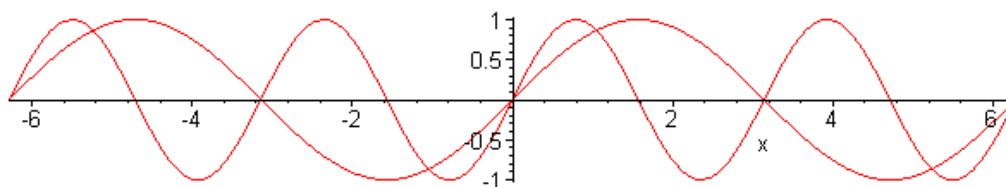


UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

Trigonometria



Série: Matemática II

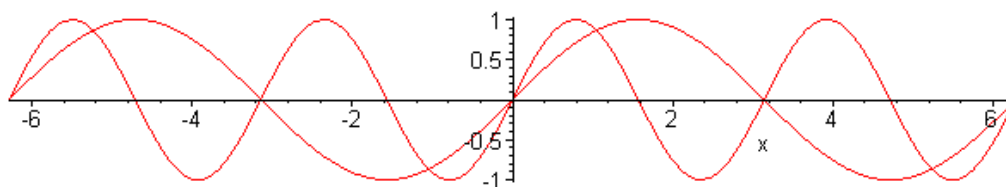
Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Fevereiro de 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria

Caderno Didático 1

Trigonometria



Série: Matemática II

Por:
Professora Elisia L. Chiapinotto
Professor Mauricio R. Lutz

Fevereiro de 2020

C532c

Chiapinotto, Elisia L.

Caderno didático 1 : trigonometria / por Elisia Lorenzoni Chiapinotto, Mauricio Ramos Lutz. – Santa Maria , 2003.

102 f. : il. (Série Matemática II)

1. Matemática 2. Trigonometria 3. Equações 4. Ciclo trigonométrico 5. Arcos 6. Ângulos I. Lutz, Mauricio Ramos II. Título

CDU: 514

Ficha catalográfica elaborada por
Luiz Marchiotti Fernandes CRB 10/1160
Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Rurais/UFSM

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS	2
2.1 Quanto aos lados	2
2.2 Quanto aos ângulos	3
3 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO	3
4 RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	4
4.1 Seno (sen)	4
4.2 Cosseno (cos)	4
4.3 Tangente (tg)	4
4.4 Cotangente (cotg)	5
4.5 Secante (sec)	5
4.6 Cossecante (cossec)	5
4.7 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNS ÂNGULOS	6
4.7.1 No triângulo equilátero	6
4.7.2 No triângulo retângulo isósceles	6
5 ARCOS E ÂNGULOS	10
5.1 Arco de circunferência	10
5.2 Ângulo central	10
5.3 Comprimento de um arco de circunferência	11
6 UNIDADES PARA MEDIR ARCOS	12
6.1 Grau	12
6.2 Radiano	12
6.3 Grado	13
6.4 Transformação de unidades	13
7 CICLO TRIGONOMÉTRICO	15
7.1 Circunferência orientada	15
7.2 Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico	15
7.3 Arcos côngruos (ou congruentes)	16
8 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	19
8.1 Estudo do seno	19
8.1.1 Sinal do seno e alguns valores importantes	19
8.1.2 Gráfico do seno	20
8.2 Estudo do cosseno	26

8.2.1 Sinal do cosseno e alguns valores importantes	26
8.2.2 Gráfico do cosseno	27
8.3 Estudo da tangente	33
8.3.1 Sinal da tangente e alguns valores importantes	34
8.3.2 Gráfico da tangente	34
8.4 Estudo da cotangente	38
8.5 Estudo da secante	39
8.6 Estudo da cossecante	41
9 REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE	51
9.1 Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante	51
9.2 Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante	53
9.3 Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante	54
9.4 Propriedades dos arcos complementares	56
10 RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	60
10.1 Relações trigonométricas fundamentais	60
10.2 Relações trigonométricas derivadas das fundamentais	61
11 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS	63
11.1 Demonstração de uma identidade	64
12 TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	66
12.1 Cosseno da diferença	66
12.2 Cosseno da soma	68
12.3 Seno da soma	69
12.4 Seno da diferença	69
12.5 Tangente da diferença	69
12.6 Tangente da soma	70
12.7 Fórmulas do arco duplo	70
13 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS	77
14 RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER	82
14.1 Lei dos senos	82
14.2 Lei dos cossenos	85
14.3 Cálculo da área de uma região triangular	89
GABARITO	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	102

1. INTRODUÇÃO

A **trigonometria**, palavra formada por três radicais gregos: **tri** (três), **gonos** (ângulos) e **metron** (medir), tem por objetivo o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo.

Inicialmente considerada uma extensão da geometria, a trigonometria apresenta vestígios de seu estudo entre os babilônios, que utilizam para resolver problemas práticos de astronomia, navegação e agrimensura.

Pode-se dizer que foi a astronomia a grande impulsionadora da trigonometria, pois foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C. – 125 a.C.) quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

No século VIII, importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, o que possibilitou aos matemáticos árabes notáveis descobertas sobre a trigonometria.

No século XV, Purback, matemático alemão nascido na Baviera, constrói a primeira tábua trigonométrica.

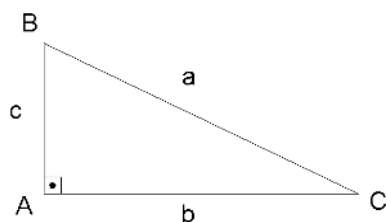
Porém, o primeiro tratado feito de maneira sistemática sobre a trigonometria foi escrito pelo matemático alemão Johann Müller, também chamado Regiomontanus, denominado Tratado dos Triângulos. Sabe-se que Regiomontanus foi discípulo de Purback.

Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da matemática, como a análise, e a outros campos da atividade humana, como eletricidade, mecânica, acústica, música, topografia, engenharia civil, etc.

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre trigonometria, convém lembrarmos alguns conceitos importantes.

Como já vimos, todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos agudos cuja soma é 90° , completando, assim, os 180° da soma dos ângulos internos.

Seja o triângulo ABC da figura, retângulo em A.



$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ (\hat{B} \text{ e } \hat{C} \text{ são ângulos complementares})$$

Utilizaremos o seguinte procedimento para denominar os lados dos triângulos: cada lado manterá correspondência com o vértice oposto a ele. Assim, por exemplo, o lado $\overline{AB}$ será chamado lado c (por ser oposto ao vértice), e assim por diante.

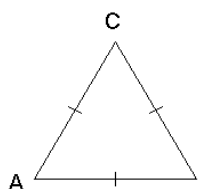
É necessário lembrar que o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo é denominado hipotenusa (e é o maior lado do triângulo), e os outros dois lados, opostos aos ângulos agudos, são os catetos. No nosso caso, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são catetos, e $\overline{BC} = a$ é a hipotenusa do triângulo ABC.

Uma relação importante entre os lados de um triângulo retângulo é o Teorema de Pitágoras, cujo enunciado é “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Aplicando o teorema ao triângulo acima, escreveríamos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

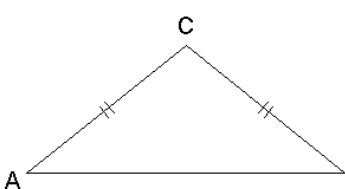
2.1 Quanto aos lados



Eqüilátero

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

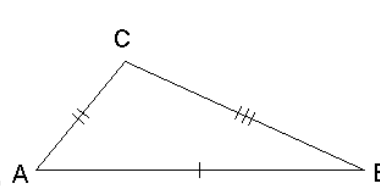
Possui 3 lados de
medidas iguais



Isósceles

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

Possui 2 lados de
medidas iguais



Escaleno

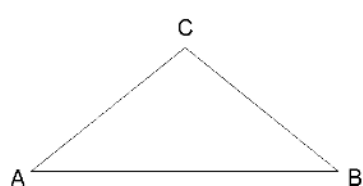
$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$$

Possui os 3 lados de
medidas diferentes

Observações:

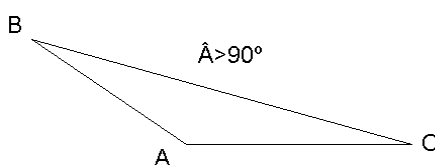
1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .
2. O triângulo equilátero é também equiângulo, ou seja, tem os três ângulos internos de mesma medida (todos de 60°).
3. O triângulo isósceles tem também os dois ângulos da base iguais ou de mesma medida.

2.2 Quanto aos ângulos



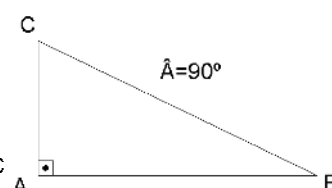
acutângulo

Possui os três ângulos
agudos ou $< 90^\circ$



obtusângulo

possui um ângulo
obtuso ou $> 90^\circ$

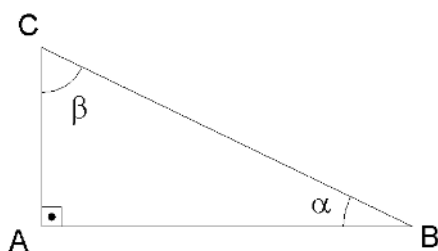


retângulo

possui um ângulo
reto ou de 90°

3. TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Seja o triângulo retângulo:



Para o ângulo β

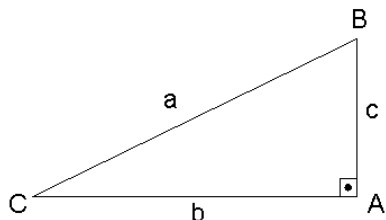
- $\overline{AB}$ é cateto oposto;
- $\overline{CA}$ é cateto adjacente;
- $\overline{BC}$ é hipotenusa.

Para o ângulo agudo α

- $\overline{AB}$ é cateto adjacente;
- $\overline{CA}$ é cateto oposto;
- $\overline{BC}$ é hipotenusa.

4. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Chama-se num triângulo retângulo:



4.1 Seno (sen)

Seno de um ângulo agudo, é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cat. op. } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{cat. op. } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

4.2 Cosseno (cos)

Cosseno de um ângulo agudo, é a razão entre o cateto adjacente a esse ângulo e a hipotenusa.

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{cat. adj. } B}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{Cat. adj. } C}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

4.3 Tangente (tg)

Tangente de um ângulo agudo, é a razão entre os catetos oposto e adjacente a esse ângulo.

$$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{cat. op. } B}{\text{cat adj. } B} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{\text{cat. op. } C}{\text{cat adj. } C} = \frac{c}{b}$$

4.4 Cotangente (cotg)

Cotangente de um ângulo agudo, é a razão entre catetos adjacente e oposto a esse ângulo.

$$\cot g\hat{B} = \frac{\text{cat. adj. } B}{\text{cat op. } B} = \frac{c}{b}$$

$$\cot g\hat{C} = \frac{\text{cat. adj. } C}{\text{cat op. } C} = \frac{b}{c}$$

4.5 Secante (sec)

Secante de um ângulo agudo, é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente a esse ângulo.

$$\sec \hat{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat adj. } B} = \frac{a}{c}$$

$$\sec \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat adj. } C} = \frac{a}{b}$$

4.6 Cossecante (cossec)

Cossecante de um ângulo agudo, é a razão entre a hipotenusa e o cateto oposto a esse ângulo.

$$\cos \sec \hat{B} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat op. } B} = \frac{a}{b}$$

$$\cos \sec \hat{C} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat op. } C} = \frac{a}{c}$$

Prove que: $\boxed{\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1}$

Dem.:

Sendo que $\sin \hat{B} = b/a$ e $\cos \hat{B} = c/a$ temos:

$$\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1, \text{ pelo Teorema de}$$

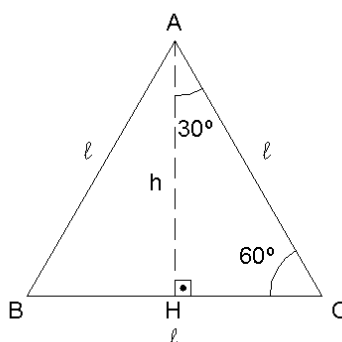
$$\text{Pitágoras } a^2 = b^2 + c^2, \text{ logo } \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

4.7 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNS ÂNGULOS

4.7.1 No triângulo eqüilátero

A medida de cada ângulo interno é 60° e a altura em função do lado

é $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.



No triângulo ACH ($\hat{H} = 90^\circ$), temos:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{l/2}{l} \Rightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{l\sqrt{3}/2}{l} \Rightarrow \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

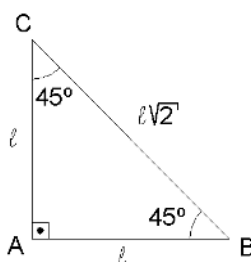
$$\text{cos } 60^\circ = \frac{l/2}{l} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{l/2}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{l\sqrt{3}/2}{l/2} \Rightarrow \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$$

4.7.2 No triângulo retângulo isósceles

Os catetos tem a mesma medida l ; cada ângulo mede 45° e a hipotenusa mede $l\sqrt{2}$.

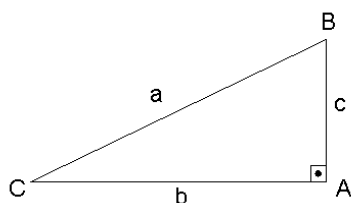


$$\operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{l}{l\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$

Exemplo: No triângulo retângulo dado, calcular $\operatorname{sen} \hat{C}$, $\cos \hat{C}$ e $\operatorname{tg} \hat{C}$. Dados $c=1$, $a=\sqrt{10}$ e $b=3$.



Resolução:

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{c}{b} \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{1}{3}$$

(1) Exercícios

1. Uma Pessoa está distante 80m da base de um prédio e vê o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 16° em relação a horizontal. Qual é a altura do prédio? (Dado tg de $16^{\circ}=0,28$)

2. Uma pequena esfera é abandonada no ponto A de uma rampa. Sabendo que o ponto A está a 0,8m do solo, calcule a distância que a esfera deverá percorrer até chegar ao solo (no ponto B) sabendo que $\hat{B}$ vale 30° .

3. Um observador vê um prédio mediante um ângulo visual α . Afastando-se 2 metros do ponto onde está, o observador vê o prédio mediante um ângulo visual β . Dados $\alpha = 45^\circ$ e $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{6}$, determine a altura do prédio.

4. O ângulo de elevação do pé de uma árvore, a 50m da base de uma encosta, ao topo da encosta de 60° . Que medida deve ter um cabo para ligar o pé da árvore ao topo da encosta.

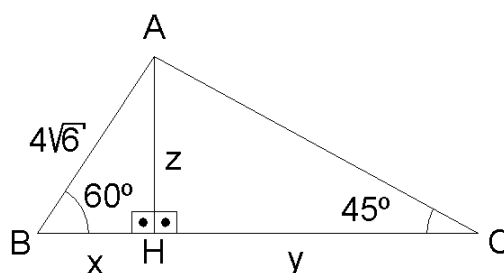
5. (UFSM/2002) Um fio de antena está preso no topo de um prédio de 16 metros de altura e na cumeeira de uma casa ao lado, a 4 metros de altura. Considerando o terreno plano (horizontal) e sabendo que a distância entre a casa e o prédio é de 9 metros, o comprimento do fio é, em metros,

- a) 12 b) 15 c) $\sqrt{337}$ d) 20 e) 25

6. (UFSM/1999) Um estudante de Engenharia vê um prédio do Campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30° . Aproximando-se do prédio mais 40m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60° . Considerando que a base do prédio está no mesmo nível do olho do estudante, então a altura h do prédio é igual a

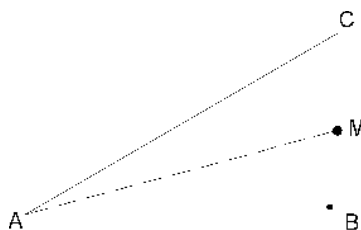
- a) $30\sqrt{3}m$ b) $20\sqrt{3}m$ c) $30m$ d) $10\sqrt{3}m$ e) $28m$

7. (PEIES/96) Na figura abaixo $\frac{z}{x}$ e $\frac{x+y}{z}$ valem, respectivamente:



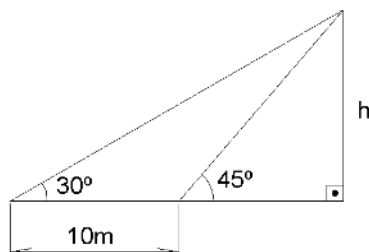
- a) $\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ b) $3\sqrt{3}; \frac{8}{3}$ c) $3\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$
d) $\sqrt{3}; \frac{8}{3}$ e) $3\sqrt{3}; \sqrt{3}$

8. (UFSM/2000) A figura mostra um triângulo retângulo ABC. O segmento de reta AM é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Se BM mede 1m e AB mede 3m, então a medida, em m, de MC é (sugestão: adote $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$)



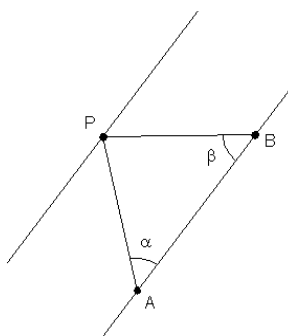
- a) 1,32 b) 1,25 c) 1,18 d) 1,15 e) 1,00

9. (PEIES/1998) Na figura, o valor de h, em metros, é



- a) $5\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$ b) $5(\sqrt{3} - 1)$ c) $5(\sqrt{3} + 1)$
d) $5(\sqrt{3})$ e) $5(\sqrt{3} + 2)$

10. (UFSM-PEIES/2001) A figura ilustra um observador localizado no ponto A e outro, no ponto B, à beira de um rio de margens paralelas. Os dois conseguem ver uma pedra situada num ponto P da outra margem. Com seus teodolitos, eles medem os ângulos $\hat{PAB} = \alpha$ e $\hat{PBA} = \beta$. Sabendo que $\operatorname{tg} \alpha = 4$, $\operatorname{tg} \beta = 5$ e $\overline{AB} = 135\text{m}$, pode-se afirmar que a largura do rio, em metros, é

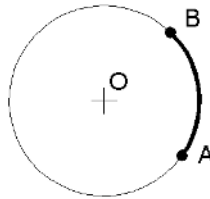


- a) 150 b) 200 c) 300 d) 350 e) 400

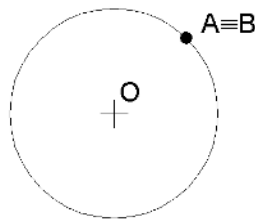
5. ARCOS E ÂNGULOS

5.1 Arco de circunferência

É cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos.



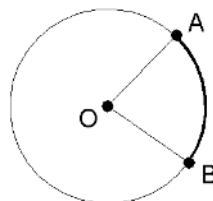
Assim temos: arco $\widehat{AB}$ ou arco $\widehat{BA}$, os pontos A e B são chamados extremidades dos arcos.



Quando os pontos A e B coincidem, dizemos que eles determinam um arco nulo (ponto) ou arco de uma volta (a própria circunferência).

5.2 Ângulo central

Consideremos uma circunferência de centro O e os pontos A e B pertencentes a ela.



Unindo os pontos A e B ao centro da circunferência, determinamos o ângulo central $\widehat{AOB}$.

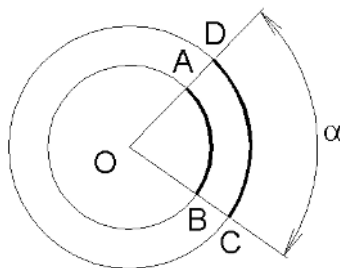
Utilizando as mesmas medidas para um arco unitário (arco de medida igual a 1) e seu correspondente ângulo central, dizemos que as medidas do arco e do ângulo central que o determina são iguais.

Na figura, temos:

- O arco $\widehat{AB}$ subtende o ângulo central $\widehat{AOB}$
- $\text{med}(\widehat{AOB}) = \text{med}(\widehat{AB})$

Note que a medida de um arco não representa a medida do comprimento desse arco.

Exemplo: Os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{CD}$ possuem a mesma medida α , porém não tem o mesmo comprimento.

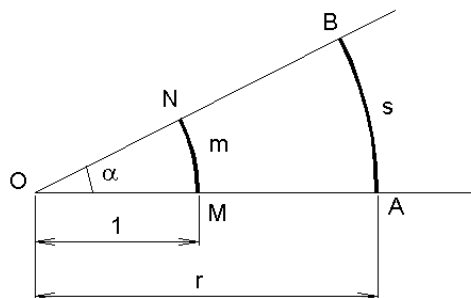


Observe também que cada arco determina um ângulo e cada ângulo determina um arco.

