

TD

Probabilités

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{k\}$ soit proportionnelle à k . ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 2 ■ ■ □

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité de l'événement $\{1, 2, \dots, k\}$ soit proportionnelle à k^2 . ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Comparer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B \mid A)$. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Établir $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid \bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})$. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □

Montrer qu'un événement A est indépendant de tout événement si, et seulement si, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 6 ■ ■ □

Montrer que, si la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , la variable aléatoire $n - X$ suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1 - p)$. Interpréter. ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 7 ■ □ □

On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leq n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Les répartitions possibles sont équiprobables.

- ① Déterminer la probabilité de l'événement
 A : «chaque urne contient au plus une boule»
- ② Déterminer la probabilité de l'événement
 B : «il existe une urne contenant au moins deux boules »

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 8 ■ □ □

- ① Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un «six»?
- ② Même question avec deux dés pour obtenir un «double-six »

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10 . On tire, sans remise, trois boules dans cette urne.

- ① Quelle est la probabilité d'obtenir des numéros en ordre croissant?
- ② Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre strictement croissant.
- ③ Même question pour un tirage avec remise et des numéros en ordre croissant au sens large.

▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 10 ■ □ □

Dans une population, une personne sur 10000 souffre d'une pathologie. Un laboratoire pharmaceutique met sur le marché un test sanguin. Celui-ci est positif chez 99% des malades mais aussi faussement positif chez 0,1% des personnes non atteintes. Un individu passe ce test et obtient un résultat positif. Quelle est sa probabilité d'être malade? Qu'en conclure? ▶ Indication ▶ Correction

EXERCICE 11 ■■□

Un tiroir contient 12 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 4 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

- ① deux paires complètes ? ② au moins une paire ? ③ une paire et une seule ?

► Indication

► Correction

EXERCICE 12 ■□□

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[0, 10]]$.

Déterminer les lois de $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ et $Z = \cos \frac{X\pi}{2}$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■□□

Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer.

Déterminer les lois de X et $|X|$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■■■

Soit $n \geq 2$. Dans une pile de n lettres, se trouvent les deux lettres que l'on doit envoyer. On enlève une par une les lettres qui sont sur le dessus.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de lettres enlevées jusqu'à trouver une des deux lettres à envoyer sur le dessus de la pile. On met de côté la lettre trouvée et l'on recommence l'opération jusqu'à trouver la deuxième lettre et on note X_2 la variable aléatoire donnant le nombre supplémentaire de lettres qu'il a fallu retirer de la pile avant que la deuxième lettre ne soit sur le dessus de la pile. Sans information supplémentaire, on peut supposer que toutes les positions possibles pour les deux lettres sont équiprobables.

- ① Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles et $(X_1, X_2)(\Omega)$.
- ② Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_1 et de X_2 .
- ③ On note $Z = X_1 + X_2 + 2$. Que représente la variable aléatoire Z ? Déterminer sa loi.

► Indication

► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 15 ■■□

Une urne contient des boules blanches et noires en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On opère à des tirages successifs avec remise.

- ① Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage?
- ② Quelle est la probabilité que la k -ième boule blanche tirée apparaisse lors du n -ième tirage?

► Indication

► Correction

EXERCICE 16 ■□□

Une urne contient 8 boules blanches et deux boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

- ① Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage?
- ② Sachant qu'une boule noire figure dans le tirage. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?
- ③ Quelle est la probabilité que la troisième boule du tirage soit noire?

► Indication

► Correction

EXERCICE 17 ■■□

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[[1, n]]$.

- ① Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$.
- ② Déterminer la loi de $X - Y$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 18 ■■□

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p .

- ① Déterminer la loi du couple $(U, V) = (X + Y, X - Y)$, en déduire les lois marginales.
- ② Déterminer la loi de U conditionnée à $V = 1$.

- ③ Les variables U et V sont-elles indépendantes?

► Indication

► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □ Scrutin

Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que $p > q$.

