

Structure d'espace vectoriel

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 RAPPELS ... ET COMPLÉMENTS

1.1 DÉFINITION DE LA STRUCTURE

Définition 1 : Espace vectoriel

On appelle $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel** ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ tout triplet $(E, +, \cdot)$ tel que

- $(E, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est noté 0_E ou 0 et appelé le vecteur nul de E ,
- Une loi de composition externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E , notée multiplicativement, qui à partir d'un élément λ de $\mathbb{K}$ et d'un élément x de E , renvoie un élément de E noté $\lambda \cdot x = \lambda x$
- Cette loi doit vérifier
 - ▷ pour tout $x \in E$: $1 \cdot x = x$,
 - ▷ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (x + y) = (\lambda \cdot x) + (\lambda \cdot y)$,
 - ▷ pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) + (\mu \cdot x)$,
 - ▷ pour tous $x \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$.

Un élément $x \in E$ est appelé un **vecteur**.
Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé un **scalaire**.

Exemple 1

Quels sont les espaces vectoriels que vous connaissez ? Les derniers chapitres vous aideront sûrement !

Regardons l'espace vectoriel des fonctions d'un ensemble X non vide vers un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On munit l'ensemble E^X des fonctions de X dans E de deux lois $+$ et $\cdot$ de la façon habituelle (la même que pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tous $f, g \in E^X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, les fonctions $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont définies par

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot (f(x)).$$

Montrez que $(E^X, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

⚠ ATTENTION L'ensemble vide n'est pas un sous-espace vectoriel de E , car il ne contient pas l'élément neutre de l'addition 0_E , donc n'est pas un groupe additif.

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- (1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E.$
- (2) Pour tout $x \in E$: $-x = (-1) \cdot x$, où $-x$ est l'opposé de x dans E et -1 l'opposé de 1 dans $\mathbb{K}$.

Preuve. On l'a déjà fait ! $\square$

Proposition 2 : Espace vectoriel produit

Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On munit $E_1 \times \dots \times E_n$ de deux lois $+$ et $\cdot$ en posant, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n).$$

Alors $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On a $0_{E_1 \times \dots \times E_n} = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Preuve. Il suffit de montrer les axiomes dans la définition d'espace vectoriel un à un. A vous ! $\square$

Exemple 2

On note $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ l'espace vectoriel produit de $\mathbb{R}$, n fois.

1.2 SOUS-ESPACE VECTORIEL**Définition 2 : Sous espace vectoriel**

Une partie F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si

- F est stable par $+$ et $\cdot$,
- muni de ces lois, F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

En pratique : Caractérisation des sous-espaces vectoriels

En pratique, pour montrer que W est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel V , il suffit de montrer que,

$$W \subset V, \quad 0_V \in W, \quad \forall x, y \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in W.$$

Exactement comme la caractérisation des sous-groupes, des sous-anneaux, ...

Preuve. Si W est un sous-espace vectoriel de V , d'après la caractérisation des sous-groupes, $0_E = 0_F \in F$ et pour tous $x, y \in E$, $x + y \in F$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$, car F est stable par multiplication par un scalaire, ce qui prouve la caractérisation. Si la caractérisation est vraie, d'après la caractérisation des sous-groupes, F est en particulier stable par addition - pour $\lambda = 1$ - et multiplication par un scalaire - pour $y = 0_E$ - mais c'est même un sous-groupe de E pour l'addition - pour $\lambda = 1$. Les autres axiomes de la définition des espaces vectoriels ne requièrent aucune vérification particulière car une relation vraie sur E tout entier l'est aussi sur F .

Exemple 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. En effet, on a

- $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$.
- $0 \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(0) = -\infty \leq n$.
- Montrons enfin que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous savons que $\deg(\lambda P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\} \leq n$, donc $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 4

On rappelle qu'un système linéaire **homogène**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

s'écrivent $AX = 0$, où $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^p$ la matrice colonne des x_i .

Toutes l'ensemble des solutions $S := \{X \in \mathbb{K}^p \mid AX = 0\}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. En effet, $S \subset \mathbb{K}^p$ et $0 \in S$ car $A \times 0 = 0$. De plus, pour tout $X, Y \in S$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = 0,$$

ce qui montre que S est stable par combinaison linéaire et est donc un sous-espace vectoriel.

Donc, toute droite de $\mathbb{R}^2$ passant par $(0, 0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, et toute droite et tout plan de $\mathbb{R}^3$ passant $(0, 0, 0)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Et ce sont les seuls (qui ne sont pas l'ensemble total ou réduit au neutre) !

⚠ ATTENTION L'ensemble des polynômes de degré égal à n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Il ne contient même pas le polynôme nul !

Ensemble d'indices

Dans la suite, on notera I un ensemble d'indices dénombrable. En général, $I \subset \mathbb{N}$, mais on peut aussi voir I plus généralement comme $I = \mathbb{U}_n$.

I peut être donc fini, ou infini dénombrable. Dans le cas où I est infini, on appelle **famille à support fini** ou **famille presque nulle de scalaires** une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle qu'il n'existe qu'un nombre fini de scalaires non nuls.

Définition 3 : Combinaison linéaire

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- Si I est fini, on peut identifier I à $\llbracket 1, n \rrbracket$. Une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$, où $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Si I est infini, une combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle de scalaires.

Exemple 5

Dans $\mathbb{R}^3$, par exemple, les combinaisons linéaires des vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(1, 0, 1)$ sont les vecteurs $\lambda \cdot (1, 2, 3) + \mu \cdot (1, 0, 1) = (\lambda + \mu, 2\lambda, 3\lambda + \mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

⚠ ATTENTION On ne peut pas identifier les scalaires en général !

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k \quad \text{✗} \quad \lambda_k = \mu_k, \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Exemple 6

Dans $\mathbb{R}^2$, $(4, 3)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $(1, -1)$ et $(2, 3)$?

Pour cela, il faut résoudre l'équation $(4, 3) = \lambda(1, -1) + \mu(2, 3)$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} (4, 3) = \lambda(1, -1) + \mu(2, 3) &\iff (4, 3) = (\lambda + 2\mu, -\lambda + 3\mu) \\ &\iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = 4 \\ -\lambda + 3\mu = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + 2\mu = 4 \\ 5\mu = 7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = \frac{6}{5} \\ \mu = \frac{7}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(4, 3) = \frac{6}{5}(1, -1) + \frac{7}{5}(2, 3)$.