Por isso, as unidades utilizadas para medir arcos são as mesmas usadas para medir ângulos.

5.3 Comprimento de um arco de circunferência

Consideremos a figura a seguir:



$$\overline{MN} \cong \widehat{MN} = m \text{ e } \overline{AB} \cong \widehat{AB} = s$$

Por semelhança, temos:

$$\triangle OMN \sim \triangle OAB \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{s}{r} \Rightarrow \frac{\alpha}{1} = \frac{s}{r}$$

$$\alpha = \frac{s}{r} \quad (\alpha \text{ em radianos})$$

A medida do ângulo α em radianos é igual ao quociente entre o comprimento s do arco $\widehat{AB}$ pelo raio r da circunferência.

Exemplo: Numa circunferência de raio $r=30\text{cm}$, qual é o comprimento de um arco que subtende um ângulo de 60° ?

Resolução:

$$\begin{cases} \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \\ r = 30\text{cm} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{s}{r} \Rightarrow s = \frac{\pi}{3} \cdot 30 = 10\pi\text{cm}$$

Fazendo $\pi = 3,14$, temos:

$$s = 10 \cdot 3,14 = 31,4\text{cm}$$

6. UNIDADES PARA MEDIR ARCOS

6.1 Grau

É o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência.

Representação: 1°

A circunferência: 360°

O grau admite os seguintes submúltiplos:

$$\text{Minuto: } 1' = \frac{1^\circ}{60} \rightarrow 1^\circ = 60'$$

$$\text{Segundo: } 1'' = \frac{1'}{60} \rightarrow 1' = 60''$$

6.2 Radiano

É o arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

Representação: 1 rad

A circunferência: $6,28... \text{ rad} = 2\pi \text{ rad}$

6.3 Grado

É o arco unitário que corresponde a $\frac{1}{400}$ da circunferência.

Representação: 1 gr

A circunferência: 400 gr

6.4 Transformação de unidades

Já vimos que a medida de uma circunferência qualquer é dada por 360° , ou 2π rad, ou 400 gr.

A transformação de unidades é feita através de regra de três utilizando as igualdades:

$$180^\circ = \pi \text{ rad} = 200 \text{ gr} \quad \text{ou} \quad 360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 400 \text{ gr}$$

Observação:

$$1 \text{ rad} \cong 57^\circ$$

Exemplos: 1. Expressar 300° em rad.

Resolução:

$$180^\circ \quad \pi \text{ rad}$$

$$300^\circ \quad x$$

$$\frac{180^\circ}{300^\circ} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}$$

2. Expressar $\frac{\pi}{4}$ rad em graus.

Resolução:

$$180^\circ \quad \pi \text{ rad}$$

$$x \quad \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\frac{180^\circ}{x} = \frac{\pi}{\pi/4} \Rightarrow \frac{180^\circ}{x} = \frac{4}{1} \Rightarrow 4x = 180^\circ \Rightarrow x = \frac{180^\circ}{4} \Rightarrow x = 45^\circ$$

(2) Exercícios

1. Calcular em radianos as medidas dos arcos:

- a) 60° b) 210° c) 450° d) 150° e) 12°

2. Expresse em graus:

- a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{10\pi}{3}$ rad d) $\frac{\pi}{20}$ rad e) $\frac{3\pi}{5}$ rad

3. Expresse em grau e em radiano as medidas dos arcos que correspondem a:

- a) $\frac{1}{6}$ da medida da circunferência.
b) $\frac{2}{5}$ da medida da circunferência.

4. Sabendo que uma pessoa dá 4 voltas em torno de um canteiro circular de 1,5m de raio, calcule a distância percorrida por pessoa.

5. As rodas de um automóvel têm 70 cm de diâmetro. Determine o número de voltas efetuadas pelas rodas quando o automóvel percorre 9,891 km. Adote $\pi=3,14$.

6. Efetua as seguintes operações:

- a) $34^\circ 44' 32'' + 17^\circ 29' 51''$
b) $64^\circ - 22^\circ 10' 40''$
c) $5^\circ 40' 32'' \times 5$
d) $26^\circ 43' 12'' \div 3$

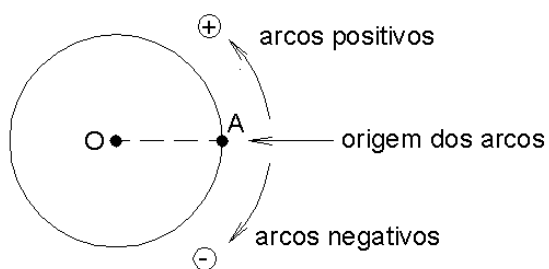
7. Ache três ângulos, em grau, sabendo que a soma do primeiro com o segundo é 12° , a soma do segundo com o terceiro é 9° e a do primeiro com o terceiro é $\frac{\pi}{36}$ rad.

7. CICLO TRIGONOMÉTRICO

7.1 Circunferência orientada

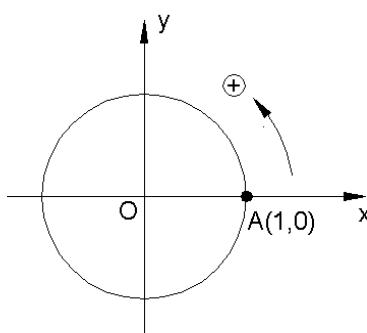
Uma circunferência se diz orientada quando nela fixamos um sentido positivo de percurso (anti-horário).

Todo arco de uma circunferência orientada chama-se arco orientado.



7.2 Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico

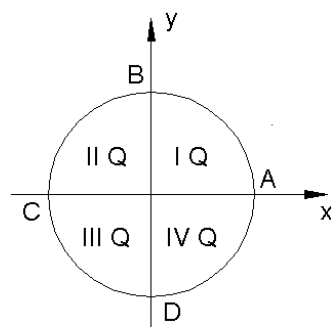
Vamos fixar um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano.



A circunferência orientada de centro na origem do sistema, de raio unitário ($r=1$) e cujo sentido positivo é o anti-horário, é denominada circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico.

A partir de agora, consideremos apenas os arcos orientados da circunferência com origem no ponto $A(1,0)$, que são chamados arcos trigonométricos. O ponto $A(1,0)$ é chamado origem dos arcos.

Observe que os eixos do sistema de coordenadas cartesianas ortogonais dividem o ciclo trigonométrico em 4 partes iguais que são chamados quadrantes.



AB (I Q) – 0° a 90° ou 0 rad a $\pi/2$ rad;

BC (II Q) – 90° a 180° ou $\pi/2$ rad a π rad ;

CD (III Q) – 180° a 270° ou π rad a $3\pi/2$ rad;

DA (IV Q) – 270° a 360° ou $3\pi/2$ rad a 2π rad.

7.3 Arcos côngruos (ou congruentes)

Dois arcos são côngruos quando tem a mesma extremidade e se diferem apenas pelo número de voltas; ou ainda de uma maneira prática, quando a diferença entre eles é um múltiplo de 360° (ou 2π rad).

Exemplos: 1. 30° e 1110° são côngruos?

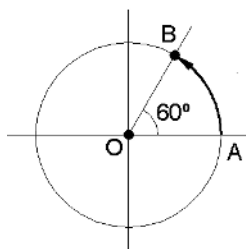
$1110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ$, logo ele tem 3 voltas completas mais 30°

Portanto 30° e 1110° são côngruos.

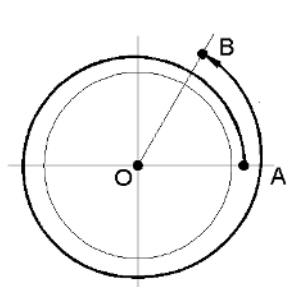
2. $14\pi/3$ e $2\pi/3$ são côngruos?

$(2\pi/3 = 120^\circ)$ $14\pi/3 = 840^\circ \Rightarrow 840^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 120^\circ$, logo tem 2 voltas completas mais 120° , portanto $14\pi/3$ e $2\pi/3$ são côngruos.

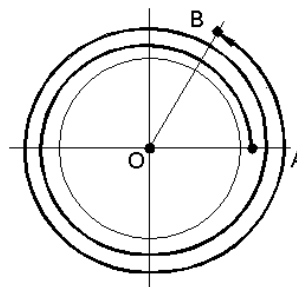
Vamos representa na circunferência um arco de 60° .



Observe que os arcos de medidas $60^\circ + 360^\circ$, $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ$, $60^\circ + 3 \cdot 360^\circ$, ... têm a mesma extremidade do arco de 60° .

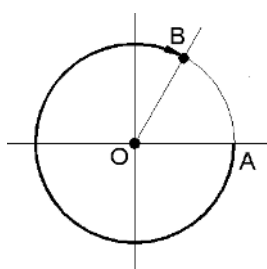


$$60^\circ + 360^\circ$$

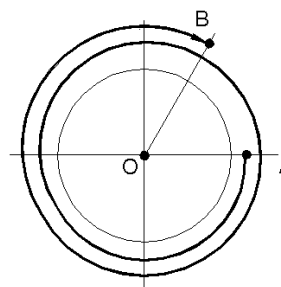


$$60^\circ + 2.360^\circ$$

O mesmo vai ocorrer com os arcos de medidas $60^\circ - 360^\circ$, $60^\circ - 2.360^\circ$, $60^\circ - 3.360^\circ$, ...



$$60^\circ - 360^\circ$$



$$60^\circ - 2.360^\circ$$

De maneira geral:

a) Se um arco mede α graus, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por: $x = \alpha + k.360^\circ$; onde $k \in \mathbb{Z}$ e α é denominado menor determinação ou primeira determinação positiva do arco trigonométrico ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$).

b) Se um arco mede α rad, a expressão geral dos arcos côngruos a ele é dada por: $x = \alpha + k.2\pi$.

Exemplos: 1. Sendo $\alpha = 40^\circ$ e $x = \alpha + k.360^\circ$ temos:

- para $k = -1$ (uma volta no sentido horário ou primeira determinação negativa);

- para $k = -2$ (duas voltas no sentido horário ou segunda determinação negativa);

E assim por diante.

- para $k = 0$ (nenhuma volta ou menor determinação ou primeira determinação positiva);

- para $k = 1$ (uma volta no sentido anti-horário ou segunda determinação positiva).

2. Sendo $\alpha = \pi/4$ rad e $x = \alpha + k \cdot 2\pi$, temos:

- para $k=0$ (menor determinação ou primeira determinação positiva);
- para $k=1$ (uma volta no sentido anti-horário ou segunda determinação positiva);
- para $k=2$ (duas voltas no sentido anti-horário ou terceira determinação positiva).

E assim por diante.

(3) Exercícios

1. Quantas voltas completas dá, e em qual quadrante pára um móvel que, partindo da origem A dos arcos percorre um arco de:

- a) 1875° b) 2310° c) -1290° d) 2456° e) $27\pi/4$ rad f) $43\pi/10$ rad

2. Verifique se são côngruos os seguintes pares de arcos:

- a) 1850° e -670° b) $19\pi/3$ rad e $25\pi/3$ rad c) 10° e 700°

3. Determine os arcos positivos:

- a) menores que 1000° e côngruos a 3150° ;
b) menores que 4π rad e côngruos a $55\pi/6$ rad.

4. Calcule a primeira determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

- a) 930° b) 1550° c) -1970° d) $23\pi/6$ rad e) $17\pi/3$ rad

5. Uma semi-reta dá, em torno da origem, quatro voltas completas, no sentido positivo. Determine, em radianos, o ângulo gerado pela semi-reta no seu movimento.

6. Complete:

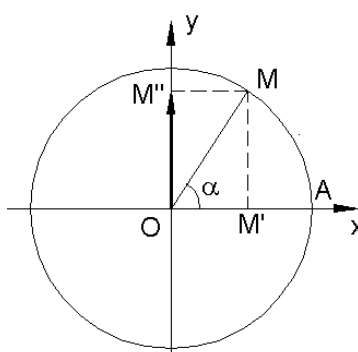
- a) Para $31\pi/3$ rad Expressão geral:
Primeira det. positiva:
Primeira det. negativa:

- b) Para 1300° Expressão geral:
 Segunda det. negativa:
 Terceira det. positiva:

8. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

8.1 Estudo do seno

Vamos considerar um ângulo α no ciclo trigonométrico:



Temos: $\triangle OM'M$ é um triângulo retângulo

α é um dos ângulos agudos do $\triangle OM'M$

$\overline{MM'}$ = cateto oposto a α ($\overline{MM'} = \overline{OM''}$)

$\overline{OM}$ = hipotenusa ($\overline{OM}$ = raio = 1)

Então:
$$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM''}}{1} = \overline{OM''}$$

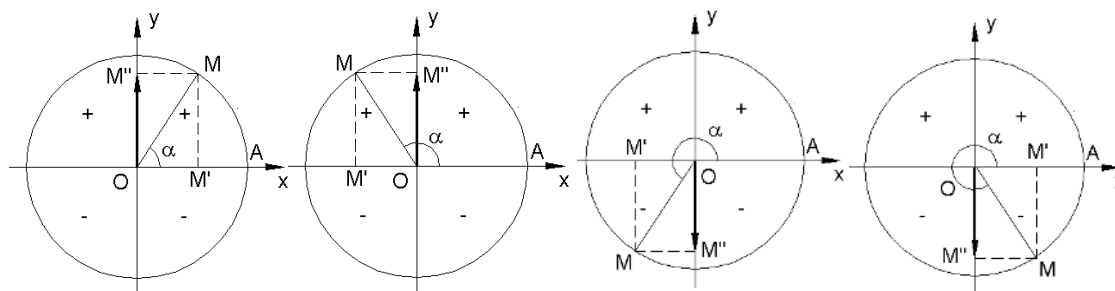
Portanto $\text{sen } \alpha = \overline{OM''}$

Chamamos o eixo y de eixo dos senos.

8.1.1 Sinal do seno e alguns valores importantes

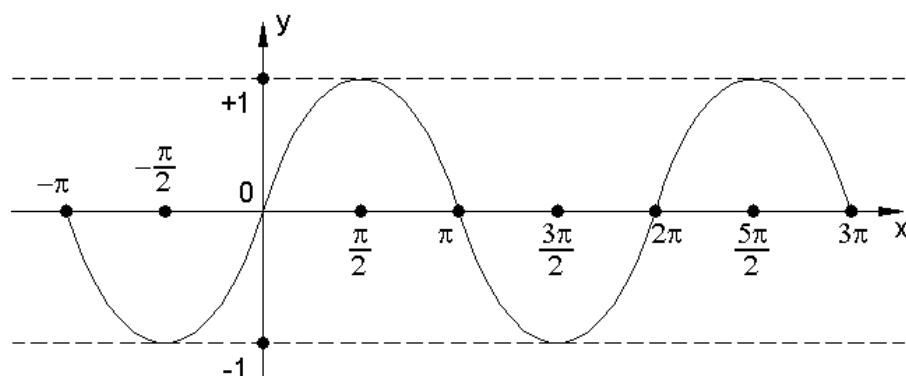
Vamos considerar um arco de α rad e de extremidade M, no ciclo trigonométrico.

O sinal do seno de α é o sinal da ORDENADA de M.



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

8.1.2 Gráfico do seno



O gráfico da função seno é chamado de **senóide**.

Analisando o gráfico podemos construir o seguinte quadro:

Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
Sinal	+	+	-	-
Variação	$0 \rightarrow +1$	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
	crescente	decrecente	decrecente	crescente

Observações:

1. O domínio da função seno é o conjunto dos números reais, isto é

$D=\mathbb{R}$.

2. A imagem da função seno é o intervalo $[-1,+1]$, isto é,
 $-1 \leq \sin x \leq 1$

3. A função seno é periódica, pois o valor do seno se repete a cada volta e na mesma ordem, de 2π rad em 2π rad, e o seu período é de 2π rad, isto é, $P = \frac{2\pi}{k}$ para $y = \sin kx$ ou $P = 2\pi$.

Exemplos: 1. Determinar o domínio da função $y = \sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$, no universo

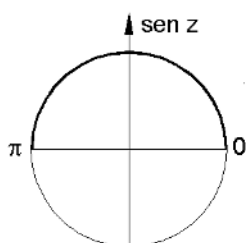
$$0 \leq x - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi.$$

Resolução:

Para que exista a raiz, devemos ter:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$$

Fazendo-se $z = x - \frac{\pi}{4}$, vem: $\sin z \geq 0$



O arco z deve ficar entre $0 \leq z \leq \pi$.

Substituindo:

$$0 \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi$$

$$\text{Seja } (*) \ x - \frac{\pi}{4} \leq \pi \text{ e } (**) \ x - \frac{\pi}{4} \geq 0$$

$$\text{De } (*) \ x - \frac{\pi}{4} \leq \pi$$

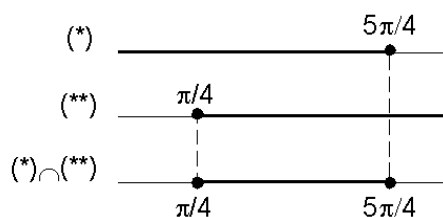
$$\text{De } (**) \ x - \frac{\pi}{4} \geq 0$$

$$x \leq \frac{\pi}{4} + \pi$$

$$x \geq \frac{\pi}{4}$$

$$x \leq \frac{5\pi}{4}$$

Na reta real:



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$$

2. Determinar k para que exista o arco que satisfaz a igualdade $\sin x = 2k - 5$.

Resolução:

Devemos ter: $-1 \leq \sin x \leq 1$; substituindo, temos:

$$-1 \leq 2k - 5 \leq 1$$

Seja (*) $2k - 5 \leq 1$ e (**) $2k - 5 \geq -1$

De (*) $2k - 5 \leq 1$

De (**) $2k - 5 \geq -1$

$$2k \leq 5 + 1$$

$$2k \geq 5 - 1$$

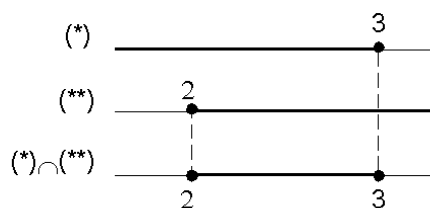
$$2k \leq 6$$

$$2k \geq 4$$

$$k \leq 3$$

$$k \geq 2$$

Na reta real:



$$S = \{k \in \mathbb{R} \mid 2 \leq k \leq 3\}$$

3. Seja a função real de variável real definida por $f(x) = 3 + 2 \sin x$.

Determine a imagem de f .