- ① On considère des chemins joignant des points de $\mathbb{N}^2$ et formés de déplacements successifs. Les seuls déplacements autorisés à partir du point (n, m) sont : le passage de (n, m) à $(n+1, m)$ et de (n, m) à $(n, m+1)$. On note Δ la droite d'équation $y = x$.
- 1.a) Pour $(a, b, m, n) \in \mathbb{N}^4$, combien y a-t-il de chemins allant de (a, b) à $(a+m, b+n)$?
- 1.b) Montrer, en utilisant une symétrie par rapport à la droite Δ , que le nombre de chemins allant de $(1, 0)$ à (p, q) et qui rencontrent la droite Δ est égal au nombre de chemins allant de $(0, 1)$ à (p, q) .
- 1.c) En déduire que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (p, q) qui ne rencontrent qu'en $(0, 0)$ est $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$.
- ② Dans un scrutin, il y a p bulletins pour le candidat P et q pour le candidat Q . Calculer la probabilité que le candidat P soit toujours en tête dans le dépouillement.

► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ ■ □

On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Il n'y a qu'un seul trésor.

► Indication

► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Une succession d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».

Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

- ① Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 .

- ② On suppose $0 < p < 1$. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers l'infini ?

► Indication

► Correction

EXERCICE 22 ■ □ □ Petit rappel de convexité

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp \left(- \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \right).$$

EXERCICE 23 ■ ■ □

► Indication

► Correction

Soit n et N des entiers tels que $1 \leq n < N$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On en tire n simultanément. Les numéros obtenus sont notés $Y_1 < \dots < Y_n$. Déterminer la loi du n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$, puis les lois marginales.

On fait l'hypothèse que les $\binom{N}{n}$ tirages sont équiprobables.

► Indication

► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □ Loi de Hardy-Weinberg

Considérons un gène qui se présente sous deux allèles A et a . Un individu dispose de deux allèles d'un même gène donc AA, Aa ou aa . Un individu reçoit un allèle de chacun de ses parents au hasard. Notons p, q et r les proportions des génotypes dans une génération et P, Q et R les proportions dans la génération suivante. Montrer que $Q^2 = 4PR$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ ■ Urne de Polya

On considère une urne contenant a boules colorées et b boules blanches. Après chaque tirage, la boule extraite est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur. Déterminer la probabilité que la $n^{\text{ième}}$ boule tirée soit blanche.

► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Utiliser le fait que la somme des probabilités vaut 1 et l'additivité.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Utiliser le fait que la somme des probabilités vaut 1 et l'additivité.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Ecrire la formule de Bayes.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Refaire la preuve de la formule des probabilités totales, dans ce cas particulier.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

A doit être indépendant avec lui même. Faire une analyse-synthèse.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Poser $Y = n - X$ une nouvelle variable aléatoire, puis calculer et identifier $\mathbb{P}(Y = k)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Chercher le nombre de répartitions totales possibles et utiliser la formule

$$P(E) = \frac{\text{ombres d'issues favorables à } E}{\text{nombres d'issues totales}}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

On calcule la probabilité de ne pas obtenir de 6 au bout de k lancers et on cherche k pour que la condition soit vérifiée.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

- ① Pour un tirage de nombre donné, on compte le nombre d'issue favorables et le nombres d'issues au total.
- ② Compter le nombre d'issues favorables et le nombres d'issues total. Ce sont des fonctions de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$.
- ③ Penser à introduire une fonction strictement croissante à partir de la fonction croissante demandée.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

Utilisation classique de la formule de des probabilités conditionnelles et de celle des probabilités totales.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Toujours "nombre d'issues favorables sur nombres d'issues totales".

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

On calcule calmement $\mathbb{P}(Y = k)$ et $\mathbb{P}(Z = k)$, pour tous les k dans $Y(\Omega)$ et $Z(\Omega)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On cherche toutes les possibilités dans $X(\Omega)$ et on calcule calmement $\mathbb{P}(X = k)$ et $\mathbb{P}(|X| = k)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

On calcule les lois marginales avec la définition. Pour Z il faut sommer toutes les possibilités : $\{X_1 + X_2 + 2 = k\} \Leftrightarrow \bigcup_{i=0}^{k-2} \{(X_1, X_2) = (i, k-2-i)\}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

On décompose les événements tirage par tirage. Il faut bien dénombrer toutes les possibilités dans la question (2).

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

- (1) Penser à utiliser l'événement contraire.
- (2) Utiliser la définition
- (3) Formule des probabilités totales après avoir bien dénombrer tous les événements.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

On décompose les événements : $(X = Y) = \bigcup_{k=1}^n ((X = k) \cap (Y = k))$

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

Toujours les mêmes méthodes : Calcul du couple en décomposant les événements, puis de la loi marginale avec la formule.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 Scrutin

Il faut comptabiliser les déplacements calmement.