Partie stable par combinaison linéaire

Toute **partie stable par combinaison linéaire** est une partie F telle que

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i \in F.$$

Dans ce cas, F est un sous-espace vectoriel, d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

Proposition 3 : Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .

Preuve. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E . Nous voulons montrer que $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

- $F \subset E$.
- $0_E \in F_i$, pour tout $i \in I$ puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E , donc $0_E \in F$.
- Enfin, soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $i \in I$, $\lambda x + y \in F_i$, car F_i est un sous-espace vectoriel de E et $x, y \in F_i$, donc $\lambda x + y \in F$. Donc F est stable par combinaison linéaire.

□

⚠ ATTENTION Comme pour les groupes, la réunion de deux sous-espaces vectoriels **n'est pas** un sous-espace vectoriel en général !

C'est clair que la réunion de deux droites passant par 0 dans le plan n'est ni une droite, ni un plan !

1.3 ESPACE ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE DE E

Définition 4 : Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit X une partie de E . Soit $\mathcal{F}_X := \{F \subset E \mid F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \text{ et } X \subset F\}$, soit l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E , qui contiennent X . Le **sous-espace vectoriel engendré** par X , noté $\text{Vect}(X)$ est défini par

$$\text{Vect}(X) := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_X} F.$$

C'est un sous-espace vectoriel, d'après la propriété précédente.

En pratique

$\text{Vect}(X)$ est inclus, par définition, dans tous les sous-espaces vectoriels de E contenant X . Cela montre que tout sous-espace vectoriel de E qui contient X contient en réalité $\text{Vect}(X)$ tout entier.

C'est donc le plus petit sous-espace vectoriel qui contient X au sens de l'inclusion, c'est à dire

$$\forall F \in \mathcal{F}_X, \text{Vect}(X) \subset F.$$

Donc si X est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Vect}(X) = X$.

Cela donne une nouvelle méthode pratique pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel : Il suffit de montrer que c'est un ensemble engendré par une certaine partie de E .

Proposition 4 : Caractérisation des sous-espaces engendrés

Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$, alors $\text{Vect}(X)$ est aussi l'ensemble des CL de $(x_i)_{i \in I}$ et noté aussi $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Preuve. On veut montrer que V l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{i \in I}$ est égal à $\text{Vect}(X)$.

Pour la première inclusion, $\text{Vect}(X)$ est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel de E et contient X , donc contient toute combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$, donc $V \subset \text{Vect}(X)$.

Pour l'inclusion réciproque, par définition, il nous suffit de montrer que V est un sous-espace vectoriel de E contenant X . On a $V \subset E$, contient 0_E car $0_E = \sum_{i \in I} 0 \cdot x_i$ et est stable par combinaison linéaire, par définition, donc c'est un sous-espace vectoriel. Il contient X par définition, donc appartient à $\mathcal{F}_X$ et donc contient $\text{Vect}(X)$. $\square$

Exemple 7

Une droite est l'ensemble engendré par un vecteur, appelé son vecteur directeur. Le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(0, 2, -1)$ est la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0, 0, 0)$ et $(0, 2, -1)$.

Un plan est un ensemble engendré par deux vecteurs non colinéaires. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, on considère

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}.$$

Alors P est le sous-espace engendré par les vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 2, 1)$.

Exemple 8

On a $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.

Exemple 9

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $\text{Vect}\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures

Proposition 5

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, X et Y deux parties de E et $x, a, b \in E$.

- ① **Croissance pour l'inclusion** Si $X \subset Y$, alors $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.
- ② **Enlever un vecteur lié** Si $x \in X$ est combinaison linéaire de $X \setminus \{x\}$, alors $\text{Vect}(X) = \text{Vect}(X \setminus \{x\})$.
- ③ **Remplacer un vecteur** Si b est combinaison linéaire de X avec un coefficient non nul sur $a \in X$, alors

$$\text{Vect}(X) = \text{Vect}(X \setminus \{a\} \cup \{b\}).$$

Preuve.

- ① Par définition, $\text{Vect}(Y)$ est un sous-espace vectoriel qui contient Y donc X . Donc $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.
- ② $\text{Vect}(X \setminus \{x\})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $X \setminus \{x\}$, donc contient x . C'est donc un sous-espace vectoriel qui contient X , donc $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \text{Vect}(X)$. L'inclusion réciproque découle de ①.

- ③ On a $\text{Vect}(X) =$ Ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de X
 $=$ Ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $X \setminus \{a\} \cup \{b\}$
 $= \text{Vect}(X \setminus \{a\} \cup \{b\})$.

□

Exemple 10

Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 0, 3, 0), \overbrace{(1, 0, 3, 0)}^{\substack{\text{CL de } (1, 0, -1, 0) \\ \text{et } (0, 0, 3, 0)}}) &= \text{Vect}((1, 0, -1, 0), (0, 0, 3, 0)) = \text{Vect}((1, 0, -1, 0), \frac{1}{3}(0, 0, 3, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, -1, 0) + (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)) = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Exemple 11

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 1)$ et $v_3 = (-1, 13, 5)$ sont liés car on a $2v_1 + 3v_2 - v_3 = 0$.

1.4 SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et X et Y deux parties de E .

Définition 5 : Somme de deux sous-espaces vectoriels

L'ensemble $F + G = \{f + g \mid f \in F \text{ et } g \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé la **somme de F et G** .

Il y a un petit quelque chose à démontrer ici !

Plus petit espace vectoriel contenant F et G

La somme $F + G$ est également le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G .

En effet, soit H un sous-espace vectoriel contenant F et G . Soit $f + g \in F + G$, avec $f \in F$ et $g \in G$. Alors $f, g \in H$, donc, comme H est un sous-espace vectoriel de E , $f + g \in H$. Par définition de l'inclusion, on a bien $F + G \subset H$. Cela signifie que tout sous-espace vectoriel de E contenant F et G contient aussi $F + G$.

