

TD

Le corps des réels

EXERCICE 1 ■ □ □

Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

- ① Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$, alors $a = 0$.
- ② Montrer que si $(\forall x \in \mathbb{R}, b < x \implies a < x)$ alors $a \leq b$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

On considère l'ensemble $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}$.

Montrer que A est la réunion de deux intervalles.

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Soit A un ensemble non vide borné de $\mathbb{R}$. On pose $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. Montrer que l'ensemble λA est borné et calculer sa borne supérieure et sa borne inférieure.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □ Existence de la racine de 2

Soit $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 \leq 2\}$.

- ① Montrer que X possède une borne supérieure, notée a , et que $a \in [0, 2]$.

On pose $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2 \geq 2\}$ et g l'application définie par

$$\forall x \in [0, 2] \quad g(x) = x + \frac{2 - x^2}{4}$$

- ① 1.a Montrer que si $x \in X$ vérifie $x^2 < 2$, alors $g(x) \in X$ et $g(x) > x$.

- 1.b Montrer que si $x \in Y$ vérifie $x^2 > 2$, alors $g(x) \in Y$ et $g(x) < x$.

- ② Montrer que $a^2 = 2$.

- ③ Montrer que a est irrationnel.

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □ Majorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $A + B$ par

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que l'ensemble $A + B$ est majoré et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □ Minorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$

Soit A et B deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$. On définit l'ensemble $A + B$ par

$$A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Montrer que l'ensemble $A + B$ est minoré et que $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □ Une application dans $\mathbb{R}$

Soit X un ensemble. Pour $f \in \mathbb{R}^X$, on pose (lorsque cela existe)

$$\sup f = \sup f(X) = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$$

Pour $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^X$ telles que $\sup f$ et $\sup g$ existent,

- ① Montrer que

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

- ② Justifier que l'on n'a pas $\sup(f + g) = \sup f + \sup g$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □ Comme en colle

Soit deux complexes a, b , et r un réel strictement positif. Calculer $\sup\{|az + b| \mid |z| \leq r\}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ □ □ Comme en colle

Calculer $\inf \left\{ (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n \right\}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■■■ Nombres diadiques _____

On appelle *nombre diadique* tout rationnel de la forme $\frac{m}{2^n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que l'ensemble des nombres diadiques est dense dans $\mathbb{R}$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 11 ■□□ Comme en colle _____

Soit A un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\sup(A) > 0$ si et seulement si A possède un élément strictement positif.

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■■■ _____

On rappelle que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x \in I$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset I$. Plus généralement, une partie A de $\mathbb{R}$ est ouverte si et seulement si

$$\forall x \in A, \exists r > 0,]x - r, x + r[\subset A.$$

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de parties ouvertes non vides A et B de $\mathbb{R}$ tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$.

On va raisonner par l'absurde. Supposons que de tels ensemble A et B existent pour aboutir à une contradiction. Soient $a \in A$ et $b \in B$. On définit l'ensemble

$$S = \{t \in [0, 1] \mid a + t(b - a) \in A\}.$$

- ① Montrer que S admet une borne supérieure, que l'on appellera T .
On ne demande pas de trouver T .
- ② En utilisant le fait que A est ouvert, montrer que $a + T(b - a) \notin A$.
- ③ En utilisant le fait que I est un intervalle, déduire que $a + T(b - a) \in B$.
- ④ En utilisant le fait que B est ouvert, trouver une contradiction avec le fait que T soit la borne supérieure de S .

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■■ ■ Comme en colle _____

Calculez

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi[} \left\{ \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| \right\}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■■ ■ Quelques résultats sur la partie entière _____

- ① Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{m+n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m-n+1}{2} \right\rfloor = m$.
On pourra distinguer les cas $m+n$ pair et $m+n$ impair.

- ② Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor 2\sqrt{n(n+1)} \right\rfloor = 2n$.