Imaginer un graphe qui a en abscisse le nombre de vote pour P et en ordonnée pour Q , dans la dernière question.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

C'est une probabilité conditionnelle !

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Etablir une relation de récurrence pour le passage d'un individu k à l'individu $k+1$, puis étudier la suite définie ainsi par récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22 Petit rappel de convexité

On se rappelle (ou on redémontre) que les événements contraires sont aussi indépendants, puis on écrit la probabilité recherchée.

Une fonction convexe est supérieure à ses tangentes !

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23 _____

Montrer que le n uplet suit une loi uniforme.

Pour la loi marginale, il faut vérifier

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24 **Loi de Hardy-Weinberg** _____

La difficulté est la mise en équation. Il faut prendre le temps de poser tous les événements et utiliser ensuite la formule des probabilités totales pour trouver P , Q et R en fonction de p , q et r .

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25 **Urne de Polya** _____

Calculer pour les premiers tirages puis généraliser.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

Par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k$. Or par additivité

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1, \text{ donc } \alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

Si P est une probabilité solution alors, par hypothèse, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}(\{1, 2, \dots, k\}) = \alpha k^2$$

En particulier, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donne $\alpha = 1/n^2$. Aussi,

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \mathbb{P}(\{1, \dots, k\}) - \mathbb{P}(\{1, \dots, k-1\}) = \frac{2k-1}{n^2}.$$

Inversement, on définit bien une probabilité en posant $\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{2k-1}{n^2}$, car ces valeurs sont positives de somme égale à 1.

On vérifie aussi par additivité $\mathbb{P}(\{1, 2, \dots, k\}) = \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}$ et la probabilité déterminée est bien solution.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Puisque $A \subset A \cup B$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A)$ puis

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cup B)} \leq \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

C'est à dire, $\mathbb{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbb{P}(A \cap B | A)$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

Si A est indépendant de tout événement alors A est indépendant de lui-même et donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2.$$

On en déduit $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1 . Inversement, supposons $\mathbb{P}(A) = 0$. Pour tout événement B , on a $A \cap B \subset A$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$. Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Supposons maintenant $\mathbb{P}(A) = 1$. On a $\mathbb{P}(\bar{A}) = 0$ et donc $\bar{A}$ est indépendant de tout événement B . Par suite, A est aussi indépendant de tout événement B .

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

Si l'on pose $Y = n - X$, alors on a $Y(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}.$$

La variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètre $(n, 1-p)$. Si X représente un nombre de succès parmi n expériences, alors $Y = n - X$ mesure le nombre d'échecs.

↩ retour à l'EXERCICE 6

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 7

En discernant les boules et les urnes, chaque tirage se comprend comme une application φ de $\{1, \dots, r\}$ vers $\{1, \dots, n\}$ associant à la boule d'indice i l'urne de numéro $\varphi(i)$ qui la contient. Il y a n^r répartitions possible.

- ① La probabilité cherchée correspond à celle de choisir une fonction φ injective soit

$$P(A) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-r+1)}{n^r}.$$

- ② La probabilité cherchée est complémentaire de la précédente

$$P(B) = 1 - P(A).$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

- ① La probabilité de ne pas obtenir de 6 lors de k lancers est $(5/6)^k$. Il s'agit donc ici de trouver le plus petit k pour lequel $(5/6)^k \leq 1/2$. On obtient $k = 4$.
- ② On veut $(35/36)^k < 1/2$ et on obtient $k = 25$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Pour chaque tirage faisant apparaître les nombres a, b, c dans le bon ordre, il y en a 5 autres où ces mêmes nombres apparaissent dans le désordre. La probabilité recherchée est donc égale à $1/6$.
- ② Un tirage s'apparente à une fonction de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a 10^3 fonctions toutes équiprobables. Parmi celles-ci, on recherche les fonctions strictement croissantes. Celles-ci sont simplement déterminées par les 3 valeurs distinctes qu'elles prennent qu'il suffit ensuite d'ordonner. Déterminer ces trois valeurs revient à choisir 3 éléments dans un ensemble à 10 éléments, il y a $\binom{10}{3}$ possibilités. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{12}{100}.$$