⚠ ATTENTION La somme n'est pas une réunion ! Comme on a vu pour les groupes, les deux sont confondues, si et seulement si, l'un des deux espaces est inclus dans l'autre !
 Pensez à 2 droites dans le plan.

Exemple 12

Calculons la somme de deux droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$. Disons $F = \text{Vect}((1, 0, 1))$ et $G = \text{Vect}((-1, 1, 0))$. Par définition de l'espace engendré, on a

$$\begin{aligned} F + G &= \{(z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} + \{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(z, 0, z) + (-y, y, 0) \mid z, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(z - y, y, z) \mid z, y \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z - y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Donc $F + G$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$.

Exemple 13

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E . On suppose que

$$F \cap G \subset F \cap H, \quad F + G \subset F + H, \quad H \subset G.$$

Montrons que $H = G$.

Soit $x \in G$. Puisque $x \in G \subset F + G \subset F + H$, il existe $f \in F, h \in H$ tels que $x = f + h$.

On a alors $x \in G, h \in H \subset G$, donc, puisque G est un sous-espace vectoriel de E , $f = x - h \in G$.

D'où $f \in F$ et $f \in G$, donc $f \in F \cap G \subset F \cap H$, donc $f \in H$. Ainsi, $f \in H$ et $h \in H$, donc, puisque H est un sous-espace vectoriel de E , $x = f + h \in H$.

Ceci montre $G \subset H$. Comme, de plus, par hypothèse, $H \subset G$, on conclut $H = G$.

Proposition 6 : Parties génératrices d'une somme de deux sous-espaces vectoriels

Si X engendre F et si Y engendre G , alors $X \cup Y$ engendre $F + G$, c'est à dire,

$$\text{Vect}(X \cup Y) = \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$$

Preuve. On montre la double inclusion;

- On a $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$ et $\text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$, donc $\text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X \cup Y)$, par minimalité de la somme, pour l'inclusion.
- $X \subset \text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$ et $Y \subset \text{Vect}(Y) \subset \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$.
Donc $X \cup Y \subset \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$.
Par minimalité de l'espace engendré pour l'inclusion, $\text{Vect}(X \cup Y) \subset \text{Vect}(X) + \text{Vect}(Y)$.

□

⚠ ATTENTION Dans $F + G$, on ne sait pas si la décomposition d'un élément est unique !
On peut donc avoir des vecteurs distincts $f_1, f_2 \in F$ et $g_1, g_2 \in G$, tels que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$.

Définition 6 : Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On dit que F et G sont en somme directe si la décomposition d'un vecteur de $F + G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est toujours unique. On note alors $F \oplus G$ la somme $F + G$ pour indiquer qu'il y a somme directe.

En pratique

Cela revient à montrer que

$$\forall f_1, f_2 \in F, \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad (f_1 + g_1 = f_2 + g_2 \implies f_1 = f_2 \quad \text{et} \quad g_1 = g_2) .$$

Mais dans ce cas, pour tout $x \in F \cap G$, on a $x = \overbrace{x}^{\in F} + \overbrace{0_E}^{\in G} = \overbrace{0_E}^{\in F} + \overbrace{x}^{\in G} \in F + G$ et donc n'a qu'une seule écriture. Donc $x = 0_E$. Cela donne une preuve du sens direct de la proposition suivante.

Proposition 7 : Caractérisation de la somme directe

Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad F \text{ et } G \text{ sont en somme directe,} \quad (ii) \quad F \cap G = \{0_E\}.$$

Preuve. Supposons alors (ii). Soient $\forall f_1, f_2 \in F$, et $g_1, g_2 \in G$, tels que $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$. Alors $f_1 - f_2 = -g_1 + g_2 \in F \cap G$, donc $f_1 - f_2 = -g_1 + g_2 = 0_E$, d'où le résultat. □

Exemple 14

Vous devez vous souvenir que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 15

Dans $\mathbb{R}^3$, le plan $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + ay + bz = 0\}$ et la droite $G = \text{Vect}((1, a, b))$ sont en somme directe, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

En effet, soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors

$$x + ay + bz = 0 \quad \text{et} \quad (x, y, z) = \lambda(1, a, b), \text{ pour un certain réel } \lambda.$$

D'où $\lambda + \lambda a^2 + \lambda b^2 = 0 \xRightarrow{\text{si } \lambda \neq 0} 1 + a^2 + b^2 = 0$, ce qui est absurde. Donc $\lambda = 0$ et $F \cap G = (0, 0, 0)$.

Vocabulaire On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont **supplémentaires** dans E , si $E = F \oplus G$.
On dit aussi que F est un supplémentaire de G dans E et que G est un supplémentaire de F dans E .

Corollaire 7.1 : Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ① F et G sont **supplémentaires** dans E .
- ② Tout vecteur de E est d'une et une seule manière la somme d'un élément de F et d'un élément de G , c'est à dire,

$$\forall x \in E, \quad \exists!(f, g) \in F \times G, \quad x = f + g$$

Preuve.

Ce sont exactement les deux assertions équivalentes dans la proposition précédente. $\square$

⚠ ATTENTION On dit bien que F est **un** supplémentaire de G , car le supplémentaire n'est jamais unique !
Par exemple, $\text{Vect}((1, 0))$ et $\text{Vect}((1, 1))$ sont tous les deux des supplémentaires de $\text{Vect}((0, 1))$ dans $\mathbb{R}^2$.

Généralisation à une somme de n sous-espaces vectoriels de E

Soient $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E . On note

$$E_1 + \dots + E_p = \{x \in E \mid \exists x_1 \in E_1, \dots, \exists x_p \in E_p : x = x_1 + \dots + x_p\}.$$

$E_1 + \dots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E dit **somme des sous-espaces** E_i .

De même que précédemment, on dit qu'ils sont en **somme directe** si tout vecteur de $\mathcal{E} = E_1 + \dots + E_p$ se décompose d'une manière unique en somme d'un vecteur de E_1 , un vecteur de $E_2, \dots$, un vecteur de E_p et on écrit

$$\mathcal{E} = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$$

et on dit que $\mathcal{E}$ est la **somme directe des** E_i .