Resolução:

Sabemos que a imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, logo:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$3 - 2 \leq 3 + 2 \sin x \leq 3 + 2$$

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

Portanto $\text{Im}_{(f)} = [1, 5]$

(4) Exercícios

1. Determine o sinal de:

a) $\sin 30^\circ$ () b) $\sin \frac{2\pi}{3}$ () c) $\sin \frac{5\pi}{3}$ ()

2. Calcule o valor :

a) $\sin 450^\circ$ b) $\sin \frac{19\pi}{3}$ c) $\sin 900^\circ$

d) $\sin 765^\circ$ e) $\sin \frac{7\pi}{2}$ f) $\sin \frac{25\pi}{6}$

3. Determine os valores de $K \in \mathbb{R}$, para os quais temos:

a) $\sin x = 3K - 2$ b) $\sin x = 1 - 2K$ c) $2 \sin x = 4 - 2K$

d) $3 \sin x + 4K = 1$ e) $\sin x = K^2 - 2$ f) $\sin x = K^2 - 5K + 5$

4. Construa o gráfico das seguintes funções, no período de $[0, 2\pi]$, e determine o domínio, a imagem e o período.

a) $y = 3 \cdot \sin x$ b) $y = 2 - \sin x$ c) $y = \sin 3x$ d) $y = -\sin x$

5. Calcule o valor numérico das expressões:

a) $M = \sin \frac{9\pi}{4} + \sin \frac{13\pi}{4}$

b) $P = \sin \frac{x}{2} - 3 \cdot \sin 2x + \frac{\sin 3x}{4}$, para $x = \frac{\pi}{2}$

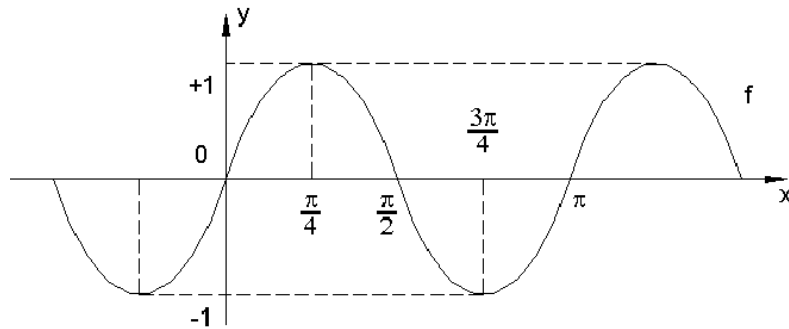
6. Dê o período das funções:

a) $y = 3 \cdot \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = 4 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $f(x) = \frac{\sin(2\pi \cdot x)}{2}$

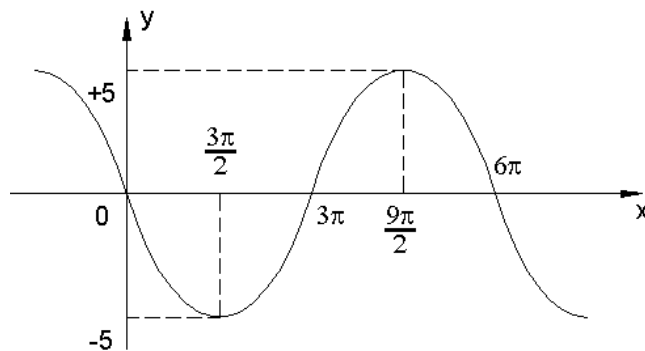
7. (PUC/Campinas-SP) A função f , representada abaixo, é dada por:

a) $f(x) = \sin 2x$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

d) $f(x) = 2 \cdot \sin x$ e) $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$



8. O gráfico ao lado representa $f(x) = a \operatorname{sen} kx$. Determine os valores de a e k .



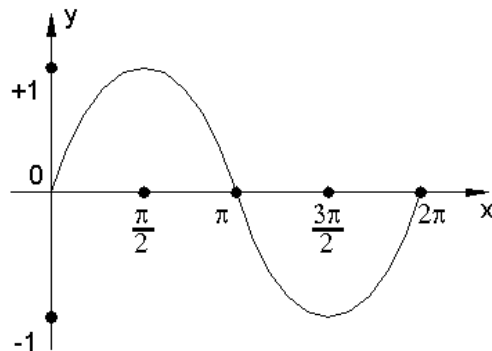
9. (UFSM-Vestibular/1996) Considere as afirmações:

- (1) Se $x=11^{\circ}36'40''$ e $y=22^{\circ}36'35''$, então $y-x$ vale $-11^{\circ}5'$.
- (2) Se as medidas dos ângulos A, B e C são, respectivamente, 10° , 10 rad e 10 grados , então o ângulo de menor medida é C.
- (3) $67^{\circ} 30'$ é equivalente a $3\pi/8 \text{ rad}$.

É (são) verdadeira (s)

- a) apenas (1)
- b) apenas (2)
- c) apenas (2) e (3)
- d) apenas (1) e (3)
- e) (1), (2) e (3)

10. (UFSM-Vestibular/1999) A função $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, tem como gráfico a senóide que, no intervalo $[0, 2\pi]$, está representada na figura



Se $g(x) = a \cdot \sin 3x$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, assinale verdadeira (v) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

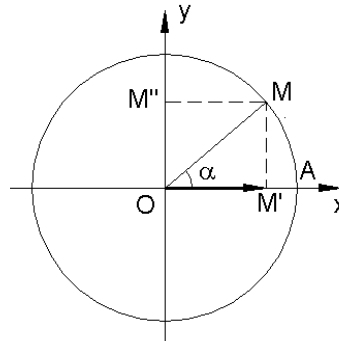
- () O domínio da função g é igual ao domínio da função f , independentemente do valor de a .
- () Para todo a , o conjunto imagem da função f está contido no conjunto imagem da função g .
- () O período da função g é maior que o período da função f .

A sequência correta é

- a) V – F – F
- b) V – V – F
- c) F – V – V
- d) V – F – V
- e) F – V – F

8.2 Estudo do cosseno

Vamos considerar um ângulo α no ciclo trigonométrico:



Temos: $\triangle OM'M$ é um triângulo retângulo

α é um dos ângulos agudos do $\triangle OM'M$

$\overline{OM'}$ = cateto adjacente a α

$\overline{OM}$ = hipotenusa ($\overline{OM}$ = raio = 1)

Então:
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM'}}{1} = \overline{OM'}$$

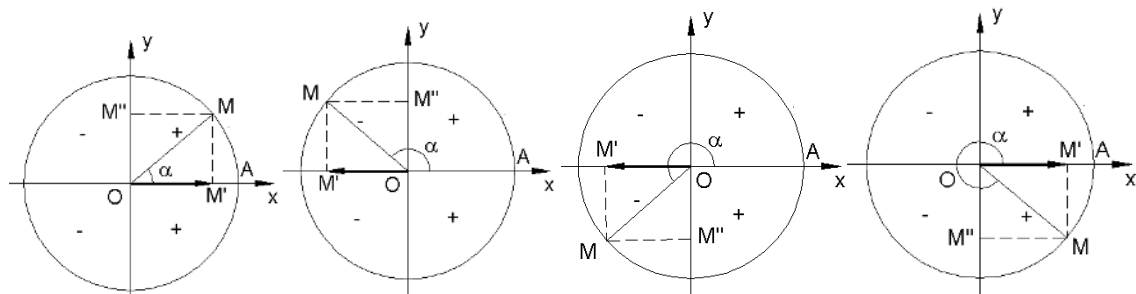
Portanto $\cos \alpha = \overline{OM'}$

Chamamos o eixo x de eixo dos cossenos.

8.2.1 Sinal do cosseno e alguns valores importantes

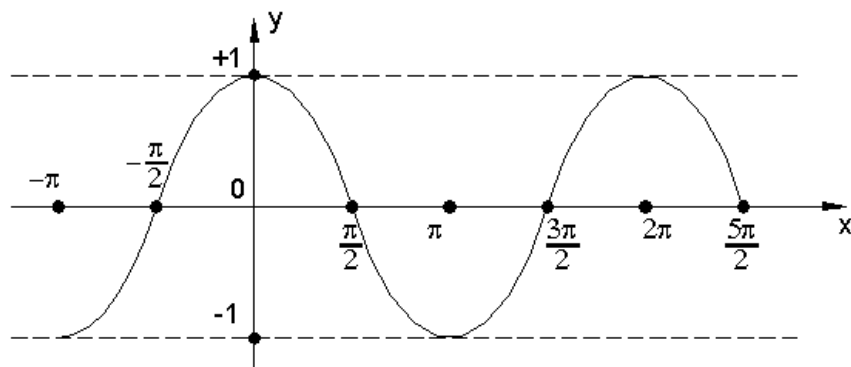
Vamos considerar um arco de α rad e de extremidade M, no ciclo trigonométrico.

O sinal do cosseno de α é o sinal da ABSCISSA de M.



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

8.2.2 Gráfico do cosseno



O gráfico da função cosseno é chamado de **cosenóide**.

Analisando o gráfico podemos construir o seguinte quadro:

Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
Sinal	+	-	-	+
Variação	$+1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +1$
	decrecente	decrecente	crescente	crescente

Observações:

1. O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais, isto é $D=\mathbb{R}$.

2. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1,+1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$

3. A função cosseno é periódica, pois o valor do cosseno se repete a cada volta e na mesma ordem, de 2π rad em 2π rad, e o seu período é de 2π rad, isto é, $P = \frac{2\pi}{k}$ para $y = \cos kx$ ou $P = 2\pi$.

Exemplos: 1. Determine o período da função $\cos 6x$.

Resolução:

$$P = \frac{2\pi}{k} \text{ para } y = \cos kx$$

$$y = \cos 6x \Rightarrow P = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow P = \frac{\pi}{3}$$

2. Sabendo que o conjunto imagem e o período da função $y = p + q \cos(rx)$ valem, respectivamente, $[-1,5]$ e $\pi/6$ rad, calcule p , q e r .

Resolução:

$$y = p + q \cos(rx) ; \text{Im} = [-1,5] \text{ e } P = \pi/6 \text{ rad.}$$

$$P = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{r} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 12$$

$$-1 \leq p + q \cos 12x \leq 5$$

$$-1 - p \leq q \cos 12x \leq 5 - p$$

$$\frac{-1-p}{q} \leq \cos 12x \leq \frac{5-p}{q}$$

Como $\cos 12x$ e $\cos x$ têm a mesma imagem, então:

$$-1 \leq \cos 12x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1-p}{q} = -1 \\ \frac{5-p}{q} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = q - 1 \\ p = -q + 5 \end{cases} \Rightarrow p = 2 \text{ e } q = 3$$

Portanto $p=2$, $q=3$ e $r=12$.

3. Dada a função real de variável real definida por $f(x) = 4 - 3 \cos 2x$, determine a imagem de f .

Resolução:

A imagem de $\cos x$ e $\cos 2x$ é a mesma, isto é:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{ e } -1 \leq \cos 2x \leq 1$$

Então temos:

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow (-3)(-1) \geq -3 \cdot \cos 2x \geq 1 \cdot (-3)$$

(ao multiplicar por número negativo a relação se inverte)

$$3 \geq -3 \cdot \cos 2x \geq -3 \text{ ou } -3 \leq -3 \cdot \cos 2x \leq 3$$

$$4 - 3 \leq 4 - 3 \cdot \cos 2x \leq 4 + 3 \Rightarrow 1 \leq 4 - 3 \cdot \cos 2x \leq 7$$

Portanto, $Im_{(f)} = [1, 7]$.

(5) Exercícios

1. Determine os sinais de:

a) $\sin 310^\circ$ b) $\sin \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ c) $\sin 1010^\circ$ d) $\sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) \text{ rad}$

e) $\sin 792^\circ$ f) $\sin \frac{17\pi}{6} \text{ rad}$ g) $\cos 1545^\circ$ h) $\cos(-2012^\circ)$

2. Determine os sinais das expressões:

a) $A = \sin 53^\circ \cdot \cos 460^\circ \cdot \sin 163^\circ \cdot \cos(-220^\circ)$

b) $B = \cos(-800^\circ) \cdot \sin 1320^\circ \cdot \sin \left(-\frac{9\pi}{4} \right) \text{ rad}$

3. Determine os valores:

a) $\sin 450^\circ$ b) $\sin 900^\circ$ c) $\sin 765^\circ$ d) $\sin(-1530^\circ)$

e) $\cos(900^\circ)$ f) $\cos 1860^\circ$ g) $\cos(11\pi) \text{ rad}$ h) $\cos \frac{13\pi}{6} \text{ rad}$

4. Calcule o valor numérico das expressões:

a) $A = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} + 2 \cdot \sin 0^\circ \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos^2 \pi}$

b) $B = \frac{\sin 450^\circ - \cos 540^\circ}{\sin 990^\circ}$

c) $A = \frac{\sin \frac{11\pi}{2} - \sin \frac{9\pi}{2}}{\cos 48\pi - \cos 33\pi}$

5. Sendo $180^\circ < \alpha < \beta < 270^\circ$, assinale a afirmação verdadeira:

a) $\sin \alpha \cdot \cos \beta < 0$ b) $\sin \alpha > \sin \beta$ c) $\cos \alpha > \cos \beta$

d) $\sin \alpha = \sin \beta$ e) $\cos \alpha \cdot \cos \beta < 0$

6. Sendo $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$, podemos afirmar que:

- a) $\cos x > 0$ e $\sin x > 0$ b) $\cos x > 0$ e $\sin x < 0$
c) $\cos x < 0$ e $\sin x > 0$ d) $\cos x < 0$ e $\sin x < 0$

7. Se $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, é uma função definida por $f(x) = \sin x + \cos x$, o valor

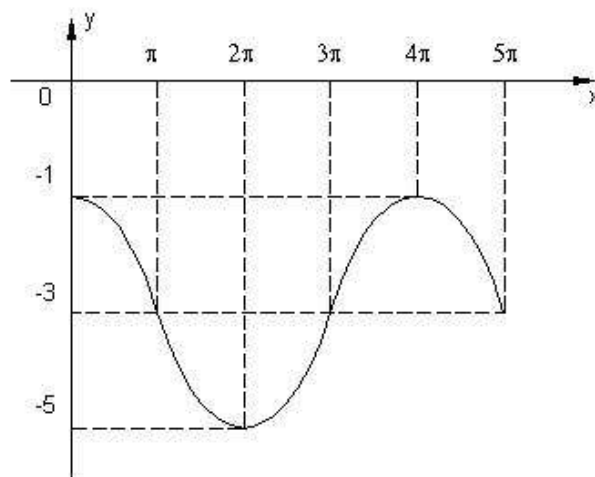
de $\frac{f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, é:

- a) -3 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

8. Calcule $m \in \mathcal{R}$, sabendo que o período da função $y = \cos 4mx$ é $\pi/2$ rad.

9. Determine o conjunto imagem da função $f(x) = 3 + 2 \cdot \sin x$.

10. O gráfico ao lado representa a função $y = a + 2 \cdot \cos mx$. Calcule os valores de a e m.



(6) Exercícios complementares

1. Calcule o valor numérico da seguinte expressão:

$$X = \cos 2x + \cos \frac{x}{5} + \cos \frac{x}{15}, \text{ para } x = \frac{5\pi}{2}.$$

2. Se $A = \sin(580^\circ)$, $B = \sin(-780^\circ)$ e $C = \cos(350^\circ)$, então é verdade que:

a) $A < B < C$ b) $B < A < C$ c) $A < C < B$ d) $B < C < A$ e) $C < B < A$

3. Uma medida α é tal que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ e uma medida β é tal que

$\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$. Coloque V ou F, nas afirmações:

(I) $-1 < \sin \alpha < 0$ (II) $0 < \cos \alpha < 1$ (III) $0 < \sin \beta < 1$ (IV) $0 < \cos \beta < 1$

4. Determine os valores de $k \in \mathcal{R}$, para os quais se verifica:

a) $\cos x = 5k + 1$ b) $7k + \cos x = 20$ c) $3 \cdot \cos x + 2k = 4$

5. Determine os valores de $k \in \mathcal{R}$, de modo que se tenha simultaneamente:

a) $\sin x = \frac{1+k}{3}$ e $\cos x = \frac{k\sqrt{5}}{3}$

b) $\cos \alpha = 3k$ e $\sin \alpha = k + \frac{3}{5}$

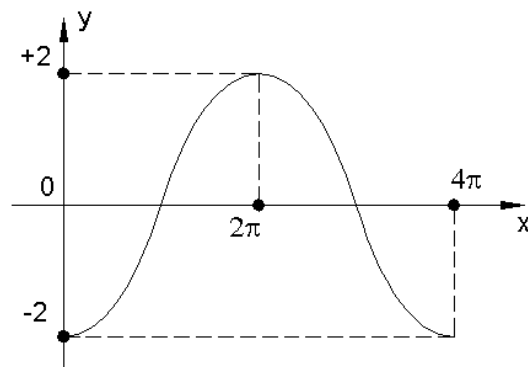
c) $\sin \alpha = k - 1$ e $\cos \alpha = k\sqrt{3}$

6. (UFSM-Vestibular/1996) Calculando $k \in \mathcal{R}$ de modo que ocorram simultaneamente $\sin \alpha = \frac{x}{x+1}$ e $\cos \alpha = \frac{x-1}{x+1}$, obtém-se:

a) 0 e 1 b) 1 e 4 c) 1 e 1 d) 0 e 4 e) 4 e -1

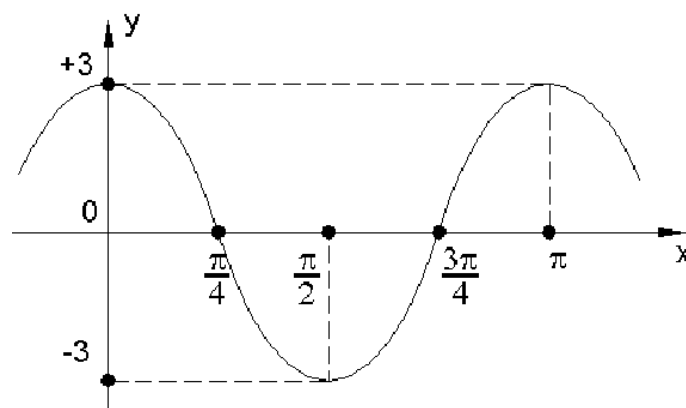
7. Sendo o gráfico ao abaixo o da função $y = a \cdot \cos bx$, determinar a e

b .



8. O gráfico abaixo é da função $y = b \cdot \cos mx$, determine os valores

de b e m .



9. Diga se verdadeiro ou falso?

a) $\sin 2 > 0$ b) $\cos 4 > 0$ c) $\sin 3 > \sin 2$

d) $\cos 3 > \cos 2$ e) $\cos \frac{\pi}{4} > \cos 1$ f) $\cos \sqrt{3} < 0$

10. Em que quadrante tem-se simultaneamente:

a) $\sin \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$?

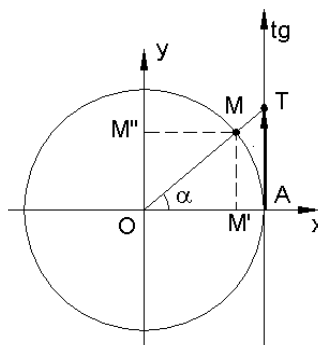
b) $\sin \alpha > 0$ e $\cos \alpha > 0$?

c) $\sin \alpha < 0$ e $\cos \alpha > 0$?

d) $\sin \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$?

8.3 Estudo da tangente

Vamos considerar M, extremidade do arco α no ciclo trigonométrico, e T a interseção de $\overline{OM}$ com o eixo das tangentes (é uma reta tangente ao ciclo trigonométrico no ponto A).



Temos: $\triangle OAT$ é um triângulo retângulo

α é um dos ângulos agudos do $\triangle OAT$

$\overline{OA}$ = cateto adjacente a α ($\overline{OA}$ =raio=1)

$\overline{AT}$ = cateto oposto a α

Então:
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$$

Portanto
$$\operatorname{tg} \alpha = \overline{AT}$$

Chamamos o eixo tg de eixo das tangentes.

Definimos como tangente (do ângulo α) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, e indicamos $\operatorname{tg} \alpha = \overline{AT}$.

Observe que esta definição coincide com a que conhecíamos para o triângulo retângulo, isto é, nos triângulos retângulos $\triangle OM'M$ e $\triangle OAT$, temos:

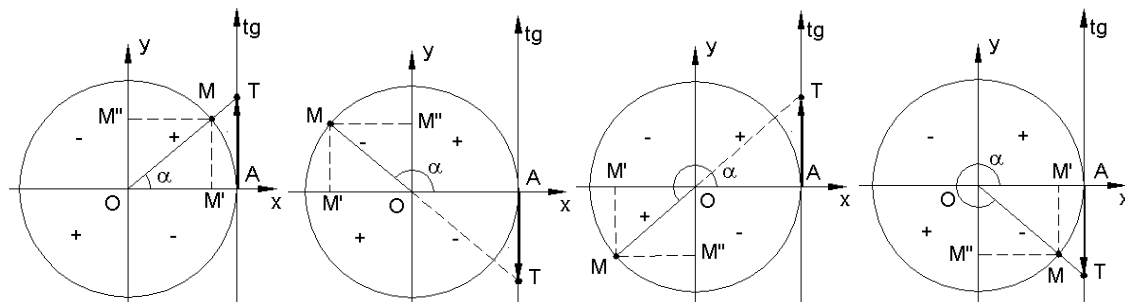
$$\triangle OM'M \sim \triangle OAT$$

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{M'M}}{\overline{AT}} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{1} = \frac{\sin \alpha}{\overline{AT}}$$

$$\therefore \overline{AT} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \text{ onde } \cos \alpha \neq 0; \text{ isto é, } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

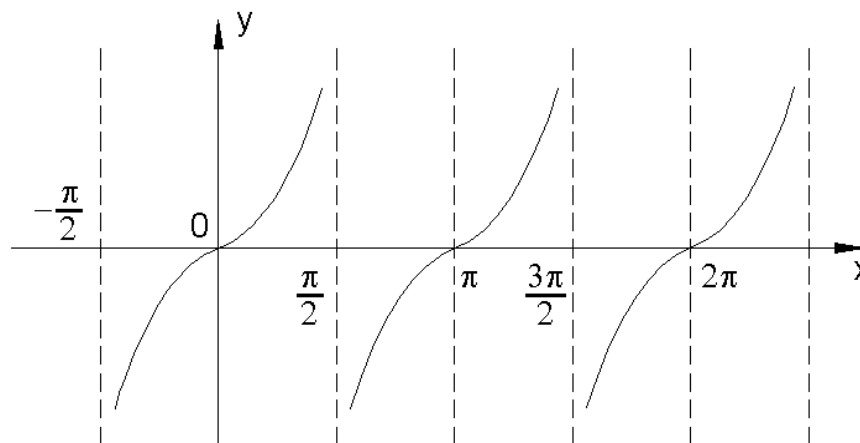
8.3.1 Sinal da tangente e alguns valores importantes

Comparando os sinais do seno e cosseno, temos o sinal da tangente.