- ③ Il s'agit maintenant de dénombrer les fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. À une telle fonction f , on peut associer la fonction $g : \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; 12 \rrbracket$ déterminée par

$$g(1) = f(1), g(2) = f(2) + 1 \text{ et } g(3) = f(3) + 2$$

La fonction f étant croissante, la fonction g est strictement croissante. Inversement, à une fonction g strictement croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ correspond une unique fonction f croissante de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$. Il y a donc autant de fonctions croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 10 \rrbracket$ que de fonctions strictement croissantes de $\llbracket 1; 3 \rrbracket$ vers $\llbracket 1; 12 \rrbracket$ à savoir $\binom{12}{3}$. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{22}{100}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

Notons Ω la population, M le sous-ensemble constitué des individus malades et T celui constitué des individus rendant le test positif. On a

$$\mathbb{P}(M) = 10^{-4}, \mathbb{P}(T | M) = 0,99 \text{ et } \mathbb{P}(T | \bar{M}) = 10^{-3}$$

Par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T | \bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})$$

puis par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(M | T) = \frac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T)}$$

ce qui numériquement donne 9%. La personne n'a en fait qu'environ une chance sur 10 d'être malade alors que le test est positif! Cela s'explique aisément car la population de malade est de $1/10000$ et celle des personnes saines faussement positives est de l'ordre de $1/1000$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

On prend comme univers l'ensemble des parties de cardinal 4 dans l'ensemble des chaussettes, qu'on munit de la probabilité uniforme. On a $\text{card } \Omega = \binom{24}{4}$.

① Soit A l'événement « on tire deux paires ». Il s'agit de tirer deux paires parmi 12. On a donc $\text{card}(A) = \binom{12}{2}$ et $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{24}{4}} = \frac{1}{161}$.

② Soit B l'événement « on tire au moins une paire ». On considère l'événement contraire « on ne tire aucune paire ». Il s'agit de tirer 4 chaussettes dans 4 paires différentes. On choisit les 4 paires dans lesquelles sont prises les chaussettes, puis dans chaque paire on a le choix entre 2 chaussettes. On obtient $\text{card}(\bar{B}) = \binom{12}{4} \cdot 2^4$ et $\mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{120}{161}$. On en déduit $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{120}{161} = \frac{41}{161}$.

③ Soit C l'événement « on tire exactement une paire ». On remarque que $(A, \bar{B}, C)$ est un système complet d'événements. On en déduit :

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(\bar{B}) = \frac{40}{161}.$$

↪ retour à l'EXERCICE 11

Correction de l'EXERCICE 12

• La variable aléatoire Y est à valeurs dans $\llbracket 0, 3 \rrbracket$, et pour $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, on a

$$\{Y = k\} = \{k \leq \sqrt{X} < (k+1)\} = \{k^2 \leq X < (k+1)^2\} = \{k^2 \leq X \leq k^2 + 2k\}.$$

On en déduit $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{2k+1}{11}$. Et comme $X \leq 10$, on a $\{Y = 3\} = \{9 \leq X \leq 10\}$ et donc $\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{2}{11}$.

• La variable aléatoire Z est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et l'on a

$$\textcircled{1} \quad \mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X \equiv 2[4]) = \mathbb{P}(X \in \{2, 6, 10\}) = \frac{3}{11};$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X \text{ impair}) = \frac{5}{11};$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X \equiv 0[4]) = \mathbb{P}(X \in \{0, 4, 8\}) = \frac{3}{11}.$$

↪ retour à l'EXERCICE 12

Correction de l'EXERCICE 13

On choisit comme univers $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, muni de la probabilité uniforme.

• On a $X(\Omega) = \llbracket -5, 5 \rrbracket$ et, pour $k \in \llbracket -5, 5 \rrbracket$

$$\{X = k\} = \{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 : i - j = k\}.$$

On peut remarquer que

$$\begin{aligned} \text{card}(\{X = -k\}) &= \text{card}(\{(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 : i - j = -k\}) \\ &= \text{card}(\{(j, i) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 : j - i = k\}) \\ &= \text{card}(\{X = k\}) \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(X = -k) = \mathbb{P}(X = k)$. On suppose désormais $k \geq 0$. On a alors

$$\{X = k\} = \{(j + k, j) \mid j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \text{ et } j + k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}.$$

Pour $j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a $j \leq j + k$. Alors j doit vérifier les inégalités $1 \leq j \leq j + k \leq 6$, c'est-à-dire $1 \leq j \leq 6 - k$. On obtient

$$\{X = k\} = \{(j + k, j) \mid 1 \leq j \leq 6 - k\}$$

On en déduit $\text{card}(\{X = k\}) = 6 - k$ et donc $\mathbb{P}(X = k) = \frac{6-k}{36}$. Par symétrie, on obtient

$$\forall k \in \llbracket -5, 5 \rrbracket \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{6 - |k|}{36}$$

