

Fractions rationnelles

Au début de l'année, nous avons abordé de manière informelle les fractions rationnelles dans les techniques « Décomposition en éléments simples ». Toutefois, à ce moment-là, nous n'avions pas encore défini la notion de polynôme formel, et nos résultats étaient simplement admis. Désormais, nous disposons des bases nécessaires pour les établir rigoureusement.

1 CONSTRUCTION DES FRACTIONS RATIONNELLES

Notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.

On définit sur $\mathcal{Q}$ une relation binaire $\sim$ par

$$\text{Pour tous } (A, B), (C, D) \in \mathcal{Q}, \quad (A, B) \sim (C, D) \iff AD = BC.$$

Il se trouve alors que cette relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

- **Réflexivité** Pour tout $(A, B) \in \mathcal{Q}$, $AB = AB$ donc: $(A, B) \sim (A, B)$.
- **Transitivité** Soient $(A, B), (C, D), (E, F) \in \mathcal{Q}$, tels que $(A, B) \sim (C, D)$ et $(C, D) \sim (E, F)$.
On a $AD = BC$ et $CF = DE$ donc $ADF = BCF = BDE$.
Or $\mathbb{K}[X]$ est intègre et $D \neq 0$, donc $AF = BE$, donc $(A, B) \sim (E, F)$.
- **Symétrie** Pour tous $(A, B), (C, D) \in \mathcal{Q}$, si $(A, B) \sim (C, D)$, alors $AD = BC$, donc $CB = DA$, et donc $(C, D) \sim (A, B)$.

Nous allons noter l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble quotient de $\mathcal{Q}$ par $\sim$ et, pour tout $(A, B) \in \mathcal{Q}$, on note $\frac{A}{B}$ la classe d'équivalence de (A, B) associée.

Fraction = classe d'équivalence ?

La notation « fraction » n'est donc qu'une notation pour désigner une classe d'équivalence !

En pratique, on peut oublier ce genre de concept, puisque les calculs fonctionnent exactement comme auparavant. Vous pouvez donc oublier cela et continuer avec vos intuitions habituelles.

On a donc construit dans la preuve ci-dessous un ensemble $\mathbb{K}(X)$, qui peut être défini comme suit.

Définition 1 : Ensemble $\mathbb{K}(X)$

- ① Pour tous $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$, on peut associer un unique élément de $\mathbb{K}(X)$ noté $\frac{A}{B}$.
- ② Tout élément de $\mathbb{K}(X)$ peut être écrit sous la forme $\frac{A}{B}$ pour certains $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec : $B \neq 0$.
- ③ Pour tous $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]$, si : $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$.

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés les fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}(X)$, les fractions $\frac{1}{X+1}$ et $\frac{X}{X(X+1)}$ sont égales, c'est à dire représentent la même classe d'équivalence, puisque $1 \times X(X+1) = X \times (X+1)$.

On peut alors munir $\mathbb{K}(X)$ des opérations hérités de la structure de $\mathbb{K}[X]$. Soient $(A, B), (C, D) \in \mathbb{K}[X]^2$, si $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors, on pose

- $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}$. Vérifions la bonne définition de cette opération dans $\mathbb{K}(X)$. En effet, pourquoi deux représentants différents de chaque classes, donnerait la même classe ? Regardons.

Soient $(A_1, B_1), (C_1, D_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B \neq 0, D \neq 0$, et $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{C}{D} = \frac{C_1}{D_1}$.

On a donc $\frac{A_1}{B_1} + \frac{C_1}{D_1} = \frac{A_1 D_1 + B_1 C_1}{B_1 D_1}$, et

$$(AD + BC) \times B_1 D_1 = AB_1 \times DD_1 + BB_1 \times CD_1 = BA_1 \times DD_1 + BB_1 \times DC_1 = BD \times (A_1 D_1 + B_1 C_1)$$

donc $\frac{AD + BC}{BD} = \frac{A_1 D_1 + B_1 C_1}{B_1 D_1}$ et l'addition est bien définie.

- $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$. Vérifions la bonne définition de cette opération dans $\mathbb{K}(X)$.