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

8.3.2 Gráfico da tangente



O gráfico da função tangente é chamado de **tangentóide**.

Analisando o gráfico podemos construir o seguinte quadro:

Quadrante	I	II	III	IV
Arco	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
Sinal	+	-	+	-
Variação	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 0$
	crescente	crescente	crescente	crescente

Observações:

1. O domínio da função tangente é $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. A imagem da função tangente é o intervalo $]-\infty, +\infty[$, isto é, $-\infty \leq \operatorname{tg} x \leq +\infty$
3. A função tangente é periódica, pois seus valores se repetem a cada meia volta e na mesma ordem, de π rad em π rad, e o seu período é de π rad, isto é, $P = \pi$.
4. Observa-se que a tangente cresce em todos os quadrantes e que quando é igual a 90° e 270° (e todos os cômugruos) não existe a $\operatorname{tg} \alpha$, isto é, a função é descontínua para esses valores de α .

Exemplos: 1. Determinar o domínio da função $y = \operatorname{tg}(x - 30^\circ)$.

Resolução:

A condição de existência é:

$$x - 30^\circ \neq 90^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$\text{Daí: } x \neq 30^\circ + 90^\circ + k \cdot 180^\circ \Rightarrow x \neq 120^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Portanto:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 120^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Qual é o período da função $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Resolução:

Sabemos que a função tangente é periódica de período $P=\pi$.
Devemos verificar o que ocorre com o arco.

$$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ quando varia de } 0 \text{ a } \pi.$$

$$2x - \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$2x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Portanto } P = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

3. Determinar o valor de $\operatorname{tg} 25\frac{\pi}{3}$.

Resolução:

Fazendo:

$$25\frac{\pi}{3} = 24\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3}$$

Então:

$$\operatorname{tg} 25\frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

(7) Exercícios

1. Determine os sinais de:

a) $\operatorname{tg} 120^\circ$ () b) $\operatorname{tg} 240^\circ$ () c) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$ ()

d) $\operatorname{tg} 89^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ$ () e) $\operatorname{tg} 2$ () f) $\operatorname{tg} 5$ ()

2. Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $y = \operatorname{tg} 4x$ b) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ d) $y = 2\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

3. Se $f(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} - 1}{\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} x}$, o valor de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é:

a) $2 - \sqrt{3}$ b) $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{\sqrt{3} - 3}{3(\sqrt{3} + 1)}$ d) $\frac{6}{3 - \sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{3}}$

4. Se $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ e x pertence ao primeiro quadrante, então $\cos x$ é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{9}$ c) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ d) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

5. Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$ é:

a) $7/5$ b) $5/9$ c) $-2/5$ d) $1/5$ e) $-1/5$

6. Determine o período das funções:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ c) $f(x) = \operatorname{tg}(x - \pi)$

7. Determine o valor da expressão:

$$y = \cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - 3 \cdot \operatorname{tg} 3\pi + \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$$

8. Ache o valor numérico da expressão:

$$\frac{\operatorname{sen}(30^\circ + x) + \cos^2(3x)}{\operatorname{tg}(x - 15^\circ)} + \operatorname{tg} \frac{x - 60^\circ}{2}, \text{ para } x = 60^\circ.$$

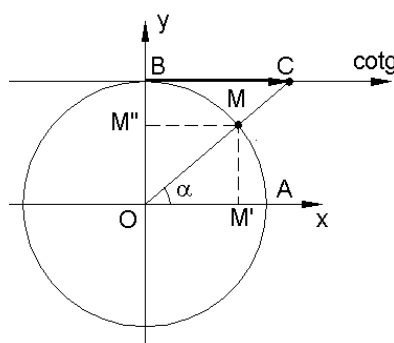
9. Sendo $x = \frac{\pi}{2}$, calcule $A = \operatorname{sen} 3x + \cos 4x - \operatorname{tg} 2x$.

10. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que $\frac{\pi}{3}$ seja raiz da equação:

$$\operatorname{tg}^2 x - m \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 0.$$

8.4 Estudo da cotangente

Vamos considerar M, extremidade do arco α no ciclo trigonométrico, e C a interseção de $\overline{OM}$ com o eixo das cotangentes (é uma reta tangente ao ciclo trigonométrico no ponto B).



$$\cot g\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC} \Rightarrow \cot g\alpha = \overline{BC}$$

Chamamos o eixo $\cot g$ de eixo das cotangentes.

Definimos como cotangente (do ângulo α) a medida algébrica do segmento $\overline{BC}$, e indicamos $\cot g\alpha = \overline{BC}$.

Observe os triângulos retângulos OM'M e OBC, temos:

$$\triangle OM'M \sim \triangle OBC$$

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{OB}} \quad \text{por construção } \overline{OM''} = \overline{M'M}, \text{ então}$$

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{MM''}}{\overline{OB}} \Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin \alpha}{1}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot g\alpha \quad \text{onde } \sin \alpha \neq 0; \text{ isto é, } \alpha \neq k\pi$$

Podemos escrever a função cotangente como sendo o inverso da função tangente, isto é, $\cot g\alpha = \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \Rightarrow \cot g\alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

Exemplo: Calcular o valor de $\cot g 1620^\circ$.

Resolução:

No ciclo trigonométrico temos que:

$$1620^\circ = 180^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$

$$\cot g 1620^\circ = \cot g 180^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 180^\circ} = \tilde{n} \text{ existe}$$

$$\therefore \cot g 1620^\circ = \tilde{n} \text{ existe}$$

(8) Exercícios

1. Determine o valor de:

a) $y = 4 \cot g 630^\circ - 2 \cot g 3645^\circ + \cot g 810^\circ$.

b) $z = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{tg} \frac{3x}{2}}{\operatorname{tg} 14x - \cos 2x}$, sendo $x = \frac{\pi}{6}$.

2. Se $f(x) = \frac{1 + \cot gx}{1 - \cot gx}$, então o valor de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ é:

a) 0 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 1

3. Se $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$, então:

a) $\cos x < 0$ b) $\operatorname{sen} x < 0$ c) $\cot g 2x < 0$ d) $\operatorname{sen} 2x < 0$ e) $\cos 2x > 0$

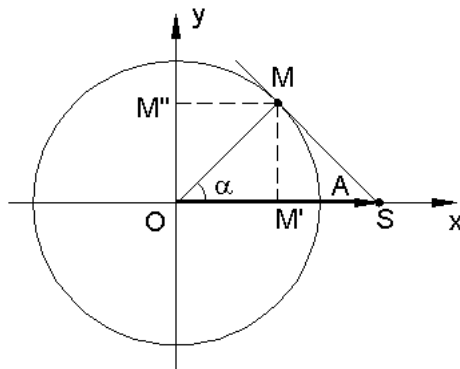
4. Dada a função $f(x) = \cot g^2 2x + \operatorname{sen} 8x - 3 \cdot \cos 4x$ calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Seja a função $f(x, y) = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} + \frac{\cot gx}{\cot gx - \cot gy}$ com $x \neq y$,

calcule o valor numérico da função quando $x = \frac{\pi}{6}$ e $y = \frac{\pi}{3}$.

8.5 Estudo da secante

A secante é o inverso do cosseno. O valor da secante é obtido no próprio eixo dos cossenos. Para isso, usa-se uma tangente a circunferência conforme a figura.



$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0$$

$$\sec \alpha = \frac{\overline{OS}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OS}}{1} = \overline{OS}$$

Portanto $\sec \alpha = \overline{OS}$

Exemplo: Calcular m , de modo que $\sec \alpha = m - 2$ e $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$.

Resolução:

Devemos ter $\sec \alpha \geq 1$, logo:

$$m - 2 \geq 1 \Rightarrow m \geq 3$$

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 3\}$$

(9) Exercícios

1. Calcule o valor de:

a) $\sec 540^\circ$ b) $\sec(-1410^\circ)$ c) $\sec 11\pi$ d) $\sec \frac{9\pi}{4}$

2. Calcule m , de modo que:

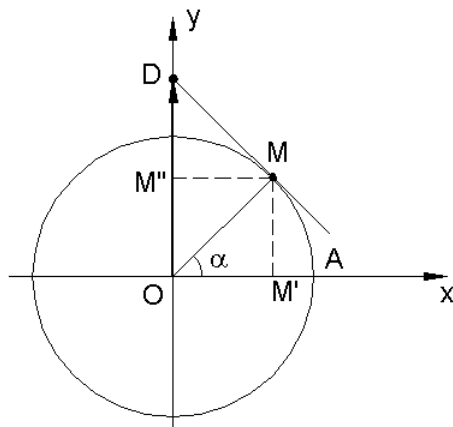
a) $\sec \alpha = \frac{2m-1}{m}$ e $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ b) $\sec \alpha = m - 2$ e $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$

3. Simplifique a expressão y , dada por:

$$y = \frac{\sec x(1 + \cot gx)}{1 + \sin x \cdot \sec x}$$

8.6 Estudo da cossecante

A cossecante é o inverso do seno. O valor da cossecante é obtido no próprio eixo dos senos. Para isso, usa-se uma tangente a circunferência conforme a figura.



$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}, \operatorname{sen} \alpha \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{\overline{OD}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

$$\text{Portanto } \operatorname{cosec} \alpha = \overline{OD}$$

Exemplo: Calcular o valor de $\operatorname{cosec}(-1035^\circ)$

Resolução:

No ciclo trigonométrico temos que:

$$1035^\circ = 315^\circ + 2 \cdot 360^\circ$$

$$-1035^\circ = -315^\circ + (-2) \cdot 360^\circ$$

Como $-315^\circ = 45^\circ - 360^\circ$, temos:

$$\operatorname{cosec}(-1035^\circ) = \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \operatorname{cosec}(-1035^\circ) = \sqrt{2}$$

(10) Exercícios

1. Calcule o valor de:

a) $\cos \sec 810^\circ$ b) $\cos \sec 1800^\circ$ c) $\cos \sec 1470^\circ$ d) $\cos \sec \frac{9\pi}{4}$

2. Calcule m , de modo que $\cos \sec \alpha = m^2 + 4m + 1$ e $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

3. Se x é um arco compreendido entre $\frac{3\pi}{2}$ e 2π , qual é o sinal da expressão $y = \frac{\cos \sec x \cdot \cos \sec(x - \pi)}{\sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

RESUMO DA FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Domínio, conjunto imagem e período das funções trigonométricas

	Domínio	Imagem	Período
$\operatorname{Sen} \alpha$	$\mathcal{R}$	$\{y \in \mathcal{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$	2π
$\operatorname{Cos} \alpha$	$\mathcal{R}$	$[-1, 1]$	2π
$\operatorname{Tg} \alpha$	$\left\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathcal{R}$	π
$\operatorname{Cotg} \alpha$	$\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha \neq k.\pi, k \in \mathbb{Z} \}$	$\mathcal{R}$	π
$\operatorname{Sec} \alpha$	$\left\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\{y \in \mathcal{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$	2π
$\operatorname{Cossec} \alpha$	$\{ \alpha \in \mathcal{R} \mid \alpha \neq k.\pi, k \in \mathbb{Z} \}$	$\{y \in \mathcal{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$	2π

Valores das funções trigonométricas dos principais ângulos

Função	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\text{sen } \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\text{cos } \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\text{tg } \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
$\text{Cotg } \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞
$\text{sec } \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1
$\text{Cossec } \alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞

(11) Exercícios complementares

1. (UFRGS/1977) Se $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$ e $\cos x = 2k - 1$, então, k varia no

intervalo:

- a) $[-1, 0]$ b) $[0, \frac{1}{2}]$ c) $[0, 1]$ d) $[\frac{1}{2}, 1]$ e) $]0, 1[$

2. (UFSM-Vestibular/1982) Os valores de x , de modo que a expressão $\text{sen } x = \frac{2x-1}{3}$ exista são:

- a) $-1 \leq x \leq 2$ b) $-2 \leq x \leq 4$ c) $-3 \leq x \leq 3$ d) $-4 \leq x \leq 2$ e) $-5 \leq x \leq 2$

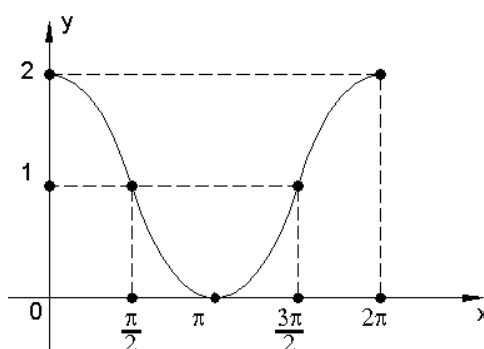
3. (UFRGS/1980) O período e a imagem da função real f definida por $f(x) = 3 \cdot \sin 2x$, respectivamente são:

- a) π e $[-3, 3]$ b) 4π e $[-3, 3]$ c) $2\pi/3$ e $[-2, 2]$
d) 6π e $[-2, 2]$ e) 2π e $[-1, 1]$

4. O período e a imagem de função $y = -2 + 5 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

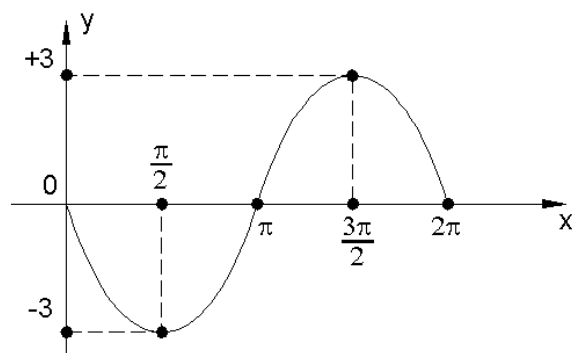
- a) 2π e $[-5, 5]$ b) 4π e $[-5, 5]$ c) π e $[-7, 3]$
d) 4π e $[-7, 3]$ e) 2π e $[-7, 3]$

5. (UFRGS/1997) O gráfico abaixo representa a função real f . Esta função é dada por:



- a) $f(x) = 1 - \cos x$ b) $f(x) = 1 + \cos x$ c) $f(x) = \cos(x + 1)$
d) $f(x) = \cos(x - 1)$ e) $f(x) = \cos(x + \pi)$

6. (UFMS-Vestibular/1980) A função representada no gráfico é:

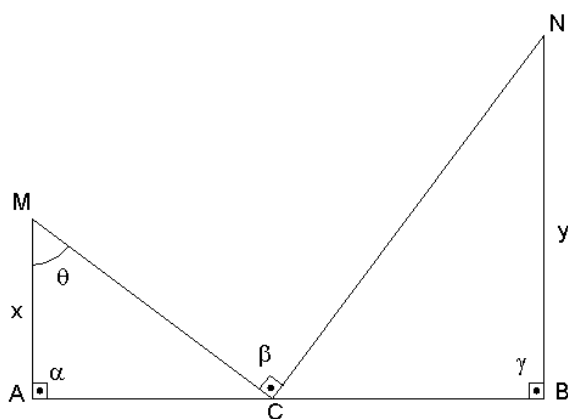


- a) $y = -\sin 3x$ b) $y = 3 \sin 3x$ c) $y = 3 \sin x$
d) $y = \sin 3x$ e) $y = -3 \sin x$

7. Sejam x e y tais que $x + y = \frac{\pi}{2}$ e $x - y = \frac{\pi}{6}$, calcule o valor de

$$A = \frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y}.$$

8. (UFSC-Vestibular/1992) Observe a figura abaixo, onde C é ponto médio do segmento $\overline{AB}$, cuja medida de comprimento é 120cm, x e y , são respectivamente, as medidas dos comprimentos dos segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$. Sabendo-se que α , β e γ são ângulos retos e o ângulo θ mede 60° , então o valor de $\frac{x}{y}$ é:

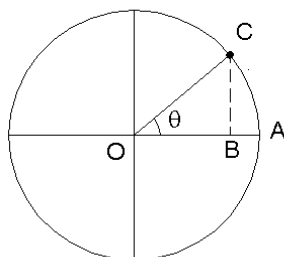


- a) 6 b) 3 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{3}$

9. (UFSC-Vestibular/1992) Uma torre vertical, construída sobre um plano horizontal, tem 25 metros de altura. Um cabo de aço esticado liga o topo da torre até o plano, fazendo com o mesmo um ângulo de 60° . O comprimento do cabo de aço é:

- a) $50m$ b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}m$ c) $\frac{25\sqrt{3}}{3}m$ d) $\frac{50\sqrt{3}}{2}m$ e) $\frac{1}{3}m$

10. (UFSM-Vestibular/1992) Na figura, o raio $\overline{OA}$ do círculo mede 9, o segmento $\overline{OB}$ mede 4,5 e o segmento $\overline{CB}$ é perpendicular a $\overline{OA}$. A medida, em radianos, do ângulo θ é:



- a) $\frac{\pi}{9}$ b) $\frac{3\pi}{8}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{3}$

11. (PUC) Dada a função trigonométrica $y = -3 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, calcule o período e a sua imagem.

12. Determine o valor de k , para que exista o arco que satisfaz a igualdade $\sin x = \frac{5k - 2}{k - 3}$.

13. Ache a , de modo que $\operatorname{tg} \alpha = a^2 - \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}$ e $\alpha \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$.

14. (Cescea-SP) Determine o domínio e a imagem de função:
 $f(x) = 3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

15. Determine o período das funções:

- a) $y = \operatorname{tg} 4x$ b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{9}$

16. Ache k , de modo que $\cot g \alpha = k^2 - 7k + 10$ e $\alpha \in]270^\circ, 360^\circ[$.

17. (UFSC/2000) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. A medida em radianos de um arco de 225° é $\frac{11\pi}{6}$ rad

02. A menor determinação positiva de um arco de 1000° é 280° .

04. Os valores de m , de modo que a expressão $\operatorname{sen} x = 2m - 5$ exista, estão no intervalo $[2, 3]$.

08. $\operatorname{sen} x > \cos x$ para $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

16. Se $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então o valor de $\operatorname{sen} x - \cos x$ é igual a $\frac{1}{5}$.

32. Se $\operatorname{sen} x > 0$, então $\operatorname{cosec} x < 0$.

64. A solução da equação $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2$ para $0 \leq x \leq 2\pi$ é $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.



18. (UFSCM-Vestibular/1996) Calculando $x \in \mathbb{R}$, de modo que ocorram simultaneamente $\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{x+1}$ e $\cos \alpha = \frac{x-1}{x+1}$, obtém-se

- a) 0 e 1 b) 1 e 4 c) 1 e 1 d) 0 e 4 e) 4 e -1

19. (UFSM-Vestibular/1997) Considere as afirmações:

(1) O domínio da função $y = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{x}$ é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{4}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

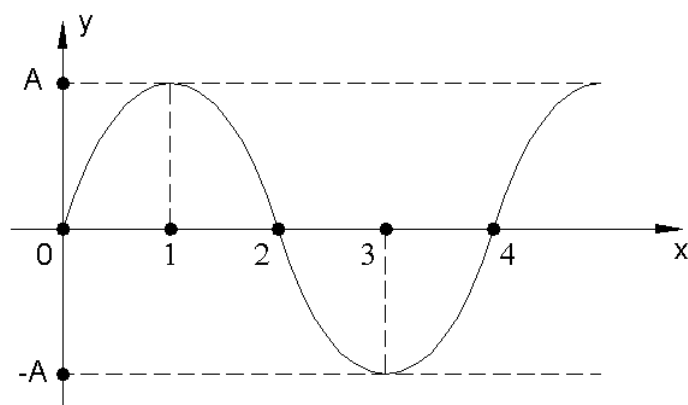
(2) Se $\cos y = \frac{1-2m}{2}$, então $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

(3) O período da função $y = \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{3}$ é 3 radianos.