• On a $|X|(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et

$$\mathbb{P}(|X| = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket \quad \mathbb{P}(|X| = k) = \mathbb{P}(X = -k) + \mathbb{P}(X = k) = \frac{6 - k}{18}$$

↪ retour à l'EXERCICE 13

Correction de l'EXERCICE 14

① On prend pour Ω l'ensemble des positions possibles des deux lettres parmi les n feuilles, que l'on munit de la probabilité uniforme. On a $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{2}$. Au total, on enlève au plus $n - 2$ feuilles. L'ensemble des valeurs prises par (X_1, X_2) est donc

$$E = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n - 2\}.$$

- ② La valeur de (i, j) détermine la position des deux lettres parmi les n feuilles. On a donc

$$\forall (i, j) \in E \quad \mathbb{P}((X_1, X_2) = (i, j)) = \frac{1}{\binom{n}{2}}.$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = \sum_{j=0}^{n-2} \mathbb{P}((X_1, X_2) = (i, j)) = \sum_{j=0}^{n-2-i} \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1-i}{\binom{n}{2}}$$

On trouve le même résultat pour la loi de X_2 .

- ③ La variable aléatoire Z désigne le nombre total de lettres enlevées. Elle est à valeurs dans $\llbracket 2, n \rrbracket$ et, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k - 2) = \sum_{i=0}^{k-2} \mathbb{P}((X_1, X_2) = (i, k-2-i)) = \frac{k-1}{\binom{n}{2}}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 15

Notons A_i l'événement «une boule blanche est obtenue lors du i -ème tirage». Les événements A_i sont mutuellement indépendants et $\mathbb{P}(A_i) = p$ pour tout i .

- ① Notons B_n l'événement «la première boule blanche apparaît lors du n -ième tirage». On peut écrire

$$B_n = \overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n.$$

Par indépendance, on obtient

$$\mathbb{P}(B_n) = (1-p)^{n-1}p.$$

- ② Notons C_{n-1} l'événement « $k-1$ boules sont apparues lors des $n-1$ premiers tirages» et D_n l'événement «la k -ième boule blanche tirée apparaît lors du n -ième tirage». On a $D_n = C_{n-1} \cap A_n$ et

$$\mathbb{P}(C_{n-1}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

car il s'agit de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès dans la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Par indépendance, on conclut

$$\mathbb{P}(D_n) = \mathbb{P}(C_{n-1} \cap A_n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

- ① L'évènement contraire est que le tirage ne comporte que des boules blanches. Par dénombrement, sa probabilité est

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15}$$

et la probabilité cherchée est

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

- ② Notons A l'événement, la première boule tirée est noire. En raisonnant comme au dessus

$$\mathbb{P}(A) = \frac{9 \times 8 + 9 \times 8}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{5}$$

L'événement B , au moins une boule tirée est noire a été mesurée ci-dessus et donc

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{8}$$

- ③ Notons A_i l'événement la boule obtenue lors du i -ème tirage est noire. On introduit un système complet d'événements en considérant $B_1, \dots, B_4$ égaux à

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2 \text{ et } \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

Par la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(A_3) = \sum_{k=1}^4 \mathbb{P}(A_3 | B_k) \mathbb{P}(B_k)$$

Il ne reste plus qu'à évaluer...

$$\mathbb{P}(A_3 | B_1) = 0$$

$$\mathbb{P}(A_3 | B_2) = \mathbb{P}(A_3 | B_3) = 1/8 \text{ avec } \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = 8/10 \times 2/9$$

et

$$\mathbb{P}(A_3 | B_4) = 2/8 \text{ avec } \mathbb{P}(B_4) = 8/10 \times 7/9.$$

Au final

$$\mathbb{P}(A_3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}.$$

C'est aussi la probabilité que la première boule tirée soit noire et par un argument de symétrie ce n'est pas si étonnant...

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

- ① En écrivant l'événement $X = Y$ comme la réunion des $(X = k)$ et $(Y = k)$,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, l'univers est la réunion des événements $X = Y, X > Y$ et $X < Y$ donc

$$1 = \mathbb{P}(X = Y) + \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{n} + 2\mathbb{P}(X > Y).$$

En conclusion, $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{n-1}{2n}$ et $\mathbb{P}(X \geq Y) = \mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(X = Y) = \frac{n+1}{2n}$.