Soient $(A_1, B_1), (C_1, D_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B \neq 0, D \neq 0$, et $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$ et $\frac{C}{D} = \frac{C_1}{D_1}$.

On a donc $\frac{A_1}{B_1} \times \frac{C_1}{D_1} = \frac{A_1 C_1}{B_1 D_1}$, et

$$AC \times B_1 D_1 = AB_1 \times CD_1 = BA_1 \times DC_1 = BD \times A_1 C_1$$

donc $\frac{AC}{BD} = \frac{A_1 C_1}{B_1 D_1}$ et la multiplication est bien définie.

On peut alors montrer

- $\frac{0}{1}$ est un neutre pour +
- $\frac{1}{1}$ est un neutre pour $\times$
- l'associativité de +
- l'associativité de $\times$
- la commutativité de +
- la commutativité de $\times$
- $\frac{-A}{B}$ est l'inverse de $\frac{A}{B}$ pour +
- $\frac{B}{A}$ est l'inverse de $\frac{A}{B}$, si $A \neq 0$,
- la commutativité de $\times$
- $\times$ est distributive sur +

Alors $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

Tout polynôme est une fraction rationnelle

On peut identifier tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$.

On peut alors vérifier que les opérations + et $\times$ sont compatibles et que cette identification fait de $\mathbb{K}[X]$ un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}(X)$

Tout élément $\lambda \in \mathbb{K}$ peut être identifié à un polynôme $\lambda \times 1$ et donc à une fraction rationnelle $\frac{\lambda}{1}$.

De cette manière, on obtient une multiplication de toute fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ par un scalaire $\lambda = \frac{\lambda}{1}$.

Cette identification fait de $\mathbb{K}(X)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 2 : Fraction irréductible

On appelle **représentant irréductible** d'une fraction rationnelle F tout représentant (P, Q) de F où $P \wedge Q = 1$. Si en plus, Q soit un polynôme unitaire, alors (P, Q) est dit **représentant irréductible unitaire**.

Exemple 2

La fraction $\frac{(X^2 + 1)(X + 1)^2}{X(X + 1)}$ n'est pas irréductible, mais la fraction $\frac{(X^2 + 1)(X + 1)}{X}$ l'est.

Définition 3 : Dérivée d'une fraction rationnelle

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ dépend de R sans dépendre du choix de (A, B) . On l'appelle la dérivée de R et on la note R' .

Pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$, $(R + S)' = R' + S'$, $(RS)' = R'S + RS'$ et si $S \neq 0$, $\left(\frac{R}{S}\right)' = \frac{R'S - RS'}{S^2}$.

La dérivée d'un polynôme coïncide avec sa dérivée comme fraction rationnelle.

Définition 4 : Degré

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. La quantité $\deg(A) - \deg(B)$ dépend de R sans dépendre du choix de (A, B) .

On l'appelle le **degré** de R et on la note $\deg(R)$. Le degré d'une fraction rationnelle est ainsi soit un entier relatif, soit $-\infty$.

Pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(R + S) \leq \max\{\deg(R), \deg(S)\}$ et $\deg(RS) = \deg(R) + \deg(S)$, et si R est non constant $\deg(R') = \deg(R) - 1$.

Le degré d'un polynôme coïncide avec son degré comme fraction rationnelle.

⚠ ATTENTION Seule la fraction rationnelle 0 est de degré $-\infty$, mais une fraction rationnelle peut être de degré positif sans être un polynôme.

Par exemple, la fraction rationnelle $\frac{X^4 + 1}{X^2 + 1}$ est de degré $4 - 2 = 2$ sans être un polynôme.

Définition 5 : Fonction rationnelle

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible.

La fonction $x \mapsto \frac{A(x)}{B(x)}$ définie sur $\mathbb{K}$ privé des racines de B est appelée la **fonction rationnelle** associée à R et notée $\tilde{R}$ ou encore R .

Définition 6 : Zéro et pôle d'une fraction rationnelle, multiplicité

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible. Toute racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de A est un **zéro** de R .

La multiplicité de λ dans A est alors appelée la multiplicité de λ dans R .

Toute racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de B est un **pôle** de R .

La multiplicité de λ dans B est alors appelée la multiplicité de λ dans R .