- ③ En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}, \left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

► Indication ► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

Par l'absurde.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

Résoudre les deux inéquations dans A puis conclure.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

On utilise les définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 **Existence de la racine de 2** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 **Majorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$** _____

On utilise les définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 **Minorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 **Une application dans $\mathbb{R}$** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 **Comme en colle** _____

La borne supérieure doit dépendre de a , b et r . Somme dans un module que l'on veut majorer → Inégalité triangulaire !

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 **Comme en colle** _____

Ecrire la somme double et décomposer sur la diagonale/2 triangles stricts est une option car la somme obtenue est presque symétrique.

Le minorant doit être obtenu quand tous les x_i sont égaux (on peut faire quelques tests avec 2 ou 3 termes pour s'en rendre compte).

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 **Nombres diadiques** _____

La preuve est très similaire à la preuve de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 **Comme en colle** _____

Un sens de l'équivalence est immédiat.

L'autre sens peut être fait par contraposée ou par l'absurde, en utilisant encore la définition de la borne supérieure.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

Exercice type DS, difficile. Il faut bien noter toutes les hypothèses et utiliser les définitions.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 Comme en colle

Distinguer selon que $\frac{\alpha}{\pi}$ est rationnel ou irrationnel .

- Si $\frac{\alpha}{\pi}$ est irrationnel, l'ensemble $\{n\alpha[2\pi] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$.
- Si $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$, l'ensemble $\{n\alpha[2\pi] \mid n \in \mathbb{N}\}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
Écrire alors explicitement ces valeurs et chercher le maximum de $|\sin|$ parmi elles.
Le problème revient donc à déterminer, pour chaque entier $q \geq 2$, le maximum de $\left|\sin\left(\frac{m\pi}{q}\right)\right|$, puis à voir pour quelle valeur de q ce maximum est le plus petit possible.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 Quelques résultats sur la partie entière

Reprenez la définition de la partie entière dans chaque calcul. On veut juste encadrer le nombre dans la partie entière par 2 entiers consécutifs.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

- ① Supposons que $a \neq 0$. Mais on sait que, pour $\varepsilon = |a|/2 > 0$, $|a| < |a|/2$, donc $|a|/2 < 0$, ce qui est absurde.
- ② Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}, b < x \implies a < x$. Par l'absurde si $a > b$, alors $a < a$, ce qui est absurde. Donc $a \leq b$.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

On a pour tout $x > 0$, $-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2$

$$\iff -2x < x^2 + \frac{1}{2} \leq 2x$$

$$\iff 0 < x^2 + \frac{1}{2} + 2x \quad \text{et} \quad x^2 + \frac{1}{2} - 2x \leq 0$$

$$\iff 0 < \left(x - \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(x - \frac{\sqrt{2}+2}{2}\right) \left(x + \frac{\sqrt{2}-2}{2}\right) \leq 0$$

$$\iff x \in \left] -\infty, -\frac{\sqrt{2}+2}{2} \right[\cup \left[\frac{\sqrt{2}-2}{2}, +\infty \right[\quad \text{et} \quad x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right]$$

$$\iff x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+2}{2} \right].$$

De même, pour tout $x < 0$, $-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \iff x \in \left[\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{2} \right]$.

Donc A est bien la réunion des deux intervalles cités ci dessus.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Posons $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$.

Cas 1 : $\lambda > 0$. Pour tout $a \in A$, on a $\lambda\alpha \leq \lambda a \leq \lambda\beta$. Ainsi λA est borné.

Montrons le pour le sup. D'abord $\lambda\beta$ majore λA .

Si $y < \lambda\beta$, alors $y/\lambda < \beta$, donc y/λ n'est pas un majorant de A , par définition de la borne supérieure. Il existe $a \in A$ avec $a > y/\lambda$, donc $\lambda a > y$. Cela montre que $\lambda\beta$ est le plus petit des majorants.

En conclusion, $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A = \lambda\alpha$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A = \lambda\beta$.