- ② La variable $X - Y$ est à valeurs dans $\llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket -(n-1), n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X - Y = k) &= \sum_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k+j, Y = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k+j) \mathbb{P}(Y = j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-k} \mathbb{P}(X = k+j) = \begin{cases} \frac{n-k}{n^2}, & \text{si } k \geq 0, \\ \frac{n+k}{n^2}, & \text{si } k \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On peut vérifier que la somme fait bien 1.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

- ① Il y a quatre valeurs possibles pour la variable (X, Y) qui donnent chacune une valeur différente pour le couple (U, V) donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((U, V) = (2, 0)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (1, 1)) = p^2 \\ \mathbb{P}((U, V) = (0, 0)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (0, 0)) = (1-p)^2, \\ \mathbb{P}((U, V) = (1, 1)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (1, 0)) = p(1-p), \\ \mathbb{P}((U, V) = (1, -1)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (0, 1)) = p(1-p). \end{aligned}$$

- ② Clairement conditionnellement à $V = 1, U$ est la variable constante égale à 1 car

$$\mathbb{P}(U = 1 | V = 1) = \frac{\mathbb{P}(U = 1, V = 1)}{\mathbb{P}(V = 1)} = \frac{p(1-p)}{p(1-p)} = 1.$$

- ③ Comme $\mathbb{P}(V = 1) = p(1-p)$, $\mathbb{P}(U = 1) = 2p(1-p)$ et $\mathbb{P}((U, V) = (1, 1)) = p(1-p)$,

$$\mathbb{P}((U, V) = (1, 1)) = \mathbb{P}(U = 1)\mathbb{P}(V = 1)$$

si, et seulement si, $p = 0, p = 1$ ou $2p(1-p) = 1$, c'est-à-dire $p \in \{0, 1\}$. Ainsi, les variables U et V sont indépendantes si, et seulement si, les variables X et Y sont constantes.

↩ retour à l'EXERCICE 18

Correction de l'EXERCICE 19 Scrutin

- ① 1.a Pour aller de (a, b) à $(a + m, b + n)$, il faut faire en tout m déplacements vers la droite et n vers le haut. Les différents chemins correspondent aux différentes manières d'ordonner ces $m + n$ déplacements. Il y a autant de chemins que de manières de choisir les m déplacements vers la droite parmi les $m + n$ déplacements, c'est-à-dire $\binom{m+n}{m}$.

- 1.b Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des chemins allant de $(1, 0)$ à (p, q) qui rencontrent la droite Δ et $\mathcal{C}'$ l'ensemble des chemins allant de $(0, 1)$ à (p, q) . Un chemin de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}'$ est représenté par une liste de $p + q$ couples de $\mathbb{N}^2$.

- Soit $C \in \mathcal{C}$, qu'on écrit $C = (c_1, \dots, c_N)$ où $c_1 = (1, 0)$, $c_N = (p, q)$ et $N = p + q$. On note $c_i = (x_i, y_i)$. Par définition, il existe des indices $i > 0$ tels que $x_i = y_i$. On note k le plus petit tel indice.
- Au chemin C , on associe le chemin $C' = (c'_1, \dots, c'_N)$, obtenu en transformant la partie de C qui joint les points c_1 à c_k par la symétrie par rapport à Δ et en laissant le reste invariant. On a donc

$$c'_i = (y_i, x_i) \quad \text{si} \quad 0 \leq i \leq k-1 \quad \text{et} \quad c'_i = c_i \quad \text{si} \quad i \geq k.$$

Alors C' appartient à $\mathcal{C}'$.

- Montrons que l'application $f : C \mapsto C'$ est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$. On remarque que c'_k est le premier point où C' rencontre Δ . Soit $C' = (c'_1, \dots, c'_N)$ un chemin quelconque de $\mathcal{C}'$, où $c'_i = (u_i, v_i)$. Le chemin C' rencontre Δ . En effet, $u_1 - v_1 < 0$, $u_N - v_N > 0$ et $u_i - v_i$ varie de ± 1 à chaque étape, donc il existe i tel que $u_i = v_i$. On appelle k le plus petit tel entier i . Si l'on considère le chemin C obtenu en faisant la symétrie par rapport à Δ de la partie du chemin entre c'_1 et c'_k et en laissant le reste invariant, on démontre comme précédemment que C est dans $\mathcal{C}$. Il est clair que C est l'unique antécédent de C' par f .