2 FAMILLES DE VECTEURS**2.1 FAMILLE LIÉE****Définition 7 : Famille liée**

On dit qu'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est **liée**, s'il existe n scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

On dit aussi que les vecteurs sont **linéairement dépendants**.

Dans le cas d'un nombre infini de vecteurs

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est liée ou que les vecteurs x_i , i décrivant I , sont linéairement dépendants si

$$\exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, mais non tous nuls, tels que } \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E.$$

On dit que x et y sont **colinéaires** si la famille (x, y) est liée, c'est à dire, si x ou y est un multiple de l'autre.

Exemple 16

$(1, 1, 1) + (1, -1, -1) + 2 \cdot (-1, 0, 0) = (0, 0, 0)$ donc la famille de vecteurs $\{(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 0, 0)\}$.

Proposition 8

Une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est liée si et seulement si un des vecteurs s'exprime comme une combinaison linéaire des autres.

⚠ ATTENTION 'Un' vecteur s'exprime comme CL des autres... Pas celui qui vous arrange... Autrement dit, on parle d'existence. Cela s'écrit

$$\exists k \in I, x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i$$

Preuve. Comme les λ_i ne sont pas tous nuls, prenons un indice $k \in I$ pour lequel λ_k est non nul. On obtient

$$x_k = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n x_i,$$

ce qui prouve l'équivalence. $\square$

Quelques remarques pratiques

Une conséquence directe :

Si on trouve une sous-famille liée de la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors la famille complète $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est liée.

Cela permet parfois de se concentrer seulement sur une partie de la famille pour montrer qu'elle est liée. Par exemple, **toute famille qui contient le vecteur nul, est liée !**

Exemple 17

Deux vecteurs x et $y \in E$ forment une famille liée si, et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ non tous les deux nuls tels que $\lambda x + \mu y = 0_E$.

- Si $\lambda \neq 0$, alors $x = -\frac{\mu}{\lambda}y$.
- Sinon, $\mu \neq 0$, et $y = -\frac{\lambda}{\mu}x$.

Autrement dit, si deux vecteurs forment une famille liée, alors ils sont colinéaires. La réciproque est élémentaire.

Corollaire 8.1

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $p+1$ vecteurs $(y_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ sont tous combinaison linéaire de p vecteurs $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$, alors la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ est liée.

Preuve. Par récurrence sur p . Pour $p = 1$, cela revient à dire que les 2 vecteurs y_1, y_2 , sont colinéaires à $x \in E$, donc sont colinéaires entre eux. Donc la famille est liée.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que si p vecteurs sont tous combinaisons linéaires de $p - 1$ vecteurs, alors la famille des p vecteurs est liée.

Soient $p+1$ vecteurs $y_1, \dots, y_{p+1}$, tous combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \dots, x_p$. Si aucun vecteur $y_1, \dots, y_{p+1}$ n'a un coefficient non nul de x_p , on est dans le cas de l'hypothèse de récurrence. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que y_{p+1} a un coefficient non nul pour x_p . On se ramène alors à l'hypothèse de récurrence en posant les vecteurs $z_i = y_i - \lambda_i y_{p+1}$, pour $i = 1, \dots, p$, en choisissant les $\lambda_i \in \mathbb{K}$, tel que z_i ait un coefficient nul pour x_p dans sa décomposition. $\square$

Exemple 18

Soit $n \geq 2$. Soit $(P_k)_{k \in [1, n]}$ une famille de n polynômes dans $\mathbb{K}_{n-2}[X]$. Cette famille est liée car chaque polynôme peut s'écrire comme combinaison linéaire des $n - 1$ polynômes $\{1, X, X^2, \dots, X^{n-2}\}$.

2.2 FAMILLE LIBRE

Définition 8

On dit qu'une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est **libre** si elle n'est pas liée, ce qui est équivalent à

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right).$$

On dit aussi que les vecteurs sont **linéairement indépendants**.

Exemple 19

Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (0, 0, 7)$ sont libres.

En effet, supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, c'est-à-dire

$$\lambda_1(1, 1, -1) + \lambda_2(0, 2, 1) + \lambda_3(0, 0, 7) = 0$$

On a alors, $(2\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3) = 0$, que l'on peut réécrire sous la forme du système,

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, d'où le résultat.

Dans le cas d'un nombre infini de vecteurs

On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ ou l'ensemble $\{x_i \mid i \in I\}$ est libre ou que les vecteurs x_i, i décrivant I , sont linéairement indépendants si

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0 \right)$$

Quelques remarques pratiques

Utile en pratique : Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

On peut donc extraire plusieurs familles libres, d'une famille libre donnée. Par exemple, **toute famille formée d'un unique vecteur nul, est libre !**

Proposition 9 : Ajout d'un vecteur à une famille libre

Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de vecteurs et $y \in E$.

- Si $y \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, alors la famille $\mathcal{F} \cup \{y\}$ est liée.
- Si $y \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$, alors la famille $\mathcal{F} \cup \{y\}$ est libre.

Preuve.

A vous ! $\square$

Exemple 20

Soit $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts.

Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que $\deg(P_0) < \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$. En utilisant la propriété précédente, il est facile de montrer par récurrence que cette famille de polynômes est libre.

Résultat très pratique, pour montrer par exemple, pour montrer que la famille $((X - a)^j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une famille libre.

⚠ ATTENTION Attention, même si ce dernier exemple nous donne un résultat très utile en pratique, la réciproque est fautive !

Par exemple, la famille $(X^2, X^2 - X, X^2 - 1)$ est libre, et pourtant, tous les polynômes de cette famille ont même degré.

2.3 FAMILLE GÉNÉRATRICE**Définition 9 : Partie génératrice**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X une partie de E .

On dit que la partie X est **génératrice** de E ou **engendre** E si $E = \text{Vect}(X)$.

Si $X = \{x_i \mid i \in I\}$ est une famille de vecteurs, on dit que X est une **famille génératrice** de E .

En pratique

Trouver une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel, c'est l'écrire comme un espace engendré par une famille de vecteurs.