É (São) verdadeira(s)

- a) apenas (1).
- b) apenas (2).
- c) apenas (1) e (3).
- d) apenas (2) e (3).
- e) (1), (2), (3).

20. (UFSM-Vestibular/2000)



O gráfico representa a função

- a) $y = 2A(\operatorname{sen} x + \cos x)$
- b) $y = \frac{A}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} x \right)$
- c) $y = -A \cos \left(2\pi x + \frac{\pi}{2} \right)$
- d) $y = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{2} \right)$
- e) $y = A \cos \left(\frac{\pi}{2} x + \frac{3\pi}{2} \right)$

21. (UFSM-PEIES/1998) Nas afirmações que se referem à trigonometria, assinale V nas verdadeiras e F nas falsas.

() $\cos \frac{4\pi}{3} < \sin \frac{4\pi}{3}$.

() $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$ se $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

() A soma das soluções da equação $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$, com $0 \leq x \leq 2\pi$ é 2π .

A sequência correta é

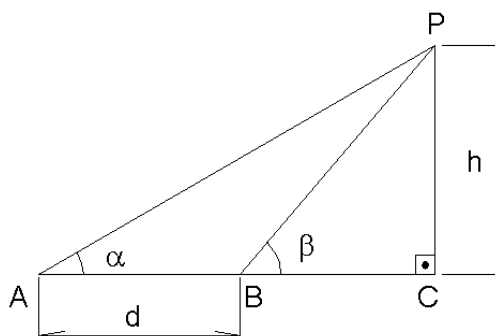
- a) V – F – V.
- b) F – V – V.
- c) F – F – V.
- d) F – V – F.
- e) V – F – F.

22. (UFSM-PEIES/1999) O domínio da função $y = -\frac{1}{3} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ é _____. Seu período é de _____, e sua imagem é o conjunto _____.

Assinale a alternativa que completa corretamente, as lacunas.

- a) $\mathbb{R}; \pi \text{ rad}; [-3,3]$
- b) $\mathbb{R}; 2\pi \text{ rad}; \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
- c) $\mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{4}\right); 180^\circ; \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$
- d) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]; 4\pi \text{ rad}; [-4,4]$
- e) $\mathbb{R}; \pi \text{ rad}; \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

23. (UFSM-PEIES/2000)



Para medir a altura de uma torre localizada em um terreno plano e horizontal, adotou-se o procedimento a seguir, que se encontra esquematizado na figura. Escolheram-se, no terreno, dois pontos A e B distantes d metros um do outro e alinhados com a base da torre C.

Do ponto A, via-se o ponto P mais alto da torre, sob um ângulo de α graus com o plano horizontal.

Do ponto B, via-se o ponto P sob um ângulo β graus como o plano horizontal. A altura h da torre é, em metros:

- a) $d \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$
- b) $d \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}$
- c) $d \frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
- d) $\frac{1}{d} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$
- e) $d \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}$

24. (UFSM-PEIES/2000) A função $f(x) = A \cos bx$, onde A e b são constantes, $0 < b < \pi/2$ e $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f(0) = 20$ e $f(1) = 10$.

O valor de $f(3)$ é

- a) -25 b) -20 c) -10 d) 0 e) 20

25. (UFSM-PEIES/2001) Seja a função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x - \frac{4}{3} \cos x$,

sendo x real. Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ e $\operatorname{tg} \theta = -2\sqrt{2}$, então $f(\theta)$ é igual a

- a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) 0 d) 1 e) $\sqrt{2}$

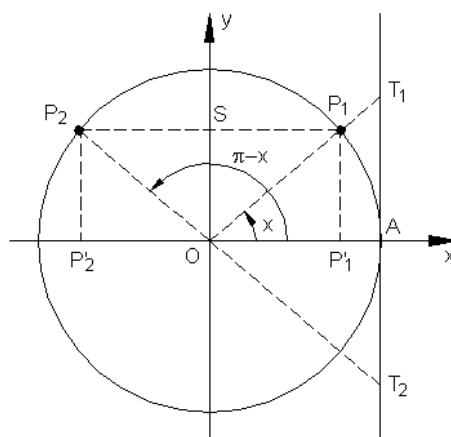
9. REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

9.1 Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante

Simetria em relação ao eixo das ordenadas – Arcos suplementares.

Seja P_1 um ponto do ciclo trigonométrico localizado no primeiro quadrante, tal que a medida do arco $\widehat{AP_1}$ seja x .

O ponto P_2 , simétrico de P_1 em relação ao eixo das ordenadas, também pertence ao ciclo trigonométrico e é tal que a medida de $\widehat{AP_2}$ é $\pi - x$.



Observando o ciclo, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \overline{OS} \\ \sin(\pi - x) = \overline{OS} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = \overline{OP'_1} \\ \cos(\pi - x) = \overline{OP'_2} = -\overline{OP'_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \overline{AT_1} \\ \operatorname{tg}(\pi - x) = \overline{AT_2} = -\overline{AT_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$$

Observamos, ainda, que $x + (\pi - x) = \pi$ (ou 180°)

Arcos cuja soma das medidas é igual a π (ou 180°)
são denominados arcos suplementares.

Exemplo: Um arco de medida 120° está no 2° quadrante; portanto, vamos achar a medida y do seu suplemento: $120^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$

Resolução:

Então:

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} 120^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ \Rightarrow \operatorname{cosec} 120^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ \Rightarrow \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sec 120^\circ = \frac{1}{\cos 120^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \sec 120^\circ = -2$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} 120^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 120^\circ} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{cotg} 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(12) Exercícios

1. Calcule o valor das funções trigonométricas do arco de:

a) 135° b) $\frac{5\pi}{6}$ c) 1590° d) $\frac{19\pi}{4}$

2. Calcule:

a) $\operatorname{sen} 135^\circ + 4 \operatorname{cotg} 120^\circ$ b) $\cos 510^\circ + \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$

3. Simplifique:

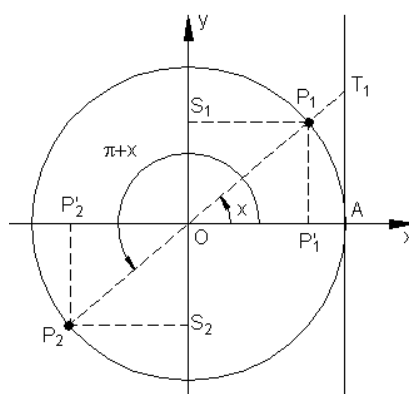
a) $\operatorname{sen}(9\pi - x) + \operatorname{sen}(5\pi - x)$ b) $\operatorname{tg}(3\pi - x) + \operatorname{tg}(-5\pi - x)$

9.2 Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante

Simetria em relação ao centro da circunferência – Arcos explementares.

Seja P_1 um ponto do ciclo trigonométrico localizado no primeiro quadrante, tal que a medida do arco $\widehat{AP_1}$ seja x .

O ponto P_2 , simétrico de P_1 em relação ao centro da circunferência, também pertence ao ciclo trigonométrico e é tal que a medida de $\widehat{AP_2}$ é $\pi + x$.



Observando o ciclo, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \overline{OS} \\ \sin(\pi + x) = \overline{OS_2} = -\overline{OS_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = \overline{OP'_1} \\ \cos(\pi + x) = \overline{OP'_2} = -\overline{OP'_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \overline{AT_1} \\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \overline{AT_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

Observamos, ainda, que $(\pi + x) - x = \pi$ (ou 180°)

Arcos cujo modulo da diferença entre suas medidas é igual π (ou 180°) são denominados arcos explementares.

Exemplo: Calcular as funções trigonométricas de um arco de 225° .

Resolução:

Um arco de medida 225° está no 3º quadrante; portanto vamos calcular a medida y de seu explemento.

$$225^\circ - y = 180^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$$

Então:

$$\sin 225^\circ = -\sin 45^\circ \Rightarrow \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \sec 225^\circ = \frac{1}{\sin 225^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ \Rightarrow \cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec 225^\circ = \frac{1}{\cos 225^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sec 225^\circ = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 225^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 225^\circ = 1$$

$$\cot g 225^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 225^\circ} = \frac{1}{1} \Rightarrow \cot g 225^\circ = 1$$

(13) Exercícios

1. Calcule o valor das funções trigonométricas do arco de:

a) 210° b) $\frac{5\pi}{4}$ c) $\frac{16\pi}{3}$ d) 930°

2. Ache o valor de $\sin 240^\circ - \cos 570^\circ$.

3. Simplifique:

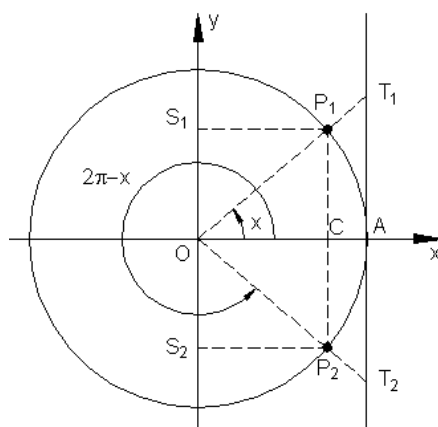
a) $\sin(x - 900^\circ) + \cos(x - 540^\circ)$ b) $\operatorname{tg}(x + 540^\circ) - \operatorname{tg}(7\pi + x)$

9.3 Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante

Simetria em relação ao eixo das abscissas – Arcos replementares.

Seja P_1 um ponto do ciclo trigonométrico localizado no primeiro quadrante, tal que a medida do arco $\widehat{AP_1}$ seja x .

O ponto P_2 , simétrico de P_1 em relação ao eixo das abscissas, também pertence ao ciclo trigonométrico e é tal que a medida de $\widehat{AP_2}$ é $2\pi - x$.



Observando o ciclo, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } x = \overline{OS_1} \\ \text{sen}(2\pi - x) = \overline{OS_2} = -\overline{OS_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen } x$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = \overline{OC} \\ \cos(2\pi - x) = \overline{OC} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos(2\pi - x) = \cos x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tg } x = \overline{AT_1} \\ \text{tg}(2\pi - x) = \overline{AT_2} = -\overline{AT_1} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{tg}(2\pi - x) = -\text{tg } x$$

Observamos, ainda, que $(2\pi - x) + x = 2\pi$ (ou 360°)

Arcos cujo soma das medidas é igual 2π (ou 360°)
são denominados arcos replementares.

Exemplo: Determinar as funções trigonométricas de um arco de 300° .

Resolução:

Vamos, então determinar a medida y de seu replemento.

$$300^\circ + y = 360^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$$

Então:

$$\text{sen } 300^\circ = -\text{sen } 60^\circ \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \sec 300^\circ = \frac{1}{\text{sen } 300^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 300^\circ = \cos 60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sec 300^\circ = \frac{1}{\cos 300^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sec 300 = 2$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow \operatorname{tg} 300^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot g 300^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 300} = \frac{1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \cot g 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(14) Exercícios

1. Calcule o valor da funções trigonométricas do arco de:

a) 315° b) $\frac{11\pi}{6}$ c) $\frac{17\pi}{3}$

2. Simplifique a expressão:

$$\operatorname{sen}(4\pi - x) + \cos(8\pi - x) - \operatorname{sen}(720^\circ - x).$$

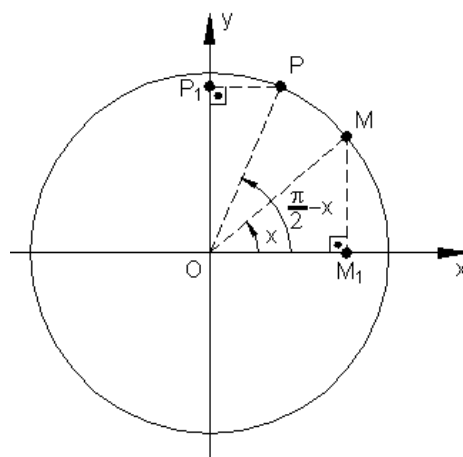
3. Reduza ao 1º quadrante:

a) $\operatorname{sen} 2510^\circ$ b) $\operatorname{tg} 1000^\circ$ c) $\sec 1560^\circ$

9.4 Propriedades dos arcos complementares

Consideremos no ciclo trigonométrico dois arcos cujas medidas são

$$x \text{ e } \left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$



Observando o ciclo trigonométrico, verificamos que:

- Os arcos cujas medidas são $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ são complementares, pois

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 90^\circ.$$

- $\cos x = \overline{OM_1}$; $\sin x = \overline{MM_1}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{PP_1}; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \overline{OP_1}$$

Considerando os triângulos OM_1M e OP_1P , temos:

$$\left. \begin{array}{l} OM \cong OP \text{ (r=1)} \\ M_1\hat{O}M \cong P_1\hat{O}P \text{ (x)} \\ \hat{M} \cong \hat{P_1} \text{ (reto)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OM_1M \cong \Delta OP_1P$$

Daí resulta que:

$$\overline{OP_1} = \overline{OM_1} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\overline{PP_1} = \overline{MM_1} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Assim, teremos as funções trigonométricas do arco $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ em

função do arco x :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$$

$$\cos \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

Exemplo: Simplifique a expressão $y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

Resolução:

$$y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x \cdot \sec x}{\sin x \cdot \cot x} = \frac{\cos x \cdot \sec x}{\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\cos x \sec x}{\cos x} = \sec x$$

(15) Exercícios:

1. Simplifique a expressão:

$$a) y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}$$

$$b) y = \frac{\cos(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x) + \cos(360^\circ - x) + 3 \cos(90^\circ - x)}{\sin(270^\circ + x) - \sin(90^\circ + x) - \cos(90^\circ - x) + \sin(360^\circ + x)}$$

$$c) y = \sin(-x) + \sin(\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x$$

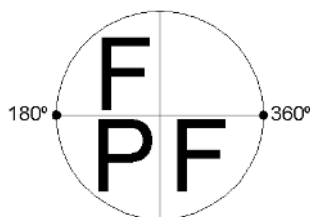
RESUMO (redução ao 1º quadrante):

Para reduzir um arco α qualquer pertencente ao 2º, 3º ou 4º quadrantes, a uma correspondente arco no primeiro quadrante, com o mesmo valor da razão trigonométrica (em módulo), procede-se:

Localize o quadrante em que está o arco a ser reduzido.

(2) Verifique o sinal da razão trigonométrica no referido quadrante.

(3) Faça a redução do arco conforme a figura:



2° → quanto falta para 180° ($180^\circ - \alpha$)

3° → quanto passa de 180° ($\alpha - 180^\circ$)

4° → quanto falta para 360° ($360^\circ - \alpha$)

(16) Exercícios complementares

1. Determinar o valor numérico das expressões:

a) $A = \sin 240^\circ - \cos 570^\circ$

b) $B = \sin 330^\circ - \cos 2460^\circ$

c) $C = \frac{\sin 570^\circ + \sin 450^\circ}{\operatorname{tg} 120^\circ \cdot \cos 210^\circ}$

d) $D = \frac{\sin(\pi - x) \cdot \cos(2\pi - x)}{\sec(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}(\pi - x)}$, sabendo que $\cos x = \frac{1}{2}$ e $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Simplifique as expressões:

a) $y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi + x)}{\cos(\pi - x) \cdot \cos(2\pi - x)}$

b) $y = \frac{\sin(\pi - x) \cdot \operatorname{tg}(\pi + x) \cdot \cos(4\pi + x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}(3\pi - x)}$

c) $y = \frac{\operatorname{tg}(2\pi - x) \cdot \sec(2\pi + x)}{\sec(3\pi + x) \cdot \sin(-x)}$

d) $y = \frac{\cos(2\pi - x) \cdot \cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi + x)}{\sin(-x) \cdot \cot g(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

e) $y = \frac{\cos(5\pi + x) \cdot \operatorname{tg}(4\pi - x)}{\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

3. Simplificando-se a expressão $2 \cos \frac{86\pi}{3} - 3 \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4}$ obtém-se:

- a) -4 b) $-2\sqrt{3}$ c) $1 + \sqrt{3}$ d) 2 e) 5

4. Seja $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi + x) + \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot gx}. \text{ Sabendo-se que } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ com } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

então $f(x)$ é igual a:

- a) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{7}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

5. (UFSM-Vestibular/1991) Para todo x real, a expressão

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(\pi - x) \text{ é equivalente a:}$$

- a) $\cos x$ b) $-\operatorname{sen} x - \cos x$ c) 0 d) $2 \operatorname{sen} x$ e) $-2 \operatorname{sen} x$

10. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

10.1 Relações trigonométricas fundamentais

1) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, para todo x .

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

3) $\cot gx = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, para todo $x \neq k\pi$

4) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

5) $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, para todo $x \neq k\pi$

Exemplo: Para que valores de a temos, simultaneamente, $\sin x = a + 1$ e $\cos x = a$.

Resolução:

Usando a relação $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e substituindo, temos:

$$(a + 1)^2 + (a)^2 = 1$$

$$a^2 + 2a + 1 + a^2 - 1 = 0$$

$$2a^2 + 2a = 0$$

$$a(2a + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \text{ou} \\ 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

Portanto $a = 0$ ou $a = -1$

10.2 Relações trigonométricas derivadas das fundamentais

1ª relação: $\cot g = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, válida para todo $x \neq k\pi/2$.

Demonstração:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = 1 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g x$$

2ª relação: $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, válida para todo $x \neq \pi/2 + k\pi$.

Demonstração:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

3ª relação: $\cos \sec^2 x = 1 + \cot g^2 x$, válida para todo $x \neq k\pi$

Demonstração:

$$1 + \cot g^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} = \cos \sec^2 x$$

Exemplos: 1. Dado $\cot gx = \frac{1}{2}$ e sendo x um ângulo do terceiro quadrante, calcular o valor de $\sin x$.

Resolução:

$$\cos \sec^2 x = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cos \sec^2 x = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\cos \sec^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos \sec x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Como } x \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[, \text{ temos: } \cos \sec x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Portanto

$$\cos \sec x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2. \text{ Se } \cot gx = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ calcular } \tan x.$$

Resolução:

$$\text{Se } \cot gx = \frac{1}{\tan x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan x = \sqrt{2}$$

(17) Exercícios

1. Sendo $\tan x = \frac{7}{24}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções trigonométricas.

2. Calcule o valor de $\cot gx$, sabendo que $\cos \sec x = 2 \cdot \sin x, x \in 1^\circ Q$.

3. Calcule $k \in \mathbb{R}$, de modo que se tenha simultaneamente $\tan \theta = \frac{1+k}{2}$ e $\sec \theta = \sqrt{k+2}$.

4. Se $\sec x = 3$ e $\operatorname{tg} x < 0$, então $\sin x$ vale:

- a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Sabendo que $4\sin^2 x + 2\cos^2 x = 3$, $x \in 3^\circ Q$, calcule $\sin x$ e $\cos x$.

6. Se $\sin x = \frac{84}{85}$, calcule o valor da expressão

$$y = \operatorname{tg}^2 x (\cos \sec^2 x - 1) + \operatorname{tg} x \cdot \cos x.$$

7. Sendo $y = -\frac{4}{3} + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \cos \sec^2 x} - \sec^2 x$, então:

- a) $y = \frac{7}{3}$ b) $y = \frac{1}{3}$ c) $y = -\frac{4}{3}$ d) $y = -\frac{7}{3}$ e) $y = -\frac{1}{3}$

8. Calcule $k \in \mathbb{R}$, sabendo que $\cos x = \frac{6k+2}{5}$ e $\cos ecx = \frac{5}{3k+2}$.

9. (UFSC-1999) Sabendo que $\cos \sec x = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro

quadrante, então o valor da expressão $9(\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x)$ é:

- a) 41 b) 45 d) 50 e) 55 e) 60

10. A soma das raízes da equação $\cos^2 x + \cos x = 0$, no intervalo $0 < x < 2\pi$, é:

- a) π b) 4π c) 3π d) $7\pi/2$ e) $5\pi/2$

11. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos uma igualdade da forma $f(x) = g(x)$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções trigonométricas.

Se essa igualdade é válida para qualquer valor real de x , para os quais os valores das funções existem, dizemos que $f(x) = g(x)$ é uma **identidade trigonométrica**.

Exemplos: 1. A igualdade $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ é válida para qualquer x real; logo, é uma identidade trigonométrica.

2. A igualdade $\cot gx = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ é válida para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; logo é uma identidade trigonométrica.