- 1.c Un chemin qui va de $(0, 0)$ à (p, q) en ne rencontrant Δ qu'en $(0, 0)$ passe nécessairement par $(1, 0)$, c'est-à-dire commence par un déplacement vers la droite (car on a montré qu'un chemin de $(0, 1)$ à (p, q) rencontre Δ). Il y a en tout $\binom{p+q-1}{p-1}$ chemins de $(1, 0)$ à (p, q) . Il faut enlever ceux qui rencontrent Δ . Le nombre de chemins de $(1, 0)$ à (p, q) qui rencontrent Δ est égal, d'après la question précédente au nombre de chemins de $(0, 1)$ à (p, q) , soit $\binom{p+q-1}{p}$. Le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (p, q) qui ne rencontrent Δ qu'en $(0, 0)$ est donc

$$\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}.$$

- ②
- Après le dépouillement de i bulletins (avec $0 \leq i \leq p + q$), on note x_i le nombre de voix pour P et y_i le nombre de voix pour Q et l'on pose $c_i = (x_i, y_i)$. Le résultat d'un dépouillement est donc un chemin de $(0, 0)$ à (p, q) . Il y a $\binom{p+q}{p}$ dépouillements possibles que l'on suppose équiprobables.
 - Les dépouillements pour lesquels P reste toujours en tête correspondent aux chemins qui restent en-dessous de Δ , c'est-à-dire aux chemins qui ne rencontrent qu'en $(0, 0)$. Il y en a $\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}$.
 - La probabilité que P reste toujours en tête est donc

$$\frac{\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}}{\binom{p+q}{p}} = \frac{p}{p+q} - \frac{q}{p+q} = \frac{p-q}{p+q}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 19

Correction de l'EXERCICE 20

Considérons l'événement A : un trésor est placé dans l'un des coffres. Par hypothèse

$$\mathbb{P}(A) = p$$

Considérons l'événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d'indice i . Par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_j)$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}(A_i) = p/N$$

La question posée consiste à déterminer

$$\mathbb{P}(A_N \mid \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1})$$

On a

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) = 1 - \frac{N-1}{N}p$$

et

$$\mathbb{P}(A_N \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = \mathbb{P}(A_N) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_N \mid \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{N-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

On a $p_1 = 1$ et $p_2 = p$. Supposons connu p_n . Selon que A_n émet la même information que A_1 ou non, on a par la formule des probabilités totales

$$p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$$

La suite (p_n) vérifie donc la relation de récurrence

$$p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1-p$$

Sachant la condition initiale $p_1 = 1$, cette suite arithmético-géométrique a pour terme général

$$p_n = \frac{1 + (2p-1)^{n-1}}{2}$$

Si $p \in]0; 1[$ alors $|2p-1| < 1$ et donc $p_n \rightarrow 1/2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22 Petit rappel de convexité

Comme les événements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i^c\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i^c) = \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)).$$

Comme $\exp$ est convexe, sa courbe est au dessus de sa tangente en 0, donc, pour tout $x \in [0, 1]$

$$1 - x \leq e^{-x}$$

En l'appliquant à chaque $\mathbb{P}(A_i)$, on obtient

$$\prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)) \leq \prod_{i=1}^n e^{-\mathbb{P}(A_i)},$$

ce qui donne le résultat par propriété de $\exp$.

Correction de l'EXERCICE 23

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

- On fait l'hypothèse que les $\binom{N}{n}$ tirages sont équiprobables. Les valeurs prises par le n -uplet de variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont les n -uplets d'entiers $(y_1, \dots, y_n)$ tels que $1 \leq y_1 < \dots < y_n \leq N$. L'ensemble de ces n -uplets est noté E . On a donc

$$\forall (y_1, \dots, y_n) \in E \quad \mathbb{P}((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)) = \frac{1}{\binom{N}{n}},$$

car c'est la probabilité que les boules tirées portent les numéros $y_1, \dots, y_n$. Ainsi $(Y_1, \dots, Y_n)$ suit la loi uniforme sur E .