Exemple 21

Primordial Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ est une famille génératrice car tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, s'écrit

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Plus généralement dans K^n les vecteurs

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k^{\text{e}} \text{ rang}}, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

forment une famille génératrice, car pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, on peut s'écrire

$$(x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n.$$

⚠ ATTENTION Le corps $\mathbb{K}$ sur lequel est défini l'espace vectoriel a de l'importance. Par exemple, $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, engendré par la famille $(1, i)$, mais aussi comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, engendré par la famille contenant seulement 1.

Exemple 22

$(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ engendre $\mathbb{K}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ engendre $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple 23

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$. Montrons que $\{v_1, v_2\}$ est génératrice. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec a, b arbitraires. Il s'agit de montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $(a, b) = x_1 v_1 + x_2 v_2$, c'est-à-dire

$$(a, b) = (x_1, x_1) + (x_2, -x_2) \equiv (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

Ceci signifie que quels que soient a et $b \in \mathbb{R}$, il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \end{cases} \quad \text{Ce qui nous donne} \quad x_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{a-b}{2}.$$

Donc $\{v_1, v_2\}$ est génératrice.

⚠ ATTENTION Le dernier exemple nous incite à penser qu'une **famille génératrice finie n'existe pas toujours**. En effet, on remarque que dans $\mathbb{K}[X]$, une famille finie de polynômes $\{P_1, \dots, P_n\}$ ne peut être génératrice car, en effectuant des combinaisons linéaires, on n'obtiendra seulement des polynômes de degré inférieur à $\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\deg(P_i))$. D'ailleurs, quand on arrive à trouver une famille génératrice finie dans un espace vectoriel E , on dit que E est de dimension finie.

Exemple 24

On a vu que les matrices élémentaires E_{ij} , pour $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ engendrent $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 10 : Propriétés des parties génératrices

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et X et Y deux parties de E .

- ① **Inclusion** Si X engendre E et si $X \subset Y$, alors Y engendre E .
- ② **Enlèvement** Si X engendre E et si $x \in X$ est combinaison linéaire des vecteurs de $X \setminus \{x\}$, alors $X \setminus \{x\}$ engendre E .
- ③ **Remplacement** Soient $a \in X$ et $b \in E$. Si X engendre E et si b est combinaison linéaire des vecteurs de $X \setminus \{a\}$ avec un coefficient non nul sur a , alors $(X \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ engendre E .

Preuve.

- ① $E = \text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$, par propriété des ensemble engendrés. Donc $E = \text{Vect}(Y)$.
- ② Par propriété de l'espace engendré, on peut enlever tout vecteur lié, donc $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) = \text{Vect}(X) = E$.
- ③ Par propriété de l'espace engendré, on peut remplacer b par a , donc $\text{Vect}((X \setminus \{a\})) = \text{Vect}(X) = E$.

□

Exemple 25

On sait que $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une famille qui engendre $\mathbb{R}^2$.

Comme $v_1 := (1, 1) = e_1 + e_2$, alors on peut remplacer e_1 par v_1 et la famille obtenue (v_1, e_2) engendre toujours $\mathbb{R}^2$.

Comme $v_2 := (1, -1) = v_1 - 2e_2$, alors on peut remplacer e_2 par v_2 et la famille (v_1, v_2) engendre toujours $\mathbb{R}^2$.

2.4 BASES

Définition 10 : Base

On appelle **base** une famille à la fois **libre** et **génératrice**.

Proposition 11 : Définitions équivalentes d'une base

Soit une famille $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$ de vecteurs de E . Toutes les propositions suivantes sont équivalentes : u si et seulement si une des trois

- ① $\mathcal{B}$ est une base de E
- ② $\mathcal{B}$ est une famille **libre maximale**, c'est-à-dire une famille libre, telle que tout vecteur qu'on ajoute à $\mathcal{B}$ la rend liée. Autrement dit

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{B} \cup \{x\} \text{ est liée.}$$

- ③ $\mathcal{B}$ est une famille **génératrice minimale**, c'est-à-dire une famille génératrice à laquelle on ne peut pas "enlever" un vecteur en gardant le caractère génératrice de la famille. Autrement dit

$$\forall v \in \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \setminus \{v\} \text{ n'est pas génératrice.}$$

- ④ Tout $x \in E$ se décompose d'une façon unique sur les v_i , autrement dit

$$\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Idée intuitive

$$\begin{array}{lcl} \text{Base} & = & \text{Génératrice} + \text{Libre} \\ \text{Décomposition unique} & = & \text{Existence} + \text{Unicité de la décomposition} \end{array}$$

Preuve.

- ① $\Leftrightarrow$ ④

Si la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E , alors elle est génératrice, donc

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \quad x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

S'il existe un autre n -uplet de scalaire pour x , disons $(\mu_1, \dots, \mu_n)$, on a alors,

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0.$$

Comme la famille $\{v_1, \dots, v_n\}$ est libre, on a $\lambda_i - \mu_i = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc la décomposition est la même !

Le sens réciproque est immédiat.

• ① ⇔ ②

Si $\mathcal{B}$ est une base de E , elle est génératrice, donc tout vecteur $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de des éléments de $\mathcal{B}$, d'où $\mathcal{B}$ est libre maximale, puisque libre par définition.

Si $\mathcal{B}$ est libre maximale, alors pour tout $x \in E$, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée. Or $\mathcal{B}$ est libre, donc aucun vecteur de $\mathcal{B}$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteur de $\mathcal{B}$ seulement. Donc quelque soit le vecteur lié, il y a x dans sa décomposition, ce qui veut dire que x s'écrit comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$. Le vecteur x étant arbitraire dans E , la famille $\mathcal{B}$ est génératrice, donc c'est une base.

• ① ⇔ ③

Soit $v \in \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est libre, si $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, alors $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Donc si $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ était génératrice, alors il existerait de tel λ_i , non nuls pour générer v , ce qui est absurde.