Cas 2 : $\lambda < 0$. En multipliant $\alpha \leq a \leq \beta$ par $\lambda < 0$, le sens des inégalités s'inverse

$$\lambda\beta \leq \lambda a \leq \lambda\alpha.$$

Donc λA est borné et $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A = \lambda\beta$, $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A = \lambda\alpha$.
La preuve est similaire.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4 Existence de la racine de 2

- ① L'ensemble X est une partie de $\mathbb{R}$:
 - non vide, car elle contient 1,
 - majorée, par exemple par 2, car, pour $x > 2$, on a $x^2 > 4$, donc $x \notin X$.
 Donc X admet une borne supérieure. Puisque 2 majore X , on a par définition de la borne supérieure $a \leq 2$.
- ① On observe d'abord que la fonction g est strictement croissante, à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
 - 1.a Soit $x \in X$ tel que $x^2 < 2$.
 - Il est clair qu'alors $g(x) > x$.
 - Ensuite, $g(g(x)) > g(x)$ par stricte croissance de la fonction g donc $\frac{2-g(x)^2}{2} > 0$ puis $g(x)^2 < 2$.
 - 1.b On raisonne de même lorsque $x \in Y$ vérifie $x^2 > 2$, les calculs étant similaires.
- ② Nous avons vu que $a \in [0, 2]$.
Par ailleurs, tout $y \in Y$ est un majorant de X . En effet, si $z > y$, alors $z^2 > y^2 \geq 2$, car les termes sont positifs, ce qui montre que $z \notin X$. - Supposons $a^2 < 2$. Dans ces conditions, $a \in X$ et d'après la question 2(a), on a $g(a) \in X$ et $a < g(a)$. Cela contredit le fait que a soit un majorant de X . - Supposons $a^2 > 2$. Dans ces conditions, $a \in Y$ et d'après la question 2(b), on a $g(a) \in Y$ et $g(a) < a$. Comme $g(a)$ est élément de Y , c'est un majorant de X , contredisant le fait que a soit le plus petit majorant de X . Puisque $a^2 < 2$ et $a^2 > 2$ ne peuvent pas être réalisées, on en déduit $a^2 = 2$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5 Majorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$

Comme la partie A (respectivement B) est non vide et majorée, elle possède une borne

supérieure que nous notons α (respectivement β). De plus, A et B sont non vides, il en est de même pour $A + B$.

Étant donné $z \in A + B$, on peut trouver $x \in A$ et $y \in B$ tels que $z = x + y$, ce qui assure que $z \leq \alpha + \beta$. La partie $A + B$ est donc majorée par $\alpha + \beta$. La partie $A + B$, étant non vide et majorée par $\alpha + \beta$, possède donc une borne supérieure telle que $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.

Pour montrer que $\alpha + \beta$ est la borne supérieure de $A + B$, il reste à montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in A + B \quad \alpha + \beta - \varepsilon < z.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure,

$$\exists x \in A, \quad \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x \quad \text{et} \quad \exists y \in B, \quad \beta - \frac{\varepsilon}{2} < y.$$

Comme $z = x + y$, on a $\alpha + \beta - \varepsilon < z$, ce qui prouve le résultat.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6 Minorant d'une somme de parties de $\mathbb{R}$

Refaire la démonstration de l'exercice précédent. C'est un bon exercice.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7 Une application dans $\mathbb{R}$

On a

$$\sup f \text{ est définie} \iff f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \text{ est non vide et majorée} \iff X \text{ est non vide et } f \text{ est majorée.}$$

- ① Pour $x \in X$, on a, par définition du sup, $f(x) \leq \sup f$ et $g(x) \leq \sup g$. Cela donne directement $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$, c'est à dire que $\sup f + \sup g$ est un majorant de $(f + g)(X)$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a donc

$$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g.$$

- ② Soient f et g définies sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = -x$. Alors

$$\underbrace{\sup(f + g)}_{=0} \neq \underbrace{\sup f}_{=1} + \underbrace{\sup g}_{=0},$$

ce qui contredit l'égalité.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8 Comme en colle

L'inégalité triangulaire nous donne directement que $|a|r + |b|$ est un majorant de l'ensemble. Si $a = 0$, l'ensemble est réduit à $\{b\}$ et la borne supérieure est $|b|$.