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminons la loi de Y_k . L'ensemble des valeurs prises par Y_k est $\llbracket k, N - n + k \rrbracket$, car :

- ▷ la plus petite valeur de Y_k est obtenue pour $(Y_1, \dots, Y_k) = (1, \dots, k)$;
- ▷ la plus grande de Y_k est obtenue pour $(Y_k, \dots, Y_n) = (N - n + k, \dots, N)$.

Pour $y_k \in \llbracket k, N - n + k \rrbracket$ fixé, les valeurs $(y_1, \dots, y_n)$ prises par $(Y_1, \dots, Y_n)$ doivent vérifier

$$1 \leq y_1 < \dots < y_{k-1} < y_k < y_{k+1} < \dots < y_n \leq N$$

On a $\binom{y_k-1}{k-1}$ choix possibles pour $(y_1, \dots, y_{k-1})$ et $\binom{N-y_k}{n-k}$ pour $(y_{k+1}, \dots, y_n)$, donc en tout $\binom{y_k-1}{k-1} \binom{N-y_k}{n-k}$ choix possibles pour $(y_1, \dots, y_n)$. Comme le n -uplet $(Y_1, \dots, Y_n)$ suit la loi uniforme sur E , on en déduit

$$\mathbb{P}(Y_k = y_k) = \frac{\binom{y_k-1}{k-1} \binom{N-y_k}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24 Loi de Hardy-Weinberg

Pour calculer la probabilité de l'événement B «un individu de la deuxième génération est de génotype $AA^\sim$, utilisons la formule des probabilités totales avec les événements suivants :

- A_1 «les deux parents ont un génotype AA »,
- A_2 «le père est AA et la mère est Aa »,
- A_3 «le père est Aa et la mère est AA »,
- A_4 «les deux parents sont Aa »,
- A_5 «l'un des parents est aa ».

$$\begin{aligned}
 P = \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}(B \mid A_k) \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \mathbb{P}(A_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(A_4) + 0\mathbb{P}(A_5) \\
 &= \left(p + \frac{q}{2}\right)^2
 \end{aligned}$$

On calcule de même

$$Q = 2\left(p + \frac{q}{2}\right)\left(r + \frac{q}{2}\right), \quad R = \left(r + \frac{q}{2}\right)^2$$

Par conséquent, $Q^2 = 4RS$.

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25 Urne de Polya

Notons B_n l'événement «la $n^{\text{ième}}$ boule tirée est blanche» et $p_n = \mathbb{P}(B_n)$. Montrons par récurrence que $p_n = \frac{b}{a+b}$.

▷ On a immédiatement $p_1 = \frac{b}{a+b}$.

▷ Calculons p_2 avec la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 p_2 = \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2 \mid \overline{B_1}) \mathbb{P}(\overline{B_1}) \\
 &= \frac{b+c}{a+b+c} p_1 + \frac{b}{a+b+c} (1-p_1) = \frac{b}{a+b}.
 \end{aligned}$$

▷ Soit $n \geq 2$ tel que $p_k = \frac{b}{a+b}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Considérons les événements A_k «exactement k boules blanches ont été tirées dans les $n-1$ premiers tirages» et

exprimons p_n avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
 p_n = \mathbb{P}(B_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_n \mid A_k) \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+(n-1)c} \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \frac{1}{a+b+(n-1)c} \sum_{k=0}^{n-1} (b+kc) \mathbb{P}(A_k).
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $p_n = \frac{b}{a+b}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (b+kc) \mathbb{P}(A_k) = \frac{b(a+b+(n-1)c)}{a+b}$$

Exploitions cette relation en calculant p_{n+1} avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} = \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n+1} \mid B_n \cap A_k) \mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_{n+1} \mid \overline{B_n} \cap A_k) \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+(k+1)c}{a+b+nc} \mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc} \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c}{a+b+nc} \mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc} (\mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \mathbb{P}(\overline{B_n} \cap A_k)) \\
 &= \frac{c}{a+b+nc} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_n \cap A_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+nc} \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \frac{c}{a+b+nc} \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{a+b+nc} \sum_{k=0}^{n-1} (b+kc) \mathbb{P}(A_k) \\
 &= \frac{c}{a+b+nc} \frac{b}{a+b} + \frac{1}{a+b+nc} \frac{b(a+b+(n-1)c)}{a+b} = \frac{b}{a+b}.
 \end{aligned}$$

En conclusion, la probabilité de tirer une boule blanche ne dépend pas du numéro du tirage effectué.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)