Supposons maintenant que $\mathcal{B}$ est génératrice minimale. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, tels que $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Soit $x \in E$. La famille $\mathcal{B}$ est génératrice, donc $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tels que $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Supposons qu'un λ_i est non nul. Sans perte de généralité, supposons que c'est λ_1 . Alors, en multipliant l'équation

nulle par $\frac{\alpha_1}{\lambda_1}$, on a $0 = \alpha_1 v_1 + \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \dots + \frac{\alpha_1 \lambda_n}{\lambda_1} v_n$. En soustrayant à l'équation de génération de x , on a alors

$x = \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \dots + \left(\alpha_n - \frac{\alpha_1 \lambda_n}{\lambda_1} \right) v_n$, et donc x est généré par la famille $\{v_2, \dots, v_n\}$, ce qui est absurde, puisque $\mathcal{B}$ est génératrice minimale.

Donc $\lambda_i = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc la famille $\mathcal{B}$ est libre.

□

Bijection a partir des bases

Soit $B = \{v_1 \dots v_n\}$ une base d'un espace vectoriel E . Il existe alors une bijection entre E et K^n

$$\begin{aligned} \text{Bij :} \quad E &\longrightarrow K^n \\ x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Les scalaires x_i sont dits **composantes** ou **coordonnées** de x dans la base $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Exemples de bases canoniques à connaître

- K^n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_1 := (1, 0, \dots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1))$ est une base de K^n appelée sa base canonique.
- $K[X]$. La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$ appelée sa base canonique.
- $K_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$ appelée sa base canonique.
- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$, si on note E_{ij} la matrice élémentaire associée au couple (i, j) , la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ appelée sa base canonique.

Exemple 26

Soit $P = 4 + 3X + X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Les coordonnées de P dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ sont $(4, 3, 1)$.

La famille $\mathcal{B}_1 = (1, (X+1), (X+1)^2)$ est aussi une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et les coordonnées de P dans cette nouvelle base sont $(2, 1, 1)$.

A quoi cela vous fait penser ? ... La formule de Taylor !

Exemple 27

On a montré, dans l'exemple 25, que (v_1, v_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

En pratique

Pour trouver une base d'un espace vectoriel E , on en cherche d'abord une famille génératrice en écrivant E comme un espace engendré par une certaine famille, puis on essaie de montrer que la famille ainsi obtenue est libre. Si ce n'est pas le cas, on enlève des vecteurs à cette famille, jusqu'à ce qu'elle soit libre, en gardant la propriété de génération de l'ensemble E .

Exemple 28

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 29

Soit $\mathcal{F} = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' - 2y' + y = 0\}$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions y telles que $y = (\lambda x + \mu) \exp(x) = \lambda x \exp(x) + \mu \exp(x)$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{F}$ est le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ engendré par $v_1 := x \exp(x)$ et $v_2 := \exp(x)$.

3 ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non trivial, c'est à dire **non réduit à** $\{0_E\}$. On arrive facilement à voir un espace à dimension 1, 2 ou 3... même 4. Le but ici, est de généraliser cela à toute dimension en le définissant rigoureusement.

3.1 LA DIMENSION FINIE**Définition 11 : Espace vectoriel de dimension finie**

On dit que E est **de dimension finie** s'il possède une partie génératrice **finie**, et de **dimension infinie** sinon.

Exemple 30

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie. On a déjà exhibé leurs bases canoniques qui sont finies et génératrices !

Par contre, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. En effet, pour toute famille finie $(P_1, \dots, P_n)$ de polynômes non nuls, l'espace engendré par cette famille ne peut pas engendrer un polynôme de degré supérieur au degré maximal dans la famille $(P_1, \dots, P_n)$. Donc $(P_1, \dots, P_n)$ n'engendre pas $\mathbb{K}[X]$ et aucune famille finie de $\mathbb{K}[X]$ n'engendre $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 12 : Famille libre maximale dans E

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie engendré par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Preuve. Soit $\mathcal{V}$ une famille avec $n+1$ éléments. Tout éléments de $\mathcal{V}$ est dans E et donc s'écrit comme combinaison linéaire de n vecteurs. D'après la corollaire 8.1, on sait alors que la famille est liée. Cela montre la proposition. $\square$

Théorème 1

- ① **Théorème d'existence d'une base** Si $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ engendrent E et si une sous famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre, alors il existe une partie J contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ forme une base de E .
- ② **Théorème de la base extraite** De toute famille génératrice finie, on peut extraire une base.
- ③ **Théorème de la base incomplète** Toute famille libre peut être complétée en une base.

Preuve.

- ① On a $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ une famille libre. On pose A l'ensemble des familles libres de vecteurs de $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ contenant $\mathcal{F}$.
 $A = \{(x_i)_{i \in J} \mid I \subset J \subset \{1, 2, \dots, n\}, \text{ et } (x_i)_{i \in J} \text{ famille libre}\}$. A est non vide car contient $\mathcal{F}$. On regarde l'ensemble $B = \{\text{card}(\mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \in A\}$. B est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ majoré par n . Il admet donc un plus grand élément. Soit $\mathcal{L} = (x_i)_{i \in J}$ une famille libre de cardinal maximale de A . Alors tous les autres vecteurs de la famille $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont combinaison linéaire des éléments de la famille $\mathcal{L}$ (même preuve que famille libre maximale). Or $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ engendre E , donc $\mathcal{L} = (x_i)_{i \in J}$ engendre E . De plus, elle est libre donc c'est une base.
- ② Il suffit d'appliquer le point précédent en prenant un vecteur non nul de la famille génératrice comme sous famille libre.
- ③ Soit $\mathcal{L}_0$ une famille libre. On fait de même que la preuve de ① en prenant comme famille génératrice celle de la définition d'un sous-espace vectoriel de dimension finie réunie avec la famille libre $\mathcal{L}_0$. On obtient alors une base contenant $\mathcal{L}_0$.

□

Espace de dimension finie et base

On a donc montré que tout espace vectoriel a une base, et on a indiqué comment la trouver ! Il suffit de compléter une famille libre ou de réduire une famille génératrice !

3.2 DIMENSION D'UN ESPACE VECTORIEL

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs non réduit à $\{0_E\}$.

On a montré que E possède une base, puisqu'on peut compléter la famille libre contenant un vecteur non nul en une base. En fait, on a mieux !

