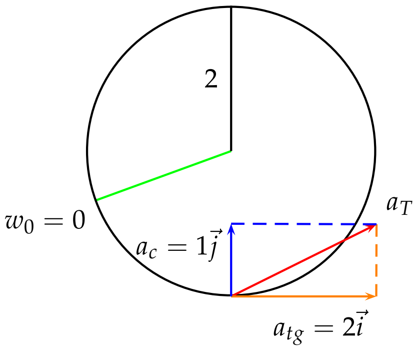


$$\begin{gathered}\text{MRUV}\\ v_f - v_o = a \cdot t\\ v_f^2 - v_o = 2 \cdot a \cdot e\\ e = v_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\text{MCUV}\\ \omega f - \omega o = \alpha \cdot t\\ \omega f^2 - \omega o^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \theta\\ \theta = \omega o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2.\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Lineal} & \rightarrow & \div & \rightarrow & \text{Angular}\\ e & & & & \theta\\ v & & & & \omega\\ a_{tg} & & & & \alpha\\ \text{Lineal} & \leftarrow & * & \leftarrow & \text{Angular} \end{array}$$

Ejercicio: Un móvil se desplaza en MCUV en una trayectoria de 2 m; si cuando se halla en el punto más bajo su aceleración total es $(2\vec{i} + 2\vec{j})\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Hallar el punto donde empezó el movimiento con velocidad inicial 0.



Solución:

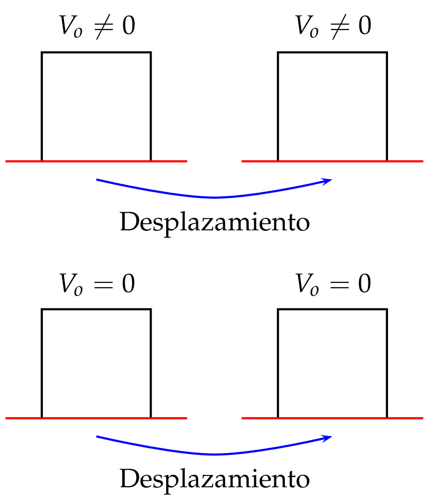
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$
$$a_c \cdot r = v^2$$
$$\sqrt{a_c \cdot r} = v$$
$$v = \sqrt{1 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 2\text{m}}$$
$$v = 1{,}41\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$\omega f = \frac{v}{r} = \frac{1{,}41\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{m}} = 0{,}71\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$\alpha = \frac{a_{tg}}{r} = \frac{2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2\text{m}} = 1\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$
$$\omega f^2 - \omega o^2 = 2 \cdot \alpha \cdot \theta$$
$$\frac{0{,}71^2 - 0^2}{2 \times 1} = \theta$$
$$\theta = 0{,}25\text{rad} \times \frac{180^\circ}{\pi\text{rad}} = 14{,}32^\circ$$
$$Xo = 2255{,}7\text{m}.$$

Dinámica

La Dinámica es la parte de la Física que estudia conjuntamente el movimiento de la partícula y las causas que lo producen o lo modifican.

Leyes de Newton

1. **Ley de la inercia:** Todo cuerpo tiende a moverse en su estado relativo de movimiento o reposo.



2. **Ley de la fuerza:** La fuerza es la interacción que provoca una aceleración a una masa.

$$F = m \cdot a \qquad \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$$
$$a = \frac{V_f - V_o}{t}$$
$$F = m \cdot \left(\frac{V_f - V_o}{t}\right)$$
$$F = \frac{m \cdot V_f - m \cdot V_o}{t}$$
$$F \cdot t = m \cdot V_f - m \cdot V_o;$$

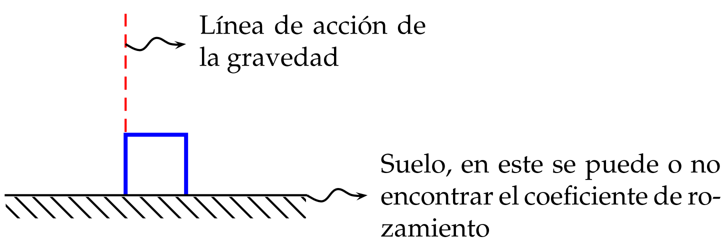
$P = m \cdot v$, donde P es la cantidad de movimiento lineal (como resultado es un vector), m es un escalar, v vector velocidad, y $\cdot$ representa el producto escalar,