11.1 Demonstração de uma identidade

Para provar que uma identidade trigonométrica é verdadeira, podemos utilizar ou aplicar qualquer uma das relações trigonométricas já estudadas nesta unidade (e que são, também, identidades) e escolher um dos seguintes processos de demonstração:

1º Processo: Partimos de um membro da identidade (geralmente o mais complicado) e chegamos ao outro membro.

Exemplo: Demonstrar a identidade $(1 + \cot^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) = 1$.

Demonstração:

$$\left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) \cdot (1 - \cos^2 x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\right) (1 - \cos^2 x) = 1$$

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, temos:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right) (\sin^2 x) = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

Portanto $1=1$.

2º Processo: Vamos transformar o 1º membro da identidade $f(x)$ em uma função $h(x)$ e, separadamente, transformarmos o 2º membro da identidade $g(x)$ também em uma função $h(x)$, levando em consideração a propriedade de transitividade:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = h(x) \\ g(x) = h(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Exemplo: Demonstrar a identidade $tgx + \cot gx = tgx \cdot \cos \sec^2 x$.

Resolução:

Vamos expressar as funções em $\sin x$ ou $\cos x$:

$$tgx + \cot gx = tgx \cdot \cos \sec^2 x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$\frac{1}{\cos x \cdot \sin x} = \frac{1}{\cos x \cdot \sin x}.$$

3º Processo: Vamos construir uma função $h(x) = f(x) - g(x)$ e provar que $h(x) = 0$; isso equivale a $f(x) = g(x)$, pois $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Exemplo: Demonstrar a identidade trigonométrica

$$tg^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \sin^2 x.$$

Resolução:

$$\text{Vamos fazer } f(x) - g(x) = 0$$

$$tg^2 x + \cos^2 x - \sec^2 x + \sin^2 x = 0$$

Como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$tg^2 x - \sec^2 x + 1 = 0$$

Vamos expressar $tg^2 x$ e $\sec^2 x$ em função de $\sin x$ e $\cos x$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-1}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Portanto $0=0$.

(18) Exercícios

1. Demonstrar as seguintes identidades trigonométricas:

- a) $(1 + \tan^2 x) \cdot (1 - \sin^2 x) = 1$ b) $\frac{\sin x + \tan x}{\cot x + \sec x} = \sin x \cdot \tan x$
- c) $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = (\sec x - \tan x)^2$ d) $\frac{1 - 2 \cdot \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \tan x - \cot x$
- e) $(1 + \tan x)^2 + (1 - \tan x)^2 = 2 \sec^2 x$ f) $\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$
- g) $\frac{\cos \sec^2 x - 2}{\cos \sec^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$ h) $2 \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = 3 \cdot \cos^2 x - 1$
- i) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 - 2 \sin^2 x$ j) $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$
- l) $(\cot x + \tan x)^2 = \cot^2 x + \tan^2 x + 2$
- m) $(\sin x + \tan x)(\cos x + \cot x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$
- n) $\sec^2 x \cdot \cos \sec^2 x = \sec^2 x + \cos \sec^2 x$
- o) $\sin^2 x (1 + \cot^2 x) = \sin x \cdot \sec x \cdot \cot x$
- p) $\sin^2 x - \cos^2 x = 2 \cdot \sin^2 x - 1$

12. TRANSFORMAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

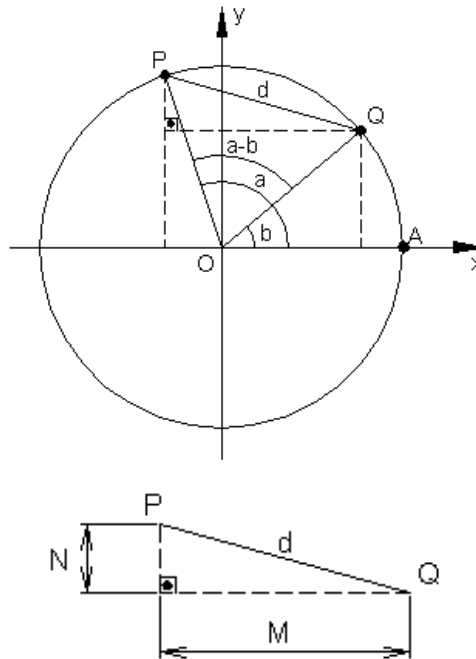
Nessa item, vamos deduzir as fórmulas trigonométricas da soma e diferença de dois arcos e a fórmula do arco duplo cujas funções são conhecidas.

12.1 Cosseno da diferença

Para obter a fórmula do cosseno da diferença devemos lembrar do Teorema de Pitágoras que é dado por:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto oposto})^2 + (\text{cateto adjacente})^2$$

Consideremos então no círculo unitário os pontos P e Q tais que $m(\widehat{AP})=a$ e $m(\widehat{AQ})=b$. Como $P(\cos a, \sin a)$ e $Q(\cos b, \sin b)$, a distância d entre os ponto P e Q é dada por:



Detalhe do triângulo retângulo

Desenvolvendo os quadrados e lembrando que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obtemos:

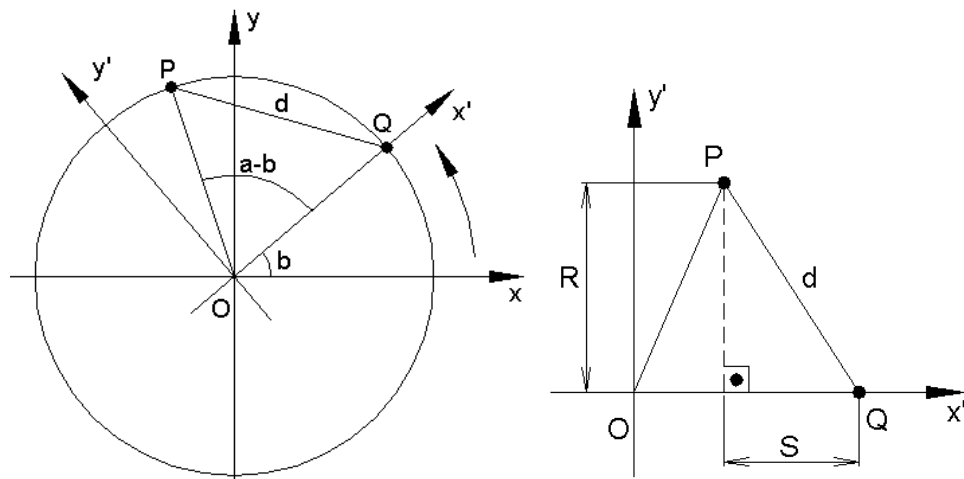
$$d^2 = N^2 + M^2, \text{ onde } N = \sin a - \sin b \text{ e } M = \cos a - \cos b, \text{ logo}$$

$$d^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2$$

$$d^2 = \cos^2 a - 2 \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2 \sin a \cdot \sin b + \sin^2 b$$

$$d^2 = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)$$

Mudemos agora o nosso sistema de coordenadas girando os eixos de um ângulo b em torno da origem.



Neste novo sistema o ponto Q tem coordenada $(1,0)$ e o ponto P tem coordenadas $(\cos(a-b), \sin(a-b))$. Calculando novamente a distância entre os pontos P e Q, obtemos:

$$d^2 = S^2 + R^2, \text{ onde } S = 1 - \cos(a-b) \text{ e } R = 0 - \sin(a-b), \text{ logo}$$

$$d^2 = (1 - \cos(a-b))^2 + (0 - \sin(a-b))^2$$

$$d^2 = 1 - 2\cos(a-b) + \cos^2(a-b) + \sin^2(a-b)$$

$$d^2 = 2 - 2\cos(a-b)$$

Igualando os valores de d^2 , temos:

$$2 - 2\cos(a-b) = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)$$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \Rightarrow \text{Cosseno da diferença}$

12.2 Cosseno da soma

Substituindo na fórmula do cosseno da diferença b por $-b$ encontramos:

$$\cos(a - (-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) + \sin a \cdot \sin(-b)$$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow \text{Cosseno da soma}$
--

12.3 Seno da soma

Aplicando na fórmula do cosseno da diferença aos arcos $\frac{\pi}{2} - a$ e b ,

lembrando que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ obtemos:

$$\begin{aligned}\sin(a + b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \sin b = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b\end{aligned}$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \Rightarrow \text{seno da soma}$$

12.4 Seno da diferença

Substituindo b por $-b$ na fórmula do seno da soma. obtemos:

$$\sin(a + (-b)) = \sin a \cdot \cos(-b) + \cos a \cdot \sin(-b)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \Rightarrow \text{seno da diferença}$$

12.5 Tangente da diferença

Para calcular a tangente de $a - b$, dividimos as fórmulas do seno da diferença pelo cosseno da diferença.

$$\begin{aligned}tg(a - b) &= \frac{\sin(a - b)}{\cos(a - b)} = \frac{\sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b} \\ &= \frac{\frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \frac{\sin b}{\cos b}}{1 + \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\sin b}{\cos b}} = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}\end{aligned}$$

$$tg(a - b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb} \Rightarrow \text{tangente da diferença}$$

12.6 Tangente da soma

Para calcular a tangente de $a + b$, dividimos as fórmulas do seno da soma pelo cosseno da soma.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \cos a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}} = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}} \Rightarrow \text{tangente da soma}$$

12.7 Fórmulas do arco duplo

Substituindo b por a nas fórmulas do seno, cosseno e tangente da soma obtemos:

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a+a) = \operatorname{sen} a \cdot \cos a + \cos a \cdot \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Observação: $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2 \cos^2 a - 1$ ou

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

Portanto:

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a + a) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tga}} = \frac{2\operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Exemplos: 1. Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{12}{13}$ e $\operatorname{sen} y = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x, y < \pi$, calcular o valor de $\operatorname{sen}(x - y)$.

Resolução:

Cálculo do $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{144}{169} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{5}{13} \text{ como } x \in 3^\circ Q \Rightarrow \cos x = -\frac{5}{13}$$

Cálculo do $\cos y$:

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \frac{3}{5} \text{ como } y \in 3^\circ Q \Rightarrow \cos y = -\frac{3}{5}$$

Cálculo do $\operatorname{sen}(x - y)$:

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}$$

Portanto $\operatorname{sen}(x - y) = \frac{56}{65}$

2. Sendo $\cos(3\pi - a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a \in 3^\circ Q$, e $\cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = \frac{3}{5}$, $b \in 4^\circ Q$,

calcular $\cos(a - b)$.

Resolução:

Sabemos que:

$$\cos(3\pi - a) = \cos(\pi - a) = -\cos a \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right) = -\operatorname{sen} b \Rightarrow \operatorname{sen} b = -\frac{3}{5}$$

Utilizando a relação fundamental, vem:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a + \frac{2}{4} = 1 \Rightarrow \sin a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{como } a \in 3^\circ Q \Rightarrow \sin a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin^2 b + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \frac{9}{5} + \cos^2 b = 1 \Rightarrow \cos b = \pm \frac{4}{5}$$

$$\text{como } b \in 4^\circ Q \Rightarrow \cos b = \frac{4}{5}$$

Portanto:

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{10}$$

$$\cos(a - b) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

3. Sabendo que $\operatorname{tga} = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{tgb} = \frac{1}{10}$, calcular $\operatorname{tg}(a + b)$.

Resolução:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

Substituindo, temos:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{\frac{2+1}{10}}{1 - \frac{1}{50}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{49}{50}} = \frac{15}{49}$$

$$\text{Portanto } \operatorname{tg}(a + b) = \frac{15}{49}$$

4. Conhecendo-se $\sin a = \frac{4}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcular:

a) $\sin 2a$ b) $\cos 2a$ c) $\operatorname{tg} 2a$

Resolução:

$$\text{a) } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}$$

$$\text{b) } \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \cos 2a = -\frac{7}{25}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{24}{7} \Rightarrow \operatorname{tg} 2a = -\frac{24}{7}$$

(19) Exercícios

1. Determine o produto $\sec 75^\circ \cdot \cos \sec 75^\circ$.

2. Marque verdadeiro (V) ou falso(F), justificando.

() $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$

() $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ = \cos 45^\circ$

() $\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{4}$

3. Qual é o valor de $\sin 63^\circ \cdot \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 63^\circ$?

4. Qual é o valor de $\cos 25^\circ \cdot \cos 55^\circ + \sin 25^\circ \cdot \sin 55^\circ$?

5. Simplifique a expressão $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

6. Prove que $2 \cdot \cos 31^\circ \cdot \cos 29^\circ = 1 + 2 \cdot \sin 31^\circ \cdot \sin 29^\circ$.

7. Dados $\sin a = \frac{4}{5}$ e $\cos b = \frac{2}{3}$, com $0 < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \frac{\pi}{2}$, determine:

a) $\sin(a + b)$

b) $\cos(a - b)$

c) $\operatorname{tg}(a + b)$

8. Sendo $\operatorname{tga} = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen} b = \frac{2}{5}$, com $0 < b < \frac{\pi}{2}$, encontre $\operatorname{tg}(a + b)$.

9. Calcule $tg15^\circ$ e $cotg75^\circ$.

10. Os arcos a e b do primeiro quadrante são tais que $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} b = \frac{12}{13}$. Calcular $\cos(a+b)$.

(20) Exercícios complementares

1. (UFSC-1998) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$, para todo x real.

02. Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então $tgx < 0$ e $\sec x < 0$.

04. Se $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$ e x é um arco do 1º quadrante, então $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

08. $\cos(x + \pi) = \cos x$, para todo x real.

16. $\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen} x$, para todo x real.

32. Se $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$, então $\cos x_1 < \cos x_2$.



2. Se $\operatorname{sen} a = \frac{4}{5}$ e $\cos b = \frac{3}{5}$, sendo a do segundo quadrante e b do primeiro quadrante, calcular $\operatorname{sen}(a-b)$.

3. Se $\operatorname{sen} a = \frac{1}{3}$, Calcular $\operatorname{sen} 2a$ e $\cos 2a$.

4. (UFSC-1997) Se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \theta = \frac{1}{3}$, então o valor da expressão $y = \frac{\cos(2\pi - \theta)}{\operatorname{tg} \theta}$ é

- a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ c) -1 d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ e) $12\sqrt{2}$

5. (UFSM-Vestibular/1998) Considere as afirmativas:

I. Se $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$, então $x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

II. Se $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\cos y = \frac{2}{3}$, sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$, então

$$\sin(x + y) = 0.$$

III. Se x está no segundo quadrante e $\operatorname{tg} x = -2\sqrt{2}$, então $\sec x = -3$.

É(São) verdadeira(s)

- a) apenas I.
- b) apenas II.
- c) apenas III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II, III.

6) (UFSM-Vestibular/1999) Seja $f: \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{\sin(\pi + x) + \operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cot gx}. \quad \text{Sabendo-se que } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \text{com}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, então $f(\theta)$ é igual a

- a) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$
- b) $\frac{2}{7}$
- c) $\frac{7}{2}$
- d) 1
- e) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

7) (UFSM-Vestibular/2002) Considerando $x \neq y$, a expressão

$\sin(x + y) \cdot \sin(x - y)$ é equivalente a

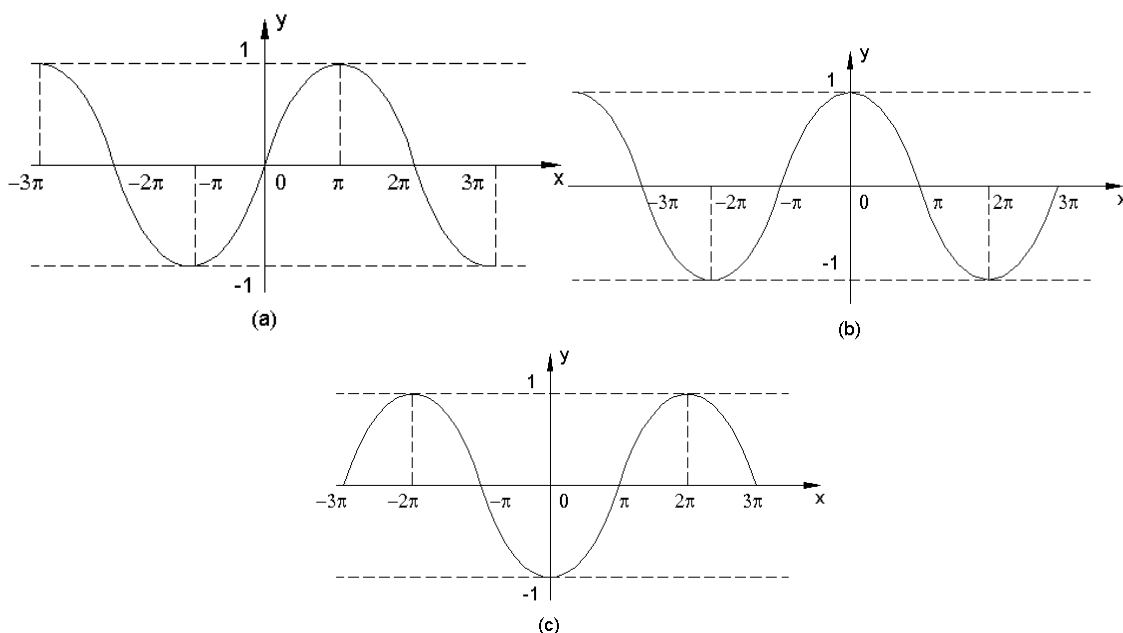
- a) $\sin(x^2 - y^2)$
- b) $\sin x^2 + \sin y^2$
- c) $\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y$
- d) $\sin^2 x \cos^2 y$
- e) $\cos^2 y - \cos^2 x$

8) (UFSM-PEIES/1996) Considere as afirmativas referentes a funções trigonométricas, indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F).

() A função $y(x) = 2 \cos(3x)$ tem domínio $\mathbb{R}$ e imagem $[-1, 1]$

() Para $x \in \mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, a identidade $\frac{\sin(2x)}{\sin^2 x} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$ é verdadeira.

() Dos gráficos a seguir, o que melhor representa a função $y(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ é o indicado pela letra (b).



A sequência correta é

a) V – F – F. b) F – V – F. c) V – F – V. d) F – V – V. e) F – F – V.

9) (UFSM-PEIES/1997) Assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

() $\sec x \cdot \sin 2x = 2 \sin x$, para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

() $\cos(2x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \cos y$ para todo x e y reais.

() O domínio e a imagem da função $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ são ,

respectivamente, os intervalos reais $(-\infty, \infty)$ e $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

A sequência correta é

a) F – V – F. b) V – F – V. c) F – F – V. d) V – F – V. e) V – V – V.

10. (UFSM-PEIES/1997) Se $tgx = -\frac{5}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, então $\cos 2x$

vale

- a) $\frac{9}{34}$ b) $\frac{8}{17}$ c) 1 d) $-\frac{8}{17}$ e) $-\frac{9}{34}$

13 EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Quando encontramos função trigonométrica da incógnita ou função trigonométrica de alguma função da incógnita em pelo menos um dos membros de uma equação, dizemos que esta função é trigonométrica.

$\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ e $\sin 2x = \cos^2 x$, são equações trigonométricas.

Dizemos que r é uma raiz ou solução da equação trigonométrica $f(x)=g(x)$ se r for elemento do domínio de f e de g e se $f(r)=g(r)$ for verdadeira.

O conjunto S de todas as raízes da equação é o seu conjunto solução ou conjunto verdade.

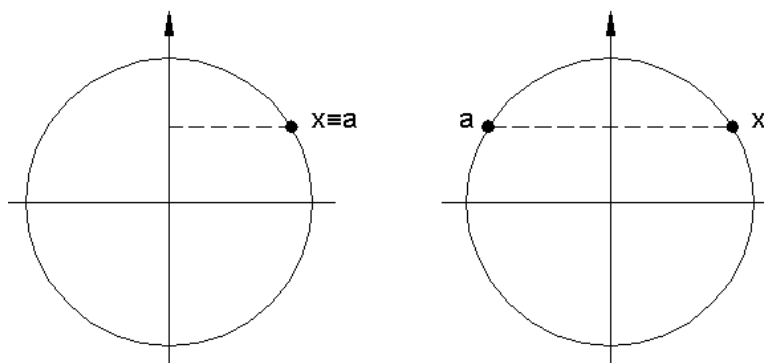
Quase todas as equações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das três equações:

$\sin x = \sin a$	$\cos x = \cos a$	$tgx = tga$
-------------------	-------------------	-------------

Estas são as equações trigonométricas elementares ou equações trigonométricas fundamentais.