Vocabulaire

Un pôle de multiplicité 1 est aussi appelé un **pôle simple**.

Un pôle de multiplicité 2 est aussi appelé un **pôle double**.

Exemple 3

Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminons les zéros et les pôles de

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}.$$

Par définition ce sont les racines de $X^p - 1$ et $X^q - 1$, qui sont respectivement les racines p -ième et q -ième de l'unité. Elles sont simples, car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré du polynôme $X^n - 1$ est égal au nombre de racines n -ième, c'est à dire n .

On doit maintenant vérifier s'il y a des racines communes. Soit ω une telle racine.

On a alors $\omega^p = \omega^q = 1$. Puisque p et q sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$. On a alors

$$\omega = \omega^{pu+qv} = (\omega^p)^u (\omega^q)^v = 1.$$

Donc la seule racine commune est 1.

Les zéros de F sont les racines p -ième de l'unité différentes de 1. Ils sont simples.
Les pôles de F sont les racines q -ième de l'unité différentes de 1. Ils sont simples.

Proposition 1 : Partie entière

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$.

Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $Q \in \mathbb{K}(X)$ tels que $R = E + Q$ et $\deg(Q) < 0$.

Le polynôme E est appelé la **partie entière** de R .

Preuve.

Existence Notons E le quotient de la division euclidienne de A par B et F son reste, et posons $Q = \frac{F}{B}$.

Alors on a $\deg(Q) = \deg(F) - \deg(B) < 0$, et $R = \frac{A}{B} = \frac{EB + F}{B} = E + Q$.

Unicité Soient $R = E + Q$ et $R = \tilde{E} + \tilde{Q}$ deux décompositions de R .

Le polynôme $E - \tilde{E}$ est de degré $\deg(\tilde{Q} - Q) \leq \max\{\deg(\tilde{Q}), \deg(Q)\} < 0$, donc est nul. On obtient $E = \tilde{E}$, et $Q = \tilde{Q}$.

□

2 DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES

Les preuves des deux théorèmes sont hors programme.

Théorème 1 : Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ de partie entière E et de pôles distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$. Il existe une et une seule famille $(a_{ik})_{\substack{1 \leq k \leq m_i \\ 1 \leq i \leq r}}$ de nombres complexes telle que

$$R = E + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire associée} \\ \text{au pôle } \lambda_i}}.$$

Cette décomposition de R est appelée sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

⚠ ATTENTION On n'oublie pas la partie entière !

Théorème 2 : Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible de partie entière E . Soit $B = \beta \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s (X^2 + \mu_j X + \nu_j)^{n_j}$, la factorisation en polynômes irréductibles de B . Il existe des familles uniques $(a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq k \leq m_i}}$, $(b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ et $(c_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq s \\ 1 \leq k \leq n_j}}$ de réels telles que

$$R = E + \underbrace{\sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_{ik}}{(X - \lambda_i)^k}}_{\substack{\text{Partie polaire} \\ \text{associée au pôle } \lambda_i}} + \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^{n_j} \frac{b_{jk}X + c_{jk}}{(X^2 + \mu_j X + \nu_j)^k}.$$

Cette décomposition de R est appelée sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

Vocabulaire La **partie polaire associée à un pôle** λ d'une fraction rationnelle F est la fraction rationnelle $\sum_{k=1}^{m_i} \frac{a_k}{(X-\lambda)^k}$, dans la décomposition en éléments simples de F .

Corollaire 2.1 : Partie polaire associée à un pôle simple

Soient $\frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$ irréductible, où $A, B \in \mathbb{C}[X]$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si λ est un pôle **simple** de R de partie polaire associée $\frac{a}{X-\lambda}$ avec $a \in \mathbb{C}$, alors $a = \frac{\tilde{A}(\lambda)}{\tilde{B}'(\lambda)}$.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un pôle de $\frac{A}{B}$. Donc λ est racine de B , d'où l'existence de $Q \in \mathbb{C}[X]$, tel que $B = Q(X-\lambda)$.

D'après le Théorème 1 de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ s'écrit $\frac{A}{B} = F + \frac{a}{X-\lambda}$, avec $a \in \mathbb{C}$ et $F \in \mathbb{C}(X)$.