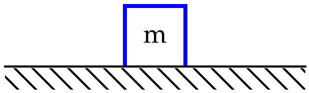
$$F \cdot t = P_f - P - o$$
$$F \cdot \Delta t = \Delta P.$$

Si $\Delta t \to 0$

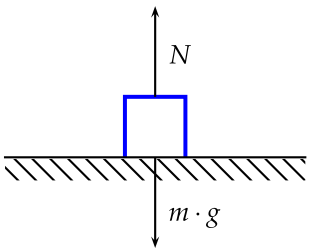
$$F \cdot dt = dP.$$

3. **Ley de Acción y Reacción:** a toda acción de un cuerpo se opone una reacción de igual magnitud pero de signo contrario en el otro cuerpo.





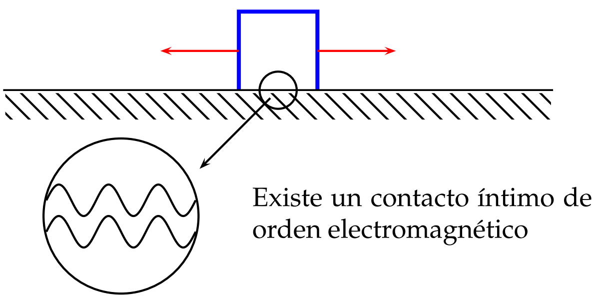
Peso (P) es influencia de la atracción de todos los planetas sobre un cuerpo cercano a su superficie.



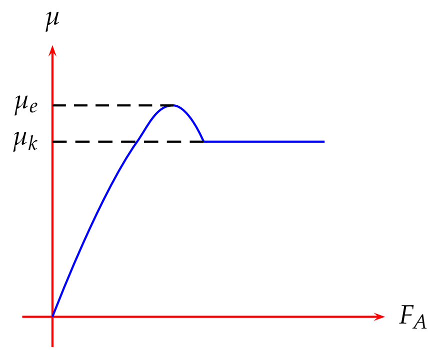
$$\sum Fy = m \cdot a_y$$
$$N - P = m \cdot 0$$
$$N = P$$
$$N = m \cdot g.$$

Normal (N) es la reacción del suelo en el eje y sobre el cuerpo y es perpendicular a la superficie en contacto.

Fuerza de fricción f_r es una fuerza de oposición al movimiento. La fuerza de fricción se produce por las microimperfecciones que tienen los pares de superficies.



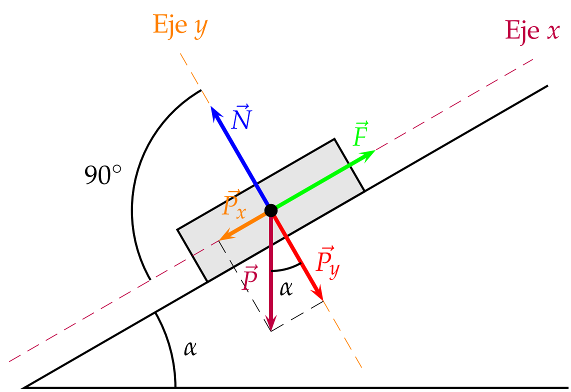
$fr = \mu \cdot N$, en donde $0 \leq \mu \leq 1$. Si $\mu > 1$, entonces existe un fenómeno de adhesión como, por ejemplo, en la cinta *scotch*. La fuerza de fricción siempre dependerá de la fuerza neta activa; además si N es constante, el es variable.



$\mu_e =$ estático justo antes de empezar a mover.

$\mu_k =$ cinético es constante y algo menor al estático y no depende de la fuerza activa.

Se define como *fuerza neta activa* aquella que tiende a producir el movimiento de la partícula.