1º Caso: $\sin x = \sin a$

Para que $\sin x = \sin a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou que sejam simétricas em relação ao eixo das ordenadas. No primeiro caso, x será côngruo a $\pi - a$. Portanto, $\sin x = \sin a$ equivale a $x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$.



Exemplo: Ache a solução da equação $\text{sen} 3x = \text{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

Temos que $a = x$.

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - a + 2k\pi.$$

Usando os resultados acima, teremos:

$$\begin{cases} 3x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}.$$

- Se $x \in \mathbb{R}$, então a solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Se $x \in [0, 2\pi]$, então a solução é $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\}$.

(21) Exercícios

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $2 \cdot \text{sen } x - 1 = 0$

b) $2 \cdot \text{sen } 2x = 1$

c) $2 \cdot \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$

d) $\text{sen}(3x - \pi) = -\frac{1}{2}$

e) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\sqrt{2} \cdot \text{sen } x + 1 = 0$

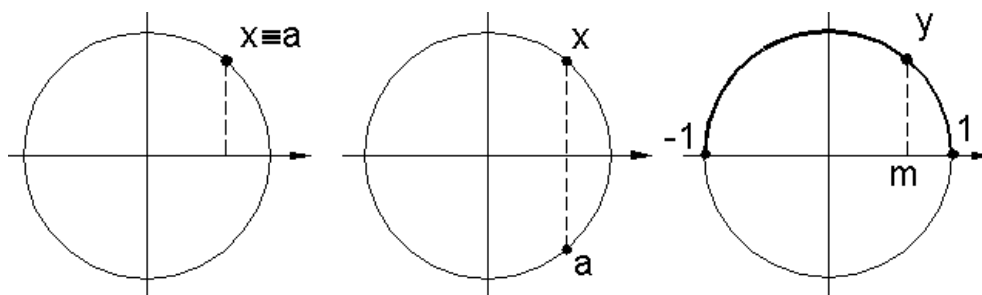
g) $\text{sen } 2x = 0$

h) $\text{sen } 4x = -1$

i) $2 \cdot \text{sen } x + \sqrt{3} = 0$

2º Caso: $\cos x = \cos a$

Para que $\cos x = \cos a$ é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou sejam simétricas em relação ao eixo das abscissas. Teremos portanto $x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$. Agora, se m é um real do intervalo $[-1, 1]$, a função inversa do cosseno, $\arccos m$, é definido como o único real y do intervalo $[0, \pi]$ tal que $\cos y = m$. Portanto, $y = \arccos m$ equivale a $\cos y = m$ e $0 \leq y \leq \pi$.



Exemplo: Ache a solução da equação $\cos 3x = \cos x$ para $x \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

Temos que $a = x$.

$$x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi.$$

Usando os resultados acima, teremos:

$$\begin{cases} 3x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -x + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi \\ \text{ou} \\ 4x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}.$$

- Se $x \in \mathbb{R}$, então a solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Se $x \in [0, 2\pi]$, então a solução é $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\}$.

(22) Exercícios

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$

d) $\cos 3x = -1$

e) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

f) $\sec x = -2$

g) $2 \cos 3x = 1$

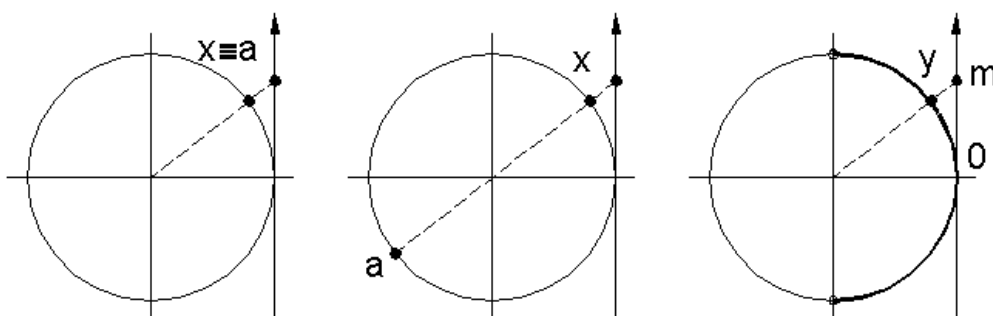
h) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\sin^2 x + 4 \cdot \cos x = -4$

3º Caso: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$

Para que $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$, com $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, é necessário e suficiente que as extremidades dos arcos x e a coincidam ou sejam simétricas em relação a origem. Teremos portanto $x = a + k\pi$. A função inversa da tangente, $\operatorname{arctg} m$, é definida para todo real m como o único intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\operatorname{tg} y = m$.

Então, $y = \operatorname{arctg} m$ equivale $\operatorname{tg} y = m$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.



Exemplo: Ache a solução da equação $\operatorname{tg} 7x = \operatorname{tg} 3x$ para $x \in \mathbb{R}$ e $x \in [0, 2\pi]$.

Resolução:

Temos que $a = x$.

$$x = a + k\pi.$$

Usando os resultados acima, teremos:

$$7x = 3x + k\pi$$

$$4x = k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{4}$$

• Se $x \in \mathbb{R}$, então a solução é $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

• Se $x \in [0, 2\pi]$, então a solução é $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi \right\}$.

(23) Exercícios

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

a) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\operatorname{tg} 3x = 1$

c) $\operatorname{tg}(2x - \pi) = -1$

d) $\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

f) $\operatorname{tg} 4x = 0$

4º Caso: Equações trigonométricas que envolvem artifícios

As equações trigonométricas que envolvem artifícios são resolvidas usando as relações trigonométricas ou transformando-as numa equação de segundo grau, como veremos nos exercícios.

(24) Exercícios

1. Resolva as equações trigonométricas, utilizando as relações estudadas.

a) $\sec x = -2$

b) $2 \operatorname{sen}^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$

c) $2 \operatorname{sen}^2 x - 5 \operatorname{sen} x + 3 = 0$

d) $\operatorname{cosec} x = -\sqrt{2}$

e) $3 \cos x = 3 - \operatorname{sen}^2 x$

f) $\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + 2 \cos x = 2$

2. (UFMS-PEIES/1999) Assinale V nas afirmativas verdadeiras e F nas falsas.

() Se $\cos x = \frac{1-2m}{3}$, então $-1 \leq m \leq 2$.

() Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto de todas as soluções da equação $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ é $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

() Se $\operatorname{tg} x = a$ e $\operatorname{tg} y = b$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $0 < y < \frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{tg}(x + y) = a + b$.

A sequência correta é

a) F – V – V. b) V – F – F. c) V – V – F. d) V – F – V. e) F – F – F.

14 RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

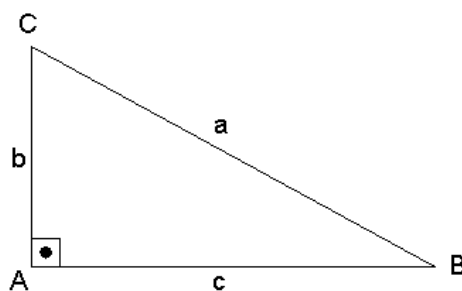
Já estudamos a resolução de triângulos retângulos. Agora, passaremos a estudar a resolução de triângulo quaisquer e para isso precisamos conhecer a lei dos senos e a lei dos cossenos.

14.1 Lei dos senos

Em todo triângulo ABC , tem-se $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$
sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC .

Há dois casos a considerar:

1º Caso: O triângulo ABC é retângulo ($\hat{A}=90^\circ$)



Neste caso, $\sin \hat{A} = \sin 90^\circ = 1$.

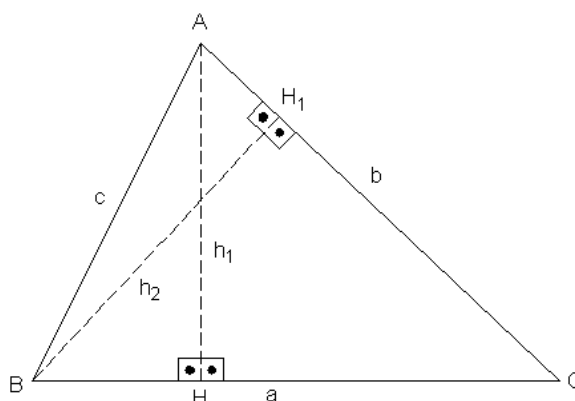
$$\sin \hat{B} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \quad (*)$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad (**)$$

De (*) e (**), concluímos que:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

2º Caso: O triângulo ABC não é retângulo.



• No Δ retângulo ACH, temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h_1}{b} \Rightarrow h_1 = b \cdot \text{sen } \hat{C}$$

No Δ retângulo ABH, temos:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{h_1}{c} \Rightarrow h_1 = c \cdot \text{sen } \hat{B}$$

Comparando, temos:

$$b \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad (*)$$

• No Δ retângulo BCH₁, temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h_2}{a} \Rightarrow h_2 = a \cdot \text{sen } \hat{C}$$

No Δ retângulo ABH₁, temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h_2}{c} \Rightarrow h_2 = c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Comparando, temos:

$$a \cdot \text{sen } \hat{C} = c \cdot \text{sen } \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad (**)$$

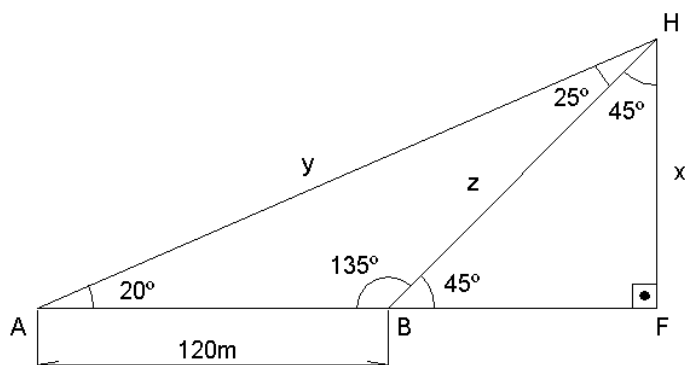
De (*) e (**) concluímos que:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Assim sendo, a lei dos senos é válida para qualquer Δ ABC.

Exemplo: Em uma corrida de Fórmula 1, exatamente sobre a linha de chegada, a certa altura há um helicóptero de TV. Ao apontar na reta de chegada, um corredor B, que está 120m à sua frente, vê o helicóptero sob um ângulo de 45° . Qual é a altura do helicóptero? (Desprezar a altura dos corredores).

Resolução:



No $\triangle ABH$, temos:

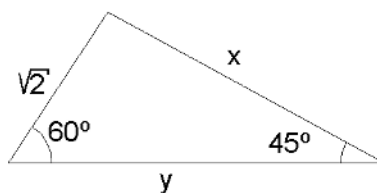
$$\frac{z}{\sin 20^\circ} = \frac{120}{\sin 25^\circ} \Rightarrow z = \frac{120 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} \Rightarrow z \cong 97,11m$$

$$\text{Como } \frac{x}{z} = \cos 45^\circ \Rightarrow x \cong 97,11 \cdot \cos 45^\circ \Rightarrow x \cong 68,67m.$$

O helicóptero está a 68,67m de altura aproximadamente.

(25) Exercícios

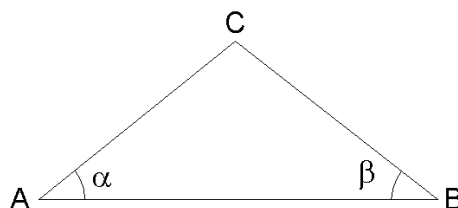
1. Dado o triângulo da figura, calcule x e y.



2. Num triângulo ABC, $\hat{B} = 105^\circ$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. Calcule as

medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

3. No triângulo abaixo, $AC = 4m$, $BC = 3m$ e $\beta = 60^\circ$. Calcule $\sin \alpha$.



4. Determine os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC, para o qual $\hat{A} = 15^\circ$, $\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin \hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. (Fuvest-SP) Em um triângulo ABC o lado AB mede $4\sqrt{2}$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado AB, mede 45° . Determine o raio da circunferência que circunscreve o triângulo.

6. Determine os lados de um triângulo ABC no qual se tem $a = 3$, $\hat{A} = 30^\circ$ e $\hat{B} = 45^\circ$.

14.2 Lei dos cossenos

Em todo triângulo ABC, tem-se:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

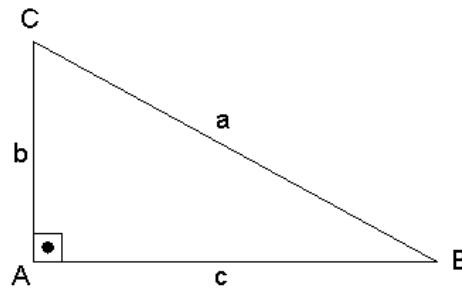
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$

Demonstraremos apenas uma das relações acima. As provas das demais relações são análogas.

Há três casos a considerar:

1º Caso: O triângulo ABC é retângulo ($\hat{A}=90^\circ$)



Neste caso, $\sin \hat{A} = \sin 90^\circ = 1$.

Essa expressão pode ser escrita assim:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$

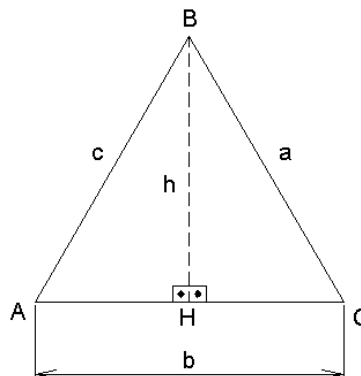
que é equivalente a $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos 90^\circ$

ou ainda:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

Por isso, podemos pensar o Teorema de Pitágoras como um caso particular da lei dos cossenos.

2º Caso: O triângulo ABC é acutângulo



- Traçamos a altura h do ΔABC em relação ao lado AC.

- Do ΔBDC , temos:

$$\cos \hat{C} = \frac{DC}{a} \Leftrightarrow DC = a.\cos \hat{C}$$

$$a^2 = h^2 + DC^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - DC^2$$

Daí temos:

$$h^2 = a^2 - (a.\cos \hat{C})^2 (*)$$

• Do $\triangle ADB$, temos:

$$c^2 = h^2 + AD^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - AD^2$$

$$AD + DC = b \Leftrightarrow AD = b - DC \Leftrightarrow AD = b - (a \cdot \cos \hat{C})$$

Daí temos:

$$h^2 = c^2 - (b - a \cdot \cos \hat{C})^2 \quad (**)$$

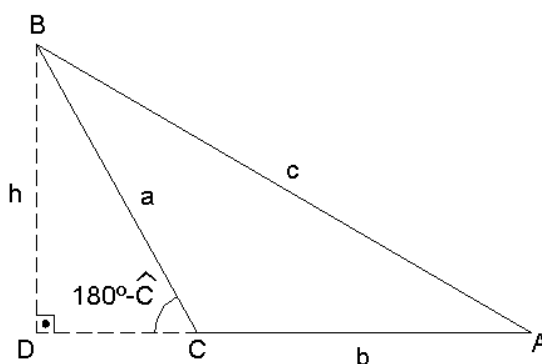
Comparando (*) e (**), tiramos que:

$$c^2 - (b - a \cdot \cos \hat{C})^2 = a^2 - (a \cdot \cos \hat{C})^2$$

$$c^2 - b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} - (a \cdot \cos \hat{C})^2 = a^2 - (a \cdot \cos \hat{C})^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

3º Caso: O triângulo ABC é obtusângulo



Do $\triangle BDC$, temos:

$$\bullet \cos(180^\circ - \hat{C}) = \frac{DC}{a} \Leftrightarrow DC = a \cdot \cos(180^\circ - \hat{C})$$

$$\text{Como } \cos(180^\circ - \hat{C}) = -\cos \hat{C} \Leftrightarrow DC = -a \cdot \cos \hat{C}$$

$$\bullet h^2 = a^2 - DC^2 \Leftrightarrow h^2 = a^2 - (-a \cdot \cos \hat{C})^2 \quad (*)$$

Do $\triangle ADB$, temos:

$$\bullet h^2 = c^2 - AD^2$$

como

$$AD = b + DC \Leftrightarrow h^2 = c^2 - (b + DC)^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - (b - a \cdot \cos \hat{C})^2 \quad (**)$$

Comparando (*) e (**), temos:

$$c^2 - (b - a \cdot \cos \hat{C})^2 = a^2 - (-a \cdot \cos \hat{C})^2$$

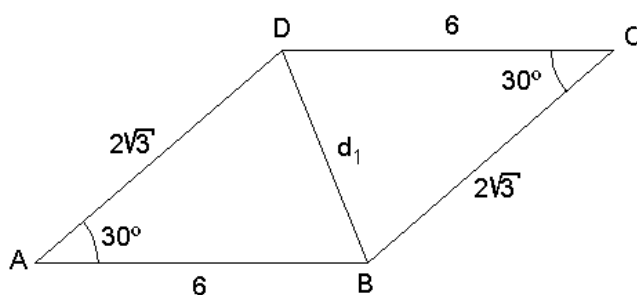
$$c^2 - b^2 + 2ab \cdot \cos \hat{C} - (a \cdot \cos \hat{C})^2 = a^2 - (-a \cdot \cos \hat{C})^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Exemplo: Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 6cm e $2\sqrt{3}$ cm. Se cada ângulo agudo do paralelogramo mede 30° , calcular as medidas das diagonais.

Resolução:

- Cálculo da medida d_1 da diagonal menor:

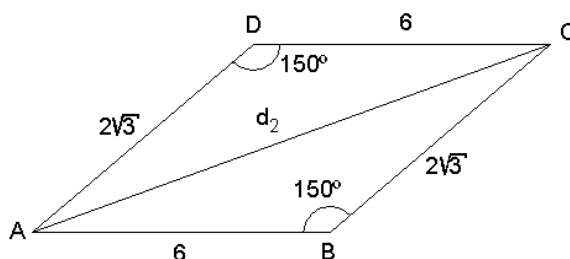


$$d_1^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ$$

$$d_1^2 = 36 + 12 - 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d_1^2 = 36 + 12 - 36 \Rightarrow d_1^2 = 12$$

$$d_1 = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

- Cálculo da medida d_2 da diagonal maior:



$$d_2^2 = 6^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 150^\circ$$

$$d_2^2 = 36 + 12 - 24\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow d_2^2 = 36 + 12 + 36 \Rightarrow d_2^2 = 84$$

$$d_2 = 2\sqrt{21} \text{ cm}$$

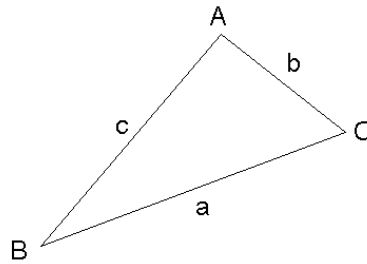
(26) Exercícios

1. Calcule as diagonais de um paralelogramo de lados 3 e 4 e que tem um ângulo de 60° .
2. Num triângulo ABC, $b = 4m$, $c = \sqrt{3}m$ e $\hat{A} = 30^\circ$. Calcule a medida a.
3. Num paralelogramo, dois lados consecutivos medem 7cm e 4 cm e a diagonal menor mede $\sqrt{37}$ cm. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo.
4. Num triângulo ABC temos: $a = 1 + \sqrt{3}$, $b = 2$ e $\hat{C} = 30^\circ$. Calcule o perímetro desse triângulo.
5. (Unicamp-SP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada para uma caixa d'água a 50m de distância. A casa está a 80m de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções caixa d'água bomba e caixa d'água casa é de 60° . Se pretende-se bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?
6. Determine o maior ângulo de um triângulo cujos lados medem 3, 5 e 7.

14.3 Cálculo da área de uma região triangular

Quando conhecemos dois lados de um triângulo e o ângulo formado por eles, podemos determinar a sua área.

Provaremos que:



A área de qualquer região triangular é igual à metade do produto das medidas de dois dos seus lados multiplicada pelo seno do ângulo formado por ele, ou seja:

$$S = \frac{a.b}{2} . \text{sen } \hat{C}$$

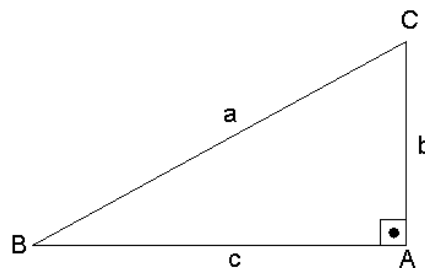
$$S = \frac{b.c}{2} . \text{sen } \hat{A}$$

$$S = \frac{a.c}{2} . \text{sen } \hat{B}$$

onde: S = área do triângulo ABC

Demonstraremos apenas uma das relações; as provas das demais são análogas.