Corollaire 1.1

Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve. On rappelle que le cardinal est le nombre d'élément d'un ensemble, ce qui veut dire que nous devons démontrer que toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Cela vient du théorème précédent ! Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

- Comme $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathcal{B}'$ est génératrice, alors $\text{card } \mathcal{B} \leq \text{card } \mathcal{B}'$
- Comme $\mathcal{B}'$ est libre et que $\mathcal{B}$ est génératrice, alors $\text{card } \mathcal{B}' \leq \text{card } \mathcal{B}$

d'où l'égalité. □

Définition 12

On appelle **dimension** de l'espace vectoriel E , le cardinal d'une base de E , noté $\dim E$.
 Si $E = \{0_E\}$, on dit que sa dimension est nulle, soit $\dim E = 0$.

Exemple 31

Donc, d'après ce que l'on a déjà vu précédemment :

- $\dim \mathbb{R}^n = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,
- $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
- Dans l'exemple 29, la dimension de l'espace vectoriel des solutions est 2.

Exemple 32

Cherchons la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On sait que les matrices symétriques sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^t A$. Donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$. Donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Vocabulaire

Tout espace de dimension 1 est appelé **Droite vectorielle**.

Tout espace de dimension 2 est appelé **Plan vectoriel**.

Intuition dans un espace de dimension n

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . D'après ce qui a été vu précédemment, toute partie libre possède au plus n éléments et toute partie génératrice en possède au moins n . Cela donne donc un indice pour savoir si une famille peut être libre ou génératrice.

On obtient alors un résultat pratique, pour une **famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs**.

$$\mathcal{F} \text{ est une base} \iff \mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

C'est une conséquence directe du théorème de la base incomplète (ou extraite) appliqué à $\mathcal{F}$.

Donc dans un exercice, pour montrer qu'une famille est une base de F , deux possibilités :

- Si vous ne connaissez pas bien F et on vous remarque qu'un but du problème est de trouver la dimension de F . À ce moment-là, vous montrez que la famille est incluse dans F , libre et génératrice, et vous comptez son nombre de vecteurs.
- Si F est un espace connu ou dont vous avez déjà trouvé la dimension à une question précédente. Il suffit alors de montrer que la famille est incluse dans F et libre (ou génératrice), et a autant de vecteurs que la dimension de F .

Exemple 33

Montrons que la famille $((-1, 1, 0), (1, 1, 0), (-1, 2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda(-1, 1, 0) + \mu(1, 1, 0) + \nu(-1, 2, 1) = (0, 0, 0)$.

C'est assez rapide de montrer que $\lambda = \mu = \nu = 0$. Donc la famille est libre et c'est une base !

Exemple 34

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $x_1, \dots, x_n$, définis, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_j}{x_j - x_i}.$$

Le théorème des polynômes de Lagrange nous dit que pour tout n -uplet $(y_1, \dots, y_n)$, il existe un unique polynôme

$$P = \sum_{k=1}^n y_k L_k$$

de degré inférieur à $n - 1$ tel que $P(x_i) = y_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Donc, pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, il existe une unique décomposition donnée par la formule ci dessus, du polynôme P dans la famille $(L_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, qui forme donc une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Vocabulaire

On dit que deux espaces vectoriels de dimension finie sont **isomorphes**, s'il existe un isomorphisme, donc une application linéaire bijective, entre ces deux espaces.

Proposition 13 : Tous les espaces de dimension n sont "les mêmes"

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension.

Dimension finie

En dimension finie, on ne travaille donc que avec $\mathbb{K}^n$, puisque si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

L'isomorphisme est donné par la démonstration de la proposition. Cette preuve montre aussi une méthode que l'on utilisera souvent pour décomposer une application linéaire. C'est donc utile de suivre les preuves !

Preuve. Soit E, F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

($\Leftarrow$) Si $\dim(E) = \dim(F) = n$, alors il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $(f_1, \dots, f_n)$ de F .
Définissons φ une application linéaire de E dans F , par $\varphi(e_i) = f_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
Soit $x \in \text{Ker} \varphi$. Alors $\varphi(x) = 0$. On décompose x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et on obtient

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Comme les $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F , alors elle est libre, et donc

$$\sum_{i=1}^n x_i f_i \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0,$$

donc $x = 0$ et φ est injective.

La surjectivité se démontre en décomposant de la même façon ! A vous !

Donc φ est bijective. Donc E, F sont isomorphes.

($\Rightarrow$) S'ils sont isomorphes, disons par un isomorphisme φ , et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une base de F , donc $\dim(E) = n = \dim(F)$.

□

3.3 PROPRIÉTÉS DE LA DIMENSION

Définition 13

Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E . Le **rang** de $\mathcal{F}$, noté $\text{rg}(\mathcal{F})$ est défini par

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect} \{u_1, \dots, u_p\}$$

C'est aussi le cardinal d'une sous-famille libre maximale de $\mathcal{F}$.

Rang et dimension

La dimension de E est donc le rang de toute famille génératrice de E .

De plus, si on prend une famille quelconque de E , alors son rang sera inférieur à la dimension de E , puisque la famille ne peut pas engendrer un espace "plus grand" que E .

Proposition 14 : Dimension d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

Si F un sous-espace vectoriel de E , alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

De plus, $\dim F = \dim E \iff F = E$.

⚠ ATTENTION Deux espaces vectoriels de même dimension ne sont pas égaux en général !

L'équivalence " $\dim F = \dim E \iff F = E$ " **n'est pas vraie en général !** On doit avoir $F \subset E$!

Preuve. Soit $C = \{\text{Card}(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ une famille libre de } F\}$. C'est une partie de $\mathbb{N}$. Les familles libres de F sont des familles libres de E , donc C est majorée par $\dim E$ et donc admet un plus grand élément. Notons le $m \leq n$.

Soit $\mathcal{L}_m$ une famille libre de F de cardinal m . Par définition de m , pour tout $f \in F$, $\mathcal{L}_m \cup \{f\}$ est liée. Donc $\mathcal{L}_m$ est libre maximale et c'est une base de F . On a donc $\dim F = m \leq n = \dim E$.

Si $m = n$, alors la base exhibée est une base de E et donc $F = E$. □

Montrer l'égalité entre deux sous-espaces vectoriels de E

Ancienne méthode Montrer une double inclusion : $F \subset G$ et $G \subset F$ (cas général en dimension infinie, ou pour des ensembles quelconques sans structure).