θ es el máximo ángulo antes que exista movimiento.

$$
\begin{aligned}
P_y &= P \cdot \cos\theta \\
\sum Fy &= m \cdot a_y \\
\sum Fy &= 0 \\
N - Py &= 0 \\
N &= Py \\
N &= m \cdot g \cdot \cos\theta
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
P_x &= P \cdot \operatorname{sen}\theta \\
\sum F_x &= m \cdot a_x \\
\sum F_x &= 0 \\
F_r - P_x &= 0 \\
F_r &= P_x \\
Fr &= m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta
\end{aligned} \tag{2}
$$

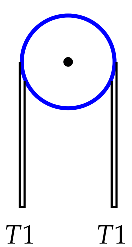
$$Fr = N \cdot \mu. \tag{3}$$

Reemplazo (1) y (2) en (3)

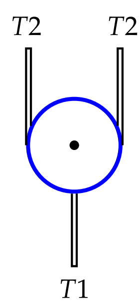
$$
\begin{aligned}
m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta &= m \cdot g \cdot \cos\theta \cdot \mu \\
\operatorname{sen}\theta &= \cos\theta \cdot \mu \\
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \mu \\
\mu &= \tan\theta.
\end{aligned}
$$

Coeficiente de rozamiento es la tangente del ángulo crítico.

Poleas



Polea Fija



Polea Móvil

Cuerda es un elemento flexible no extensible que provoca una tensión T.

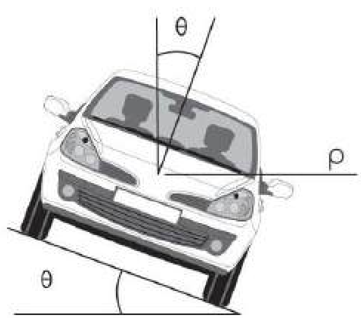
La *fuerza tensión T* es aquella fuerza que únicamente tira de la cuerda. Una 'polea fija' sirve solamente para cambiar la dirección de la tensión, mientras que en una 'polea móvil' se incrementa la fuerza que tira de la cuerda de acuerdo al número de poleas presentes. Así un sistema de poleas con una fija:

$$T_1 = 2 \cdot T_2,$$

luego

$$T_2 < T_1.$$

Ejercicio: Determine el ángulo de inclinación lateral de la pista de manera que las ruedas del vehículo se deslicen hacia la parte de afuera.



$$Ny = N \cdot \cos\theta$$
$$Nx = n \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\sum Fx = m \cdot a_N$$
$$N \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \tag{4}$$

$$\sum Fy = 0$$
$$N \cdot \cos\theta - m \cdot g = 0$$
$$N \cdot \cos\theta = m \cdot g$$
$$N = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}. \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4)

$$\frac{m \cdot g}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta = m \cdot \frac{v^2}{\rho}; \qquad \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

Eliminando las masas

$$\tan\theta \cdot g = \frac{v^2}{\rho}$$
$$\tan\theta = \frac{v^2}{g \cdot \rho}$$
$$\theta = \tan^{-1} \cdot \left(\frac{v^2}{g \cdot \rho}\right).$$

Momento lineal (Impulso)

Se define como momento lineal al producto punto del vector velocidad por la masa.

$$m \cdot \vec{v} = \vec{P},$$

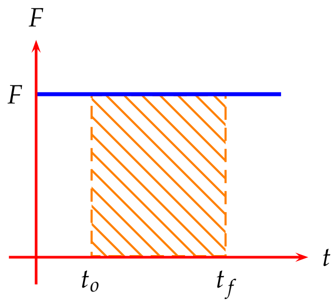
vector que mantiene el unitario (dirección) de la velocidad

$$\sum F = m \cdot a$$
$$a = \frac{dv}{dt}$$
$$\sum F = m \cdot \frac{dv}{dt}$$
$$\sum F \cdot dt = m \cdot dv$$