Or, si λ est pôle simple, alors F n'admet pas λ comme pôle. On utilise alors la technique habituelle pour trouver les coefficients des pôles simples.

En multipliant par $(X-\lambda)$ et en évaluant en λ on a $\frac{\tilde{A}(\lambda)}{\tilde{Q}(\lambda)} = a$.

On conclut en calculant la dérivée de B , $B' = Q'(X-\lambda) + Q$, d'où $B'(\lambda) = Q(\lambda)$. $\square$

Exemple 4

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé à racine simple $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si $P(0) \neq 0$, montrons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)} = -\frac{1}{P(0)}$.

Etudions la fraction rationnelle $F = \frac{1}{P}$. D'après le Théorème 1 de décomposition en éléments simples, on a

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - \lambda_k}, \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{C}.$$

Il n'y a pas de partie entière car $\deg(1) = 0 < \deg P = n$.

D'après le corollaire, $a_k = \frac{1}{P'(\lambda_k)}$, d'où

$$F(0) = \frac{1}{P(0)} = \sum_{k=1}^n -\frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)},$$

d'où le résultat.

Exemple 5

Montrons que, si $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé à racine simple $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $\sum_{k=1}^n \frac{P''(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} = 0$.

Etudions de la fraction rationnelle $F = \frac{P''}{P}$. D'après le Théorème 1 de décomposition en éléments simples, on a

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X - \lambda_k}, \quad \text{avec } a_k \in \mathbb{C}.$$

Il n'y a pas de partie entière car $\deg(P'') = n-2 < \deg P = n$.

D'après le corollaire, $a_k = \frac{P''(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)}$, d'où

$$F = \sum_{k=1}^n \frac{P''(\lambda_k)}{(X - \lambda_k) P'(\lambda_k)}.$$

Si on multiplie par X et on évalue en $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x F(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x P''(\lambda_k)}{(x - \lambda_k) P'(\lambda_k)}.$$

On fait alors tendre x vers $+\infty$ et on obtient le résultat car $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, pour des raisons de degré.

Exemple 6

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}$.

Les pôles de $\frac{1}{X^n - 1}$ sont les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité et sont tous simples.

D'après le Théorème 1 de décomposition en éléments simples,

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{2k\pi i/n}}, \quad \text{pour } a_k \in \mathbb{C}.$$

Il n'y a pas de partie entière.

En utilisant le corollaire, on a $a_k = \frac{1}{n (e^{2k\pi i/n})^{n-1}} = \frac{1}{n e^{2k(n-1)\pi i/n}} = \frac{e^{2k\pi i/n}}{n}$.

Donc $\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{2k\pi i/n}}{X - e^{2k\pi i/n}}$, et en posant $\omega = e^{2k\pi i/n}$, on obtient le résultat.

A ne pas oublier

La décomposition en éléments simples est pratique pour

- Primitiver,
- Dériver,
- Calculer parfois. On peut penser à la technique de calcul de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exemple 7

Décomposons en élément simple $\frac{X^5}{X^4 - 1}$.

- **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$.** La partie entière est nulle, donc pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tels que

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = \frac{X^5}{(X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)} = X + \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{\bar{c}}{X + i},$$

Les pôles 1, -1 et i sont simples, donc on peut utiliser le corollaire. On a alors

$$a = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'}(1) = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'(-1)} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c = \frac{X^5}{(X^4 - 1)'(i)} = -\frac{1}{4}.$$

- **Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$.** On regroupe les parties polaires qui correspondent aux racines complexes conjuguées

$$\frac{X^5}{X^4 - 1} = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} - \frac{1}{X - i} - \frac{1}{X + i} \right) = X + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X + 1} - \frac{2X}{X^2 + 1} \right)$$

- **Permet de primitiver**

$$\int \frac{x^5}{x^4 - 1} dx = \int x dx + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4} (\ln |x - 1| + \ln |x + 1| - \ln |x^2 + 1|)$$

- **Permet de dériver** Soit $f(x) = \frac{x^5}{x^4 - 1} \, dx$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$. On a directement

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1-4x^2}{(x^2+1)^2} \right) .$$