1º Caso: O triângulo é retângulo ($A=90^\circ$)



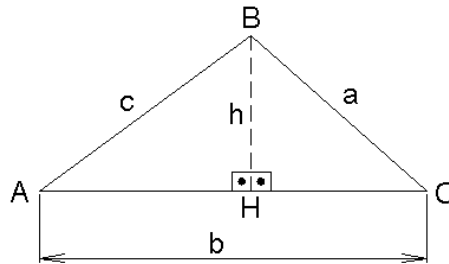
$$\text{Sabemos que } S = \frac{\text{cateto.cateto}}{2} = \frac{\text{base.altura}}{2} = \frac{b.c}{2}$$

Isto é equivalente a escrever:

$$S = \frac{b.c}{2} . 1 \Leftrightarrow S = \frac{b.c}{2} . \text{sen } 90^\circ \Leftrightarrow S = \frac{b.c}{2} . \text{sen } \hat{A}$$

$$\text{Logo, } S = \frac{b.c}{2} . \text{sen } \hat{A}$$

2º Caso: O triângulo é acutângulo



$$S = \frac{b \cdot h}{2} \quad (*)$$

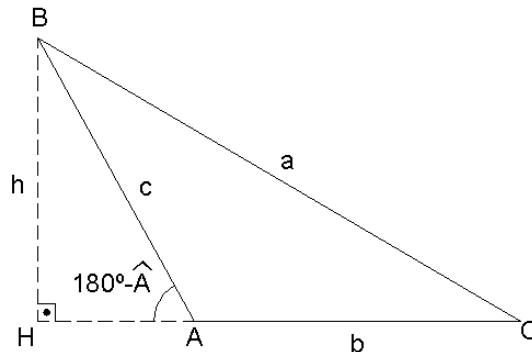
No triângulo retângulo AHB ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \cdot \text{sen } \hat{A} \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*), vem:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen } \hat{A}$$

3º Caso: O triângulo é obtusângulo



$$S = \frac{h \cdot b}{2} \quad (*)$$

No triângulo retângulo AHB ($\hat{H}$ é reto), temos:

$$\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{h}{c} \Leftrightarrow h = c \cdot \text{sen}(180^\circ - \hat{A})$$

Como $\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \text{sen } \hat{A}$, temos:

$$h = c \cdot \text{sen } \hat{A} \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*), vem:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen } \hat{A}$$

Exemplo: Num triângulo ABC, dois lados medem 10cm e 6cm e formam entre si um ângulo de 60° . Calcular a área do triângulo ABC.

Resolução:

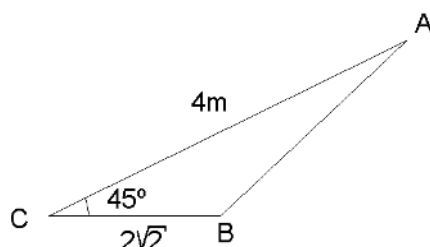
Supondo $b = 10\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ e $\hat{A} = 60^\circ$, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \hat{A} \Rightarrow S = \frac{10 \cdot 6}{2} \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow S = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 15\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$\text{Portanto } S = 15\sqrt{3}\text{cm}^2$$

(27) Exercícios

1. Ache a área do triângulo da figura.



2. Qual é a área de um paralelogramo no qual dois lados consecutivos medem 7cm e 5cm, sabendo-se que eles formam um ângulo de 120° ?

3. Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\hat{A} = 30^\circ$ e $\hat{C} = 45^\circ$.

4. Num triângulo ABC, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$ e $S = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Calcule a medida do ângulo $\hat{A}$.

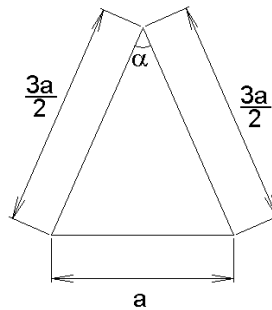
5. Qual é a área de um triângulo isósceles no qual cada lado congruente mede 10cm e o ângulo adjacente à base mede 75° ?

(28) Exercícios complementares

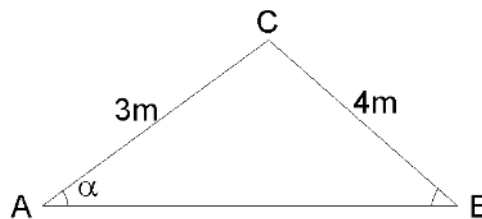
1. Ache a medida do ângulo $\hat{A}$ indicado na figura.



2. No triângulo isósceles da figura, calcule $\cos \alpha$.



3. Num triângulo ABC temos $AC = 3m$, $BC = 4m$ e $\alpha = \hat{BAC}$.



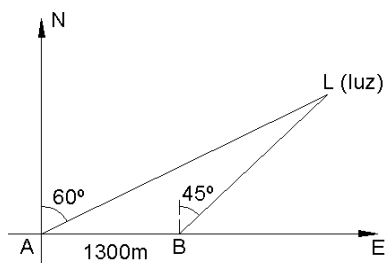
- a) Se $AB = 3m$, calcule $\cos \alpha$.
b) Se $\beta = \hat{ABC}$, oposto ao lado AC, for 60° , calcule $\sin \alpha$.

4. Num triângulo isósceles, a base mede x e cada lado congruente mede y . Se o ângulo oposto à base mede 120° , calcule y em função de x .

5. (Mack-SP) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8m e 12m e formam um ângulo de 60° . Calcule as diagonais.

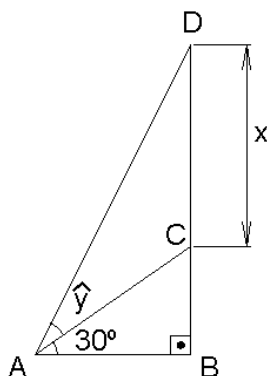
6. Os lados de um triângulo formam uma progressão aritmética de razão 1 e o maior ângulo é o dobro do menor. Determine o valor dos lados desse triângulo.

7. Um navio navega no rumo E (leste) quando uma luz é observada na marcação 60° NE. Após navegar 1300 metros, a luz passa a ser vista aos 45° NE, conforme indica a figura. Determine a menor distância a que o navio passará da luz, se o rumo for mantido. Dado $\sin 15^\circ \cong 0,26$.



8. Na figura indicada, calcule x e $\hat{y}$.

Dados: $\hat{BAC} = 30^\circ$, $BD = 6\sqrt{3}m$ e $AB = 6m$



9. As diagonais de um paralelogramo medem 10m e 20m e formam um ângulo de 60° . Ache a área do paralelogramo.

10. Num triângulo isósceles de base 6cm, o ângulo oposto à base mede 120° . Calcule a área do triângulo. (Sugestão: usando a lei dos senos, calcule a medida de cada lado congruente).

GABARITOS

(1) 1. 22,40m 2. 1,6m 3. 10m 4. 100m 5. b 6. b 7. a 8. b 9. e 10. d

(2) 1. a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{5\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{15}$

2. a) 30° b) 45° c) 600° d) 9° e) 108°

3. a) 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad b) 144° ou $\frac{4\pi}{5}$ 4. 37,68m 5. 4500 voltas

6. a) $52^\circ 14' 23''$ b) $41^\circ 49' 20''$ c) $28^\circ 22' 40''$ d) $8^\circ 54' 24''$

7. $8^\circ, 4^\circ, 1^\circ$.

(3) 1. a) 5V, 1°Q b) 6V, 2°Q c) 3V, 2°Q d) 6V, 4°Q e) 3V, 2°Q f) 2V, 1°Q

2. a) sim b) sim c) não 3. a) $270^\circ; 630^\circ; 990^\circ$ b) $\frac{7\pi}{6}\text{rad}; \frac{19\pi}{6}\text{rad}$

4. a) $1^\circ\text{DP}: 210^\circ; \text{EG}: 210^\circ + k \cdot 360^\circ$ b) $1^\circ\text{DP}: 110^\circ; \text{EG}: 110^\circ + k \cdot 360^\circ$

c) $1^\circ\text{DP}: 190^\circ; \text{EG}: 190^\circ + k \cdot 360^\circ$ d) $1^\circ\text{DP}: \frac{11\pi}{6}\text{rad}; \text{EG}: \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

e) $1^\circ\text{DP}: \frac{5\pi}{3}\text{rad}; \text{EG}: \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

5. 8π rad.

6. a) $\text{EG}: \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; 1^\circ\text{DP}: \frac{\pi}{3}\text{rad}; 1^\circ\text{DN}: -\frac{5\pi}{3}\text{rad}$

b) $\text{EG}: 220^\circ + k \cdot 360^\circ; 2^\circ\text{DN}: -500^\circ; 3^\circ\text{DP}: 940^\circ$.

(4) 1. a) (+) b) (+) c) (-) 2. a) 1 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) -1 f) $\frac{1}{2}$

3. a) $S = \left\{ k \in \mathbb{R} / \frac{1}{3} \leq k \leq 1 \right\}$ b) $S = [0, 1]$ c) $S = [1, 3]$ d) $S = \left[-\frac{1}{2}, 1 \right]$

e) $S = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$ f) $S = [1, 2] \cup [3, 4]$

4. a) $D = \mathbb{R}; I_m = [-3, 3]; P = 2\pi$ b) $D = \mathbb{R}; I_m = [1, 3]; P = 2\pi$

c) $D = \mathbb{R}; I_m = [-1, 1]; P = \frac{2\pi}{3}$ d) $D = \mathbb{R}; I_m = [-1, 1]; P = 2\pi$

5. a) $M=0$ b) $P=\frac{2\sqrt{2}-1}{4}$ 6. a) $\frac{4\pi}{3}$ b) 4π c) 1

7. a 8. $a=-5$ e $k=\frac{1}{3}$ 9. C 10. a

(5) 1. a) (-) b) (+) c) (-) d) (-) e) (+) f) (+) g) (-) f) (-)

2. a) (+) b) (+)

3. a) 1 b) 0 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) -1 e) -1 f) $\frac{1}{2}$ g) -1 h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. a) $A=-1$ b) $B=-2$ c) $A=-1$ 5. b 6. c 7. b 8. $m=1$

9. $[1, 5]$ 10. $a=-3$ e $m=\frac{1}{2}$

(6) 1. $X=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$ 2. b 3. V F F V 4. a) $S=\left\{k \in \mathbb{R} / -\frac{2}{5} \leq k \leq 0\right\}$

b) $S=\left\{k \in \mathbb{R} / \frac{19}{7} \leq k \leq 3\right\}$ c) $S=\left\{k \in \mathbb{R} / \frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}\right\}$

5. a) $k=1$ ou $k=-\frac{4}{3}$ b) $k=\frac{1}{5}$ ou $k=-\frac{8}{25}$ c) $k=0$ ou $k=\frac{1}{2}$

6. d 7. $a=-2$ e $b=\frac{1}{2}$ 8. $b=3$ e $m=2$

9. a) V b) F c) F d) F e) V f) V

10. a) 3°Q b) 1°Q c) 4°Q d) 2°Q

(7) 1. a) (-) b) (+) c) (-) d) (+) e) (-) f) (-)

2. a) $D=\left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $D=\{x \in \mathbb{R} / x \neq \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

c) $D=\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\pi + 4k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ d) $D=\left\{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. a 4. d 5. e 6. a) $P=\frac{\pi}{2}$ b) $P=2\pi$ c) $P=\pi$ 7. -1 8. 2

9. $A=0$ 10. $m=15$.

(8) 1. a) $y=-2$ b) $z=\frac{8\sqrt{3}+4}{11}$ 2. e 3. c 4. 3 5. 1

(9) 1. a) -1 b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) -1 d) $\sqrt{2}$ 2. a) $S = \left\{ m \in \mathbb{R} / 0 < m \leq \frac{1}{3} \right\}$

b) $S = \{ m \in \mathbb{R} / m \geq 3 \}$ 3. $y = \operatorname{cosec} x$

(10) 1. a) 1 b) não existe c) 2 d) $\sqrt{2}$ 2. $S = \{ m \in \mathbb{R} / m \leq -4 \text{ ou } m \geq 0 \}$

3. $(-)$

(11) 1. b 2. a 3. a 4. d 5. b 6. e 7. $A = -\sqrt{3} - 2$ 8. e 9. B

10. e 11. $I_m = [-4, -2]$ e $P = 2\pi$ 12. $S = \left\{ k \in \mathbb{R} / -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6} \right\}$

13. $S = \left\{ a \in \mathbb{R} / a < -\frac{1}{2} \text{ ou } a > 3 \right\}$ 14. $D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi \right\}$ e $I_m = \mathbb{R}$

15. a) $P = \frac{\pi}{4}$ b) $P = 9\pi$ 16. $S = \{ k \in \mathbb{R} / 2 < k < 5 \}$

17. $02+04+16+64=86$ 18. d 19. e 20. e 21. b 22. e

23. a 24. b 25. c.

(12) 1. a) $\operatorname{sen} 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$; $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sec 135^\circ = -\sqrt{2}$; $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$; $\operatorname{cotg} 135^\circ = -1$.

b) $\operatorname{sen} 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\operatorname{cosec} 150^\circ = 2$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cotg} 150^\circ = -\sqrt{3}$.

c) $\operatorname{sen} 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\operatorname{cosec} 150^\circ = 2$; $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{cotg} 150^\circ = -\sqrt{3}$.

d) $\operatorname{sen} 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{cosec} 135^\circ = \sqrt{2}$; $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sec 135^\circ = -\sqrt{2}$; $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$; $\operatorname{cotg} 135^\circ = -1$.

2. a) $\frac{3\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{-\sqrt{3}-2}{2}$ 3. a) $2.\text{sen } x$ b) $-2.\text{tg } x$

(13) 1. a) $\text{sen } 210^\circ = -\frac{1}{2}$; $\text{cossec } 210^\circ = -2$; $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sec 210^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg } 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotg } 210^\circ = \sqrt{3}$.

b) $\text{sen } 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{cossec } 225^\circ = -\sqrt{2}$; $\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sec 225^\circ = -\sqrt{2}$; $\text{tg } 225^\circ = 1$; $\text{cotg } 225^\circ = 1$.

c) $\text{sen } 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{cossec } 240^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$;

$\sec 240^\circ = -2$; $\text{tg } 240^\circ = \sqrt{3}$; $\text{cotg } 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) $\text{sen } 210^\circ = -\frac{1}{2}$; $\text{cossec } 210^\circ = -2$; $\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sec 210^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg } 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotg } 210^\circ = \sqrt{3}$.

2. 0 3. a) $-\text{sen } x - \cos x$ b) 0

(14) 1. a) $\text{sen } 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{cossec } 315^\circ = -\sqrt{2}$; $\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sec 315^\circ = \sqrt{2}$; $\text{tg } 315^\circ = -1$; $\text{cotg } 315^\circ = -1$.

b) $\text{sen } 330^\circ = -\frac{1}{2}$; $\text{cossec } 330^\circ = -2$; $\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sec 330^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg } 330^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotg } 330^\circ = -\sqrt{3}$.

c) $\text{sen } 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{cossec } 300^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$;

$\sec 300^\circ = 2$; $\text{tg } 300^\circ = -\sqrt{3}$; $\text{cotg } 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. $\cos x$ 3. a) $-\cos 80^\circ$ b) $-\text{tg } 80^\circ$ c) $-\text{cossec } 30^\circ$

(15) 1. a) $y = \text{cossec } a$ b) $y = -\text{tg } x$ c) $y = -2\text{sen } x$

(16) 1. a) $A=0$ b) $B=-1$ c) $C=\frac{1}{3}$ d) $D=\frac{1}{8}$

2. a) $y=\operatorname{tg} x$ b) $y=-\cos x$ c) $y=-\sec x$ d) $y=\operatorname{tg}^2 x$ e) $y=-\operatorname{cosec} x$

3. d 4. b 5. e.

(17) 1. $\sin x = -\frac{7}{25}$; $\operatorname{cosec} x = -\frac{25}{7}$; $\cos x = -\frac{24}{25}$;

$\sec x = -\frac{25}{24}$; $\operatorname{tg} x = \frac{7}{24}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{24}{7}$.

2. $\operatorname{cotg} x = 1$ 3. 3 ou -1 4. c 5. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. $y = \frac{169}{85}$ 7. d 8. $\frac{1}{3}$ ou $-\frac{17}{15}$ 9. a 10. c.

(19) 1. 4 2. F V F 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5. $\sin x$

7. a) $\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$ b) $\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$ 8. $\frac{5+\sqrt{21}}{8}$

9. $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{cotg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ 10. $-\frac{16}{65}$

(20) 1. $02+04=06$ 2. $\frac{24}{25}$ 3. $\sin 2a = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ e $\cos 2a = \frac{7}{9}$ 4. b

5. c 6. b 7. e 8. b 9. b 10. d.

(21) 1. a) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{13\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{17\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\text{e) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{f) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{g) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{h) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{i) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{(22) 1. a) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ou}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{b) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{13\pi}{15} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{23\pi}{15} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{e) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{6} - k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{f) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{g) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{h) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{i) } S = \{ x \in \mathbb{R} / x = \pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{(23) 1. a) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{b) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{7\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ou } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ou } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{e) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{f) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$(24) \text{ 1. a) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{b) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ou}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{c) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{d) } S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{e) } S = \{ x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \quad \text{f) } S = \{ x \in \mathbb{R} / x = 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \}$$

2. b.

$$(25) \text{ 1. } x = \sqrt{3} \text{ e } y = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \quad 2. \hat{C} = 45^\circ \text{ e } \hat{A} = 30^\circ \quad 3. \text{sen } \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$4. \hat{C} = 45^\circ \text{ e } \hat{B} = 120^\circ \quad 5. R=4 \quad 6. c = \frac{3}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \text{ e } b = 3\sqrt{2}$$

$$(26) \text{ 1. } d_1 = \sqrt{13} \text{ e } d_2 = \sqrt{37} \quad 2. a = \sqrt{7}m \quad 3. \beta = 120^\circ \text{ e } \alpha = 60^\circ$$

$$4. P = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad 5. 70m. \quad 6. \alpha = 120^\circ$$

$$(27) \text{ 1. } 4m^2 \quad 2. S = \frac{35\sqrt{3}}{2}cm^2 \quad 3. S = (2 + 2\sqrt{3})cm^2 \quad 4. 150^\circ \text{ ou } 30^\circ$$

$$5. s = 25cm^2$$

$$(28) \text{ 1. } \hat{A}=45^\circ \quad 2. \cos \alpha = \frac{7}{9} \quad 3. \text{a) } \cos \alpha = \frac{1}{9} \quad \text{b) } \text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$4. y = \frac{x\sqrt{3}}{3} \quad 5. d_1 = 4\sqrt{7}m \text{ e } d_2 = 4\sqrt{19}m \quad 6. 4, 5, 6$$

$$7. d = 1250\sqrt{2} \quad 8. x = 4\sqrt{3} \text{ e } \hat{y} = 30^\circ \quad 9. S = 50\sqrt{3}m^2 \quad 10. S = 3\sqrt{3}cm^2.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALD, Atelmo Aloisio. **Trigonometria e Números Complexos**. Caderno Didático – Santa Maria: UFSM, CCNE, Departamento de Matemática, 2002.

BALD, Atelmo Aloisio, BRAMBILLA, Primo Manoel. **Tópicos de Trigonometria**. Caderno Didático – Santa Maria: UFSM, CCNE, Departamento de Matemática, 2002.

Currículo Básico do PEIES. Universidade Federal de Santa Maria. **Programa de Ingresso ao Ensino Superior**. V. 5, Santa Maria, 1999

DECISAÔ PRÉ-VESTIBULAR. **Matemática**. Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1997, não paginado.

ESCOLA ESTADUAL DE 2º GRAU CILON ROSA. **Trigonometria**. Polígrafo – Santa Maria [s.n.], 1999, 108 p.

GIOVANNI, J. R., BONJORNO, J. R. **Matemática**. V. 2, Editora FTD S.A., São Paulo, 1992.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R. **Matemática**. Volume Único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. V. 1, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

MORGADO, A. C., WAGNER, E., CARMO, M. P. do. **Trigonometria e Números Complexos**. IMPA, Rio de Janeiro , 1992.

SILVA, J. D., FERNANDES, V. dos S., MABELINI, O. D. **Matemática: Novo Ensino Médio – Volume Único Curso Completo**. Sistema de Ensino IPEP, São Paulo, 2002.