$$\int_{t_0}^{t} \sum F \cdot dt = \int_{v_0}^{v} m \cdot dv$$

$$\sum \int_{t_0}^{t} F \cdot dt = \int_{v_0}^{v} m \cdot dv.$$

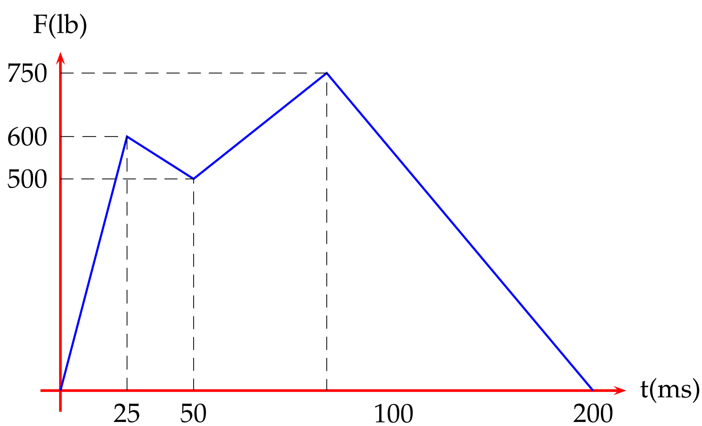
Si F es constante en relación al tiempo.



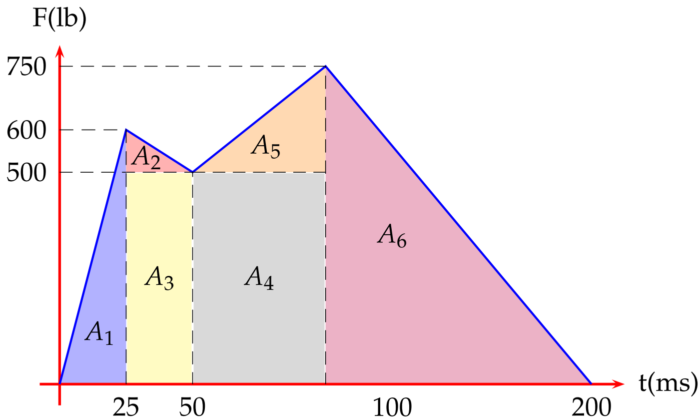
$$F \int_{t_0}^{t} dt = m \cdot \int_{v_0}^{v} dv.$$

Área debajo de cualquier curva que sea fuerza vs tiempo es el impulso.

Ejercicio: La gráfica muestra la F de reacción vertical zapato-suelo. Como función del gráfico el primero actúa sobre el talón y el segundo sobre la punta del pie. Calcular el impulso total ejercido por el pie.



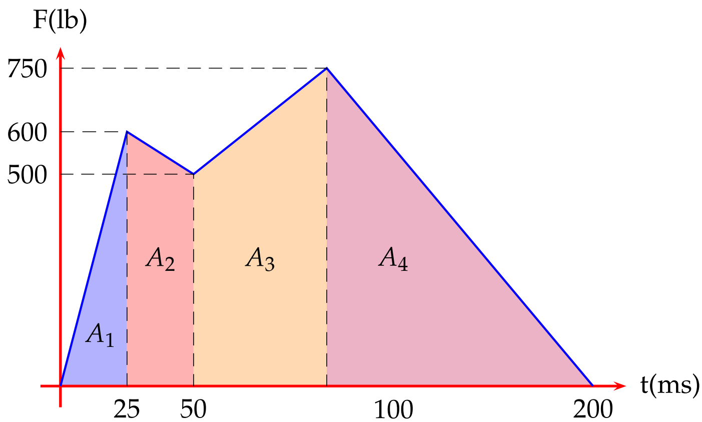
Resolución 1:



$$A_1 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{25 \cdot 600}{2} = 7500$$
$$A_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{25 \cdot 100}{2} = 1250$$
$$A_3 = b \cdot h = 25 \cdot 500 = 12500$$
$$A_4 = b \cdot h = 50 \cdot 500 = 25000$$
$$A_5 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{50 \cdot 125}{2} = 6250$$
$$A_6 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{100 \cdot 750}{2} = 37500$$
$$A_T = \sum A_i$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$
$$A_T = 7500 + 1250 + 12500 + 25000 + 6250 + 37500$$
$$A_T = 90000 \text{ lb} \cdot \text{ms} = 90 \text{ lb} \cdot \text{s}.$$