Nouvelle méthode Si E est de dimension finie, montrer que $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$ (ou $\dim F \geq \dim G$ suffit)

Proposition 15 : Dimension d'un espace vectoriel produit

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F .$$

Preuve. On exhibe une base de $E \times F$ en prenant une base de E et une base de F . A vous ! $\square$

⚠ ATTENTION On ne parle jamais de $\dim(E \cup F)$ puisque $E \cup F$ n'est pas un espace vectoriel en général ! Donc cela n'a pas de sens !

Proposition 16 : Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E . Alors $F + G$ est de dimension finie et

$$\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G .$$

Donc si F et G sont supplémentaires, alors $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$.

Preuve. L'idée générale est qu'une partie de F et G peut être commune. On l'a notée en théorie des ensembles $F \cap G$. Donc quand on compte "le nombre de dimensions dans F " + "le nombre de dimensions dans G ", on compte deux fois "les dimensions dans $F \cap G$ ". Il faut donc les enlever une fois.

Supposons que $\dim F = p$, $\dim G = q$ et $\dim F \cap G = r \leq \min(p, q)$.

Considérons une base $\{a_1, \dots, a_r\}$ de $F \cap G$. Puisque la famille $\{a_1, \dots, a_r\}$ est libre de F et de G , on peut la compléter en une base de F et aussi en une base de G . Allons y !

On obtient :

- une base de F du type $\{a_1, \dots, a_r, f_{r+1}, \dots, f_p\}$,
- une base de G du type $\{a_1, \dots, a_r, g_{r+1}, \dots, g_q\}$.

Or tout vecteur de $F + G$ s'écrit comme somme d'un vecteur de F , et d'un vecteur de G et donc il est de la forme

$$x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p \\ + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_r a_r + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q ,$$

c'est-à-dire, en posant $\nu_i = \lambda_i + \mu_i$, pour $i = 1, \dots, r$

$$x = \nu_1 a_1 + \dots + \nu_r a_r + \lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p + \mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q .$$

Par conséquent, la famille $\{a_1, \dots, a_r, f_{r+1}, \dots, f_p, g_{r+1}, \dots, g_q\}$ engendre $F + G$. Montrons qu'elle est libre. Soit une combinaison linéaire nulle

$$\underbrace{\nu_1 a_1 + \dots + \nu_r a_r}_{=: x \in F \cap G} + \underbrace{\lambda_{r+1} f_{r+1} + \dots + \lambda_p f_p}_{=: y \in F} + \underbrace{\mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q}_{=: z \in G} = 0 . \quad (*)$$

On a $x + y + z = 0$, donc $z = -(x + y)$. Or $z \in G$ et $x + y \in F$, donc $z \in F \cap G$. Par conséquent, z peut s'écrire comme combinaison linéaire des a_i

$$\mu_{r+1} g_{r+1} + \dots + \mu_q g_q = \rho_1 a_1 + \dots + \rho_r a_r$$

Mais $\{a_1, \dots, a_r, g_{r+1}, \dots, g_q\}$ est une base de G , donc tous les coefficients de cette combinaison linéaire doivent être nuls. En particulier, $\mu_{r+1} = 0, \dots, \mu_q = 0$.

De même, $\lambda_{r+1} = 0, \dots, \lambda_p = 0$. Donc (*) devient

$$\nu_1 a_1 + \dots + \nu_r a_r = 0 .$$

Or la famille $\{a_1, \dots, a_r\}$ est libre, donc $\nu_1 = 0, \dots, \nu_r = 0$. Ainsi tous les coefficients dans (*) sont nuls et donc la famille $\{a_1, \dots, a_r, f_{r+1}, \dots, f_p, g_{r+1}, \dots, g_q\}$ est libre et c'est une base de $F + G$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= r + (p - r) + (q - r) = p + q - r \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \end{aligned}$$

□

Exemple 35

Comparons

$$F_1 \cap (F_2 + F_3) \quad \text{et} \quad (F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3)$$

Prenons $x \in (F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3)$. On a alors $x = y_2 + y_3$, avec $y_2 \in F_1 \cap F_2$ et $y_3 \in F_1 \cap F_3$. Donc $x \in F_1$ comme combinaison linéaire d'éléments de F_1 et $x \in F_2 + F_3$ par définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

Donc $F_1 \cap (F_2 + F_3) \supset F_1 \cap F_2 + F_1 \cap F_3$.

L'autre inclusion n'est pas vraie en général. Prenons par exemple,

$$F_1 = \text{Vect}((1, 0)), \quad F_2 = \text{Vect}((0, 1)), \quad F_3 = \text{Vect}((1, 1)), \quad \text{dans } \mathbb{R}^2.$$

Alors $F_1 \cap (F_2 + F_3) = F_1$ et $(F_1 \cap F_2) + (F_1 \cap F_3) = \{0_E\}$.

Exemple 36

Montrons que

$$F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \right\}$$

sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a immédiatement une base de F , notée $\{A_1, A_2\}$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et

une base de G , notée $\{B_1, B_2\}$ avec $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il suffit alors de montrer que la famille $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ est libre, et pour des raisons de dimension, c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemple 37

Avec ces résultats, on peut obtenir rapidement la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

En effet, On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc

$$\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

En dimension finie, il y a toujours un supplémentaire !

En effet, comme E, F est de dimension finie, et $F \neq \{0_E\}$, alors F possède une base $(f_1, \dots, f_p)$ que nous pouvons compléter en une base $(f_1, \dots, f_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E d'après le théorème de la base incomplète.

Posons alors $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Il découle de nos théorèmes précédents que $E = F + G$ et que F et G sont en somme directe.

En outre, d'après la formule de Grassman, $\dim G = \dim E - \dim F$, et en fait, tous les supplémentaires de F dans E ont tous la même dimension.

En pratique, en dimension finie

Les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si deux seulement de ces trois assertions sont vérifiées :

$$\textcircled{\text{i}} \dim F + \dim G = \dim E, \quad \textcircled{\text{ii}} F \cap G = \{0_E\}, \quad \textcircled{\text{iii}} F + G = E.$$