Si $a \neq 0$, l'ensemble est le disque de rayon $|a|r$ et de centre b . Il suffit de trouver alors la point le plus éloigné du centre du repère pour trouver sa norme.

Ce nombre est atteint pour $z = r \frac{\bar{a}b}{|a||b|}$ et le nombre complexe $az + b$ a alors pour norme $|a|r + |b|$, ce qui prouve que ce nombre est la borne supérieure (et même le plus grand élément) de l'ensemble.

Pour trouver le "bon z ", on a utilisé le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9 Comme en colle

$$\text{On veut minorer } S = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i}{x_j}.$$

$$\text{En décomposant en termes diagonaux et hors-diagonale, on a } S = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i}}_{=n} + \sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j}.$$

Pour chaque paire non ordonnée $\{i, j\}$ (avec $i \neq j$), on a

$$\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i x_j} = 2 \cdot \frac{x_i^2 + x_j^2}{2x_i x_j} \geq 2.$$

Or chaque paire correspond à un nombre dans le triangle supérieur de notre double somme, donc il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ paires, et donc

$$\sum_{i \neq j} \frac{x_i}{x_j} \geq 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1).$$

Cela nous donne la majoration $S \geq n + n(n-1) = n^2$. On remarque que si tous les x_i sont égaux, $S = n^2$, donc

$$\inf S = n^2, \quad \text{atteint pour } x_1 = \dots = x_n.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10 Nombres diadiques

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11 Comme en colle

Si $\sup A > 0$, alors tout $(\sup A)/2$ n'est pas un majorant de A et donc il existe $a \in A$ tel que $a > (\sup A)/2 > 0$.

Si $\sup A \leq 0$, alors 0 est un majorant de A et alors, pour tout $a \in A$, $a \leq 0$. Cela montre la contraposée de la réciproque.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13 Comme en colle

1) Cas α/π irrationnel

La suite $(n\alpha \bmod 2\pi)$ est dense dans $[0, 2\pi)$. On approche donc arbitrairement bien $\frac{\pi}{2}$ modulo π , d'où

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| = 1.$$

2) Cas $\alpha = \frac{p\pi}{q}$ rationnel (réduit, $0 < p < q$)

Alors $n\alpha \bmod \pi$ parcourt

$$\left\{ \frac{m\pi}{q} : m = 0, 1, \dots, q-1 \right\},$$

et

$$\sup_n |\sin(n\alpha)| = \max_{0 \leq m \leq q-1} \left| \sin\left(\frac{m\pi}{q}\right) \right|.$$

- Si q est pair, l'ensemble contient $\frac{\pi}{2}$ ($m = \frac{q}{2}$), donc le sup vaut 1. - Si q est impair, les angles les plus proches de $\frac{\pi}{2}$ sont $\frac{(q \pm 1)\pi}{2q} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2q}$, donnant

$$\sup_n |\sin(n\alpha)| = \cos\left(\frac{\pi}{2q}\right).$$

3) Infimum global

Pour q impair ≥ 3 , la quantité $\cos(\pi/(2q))$ croît avec q . Le minimum sur ces q est donc atteint pour $q = 3$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Comme pour tout autre α (irrationnel ou à dénominateur pair) le sup vaut 1, on en déduit

$$I = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Et cet infimum est atteint par $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, car alors $\{|\sin(n\alpha)|\} = \left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

$$\inf_{\alpha \in (0, \pi)} \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\sin(n\alpha)| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14 Quelques résultats sur la partie entière _____[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)