Resolución 2:

$$y = m \cdot x + b$$
$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$



$$A_1 = \int_0^{25} 24t \cdot dt = 7500$$
$$A_2 = \int_{25}^{50} (-4t + 700) \cdot dt = 13750$$
$$A_3 = \int_{50}^{100} (5t + 250) \cdot dt = 31250$$
$$A_1 = \int_{100}^{200} \left(-\frac{75}{10}t + 15000\right) \cdot dt = 37500$$
$$A_T = \sum A_i$$
$$A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$
$$A_T = 7500 + 13750 + 31250 + 37500$$
$$A_T = 90000 \text{ lb} \cdot \text{ms} = 90 \text{ lb} \cdot \text{s}.$$

Ley de la conservación de la cantidad de momento

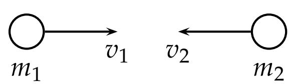
$$\sum Pf = \sum Po$$

Velocidad antes del choque   Velocidad después del choque

$$m_1 \cdot V_{1i} + m_2 \cdot V_{2i} = m_1 \cdot V_{1f} + m_2 \cdot V_{2f}.$$

- *Características de los choques*

Cuando dos cuerpos chocan sin que actúen fuerzas externas, se conserva la cantidad de movimiento total del sistema (para cualquier tipo de choque). Sin embargo, puede variar la cantidad de movimiento de cada uno de los cuerpos.



$$\Delta p_{sist(0)} = \Delta p_{sist(f)},$$

donde

- $\Delta p_{sist(0)}$ = Cantidad total de movimiento antes del choque.
- $\Delta p_{sist(f)}$ = Cantidad total de movimiento después del choque.

Dependiendo de que ocurra con los cuerpos, luego del choque podemos encontrar distintos tipos de choque.

$$m_1 \cdot v_{1(0)} + m_2 \cdot v_{2(0)} = m_1 \cdot v_{1(f)} + m_2 \cdot v_{2(f)},$$

donde

- $m_1, m_2 =$ Masas de los cuerpos 1 y 2.
- $v_{1(0)}, v_{2(0)} =$ Velocidades iniciales de los cuerpos 1 y 2.
- $v_{1(f)}, v_{2(f)} =$ Velocidades finales de los cuerpos 1 y 2.

• *Coeficiente de restitución*

Cuando dos cuerpos chocan, sus materiales pueden comportarse de distinta manera según las fuerzas de restitución que actúen sobre los mismos. Hay materiales cuyas fuerzas restituirán completamente la forma de los cuerpos sin haber cambio de forma ni energía cinética perdida en forma de calor. En otros tipos de choque los materiales cambian su forma y liberan calor, modificándose la energía cinética total. Se define entonces un coeficiente de restitución (K) que evalúa esta pérdida o no de energía cinética, según las fuerzas de restitución y la elasticidad de los materiales.

$$K = \frac{v_{2(f)} - v_{1(f)}}{v_{2(0)} - v_{1(0)}},$$

donde

- $v_{1(0)}, v_{2(0)}$: Velocidades de los cuerpos 1 y 2 antes del choque.
- $v_{1(f)}, v_{2(f)}$: Velocidades de los cuerpos 1 y 2 después del choque.
- K es un número que varía entre 0 y 1.
  - Si $K = 0$ choque perfectamente inelástico.
  - Si $0 < K < 1$ choque semiplástico.
  - Si $K = 1$ choque perfectamente elástico.

- *Tipos de Choque*

1. Choque perfectamente elástico Es aquel choque en donde se conservan la cantidad de movimiento y la energía cinética total del sistema, pues no hay pérdida de energía por calor debido al rozamiento; además, en este tipo de choque también se conservan las formas de los cuerpos. El coeficiente de restitución en este tipo de choques es 1.

$$K = 1$$

$$Ec_{1(0)} + Ec_{2(0)} = Ec_{1(f)} + Ec_{2(f)},$$

   donde

   - $K =$ Coeficiente de restitución.
   - $Ec_{1(0)}, Ec_{2(0)}$ Energía cinética inicial de los cuerpos 1 y 2.
   - $Ec_{1(f)}, Ec_{2(f)}$ Energía cinética final de los cuerpos 1 y 2.

2. Choque perfectamente inelástico Se da cuando ambos cuerpos quedan pegados en el choque y teniendo una sola masa luego. Al haber un cambio de forma no se conserva la energía cinética de los cuerpos. El coeficiente de restitución en este tipo de choques vale 0.

$$K = 0.$$

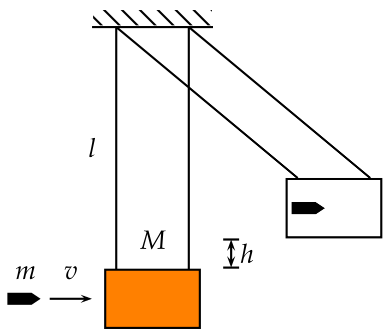
3. Choque es semiplástico En la realidad, cuando se da un choque, en la mayoría de los casos actúan fuerzas que no restituyen completamente las formas, habiendo pérdidas de energía cinética. Esto se da cuando K tiene valores mayores que cero y menores que uno. En ese caso decimos que el choque es semiplástico.

$$0 < K < 1.$$

- *Péndulo balístico*

El péndulo balístico es un sistema con el que se puede medir la velocidad de un proyectil. Una bala es disparada hacia un gran bloque usualmente de madera que está suspendido por algunos alambres ligeros. La bala es detenida por el bloque y todo el sistema se balancea hasta alcanzar la altura h. Puesto que el choque es perfectamente inelástico y el momento se conserva, la ecuación proporciona la velocidad del sistema inmediatamente después del choque cuando suponemos la aproximación del impulso. Así, la energía cinética, un momento después del choque, sería:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2. \tag{6}$$



i) Antes del Choque

- $m_1 =$ Masa de la bala.
- $v_{1i} =$ Velocidad de la bala antes del choque
- $m_2 =$ Masa del bloque de madera
- $v_{2i} =$ Velocidad del bloque de madera igual a 0.

ii) Después del Choque

- $m_t = (m1 + m2)$ la bala se incrusta en el bloque de madera después del choque.
- $m_f =$ Velocidad con la cual se desplaza el conjunto bloque de madera más la bala.

$$m_1 \cdot v_{1i} + m_2 \cdot v_{2i} = m_T \cdot V_F$$

$$m_1 \cdot v_{1i} = m_t \cdot v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 \cdot v_{1i}}{m_1 + m_2}.$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones

$$v_f^2 = \left(\frac{m_1 \cdot v_{1i}}{m_1 + m_2} \right)^2. \tag{7}$$

Reemplazando (7) en (6) tenemos:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_{1i}}{m_1 + m_2} \right)^2.$$

Cancelando $(m_1 + m_2)$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_{1i})^2}{m_1 + m_2}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1)^2 \cdot (v_{1i})^2}{m_1 + m_2}.$$

Donde:

- $v_{1i} =$ Velocidad de la bala antes del choque.
- K es la energía cinética un momento después del choque.

Sin embargo, en todos los cambios de energía que ocurren después del choque, la energía es constante. La energía cinética en el punto más bajo se transforma en energía potencial cuando alcance la altura h.

Energía cinética en el punto más bajo = Energía potencial cuando alcance la altura h.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1)^2 \cdot (v_{1i})^2}{m_1 + m_2} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$$

$$(m_1)^2 \cdot (v_{1i})^2 = 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot h$$

$$(m_1)^2 \cdot (v_{1i})^2 = 2 \cdot (m_1 + m_2)^2 \cdot g \cdot h$$

$$(v_{1i})^2 = \frac{2 \cdot (m_1 + m_2)^2 \cdot g \cdot h}{(m_1)^2}$$

$$v_{1i} = \sqrt{\frac{2 \cdot (m_1 + m_2)^2 \cdot g \cdot h}{(m_1)^2}}$$

$$v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$